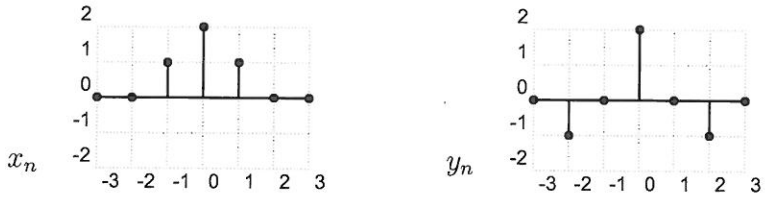
MUSTERLÖSUNG ZUR KLAUSUR ZU SIGNALE & SYSTEME II

AUFGABE 1 (5 PUNKTE): Gegeben ist ein diskretes LTI-System, das bei Erregung mit dem Eingangssignal $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ das Ausgangssignal $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ erzeugt.



Ist das System $\mathcal{S}$ kausal und stabil? Bestimmen Sie die Impulsantwort $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ des Systems sowie die Sprungantwort $(y_n^\sigma)_{n\in\mathbb{Z}}$ und skizzieren Sie beide.

LÖSUNG: Das Eingangssignal ist gegeben durch $x_n = \delta_{n+1} + 2\delta_n + \delta_{n-1}$ und das Ausgangssignal durch $y_n = -\delta_{n+2} + 2\delta_n - \delta_{n-2}$ und es gilt $x_n * h_n = y_n$. Führt man eine z-Transformation durch, erhält man

$$\begin{aligned}
X(z)\cdot H(z) &= Y(z)\\
(z+2+z^{-1})\cdot H(z) &= -z^2+2-z^{-2}\\
H(z) &= \frac{-z^2+2-z^{-2}}{z+2+z^{-1}} = \frac{-z^4+2z^2-1}{z(z^2+2z+1)} = \frac{-(z^2-1)^2}{z(z+1)^2}\\
&= \frac{-(z-1)^2(z+1)^2}{z(z+1)^2} = \frac{-(z-1)^2}{z} = -z+2-z^{-1}
\end{aligned}$$

Die Rücktransformation ergibt daraus $h_n = -\delta_{n+1}+2\delta_n-\delta_{n-1}$. Daraus sieht man sofort, dass das System nicht kausal, aber stabil ist. Die Sprungantwort ergibt sich aus der Impulsantwort als Summe

$$y_n^\sigma = \sum_{k=-\infty}^{n} h_k = -\sigma_{n+1} + 2\sigma_n - \sigma_{n-1} = -\delta_{n+1} + \delta_n.$$

AUFGABE 2 (3 PUNKTE): Das zusammengesetzte Signal

$$x(t) = \cos(2\pi t) - \cos(10\pi t)$$

wird mit einer Frequenz $f_a = 4\text{Hz}$ abgetastet. Was passiert? Und warum? (Erklärende Skizzen sind ausreichend.)

LÖSUNG:

oder sortiert

$$\begin{aligned}
x_n^{(1)} &= \frac{1}{2}y_{n-1} = \frac{1}{2}(x_{n-1}^{(2)} + x_{n-1}) \\
x_n^{(2)} &= x_{n-1}^{(1)} - \frac{1}{2}x_{n-1} + \frac{1}{2}y_{n-1} = x_{n-1}^{(1)} - \frac{1}{2}x_{n-1} + \frac{1}{2}(x_{n-1}^{(2)} + x_{n-1}) \\
y_n &= x_n^{(2)} + x_n,
\end{aligned}$$

also ergibt sich in Matrixform

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_n^{(1)} \\ x_n^{(2)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{n-1}^{(1)} \\ x_{n-1}^{(2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot x_{n-1} \\
y_n &= (0,1) \cdot \begin{pmatrix} x_n^{(1)} \\ x_n^{(2)} \end{pmatrix} + x_n.
\end{aligned}$$

AUFGABE 4 (5 PUNKTE): Betrachten Sie das diskrete LTI-System, das mit $a \in \mathbb{R}$ in der Zustandsraumdarstellung gegeben ist durch

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_n^{(1)} \\ x_n^{(2)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 2a^2 \\ 1 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{n-1}^{(1)} \\ x_{n-1}^{(2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a^2 \\ a - \frac{1}{2} \end{pmatrix} x_{n-1} \\
y_n &= (0,1) \cdot \begin{pmatrix} x_n^{(1)} \\ x_n^{(2)} \end{pmatrix} + x_n.
\end{aligned}$$

Berechnen Sie die Übertragungsfunktion. Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist das System stabil? Bestimmen Sie für $a = \frac{1}{4}$ die Impulsantwort des Systems.

LÖSUNG: Aus der Zustandsraumdarstellung im Zeitbereich ergibt sich durch z-Transformation die allgemeine Formel für die Übertragungsfunktion

$$\begin{aligned}
H(z) &= \mathbf{c}^T \cdot (z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{b} + d \\
&= (0,1) \cdot \begin{pmatrix} z & -2a^2 \\ -1 & z-a \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2a^2 \\ a - \frac{1}{2} \end{pmatrix} + 1 \\
&= (0,1) \cdot \frac{1}{z(z-a) - 2a^2} \begin{pmatrix} z-a & 2a^2 \\ 1 & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2a^2 \\ a - \frac{1}{2} \end{pmatrix} + 1 \\
&= \frac{1}{z^2 - az - 2a^2}(1, z) \cdot \begin{pmatrix} 2a^2 \\ a - \frac{1}{2} \end{pmatrix} + 1 \\
&= \frac{2a^2 + z(a - \frac{1}{2})}{z^2 - az - 2a^2} + 1 = \frac{2a^2 + z(a - \frac{1}{2}) + z^2 - az - 2a^2}{z^2 - az - 2a^2} \\
&= = \frac{z^2 - \frac{1}{2}z}{z^2 - az - 2a^2} = \frac{z(z - \frac{1}{2})}{(z+a)(z-2a)}
\end{aligned}$$

