



Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg
Hamburg University of Applied Sciences

Grundlagen der Nachrichtentechnik

Aktive Filter

Autoren:

Tommy JAHNKE
J.Sebastian FRISCH
Nils PARCHE

Professor:

Prof. Dr. SCHOENEN

9. Dezember 2016

Abbildungsverzeichnis

| | | |
|----|--|----|
| 1 | Amplituden- und Phasengang vom Butterworth-Tiefpassfilter | 3 |
| 2 | Amplituden- und Phasengang vom Tschebyscheff-Tiefpassfilter . . . | 3 |
| 3 | Amplituden- und Phasengang vom Bessel-Tiefpassfilter | 4 |
| 4 | Amplituden- und Phasengang vom Butterworth-Hochpassfilter . . . | 7 |
| 5 | Amplituden- und Phasengang vom Tschebyscheff-Hochpassfilter . . | 8 |
| 6 | Amplituden- und Phasengang vom Bessel-Hochpassfilter | 8 |
| 7 | Amplituden- und Phasengang des Bandpassfilter | 10 |
| 8 | Amplituden- und Phasengang der Bandsperre | 12 |
| 9 | Messaufbau zum Messen der Sprungantwort | 15 |
| 10 | Sprungantwort Butterworth-Tiefpass | 15 |
| 11 | Sprungantwort Tschebyscheff-Tiefpass | 16 |
| 12 | Sprungantwort Bessel-Tiefpass | 16 |
| 13 | Amplitudengang Butterworth-Tiefpass mit Marker | 21 |
| 14 | Amplitudengang Butterworth- und Tschebyscheff-Tiefpass mit Mar- ker bei Tschebyscheff | 21 |
| 15 | Amplitudengang Butterworth-, Tschebyscheff- und Bessel-Tiefpass mit Marker bei Bessel | 22 |
| 16 | Amplitudengang Butterworth-Hochpass mit Marker | 22 |
| 17 | Amplitudengang Butterworth- und Tschebyscheff-Hochpass mit Mar- ker bei Tschebyscheff | 23 |
| 18 | Amplitudengang Butterworth-, Tschebyscheff- und Bessel-Hochpass mit Marker bei Bessel | 23 |
| 19 | Amplitudengang Bandsperre mit Marker | 24 |
| 20 | Amplitudengang Bandsperre und Bandpass mit Marker beim Band- pass | 24 |
| 21 | Phasengang Butterworth-Tiefpass mit Markern | 25 |
| 22 | Phasengang Butterworth- und Tschebyscheff-Tiefpass mit Markern bei Tschebyscheff | 25 |
| 23 | Phasengang Butterworth-, Tschebyscheff- und Bessel-Tiefpass mit Markern bei Bessel | 26 |
| 24 | Sprungantwort Butterworth: Messung der Anstiegszeit | 27 |
| 25 | Sprungantwort Butterworth: Messung der Einschwingzeit | 27 |
| 26 | Sprungantwort Butterworth: Messung des Überschwingers | 28 |
| 27 | Sprungantwort Tschebyscheff: Messung der Anstiegszeit | 28 |
| 28 | Sprungantwort Tschebyscheff: Messung der Einschwingzeit | 29 |
| 29 | Sprungantwort Tschebyscheff: Messung des Überschwingers | 29 |
| 30 | Sprungantwort Bessel: Messung der Anstiegszeit | 30 |
| 31 | Sprungantwort Bessel: Messung der Einschwingzeit | 30 |

Tabellenverzeichnis

| | | |
|----|--|----|
| 1 | Tiefpassfilter - Grundverstärkung V_0 , Grenzfrequenz f_g | 2 |
| 2 | Hochpassfilter - Grundverstärkung V_∞ , Grenzfrequenz f_g | 7 |
| 3 | Gemessenen Grenzfrequenzen der verschieden Tiefpässe/Hochpässe | 14 |
| 4 | Frequenzen bei einer Phasenverschiebung von -60° und -120° . . | 14 |
| 5 | Mittenfrequenz und Sperrfrequenz, Bandpass und Bandsperre . . . | 14 |
| 6 | Vergleich der Werte, Tiefpässe und Hochpässe | 17 |
| 7 | Vergleich der Werte, Bandpass und Bandsperre | 17 |
| 8 | Gemessene Frequenzen bei einer Phasenverschiebung von -60° , -120° | 18 |
| 9 | Gegenüberstellung: errechnete und ideale Koeffizienten | 19 |
| 10 | Anstiegszeit, Überschwingen und Einschwingzeit der drei Tiefpässe | 20 |

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Vorbereitung | 1 |
| 1.1 | Grundverstärkung und Grenzfrequenzen der Hoch- und Tiefpässe . | 1 |
| 1.1.1 | Tiefpassfilter | 1 |
| 1.1.2 | Hochpassfilter | 5 |
| 1.1.3 | Bandpass | 9 |
| 1.1.4 | Bandsperre | 11 |
| 2 | Messungen | 13 |
| 2.1 | Verwendete Geräte | 13 |
| 2.2 | Messung von Amplituden- und Phasengang | 14 |
| 2.3 | Sprungantworten der Tiefpässe | 15 |
| 3 | Auswertung | 17 |
| 3.1 | Zu: Messung von Amplituden- und Phasengang | 17 |
| 3.1.1 | Grenzfrequenzen Tiefpässe/Hochpässe | 17 |
| 3.1.2 | Mitten-/Sperrfrequenz, Bandpass und Bandsperre | 17 |
| 3.1.3 | Gemessenen Frequenzen bei einer Phasenverschiebung | 18 |
| 3.2 | Zu: Sprungantworten der Tiefpässe | 20 |
| 4 | Anhang | 21 |
| 4.1 | Amplitudengänge | 21 |
| 4.1.1 | Tiefpässe | 21 |
| 4.1.2 | Hochpässe | 21 |
| 4.1.3 | Bandpass/Bandsperre | 24 |
| 4.2 | Phasengänge Tiefpässe | 25 |
| 4.3 | Sprungantworten der Tiefpässe | 27 |
| 4.3.1 | Butterworth | 27 |
| 4.3.2 | Tschebyscheff | 28 |
| 4.3.3 | Bessel | 30 |

1 Vorbereitung

Es sind an einem Universalfilter verschiedenen Filtertypen 2. Ordnung zu untersuchen. Über die Widerstandsbeschaltung R_a , R_b , R_c , R_d , R_e und R_f können bestimmte Filtercharakteristiken, wie Butterworth, Tschebyscheff und Bessel nachgebildet werden. Mit der Tabelle in der Aufgabenstellung sollen bei den Hochpass- und Tiefpassfilter der drei genannten Filtercharakteristiken die Grenzfrequenz f_g und die Grundverstärkung V_0 bestimmt werden. Bei dem Bandpass ist die Mittelfrequenz f_M und die Bandbreite B zu berechnen. Die Bandsperre wird auf ihre Sperrfrequenz untersucht.

1.1 Grundverstärkung und Grenzfrequenzen der Hoch- und Tiefpässe

1.1.1 Tiefpassfilter

In der Versuchsbeschreibung Kapitel 7: Gleichungen zum Universal-Filter wird die Übertragungsfunktion H_{TP} angegeben mit.

$$H_{TP}(j\omega) = \frac{U_{TP}}{U_e} = \frac{R_b \cdot R_f}{R_a \cdot R_c} \cdot \frac{1}{1 + \frac{R_b \cdot R_f}{R_c \cdot R_e} \cdot (j\omega\tau) + \frac{R_f}{R_d} \cdot (j\omega\tau)^2} \quad \text{mit } \tau = R \cdot C \quad (1)$$

Durch die Wahl von $R_b = R_c = R_f = R_0$ vereinfacht sich die Gleichung zu:

$$H_{TP}(j\omega) = \frac{R_0}{R_a} \cdot \frac{1}{1 + \frac{R_0}{R_e} \cdot (j\omega\tau) + \frac{R_0}{R_d} \cdot (j\omega\tau)^2} \quad (2)$$

Aus der Allgemeinen Gleichung eines Tiefpassfilter 2. Ordnung können so die Parameter a_1 , b_1 und V_0 zugewiesen werden. V_0 ist die maximale Verstärkung bei $\omega = 0$.

$$\frac{V_0}{1 + a_1 \cdot j\omega + b_1 \cdot (j\omega)^2} = \frac{R_0}{R_a} \cdot \frac{1}{1 + \frac{R_0}{R_e} \cdot (j\omega\tau) + \frac{R_0}{R_d} \cdot (j\omega\tau)^2} \quad (3)$$

$$V_0 = \frac{R_0}{R_a} \quad (4)$$

$$a_1 = \frac{R_0}{R_e} \cdot \tau \quad (5)$$

$$b_1 = \frac{R_0}{R_d} \cdot \tau^2 \quad (6)$$

Allgemeine Formel zur Bestimmung der Grenzfrequenzen

Der Amplitudengang lautet:

$$|H_{TP(j\omega)}| = \frac{|V_0|}{\sqrt{(1 - b_1 \cdot \omega^2)^2 + a_1^2 \cdot \omega^2}} \quad (7)$$

Mit der Definition $H_{TP(j\omega_g)} = |H_{TP(j\omega)}|_{max} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $V_0 = 1$ (Tabelle 1) kann über einen Koeffizientenvergleich die Grenzfrequenz bestimmt werden.

