



Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg  
*Hamburg University of Applied Sciences*

# Grundlagen der Nachrichtentechnik

---

## Aktive Filter

---

*Autoren:*

Tommy JAHNKE  
J.Sebastian FRISCH  
Nils PARCHE

*Professor:*

Prof. Dr. SCHOENEN

9. Dezember 2016

# Abbildungsverzeichnis

1	Amplituden- und Phasengang vom Butterworth-Tiefpassfilter . . . .	3
2	Amplituden- und Phasengang vom Tschebyscheff-Tiefpassfilter . . .	3
3	Amplituden- und Phasengang vom Bessel-Tiefpassfilter . . . . .	4
4	Amplituden- und Phasengang vom Butterworth-Hochpassfilter . . .	7
5	Amplituden- und Phasengang vom Tschebyscheff-Hochpassfilter . .	8
6	Amplituden- und Phasengang vom Bessel-Hochpassfilter . . . . .	8
7	Amplituden- und Phasengang des Bandpassfilter . . . . .	10
8	Amplituden- und Phasengang der Bandsperre . . . . .	12
9	Messaufbau zum Messen der Sprungantwort . . . . .	15
10	Sprungantwort Butterworth-Tiefpass . . . . .	15
11	Sprungantwort Tschebyscheff-Tiefpass . . . . .	16
12	Sprungantwort Bessel-Tiefpass . . . . .	16

## Tabellenverzeichnis

1	Tiefpassfilter - Grundverstärkung $V_0$ , Grenzfrequenz $f_g$ . . . . .	2
2	Hochpassfilter - Grundverstärkung $V_\infty$ , Grenzfrequenz $f_g$ . . . . .	7
3	Gemessenen Grenzfrequenzen der verschiedenen Tiefpässe/Hochpässe	14
4	Frequenzen bei einer Phasenverschiebung von $-60^\circ$ und $-120^\circ$ . .	14
5	Mittenfrequenz und Sperrfrequenz des Bandpasses sowie der Band- sperre . . . . .	14
6	Vergleich der Werte, Tiefpässe und Hochpässe . . . . .	17
7	Vergleich der Werte, Bandpass und Bandsperre . . . . .	17
8	Gemessene Frequenzen bei einer Phasenverschiebung von $-60^\circ$ , $-120^\circ$	18
9	Gegenüberstellung: errechnete und ideale Koeffizienten . . . . .	19
10	Anstiegszeit, Überschwingen und Einschwingzeit der drei Tiefpässe	20

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Vorbereitung</b>	<b>1</b>
1.1	Grundverstärkung und Grenzfrequenzen der Hoch- und Tiefpässe .	1
1.1.1	Tiefpassfilter . . . . .	1
1.1.2	Hochpassfilter . . . . .	5
1.1.3	Bandpass . . . . .	9
1.1.4	Bandsperre . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Messungen</b>	<b>13</b>
2.1	Verwendete Geräte . . . . .	13
2.2	Messung von Amplituden- und Phasengang . . . . .	14
2.3	Sprungantworten der Tiefpässe . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Auswertung</b>	<b>17</b>
3.1	Zu: Messung von Amplituden- und Phasengang . . . . .	17
3.1.1	Grenzfrequenzen Tiefpässe/Hochpässe . . . . .	17
3.1.2	Mittenfrequenz/Sperrfrequenz des Bandpasses/der Bandsper- re . . . . .	17
3.1.3	Gemessenen Frequenzen bei einer Phasenverschiebung . . . .	18
3.2	Zu: Sprungantworten der Tiefpässe . . . . .	20

# 1 Vorbereitung

Es sind an einem Universalfilter verschiedenen Filtertypen 2. Ordnung zu untersuchen. Über die Widerstandsbeschaltung  $R_a$ ,  $R_b$ ,  $R_c$ ,  $R_d$ ,  $R_e$  und  $R_f$  können bestimmte Filtercharakteristiken, wie Butterworth, Tschebyscheff und Bessel nachgebildet werden. Mit der Tabelle [?] in der Aufgabenstellung sollen bei den Hochpass- und Tiefpassfilter der drei genannten Filtercharakteristiken die Grenzfrequenz  $f_g$  und die Grundverstärkung  $V_0$  bestimmt werden. Bei dem Bandpass ist die Mittenfrequenz  $f_M$  und die Bandbreite  $B$  zu berechnen. Die Bandsperre wird auf ihre Sperrfrequenz untersucht.

## 1.1 Grundverstärkung und Grenzfrequenzen der Hoch- und Tiefpässe

### 1.1.1 Tiefpassfilter

In der Versuchsbeschreibung [?] Kapitel 7: Gleichungen zum Universal-Filter wird die Übertragungsfunktion  $H_{TP}$  angegeben mit.

$$H_{TP}(j\omega) = \frac{U_{TP}}{U_e} = \frac{R_b \cdot R_f}{R_a \cdot R_c} \cdot \frac{1}{1 + \frac{R_b \cdot R_f}{R_c \cdot R_e} \cdot (j\omega\tau) + \frac{R_f}{R_d} \cdot (j\omega\tau)^2} \quad \text{mit } \tau = R \cdot C \quad (1)$$

Durch die Wahl von  $R_b = R_c = R_f = R_0$  vereinfacht sich die Gleichung zu:

$$H_{TP}(j\omega) = \frac{R_0}{R_a} \cdot \frac{1}{1 + \frac{R_0}{R_e} \cdot (j\omega\tau) + \frac{R_0}{R_d} \cdot (j\omega\tau)^2} \quad (2)$$

Aus der Allgemeinen Gleichung eines Tiefpassfilter 2. Ordnung können so die Parameter  $a_1$ ,  $b_1$  und  $V_0$  zugewiesen werden.  $V_0$  ist die maximale Verstärkung bei  $\omega \rightarrow 0$ .