Der Pol der Übertragungsfunktion $z = 0$ liegt im Einheitskreis, also ist das System stabil, z darf durch $e^{j\Omega}$ ersetzt werden

$$H(j\Omega) = \frac{e^{2j\Omega} - 1}{2e^{2j\Omega}} = \frac{e^{j\Omega}(e^{j\Omega} - e^{-j\Omega})}{2e^{2j\Omega}} = \frac{j\sin\Omega}{e^{j\Omega}} = j\sin\Omega e^{-j\Omega} = \sin\Omega e^{j(\frac{\pi}{2}-\Omega)}.$$

Der Amplitudengang ergibt

$$|H(j\Omega)| = |\sin\Omega|.$$

Es ergeben sich $|H(j0)| = 0$, $|H(j\pi)| = 0$ und $|H(j\frac{\pi}{2})| = 1$. Also ergibt sich ein Bandpass! Der Phasengang ergibt

$$\Phi(j\Omega) = \frac{\pi}{2} - \Omega,$$

beginnt bei $\frac{\pi}{2}$ für $\Omega = 0$, für $\Omega = \pi$ endet er bei $-\frac{\pi}{2}$ und bei $\Omega = \frac{\pi}{2}$ gilt $\Phi(j\Omega) = 0$.

AUFGABE 7 (6 PUNKTE): Entwerfen Sie eine diskrete Bandsperre mit den Grenzfrequenzen $\Omega_u = \frac{\pi}{4}$ und $\Omega_o = \frac{3\pi}{4}$. Dabei hilft Ihnen eventuell das Additionstheorem $\tan\frac{x}{2} = \frac{\tan x}{1+\sqrt{1+\tan x}}$. Wie sieht die Impulsantwort der Bandsperre aus? Handelt es sich um ein FIR-Filter oder IIR-Filter? Welchen Frequenzen f_u und f_o entsprechen die Grenzfrequenzen, wenn das Signal mit einer Abtastzeit von $T_a = 0.1s$ abgetastet wird?

LÖSUNG: Zu entwerfen ist eine diskrete Bandsperre. Dazu müssen zunächst beide Grenzfrequenzen in ihr kontinuierliches Äquivalent umgerechnet werden!

$$\begin{aligned}
\omega_u &= \tan(\frac{\Omega_u}{2}) = \tan(\frac{\pi}{8}) = \frac{\tan\frac{\pi}{4}}{1+\sqrt{1+\tan\frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{1+\sqrt{1+1}} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} \\
\omega_0 &= \tan(\frac{\Omega_0}{2}) = \tan(\frac{3\pi}{8}) = \frac{1}{\tan(\frac{\pi}{8})} = \frac{1}{\frac{1}{1+\sqrt{2}}} = 1+\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Es handelt sich um eine Bandsperre zwischen $\omega_u = \frac{1}{1+\sqrt{2}}$ und $\omega_o = 1+\sqrt{2}$. Die Übertragungsfunktion für die kontinuierliche Bandsperre bekommen wir aus der Übertragungsfunktion des passenden Tiefpasses

$$H(s) = \frac{1}{1+Ts}$$

mit der Transformation $Ts \to \frac{B}{Ts+\frac{1}{Ts}}$

$$H(s) = \frac{1}{1+\frac{B}{Ts+\frac{1}{Ts}}} = \frac{Ts+\frac{1}{Ts}}{Ts+\frac{1}{Ts}+B} = \frac{T^2s^2+1}{T^2s^2+1+BTs}$$

LÖSUNG: Zunächst sind die Erwartungswerte von Potenzen der beiden Zufallsprozesse zu berechnen

$$\begin{aligned}
E(X_n) &= \int_{-1}^{1} x\frac{1}{2}dx = \frac{1}{2}\frac{x^2}{2}|_{-1}^{1} = 0 \\
E(X_n^2) &= \int_{-1}^{1} x^2\frac{1}{2}dx = \frac{1}{2}\frac{x^3}{3}|_{-1}^{1} = \frac{1}{3} \\
E(Y_n) &= \int_{0}^{1} xdx = \frac{x^2}{2}|_{0}^{1} = \frac{1}{2} \\
E(Y_n^2) &= \int_{0}^{1} x^2dx = \frac{x^3}{3}|_{0}^{1} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Für den Erwartungswert ergibt sich

$$E(R_n) = E(X_n \cdot Y_n + bnX_n) = E(X_n)E(Y_n) + bnE(X_n) = 0 \cdot \frac{1}{2} + b \cdot n \cdot 0 = 0.$$

Der Erwartungswert des Quadrats der Zufallsvariablen ergibt

$$\begin{aligned}
E(R_n^2) &= E((X_n \cdot Y_n + bnX_n)^2) = E(X_n^2 \cdot Y_n^2 + 2bnX_n^2 \cdot Y_n^2 + b^2n^2X_n^2) \\
&= E(X_n^2)E(Y_n^2) + 2bnE(X_n^2)E(Y_n) + b^2n^2E(X_n^2) \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + 2bn \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + b^2n^2\frac{1}{3} = \frac{1}{9} + \frac{1}{3}bn + \frac{1}{3}b^2n^2,
\end{aligned}$$

und damit erhalten wir die Varianz

$$V(R_n) = E(R_n^2) - E^2(R_n) = E(R_n^2) = \frac{1}{9} + \frac{1}{3}bn + \frac{1}{3}b^2n^2.$$

Da die Varianz nicht unabhängig ist von n, ist der Prozess so nicht stationär! Wählt man jedoch $b = 0$, wird die Variation unabhängig von n! Für die Autokorrelationsfunktion (Autokorrelationsfolge) erhält man

$$\begin{aligned}
r_{RR}(k) &= E(R_n \cdot R_{n+k}) = \delta_k E(R_n^2) + (1 - \delta_k)E(R_n)E(R_{n+k}) \\
&= \delta_k E(R_n^2) + (1 - \delta_k)E^2(R_n) = \delta_k(E(R_n^2) - E^2(R_n)) + E^2(R_n) \\
&= \delta_k V(R_n) + E^2(R_n) = \delta_k\frac{1}{9} + 0^2 = \delta_k\frac{1}{9}
\end{aligned}$$

