[redacted]

$x_n = \delta_{n+1} + 2\delta_n + \delta_{n-1}$ $\qquad$ $y_n = \delta_{n+2} + 2\delta_{n+1} - 2\delta_{n-1} - \delta_{n-2}$

$X(z) = z^{+1} + 2 + z^{-1}$ $\qquad$ $Y(z) = z^{+2} + 2z^{+1} - 2z^{-1} - z^{-2}$

$y_n = h_n * x_n$

$Y(z) = H(z) \cdot X(z)$ $\qquad$ $y_n = h_n * x_n$

$(z^2 + 2z - 2z^{-1} - z^{-2}) = H(z) \cdot (z^1 + 2 + z^{-1})$ $\rightarrow$ nicht kausal da Ausgang vor Eingang ✓

$$H(z) = \frac{z + 2 + z^{-1}}{z^2 + 2z - 2z^{-1} - z^{-2}} \quad \Big| \cdot \frac{z^2}{z^2}$$

$$= \frac{z^3 + 2z^2 + z}{z^4 + 2z^3 - 2z^2 - 1}$$

$z_1 = -1$

$(z^4 + 2z^3 - 2z - 1) : (z+1) = z^3 + z^2 - 2z - 1$

$-(z^4 + z^3)$

$z^3 - 2z$

$-(z^3 + z^2)$

$-z^2 - 2z$

$-(-z^2 - z)$

$-z - 1$

$-(-z - 1)$

0

$(z^3 + z^2 - z - 1) : (z-1) = z^2 + 2z + 1$

$-(z^3 - z^2)$

$2z^2 - z$

$-(2z^2 - 2z)$

$z - 1$

$z_{3/4} = -1 \pm \sqrt{(1) - 1}$

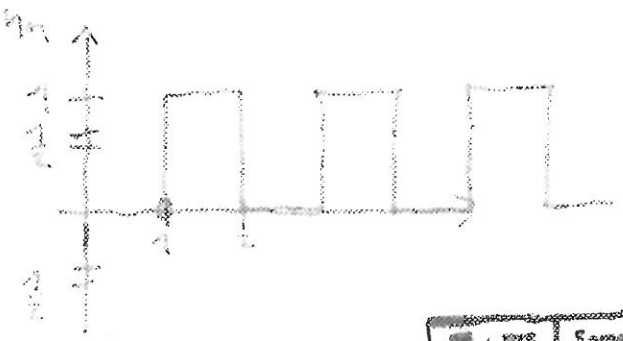
$= -1$

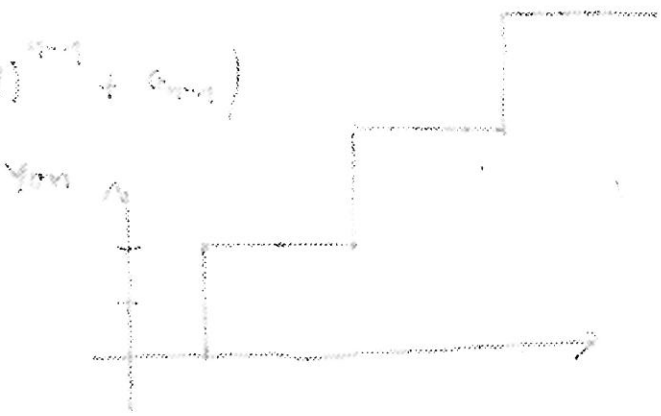
$$= \frac{z(\cancel{z^2 + 2z + 1})}{(z+1)(z-1)(\cancel{z^2 + 2z + 1})} = \frac{z}{(z+1)(z-1)} \quad \Big| \begin{array}{l} k_1 = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} \\ k_2 = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{array}$$

$$= \frac{k_1}{z+1} + \frac{k_2}{z-1}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+1} + \frac{1}{z-1}\right) \longrightarrow h_n = \frac{1}{2}\left((-1)^{n-1} + 1\right)$$

$$y_{ges,n} = \sum_{k=0}^{\infty} h_n = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left((-1)^{n-1} + 1\right)$$





Jahr, WS	Semester	Fach	Dozent
14/15	E4b	SS2	RAU

FSR - Klausurensammlung

[redacted]

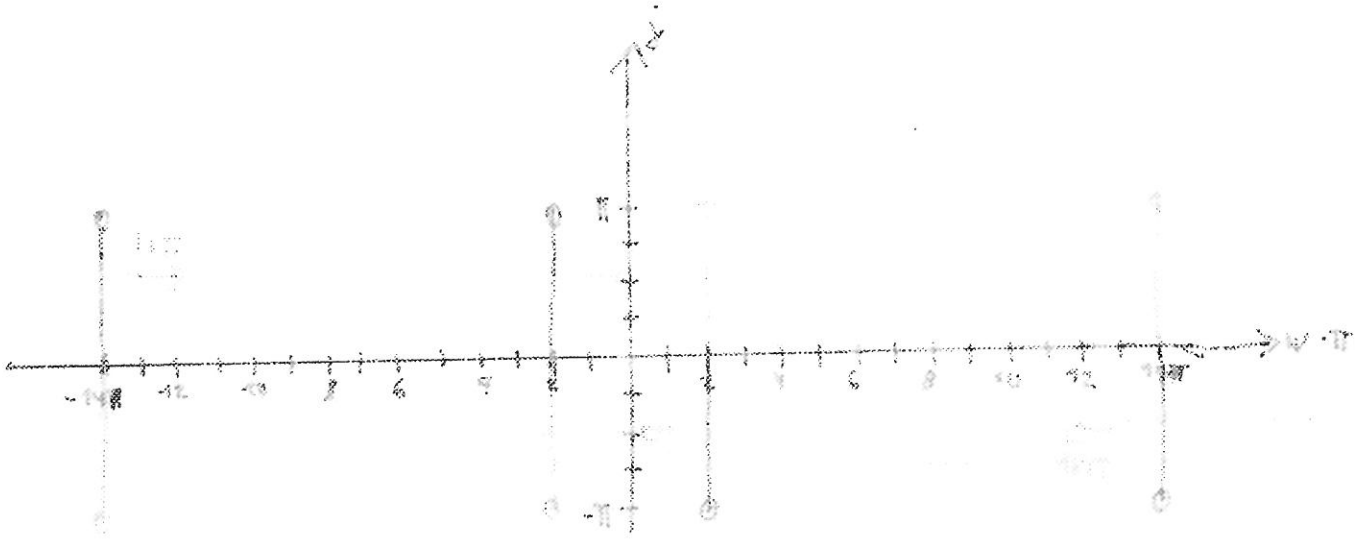
2)

$x(t) = \sin(2\pi t) + \sin(14\pi t)$

$X(j\omega) = \frac{\pi}{j}\left(\delta(\omega-2\pi) - \delta(\omega+2\pi)\right) + \frac{\pi}{j}\left(\delta(\omega-14\pi) - \delta(\omega+14\pi)\right)$

$= j\pi\left(-\delta(\omega-2\pi) + \delta(\omega+2\pi)\right) + j\pi\left(-\delta(\omega-14\pi) + \delta(\omega+14\pi)\right)$

$f_a = 8\,Hz \rightarrow \omega_a = 2\pi\, 8\,Hz = 16\pi$



Durch die Abtastung wird das Signal so verschoben, dass es sich auslöscht.

SS / WS	Semester	Fach	Dozent
14/15	E46	SS2	RAU

FSR - Klausurensammlung

[redacted]

5)

$$y_n - \frac{1}{4} y_{n-1} - \frac{1}{8} y_{n-2} = x_n - 2x_{n-1}$$

$$y_n - \frac{1}{4} y_{n-1} - x_n + 2x_{n-1} = \frac{1}{8} y_{n-2} \qquad \Big| \; x_n^{(1)} = \frac{1}{8} y_{n-2}$$

$$y_n - x_n = x_{n-1}^{(1)} + \frac{1}{4} y_{n-1} - 2x_{n-1} \qquad \Big| \; x_n^{(2)} = x_{n-1}^{(1)} + \frac{1}{4} y_{n-1} - 2x_{n-1}$$

$$y_n = x_n^{(2)} + x_n$$

$$x_n^{(1)} = \frac{1}{8} y_{n-1} = \frac{1}{8} x_{n-1}^{(2)} + \frac{1}{8} x_{n-1}$$

$$x_n^{(2)} = x_{n-1}^{(1)} + \frac{1}{4} y_{n-1} - 2x_{n-1} = x_{n-1}^{(1)} + \frac{1}{4} x_{n-1}^{(2)} + \frac{1}{4} x_{n-1} - 2x_{n-1}$$

$$= x_{n-1}^{(1)} + \frac{1}{4} x_{n-1}^{(2)} - \frac{7}{4} x_{n-1}$$

$$\begin{pmatrix} x_n^{(1)} \\ x_n^{(2)} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{8} \\ 1 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_{n-1}^{(1)} \\ x_{n-1}^{(2)} \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{8} \\ -\frac{7}{4} \end{pmatrix}}_{b} x_{n-1}$$

$$y_n = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}}_{c^T} \begin{pmatrix} x_n^{(1)} \\ x_n^{(2)} \end{pmatrix} + \underbrace{1}_{d} \, x_n$$

WS	Semester	Fach	Dozent
14/15	EGb	SS2	RAU

FSR - Klausurensammlung

[redacted]

WS 1445 | Semester E4b | Fach SS2 | Dozent RAU
FSR - Klausurensammlung

4)

$$H(z) = c^T (z \cdot E - A)^{-1} \vec{b} + 1$$

$$= (0,1) \left(z \cdot E - \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}a^2 \\ 1 & \frac{1}{2}a \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a^2 \\ \frac{1}{2}a - \frac{1}{a} \end{pmatrix} + 1$$

$$= (0,1) \begin{pmatrix} z & -\frac{1}{2}a^2 \\ -1 & z - \frac{1}{2}a \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a^2 \\ \frac{1}{2}a - \frac{1}{a} \end{pmatrix} + 1$$

$$= (0,1) \frac{1}{z(z - \frac{1}{2}a) - \frac{1}{2}a^2} \begin{pmatrix} z - \frac{1}{2}a & \frac{1}{2}a^2 \\ 1 & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a^2 \\ \frac{1}{2}a - \frac{1}{a} \end{pmatrix} + 1$$

$$= \frac{1}{z^2 - \frac{1}{2}az - \frac{1}{2}a^2} \begin{pmatrix} 1 & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a^2 \\ \frac{1}{2}a - \frac{1}{a} \end{pmatrix} + 1$$

$$= \frac{1}{z^2 - \frac{1}{2}az - \frac{1}{2}a^2} \left(\frac{1}{2}a^2 + z\left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{a}\right) \right) + 1$$

$$= \frac{z\left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{a}\right) + \frac{1}{2}a^2}{z^2 - \frac{1}{2}az - \frac{1}{2}a^2} + 1$$

Stabilität: $0 = z^2 - \frac{1}{2}az - \frac{1}{2}a^2$

$$z_{1,2} = \frac{1}{4}a \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}a\right)^2 + \frac{1}{2}a^2} = \frac{1}{4}a \pm \sqrt{a^2\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{4}a \pm a\sqrt{\frac{9}{16}}$$

$$= \frac{1}{4}a \pm \frac{3}{4}a \rightarrow z_1 = \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right)a = a \rightarrow |a| \leq 1$$

$$z_2 = \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right)a = \left(-\frac{1}{2}\right)a \rightarrow a \geq 0$$

Nur stabil für den kritischen Fall $a=0$, da dann aber zwei Pole auf $\mathbb{U}$ sind, ist es auch dann instabil. $\rightarrow$ kein a stabil!

