



Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg  
*Hamburg University of Applied Sciences*

Grundlagen der Nachrichtentechnik

---

# Pulse-Code-Modulation

---

*Autoren:*

Tommy JAHNKE  
J.Sebastian FRISCH  
Nils PARCHE

*Professorin:*  
Prof. Dr. LI

8. Dezember 2016

# Abbildungsverzeichnis

1	.....	3
2	.....	4
3	.....	5
4	.....	7
5	.....	8
6	.....	9
7	Amplitudengang Butterworth-Tiefpass mit Marker .....	15
8	Amplitudengang Butterworth- und Tschebyscheff-Tiefpass mit Marker bei Tschebyscheff .....	15
9	Amplitudengang Butterworth-, Tschebyscheff- und Bessel-Tiefpass mit Marker bei Bessel .....	16
10	Amplitudengang Butterworth-Hochpass mit Marker .....	16
11	Amplitudengang Butterworth- und Tschebyscheff-Hochpass mit Marker bei Tschebyscheff .....	17
12	Amplitudengang Butterworth-, Tschebyscheff- und Bessel-Hochpass mit Marker bei Bessel .....	17
13	Amplitudengang Bandsperre mit Marker .....	18
14	Amplitudengang Bandsperre und Bandpass mit Marker beim Bandpass .....	18
15	Phasengang Butterworth-Tiefpass mit Markern .....	19
16	Phasengang Butterworth- und Tschebyscheff-Tiefpass mit Markern bei Tschebyscheff .....	19
17	Phasengang Butterworth-, Tschebyscheff- und Bessel-Tiefpass mit Markern bei Bessel .....	20

## Tabellenverzeichnis

1	Tiefpassfilter - Grundverstärkung $V_0$ , Grenzfrequenz $f_g$ . . . . .	2
2	Hochpassfilter - Grundverstärkung $V_\infty$ , Grenzfrequenz $f_g$ . . . . .	7
3	Gemessenen Grenzfrequenzen der verschiedenen Tiefpässe/Hochpässe	11
4	Frequenzen bei einer Phasenverschiebung von $-60^\circ$ und $-120^\circ$ . .	11
5	Mittenfrequenz und Sperrfrequenz des Bandpasses sowie der Band- sperre . . . . .	11

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Vorbereitung</b>	<b>1</b>
1.1	Grundverstärkung und Grenzfrequenzen der Hoch- und Tiefpässe .	1
1.1.1	Tiefpassfilter . . . . .	1
1.1.2	Hochpassfilter . . . . .	4
1.1.3	Bandpassfilter . . . . .	8
1.1.4	Bandsperre . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Messungen</b>	<b>11</b>
2.1	Messung von Amplituden- und Phasengang der Filterschaltungen .	11
2.2	Sprungantworten der Tiefpässe . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Auswertung</b>	<b>13</b>
3.1	Zu: Messung von Amplituden- und Phasengang der Filterschaltungen	13
3.2	Zu: Sprungantworten der Tiefpässe . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Anhang</b>	<b>15</b>

# 1 Vorbereitung

Es sind an einem Universalfilter verschiedenen Filtertypen 2. Ordnung zu untersuchen. Über die Widerstandsbeschaltung  $R_a$ ,  $R_b$ ,  $R_c$ ,  $R_d$ ,  $R_e$  und  $R_f$  können bestimmte Filtercharakteristiken, wie Butterworth, Tschebyscheff und Bessel nachgebildet werden. Mit der Tabelle [?] in der Aufgabenstellung sollen bei den Hochpass- und Tiefpassfilter der drei genannten Filtercharakteristiken die Grenzfrequenz  $f_g$  und die Grundverstärkung  $V_0$  bestimmt werden. Bei dem Bandpass ist die Mittelfrequenz  $f_M$  und die Bandbreite  $B$  zu berechnen. Die Bandsperre wird auf ihre Sperrfrequenz untersucht.

## 1.1 Grundverstärkung und Grenzfrequenzen der Hoch- und Tiefpässe

### 1.1.1 Tiefpassfilter

In der Versuchsbeschreibung [?] Kapitel 7: Gleichungen zum Universal-Filter wird die Übertragungsfunktion  $H_{TP}$  angegeben mit.

$$H_{TP}(j\omega) = \frac{U_{TP}}{U_e} = \frac{R_b \cdot R_f}{R_a \cdot R_c} \cdot \frac{1}{1 + \frac{R_b \cdot R_f}{R_c \cdot R_e} \cdot (j\omega\tau) + \frac{R_f}{R_d} \cdot (j\omega\tau)^2} \quad \text{mit } \tau = R \cdot C \quad (1)$$

Durch die Wahl von  $R_b = R_c = R_f = R_0$  vereinfacht sich die Gleichung zu:

$$H_{TP}(j\omega) = \frac{R_0}{R_a} \cdot \frac{1}{1 + \frac{R_0}{R_e} \cdot (j\omega\tau) + \frac{R_0}{R_d} \cdot (j\omega\tau)^2} \quad (2)$$

Aus der Allgemeinen Gleichung eines Tiefpassfilter 2. Ordnung können so die Parameter  $a_1$ ,  $b_1$  und  $V_0$  zugewiesen werden.  $V_0$  ist die maximale Verstärkung bei  $\omega \rightarrow 0$ .