$$2 = (1 - b_1 \cdot \omega^2)^2 + a_1^2 \cdot \omega^2 \quad (8)$$

$$0 = b_1^2 \cdot \omega^4 - (2 \cdot b_1 - a_1^2) \cdot \omega^2 - 1 \quad \text{substituiert } \omega^2 = x \quad (9)$$

$$0 = x^2 - \frac{2 \cdot b_1 - a_1^2}{b_1^2} \cdot x - \frac{1}{b_1^2} \quad (10)$$

Bestimmen der Möglichen Frequenzen:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{2} - q} \quad (11)$$

$$w_{g1} = +\sqrt{x1} \quad (12)$$

$$w_{g2} = -\sqrt{x1} \quad (13)$$

$$w_{g3} = +\sqrt{x2} \quad (14)$$

$$w_{g4} = -\sqrt{x2} \quad (15)$$

| $TP_{Filtercharakteristik}$ | Grundverstärkung V_0 | Grenzfrequenz f_g |
|-----------------------------|------------------------|---------------------|
| Butterworth | 1 | 1,5726 kHz |
| Tschebyscheff | 1 | 1,5777 kHz |
| Bessel | 1 | 1,585 kHz |

Tabelle 1: Tiefpassfilter - Grundverstärkung V_0 , Grenzfrequenz f_g

Bodeplot der TP-Filter Butterworth, Tschebyscheff und Bessel.

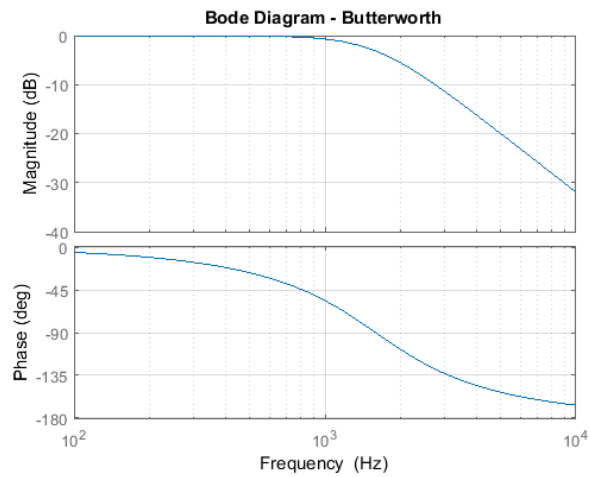


Abbildung 1: Amplituden- und Phasengang vom Butterworth-Tiefpassfilter

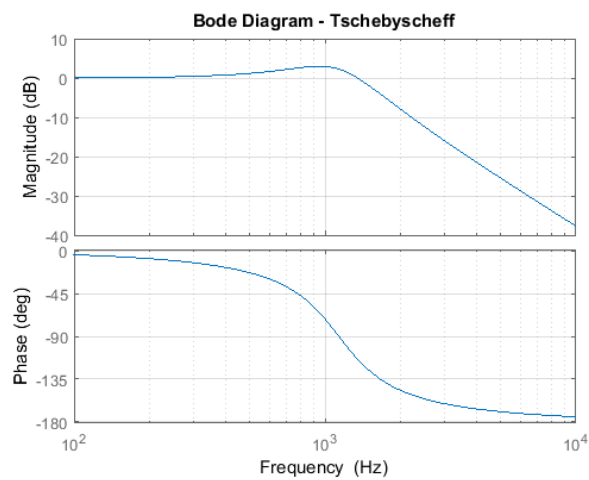


Abbildung 2: Amplituden- und Phasengang vom Tschebyscheff-Tiefpassfilter

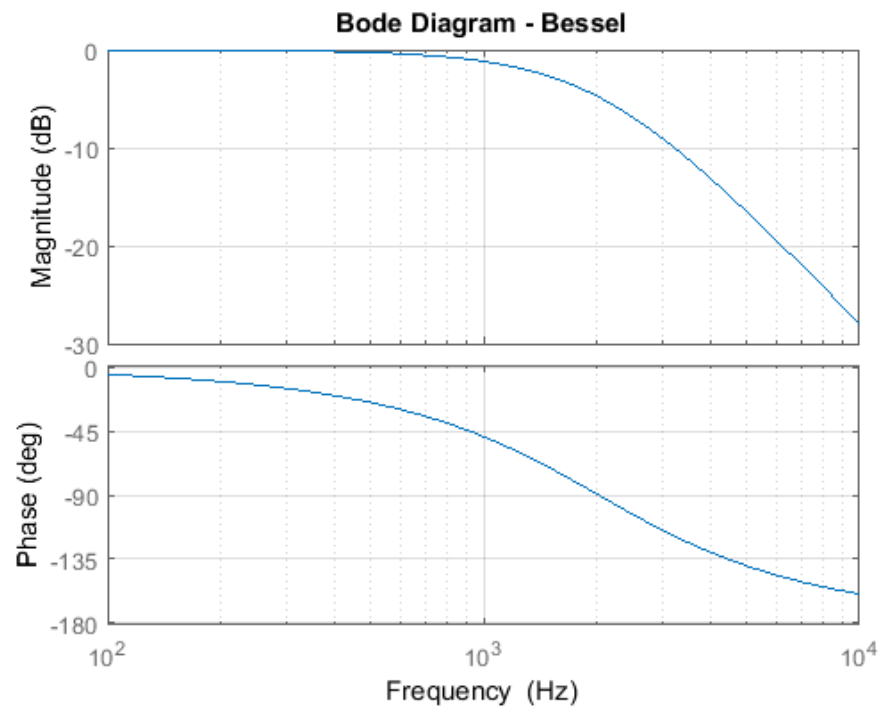


Abbildung 3: Amplituden- und Phasengang vom Bessel-Tiefpassfilter

1.1.2 Hochpassfilter

In der Versuchsbeschreibung Kapitel 7: Gleichungen zum Universal-Filter wird die Übertragungsfunktion H_{HP} angegeben mit.

$$H_{HP}(j\omega) = \frac{U_{HP}}{U_e} = \frac{R_b \cdot R_d}{R_a \cdot R_c} \cdot \frac{\frac{R_f}{R_d} \cdot (j\omega\tau)^2}{1 + \frac{R_b \cdot R_f}{R_c \cdot R_e} \cdot (j\omega\tau) + \frac{R_f}{R_d} \cdot (j\omega\tau)^2} \quad \text{mit } \tau = R \cdot C \quad (16)$$

Durch die Wahl von $R_b = R_c = R_d = R_0$ vereinfacht sich die Gleichung zu:

$$H_{HP}(j\omega) = \frac{R_0}{R_a} \cdot \frac{\frac{R_f}{R_d} \cdot (j\omega\tau)^2}{1 + \frac{R_f \cdot R_0}{R_0 \cdot R_e} \cdot (j\omega\tau) + \frac{R_f}{R_0} \cdot (j\omega\tau)^2} \quad (17)$$

Aus der Allgemeinen Gleichung eines Hochpassfilter 2. Ordnung können so die Parameter a_1, b_1 und V_0 zugewiesen werden. V_∞ ist die maximale Verstärkung bei $\omega \rightarrow \infty$.

$$V_\infty \cdot \frac{\frac{1}{b_1} \cdot (j\omega)^2}{1 + \frac{a_1}{b_1} \cdot j\omega + \frac{1}{b_1} \cdot (j\omega)^2} = \frac{R_0}{R_a} \cdot \frac{\frac{R_f}{R_0} \cdot (j\omega\tau)^2}{1 + \frac{R_f \cdot R_0}{R_0 \cdot R_e} \cdot (j\omega\tau) + \frac{R_0}{R_d} \cdot (j\omega\tau)^2} \quad (18)$$

$$V_\infty = \frac{R_0}{R_a} \quad (19)$$

$$b_1 = \frac{R_0}{R_f} \cdot \frac{1}{\tau^2} \quad (20)$$

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{R_f \cdot R_0}{R_0 \cdot R_e} \cdot \tau \quad (21)$$

$$a_1 = \frac{R_f \cdot R_0}{R_0 \cdot R_e} \cdot \tau \cdot b_1 \quad (22)$$

$$\Rightarrow \frac{R_f \cdot R_0}{R_0 \cdot R_e} \cdot \tau \cdot \frac{R_0}{R_f} \cdot \frac{1}{\tau^2} \quad (23)$$

$$\Rightarrow \frac{R_0}{R_e} \cdot \frac{1}{\tau} \quad (24)$$

Allgemeine Formel zur Bestimmung der Grenzfrequenzen

Der Amplitudengang lautet:

$$|H_{HP(j\omega)}| = \frac{|V_\infty| \cdot \left(\frac{1}{b_1}\right) \cdot \omega^2}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{1}{b_1}\right) \cdot \omega^2\right)^2 + \left(\frac{a_1}{b_1}\right) \cdot \omega^2}} \quad (25)$$