$a = 1$:

$$H(z) = \frac{z\left(\frac{1}{4} - 1\right) + \frac{1}{2} \cdot 1}{z^2 - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}} + 1 = \frac{-\frac{3}{4}z + \frac{1}{2}}{z^2 - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}} + 1$$

$0 = -\frac{3}{4}z + \frac{1}{2} \rightarrow z = 1$

$0 = z^2 - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}$

$$z_{1,2} = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16}}$$

$$= \frac{1}{4} \pm \frac{3}{4} \quad \begin{matrix} z_1 = 1 \\ z_2 = -\frac{1}{2} \end{matrix}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\cancel{(z-1)}}{\cancel{(z-1)}(z + \frac{1}{2})} + 1 = \frac{1}{2} z^{-1} \frac{z}{z + \frac{1}{2}} + 1$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet \; \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \sigma_{n-1} + \delta_n$$

[redacted]

5) $f_D = \frac{2 \cdot v}{1{,}25\,cm}$ $\quad f_a = 24\,kHz$ $\quad T = 0{,}5\,s \rightarrow \Delta f$?

4/4

v_{max}: $f_a > 2 f_g$

$f_a > 2 f_D$

$f_a > \frac{4 v}{1{,}25\,cm}$

$24\,kHz > \frac{4 v}{1{,}25\,cm}$ $\quad | \cdot 1{,}25\,cm$

$24 \cdot 12 + 0{,}5 \cdot 24$

$240 + 48 + 12 = 300$

$\frac{24\,kHz \cdot 1{,}25\,cm}{4} > v$

$\frac{24 \cdot 1{,}25 \cdot 10^3 \cdot 10^{-2}}{4} = \frac{24 \cdot 1{,}25 \cdot 10\,m}{4\,s} = \frac{24 \cdot 12{,}5\,m}{4\,s} = \frac{300}{4}\frac{m}{s} > \underline{\underline{v}}$

$v_{max} = \frac{300}{4}\frac{m}{s}$ ✓ (ein bisschen weniger)

$\Delta f = \frac{f_a}{N}$ $\quad T = \frac{N}{f_a} \rightarrow N = T \cdot f_a$

$\Delta f = \frac{\cancel{f_a}}{T \cdot \cancel{f_a}} = \frac{1}{0{,}5\,s} = \underline{\underline{2\,Hz}}$

$\Delta f_d = \frac{2 \Delta v}{1{,}25\,cm}$

$\frac{\Delta f_d \cdot 1{,}25\,cm}{2} = \Delta v$

$\frac{2\,Hz \cdot 1{,}25 \cdot 10^{-2}\,m}{2}$ $\quad 1{,}25 \cdot 10^{-2}\frac{m}{s} = \Delta v$

$1{,}25\frac{cm}{s} = \underline{\underline{\Delta v}}$ ✓

WS	Semester	Fach	Dozent
14/15	E4b	SS2	RAU

FSR - Klausurensammlung

[redacted]

12/16

6)

$$(2+b)\,y_n + (2-b)\,y_{n-2} = 2x_n + 2x_{n-2} \qquad \Big|\ b \in \mathbb{R},\ 0 \le b \le 2$$

$$Y(z)\left((2+b) + (2-b)z^{-2}\right) = X(z)\cdot\left(2 + 2z^{-2}\right)$$

$$H(z) = \frac{(2+2z^{-2})}{(2+b)+(2-b)z^{-2}} = \cancel{\frac{2+2z^{-2}}{2+b+2z^{-2}}}$$

$$= \frac{2z^2+2}{(2+b)z^2+(2-b)} \qquad \rightarrow 0 = (2+b)z^2+(2-b)$$

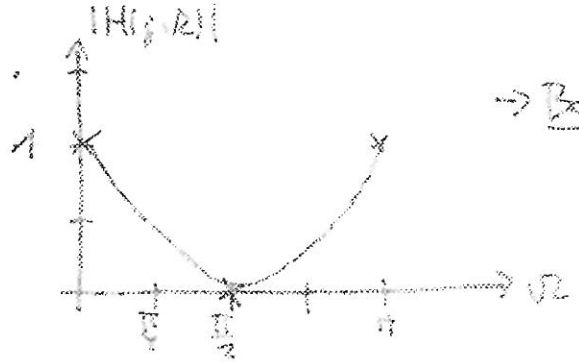
$$\sqrt{\frac{b-2}{2+b}} = z \rightarrow \text{stabil} \rightarrow z = e^{j\Omega}$$

$$H(j\Omega) = \frac{2e^{j2\Omega}+2}{(2+b)e^{j2\Omega}+(2-b)} = \frac{2\cancel{e^{j\Omega}}\left(e^{j\Omega}+e^{-j\Omega}\right)}{\cancel{e^{j\Omega}}\left((2+b)e^{j\Omega}+(2-b)e^{-j\Omega}\right)}$$

$$= \frac{4\cdot\cos(\Omega)}{2\left(e^{j\Omega}+e^{-j\Omega}\right)+b\left(e^{j\Omega}-e^{-j\Omega}\right)}$$

$$= \frac{4\cdot\cos(\Omega)}{4\cdot\cos(\Omega)+b\cdot 2j\sin(\Omega)} = \frac{1}{1+b\cdot\frac{1}{2}j\frac{\sin(\Omega)}{\cos(\Omega)}} = \frac{1}{1+j\frac{1}{2}b\tan(\Omega)}$$

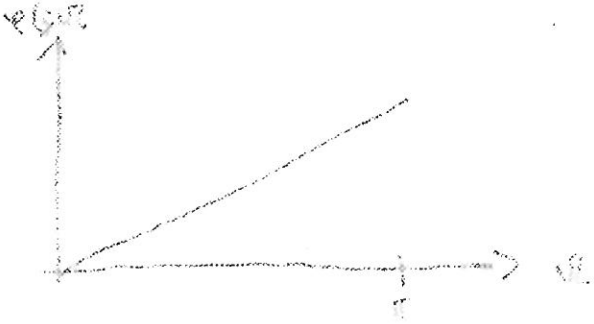
$$|H(j\Omega)| = \frac{|z(j\Omega)|}{|N(j\Omega)|} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}b\tan\Omega\right)^2}} = \frac{4|\cos(\Omega)|}{\sqrt{16\cos^2(\Omega)+4b\sin^2(\Omega)}}$$



→ Bandsperre

$$H(j\Omega) = \frac{1}{1+jb\frac{1}{2}\tan(\Omega)} = \frac{1-jb\frac{1}{2}\tan(\Omega)}{\dots}$$

$$\varphi(j\Omega) = \arctan\left(\frac{-b\frac{1}{2}\tan(\Omega)}{1}\right) = \Omega\ \arctan\left(-b\frac{1}{2}\right)$$



Sk. / WS	Semester	Fach	Dozent
14/15	E4b	SS2	RAU

FSR - Klausurensammlung

12/16

[redacted]

6)

b) $b = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{\left(1+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\tan(\Omega)\right)\right)^2} = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan(\Omega)\right)^2} = \frac{1}{1+\frac{1}{3}\tan^2(\Omega)}$$

$2 = 1 + \frac{1}{3}\tan^2(\Omega) \quad | -1 \quad \cdot 3$

$3 = \tan^2(\Omega) \quad | \sqrt{\ }$

$\pm\sqrt{3} = \tan(\Omega) = \frac{\sin(\Omega)}{\cos(\Omega)}$

$\Omega_1 = \frac{\pi}{3}$ ✓ $\quad \Omega_2 = \cancel{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi + 2\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}}$

$\Omega_2 = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$ ✓

rein sch.

$\omega_g = \tan\left(\frac{\Omega_g}{2}\right)$

$\omega_{g1} = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ Hz $\quad \omega_{g2} = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$ Hz

$f_{g1} = \frac{3\cdot\sqrt{3}}{2\pi}$ Hz $\quad f_{g2} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi}$ Hz

WS	Semester	Fach	Bezeichnung
14/15	E4b	SS2	RAU

FSR - Klausurensammlung

[redacted]

7) $R_n = X_n \cdot Y_n + Y_n$ $\quad X[0,2]$ $\quad Y[-1,1]$ $\quad \underbrace{}_{f(x) = \frac{1}{2}}$

$\int_0^2 c\,dx = c \cdot x \Big|_0^2 = 1$ 5/6

$c(2) = 1$

$c = \frac{1}{2}$

$E(R_n) = E(X_n)E(Y_n) + E(Y_n)$

$E(X_n) = \int_0^2 \frac{1}{2} x\,dx = \frac{1}{4} x^2 \Big|_0^2 = \frac{1}{4} \cdot 2^2 = \underline{\underline{1}}$

$E(Y_n) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} y\,dy = \frac{1}{4} y^2 \Big|_{-1}^{1} = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) = \underline{\underline{0}}$

$E(R_n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \underline{\underline{1}}$

$V(R_n) = E(R_n^2) - E^2(R_n)$

$E(R_n^2) = E(X_n^2 \cdot Y_n^2 + 2X_nY_n^2 + Y_n^2)$

$= E(X_n^2) \cdot E(Y_n^2) + 2E(X_n) \cdot E(Y_n^2) + E(Y_n^2)$

$E(X_n^2) = \int_0^2 \frac{1}{2} x^2\,dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^2 = \frac{1}{6} 2^3 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

$E(Y_n^2) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} y^2\,dy = \frac{1}{6} y^3 \Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{6}(1+1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$E(R_n^2) = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$

$= \frac{4}{9} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{4}{9} + 1 = \underline{\underline{\frac{13}{9}}}$

$V(R_n) = \frac{13}{9} - 1 = \underline{\underline{\frac{4}{9}}}$

$r_{RR}(k) = \delta_k \cdot V(R_n) + E^2(R_n)$

$= \delta_k \cdot \frac{4}{9} + 1$ $\rightarrow$ stationär im weiteren Sinne, da $E(X_n)$, $V(R_n)$, $r_{RR}(k)$ unabhängig von n