$$\frac{V_0}{1 + a_1 \cdot j\omega + b_1 \cdot (j\omega)^2} = \frac{R_0}{R_a} \cdot \frac{1}{1 + \frac{R_0}{R_e} \cdot (j\omega\tau) + \frac{R_0}{R_d} \cdot (j\omega\tau)^2} \quad (3)$$

$$V_0 = \frac{R_0}{R_a} \quad (4)$$

$$a_1 = \frac{R_0}{R_e} \cdot \tau \quad (5)$$

$$b_1 = \frac{R_0}{R_d} \cdot \tau^2 \quad (6)$$

## Allgemeine Formel zur Bestimmung der Grenzfrequenzen

Der Amplitudengang lautet:

$$|H_{TP(j\omega)}| = \frac{|V_0|}{\sqrt{(1 - b_1 \cdot \omega^2)^2 + a_1^2 \cdot \omega^2}} \quad (7)$$

Mit der Definition  $H_{TP(j\omega_g)} = |H_{TP(j\omega)}|_{max} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$  und  $V_0 = 1$  (Tabelle 1) kann über einen Koeffizientenvergleich die Grenzfrequenz bestimmt werden.

$$2 = (1 - b_1 \cdot \omega^2)^2 + a_1^2 \cdot \omega^2 \quad (8)$$

$$0 = b_1^2 \cdot \omega^4 - (2 \cdot b_1 - a_1^2) \cdot \omega^2 - 1 \quad \text{substituiert } \omega^2 = x \quad (9)$$

$$0 = x^2 - \frac{2 \cdot b_1 - a_1^2}{b_1^2} \cdot x - \frac{1}{b_1^2} \quad (10)$$

Bestimmen der Möglichen Frequenzen:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{2} - q} \quad (11)$$

$$w_{g1} = +\sqrt{x1} \quad (12)$$

$$w_{g2} = -\sqrt{x1} \quad (13)$$

$$w_{g3} = +\sqrt{x1} \quad (14)$$

$$w_{g4} = -\sqrt{x2} \quad (15)$$

$TP_{Filtercharakteristik}$	Grundverstärkung $V_0$	Grenzfrequenz $f_g$
Butterworth	1	1,5726 kHz
Tschebyscheff	1	1,5777 kHz
Bessel	1	1,585 kHz

Tabelle 1: Tiefpassfilter - Grundverstärkung  $V_0$ , Grenzfrequenz  $f_g$

## Bodeplot der TP-Filter Butterworth, Tschebyscheff und Bessel.

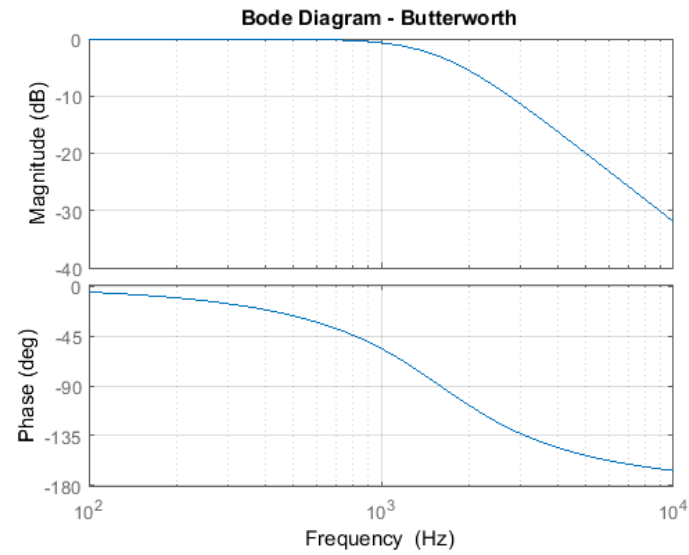


Abbildung 1

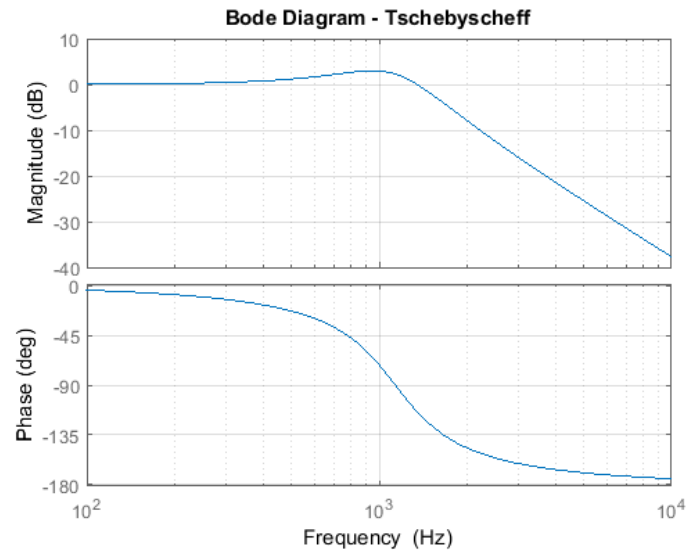


Abbildung 2

### 1.1.2 Hochpassfilter

In der Versuchsbeschreibung [?] Kapitel 7: Gleichungen zum Universal-Filter wird die Übertragungsfunktion  $H_{HP}$  angegeben mit.