Mit der Definition $H_{HP(j\omega_g)} = |H_{HP(j\omega)}|_{max} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $V_\infty = 1$ (Tabelle 1) kann die Gleichung nach ω_g aufgelöst werden.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{|V_\infty| \cdot \left(\frac{1}{b_1}\right) \cdot \omega^2}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{1}{b_1}\right) \cdot \omega^2\right)^2 + \left(\frac{a_1}{b_1}\right) \cdot \omega^2}} \quad (26)$$

$$\sqrt{2} \cdot |V_\infty| \cdot \left(\frac{1}{b_1}\right) \cdot \omega^2 = \sqrt{\left(1 - \left(\frac{1}{b_1}\right) \cdot \omega^2\right)^2 + \left(\frac{a_1}{b_1}\right) \cdot \omega^2} \quad (27)$$

$$2 \cdot |V_\infty|^2 \cdot \left(\frac{1}{b_1^2}\right) \cdot \omega^2 = \left(1 - \left(\frac{1}{b_1}\right) \cdot \omega^2\right)^2 + \left(\frac{a_1}{b_1}\right) \cdot \omega^2 \quad (28)$$

$$0 = \left(\frac{1}{b_1^2} - 2 \cdot |V_\infty|^2 \cdot \frac{1}{b_1^2}\right) \cdot \omega^4 + \left(\frac{a_1^2}{b_1^2} - 2 \cdot \frac{1}{b_1}\right) \cdot \omega^2 + 1 \quad (29)$$

$$0 = x^2 + \frac{a_1^2 - 2 \cdot b_1}{1 - 2 \cdot |V_\infty|^2} \cdot x + \frac{b_1^2}{1 - 2 \cdot |V_\infty|^2} \quad (30)$$

Bestimmen der Möglichen Frequenzen:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{2} - q} \quad (31)$$

$$w_{g1} = +\sqrt{x1} \quad (32)$$

$$w_{g2} = -\sqrt{x1} \quad (33)$$

$$w_{g3} = +\sqrt{x2} \quad (34)$$

$$w_{g4} = -\sqrt{x2} \quad (35)$$

| $HP_{Filtercharakteristik}$ | Grundverstärkung V_{∞} | Grenzfrequenz f_g |
|-----------------------------|-------------------------------|---------------------|
| Butterworth | 1 | 1,6107 kHz |
| Tschebyscheff | 1 | 1,6055 kHz |
| Bessel | 1 | 1,582 kHz |

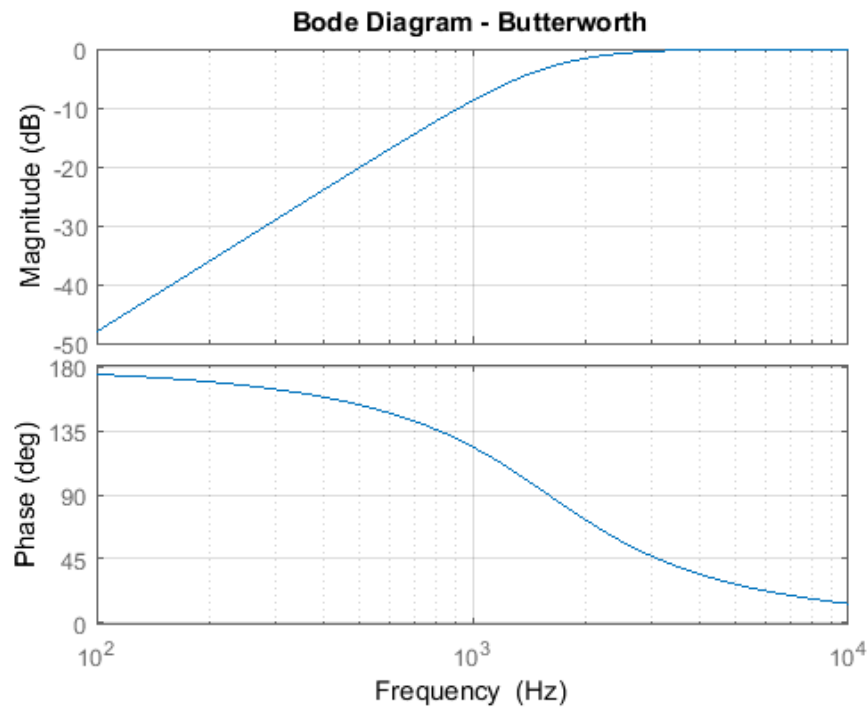
Tabelle 2: Hochpassfilter - Grundverstärkung V_{∞} , Grenzfrequenz f_g **Bodeplot der HP-Filter Butterworth, Tschebyscheff und Bessel.**

Abbildung 4: Amplituden- und Phasengang vom Butterworth-Hochpassfilter

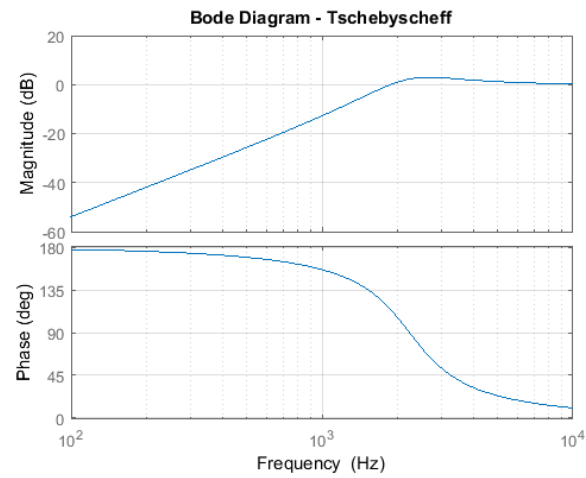


Abbildung 5: Amplituden- und Phasengang vom Tschebyscheff-Hochpassfilter

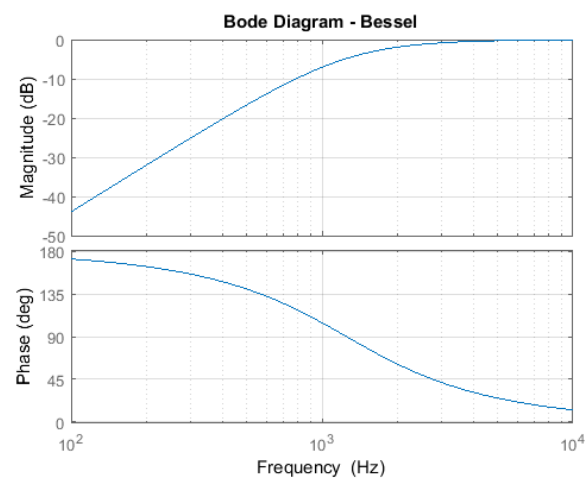


Abbildung 6: Amplituden- und Phasengang vom Bessel-Hochpassfilter

1.1.3 Bandpass

Die vereinfachte Formel für den Bandpassfilter hergeleitet vom Universalfilter kann der Allgemeinen Übertragungsfunktion eines Bandpasses gleichgesetzt und so die Parameter bestimmt werden.

$$H_{BP}(j\omega) = V_{max} \cdot \frac{A \cdot j\omega}{1 + A \cdot j\omega + b \cdot (j\omega)^2} \iff -\frac{R_0}{R_a} \cdot \frac{\frac{R_0}{R_c} \cdot (j\omega\tau)}{1 + \frac{R_0}{R_c} \cdot (j\omega\tau) + (j\omega\tau)^2} \quad (36)$$

Dadurch ergeben sich die nachfolgenden Parameter:

$$A = \frac{R_0}{R_c} \quad (37)$$

$$b = \tau^2 \quad (38)$$

$$V_{max} = -\frac{R_0}{R_a} \quad (39)$$

Das Maximum des Bandpassfilter wird erreicht wenn der Imaginärteil des Nenner $= 0$ ist. Somit entspricht V_{max} dem erreichbaren Maximum. An diesem Punkt befindet sich die Mittenfrequenz f_0 .

$$H_{BP}(j\omega) = V_{max} \cdot \frac{1}{\frac{1}{j\omega \cdot A} + 1 + \frac{j\omega \cdot b}{A}} \quad (40)$$

$$\Rightarrow V_{max} \cdot \frac{1}{1 + j \left(\frac{b}{A} \cdot \omega - \frac{1}{A \cdot \omega} \right)} \quad (41)$$

$$0 = \frac{b}{A} \cdot \omega - \frac{1}{A \cdot \omega} \quad (42)$$

$$\frac{1}{A \cdot \omega} = \frac{b}{A} \cdot \omega \quad (43)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{b}} \quad (44)$$

$$f_0 = \frac{1}{\tau} \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} = 1,592 \text{ kHz} \quad (45)$$

$$V_{f_0} = 1 \quad (46)$$

Die zwei zu berechnenden Grenzfrequenzen können nach der Definition $H_{BP}(j\omega_g) = |H_{BP}(j\omega)|_{max} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$ berechnet werden.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{V_{max} \cdot A \cdot \omega}{\sqrt{(1 - b \cdot \omega^2)^2 + A^2 \cdot \omega^2}} \quad (47)$$

$$0 = x^2 + \frac{A^2 - 2 \cdot b - 2 \cdot A^2 \cdot V_{max}}{b^2} \cdot x + \frac{1}{b^2} \quad (48)$$

Bestimmen der Möglichen Frequenzen:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{2} - q} \quad (49)$$

$$w_{g1} = +\sqrt{x1} \quad (50)$$

$$w_{g2} = -\sqrt{x1} \quad (51)$$

$$w_{g3} = +\sqrt{x2} \quad (52)$$

$$w_{g4} = -\sqrt{x2} \quad (53)$$

$$f_{gu} = 1,4395kHz \quad (54)$$

$$f_{go} = 1,7597kHz \quad (55)$$

$$B = f_{go} - f_{gu} = 320,2Hz \quad (56)$$

Bodeplot Bandpass:

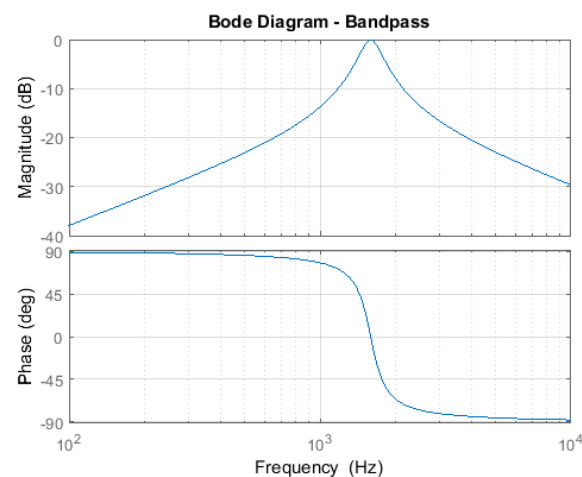


Abbildung 7: Amplituden- und Phasengang des Bandpassfilter

1.1.4 Bandsperre

Die vereinfachte Formel für den Bandpassfilter hergeleitet vom Universalfilter kann der Allgemeinen Übertragungsfunktion eines Bandpasses gleichgesetzt und so die Parameter bestimmt werden.

$$H_{BS}(j\omega) = V_0 \cdot \frac{1 + (j\omega)^2}{1 + A \cdot j\omega + b \cdot (j\omega)^2} \iff -\frac{R_0}{R_a} \cdot \frac{1 + (j\omega\tau)^2}{1 + \frac{R_0}{R_c} \cdot (j\omega\tau) + (j\omega\tau)^2} \quad (57)$$

Dadurch ergeben sich die nachfolgenden Parameter:

$$A = \frac{R_0}{R_c} \cdot \tau \quad (58)$$

$$b = \tau^2 \quad (59)$$

$$V_0 = -\frac{R_0}{R_a} \quad (60)$$

Das Maximum der Bandsperre kann für $\lim_{\omega \rightarrow \infty}$ oder $\lim_{\omega \rightarrow 0}$ bestimmt werden und strebt gegen 1. Somit kann nach der Definition $H_{BS}(j\omega_g) = |H_{HP}(j\omega)|_{\max} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$ die Gleichung nach ω_g aufgelöst werden.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{|V_0| \cdot |1 - b\omega^2|}{\sqrt{(1 - b \cdot \omega^2)^2 + A \cdot \omega^2}} \quad (61)$$

$$\sqrt{(1 - b \cdot \omega^2)^2 + A \cdot \omega^2} = |V_0| \cdot |1 - b\omega^2| \cdot \sqrt{2} \quad (62)$$

$$0 = x^2 + \frac{A^2 - 2 \cdot b + 4 \cdot bV_0^2}{b^2 - 2 \cdot b^2V_0^2} \cdot x + \frac{1 - 2 \cdot V_0^2}{b^2 - 2 \cdot b^2V_0^2} \quad (63)$$

Bestimmen der Möglichen Frequenzen:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{2} - q} \quad (64)$$

$$w_{g1} = +\sqrt{x1} \quad (65)$$

$$w_{g2} = -\sqrt{x1} \quad (66)$$

$$w_{g3} = +\sqrt{x2} \quad (67)$$

$$w_{g4} = -\sqrt{x2} \quad (68)$$

$$f_{gu} = 1,4395 \text{ KHz} \quad (69)$$

$$f_{go} = 1,7597 \text{ KHz} \quad (70)$$

$$B = f_{go} - f_{gu} = 320,24 \text{ Hz} \quad (71)$$

$$f_0 = \sqrt{f_{go} \cdot f_{gu}} = \sqrt{1,7597 \text{ kHz} * 1,4395 \text{ kHz}} = 1,5916 \text{ kHz} \quad (72)$$

Bodeplot der Bandsperre:

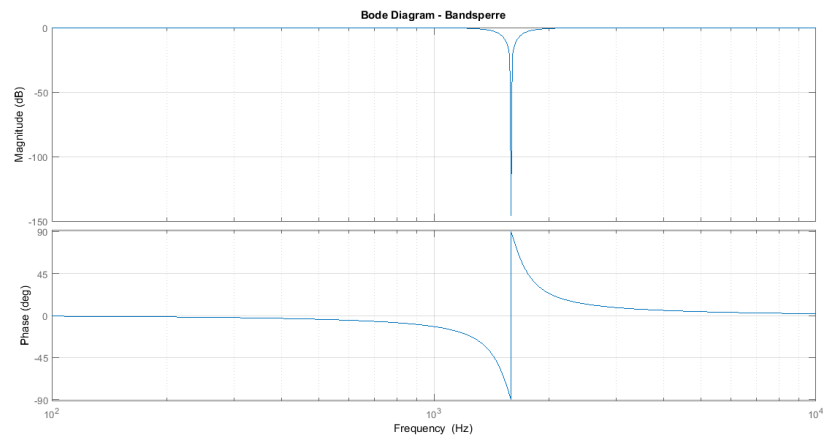


Abbildung 8: Amplituden- und Phasengang der Bandsperre

2 Messungen

2.1 Verwendete Geräte

- Oszilloskop
 - Tektronix TDS 3014C Digital Phosphor Oszilloscope
- Puls-Generator
 - Hewlett Packard 33120A 15MHz Function/Arbitrary Waveform Generator
- Kabel
 - 1m BNC Kabel
- Audio Analyzer
 - Rhode & Schwarz UPV Audio Analyzer DC...250kHz
- Messobjekt
 - Universalfilter
- BNC Stecker - T-Stücke

2.2 Messung von Amplituden- und Phasengang

In diesem Versuch geht es darum, die Amplituden und Phasengänge der Butterworth-, Tschebyscheff- und Bessel-Tiefpässe und die Amplitudengänge der Butterworth-, Tschebyscheff- und Bessel-Hochpässe sowie des Bandpasses und der Bandsperre mittels dem Audio-Analyzer UVP zu messen. Die folgende Tabelle zeigt unsere gemessenen Grenzfrequenzen der Tiefpässe/Hochpässe. Die Graphen sind im Anhang zu finden.

| | Butterworth | Tschebyscheff | Bessel |
|----------|-------------|---------------|------------|
| Tiefpass | $1.538kHz$ | $1.557kHz$ | $1.551kHz$ |
| Hochpass | $1.596kHz$ | $1.592kHz$ | $1.610kHz$ |

Tabelle 3: Gemessenen Grenzfrequenzen der verschiedenen Tiefpässe/Hochpässe

Anschließend ging es darum, die Phasengänge der oben genannten Filtertypen für den Tiefpass zu messen. Die Frequenzen bei einer Phasenverschiebung von -60° und -120° wurden bestimmt und in die folgende Tabelle eingetragen. Auch diese Graphen sind im Anhang zu finden.

| | Butterworth | Tschebyscheff | Bessel |
|--------------|-------------|---------------|------------|
| -60° | $1.046kHz$ | $898.250kHz$ | $1.229kHz$ |
| -120° | $2.381kHz$ | $1.400kHz$ | $3.225kHz$ |

Tabelle 4: Frequenzen bei einer Phasenverschiebung von -60° und -120°

Schließlich wurden die Mittenfrequenz und Sperrfrequenz des Bandpasses sowie der Bandsperre gemessen. Ergebnisse sind der folgenden Tabelle zu entnehmen. Für die Graphen siehe Anhang.

| | Mittenfrequenz | Sperrfrequenz |
|------------|----------------|---------------|
| Bandpass | $1.556kHz$ | - |
| Bandsperre | - | $1.568kHz$ |

Tabelle 5: Mittenfrequenz und Sperrfrequenz, Bandpass und Bandsperre

2.3 Sprungantworten der Tiefpässe

In diesem Versuch geht darum, die Anstiegszeit, Überschwingen und die Einstiegszeit der drei Tiefpässe nach Butterworth, Tschebyscheff und Bessel aus der Sprungantwort zu bestimmen. Die Filter wird mit einem Rechtecksignal ($500mV_{pp}$ und $250mv$ Offset und variabler Frequenz) angesteuert. Eingangs- und Ausgangssignal werden in einem gemeinsamen Oszillogramm dargestellt. Der Messaufbau ist in der nachfolgenden Abbildung zu sehen.