$S_{RR}(j\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_{RR}(k)\, e^{-jk\Omega}$

$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\delta_k \frac{4}{9} + 1\right) e^{-jk\Omega}$

$= \underline{\underline{\frac{4}{9} + 2\pi\, \text{Ш}_{2\pi}(\Omega)}}$

Wi / WS	Semester	Fach	Dozent
14/15	E4b	SS2	RAU

FSR - Klausurensammlung

14/16

[redacted]

8)

$$x_t = 4\sin(40\pi t)\cdot\cos(20\pi t) + N_t$$

$$x_s = 4\sin(40\pi t\cdot\cos(20\pi t)$$

$$= 4\left(\frac{1}{2j}\left(e^{j40\pi t} - e^{-j40\pi t}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(e^{j20\pi t} + e^{-j20\pi t}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{j}\left(e^{j60\pi t} + e^{j20\pi t} - e^{j-20\pi t} - e^{-j60\pi t}\right)$$

$\omega_0 = 20\pi$ ✓ $|C_3| = 1$ $|C_1| = 1$ $|C_{-1}| = 1$ $|C_{-3}| = 1$ ✓

$$r_{xx_s}(\tau) = 2\cdot\sum_{k=-1}^{\infty}|C_k|^2\cos(k\omega_0\cdot\tau) = 2\cdot\left(\cos(20\pi\tau) + \cos(60\pi\tau)\right)$$ ✓

$$S_{xx_s}(j\omega) = 2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}|C_k|^2\cdot\delta(\omega - k\omega_0) = 2\pi\left(\delta(\omega+20\pi) + \delta(\omega+60\pi) + \delta(\omega-20\pi) + \delta(\omega-60\pi)\right)$$ ✓

N_t: $F = [0, 40]$ Hz

$\hookrightarrow \omega_g = 2\pi\cdot 40 = 80\pi$

$$S_{NN}(j\omega) = \sigma^2\cdot\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_g}\right) = \sigma^2\cdot\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{160\pi}\right)$$

$$P = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma^2\,\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_g}\right) = \frac{1}{2\pi}\sigma^2\int_{-80\pi}^{80\pi}1\,d\omega = \sigma^2\cdot\frac{1}{2\pi}(160\pi)$$

$$= \sigma^2\cdot 80$$

$$\sigma^2 = \frac{P}{80} = \frac{0{,}8W}{80} = \frac{8}{10\cdot 80} = \underline{\underline{\frac{1}{100}}}$$ ✓

$$r_{NN}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\omega\tau}\cdot\sigma^2\cdot\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{160\pi}\right) = \frac{1}{2\pi}\sigma^2\int_{-80\pi}^{80\pi}e^{j\omega\tau}\,d\tau$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{100}\cdot\left(\frac{e^{j\omega\tau}}{j\omega}\right)\Big|_{-80\pi}^{80\pi} = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{100}\left(\frac{e^{j80\pi}}{j80} + \frac{e^{-j80\pi}}{j80}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{100}\,\frac{1}{j80}\left(e^{j80\pi} + e^{-j80\pi}\right) = \frac{1}{80\pi\cdot 100}\cdot\cos(80\pi\tau)$$

$$= \frac{1}{80\pi\cdot 100}\sin(80\pi\tau)$$

$$S_{xx}(j\omega) = S_{NN}(j\omega) + S_{xx_s}(j\omega)$$ ✓

$$r_{xx}(\tau) = r_{NN}(\tau) + r_{xx_s}(\tau)$$

$$P = r_{xx}(0) = 0{,}8W + r_{xx_s}(0)$$

$$= 0{,}8W + 2W = \underline{\underline{2{,}8W}}$$

$$SNR = 10\cdot\log\frac{P_S}{P_N} = 10\cdot\log\frac{2W}{0{,}8W}\,dB$$

$$= 10\cdot\log\frac{20}{8}\,dB$$

$0{,}8 = \frac{8}{10}$

WS	Semester	Fach	Dozent
14/15	E4b	SS2	RAU

FSR - Klausurensammlung

15/16

[redacted]

a) $r_{xx}(\tau) = \frac{a}{2} e^{-a|\tau|}$ $\qquad r_{yy}(\tau) = \frac{b}{2} e^{-b|\tau|}$

$S_{yy}(j\omega) = |H(j\omega)|^2 \cdot S_{xx}(j\omega)$

3/6

$$S_{xx}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} r_{xx}(\tau) e^{-j\tau\omega} d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{2} e^{-a|\tau|} \cdot e^{-j\tau\omega} d\tau$$

$$= \frac{a}{2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\tau\omega - a|\tau|} d\tau$$

$$= \frac{a}{2} \left(\int_{-\infty}^{0} e^{-j\tau\omega + a\tau} d\tau + \int_{0}^{\infty} e^{-j\tau\omega - a\tau} d\tau \right)$$

$$= \frac{a}{2} \left(\int_{0}^{\infty} e^{j\tau\omega - a\tau} d\tau + \int_{0}^{\infty} e^{-j\tau\omega - a\tau} d\tau \right)$$

$$= \frac{a}{2} \int_{0}^{\infty} e^{j\tau\omega} + e^{-j\tau\omega} + 2 e^{-a\tau} d\tau$$

$$= \frac{a}{2} \int_{0}^{\infty} 2\cos(\tau\omega) + 2 e^{-a\tau} d\tau$$

hier ist ein Fehler

$$= a \cdot \left(\frac{\sin(\tau\omega)}{\omega} - \frac{1}{a} \cdot e^{-a\tau} \right) \Big|_{0}^{\infty}$$

$\left[\frac{\sin(\tau\omega)}{\omega} \right]' = \frac{\cos(\tau\omega)}{\omega}$

$$= a \cdot \left(0 - 0 - \left(1 - \frac{1}{a} \right) \right)$$

$a \cdot ($

$$= a \cdot \left(\frac{1}{a} - 1 \right) = \underline{\underline{1 - \frac{1}{a}}}$$

$$S_{yy}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} r_{yy}(\tau) e^{-j\tau\omega} d\omega = \underline{\underline{1 - \frac{1}{b}}}$$

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{S_{yy}}{S_{xx}} = \frac{1 - \frac{1}{b}}{1 - \frac{1}{a}} =$$

SS / WS	Semester	Fach	Dozent
14/15	E4b	SSL	RAU

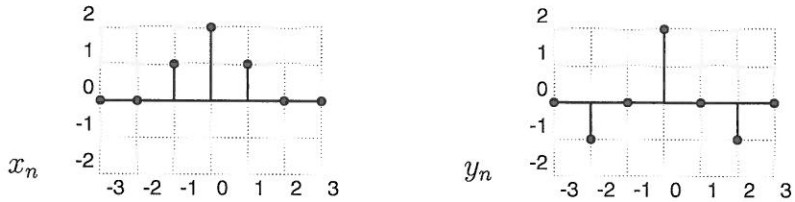
FSR - Klausurensammlung

16/16

WS 2015/16 PROF. DR. A. RAUSCHER-SCHEIBE SS II

MUSTERLÖSUNG ZUR KLAUSUR ZU SIGNALE & SYSTEME II

AUFGABE 1 (5 PUNKTE): Gegeben ist ein diskretes LTI-System, das bei Erregung mit dem Eingangssignal $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ das Ausgangssignal $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ erzeugt.



Ist das System $\mathcal{S}$ kausal und stabil? Bestimmen Sie die Impulsantwort $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ des Systems sowie die Sprungantwort $(y_n^\sigma)_{n\in\mathbb{Z}}$ und skizzieren Sie beide.

LÖSUNG: Das Eingangssignal ist gegeben durch $x_n = \delta_{n+1} + 2\delta_n + \delta_{n-1}$ und das Ausgangssignal durch $y_n = -\delta_{n+2} + 2\delta_n - \delta_{n-2}$ und es gilt $x_n * h_n = y_n$. Führt man eine z-Transformation durch, erhält man

$$\begin{aligned}
X(z)\cdot H(z) &= Y(z)\\
(z+2+z^{-1})\cdot H(z) &= -z^2+2-z^{-2}\\
H(z) &= \frac{-z^2+2-z^{-2}}{z+2+z^{-1}} = \frac{-z^4+2z^2-1}{z(z^2+2z+1)} = \frac{-(z^2-1)^2}{z(z+1)^2}\\
&= \frac{-(z-1)^2(z+1)^2}{z(z+1)^2} = \frac{-(z-1)^2}{z} = -z+2-z^{-1}
\end{aligned}$$

Die Rücktransformation ergibt daraus $h_n = -\delta_{n+1}+2\delta_n-\delta_{n-1}$. Daraus sieht man sofort, dass das System nicht kausal, aber stabil ist. Die Sprungantwort ergibt sich aus der Impulsantwort als Summe

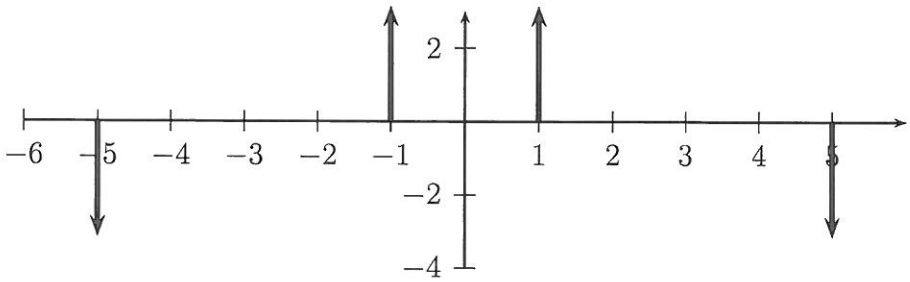
$$y_n^\sigma = \sum_{k=-\infty}^{n} h_k = -\sigma_{n+1} + 2\sigma_n - \sigma_{n-1} = -\delta_{n+1} + \delta_n.$$

AUFGABE 2 (3 PUNKTE): Das zusammengesetzte Signal

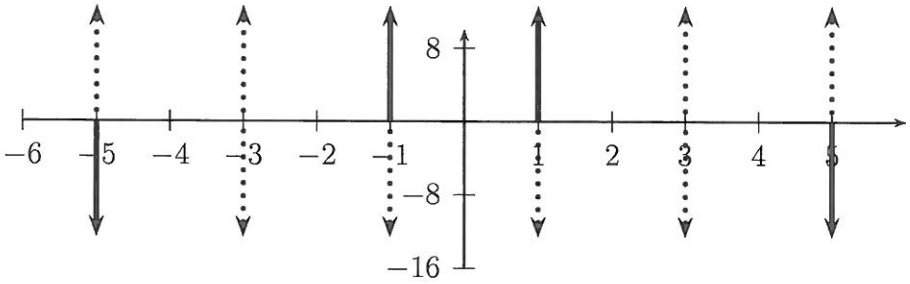
$$x(t) = \cos(2\pi t) - \cos(10\pi t)$$

wird mit einer Frequenz $f_a = 4\text{Hz}$ abgetastet. Was passiert? Und warum? (Erklärende Skizzen sind ausreichend.)