Da $E(R_n)$, $V(R_n)$ und $r_{RR}(k)$ mit $b = 0$ unabhängig von n sind, ist der Prozess im weiteren Sinne stationär. Das Leistungsdichtespektrum ergibt sich durch

$$S_{RR}(j\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\delta_k\frac{1}{9})e^{-jk\Omega} = \frac{1}{9}.$$

AUFGABE 9 (6 PUNKTE): Ein zeit-kontinuierlicher stationärer Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ sei durch sein Leistungsdichtespektrum definiert

$$S_{XX}(j\omega) = \begin{cases} 1 - \frac{|\omega|}{2\pi} & \text{für } |\omega| < 2\pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

LÖSUNG: Das Leistungsdichtespektrum des Ausgangsprozesses $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ kann mit Hilfe des Wiener-Lee-Theorems berechnet werden

$$S_{XX} = |H(j\omega)|^2 S_{RR} = |H(j\omega)|^2.$$

Damit muss der Frequenzgang des Systems berechnet werden

$$h(t) = \frac{1}{T}\sigma(t)e^{-\frac{t}{T}} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad H(s) = \frac{1}{T}\frac{1}{s+\frac{1}{T}} = \frac{1}{Ts+1}.$$

Da das System stabil ist (Pol bei $s = -\frac{1}{T}$), gilt für den Frequenzgang

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \frac{1}{Tj\omega+1} \\ |H(j\omega)|^2 &= \frac{1}{T^2\omega^2+1}. \end{aligned}$$

Es gilt damit

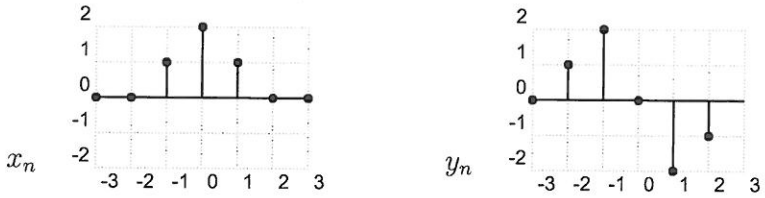
$$S_{XX} = |H(j\omega)|^2 = \frac{1}{T^2\omega^2+1}.$$

Die Gesamtleistung bekommen wir durch

$$\begin{aligned} r_{XX}(0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(j\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{T^2\omega^2+1}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{y^2+1}\frac{dy}{T} \\ &= \frac{1}{2\pi T}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{y^2+1}dy = \frac{1}{2\pi T}\arctan y|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{2\pi T}(\arctan(\infty) - \arctan(-\infty)) \\ &= \frac{1}{2\pi T}(\frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2}) = \frac{1}{2T}. \end{aligned}$$

MUSTERLÖSUNG ZUR KLAUSUR ZU SIGNALE & SYSTEME II
AM
2. FEBRUAR 2015 VON 8.00 BIS 10.00 UHR

AUFGABE 1: Gegeben ist ein diskretes LTI-System, das bei Erregung mit dem Eingangssignal $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ das Ausgangssignal $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ erzeugt.



Ist das System $\mathcal{S}$ kausal und stabil? Bestimmen Sie die Impulsantwort $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ des Systems sowie die Sprungantwort $(y_n^\sigma)_{n\in\mathbb{Z}}$.

LÖSUNG: Am einfachsten sieht man, dass sich das Ausgangssignal aus dem Eingangssignal zusammensetzt $y_n = x_{n+1} - x_{n-1}$. Daraus folgt sofort, dass die Impulsantwort gegeben ist durch $h_n = \delta_{n+1} - \delta_{n-1}$. Alternativ über die Übertragungsfunktion. Daraus sieht man sofort, dass das System nicht kausal, aber stabil ist. Die Sprungantwort ergibt sich aus der Impulsantwort als Summe $y_n^\sigma = \sum_{k=-\infty}^{n} h_k = \sigma_{n+1} - \sigma_{n-1} = \delta_{n+1} + \delta_n$.

AUFGABE 2: Das zusammengesetzte Signal

$$x(t) = \sin(2\pi t) + \sin(14\pi t)$$

wird mit einer Frequenz $f_a = 8Hz$ abgetastet. Was kann passieren? Und warum? (Erklärende Skizzen sind ausreichend.)

LÖSUNG: Entweder durch Skizzen anschauen, dass der zweite Anteil durch die Abtastung im wesentlichen auf dem ersten Anteil landet, so dass sich die beiden Signale verstärken oder auslöschen können (je nach Anfangsphase) oder ausrechnen

$$\begin{aligned} x(T_0 + n\cdot 0.125) &= \sin(2\pi(T_0 + n\cdot 0.125)) + \sin(14\pi(T_0 + n\cdot 0.125)) \\ &= \sin(2\pi T_0 + \frac{n\pi}{4}) + \sin(14\pi T_0 - \frac{n\pi}{4}) \\ &= \sin(2\pi T_0 + \frac{n\pi}{4}) - \sin(\frac{n\pi}{4} - 14\pi T_0). \end{aligned}$$

Für $T_0 = 0$ ergibt sich Auslöschung, für andere T_0 Interferenz bis zur positiven Überlagerung!

Berechnen Sie die Übertragungsfunktion. Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist das System stabil? Bestimmen Sie für $a = 1$ die Impulsantwort des Systems.