$$H_{HP}(j\omega) = \frac{U_{HP}}{U_e} = \frac{R_b \cdot R_d}{R_a \cdot R_c} \cdot \frac{\frac{R_f}{R_d} \cdot (j\omega\tau)^2}{1 + \frac{R_b \cdot R_f}{R_c \cdot R_e} \cdot (j\omega\tau) + \frac{R_f}{R_d} \cdot (j\omega\tau)^2} \quad \text{mit } \tau = R \cdot C \quad (16)$$

Durch die Wahl von  $R_b = R_c = R_d = R_0$  vereinfacht sich die Gleichung zu:

$$H_{HP}(j\omega) = \frac{R_0}{R_a} \cdot \frac{\frac{R_f}{R_d} \cdot (j\omega\tau)^2}{1 + \frac{R_f \cdot R_0}{R_0 \cdot R_e} \cdot (j\omega\tau) + \frac{R_f}{R_0} \cdot (j\omega\tau)^2} \quad (17)$$

Aus der Allgemeinen Gleichung eines Hochpassfilter 2. Ordnung können so die Parameter  $a_1, b_1$  und  $V_0$  zugewiesen werden.  $V_\infty$  ist die maximale Verstärkung bei  $\omega \rightarrow \infty$ .

$$V_\infty \cdot \frac{\frac{1}{b_1} \cdot (j\omega)^2}{1 + \frac{a_1}{b_1} \cdot j\omega + \frac{1}{b_1} \cdot (j\omega)^2} = \frac{R_0}{R_a} \cdot \frac{\frac{R_f}{R_0} \cdot (j\omega\tau)^2}{1 + \frac{R_f \cdot R_0}{R_0 \cdot R_e} \cdot (j\omega\tau) + \frac{R_0}{R_d} \cdot (j\omega\tau)^2} \quad (18)$$



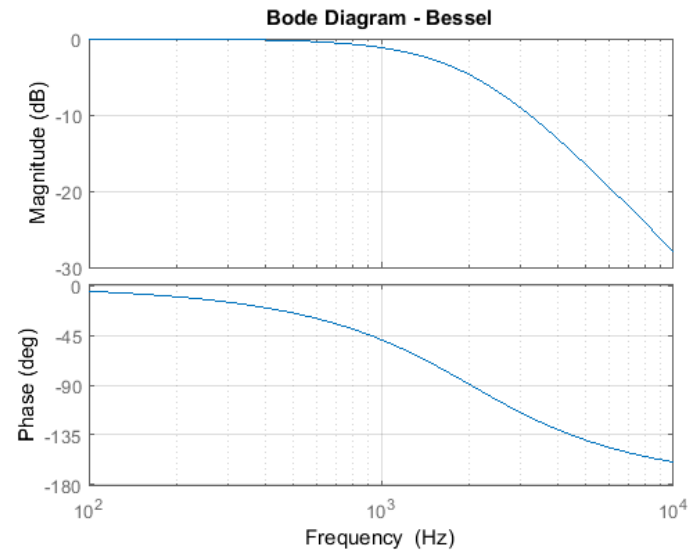


Abbildung 3

$$V_{\infty} = \frac{R_0}{R_a} \quad (19)$$

$$b_1 = \frac{R_0}{R_f} \cdot \frac{1}{\tau^2} \quad (20)$$

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{R_f \cdot R_0}{R_0 \cdot R_e} \cdot \tau \quad (21)$$

$$a_1 = \frac{R_f \cdot R_0}{R_0 \cdot R_e} \cdot \tau \cdot b_1 \quad (22)$$

$$\Rightarrow \frac{R_f \cdot R_0}{R_0 \cdot R_e} \cdot \tau \cdot \frac{R_0}{R_f} \cdot \frac{1}{\tau^2} \quad (23)$$

$$\Rightarrow \frac{R_0}{R_e} \cdot \frac{1}{\tau} \quad (24)$$

## Allgemeine Formel zur Bestimmung der Grenzfrequenzen

Der Amplitudengang lautet:

$$|H_{HP(j\omega)}| = \frac{|V_\infty| \cdot \left(\frac{1}{b_1}\right) \cdot \omega^2}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{1}{b_1}\right) \cdot \omega^2\right)^2 + \left(\frac{a_1}{b_1}\right) \cdot \omega^2}} \quad (25)$$

Mit der Definition  $H_{HP(j\omega_g)} = |H_{HP(j\omega)}|_{max} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$  und  $V_\infty = 1$  (Tabelle 1) kann die Gleichung nach  $\omega_g$  aufgelöst werden.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{|V_\infty| \cdot \left(\frac{1}{b_1}\right) \cdot \omega^2}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{1}{b_1}\right) \cdot \omega^2\right)^2 + \left(\frac{a_1}{b_1}\right) \cdot \omega^2}} \quad (26)$$

$$\sqrt{2} \cdot |V_\infty| \cdot \left(\frac{1}{b_1}\right) \cdot \omega^2 = \sqrt{\left(1 - \left(\frac{1}{b_1}\right) \cdot \omega^2\right)^2 + \left(\frac{a_1}{b_1}\right) \cdot \omega^2} \quad (27)$$