$$\frac{V_0}{1 + a_1 \cdot j\omega + b_1 \cdot (j\omega)^2} = \frac{R_0}{R_a} \cdot \frac{1}{1 + \frac{R_0}{R_e} \cdot (j\omega\tau) + \frac{R_0}{R_d} \cdot (j\omega\tau)^2} \quad (3)$$

$$V_0 = \frac{R_0}{R_a} \quad (4)$$

$$a_1 = \frac{R_0}{R_e} \cdot \tau \quad (5)$$

$$b_1 = \frac{R_0}{R_d} \cdot \tau^2 \quad (6)$$

## Allgemeine Formel zur Bestimmung der Grenzfrequenzen

Der Amplitudengang lautet:

$$|H_{TP(j\omega)}| = \frac{|V_0|}{\sqrt{(1 - b_1 \cdot \omega^2)^2 + a_1^2 \cdot \omega^2}} \quad (7)$$

Mit der Definition  $H_{TP(j\omega_g)} = |H_{TP(j\omega)}|_{max} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$  und  $V_0 = 1$  (Tabelle 1) kann über einen Koeffizientenvergleich die Grenzfrequenz bestimmt werden.

$$2 = (1 - b_1 \cdot \omega^2)^2 + a_1^2 \cdot \omega^2 \quad (8)$$

$$0 = b_1^2 \cdot \omega^4 - (2 \cdot b_1 - a_1^2) \cdot \omega^2 - 1 \quad \text{substituiert } \omega^2 = x \quad (9)$$

$$0 = x^2 - \frac{2 \cdot b_1 - a_1^2}{b_1^2} \cdot x - \frac{1}{b_1^2} \quad (10)$$

Bestimmen der Möglichen Frequenzen:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{2} - q} \quad (11)$$

$$w_{g1} = +\sqrt{x1} \quad (12)$$

$$w_{g2} = -\sqrt{x1} \quad (13)$$

$$w_{g3} = +\sqrt{x2} \quad (14)$$

$$w_{g4} = -\sqrt{x2} \quad (15)$$

$TP_{Filtercharakteristik}$	Grundverstärkung $V_0$	Grenzfrequenz $f_g$
Butterworth	1	1,5726 kHz
Tschebyscheff	1	1,5777 kHz
Bessel	1	1,585 kHz

Tabelle 1: Tiefpassfilter - Grundverstärkung  $V_0$ , Grenzfrequenz  $f_g$

## Bodeplot der TP-Filter Butterworth, Tschebyscheff und Bessel.

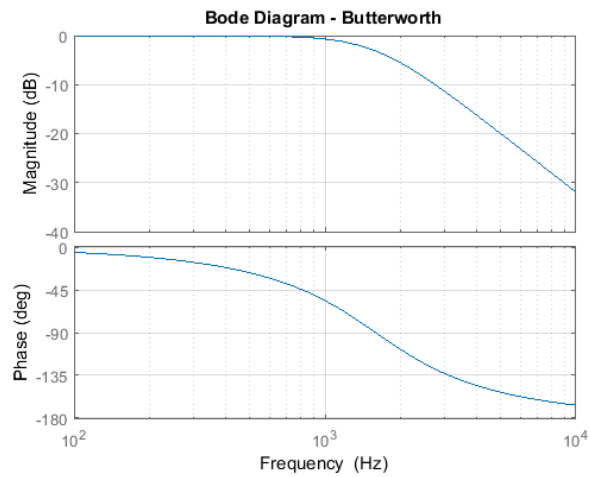


Abbildung 1: Amplituden- und Phasengang vom Butterworth-Tiefpassfilter

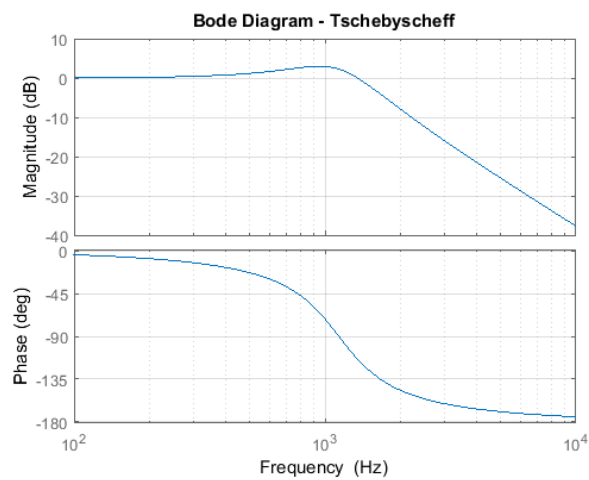


Abbildung 2: Amplituden- und Phasengang vom Tschebyscheff-Tiefpassfilter

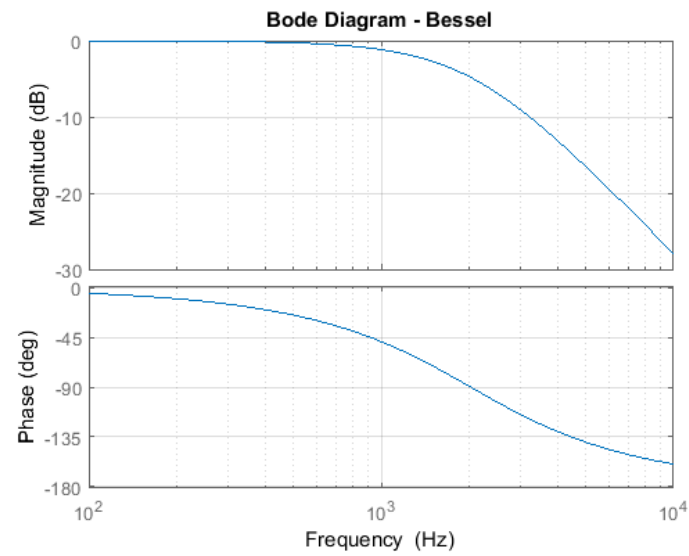


Abbildung 3: Amplituden- und Phasengang vom Bessel-Tiefpassfilter



### 1.1.2 Hochpassfilter

In der Versuchsbeschreibung [?] Kapitel 7: Gleichungen zum Universal-Filter wird die Übertragungsfunktion  $H_{HP}$  angegeben mit.