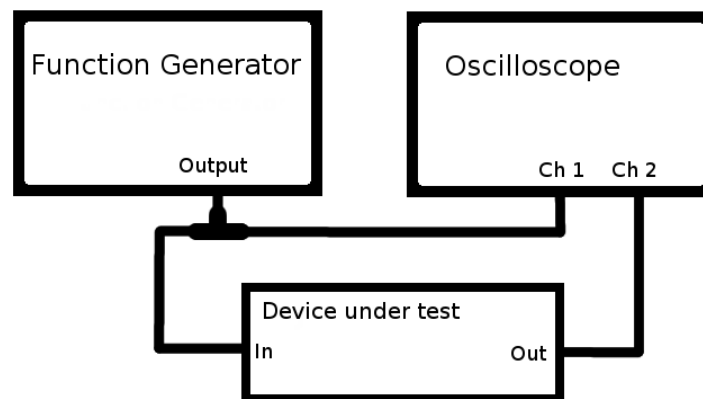


Abbildung 9: Messaufbau zum Messen der Sprungantwort

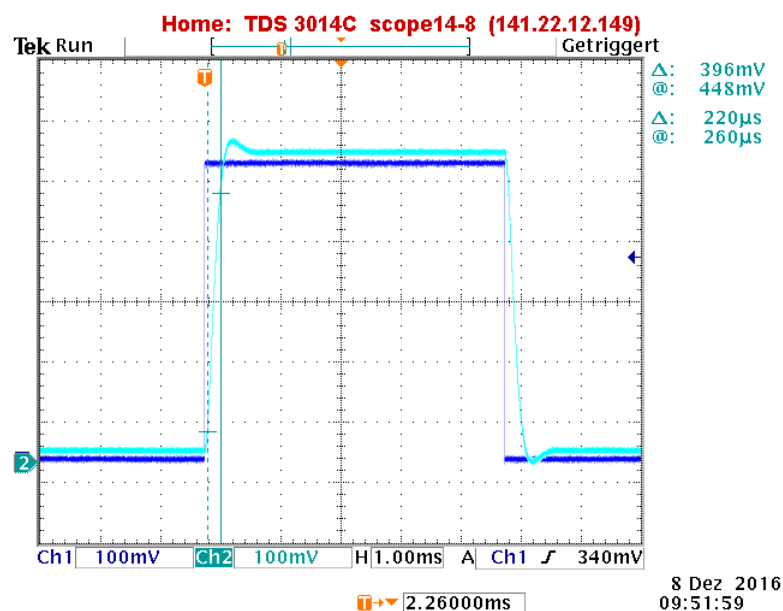


Abbildung 10: Sprungantwort Butterworth-Tiefpass

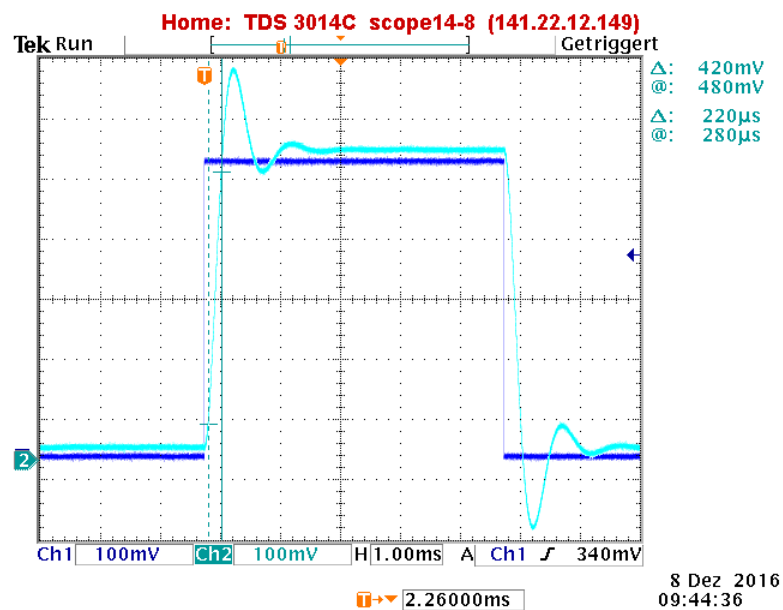


Abbildung 11: Sprungantwort Tschebyscheff-Tiefpass

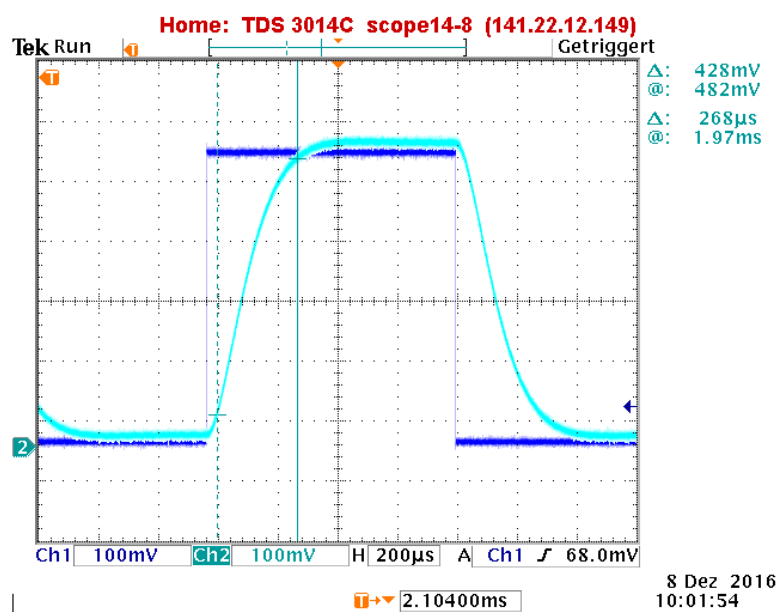


Abbildung 12: Sprungantwort Bessel-Tiefpass

3 Auswertung

3.1 Zu: Messung von Amplituden- und Phasengang

3.1.1 Grenzfrequenzen Tiefpässe/Hochpässe

Alle Messwerte der Grenzfrequenzen werden zusammen mit den vorausberechneten Werten in einer Tabelle dargestellt und verglichen.

| | | $f_{g,rech}$ | $f_{g,mess}$ | Δf_g | $\Delta f_g [\%]$ |
|---------------|----|--------------|--------------|--------------|-------------------|
| Butterworth | TP | $1.573kHz$ | $1.538kHz$ | $35Hz$ | 2,23 |
| | HP | $1.611kHz$ | $1.596kHz$ | $15Hz$ | 0,93 |
| Tschebyscheff | TP | $1.578kHz$ | $1.557kHz$ | $21Hz$ | 1,33 |
| | HP | $1.606kHz$ | $1.592kHz$ | $14Hz$ | 0,87 |
| Bessel | TP | $1.585kHz$ | $1.551kHz$ | $34Hz$ | 2,15 |
| | HP | $1.582kHz$ | $1.610kHz$ | $28Hz$ | 1,77 |

Tabelle 6: Vergleich der Werte, Tiefpässe und Hochpässe

Geringe Messabweichungen ergeben sich zunächst aus dem Messgraphen des Audioanalyzers, da der Cursor nicht immer auf genau -3dB eingestellt werden kann, die Messpunkte des Messgeräts variieren. Zudem haben die verwendeten Widerstände nur idealer Weise die nominalen Werte, diese variieren auch. Mit Abweichungen von maximal 2,23% kann von einer relativ guten Messung ausgegangen werden.

3.1.2 Mitten-/Sperrfrequenz, Bandpass und Bandsperre

Die gemessenen Frequenzen werden zusammen mit den vorausberechneten Werten in einer Tabelle dargestellt und anschließend verglichen. Im folgenden wird f_m die Mittenfrequenz sein und f_s die Sperrfrequenz.

| | $f_{m,rech}$ | $f_{m,mess}$ | Δf_m | $\Delta f_m [\%]$ | $f_{s,rech}$ | $f_{s,mess}$ | Δf_s | $\Delta f_s [\%]$ |
|------------|--------------|--------------|--------------|-------------------|--------------|--------------|--------------|-------------------|
| Bandpass | $1.556kHz$ | $1.591kHz$ | $35Hz$ | 2,25 | - | - | - | - |
| Bandsperre | - | - | - | - | $1.568kHz$ | $1.592kHz$ | $24Hz$ | 1,53 |

Tabelle 7: Vergleich der Werte, Bandpass und Bandsperre

Auch hier ergeben sich die geringen Abweichungen durch die zuvor beschriebenen Umstände.

3.1.3 Gemessenen Frequenzen bei einer Phasenverschiebung

Die gemessenen Frequenzen bei gewählten Phasenverschiebungen werden in einer Tabelle dargestellt und anschließend mit den errechneten Werten verglichen. Die folgenden Messungen beziehen sich auf die Tiefpässe der jeweiligen Arten.

| | $f_{mess,-60^\circ}$ | $f_{mess,-120^\circ}$ |
|---------------|----------------------|-----------------------|
| Butterworth | $1.046kHz$ | $2.381kHz$ |
| Tschebyscheff | $898.250kHz$ | $1.400kHz$ |
| Bessel | $1.229kHz$ | $3.225kHz$ |