$$2 \cdot |V_\infty|^2 \cdot \left(\frac{1}{b_1^2}\right) \cdot \omega^2 = \left(1 - \left(\frac{1}{b_1}\right) \cdot \omega^2\right)^2 + \left(\frac{a_1}{b_1}\right) \cdot \omega^2 \quad (28)$$

$$0 = \left(\frac{1}{b_1^2} - 2 \cdot |V_\infty|^2 \cdot \frac{1}{b_1^2}\right) \cdot \omega^4 + \left(\frac{a_1^2}{b_1^2} - 2 \cdot \frac{1}{b_1}\right) \cdot \omega^2 + 1 \quad (29)$$

$$0 = x^2 + \frac{a_1^2 - 2 \cdot b_1}{1 - 2 \cdot |V_\infty|^2} \cdot x + \frac{b_1^2}{1 - 2 \cdot |V_\infty|^2} \quad (30)$$

Bestimmen der Möglichen Frequenzen:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{2} - q} \quad (31)$$

$$w_{g1} = +\sqrt{x1} \quad (32)$$

$$w_{g2} = -\sqrt{x1} \quad (33)$$

$$w_{g3} = +\sqrt{x2} \quad (34)$$

$$w_{g4} = -\sqrt{x2} \quad (35)$$

$HP_{Filtercharakteristik}$	Grundverstärkung $V_{\infty}$	Grenzfrequenz $f_g$
Butterworth	1	1,6107 kHz
Tschebyscheff	1	1,6055 kHz
Bessel	1	1,582 kHz

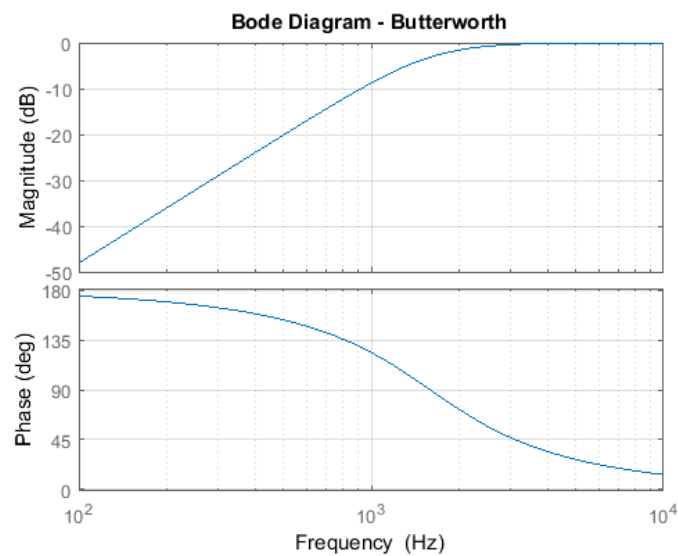
Tabelle 2: Hochpassfilter - Grundverstärkung  $V_{\infty}$ , Grenzfrequenz  $f_g$ **Bodeplot der HP-Filter Butterworth, Tschebyscheff und Bessel.**

Abbildung 4

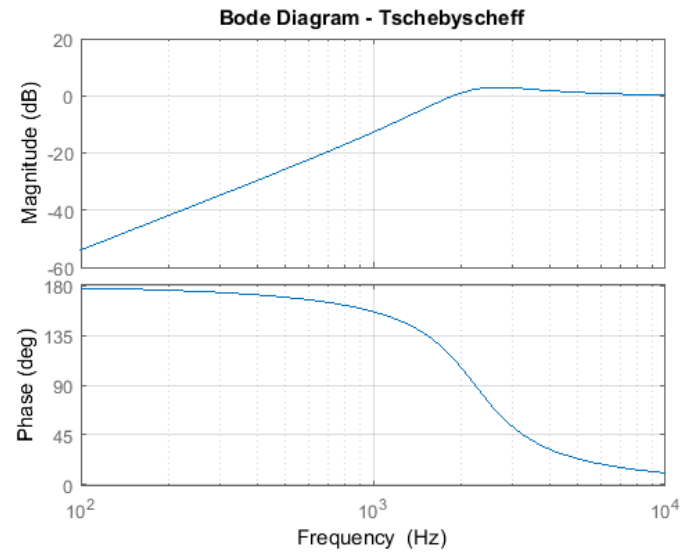


Abbildung 5

### 1.1.3 Bandpassfilter

Die vereinfachte Formel für den Bandpassfilter hergeleitet vom Universalfilter kann der Allgemeinen Übertragungsfunktion eines Bandpasses gleichgesetzt und so die Parameter bestimmt werden.

$$H_{BP}(j\omega) = V_{max} \cdot \frac{A \cdot j\omega}{1 + A \cdot j\omega + b \cdot (j\omega)^2} \iff -\frac{R_0}{R_a} \cdot \frac{\frac{R_0}{R_c} \cdot (j\omega\tau)}{1 + \frac{R_0}{R_c} \cdot (j\omega\tau) + (j\omega\tau)^2} \quad (36)$$

Dadurch ergeben sich die nachfolgenden Parameter:

$$A = \frac{R_0}{R_c} \quad (37)$$

$$b = \tau^2 \quad (38)$$

$$V_{max} = -\frac{R_0}{R_a} \quad (39)$$

Das Maximum des Bandpassfilter wird erreicht wenn der Imaginärteil des Nenner = 0 ist. Somit entspricht  $V_{max}$  dem erreichbaren Maximum. An diesem Punkt befindet sich die Mittenfrequenz  $f_0$ .