$$H_{HP}(j\omega) = \frac{U_{HP}}{U_e} = \frac{R_b \cdot R_d}{R_a \cdot R_c} \cdot \frac{\frac{R_f}{R_d} \cdot (j\omega\tau)^2}{1 + \frac{R_b \cdot R_f}{R_c \cdot R_e} \cdot (j\omega\tau) + \frac{R_f}{R_d} \cdot (j\omega\tau)^2} \quad \text{mit } \tau = R \cdot C \quad (16)$$

Durch die Wahl von  $R_b = R_c = R_d = R_0$  vereinfacht sich die Gleichung zu:

$$H_{HP}(j\omega) = \frac{R_0}{R_a} \cdot \frac{\frac{R_f}{R_d} \cdot (j\omega\tau)^2}{1 + \frac{R_f \cdot R_0}{R_0 \cdot R_e} \cdot (j\omega\tau) + \frac{R_f}{R_0} \cdot (j\omega\tau)^2} \quad (17)$$

Aus der Allgemeinen Gleichung eines Hochpassfilter 2. Ordnung können so die Parameter  $a_1, b_1$  und  $V_0$  zugewiesen werden.  $V_\infty$  ist die maximale Verstärkung bei  $\omega \rightarrow \infty$ .

$$V_\infty \cdot \frac{\frac{1}{b_1} \cdot (j\omega)^2}{1 + \frac{a_1}{b_1} \cdot j\omega + \frac{1}{b_1} \cdot (j\omega)^2} = \frac{R_0}{R_a} \cdot \frac{\frac{R_f}{R_0} \cdot (j\omega\tau)^2}{1 + \frac{R_f \cdot R_0}{R_0 \cdot R_e} \cdot (j\omega\tau) + \frac{R_0}{R_d} \cdot (j\omega\tau)^2} \quad (18)$$

$$V_\infty = \frac{R_0}{R_a} \quad (19)$$

$$b_1 = \frac{R_0}{R_f} \cdot \frac{1}{\tau^2} \quad (20)$$

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{R_f \cdot R_0}{R_0 \cdot R_e} \cdot \tau \quad (21)$$

$$a_1 = \frac{R_f \cdot R_0}{R_0 \cdot R_e} \cdot \tau \cdot b_1 \quad (22)$$

$$\Rightarrow \frac{R_f \cdot R_0}{R_0 \cdot R_e} \cdot \tau \cdot \frac{R_0}{R_f} \cdot \frac{1}{\tau^2} \quad (23)$$

$$\Rightarrow \frac{R_0}{R_e} \cdot \frac{1}{\tau} \quad (24)$$

## Allgemeine Formel zur Bestimmung der Grenzfrequenzen

Der Amplitudengang lautet:

$$|H_{HP(j\omega)}| = \frac{|V_\infty| \cdot \left(\frac{1}{b_1}\right) \cdot \omega^2}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{1}{b_1}\right) \cdot \omega^2\right)^2 + \left(\frac{a_1}{b_1}\right) \cdot \omega^2}} \quad (25)$$

Mit der Definition  $H_{HP(j\omega_g)} = |H_{HP(j\omega)}|_{max} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$  und  $V_\infty = 1$  (Tabelle 1) kann die Gleichung nach  $\omega_g$  aufgelöst werden.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{|V_\infty| \cdot \left(\frac{1}{b_1}\right) \cdot \omega^2}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{1}{b_1}\right) \cdot \omega^2\right)^2 + \left(\frac{a_1}{b_1}\right) \cdot \omega^2}} \quad (26)$$

$$\sqrt{2} \cdot |V_\infty| \cdot \left(\frac{1}{b_1}\right) \cdot \omega^2 = \sqrt{\left(1 - \left(\frac{1}{b_1}\right) \cdot \omega^2\right)^2 + \left(\frac{a_1}{b_1}\right) \cdot \omega^2} \quad (27)$$

$$2 \cdot |V_\infty|^2 \cdot \left(\frac{1}{b_1^2}\right) \cdot \omega^2 = \left(1 - \left(\frac{1}{b_1}\right) \cdot \omega^2\right)^2 + \left(\frac{a_1}{b_1}\right) \cdot \omega^2 \quad (28)$$

$$0 = \left(\frac{1}{b_1^2} - 2 \cdot |V_\infty|^2 \cdot \frac{1}{b_1^2}\right) \cdot \omega^4 + \left(\frac{a_1^2}{b_1^2} - 2 \cdot \frac{1}{b_1}\right) \cdot \omega^2 + 1 \quad (29)$$

$$0 = x^2 + \frac{a_1^2 - 2 \cdot b_1}{1 - 2 \cdot |V_\infty|^2} \cdot x + \frac{b_1^2}{1 - 2 \cdot |V_\infty|^2} \quad (30)$$

Bestimmen der Möglichen Frequenzen:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{2} - q} \quad (31)$$

$$w_{g1} = +\sqrt{x1} \quad (32)$$

$$w_{g2} = -\sqrt{x1} \quad (33)$$

$$w_{g3} = +\sqrt{x2} \quad (34)$$

$$w_{g4} = -\sqrt{x2} \quad (35)$$

$HP_{Filtercharakteristik}$	Grundverstärkung $V_{\infty}$	Grenzfrequenz $f_g$
Butterworth	1	1,6107 kHz
Tschebyscheff	1	1,6055 kHz
Bessel	1	1,582 kHz