Tabelle 8: Gemessene Frequenzen bei einer Phasenverschiebung von -60° , -120°

Aus den bei einer bestimmten Phasenverschiebung gemessenen Frequenzen ist es möglich die Koeffizienten der drei Filterarten zu bestimmen. Für einen Tiefpass bestimmter Art der 2. Ordnung gilt:

$$\begin{aligned}
arg\underline{H}_{TP}(\Omega) &= arg(V_0) - arctan\left(\frac{a_1 \cdot \Omega}{1 - b_1 \cdot \Omega^2}\right) \\
tan(arg\underline{H}_{TP}(\Omega)) &= tan(0) - \frac{a_1 \cdot \Omega}{1 - b_1 \cdot \Omega^2} \\
a_1 &= \frac{\left(-tan(arg\underline{H}_{TP}(\Omega))\right)\left(1 - b_1 \cdot \Omega^2\right)}{\Omega} \\
\frac{\left(-tan(arg\underline{H}_{TP}(\Omega_{-60^\circ}))\right)\left(1 - b_1 \cdot \Omega_{-60^\circ}^2\right)}{\Omega_{-60^\circ}} &= \frac{\left(-tan(arg\underline{H}_{TP}(\Omega_{-120^\circ}))\right)\left(1 - b_1 \cdot \Omega_{-120^\circ}^2\right)}{\Omega_{-120^\circ}} \\
\frac{\left(-tan(-60^\circ)\right)\left(1 - b_1 \cdot \Omega_{-60^\circ}^2\right)}{\Omega_{-60^\circ}} &= \frac{\left(-tan(-120^\circ)\right)\left(1 - b_1 \cdot \Omega_{-120^\circ}^2\right)}{\Omega_{-120^\circ}} \\
\frac{\left(\sqrt{3}\right)\left(1 - b_1 \cdot \Omega_{-60^\circ}^2\right)}{\Omega_{-60^\circ}} &= \frac{\left(-\sqrt{3}\right)\left(1 - b_1 \cdot \Omega_{-120^\circ}^2\right)}{\Omega_{-120^\circ}} \\
\rightarrow b_1 &= \frac{\sqrt{3} \cdot \Omega_{-120^\circ} + \sqrt{3} \cdot \Omega_{-60^\circ}}{\sqrt{3} \cdot \Omega_{-120^\circ} \cdot \Omega_{-60^\circ}^2 + \sqrt{3} \cdot \Omega_{-60^\circ} \cdot \Omega_{-120^\circ}^2}
\end{aligned}$$

Anschließend es ist möglich mit einer gegebenen Frequenz und b_1 den Koeffizienten a_1 zu berechnen:

$$\begin{aligned}
 \arg \underline{H}_{TP}(\Omega) &= \arg(V_0) - \arctan\left(\frac{a_1 \cdot \Omega}{1 - b_1 \cdot \Omega^2}\right) \\
 \tan(\arg \underline{H}_{TP}(\Omega)) &= \tan(0) - \frac{a_1 \cdot \Omega}{1 - b_1 \cdot \Omega^2} \\
 \rightarrow a_1 &= \frac{\left(-\tan(\arg \underline{H}_{TP}(\Omega))\right) \left(1 - b_1 \cdot \Omega^2\right)}{\Omega}
 \end{aligned}$$

Aus den Berechnungen ergeben sich folgende Ergebnisse:

| | $a_{1,errechnet}$ | $a_{1,ideal}$ | Δa_1 [%] | | $b_{1,errechnet}$ | $b_{1,ideal}$ | Δb_1 [%] |
|----------------------|-------------------|---------------|------------------|--|-------------------|---------------|------------------|
| <i>Butterworth</i> | 1.4279 | 1.414 | 0.98 | | 0.9498 | 1 | 5.02 |
| <i>Tschebyscheff</i> | 1.076 | 1.065 | 1.03 | | 1.928 | 1.931 | 0.16 |
| <i>Bessel</i> | 1.353 | 1.362 | 0.66 | | 0.607 | 0.618 | 1.78 |

Tabelle 9: Gegenüberstellung: errechnete und ideale Koeffizienten

3.2 Zu: Sprungantworten der Tiefpässe

Die Anstiegszeit, das Überschwingen sowie die Einschwingzeit der drei Tiefpässe wurden gemeinsam in einer Tabelle zusammengefasst und verglichen.

| | Anstiegszeit | Überschwingen | Einschwingzeit |
|---------------|--------------|---------------|----------------|
| Butterworth | $220\mu s$ | 4.86% | $320\mu s$ |
| Tschebyscheff | $220\mu s$ | 27.24% | $1.06ms$ |
| Bessel | $268\mu s$ | 0% | $308\mu s$ |

Tabelle 10: Anstiegszeit, Überschwingen und Einschwingzeit der drei Tiefpässe

Die Werte wurden den Oszillogrammen entnommen. Diese sind im Anhang zu finden. In Tabelle 10 fällt auf, dass bei dem Tschebyscheff Tiefpass ein relativ großer Überschwinger stattfindet. Werden die benutzten Widerstände überprüft, da diese die drei verschiedenen Schaltungen unterscheiden, kann erkannt werden, dass die Widerstände R_a , R_b , R_c und R_f bei jeder gleich bleiben. Der Widerstand R_e ändert sich geringfügig und der Widerstand R_d erfährt große Änderungen. Dadurch kann folgende Theorie aufgestellt werden: Wird der Widerstand R_d erhöht, verringert sich das Überschwingen und wird dieser reduziert, erhöht sich das Überschwingen in der Sprungantwort. Diese Theorie kann mit einer Spice-Simulation bestätigt werden. Dadurch ist nun auch bekannt, dass sowie der Widerstand R_e erhöht wird, das Überschwingen sich auch erhöht. Wird dieser reduziert, nimmt das Überschwingen auch ab.

4 Anhang

Unter folgendem Link kann eine „Education“ Version von PSPice heruntergeladen werden. <http://www.orcad.com/buy/orcad-educational-program>

4.1 Amplitudengänge

4.1.1 Tiefpässe

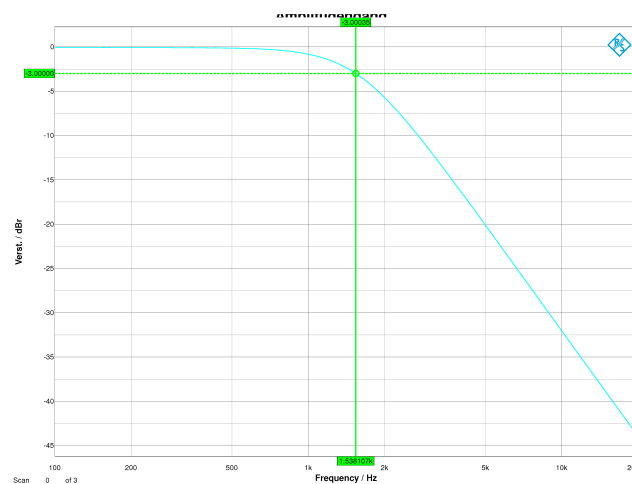


Abbildung 13: Amplitudengang Butterworth-Tiefpass mit Marker

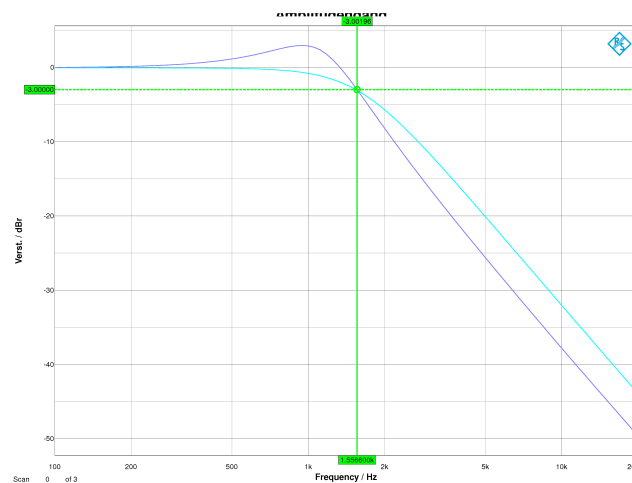


Abbildung 14: Amplitudengang Butterworth- und Tschebyscheff-Tiefpass mit Marker bei Tschebyscheff

4.1.2 Hochpässe

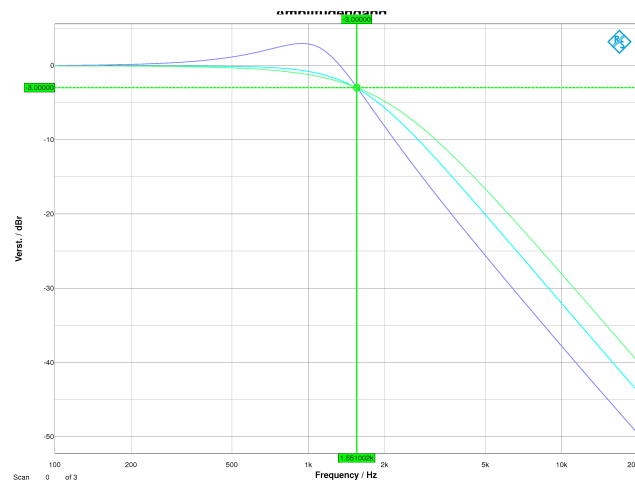


Abbildung 15: Amplitudengang Butterworth-, Tschebyscheff- und Bessel-Tiefpass mit Marker bei Bessel