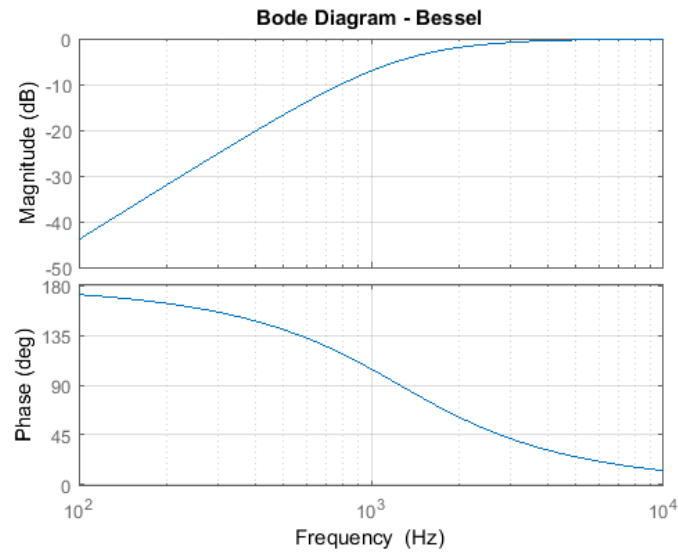


Abbildung 6

$$H_{BP}(j\omega) = V_{max} \cdot \frac{1}{\frac{1}{j\omega \cdot A} + 1 + \frac{j\omega \cdot b}{A}} \quad (40)$$

$$\Rightarrow V_{max} \cdot \frac{1}{1 + j \left( \frac{b}{A} \cdot \omega - \frac{1}{A \cdot \omega} \right)} \quad (41)$$

$$0 = \frac{b}{A} \cdot \omega - \frac{1}{A \cdot \omega} \quad (42)$$

$$\frac{1}{A \cdot \omega} = \frac{b}{A} \cdot \omega \quad (43)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{b}} \quad (44)$$

$$f_0 = \frac{1}{\tau} \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} = 1,592 kHz \quad (45)$$

$$V_{f_0} = 1 \quad (46)$$

Die zwei zu berechnenden Grenzfrequenzen können nach der Definition  $H_{BP}(j\omega_g) = |H_{BP}(j\omega)|_{max} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$  berechnet werden.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{V_{max} \cdot A \cdot \omega}{\sqrt{(1 - b \cdot \omega^2)^2 + A^2 \cdot \omega^2}} \quad (47)$$

$$0 = x^2 + \frac{A^2 - 2 \cdot b - 2 \cdot A^2 \cdot V_{max}}{b^2} \cdot x + \frac{1}{b^2} \quad (48)$$

Bestimmen der Möglichen Frequenzen:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{2} - q} \quad (49)$$

$$w_{g1} = +\sqrt{x1} \quad (50)$$

$$w_{g2} = -\sqrt{x1} \quad (51)$$

$$w_{g3} = +\sqrt{x1} \quad (52)$$

$$w_{g4} = -\sqrt{x2} \quad (53)$$

$$f_{gu} = 1,4395kHz \quad (54)$$

$$f_{go} = 1,7597kHz \quad (55)$$

$$B = f_{go} - f_{gu} = 320,2Hz \quad (56)$$

#### 1.1.4 Bandsperre

Werte müssen noch berechnet werden und stammen aus der PSPice simulation.

$$f_0 = 1,5922kHz \quad (57)$$

$$f_{go} = 1,76014kHz \quad (58)$$

$$f_{gu} = 1,43911kHz \quad (59)$$

$$B = 321Hz \quad (60)$$

$$V_{0,\infty} = 1 \quad (61)$$

## 2 Messungen

### 2.1 Messung von Amplituden- und Phasengang der Filterschaltungen

In diesem Versuch geht es darum, die Amplituden und Phasengänge der Butterworth-, Tschebyscheff- und Bessel-Tiefpässe und die Amplitudengänge der Butterworth-, Tschebyscheff- und Bessel-Hochpässe sowie des Bandpasses und der Bandsperre mittels dem Audio-Analyzer UVP zu messen. Die folgende Tabelle zeigt unsere gemessenen Grenzfrequenzen der Tiefpässe/Hochpässe. Die Graphen sind im Anhang zu finden.

	<i>Butterworth</i>	<i>Tschebyscheff</i>	<i>Bessel</i>
<i>Tiefpass</i>	1.538kHz	1.557kHz	1.551kHz
<i>Hochpass</i>	1.596kHz	1.592kHz	1.610kHz

Tabelle 3: Gemessenen Grenzfrequenzen der verschiedenen Tiefpässe/Hochpässe

Anschließend ging es darum, die Phasengänge der oben genannten Filtertypen für den Tiefpass zu messen. Die Frequenzen bei einer Phasenverschiebung von  $-60^\circ$  und  $-120^\circ$  wurden bestimmt und in die folgende Tabelle eingetragen. Auch diese Graphen sind im Anhang zu finden.