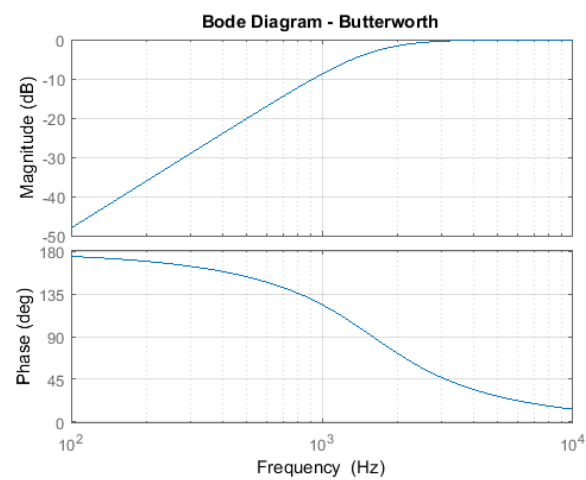
Tabelle 2: Hochpassfilter - Grundverstärkung  $V_{\infty}$ , Grenzfrequenz  $f_g$ **Bodeplot der HP-Filter Butterworth, Tschebyscheff und Bessel.**

Abbildung 4: Amplituden- und Phasengang vom Butterworth-Hochpassfilter

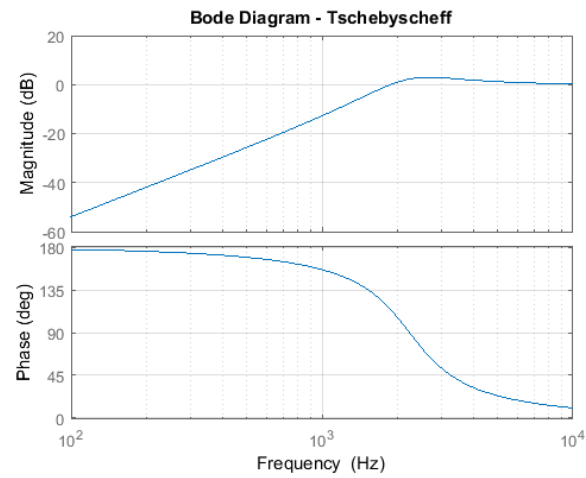


Abbildung 5: Amplituden- und Phasengang vom Tschebyscheff-Hochpassfilter

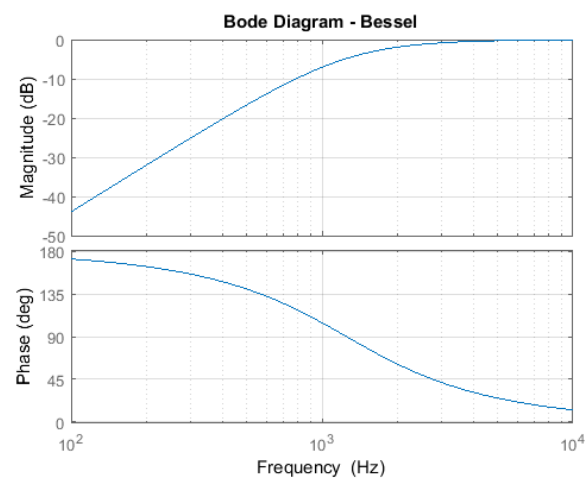


Abbildung 6: Amplituden- und Phasengang vom Bessel-Hochpassfilter

### 1.1.3 Bandpass

Die vereinfachte Formel für den Bandpassfilter hergeleitet vom Universalfilter kann der Allgemeinen Übertragungsfunktion eines Bandpasses gleichgesetzt und so die Parameter bestimmt werden.

$$H_{BP}(j\omega) = V_{max} \cdot \frac{A \cdot j\omega}{1 + A \cdot j\omega + b \cdot (j\omega)^2} \iff -\frac{R_0}{R_a} \cdot \frac{\frac{R_0}{R_c} \cdot (j\omega\tau)}{1 + \frac{R_0}{R_c} \cdot (j\omega\tau) + (j\omega\tau)^2} \quad (36)$$

Dadurch ergeben sich die nachfolgenden Parameter:

$$A = \frac{R_0}{R_c} \quad (37)$$

$$b = \tau^2 \quad (38)$$

$$V_{max} = -\frac{R_0}{R_a} \quad (39)$$

Das Maximum des Bandpassfilter wird erreicht wenn der Imaginärteil des Nenner  $= 0$  ist. Somit entspricht  $V_{max}$  dem erreichbaren Maximum. An diesem Punkt befindet sich die Mittenfrequenz  $f_0$ .

$$H_{BP}(j\omega) = V_{max} \cdot \frac{1}{\frac{1}{j\omega \cdot A} + 1 + \frac{j\omega \cdot b}{A}} \quad (40)$$

$$\Rightarrow V_{max} \cdot \frac{1}{1 + j \left( \frac{b}{A} \cdot \omega - \frac{1}{A \cdot \omega} \right)} \quad (41)$$

$$0 = \frac{b}{A} \cdot \omega - \frac{1}{A \cdot \omega} \quad (42)$$

$$\frac{1}{A \cdot \omega} = \frac{b}{A} \cdot \omega \quad (43)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{b}} \quad (44)$$

$$f_0 = \frac{1}{\tau} \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} = 1,592 \text{ kHz} \quad (45)$$

$$V_{f_0} = 1 \quad (46)$$

Die zwei zu berechnenden Grenzfrequenzen können nach der Definition  $H_{BP}(j\omega_g) = |H_{BP}(j\omega)|_{max} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$  berechnet werden.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{V_{max} \cdot A \cdot \omega}{\sqrt{(1 - b \cdot \omega^2)^2 + A^2 \cdot \omega^2}} \quad (47)$$

$$0 = x^2 + \frac{A^2 - 2 \cdot b - 2 \cdot A^2 \cdot V_{max}}{b^2} \cdot x + \frac{1}{b^2} \quad (48)$$