LÖSUNG: Aus der Zustandsraumdarstellung im Zeitbereich ergibt sich durch z-Transformation die allgemein Formel für die Übertragungsfunktion

$$\begin{aligned}
H(z) &= \mathbf{c}^T \cdot (z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{b} + d \\
&= (0,1) \cdot \begin{pmatrix} z & -\frac{1}{2}a^2 \\ -1 & z - \frac{1}{2}a \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a^2 \\ \frac{1}{2}a - \frac{1}{a} \end{pmatrix} + 1 \\
&= (0,1) \cdot \frac{1}{z(z-\frac{1}{2}a) - \frac{1}{2}a^2} \begin{pmatrix} z - \frac{1}{2}a & \frac{1}{2}a^2 \\ 1 & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a^2 \\ \frac{1}{2}a - \frac{1}{a} \end{pmatrix} + 1 \\
&= \frac{1}{z^2 - \frac{1}{2}az - \frac{1}{2}a^2} (1, z) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a^2 \\ \frac{1}{2}a - \frac{1}{a} \end{pmatrix} + 1 \\
&= \frac{\frac{1}{2}a^2 + z(\frac{1}{2}a - \frac{1}{a})}{z^2 - \frac{1}{2}az - \frac{1}{2}a^2} + 1 = \frac{\frac{1}{2}a^2 + z\frac{1}{2}a - \frac{1}{a}z}{z^2 - \frac{1}{2}az - \frac{1}{2}a^2} + 1 \\
&= \frac{\frac{1}{2}a^2 + z\frac{1}{2}a - \frac{1}{a}z + z^2 - \frac{1}{2}az - \frac{1}{2}a^2}{z^2 - \frac{1}{2}az - \frac{1}{2}a^2} = \frac{-\frac{1}{a}z + z^2}{z^2 - \frac{1}{2}az - \frac{1}{2}a^2} = \frac{z(z - \frac{1}{a})}{(z + \frac{1}{2}a)(z - a)}
\end{aligned}$$

Die Übertragungsfunktion hat Pole bei $z = a$ und $z = -\frac{a}{2}$, das heißt es muss gelten $|a| < 1$, da die Pole für die Stabilität im Einheitskreis liegen müssen. Für $a = 1$ ergibt sich

$$H(z) = \frac{z(z - \frac{1}{a})}{(z + \frac{1}{2}a)(z - a)} = \frac{z(z-1)}{(z + \frac{1}{2})(z - 1)} = \frac{z}{z + \frac{1}{2}},$$

was im Zeitbereich der Impulsantwort $h_n = \sigma_n \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ entspricht.

AUFGABE 5: Für die Messung einer Geschwindigkeit v kann die Dopplerfrequenz f_D verwendet werden, sie ergibt bei einem üblichen Radargerät

$$f_D = \frac{2 \cdot v}{1.25cm}.$$

Welche Höchstgeschwindigkeit kann erfasst werden, wenn die digitale Messung mit einer Abtastrate von $f_a = 24kHz$ erfolgt und wie genau können Geschwindigkeiten innerhalb von $0.5s$ gemessen werden?

LÖSUNG: Das Abtasttheorem besagt, dass höchstens Frequenzen mit der halben Abtastfrequenz aufgelöst werden können $f_g < \frac{1}{2}f_a$. Daraus ergibt sich als Grenzfrequenz $f_g = 12kHz = f_D$, das ergibt die Höchstgeschwindigkeit

$$v = \frac{1}{2}f_D \cdot 1.25cm = \frac{1}{2}12kHz \cdot 1.25cm = 75\frac{m}{s} = 270\frac{km}{h}.$$

beginnt bei 0 für $\Omega = 0$, für $\Omega = \pi$ endet er bei 0 und dazwischen bei $\Omega = \frac{\pi}{2}$ springt er von $-\frac{\pi}{2}$ auf $-\frac{\pi}{2}$.
b) Da es sich um eine Bandsperre mit $b^2 = \frac{4}{3}$ handelt, sind zwei Grenzfrequenzen gesucht. Bei der Grenzfrequenz muss die Leistung auf die Hälfte abgefallen sein

$$\begin{aligned}
|H(j\Omega_g)|^2 &= \frac{1}{2} \\
\frac{4\cos^2\Omega_g}{4\cos^2\Omega_g + \frac{4}{3}\sin^2\Omega_g} &= \frac{1}{2} \\
8\cos^2\Omega_g &= 4\cos^2\Omega_g + \frac{4}{3}\sin^2\Omega_g \\
4\cos^2\Omega_g &= \frac{4}{3}\sin^2\Omega_g = \frac{4}{3}(1-\cos^2\Omega_g) \\
(4+\frac{4}{3})\cos^2\Omega_g &= \frac{4}{3} \\
\frac{16}{3}\cos^2\Omega_g &= \frac{4}{3} \\
\cos^2\Omega_g &= \frac{4}{3}\cdot\frac{3}{16} = \frac{1}{4} \\
\cos\Omega_g &= \pm\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Damit ergeben sich die beiden Grenzfrequenzen $\Omega_u = \frac{\pi}{3}$ und $\Omega_o = \frac{2\pi}{3}$.

AUFGABE 7: Es sei $(R_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ein zeit-diskreter Rauschprozess mit

$$R_n = X_n \cdot Y_n + Y_n.$$

Dabei ist X eine im Intervall $[0,2]$ gleichverteilte Zufallsvariable und Y eine zu X stochastisch unabhängige und im Intervall $[-1,1]$ gleichverteilte Zufallsvariable. Berechnen Sie Erwartungswert, Varianz und Autokorrelationsfunktion des Prozesses. Ist der Prozess stationär? Berechnen Sie das Leistungsdichtespektrum.