LÖSUNG:



Das abgetastete Spektrum hat die Form mit $f_a = 4\text{Hz}$ als Bild



Es kann sich komplette Auslöschung ergeben!

AUFGABE 3 (4 PUNKTE): Geben Sie eine Zustandsraumdarstellung in Matrixform für das diskrete LTI-System an, das durch die folgende Differenzengleichung definiert wird

$$y_n = x_n - \frac{1}{2}x_{n-1} + \frac{1}{2}y_{n-1} + \frac{1}{2}y_{n-2}.$$

LÖSUNG:
Die Zustandsraumdarstellung wird über das Sortieren der Differenzen erreicht:

$$\begin{aligned}
y_n - x_n + \frac{1}{2}x_{n-1} - \frac{1}{2}y_{n-1} &= \frac{1}{2}y_{n-2} \\
y_n - x_n + \frac{1}{2}x_{n-1} - \frac{1}{2}y_{n-1} &= x_{n-1}^{(1)} \\
y_n - x_n &= x_{n-1}^{(1)} - \frac{1}{2}x_{n-1} + \frac{1}{2}y_{n-1} \\
y_n - x_n &= x_n^{(2)}
\end{aligned}$$

ergibt

$$\begin{aligned}
x_{n-1}^{(1)} &= \frac{1}{2}y_{n-2} \\
x_n^{(2)} &= x_{n-1}^{(1)} - \frac{1}{2}x_{n-1} + \frac{1}{2}y_{n-1} \\
y_n &= x_n^{(2)} + x_n
\end{aligned}$$

oder sortiert

$$\begin{aligned} x_n^{(1)} &= \frac{1}{2}y_{n-1} = \frac{1}{2}(x_{n-1}^{(2)} + x_{n-1}) \\ x_n^{(2)} &= x_{n-1}^{(1)} - \frac{1}{2}x_{n-1} + \frac{1}{2}y_{n-1} = x_{n-1}^{(1)} - \frac{1}{2}x_{n-1} + \frac{1}{2}(x_{n-1}^{(2)} + x_{n-1}) \\ y_n &= x_n^{(2)} + x_n, \end{aligned}$$

also ergibt sich in Matrixform

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_n^{(1)} \\ x_n^{(2)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{n-1}^{(1)} \\ x_{n-1}^{(2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot x_{n-1} \\ y_n &= (0,1) \cdot \begin{pmatrix} x_n^{(1)} \\ x_n^{(2)} \end{pmatrix} + x_n. \end{aligned}$$

AUFGABE 4 (5 PUNKTE): Betrachten Sie das diskrete LTI-System, das mit $a \in \mathbb{R}$ in der Zustandsraumdarstellung gegeben ist durch

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_n^{(1)} \\ x_n^{(2)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 2a^2 \\ 1 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{n-1}^{(1)} \\ x_{n-1}^{(2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a^2 \\ a - \frac{1}{2} \end{pmatrix} x_{n-1} \\ y_n &= (0,1) \cdot \begin{pmatrix} x_n^{(1)} \\ x_n^{(2)} \end{pmatrix} + x_n. \end{aligned}$$

Berechnen Sie die Übertragungsfunktion. Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist das System stabil? Bestimmen Sie für $a = \frac{1}{4}$ die Impulsantwort des Systems.

LÖSUNG: Aus der Zustandsraumdarstellung im Zeitbereich ergibt sich durch z-Transformation die allgemeine Formel für die Übertragungsfunktion

$$\begin{aligned} H(z) &= \mathbf{c}^T \cdot (z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{b} + d \\ &= (0,1) \cdot \begin{pmatrix} z & -2a^2 \\ -1 & z-a \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2a^2 \\ a - \frac{1}{2} \end{pmatrix} + 1 \\ &= (0,1) \cdot \frac{1}{z(z-a) - 2a^2} \begin{pmatrix} z-a & 2a^2 \\ 1 & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2a^2 \\ a - \frac{1}{2} \end{pmatrix} + 1 \\ &= \frac{1}{z^2 - az - 2a^2}(1, z) \cdot \begin{pmatrix} 2a^2 \\ a - \frac{1}{2} \end{pmatrix} + 1 \\ &= \frac{2a^2 + z(a - \frac{1}{2})}{z^2 - az - 2a^2} + 1 = \frac{2a^2 + z(a - \frac{1}{2}) + z^2 - az - 2a^2}{z^2 - az - 2a^2} \\ &= = \frac{z^2 - \frac{1}{2}z}{z^2 - az - 2a^2} = \frac{z(z - \frac{1}{2})}{(z+a)(z-2a)} \end{aligned}$$

Die Übertragungsfunktion hat Pole bei $z = 2a$ und $z = -a$, das heißt, es muss gelten $|a| < \frac{1}{2}$, da die Pole für die Stabilität im Einheitskreis liegen müssen. Für $a = \frac{1}{4}$ ergibt sich

$$H(z) = \frac{z(z-\frac{1}{2})}{(z+\frac{1}{4})(z-\frac{1}{2})} = \frac{z}{z+\frac{1}{4}},$$

was im Zeitbereich der Impulsantwort $h_n = \sigma_n \left(-\frac{1}{4}\right)^n$ entspricht.

AUFGABE 5 (3 PUNKTE): In einem Kernspintomographen mit der magnetischen Feldstärke 1 Gauß beträgt die Resonanzfrequenz von Wasserstoff 4.25kHz, die von Fluor 4.00kHz. Kann eine Materialprobe auf das Vorkommen der beiden Elemente untersucht werden, wenn das gemessene Frequenzsignal mit 10kHz abgetastet wird? Wie lange muss diese Messung mindestens dauern, damit zwischen den beiden Elementen unterschieden werden kann?

LÖSUNG: Eine Materialprobe kann auf die beiden Elemente untersucht werden, da die beiden Resonanzfrequenzen unterhalb der Abtastschwelle liegen ($= \frac{f_a}{2} = \frac{10kHz}{2} = 5kHz$). Die Auflösung im abgetasteten Spektrum ist gegeben durch $\Delta f = \frac{f_a}{N}$ mit der Abtastfrequenz und der Anzahl der Punkte, über die das Spektrum aufgelöst wird, also

$$\Delta f = \frac{f_a}{N} = \frac{f_a}{f_a \cdot T} = \frac{1}{T} \leq 0.25kHz.$$

Das ergibt aufgelöst

$$T \geq \frac{1}{0.25kHz} = 4ms.$$

AUFGABE 6 (5 PUNKTE): Betrachten Sie das diskrete LTI-System, das durch folgende Differenzengleichung definiert ist

$$2y_n = x_n - x_{n-2}.$$

Berechnen und skizzieren Sie Amplituden- und Phasengang des Systems. Welches Übertragungsverhalten des Systems ergibt sich daraus?

LÖSUNG: Zunächst ist die Differenzengleichung zu z-transformieren

$$\begin{aligned} 2y_n &= x_n - x_{n-2} \\ 2Y(z) &= X(z) - z^{-2}X(z) = (1-z^{-2})X(z) \\ H(z) &= \frac{1-z^{-2}}{2} = \frac{z^2-1}{2z^2}. \end{aligned}$$

Der Pol der Übertragungsfunktion $z = 0$ liegt im Einheitskreis, also ist das System stabil, z darf durch $e^{j\Omega}$ ersetzt werden

$$H(j\Omega) = \frac{e^{2j\Omega} - 1}{2e^{2j\Omega}} = \frac{e^{j\Omega}(e^{j\Omega} - e^{-j\Omega})}{2e^{2j\Omega}} = \frac{j\sin\Omega}{e^{j\Omega}} = j\sin\Omega e^{-j\Omega} = \sin\Omega e^{j(\frac{\pi}{2}-\Omega)}.$$

Der Amplitudengang ergibt

$$|H(j\Omega)| = |\sin\Omega|.$$

Es ergeben sich $|H(j0)| = 0$, $|H(j\pi)| = 0$ und $|H(j\frac{\pi}{2})| = 1$. Also ergibt sich ein Bandpass! Der Phasengang ergibt

$$\Phi(j\Omega) = \frac{\pi}{2} - \Omega,$$

beginnt bei $\frac{\pi}{2}$ für $\Omega = 0$, für $\Omega = \pi$ endet er bei $-\frac{\pi}{2}$ und bei $\Omega = \frac{\pi}{2}$ gilt $\Phi(j\Omega) = 0$.

AUFGABE 7 (6 PUNKTE): Entwerfen Sie eine diskrete Bandsperre mit den Grenzfrequenzen $\Omega_u = \frac{\pi}{4}$ und $\Omega_o = \frac{3\pi}{4}$. Dabei hilft Ihnen eventuell das Additionstheorem $\tan\frac{x}{2} = \frac{\tan x}{1+\sqrt{1+\tan x}}$. Wie sieht die Impulsantwort der Bandsperre aus? Handelt es sich um ein FIR-Filter oder IIR-Filter? Welchen Frequenzen f_u und f_o entsprechen die Grenzfrequenzen, wenn das Signal mit einer Abtastzeit von $T_a = 0.1s$ abgetastet wird?