Bestimmen der Möglichen Frequenzen:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{2} - q} \quad (49)$$

$$w_{g1} = +\sqrt{x1} \quad (50)$$

$$w_{g2} = -\sqrt{x1} \quad (51)$$

$$w_{g3} = +\sqrt{x2} \quad (52)$$

$$w_{g4} = -\sqrt{x2} \quad (53)$$

$$f_{gu} = 1,4395kHz \quad (54)$$

$$f_{go} = 1,7597kHz \quad (55)$$

$$B = f_{go} - f_{gu} = 320,2Hz \quad (56)$$

**Bodeplot Bandpass:**

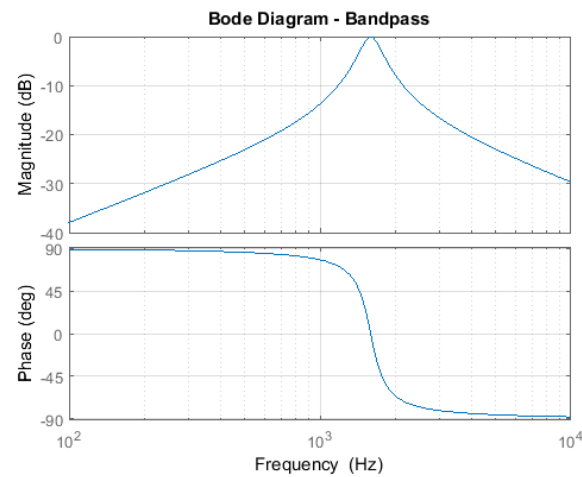


Abbildung 7: Amplituden- und Phasengang des Bandpassfilter

### 1.1.4 Bandsperre

Die vereinfachte Formel für den Bandpassfilter hergeleitet vom Universalfilter kann der Allgemeinen Übertragungsfunktion eines Bandpasses gleichgesetzt und so die Parameter bestimmt werden.

$$H_{BS}(j\omega) = V_0 \cdot \frac{1 + (j\omega)^2}{1 + A \cdot j\omega + b \cdot (j\omega)^2} \iff -\frac{R_0}{R_a} \cdot \frac{1 + (j\omega\tau)^2}{1 + \frac{R_0}{R_c} \cdot (j\omega\tau) + (j\omega\tau)^2} \quad (57)$$

Dadurch ergeben sich die nachfolgenden Parameter:

$$A = \frac{R_0}{R_c} \cdot \tau \quad (58)$$

$$b = \tau^2 \quad (59)$$

$$V_0 = -\frac{R_0}{R_a} \quad (60)$$

Das Maximum der Bandsperre kann für  $\lim_{\omega \rightarrow \infty}$  oder  $\lim_{\omega \rightarrow 0}$  bestimmt werden und strebt gegen 1. Somit kann nach der Definition  $H_{BS}(j\omega_g) = |H_{HP}(j\omega)|_{\max} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$  die Gleichung nach  $\omega_g$  aufgelöst werden.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{|V_0| \cdot |1 - b\omega^2|}{\sqrt{(1 - b \cdot \omega^2)^2 + A \cdot \omega^2}} \quad (61)$$

$$\sqrt{(1 - b \cdot \omega^2)^2 + A \cdot \omega^2} = |V_0| \cdot |1 - b\omega^2| \cdot \sqrt{2} \quad (62)$$

$$0 = x^2 + \frac{A^2 - 2 \cdot b + 4 \cdot bV_0^2}{b^2 - 2 \cdot b^2V_0^2} \cdot x + \frac{1 - 2 \cdot V_0^2}{b^2 - 2 \cdot b^2V_0^2} \quad (63)$$

Bestimmen der Möglichen Frequenzen:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{2} - q} \quad (64)$$

$$w_{g1} = +\sqrt{x1} \quad (65)$$

$$w_{g2} = -\sqrt{x1} \quad (66)$$

$$w_{g3} = +\sqrt{x2} \quad (67)$$

$$w_{g4} = -\sqrt{x2} \quad (68)$$

$$f_{gu} = 1,4395 \text{ KHz} \quad (69)$$

$$f_{go} = 1,7597 \text{ KHz} \quad (70)$$

$$B = f_{go} - f_{gu} = 320,24 \text{ Hz} \quad (71)$$

$$f_0 = \sqrt{f_{go} \cdot f_{gu}} = \sqrt{1,7597 \text{ kHz} * 1,4395 \text{ kHz}} = 1,5916 \text{ kHz} \quad (72)$$

**Bodeplot der Bandsperre:**

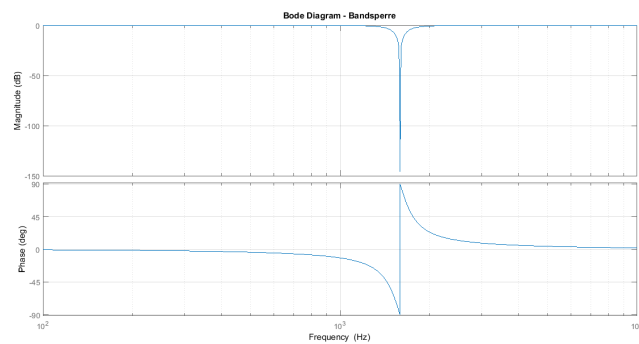


Abbildung 8: Amplituden- und Phasengang der Bandsperre



## 2 Messungen

### 2.1 Verwendete Geräte

- Oszilloskop
  - Tektronix TDS 3014C Digital Phosphor Oszilloscope
- Puls-Generator
  - Hewlett Packard 33120A 15MHz Function/Arbitrary Waveform Generator
- Kabel
  - 1m BNC Kabel
- Audio Analyzer
  - Rhode & Schwarz UPV Audio Analyzer DC...250kHz
- Messobjekt
  - Universalfilter
- BNC Stecker - T-Stücke

## 2.2 Messung von Amplituden- und Phasengang

In diesem Versuch geht es darum, die Amplituden und Phasengänge der Butterworth-, Tschebyscheff- und Bessel-Tiefpässe und die Amplitudengänge der Butterworth-, Tschebyscheff- und Bessel-Hochpässe sowie des Bandpasses und der Bandsperre mittels dem Audio-Analyzer UVP zu messen. Die folgende Tabelle zeigt unsere gemessenen Grenzfrequenzen der Tiefpässe/Hochpässe. Die Graphen sind im Anhang zu finden.