LÖSUNG: Zunächst sind die Erwartungswerte von Potenzen der beiden Zufallsprozesse zu berechnen

$$\begin{aligned}
E(X_n) &= \int_0^2 x\frac{1}{2}dx = \frac{1}{2}\frac{x^2}{2}|_0^2 = \frac{1}{2}\frac{2^2}{2} = 1 \\
E(X_n^2) &= \int_0^2 x^2\frac{1}{2}dx = \frac{1}{2}\frac{x^3}{3}|_0^2 = \frac{1}{2}\frac{2^3}{3} = \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

Y hat die gleiche Verteilung um 1 verschoben, also ist der Erwartungswert

$$\begin{aligned}
E(Y_n) &= 0 \\
E(Y_n^2) &= \int_{-1}^1 y^2\frac{1}{2}dy = \frac{1}{2}\frac{y^3}{3}|_{-1}^1 = \frac{1}{2}\frac{2}{3} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

also $\omega_0 = 20\pi$ und nur Beiträge für $k = \pm 1$ und $k = \pm 3$. Das Leistungsdichtespektrum des deterministischen Anteils ist gegeben durch

$$\begin{aligned} S_{\tilde{X}\tilde{X}}(j\omega) &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \delta(\omega - k\omega_0) \\ &= 2\pi(\delta(\omega - 20\pi) + \delta(\omega + 20\pi) + \delta(\omega - 60\pi) + \delta(\omega + 60\pi)) \end{aligned}$$

Das Leistungsdichtespektrum des Rauschsignals ist laut Vorlesung gegeben durch

$$S_{NN}(j\omega) = \sigma^2 \mathrm{rect}(\frac{\omega}{2\omega_g}) = \sigma^2 \mathrm{rect}(\frac{\omega}{2 \cdot 80\pi})$$

und die Gesamtleistung durch

$$P_N = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{NN}(j\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_g}^{\omega_g} \sigma^2 d\omega = \sigma^2 \frac{\omega_g}{\pi} = 2\sigma^2 f_g = 80\sigma^2 s^{-1}.$$

Ist die mittlere Gesamtleistung gegeben als 0.8W ergibt sich für $\sigma^2 = \frac{0{,}8W}{80s^{-1}} = \frac{1}{100}$J.
Also ergibt sich insgesamt das Leistungsdichtespektrum als

$$S_{XX}(j\omega) = \frac{1}{100} \mathrm{rect}(\frac{\omega}{160\pi}) + 2\pi(\delta(\omega - 20\pi) + \delta(\omega + 20\pi) + \delta(\omega - 60\pi) + \delta(\omega + 60\pi)).$$

Die Autokorrelationsfunktion des deterministischen Teils ist laut Vorlesung

$$r_{\tilde{X}\tilde{X}}(\tau) = c_0^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \cos(k\omega_0 \tau) = 2(\cos(20\pi\tau) + \cos(60\pi\tau)).$$

Die Autokorrelationsfunktion des Rauschens ist laut Vorlesung

$$r_{NN}(\tau) = \sigma^2 \frac{\omega_g}{\pi} \mathrm{si}(\omega_g \tau) = \sigma^2 \frac{80\pi}{\pi} \mathrm{si}(80\pi\tau) = 0.8 \mathrm{si}(80\pi\tau),$$

also ergibt sich

$$r_{XX}(\tau) = 2(\cos(20\pi\tau) + \cos(60\pi\tau)) + 0.8 \mathrm{si}(80\pi\tau).$$

b) Die mittlere Gesamtleistung des deterministischen Anteils ergibt

$$P_X = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(j\omega) d\omega = 4.$$

Für Rauschen und den deterministischen Prozess zusammen ergibt sich

$$r_{XX}(0) = 0.8W + 4W = 4.8W.$$

das gleiche gilt für den Ausgangsprozess $(Y_t)_{t\in\mathbb{R}}$. Andererseits gilt

$$\begin{aligned} S_{YY}(j\omega) &= |H(j\omega)|^2 \cdot S_{XX}(j\omega) \\ \frac{b^2}{(b+j\omega)(b-j\omega)} &= |H(j\omega)|^2 \cdot \frac{a^2}{(a+j\omega)(a-j\omega)} \\ \frac{b^2}{(b+j\omega)(b-j\omega)} \cdot \frac{(a+j\omega)(a-j\omega)}{a^2} &= H(j\omega)H(-j\omega). \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$H(j\omega) = \frac{b}{b+j\omega} \cdot \frac{a+j\omega}{a}$$

und damit

$$H(s) = \frac{b}{a}\frac{a+s}{b+s} = \frac{b}{a}(1 + \frac{a-b}{b+s}).$$

Im Zeitbereich ergibt das $h(t) = \frac{b}{a}(\delta(t) + (a-b)\sigma(t)e^{-bt}$.

MUSTERLÖSUNG ZUR KLAUSUR ZU SIGNALE & SYSTEME II

AUFGABE 1 (3 PUNKTE): Gegeben seien ein diskretes LTI-System mit der Impulsantwort $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ und ein Eingangssignal $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$

$$h_n = \sigma_n \cdot \frac{1}{2^n} \qquad\qquad x_n = \delta_n - \frac{1}{4}\delta_{n-2}.$$

Ist das System $\mathcal{S}$ kausal und stabil? Bestimmen Sie das Ausgangssignal $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ bei Erregung des Systems mit dem Eingangssignal $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ und skizzieren Sie es!