LÖSUNG: Zu entwerfen ist eine diskrete Bandsperre. Dazu müssen zunächst beide Grenzfrequenzen in ihr kontinuierliches Äquivalent umgerechnet werden!

$$\begin{aligned}
\omega_u &= \tan(\frac{\Omega_u}{2}) = \tan(\frac{\pi}{8}) = \frac{\tan\frac{\pi}{4}}{1+\sqrt{1+\tan\frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{1+\sqrt{1+1}} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} \\
\omega_0 &= \tan(\frac{\Omega_0}{2}) = \tan(\frac{3\pi}{8}) = \frac{1}{\tan(\frac{\pi}{8})} = \frac{1}{\frac{1}{1+\sqrt{2}}} = 1+\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Es handelt sich um eine Bandsperre zwischen $\omega_u = \frac{1}{1+\sqrt{2}}$ und $\omega_o = 1+\sqrt{2}$. Die Übertragungsfunktion für die kontinuierliche Bandsperre bekommen wir aus der Übertragungsfunktion des passenden Tiefpasses

$$H(s) = \frac{1}{1+Ts}$$

mit der Transformation $Ts \to \frac{B}{Ts+\frac{1}{Ts}}$

$$H(s) = \frac{1}{1+\frac{B}{Ts+\frac{1}{Ts}}} = \frac{Ts+\frac{1}{Ts}}{Ts+\frac{1}{Ts}+B} = \frac{T^2s^2+1}{T^2s^2+1+BTs}$$

mit der Grenzfrequenz $\omega_m = \sqrt{\omega_o \omega_u} = \sqrt{(1+\sqrt{2})\frac{1}{1+\sqrt{2}}} = 1 = \frac{1}{T}$, also $T = 1$ und der Breite $B = \frac{\omega_o - \omega_u}{\omega_m} = \omega_o - \omega_u = (1+\sqrt{2}) - \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{2+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = 2$ ergibt sich

$$H(s) = \frac{T^2 s^2 + 1}{T^2 s^2 + 1 + BTs} = \frac{s^2+1}{s^2+1+2s}.$$

Fehlt noch die Transformation ins Diskrete mit Hilfe der bilinearen Transformation $s = \frac{z-1}{z+1}$

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{(\frac{z-1}{z+1})^2 + 1}{(\frac{z-1}{z+1})^2 + 1 + 2(\frac{z-1}{z+1})} = \frac{(z-1)^2 + (z+1)^2}{(z-1)^2 + (z+1)^2 + 2(z-1)(z+1)} \\ &= \frac{z^2 - 2z + 1 + z^2 + 2z + 1}{z^2 - 2z + 1 + z^2 + 2z + 1 + 2z^2 - 2} = \frac{2z^2+2}{4z^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}z^{-2}. \end{aligned}$$

Daraus erhält man durch Rücktransformation die Impulsantwort $h_n = \frac{1}{2}\delta_n + \frac{1}{2}\delta_{n-2}$. Da die Impulsantwort nur endlich viele Beiträge hat, ist das ganz offensichtlich ein FIR-Filter. Die diskreten Kreisfrequenzen lassen sich in „echte" Frequenzen umrechnen, indem man benutzt

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{\Omega}{T_a} \\ f &= \frac{\Omega}{2\pi T_a}. \end{aligned}$$

Damit ergeben sich

$$\begin{aligned} f_u &= \frac{\frac{\pi}{4}}{2\pi T_a} = \frac{1}{8T_a} = 1.25Hz \\ f_u &= \frac{\frac{3\pi}{4}}{2\pi T_a} = \frac{3}{8T_a} = 3.75Hz. \end{aligned}$$

AUFGABE 8 (6 PUNKTE): Es sei $(R_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ mit $b \in \mathbb{R}$ ein zeit-diskreter Prozess

$$R_n = X_n \cdot Y_n + b \cdot n \cdot X_n.$$

Dabei ist X eine im Intervall $[-1, 1]$ gleichverteilte Zufallsvariable und Y eine zu X stochastisch unabhängige und im Intervall $[0, 1]$ gleichverteilte Zufallsvariable. Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz des Prozesses. Ist der Prozess stationär? Wählen Sie gegebenenfalls b so, dass der Prozess stationär wird und berechnen Sie die Autokorrelationsfunktion und das Leistungsdichtespektrum.

LÖSUNG: Zunächst sind die Erwartungswerte von Potenzen der beiden Zufallsprozesse zu berechnen

$$\begin{aligned}
E(X_n) &= \int_{-1}^{1} x\frac{1}{2}dx = \frac{1}{2}\frac{x^2}{2}|_{-1}^{1} = 0 \\
E(X_n^2) &= \int_{-1}^{1} x^2\frac{1}{2}dx = \frac{1}{2}\frac{x^3}{3}|_{-1}^{1} = \frac{1}{3} \\
E(Y_n) &= \int_{0}^{1} xdx = \frac{x^2}{2}|_{0}^{1} = \frac{1}{2} \\
E(Y_n^2) &= \int_{0}^{1} x^2dx = \frac{x^3}{3}|_{0}^{1} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Für den Erwartungswert ergibt sich

$$E(R_n) = E(X_n \cdot Y_n + bnX_n) = E(X_n)E(Y_n) + bnE(X_n) = 0 \cdot \frac{1}{2} + b \cdot n \cdot 0 = 0.$$

Der Erwartungswert des Quadrats der Zufallsvariablen ergibt

$$\begin{aligned}
E(R_n^2) &= E((X_n \cdot Y_n + bnX_n)^2) = E(X_n^2 \cdot Y_n^2 + 2bnX_n^2 \cdot Y_n^2 + b^2n^2X_n^2) \\
&= E(X_n^2)E(Y_n^2) + 2bnE(X_n^2)E(Y_n) + b^2n^2E(X_n^2) \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + 2bn \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + b^2n^2\frac{1}{3} = \frac{1}{9} + \frac{1}{3}bn + \frac{1}{3}b^2n^2,
\end{aligned}$$

und damit erhalten wir die Varianz

$$V(R_n) = E(R_n^2) - E^2(R_n) = E(R_n^2) = \frac{1}{9} + \frac{1}{3}bn + \frac{1}{3}b^2n^2.$$

Da die Varianz nicht unabhängig ist von n, ist der Prozess so nicht stationär! Wählt man jedoch $b = 0$, wird die Variation unabhängig von n! Für die Autokorrelationsfunktion (Autokorrelationsfolge) erhält man

$$\begin{aligned}
r_{RR}(k) &= E(R_n \cdot R_{n+k}) = \delta_k E(R_n^2) + (1 - \delta_k)E(R_n)E(R_{n+k}) \\
&= \delta_k E(R_n^2) + (1 - \delta_k)E^2(R_n) = \delta_k(E(R_n^2) - E^2(R_n)) + E^2(R_n) \\
&= \delta_k V(R_n) + E^2(R_n) = \delta_k\frac{1}{9} + 0^2 = \delta_k\frac{1}{9}
\end{aligned}$$

Da $E(R_n)$, $V(R_n)$ und $r_{RR}(k)$ mit $b = 0$ unabhängig von n sind, ist der Prozess im weiteren Sinne stationär. Das Leistungsdichtespektrum ergibt sich durch

$$S_{RR}(j\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\delta_k\frac{1}{9})e^{-jk\Omega} = \frac{1}{9}.$$

AUFGABE 9 (6 PUNKTE): Ein zeit-kontinuierlicher stationärer Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ sei durch sein Leistungsdichtespektrum definiert

$$S_{XX}(j\omega) = \begin{cases} 1 - \frac{|\omega|}{2\pi} & \text{für } |\omega| < 2\pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Skizzieren Sie das Leistungsdichtespektrum und berechnen Sie die zugehörige Autokorrelationsfunktion. Welche mittlere Gesamtleistung hat der Prozess?

LÖSUNG: Das Leistungsdichtespektrum ist ein Dreieck mit der Höhe 1 bei $\omega = 0$, das auf 0 abfällt für $\omega = \pm 2\pi$ und für größere ω verschwindet. Die zugehörige Autokorrelationsfunktion lässt sich durch eine inverse Fourier-Transformation bestimmen

$$\begin{aligned}
r_{XX}(\tau) &= \mathcal{F}^{-1}(S_{XX}(j\omega)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega\tau} S_{XX}(j\omega)d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-2\pi}^{0}(1+\frac{\omega}{2\pi})e^{j\omega\tau}d\omega + \int_{0}^{2\pi}(1-\frac{\omega}{2\pi})e^{j\omega\tau}d\omega\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-2\pi}^{2\pi} e^{j\omega\tau}d\omega + \int_{-2\pi}^{0}\frac{\omega}{2\pi}e^{j\omega\tau}d\omega - \int_{0}^{2\pi}\frac{\omega}{2\pi}e^{j\omega\tau}d\omega\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{e^{j\omega\tau}}{j\tau}\Big|_{-2\pi}^{2\pi} + \frac{\omega}{2\pi}\frac{e^{j\omega\tau}}{j\tau}\Big|_{-2\pi}^{0} - \int_{-2\pi}^{0}\frac{1}{2\pi}\frac{e^{j\omega\tau}}{j\tau}d\omega - \frac{\omega}{2\pi}\frac{e^{j\omega\tau}}{j\tau}\Big|_{0}^{2\pi} + \int_{0}^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\frac{e^{j\omega\tau}}{j\tau}d\omega\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{e^{2\pi j\tau}-e^{-2\pi j\tau}}{j\tau} - \frac{-2\pi}{2\pi}\frac{e^{-j2\pi\tau}}{j\tau} - \frac{1}{2\pi}\frac{e^{j\omega\tau}}{(j\tau)^2}\Big|_{-2\pi}^{0} - \frac{2\pi}{2\pi}\frac{e^{2\pi j\tau}}{j\tau} + \frac{1}{2\pi}\frac{e^{j\omega\tau}}{(j\tau)^2}\Big|_{0}^{2\pi}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{1}{2\pi}\frac{e^{j\omega\tau}}{(j\tau)^2}\Big|_{-2\pi}^{0} + \frac{1}{2\pi}\frac{e^{j\omega\tau}}{(j\tau)^2}\Big|_{0}^{2\pi}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{1}{2\pi}\frac{1-e^{-2\pi j\tau}}{(j\tau)^2} + \frac{1}{2\pi}\frac{e^{2\pi j\tau}-1}{(j\tau)^2}\right) = \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{1}{2\pi}\left(2-\frac{e^{-2\pi j\tau}-e^{2\pi j\tau}}{(j\tau)^2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\left(\frac{2-2\cos(2\pi\tau)}{\tau^2}\right) = \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{1-\cos(2\pi\tau)}{\tau^2}\right)
\end{aligned}$$

Die Gesamtleistung des Prozesses ergibt sich bei $\tau = 0$ (l'Hôpital oder Reihenentwicklung oder einfach Dreiecksfläche)

$$\begin{aligned}
r_{XX}(0) &= \lim_{\tau\to 0}\frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{1-\cos(2\pi\tau)}{\tau^2}\right) = \lim_{\tau\to 0}\frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{1-(1-\frac{1}{2}(2\pi\tau)^2)}{\tau^2}\right) \\
&= \lim_{\tau\to 0}\frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{\frac{1}{2}(2\pi\tau)^2}{\tau^2}\right) = \lim_{\tau\to 0}\frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{2\pi^2\tau^2}{\tau^2}\right) = 1.
\end{aligned}$$

AUFGABE 10 (5 PUNKTE): Berechnen Sie die Gesamtleistung des Ausgangsprozesses $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$, der aus weißem Rauschen der Varianz $\sigma^2 = 1$ durch ein System mit der Impulsantwort

$$h(t) = \frac{1}{T}\sigma(t)e^{-\frac{t}{T}}$$

entsteht. Hinweis: $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x)$.