	Butterworth	Tschebyscheff	Bessel
Tiefpass	$1.538kHz$	$1.557kHz$	$1.551kHz$
Hochpass	$1.596kHz$	$1.592kHz$	$1.610kHz$

Tabelle 3: Gemessenen Grenzfrequenzen der verschiedenen Tiefpässe/Hochpässe

Anschließend ging es darum, die Phasengänge der oben genannten Filtertypen für den Tiefpass zu messen. Die Frequenzen bei einer Phasenverschiebung von  $-60^\circ$  und  $-120^\circ$  wurden bestimmt und in die folgende Tabelle eingetragen. Auch diese Graphen sind im Anhang zu finden.

	Butterworth	Tschebyscheff	Bessel
$-60^\circ$	$1.046kHz$	$898.250kHz$	$1.229kHz$
$-120^\circ$	$2.381kHz$	$1.400kHz$	$3.225kHz$

Tabelle 4: Frequenzen bei einer Phasenverschiebung von  $-60^\circ$  und  $-120^\circ$

Schließlich wurden die Mittenfrequenz und Sperrfrequenz des Bandpasses sowie der Bandsperre gemessen. Ergebnisse sind der folgenden Tabelle zu entnehmen. Für die Graphen siehe Anhang.

	Mittenfrequenz	Sperrfrequenz
Bandpass	$1.556kHz$	-
Bandsperre	-	$1.568kHz$

Tabelle 5: Mittenfrequenz und Sperrfrequenz des Bandpasses sowie der Bandsperre

## 2.3 Sprungantworten der Tiefpässe

In diesem Versuch geht darum, die Anstiegszeit, Überschwingen und die Einstiegszeit der drei Tiefpässe nach Butterworth, Tschebyscheff und Bessel aus der Sprungantwort zu bestimmen. Die Filter wird mit einem Rechtecksignal ( $500mV_{pp}$  und  $250mv$  Offset und variabler Frequenz) angesteuert. Eingangs- und Ausgangssignal werden in einem gemeinsamen Oszillogramm dargestellt. Der Messaufbau ist in der nachfolgenden Abbildung zu sehen.