LÖSUNG: Das System ist kausal, da die Impulsantwort für negative n verschwindet. Das System ist stabil, da die Übertragungsfunktion die Form $H(z) = \frac{z}{z-\frac{1}{2}}$ hat, also nur einen Pol bei $z = \frac{1}{2}$ innerhalb des Einheitskreises. Alternativ kann man auch feststellen, dass die Summe über h_n konvergiert. Das Ausgangssignal $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ bei Erregung des Systems mit dem Eingangssignal $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ erhält man durch Faltung

$$\begin{aligned} y_n &= h_n * x_n = (\sigma_n \cdot \frac{1}{2^n}) * (\delta_n - \frac{1}{4}\delta_{n-2}) = \sigma_n \cdot \frac{1}{2^n} * \delta_n - \frac{1}{4}\sigma_n \cdot \frac{1}{2^n} * \delta_{n-2} \\ &= \sigma_n \cdot \frac{1}{2^n} - \frac{1}{4}\sigma_{n-2} \cdot \frac{1}{2^{n-2}} = \sigma_n \cdot \frac{1}{2^n} - \sigma_{n-2} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^n}(\sigma_n - \sigma_{n-2}) \\ &= \frac{1}{2^n}(\delta_n + \delta_{n-1}) = \delta_n + \frac{1}{2}\delta_{n-1}. \end{aligned}$$

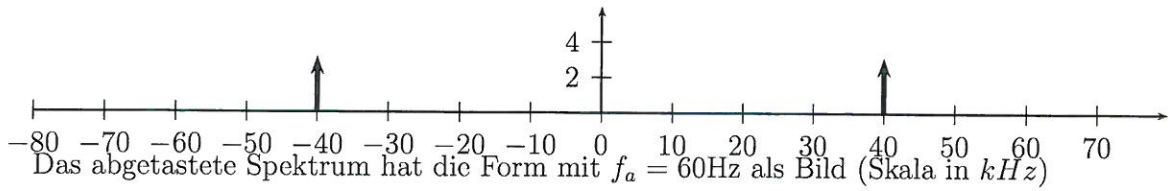
Es bleiben also nur zwei Beiträge übrig.

AUFGABE 2 (3 PUNKTE): Das Spektrum eines Signals ist gegeben durch

$$X(j\omega) = \pi\delta(\omega + 80\pi) + \pi\delta(\omega - 80\pi).$$

Das Signal wird mit einer Frequenz $f_a = 60Hz$ abgetastet. Welche Grundfrequenz ist zu hören? (Erklärende Skizzen sind ausreichend.)

LÖSUNG: Das Spektrum des kontinuierlichen Signals hat nur zwei Beiträge bei den Frequenzen ±40Hz, also als Bild (Skala in Hz)



Das abgetastete Spektrum hat die Form mit $f_a = 60$Hz als Bild (Skala in kHz)

Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion aus der Zustandsraumdarstellung sowie die Impulsantwort des Systems. Ist das System stabil?

LÖSUNG: Aus der Zustandsraumdarstellung im Zeitbereich ergibt sich durch z-Transformation die allgemein Formel für die Übertragungsfunktion

$$\begin{aligned}
H(z) &= \mathbf{c}^T \cdot (z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{b} + d \\
&= (0,1) \cdot \begin{pmatrix} z & -6 \\ -1 & z+1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \end{pmatrix} + 1 \\
&= (0,1) \cdot \frac{1}{z(z+1)-6} \begin{pmatrix} z+1 & 6 \\ 1 & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \end{pmatrix} + 1 \\
&= \frac{1}{z^2+z-6}(1,z) \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \end{pmatrix} + 1 \\
&= \frac{12-6z}{z^2+z-6} + 1 \\
&= \frac{6(2-z)}{(z+3)(z-2)} + 1 \\
&= -\frac{6}{z+3} + 1 = 1 - 6z^{-1}\frac{z}{z+3}
\end{aligned}$$

Die Impulsantwort ergibt sich durch Rücktransformation $h_n = \delta_n - 6\sigma_{n-1}(-3)^{n-1}$. Da der einzige Pol der Übertragungsfunktion bei -3 und damit außerhalb des Einheitskreises liegt, ist das System nicht stabil.

AUFGABE 5 (4 PUNKTE): Das digitale Hörgerät Ihres Opas hat eine Abtastfrequenz von $f_a = 1024$Hz. Er behauptet, dass er die a-Saite ($f = 440$Hz) seines Cellos in seinem Seniorenorchester jedoch immer noch innerhalb von 2s auf $\frac{1}{4}$Hz genau stimmen kann. Hat er recht oder ist das nur noch traurige Vergangenheit?

LÖSUNG: Die Auflösung im abgetasteten Spektrum ist gegeben durch $\Delta f = \frac{f_a}{N}$ mit der Abtastfrequenz und der Anzahl der Punkte über die das Spektrum aufgelöst wird, also

$$\Delta f = \frac{f_a}{N} = \frac{f_a}{f_a \cdot 2s} = \frac{1}{2s} = \frac{1}{2}Hz.$$

Opas gutes Gehör ist traurige Vergangenheit und auch ein besseres Hörgerät würde nichts daran ändern.

AUFGABE 6 (6 PUNKTE): Betrachten Sie das diskrete LTI-System, das durch folgende Differenzengleichung definiert ist

$$3y_n + y_{n-2} = 2x_n + 2x_{n-2}.$$

Berechnen und skizzieren Sie Amplituden- und Phasengang des Systems. Welches Übertragungsverhalten des Systems ergibt sich daraus?

mit der Grenzfrequenz (Eckfrequenz) $\omega_g = \frac{1}{T}$, also $T = 1$. Einen Hochpass mit der gleichen Grenzfrequenz erhält man daraus durch die Transformation $Ts \to \frac{1}{Ts}$

$$H(s) = \frac{1}{1 + \frac{1}{Ts}} = \frac{Ts}{Ts + 1} = \frac{s}{s+1}.$$

Fehlt noch die Transformation ins Diskrete mit Hilfe der bilinearen Transformation $s = \frac{z-1}{z+1}$

$$H(z) = \frac{\frac{z-1}{z+1}}{\frac{z-1}{z+1} + 1} = \frac{z-1}{2z} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z^{-1}.$$

Daraus erhält man durch Rücktransformation die Impulsantwort $h_n = \frac{1}{2}\delta_n - \frac{1}{2}\delta_{n-1}$. Da die Impulsantwort nur endlich viele Beiträge hat, ist das ganz offensichtlich ein FIR-Filter.