LÖSUNG: Das Leistungsdichtespektrum des Ausgangsprozesses $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ kann mit Hilfe des Wiener-Lee-Theorems berechnet werden

$$S_{XX} = |H(j\omega)|^2 S_{RR} = |H(j\omega)|^2.$$

Damit muss der Frequenzgang des Systems berechnet werden

$$h(t) = \frac{1}{T}\sigma(t)e^{-\frac{t}{T}} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad H(s) = \frac{1}{T}\frac{1}{s+\frac{1}{T}} = \frac{1}{Ts+1}.$$

Da das System stabil ist (Pol bei $s = -\frac{1}{T}$), gilt für den Frequenzgang

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \frac{1}{Tj\omega+1} \\ |H(j\omega)|^2 &= \frac{1}{T^2\omega^2+1}. \end{aligned}$$

Es gilt damit

$$S_{XX} = |H(j\omega)|^2 = \frac{1}{T^2\omega^2+1}.$$

Die Gesamtleistung bekommen wir durch

$$\begin{aligned} r_{XX}(0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(j\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{T^2\omega^2+1}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{y^2+1}\frac{dy}{T} \\ &= \frac{1}{2\pi T}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{y^2+1}dy = \frac{1}{2\pi T}\arctan y|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{2\pi T}(\arctan(\infty) - \arctan(-\infty)) \\ &= \frac{1}{2\pi T}(\frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2}) = \frac{1}{2T}. \end{aligned}$$

WS 2015/16 — Prof. Dr. A. Rauschenbeutel — SS II

Klausur zu Signale & Systeme II (PO 2012)

am

4. Februar 2016 von 8.00 bis 10.00 Uhr

10 Pa 46

Note: 20/48

Aufgabe 1 (5 Punkte): Gegeben ist ein diskretes LTI-System, das bei Erregung mit dem Eingangssignal $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ das Ausgangssignal $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ erzeugt. 5/5

Ist das System S kausal und stabil? Bestimmen Sie die Impulsantwort $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ des Systems sowie die Sprungantwort $(s_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ und skizzieren Sie beide.

Aufgabe 2 (3 Punkte): Das zeitkontinuierliche Signal 3/3

$$x(t) = \cos(2\pi t) - \cos(10\pi t)$$

wird mit einer Frequenz $f_s = 4\text{Hz}$ abgetastet. Was passiert? Und warum? (Erklärende Skizzen sind ausreichend.)

Aufgabe 3 (4 Punkte): Geben Sie eine Zustandsraumdarstellung in Matrixform für das diskrete LTI-System an, das durch die folgende Differenzengleichung definiert wird: 4/4

$$y_n = x_n - \frac{1}{2}y_{n-1} + \frac{1}{2}y_{n-2} - \frac{1}{2}y_{n-3}$$

Aufgabe 4 (6 Punkte): Betrachten Sie das diskrete LTI-System, das mit $a \in \mathbb{R}$ in der Zustandsraumdarstellung gegeben ist durch: 5/5

$$\begin{pmatrix} x_n^{(1)} \\ x_n^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2a^2 \\ 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1}^{(1)} \\ x_{n-1}^{(2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a^2 \\ a - \frac{1}{2} \end{pmatrix} x_{n-1}$$

$$y_n = (0, 1) \begin{pmatrix} x_n^{(1)} \\ x_n^{(2)} \end{pmatrix} + x_n$$

Berechnen Sie die Übertragungsfunktion. Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist das System stabil? Bestimmen Sie für $a = \frac{1}{4}$ die Impulsantwort des Systems.

Aufgabe 5 (3 Punkte): In einem Kernspintomographen mit der magnetischen Feldstärke 1 Tesla beträgt die Resonanzfrequenz von Wasserstoff 42.6 MHz, die von Fluor 40.5 MHz. Kann eine Probe auf das Vorkommen der beiden Elemente untersucht werden, wenn das gemessene Frequenzsignal mit 1 kHz abgetastet wird? Wie lange muss diese Messung mindestens dauern, damit zwischen den beiden Elementen unterschieden werden kann? 3/3

Aufgabe 6 (5 Punkte): Betrachten Sie das diskrete LTI-System, das durch folgende Differenzengleichung definiert ist:

$$2y_n = x_n - x_{n-2}$$

Berechnen und skizzieren Sie Amplituden- und Phasengang des Systems. Welches Übertragungsverhalten das System aus ergibt sich daraus? 2/5

Aufgabe 7 (6 Punkte): Entwerfen Sie einen diskreten Bandpass mit den Grenzfrequenzen $\Omega_u = \frac{\pi}{3}$ und $\Omega_o = \frac{\pi}{2}$. Dabei hilft Ihnen evtl. mit Additionstheorem $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\sqrt{1+\sin^2\alpha}}$. Wie sieht die Impulsantwort des Filters aus? Handelt es sich um ein FIR- oder IIR-Filter? Welchen Frequenzen f_u und f_o entsprechen die Grenzfrequenzen, wenn das Signal mit einer Abtastzeit von $T_a = 0.1$ s abgetastet wird? 1/6

Aufgabe 8 (6 Punkte): Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b \in \mathbb{R}$ ein zeitdiskreter Prozess

$$X_n = X_0 \cdot Y_1 + b \cdot n \cdot Y_2$$

Dabei ist X_0 aus dem Intervall $[-1, 1]$ gleichverteilte Zufallsvariable und Y_1 ist zu Y_2 stochastisch unabhängig und im Intervall $[0, 1]$ gleichverteilte Zufallsvariable. Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz des Prozesses. Ist der Prozess stationär? Wählen Sie gegebenenfalls b so, dass der Prozess stationär wird und berechnen Sie die Autokorrelationsfunktion und das Leistungsdichtespektrum. 3/6

Aufgabe 9 (6 Punkte): Ein zeit-kontinuierlicher stationärer Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ sei durch sein Leistungsdichtespektrum definiert:

$$S_X(\omega) = \begin{cases} 1 - \frac{|\omega|}{2\pi} & \text{für } |\omega| \le 2\pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Skizzieren Sie das Leistungsdichtespektrum und berechnen Sie die zugehörige Autokorrelationsfunktion. Welche mittlere Gesamtleistung hat der Prozess? 2/6

Aufgabe 10 (5 Punkte): Berechnen Sie die Gesamtleistung des Ausgangsprozesses $(Y_t)_{t\in\mathbb{R}}$, der aus weißem Rauschen der Varianz $\sigma^2 = 1$ durch ein System mit der Impulsantwort

$$h(t) = \frac{1}{\pi}\sigma(t)e^{-\frac{t}{2}}$$

entsteht. (Hinweis: $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x)$). 2/5

(Einseitige) Laplace-Transformation

Die Zuordnung $\mathcal{L} : x(t) \longmapsto X(s)$ mit $s = \sigma + j\omega \in \mathbb{C}$, welche einem Signal $x(t)$ die komplexe Funktion

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} x(t)\,dt$$

zuordnet, heißt Laplace-Transformation. Schreibweise

$$x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; X(s)$$

Im folgenden seien $x(t)$ und $y(t)$ kausale Signale.

Linearität	$ax(t) + by(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet\; aX(s) + bY(s)$
Differentiation im Zeitbereich	$\frac{d}{dt}x(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet\; sX(s) - x(0+)$
	$\frac{d^2}{dt^2}x(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet\; s^2X(s) - sx(0+) - x'(0-)$
Differentiation im Bildbereich	$(-1)^n t^n x(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{d^n}{ds^n}X(s)$
Integration im Zeitbereich	$\int_0^t x(\tau)d\tau$	$\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{1}{s}X(s)$
Integration im Bildbereich	$\frac{1}{t}x(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet\; \int_s^\infty X(\sigma)d\sigma$
Ähnlichkeitssatz	$x(at)\quad (a > 0)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{1}{a}X(\frac{s}{a})$
Verschiebungssatz	$x(t-a)\sigma(t-a)\quad (a > 0)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet\; e^{-as}X(s)$
Dämpfungssatz	$e^{-at}x(t)\quad (a > 0)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet\; X(s+a)$
Faltungssatz	$x(t) * y(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet\; X(s)\cdot Y(s)$

Laplace-Transformierte einiger bekannter kausaler Signale

$e^{at}\sigma(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{s-a}\quad (\Re(s) > \Re(a))$
$1\sigma(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{s}\quad (\Re(s) > 0)$
$\delta(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$1\quad (\Re(s) > 0)$
$\cos(\omega t)\sigma(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}\quad (\Re(s) > 0)$
$\sin(\omega t)\sigma(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\quad (\Re(s) > 0)$
$te^{at}\sigma(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{(s-a)^2}\quad (\Re(s) > \Re(a))$
$t^n e^{at}\sigma(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}\quad (\Re(s) > \Re(a))$
$e^{at}\cos(\omega t)\sigma(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{(s-a)}{(s-a)^2+\omega^2}\quad (\Re(s) > \Re(a))$
$e^{at}\sin(\omega t)\sigma(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}\quad (\Re(s) > \Re(a))$

FOURIER-TRANSFORMATION

Die Zuordnung $\mathcal{F}: x(t) \longmapsto X(j\omega)$ mit $\omega \in \mathbb{R}$, welche einem Signal $x(t)$ die komplexe Funktion

$$X(j\omega) = \mathcal{F}(x(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} x(t)\,dt$$

zuordnet, heißt Fourier-Transformation. Das Spektrum von $x(t)$. Schreibweise

$$x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet X(j\omega)$$

Die Zuordnung $\mathcal{F}^{-1}: X(j\omega) \longmapsto x(t)$ mit $\omega \in \mathbb{R}$, welche einem Spektrum $X(s)$ ein komplexes Signal $x(t)$

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}(X(j\omega)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} X(j\omega)\,d\omega$$

zuordnet, heißt inverse Fourier-Transformation. Im folgenden seien $x(t)$ und $y(t)$ komplexe Signale.