	<i>Butterworth</i>	<i>Tschebyscheff</i>	<i>Bessel</i>
$-60^\circ$	1.046kHz	898.250kHz	1.229kHz
$-120^\circ$	2.381kHz	1.400kHz	3.225kHz

Tabelle 4: Frequenzen bei einer Phasenverschiebung von  $-60^\circ$  und  $-120^\circ$

Schließlich wurden die Mittenfrequenz und Sperrfrequenz des Bandpasses sowie der Bandsperre gemessen. Ergebnisse sind der folgenden Tabelle zu entnehmen. Für die Graphen siehe Anhang.

	<i>Mittenfrequenz</i>	<i>Sperrfrequenz</i>
<i>Bandpass</i>	1.556kHz	/
<i>Bandsperre</i>	/	1.568kHz

Tabelle 5: Mittenfrequenz und Sperrfrequenz des Bandpasses sowie der Bandsperre

---

## 2.2 Sprungantworten der Tiefpässe



---

## **3 Auswertung**

### **3.1 Zu: Messung von Amplituden- und Phasengang der Filterschaltungen**

---

## **3.2 Zu: Sprungantworten der Tiefpässe**

## 4 Anhang

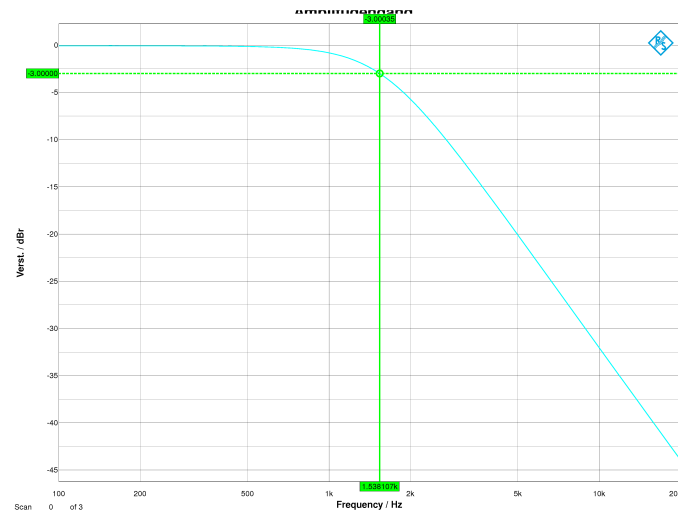


Abbildung 7: Amplitudengang Butterworth-Tiefpass mit Marker

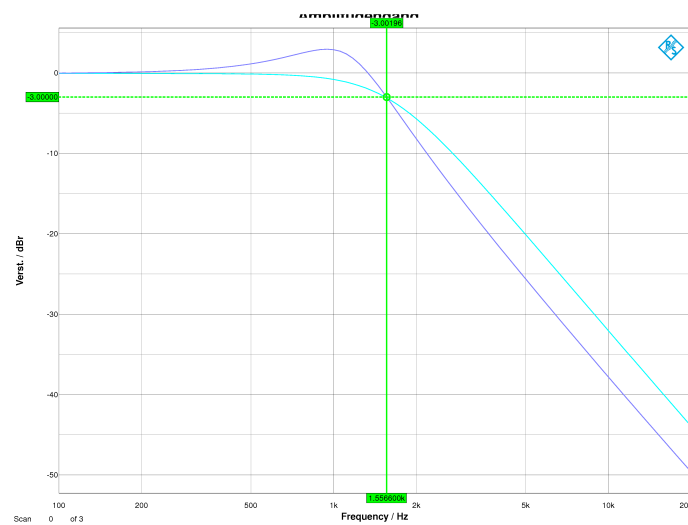


Abbildung 8: Amplitudengang Butterworth- und Tschebyscheff-Tiefpass mit Marker bei Tschebyscheff

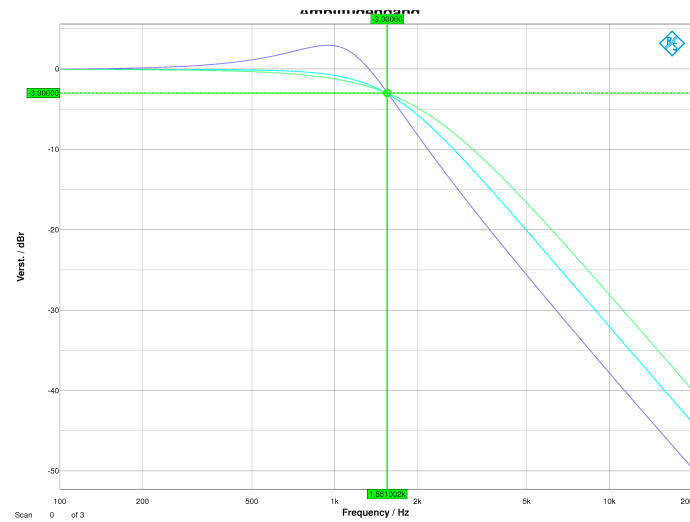


Abbildung 9: Amplitudengang Butterworth-, Tschebyscheff- und Bessel-Tiefpass mit Marker bei Bessel