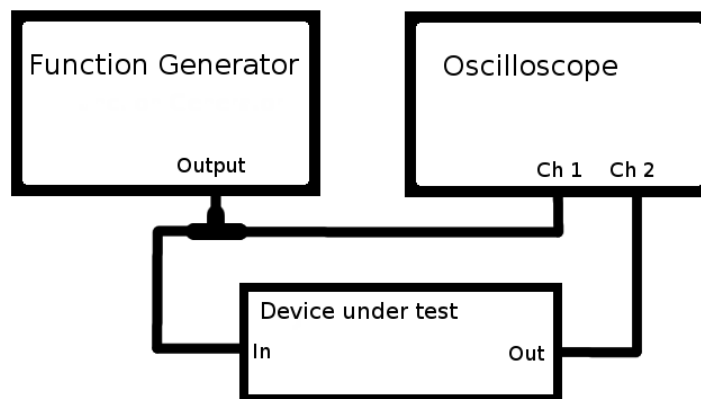


Abbildung 9: Messaufbau zum Messen der Sprungantwort

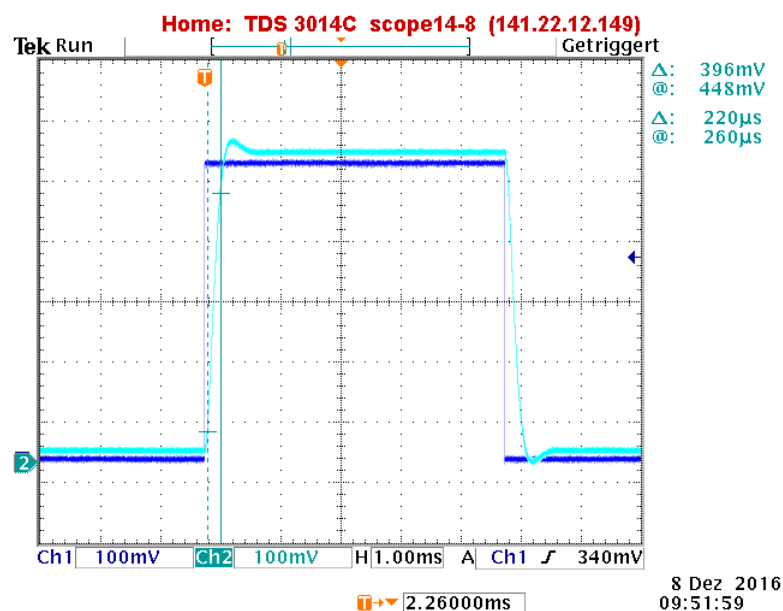


Abbildung 10: Sprungantwort Butterworth-Tiefpass

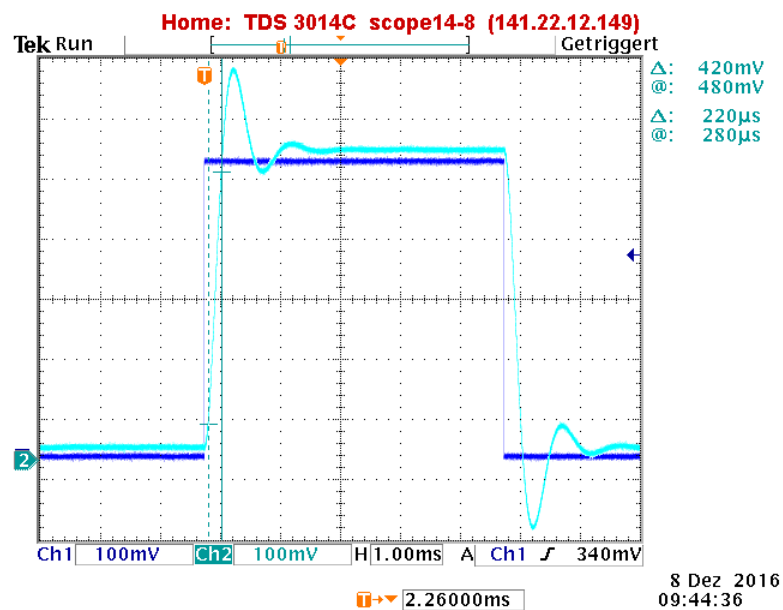


Abbildung 11: Sprungantwort Tschebyscheff-Tiefpass

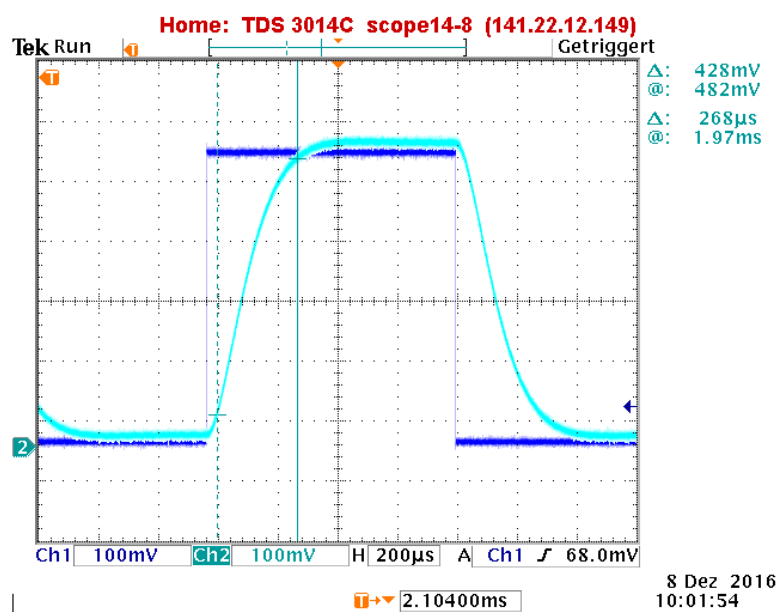


Abbildung 12: Sprungantwort Bessel-Tiefpass

### 3 Auswertung

#### 3.1 Zu: Messung von Amplituden- und Phasengang

##### 3.1.1 Grenzfrequenzen Tiefpässe/Hochpässe

Alle Messwerte der Grenzfrequenzen werden zusammen mit den vorausberechneten Werten in einer Tabelle dargestellt und verglichen.

		$f_{g,rech}$	$f_{g,mess}$	$\Delta f_g$	$\Delta f_g$ [%]
Butterworth	TP	$1.573kHz$	$1.538kHz$	$35Hz$	2,23
	HP	$1.611kHz$	$1.596kHz$	$15Hz$	0,93
Tschebyscheff	TP	$1.578kHz$	$1.557kHz$	$21Hz$	1,33
	HP	$1.606kHz$	$1.592kHz$	$14Hz$	0,87
Bessel	TP	$1.585kHz$	$1.551kHz$	$34Hz$	2,15
	HP	$1.582kHz$	$1.610kHz$	$28Hz$	1,77

Tabelle 6: Vergleich der Werte, Tiefpässe und Hochpässe

Geringe Messabweichungen ergeben sich zunächst aus dem Messgraphen des Audioanalyzers, da der Cursor nicht immer auf genau -3dB eingestellt werden kann, die Messpunkte des Messgeräts variieren. Zudem haben die verwendeten Widerstände nur idealer Weise die nominalen Werte, diese variieren auch. Mit Abweichungen von maximal 2,23% kann von einer relativ guten Messung ausgegangen werden.

##### 3.1.2 Mittenfrequenz/Sperrfrequenz des Bandpasses/der Bandsperre

Die gemessenen Frequenzen werden zusammen mit den vorausberechneten Werten in einer Tabelle dargestellt und anschließend verglichen. Im folgenden wird  $f_m$  die Mittenfrequenz sein und  $f_s$  die Sperrfrequenz.

	$f_{m,rech}$	$f_{m,mess}$	$\Delta f_m$	$\Delta f_m$ [%]	$f_{s,rech}$	$f_{s,mess}$	$\Delta f_s$	$\Delta f_s$ [%]
Bandpass	$1.556kHz$	$1.591kHz$	$35Hz$	2,25	-	-	-	-
Bandsperre	-	-	-	-	$1.568kHz$	$1.592kHz$	$24Hz$	1,53

Tabelle 7: Vergleich der Werte, Bandpass und Bandsperre

Auch hier ergeben sich die geringen Abweichungen durch die zuvor beschriebenen Umstände.

### 3.1.3 Gemessenen Frequenzen bei einer Phasenverschiebung

Die gemessenen Frequenzen bei gewählten Phasenverschiebungen werden in einer Tabelle dargestellt und anschließend mit den errechneten Werten verglichen. Die folgenden Messungen beziehen sich auf die Tiefpässe der jeweiligen Arten.