Linearität	$ax(t) + by(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$aX(j\omega) + bY(j\omega)$
Dualität	$x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet X(j\omega)$		$X(jt) \circ\!\!-\!\!\bullet 2\pi x(-\omega)$
Skalierung	$x(at) \quad (a \neq 0)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X(\frac{j\omega}{a})$
	$\frac{1}{b}x(\frac{t}{b}) \quad (b \neq 0)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$X(bj\omega)$
Translation	$x(t+u)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$e^{j\omega u}X(j\omega)$
	$e^{j\omega_0 t}x(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$X(j(\omega-\omega_0))$
Differentiation im Zeitbereich	$\frac{d}{dt}x(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$j\omega X(j\omega)$
Integration im Zeitbereich	$\int_0^t x(\tau)d\tau$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{j\omega}X(j\omega) + \pi F(0)\delta(j\omega)$
Faltungssatz	$x(t) * y(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$X(j\omega)\cdot Y(j\omega)$
Multiplikationssatz	$2\pi x(t)\cdot y(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$X(j\omega) * Y(j\omega)$

Fourier-Transformierte einiger bekannter Signale

$\mathrm{rect}(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\mathrm{si}(\frac{\omega}{2})$
$\frac{1}{T}\mathrm{rect}(\frac{t}{T})$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\mathrm{si}(\frac{\omega T}{2})$
$\delta(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	1
1	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$2\pi\delta(\omega)$
$\sigma(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$
$e^{j\omega_0 t}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$
$\cos(\omega_0 t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\pi(\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0))$
$\sin(\omega_0 t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{\pi}{j}(\delta(\omega-\omega_0) - \delta(\omega+\omega_0))$

z-TRANSFORMATION

Die Zuordnung $\mathcal{Z}: x_n \longmapsto X(z)$ mit $z \in \mathbb{C}$, welche einem diskreten Signal x_n die komplexe Funktion

$$X(z) = \mathcal{Z}(x_n) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} x_n$$

zuordnet, heißt (einseitige) z-Transformation. Im folgenden seien x_n und y_n diskrete Signale.

Linearität	$ax_n + by_n$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$aX(z) + bY(z)$
Verschiebungssatz	x_{n-m}	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$z^{-m}X(z)$
Ähnlichkeitssatz	$a^n x_n$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$X(\frac{z}{a})$
Differenzen im Zeitbereich	$x_n - x_{n-1}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{z-1}{z}X(z)$
	$x_n - 2x_{n-1} + x_{n-2}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{z^2-2z+1}{z^2}X(z)$
Summen im Zeitbereich	$\sum_{k=0}^{n} x_k$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{z}{z-1}X(z)$
Summation über Zeitfolge	$\sum_{k=0}^{\infty} x_k$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$X(z)\|_{z=1}$
lineare Gewichtung	nx_n	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$-z\frac{d}{dz}X(z)$
Zeitinversion	x_{-n}	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$X(\frac{1}{z})$
konjugiert komplexes Signal	x_n^*	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$X^*(z^*)$
Faltungssatz	$x_n * y_n$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$X(z)\cdot Y(z)$

z-Transformation wichtiger Eingangssignale

$a^{-n}\sigma_n$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{za}{za-1}$	$(\|z\| > \frac{1}{\|a\|})$
$a^n\sigma_n$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{z}{z-a}$	$(\|z\| > \|a\|)$
$na^n\sigma_n$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{az}{(z-a)^2}$	$(\|z\| > \|a\|)$
$n^2a^n\sigma_n$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{az}{(z-a)^2} + 2\frac{a^2z}{(z-a)^3}$	$(\|z\| > \|a\|)$
σ_n	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{z}{z-1}$	$(\|z\| > 1)$
δ_n	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	1	
$e^{j\omega nT}\sigma_n$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{z}{z-e^{j\omega T}}$	$(\|z\| > 1)$
$e^{-j\omega nT}\sigma_n$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{z}{z-e^{-j\omega T}}$	$(\|z\| > 1)$
$\cos(\omega nT)\sigma_n$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{z^2-z\cos(\omega T)}{z^2-2z\cos(\omega T)+1}$	$(\|z\| > 1)$
$\sin(\omega nT)\sigma_n$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{z\sin(\omega T)}{z^2-2z\cos(\omega T)+1}$	$(\|z\| > 1)$

Diskrete Fourier-Transformation

Der Ausdruck

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

wird als komplexer Drehfaktor bezeichnet. Die Zuordnung $\mathcal{F}: x_n \longmapsto X_n$, welche einem diskreten Signal x_n für $n = 0, 1, 2, \ldots, N-1$ mit $N \in \mathbb{N}$ die diskrete Folge

$$X_n = \mathcal{F}(x_n) = \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} x_k$$

zuordnet, heißt diskrete Fourier-Transformation oder diskretes Spektrum von x_n. Die Zuordnung $\mathcal{F}^{-1}: X_n \longmapsto x_n$, welche einer diskreten Folge X_n für $n = 0, 1, 2, \ldots, N-1$ und $N \in \mathbb{N}$ das diskrete Signal

$$x_n = \mathcal{F}^{-1}(X_n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}nk} X_k$$

zuordnet, heißt inverse diskrete Fourier-Transformation. Im folgenden seien x_n und y_n diskrete Signale.

Linearität	$ax_n + by_n$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$aX(z) + bY(z)$
Verschiebung im Zeitbereich (periodisch)	$x_{(n-k) \bmod N}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$X_n \cdot W_N^{nk}$
Modulation im Zeitbereich	$W_N^{-nk} x_n$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$X_{(n-k) \bmod N}$
Zeitinversion	x_{N-n}	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	X_{N-n}
konjugiert komplexes Signal	x_k^*	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	X_{N-n}^*
Realteil und Imaginärteil	x_k^R	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{2}(X_n + X_{N-n})$
	x_k^I	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{2}(X_n - X_{N-n})$
periodische Faltung	$x_n \circledast y_n$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$X_n \cdot Y_n$
Multiplikation	$x_n \cdot y_n$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{N} X_n \circledast Y_n$

diskrete Fourier-Transformation wichtiger Eingangssignale

$$\delta_n \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad 1$$

$$1 \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad N\delta_n$$

$$(\mathrm{III}_{N/n})_k \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{N}{n}(\mathrm{III}_{n})_n$$

$$W_N^{nk} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad N\delta_{(n-k) \bmod N}$$

$$\cos\left(2\pi\frac{n_0}{N}k\right) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{N}{2}\left(\delta_{(n-n_0) \bmod N} + \delta_{(n-n_0) \bmod N}\right)$$

$$\sin\left(2\pi\frac{n_0}{N}k\right) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{N}{2}j\left(\delta_{(n-n_0) \bmod N} - \delta_{(n-n_0) \bmod N}\right)$$

Aufgabe 7 Nebenrechnungen extra!

5/5

$x_n = \delta_{n+1} + 2\delta_n + \delta_{n-1}$

$X_n(z) = z^1 + 2 + z^{-1}$ ✓

$y_n = -\delta_{n+2} + 2\delta_n - \delta_{n-2}$

$Y_n(z) = -z^2 + 2 - z^{-2}$ ✓

$H_n(z) = \frac{Y_n(z)}{X_n(z)} = \frac{-z^2 + 2 - z^{-2}}{z^1 + 2 + z^{-1}} \quad \frac{z^2}{z^2}$

$= \frac{-z^4 + 2z^2 - 1}{z^3 + 2z^2 + z^1} = \frac{(z-1)(z-1)(z+1)(z+1)}{z(z+1)(z+1)}$

$H_n(z) = \frac{(z-1)(z-1)}{z} = \frac{z^2 - 2z + 1}{z} = z - 2 + z^{-1}$ ✓

$h_n = \delta_{n+1} - 2\delta_n + \delta_{n-1}$

Stabil, da Impulsantwort endlich wird. Kritisch ✓

Nicht kausal, da Impulsantwort negative Anteile hat ✓

$Y_G(z) = H_n(z) \frac{z}{z-1} = \frac{(z-1)(z-1)}{z} \frac{z}{z-1}$

$Y_G(z) = z - 1$

$y_{Gn} = \delta_{n+1} - \delta_n$ ✓

N.R. Aufgabe 1

Polstellen $z_1 = 0$ $\quad z^2 + 2z + 1 = 0$

$z_{1,4} = -1 \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - 1} = -1 \pm 0$

$z_2 = z_3 = -1$ binomische Formel!

NST

$-z^4 + 2z^2 - 1 = 0$ $\quad \underline{z_1 = 1}$

$-z^4 + 2z^2 - 1 : (z-1) = -z^3 - z^2 + z + 1$

$-\ -z^4 + z^3$ $\quad \underline{z_2 = -1}$

$-z^3 + 2z^2 - 1$

$-\ -z^3 + z^2$

$z^2 - 1$

$-\ z^2 - z$

$z - 1$

$-\ z - 1$

0

$-z^3 - z^2 + z + 1 : (z+1) = -z^2 + 1$

$-\ -z^3 - z^2$

$z + 1$

$-\ z + 1$

0

$-z^2 + 1 = 0$

$z^2 = +1$

$z_{1,4} = \pm\sqrt{1}$

$\underline{z_1 = 1}$ $\quad \underline{z_4 = -1}$

Aufgabe 2

$f_a = 4\,Hz$

3/3

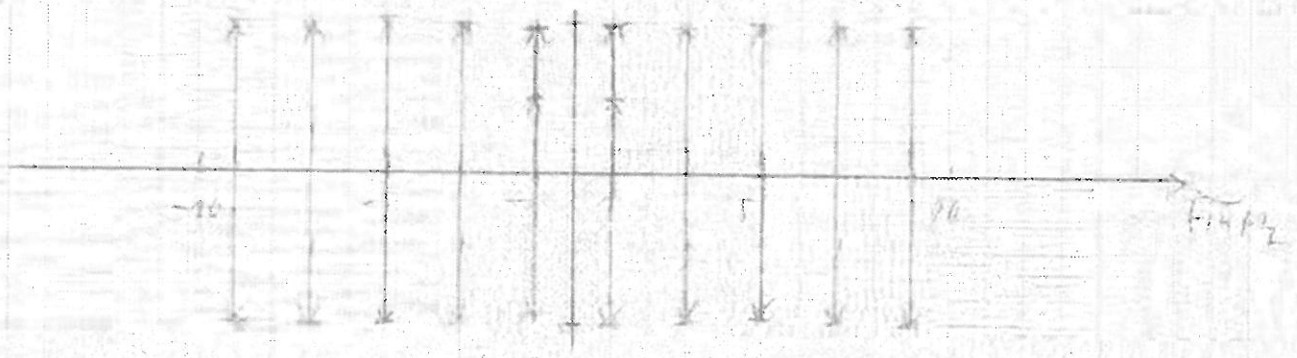
$x(t) = \cos(2\pi t) - \cos(9\pi t)$

$X(j\omega) = \frac{\pi}{j}\left[\delta(\omega-2\pi) + \delta(\omega+2\pi) - \delta(\omega-9\pi) - \delta(\omega+9\pi)\right]$

$\omega = 2\pi f$ und $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$

$X(jf) = \frac{\pi}{2\pi}\left[\delta(f-1) + \delta(f+1) - \delta(f-4) - \delta(f+4)\right]$

$X_a(jf) = f_a \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(j)(f - n f_a)$



Überlagerung und Auslöschung der beiden Signale
Grund dafür ist, die Abtastfrequenz zu hoch
ist.