AUFGABE 8 (6 PUNKTE): Es sei ein zeit-diskreter Rauschprozess $(R_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ definiert

$$R_n = X_n \cdot Y_n + X_n.$$

Dabei ist X eine im Intervall $[0,1]$ gleichverteilte Zufallsvariable und Y eine zu X stochastisch unabhängige und im Intervall $[0,1]$ gleichverteilte Zufallsvariable. Berechnen Sie Erwartungswert, Varianz und Autokorrelationsfunktion des Prozesses. Ist der Prozess stationär? Berechnen Sie das Leistungsdichtespektrum.

LÖSUNG: Zunächst sind die Erwartungswerte von Potenzen der beiden Zufallsprozesse (für Y ergeben sich die gleichen Ausdrücke!) zu berechnen

$$E(X_n^k) = \quad = \int_0^1 x^k dx = \frac{t^{k+1}}{k+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{k+1}.$$

Für den Erwartungswert ergibt sich

$$E(R_n) = E(X_n \cdot Y_n + X_n) = E(X_n)E(Y_n) + E(X_n) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

Der Erwartungswert des Quadrats der Zufallsvariablen ergibt

$$\begin{aligned} E(R_n^2) &= E((X_n \cdot Y_n + X_n)^2) = E(X_n^2 \cdot Y_n^2 + 2X_n^2 \cdot Y_n + X_n^2) \\ &= E(X_n^2) \cdot E(Y_n^2) + 2E(X_n^2) \cdot E(Y_n) + E(X_n^2) \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{7}{9}, \end{aligned}$$

und damit erhalten wir die Varianz

$$V(R_n) = E(R_n^2) - E^2(R_n) = \frac{7}{9} - \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4} = \frac{31}{144}.$$

Das Leistungsdichtespektrum des Rauschsignals ist laut Vorlesung gegeben durch

$$S_{NN}(j\omega) = \sigma^2 \mathrm{rect}(\frac{\omega}{2\omega_g}) = \sigma^2 \mathrm{rect}(\frac{\omega}{2 \cdot 40\pi})$$

und die Gesamtleistung durch

$$P_N = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{NN}(j\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_g}^{\omega_g} \sigma^2 d\omega = \sigma^2\frac{\omega_g}{\pi} = 2\sigma^2 f_g = 40\sigma^2 s^{-1}.$$

Ist die mittlere Gesamtleistung gegeben als 0.2W ergibt sich für $\sigma^2 = \frac{0{,}2W}{40s^{-1}} = \frac{1}{200}$J. Also ergibt sich insgesamt das Leistungsdichtespektrum als

$$S_{XX}(j\omega) \quad = \quad \frac{1}{200}\mathrm{rect}(\frac{\omega}{80\pi}) + 2\pi(\delta(20\pi - \omega) + \delta(20\pi + \omega)).$$

b) Die mittlere Gesamtleistung des deterministischen Anteils ergibt ergibt

$$P_X = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(j\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty}(\delta(\omega - 20\pi) + \delta(\omega + 20\pi))d\omega = 2.$$

Für Rauschen und den deterministischen Prozess zusammen ergibt sich

$$r_{XX}(0) \quad = \quad 0.2W + 2W = 2.2W.$$

als mittlere Gesamtleistung. Der Signal-Rausch-Abstand ist gegeben durch

$$SNR = 10\log_{10}\left(\frac{S}{N}\right) = 10\log_{10}\left(\frac{2}{0.2}\right) = 10\log_{10}(10) = 10dB.$$

AUFGABE 10 (6 PUNKTE): Ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ hat die Autokorrelationsfunktion

$$r_{XX}(\tau) = \max(a - a^2|\tau|, 0)$$

Berechnen Sie die Impulsantwort des Systems, das aus weißem Rauschen der Varianz $\sigma^2 = a^2$ den Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ erzeugt hat. Dabei hilft Ihnen das Additionstheorem

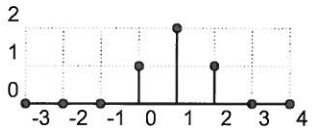
$$1 - \cos x \quad = \quad 2\sin^2(\frac{x}{2}).$$

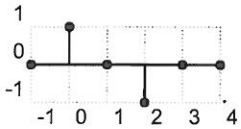
LÖSUNG: Eingangsprozess ist in unserem Fall weißes Rauschen mit dem Leistungsdichtespektrum $S_{RR} = \sigma^2 = a^2$. Ausgangsprozess ist der gewünschte stochastische Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$, dessen Autokorrelationsfunktion gegeben ist durch

$$r_{XX}(\tau) = \max(a - a^2|\tau|, 0).$$

MUSTERLSUNG ZUR KLAUSUR ZU SIGNALE UND SYSTEME II

AUFGABE 1 (3 PUNKTE): Gegeben sei ein diskretes LTI-System mit der Impulsantwort $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$

h_n 

x_n 

Ist das System $\mathcal{S}$ kausal und stabil? Bestimmen Sie das Ausgangssignal $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ bei Erregung des Systems mit dem Eingangssignal $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

LSUNG: Die Impulsantwort hat die Form

$$h_n = \delta_n + 2\delta_{n-1} + \delta_{n-2}.$$

Da die Impulsantwort nur endlich viele Beitrge hat, ist das System stabil und da sie keine Beitrge fr negative Zeitpunkte hat, ist das System kausal. Das Ausgangssignal $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ bei Erregung des Systems mit dem Eingangssignal $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ergibt sich durch Faltung

$$\begin{aligned}
y_n &= h_n * x_n = (\delta_n + 2\delta_{n-1} + \delta_{n-2}) * (\delta_n - \delta_{n-2}) \\
&= (\delta_n * \delta_n + 2\delta_{n-1} * \delta_n + \delta_{n-2} * \delta_n) - (\delta_n * \delta_{n-2} + 2\delta_{n-1} * \delta_{n-2} + \delta_{n-2} * \delta_{n-2}) \\
&= (\delta_n + 2\delta_{n-1} + \delta_{n-2}) - (\delta_{n-2} + 2\delta_{n-3} + \delta_{n-4}) \\
&= \delta_n + 2\delta_{n-1} - 2\delta_{n-3} - \delta_{n-4}.
\end{aligned}$$

AUFGABE 2 (4 PUNKTE): Das Spektrum eines Signals ist gegeben durch

$$X(j\omega) = \frac{\pi}{j}\delta(\omega + 4\pi) + \frac{\pi}{j}\delta(\omega + 2\pi) - \frac{\pi}{j}\delta(\omega - 2\pi) - \frac{\pi}{j}\delta(\omega - 4\pi).$$

Das Signal wird mit einer Frequenz $f_a = 4Hz$ abgetastet und danach mit einem (idealen) Tiefpass der Grenzfrequenz $f_g = 2Hz$ gefiltert. (Erklrende Skizzen sind ausreichend.) Was fr eine Signalform ergibt sich?