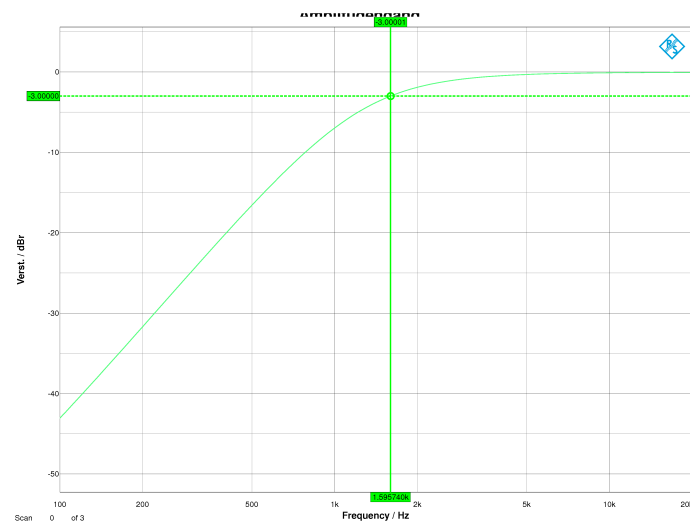


Abbildung 10: Amplitudengang Butterworth-Hochpass mit Marker

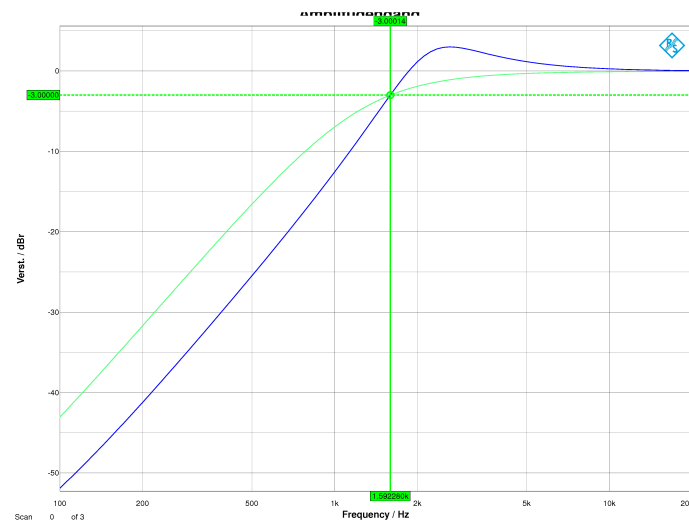


Abbildung 11: Amplitudengang Butterworth- und Tschebyscheff-Hochpass mit Marker bei Tschebyscheff

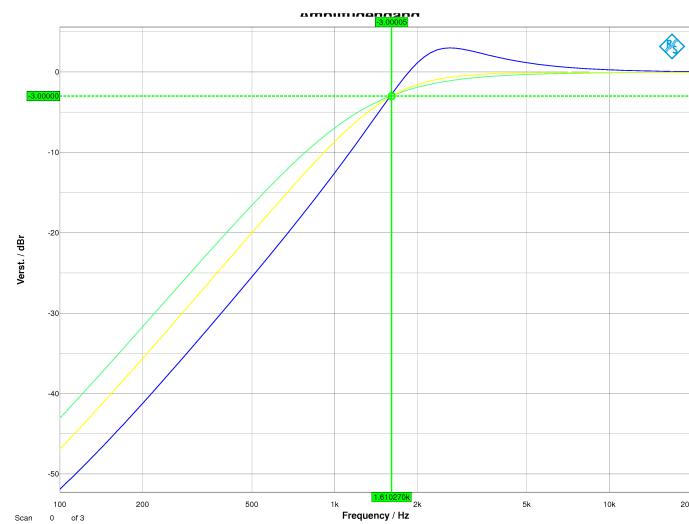


Abbildung 12: Amplitudengang Butterworth-, Tschebyscheff- und Bessel-Hochpass mit Marker bei Bessel