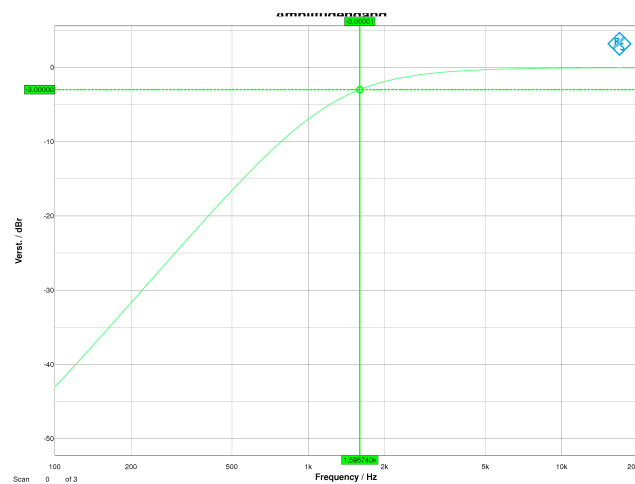


Abbildung 16: Amplitudengang Butterworth-Hochpass mit Marker

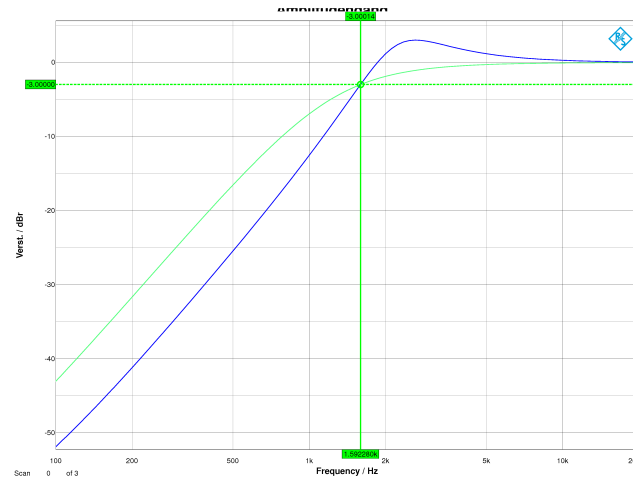


Abbildung 17: Amplitudengang Butterworth- und Tschebyscheff-Hochpass mit Marker bei Tschebyscheff

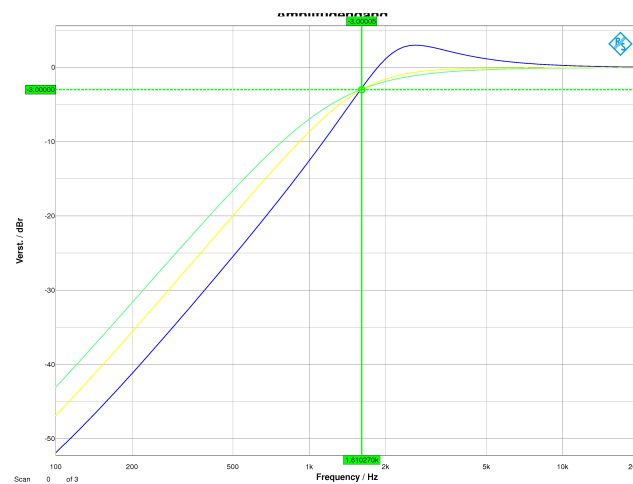


Abbildung 18: Amplitudengang Butterworth-, Tschebyscheff- und Bessel-Hochpass mit Marker bei Bessel

4.1.3 Bandpass/Bandsperre

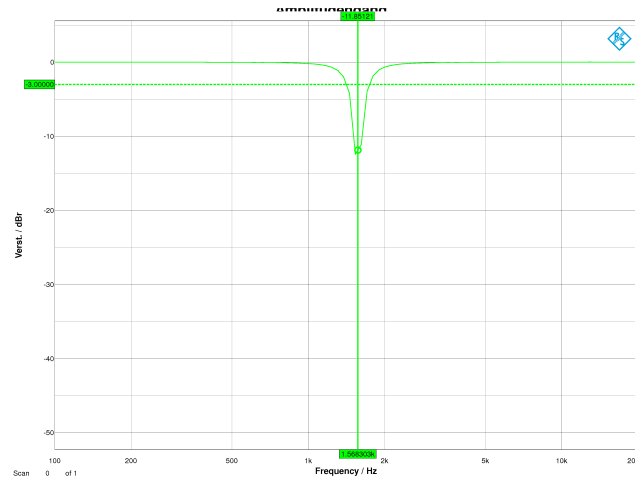


Abbildung 19: Amplitudengang Bandsperre mit Marker

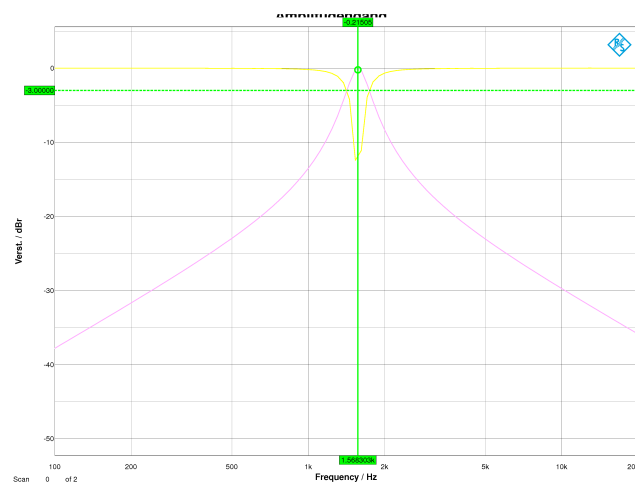


Abbildung 20: Amplitudengang Bandsperre und Bandpass mit Marker beim Bandpass

4.2 Phasengänge Tiefpässe

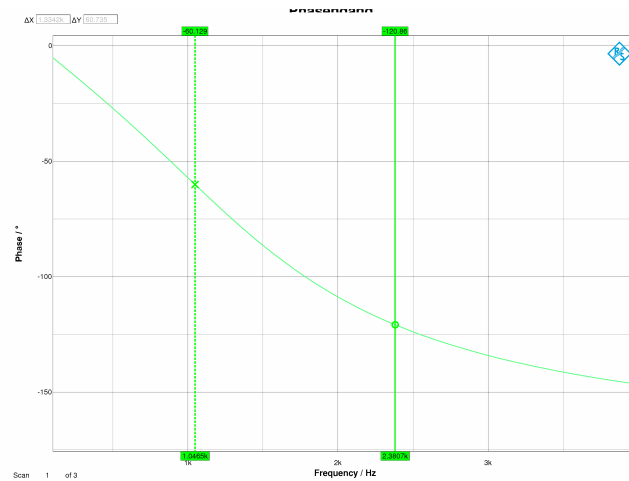


Abbildung 21: Phasengang Butterworth-Tiefpass mit Markern

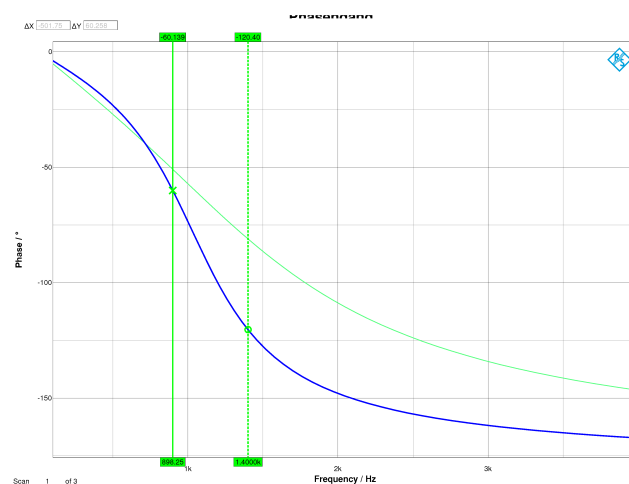


Abbildung 22: Phasengang Butterworth- und Tschebyscheff-Tiefpass mit Markern bei Tschebyscheff

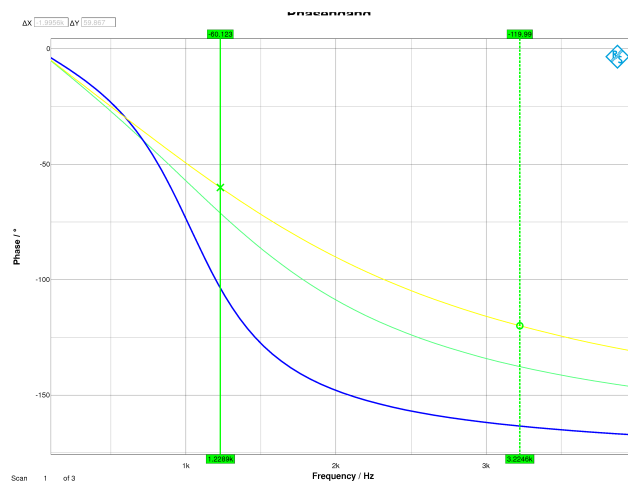


Abbildung 23: Phasengang Butterworth-, Tschebyscheff- und Bessel-Tiefpass mit Markern bei Bessel