	$f_{mess,-60^\circ}$	$f_{mess,-120^\circ}$
Butterworth	$1.046kHz$	$2.381kHz$
Tschebyscheff	$898.250kHz$	$1.400kHz$
Bessel	$1.229kHz$	$3.225kHz$

Tabelle 8: Gemessene Frequenzen bei einer Phasenverschiebung von  $-60^\circ$ ,  $-120^\circ$

Aus den bei einer bestimmten Phasenverschiebung gemessenen Frequenzen ist es möglich die Koeffizienten der drei Filterarten zu bestimmen. Für einen Tiefpass bestimmter Art der 2. Ordnung gilt:

$$\begin{aligned}
arg\underline{H}_{TP}(\Omega) &= arg(V_0) - arctan\left(\frac{a_1 \cdot \Omega}{1 - b_1 \cdot \Omega^2}\right) \\
tan(arg\underline{H}_{TP}(\Omega)) &= tan(0) - \frac{a_1 \cdot \Omega}{1 - b_1 \cdot \Omega^2} \\
a_1 &= \frac{\left(-tan(arg\underline{H}_{TP}(\Omega))\right)\left(1 - b_1 \cdot \Omega^2\right)}{\Omega} \\
\frac{\left(-tan(arg\underline{H}_{TP}(\Omega_{-60^\circ}))\right)\left(1 - b_1 \cdot \Omega_{-60^\circ}^2\right)}{\Omega_{-60^\circ}} &= \frac{\left(-tan(arg\underline{H}_{TP}(\Omega_{-120^\circ}))\right)\left(1 - b_1 \cdot \Omega_{-120^\circ}^2\right)}{\Omega_{-120^\circ}} \\
\frac{\left(-tan(-60^\circ)\right)\left(1 - b_1 \cdot \Omega_{-60^\circ}^2\right)}{\Omega_{-60^\circ}} &= \frac{\left(-tan(-120^\circ)\right)\left(1 - b_1 \cdot \Omega_{-120^\circ}^2\right)}{\Omega_{-120^\circ}} \\
\frac{\left(\sqrt{3}\right)\left(1 - b_1 \cdot \Omega_{-60^\circ}^2\right)}{\Omega_{-60^\circ}} &= \frac{\left(-\sqrt{3}\right)\left(1 - b_1 \cdot \Omega_{-120^\circ}^2\right)}{\Omega_{-120^\circ}} \\
\rightarrow b_1 &= \frac{\sqrt{3} \cdot \Omega_{-120^\circ} + \sqrt{3} \cdot \Omega_{-60^\circ}}{\sqrt{3} \cdot \Omega_{-120^\circ} \cdot \Omega_{-60^\circ}^2 + \sqrt{3} \cdot \Omega_{-60^\circ} \cdot \Omega_{-120^\circ}^2}
\end{aligned}$$

Anschließend es ist möglich mit einer gegebenen Frequenz und  $b_1$  den Koeffizienten  $a_1$  zu berechnen:

$$\begin{aligned}
 \arg \underline{H}_{TP}(\Omega) &= \arg(V_0) - \arctan\left(\frac{a_1 \cdot \Omega}{1 - b_1 \cdot \Omega^2}\right) \\
 \tan(\arg \underline{H}_{TP}(\Omega)) &= \tan(0) - \frac{a_1 \cdot \Omega}{1 - b_1 \cdot \Omega^2} \\
 \rightarrow a_1 &= \frac{\left(-\tan(\arg \underline{H}_{TP}(\Omega))\right) \left(1 - b_1 \cdot \Omega^2\right)}{\Omega}
 \end{aligned}$$

Aus den Berechnungen ergeben sich folgende Ergebnisse:

	$a_{1,errechnet}$	$a_{1,ideal}$	$\Delta a_1$ [%]	$b_{1,errechnet}$	$b_{1,ideal}$	$\Delta b_1$ [%]
<i>Butterworth</i>	1.4279	1.414	0.98	0.9498	1	5.02
<i>Tschebyscheff</i>	1.076	1.065	1.03	1.928	1.931	0.16
<i>Bessel</i>	1.353	1.362	0.66	0.607	0.618	1.78

Tabelle 9: Gegenüberstellung: errechnete und ideale Koeffizienten

### 3.2 Zu: Sprungantworten der Tiefpässe

Die Anstiegszeit, das Überschwingen sowie die Einschwingzeit der drei Tiefpässe wurden gemeinsam in einer Tabelle zusammengefasst und verglichen.

	Anstiegszeit	Überschwingen	Einschwingzeit
Butterworth	$220\mu s$	4.86%	$320\mu s$
Tschebyscheff	$220\mu s$	27.24%	$1.06ms$
Bessel	$268\mu s$	0%	$308\mu s$

Tabelle 10: Anstiegszeit, Überschwingen und Einschwingzeit der drei Tiefpässe

Die Werte wurden den Oszillogrammen entnommen. Diese sind im Anhang zu finden. In Tabelle 10 fällt auf, dass bei dem Tschebyscheff Tiefpass ein relativ großer Überschwinger stattfindet. Werden die benutzten Widerstände überprüft, da diese die drei verschiedenen Schaltungen unterscheiden, kann erkannt werden, dass die Widerstände  $R_a$ ,  $R_b$ ,  $R_c$  und  $R_f$  bei jeder gleich bleiben. Der Widerstand  $R_e$  ändert sich geringfügig und der Widerstand  $R_d$  erfährt große Änderungen. Dadurch kann folgende Theorie aufgestellt werden: Wird der Widerstand  $R_d$  erhöht, verringert sich das Überschwingen und wird dieser reduziert, erhöht sich das Überschwingen in der Sprungantwort. Diese Theorie kann mit einer Spice-Simulation bestätigt werden. Dadurch ist nun auch bekannt, dass sowie der Widerstand  $R_e$  erhöht wird, das Überschwingen sich auch erhöht. Wird dieser reduziert, nimmt das Überschwingen auch ab.



---

# Literatur