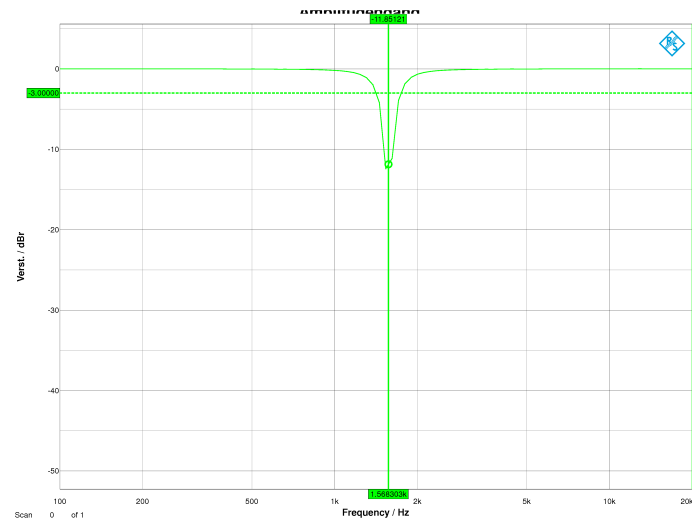


Abbildung 13: Amplitudengang Bandsperre mit Marker

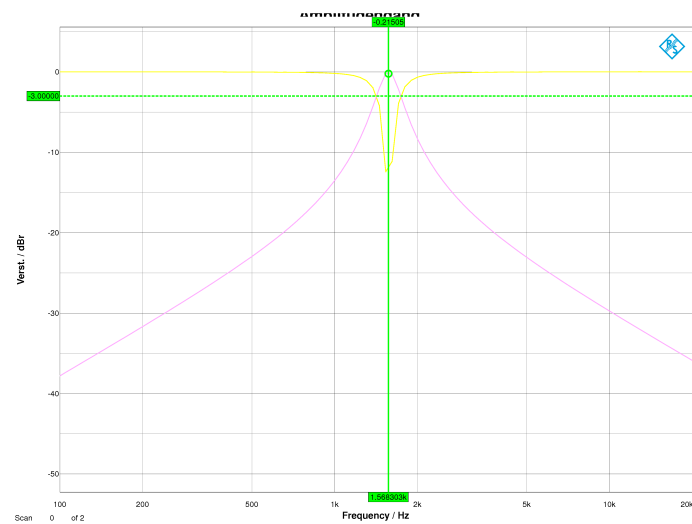


Abbildung 14: Amplitudengang Bandsperre und Bandpass mit Marker beim Bandpass

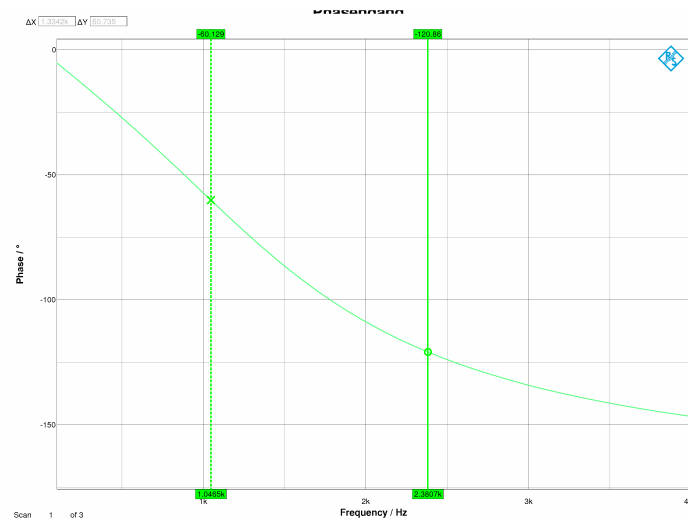


Abbildung 15: Phasengang Butterworth-Tiefpass mit Markern

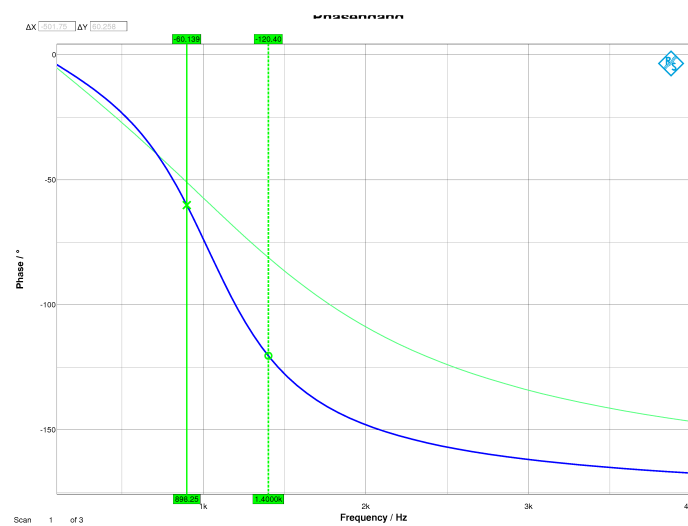


Abbildung 16: Phasengang Butterworth- und Tschebyscheff-Tiefpass mit Markern bei Tschebyscheff

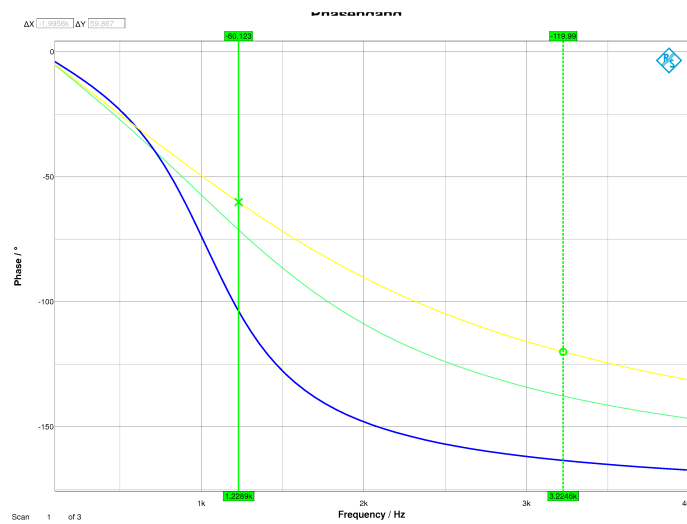


Abbildung 17: Phasengang Butterworth-, Tschebyscheff- und Bessel-Tiefpass mit Markern bei Bessel



---

# Literatur