Aufgabe 3

4/4

$$y_n - x_n + \tfrac{1}{2} x_{n-1} - \tfrac{1}{2} y_{n-1} = \underbrace{\tfrac{1}{2} y_{n-2}}_{x_{n-1}^{(1)}}$$

$$y_n - x_n = \underbrace{x_{n-1}^{(1)} - \tfrac{1}{2} x_{n-1} + \tfrac{1}{2} y_{n-1}}_{x_n^{(2)}}$$

$$\underline{y_n = x_n^{(2)} + x_n} \qquad y_{n-1} = x_{n-1}^{(2)} + x_{n-1}$$

$$y_{n-2} = x_{n-2}^{(2)} + x_{n-2}$$

$$x_{n-1}^{(1)} = \tfrac{1}{2} y_{n-2}$$

$$= \tfrac{1}{2} x_{n-2}^{(2)} + \tfrac{1}{2} x_{n-2}$$

$$\underline{x_n^{(1)} = \tfrac{1}{2} x_{n-1}^{(2)} + \tfrac{1}{2} x_n}$$

$$x_n^{(2)} = x_{n-1}^{(1)} - \cancel{\tfrac{1}{2} x_{n-1}} + \tfrac{1}{2} x_{n-1}^{(2)} + \cancel{\tfrac{1}{2} x_{n-1}}$$

$$\underline{x_n^{(2)} = x_{n-1}^{(1)} + \tfrac{1}{2} x_{n-1}^{(2)}}$$

$$\begin{pmatrix} x_n^{(1)} \\ x_n^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1}^{(1)} \\ x_{n-1}^{(2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} x_n$$

$$y_n = (0 \;\; 1) \begin{pmatrix} x_n^{(1)} \\ x_n^{(2)} \end{pmatrix} + 1 \cdot x_n$$

Aufgabe 4 NR nächstes Zettel 5/5

$$H_n(z) = c^T (z\underline{E} - A)^{-1} \cdot b + d$$

$$= (0 \;\; 1) \begin{pmatrix} z & -2a^2 \\ -1 & z-a \end{pmatrix}^{-1} b + d$$

$$= \frac{1}{z^2 - az - 2a^2} (0 \;\; 1) \begin{pmatrix} z-a & 2a^2 \\ 1 & z \end{pmatrix} \cdot b + d$$

$$= \frac{1}{z^2 - az - 2a^2} (1 \;\; z) \begin{pmatrix} 2a^2 \\ a - \frac{1}{2} \end{pmatrix} + d$$

$$H_n(z) = \frac{2a^2 + za - \frac{1}{2}z}{z^2 - az - 2a^2} + 1$$

Polstellen $\neq$ NST
Stabil für
$|a| \geq 1/2$ ✓

$a = 1/4$

$$H_n(z) = \frac{2/16 + \frac{z}{4} - \frac{1}{2}z}{z^2 - \frac{1}{4}z - 2/16} + 1$$

$$= \frac{1/8 + \frac{z}{4} - \frac{1}{2}z + z^2 - \frac{1}{4}z - 1/8}{z^2 - \frac{1}{4}z - 1/8}$$

$$= \frac{z^2 - 1/2\, z}{z^2 - \frac{1}{4}z - 1/8} = \frac{z(z - 1/2)}{(z - 1/2)(z + 1/4)} \checkmark$$

$$H_n(z) = \frac{z}{z + 1/4} \quad \frac{-4}{-4} \quad \frac{-4z}{-4z + 1}$$

$$\underline{\underline{h_n = \left(\frac{1}{-4}\right)^{-n} \sigma_n}} \; (\checkmark)$$

N.R. Aufgabe 4

Polstellen $z^2 - az - 2a^2 = 0$

$$p_{1,2} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + 2\frac{4a^2}{4}}$$

$$= \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}a^2}$$

$$= \frac{a}{2} \pm \frac{3a}{2} \qquad \underline{p_1 = 2a} \qquad \underline{p_2 = -a}$$

NST

$$z\left(a - \frac{a}{2}\right) + 2a^2 = 0$$

$$z = \frac{-2a^2}{(a - a/2)}$$

PST $a = 1/4$

$$z^2 - 1/4\, z - 1/8 = 0$$

$$p_{1,2} = +\frac{1}{8} \pm \sqrt{\frac{1}{64} + \frac{8}{64}}$$

$$p_{1,2} = \frac{1}{8} \pm \frac{3}{8}$$

$$p_1 = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \qquad p_2 = -1/4$$

Aufgabe 5

3/3

$f_p = 4\,kHz$

$f_a = 10\,kHz$ $\quad f_w = 4{,}25\,kHz$

$f \leq \frac{f_a}{2}$

Elemente

$4\,kHz \leq 5\,kHz$ ✓ Beide können untersucht werden ✓

$4{,}25\,kHz \leq 5\,kHz$

$\Delta f = f_w - f_p = 4\,kHz - 4{,}25\,kHz = 250\,Hz$

$\Delta f = \frac{1}{T} \quad T = \frac{1}{\Delta f} = \underline{\underline{\frac{1}{250}\,s}}$ ✓

Aufgabe 6

2/5

$$2Y(z) = X_n(z)\,(1 - z^{-2})$$

$$Y(z) = X_n(z)\,\frac{1 - z^{-2}}{2} \qquad H_n(z)$$

$$H_n(z) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{z^2}$$

System stabil Pol Rand $= 0$

$z^2 = e^{j2\Omega}$

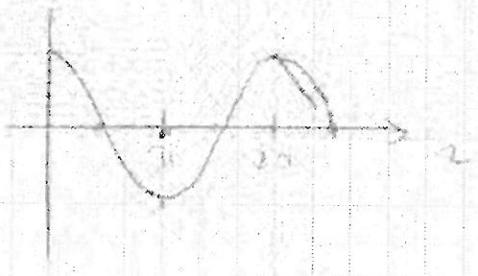
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,e^{-2j\Omega}$$

$$= e^{-j\Omega} \cdot \frac{1}{2}\left(e^{j\Omega} - e^{-j\Omega}\right)$$

$$= e^{-j\Omega} \cdot j\sin(\Omega)$$

$$= \cos(\Omega) - j\sin(\Omega) + j\sin(\Omega)$$

$$H_n(z) = \cos(\Omega)$$



Das Filter ist ein rein reeller Cosinus ?

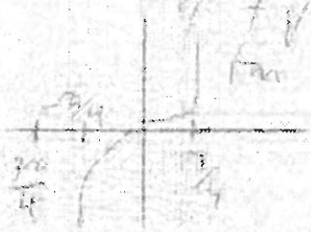
1/6

Aufgabe 7

$$\omega_u = \tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1+\sqrt{1+\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}} = \frac{1}{1+\sqrt{2}}$$

$$\omega_o = \tan\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)}{1+\sqrt{1+\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)}}$$

$\omega_o = \infty$ da



?

Da $\omega_o = \infty$ Bandsperre → Hochpass

$$T_{HP} = \frac{1}{\omega_u} = \frac{1}{\frac{1}{1+\sqrt{2}}} = 1+\sqrt{2}$$

$$H_{HP} = \frac{T \cdot s}{T \cdot s + 1} = \frac{(1+\sqrt{2})\, s}{(1+\sqrt{2})\, s + 1}$$

System nicht stabil (

$$\cancel{H_{HP} = \frac{s+1}{s+1}}$$

Aufgabe 8

$R_n = X_n Y_n + b\, n\, X_n$ 3/6

$X_n\ [-1, 1]\quad f_X(x) = 1/2$

$E(X) = \int_{-1}^{1} x \cdot \frac{1}{2}\, dx = \frac{1}{4} [x^2]_{-1}^{1}$

$= \frac{1}{4} [0] = \underline{\underline{0}}$ ✓

$E(X^2) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} x^2 \cdot 1\, dx = \frac{1}{2} [\frac{1}{3} x^3]_{-1}^{1}$

$= \frac{1}{3} [1 - (-1)] = 2/3$ (✓)

$Y_n\ [0, 1]\quad \underline{E(Y) = 1/2}$ ✓ $f_Y(x) = 1$

$E(Y^2) = \int_0^1 y^2\, dy = \frac{1}{3} [y^3]_0^1 = 1/3$ ✓

$E(R) = E(X_n)\, E(Y_n) + b\, n\, E(X_n)$

$= 0 \cdot 1 + b\, n \cdot 0 = \underline{\underline{0}}$ ✓

$V(R) = E(R^2) - E^2(R)$

$= E((X_n Y_n + b\, n\, X_n)(X_n Y_n + b\, n\, X_n)) - (0)^2$

$= E(X_n^2 Y_n^2) + 2\, b\, n\, E(X_n^2) + \ldots$

$= E(X_n^2)\, E(Y_n^2) + 2\, b\, n\, E(X_n^2)\, E(Y_n) + \ldots$

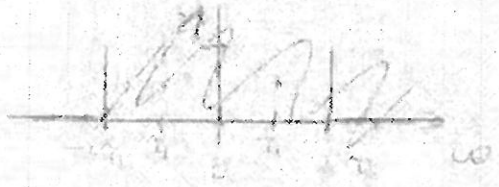
$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + 2\, b\, n \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$

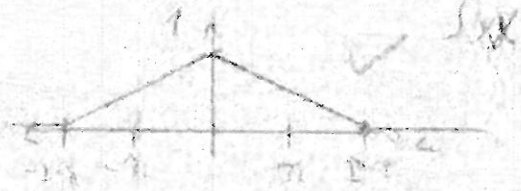
$= \underline{\underline{\frac{2}{9} + b\, n\, \frac{2}{3}}}$

Der Prozess ist nicht stationär ✓ warum?

Aufgabe 9

$S_{xx}(j\omega) \begin{cases} 1 - \frac{|\omega|}{2\pi} & \text{für } |\omega| < 2\pi \\ \text{sonst } 0 \end{cases}$ 2/6





S_{xx}

S_{xx} = Rampe

$$r_{xx}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}\, e^{j\omega\tau}\, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi}^{2\pi} 1 - \frac{|\omega|}{2\pi}\, e^{j\omega\tau}\, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-2\pi}^{2\pi} e^{j\omega\tau}\, d\omega - \int_{-2\pi}^{2\pi} \frac{\omega}{2\pi}\, e^{j\omega\tau}\, d\omega \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{j\omega\tau}}{j\tau} \right]_{-2\pi}^{2\pi}$$

Mir fehlt der Rampenfaktor

Aufgabe 10

$h(t) = \frac{1}{T}\, \sigma(t)\, e^{-\frac{t}{T}}$

$S_{RR} = \sigma^2 = 1$

2/5

$H(j\omega) = F\{h(t)\} = \frac{1}{\ }$

$S_{YY} = |H(j\omega)|^2 \cdot S_{RR} = |H(j\omega)|^2 \cdot 1$

$r_{YY}(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet S_{YY}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 e^{j\omega\tau}\, d\tau$

Gesamtleistung $\underline{\underline{r_{YY}(0)}}$