4.3 Sprungantworten der Tiefpässe

4.3.1 Butterworth

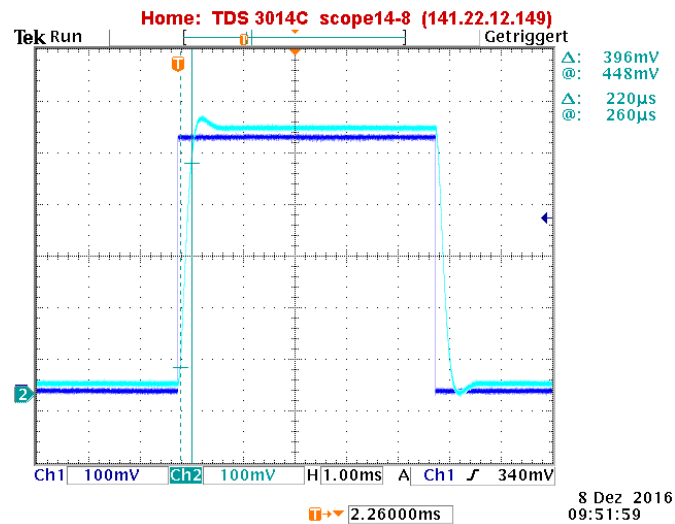


Abbildung 24: Sprungantwort Butterworth: Messung der Anstiegszeit

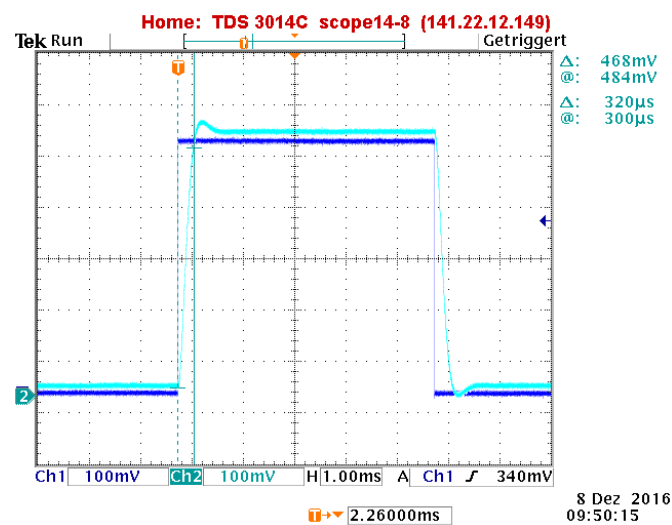


Abbildung 25: Sprungantwort Butterworth: Messung der Einschwingzeit

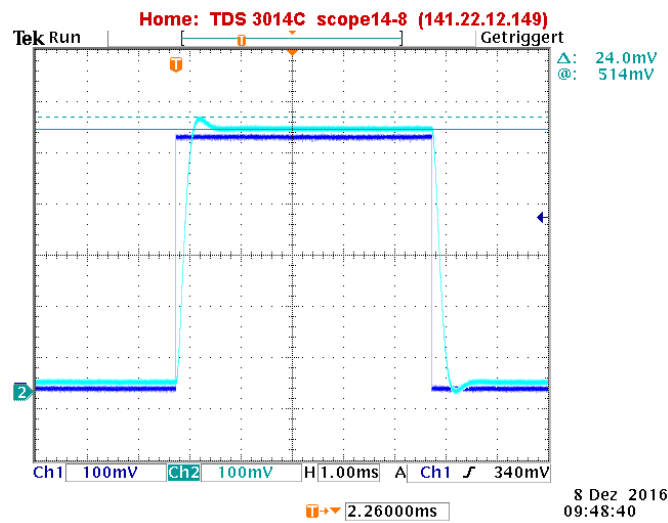


Abbildung 26: Sprungantwort Butterworth: Messung des Überschingers

4.3.2 Tschebyscheff

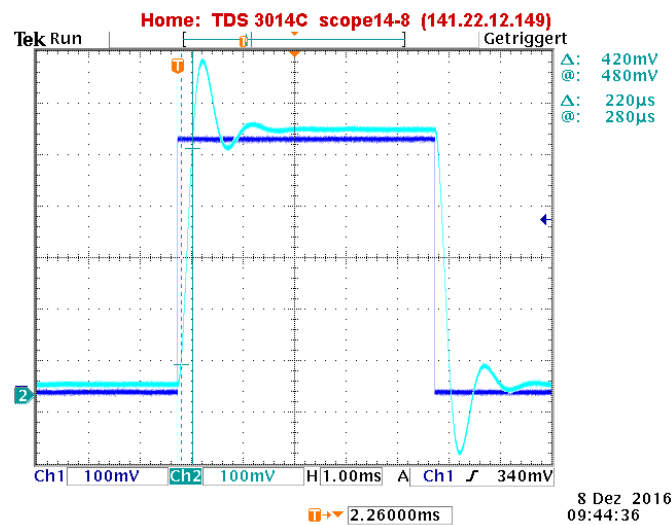


Abbildung 27: Sprungantwort Tschebyscheff: Messung der Anstiegszeit

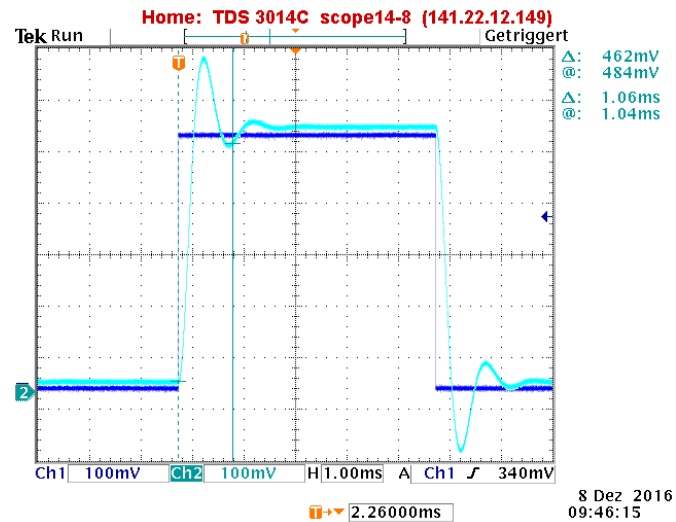


Abbildung 28: Sprungantwort Tschebyscheff: Messung der Einschwingzeit

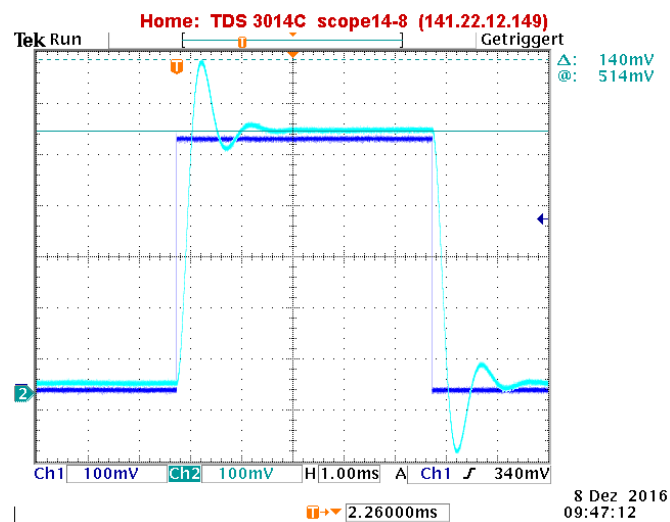


Abbildung 29: Sprungantwort Tschebyscheff: Messung des Überschingers

4.3.3 Bessel

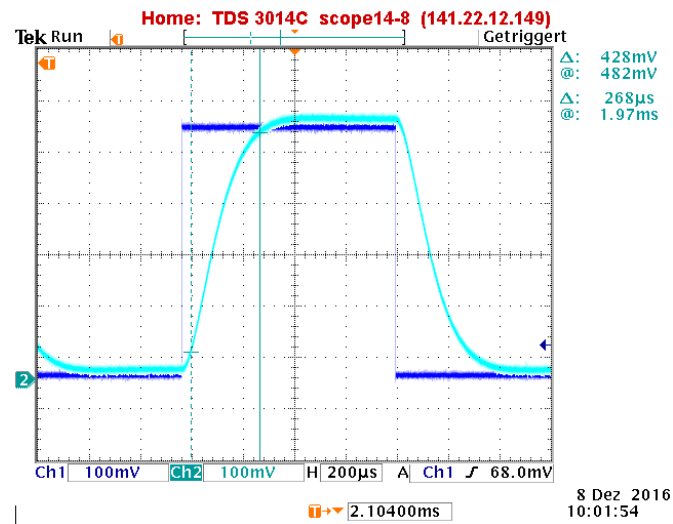


Abbildung 30: Sprungantwort Bessel: Messung der Anstiegszeit

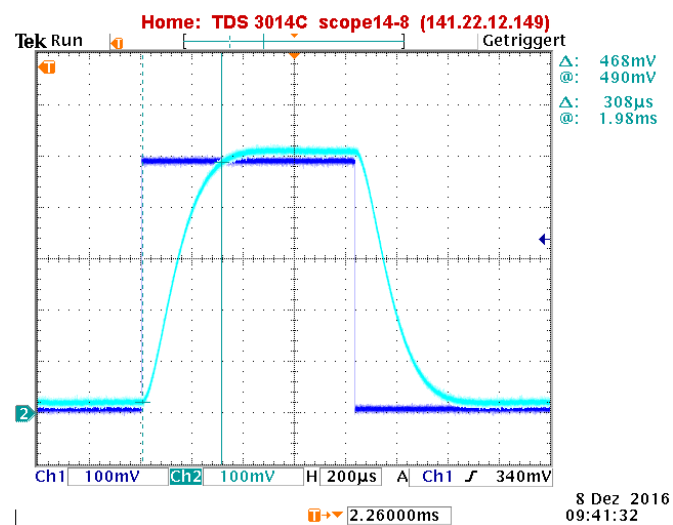


Abbildung 31: Sprungantwort Bessel: Messung der Einschwingzeit