LSUNG: Das Spektrum des kontinuierlichen Signals hat in Frequenzen die Form

$$\begin{aligned}
X(jf) &= \frac{\pi}{j}\delta(2\pi f + 4\pi) + \frac{\pi}{j}\delta(2\pi f + 2\pi) - \frac{\pi}{j}\delta(2\pi f - 2\pi) - \frac{\pi}{j}\delta(2\pi f - 4\pi) \\
&= \frac{\pi}{j}\delta(2\pi(f+2)) + \frac{\pi}{j}\delta(2\pi(f+1)) - \frac{\pi}{j}\delta(2\pi(f-1)) - \frac{\pi}{j}\delta(2\pi(f-2)) \\
&= \frac{1}{2j}\left(\delta(f+2) + \delta(f+1) - \delta(f-1) - \delta(f-2)\right),
\end{aligned}$$

also als Bild (Skala in Hz, aufgetragen ist der Imaginrteil)

LSUNG: Die Zustandsraumdarstellung wird ber das Sortieren der Ableitungen erreicht:

$$\begin{aligned}
y_n - \frac{5}{2}y_{n-1} + y_{n-2} &= x_n - 4x_{n-2} \\
y_n - \frac{5}{2}y_{n-1} - x_n &= -y_{n-2} - 4x_{n-2} \\
y_n - \frac{5}{2}y_{n-1} - x_n &= x_{n-1}^{(1)} \\
y_n - x_n &= \frac{5}{2}y_{n-1} + x_{n-1}^{(1)} \\
y_n - x_n &= x_n^{(2)}
\end{aligned}$$

oder sortiert

$$\begin{aligned}
x_n^{(1)} &= -y_{n-1} - 4x_{n-1} = -(x_{n-1}^{(2)} + x_{n-1}) - 4x_{n-1} = -x_{n-1}^{(2)} - 5x_{n-1} \\
x_n^{(2)} &= \frac{5}{2}y_{n-1} + x_{n-1}^{(1)} = \frac{5}{2}(x_{n-1}^{(2)} + x_{n-1}) + x_{n-1}^{(1)} = x_{n-1}^{(1)} + \frac{5}{2}x_{n-1}^{(2)} + \frac{5}{2}x_{n-1} \\
y_n &= x_n^{(2)} + x_n,
\end{aligned}$$

also ergibt sich in Matrixform

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_n^{(1)} \\ x_n^{(2)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{n-1}^{(1)} \\ x_{n-1}^{(2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} \cdot x_{n-1} \\
y_n &= (0,1) \cdot \begin{pmatrix} x_n^{(1)} \\ x_n^{(2)} \end{pmatrix} + 1 \cdot x_n.
\end{aligned}$$

AUFGABE 4 (6 PUNKTE): Betrachten Sie das diskrete LTI-System, das in der Zustandsraumdarstellung gegeben ist durch

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_n^{(1)} \\ x_n^{(2)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{n-1}^{(1)} \\ x_{n-1}^{(2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} \cdot x_{n-1} \\
y_n &= (0,1) \cdot \begin{pmatrix} x_n^{(1)} \\ x_n^{(2)} \end{pmatrix} + x_n.
\end{aligned}$$

Bestimmen Sie die bertragungsfunktion aus der Zustandsraumdarstellung sowie die Impulsantwort des Systems. Ist das System stabil?

LSUNG: Die bertragungsfunktion ergibt sich durch z-Transformation der ersten Gleichung

LSUNG: Zunchst ist zu berlegen, ob denn tatschlich die Frequenzen im gewnschten Bereich untersucht werden knnen. Tasten wir das Signal mit $f_a = 8Hz$ ab, liegt aufgrund des Abtasttheorems die Schwelle der Frequenzen, fr die es im Spektrum keine berlagerungen gibt, bei $\omega_a > 2\omega_g$ beziehungsweise $f_a > 2f_g$, also bei $f_g = \frac{f_a}{2} = 4Hz$. Der gewnschte Bereich kann also untersucht werden. Ein mit f_a abgetastetes (periodisches) Signal hat im diskreten Spektrum die Auflsung $\frac{f_a}{N}$. Ein mit $f_a = 8Hz$ abgetastetes Signal mit $N = 2^k$ Abtastwerten hat im Spektrum eine Auflsung von

$$\begin{aligned} \frac{f_a}{N} = \frac{8Hz}{2^k} &\leq \frac{1}{128}Hz \\ \frac{2^3}{2^k} &\leq \frac{1}{2^7} \\ 2^{10} &\leq 2^k \\ k &\geq 10. \end{aligned}$$

Also mssen mindestens $k = 10$, also $2^{10} = 1024$ Abtastwerte aufgenommen werden. Dies dauert $\frac{2^{10}}{2^3 Hz} = 2^7 s = 128s$, also gut 2 Minuten.

AUFGABE 6 (6 PUNKTE): Betrachten Sie das diskrete LTI-System, das durch folgende Differenzengleichung definiert ist

$$y_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_{n-2}).$$

Berechnen und skizzieren Sie Amplituden- und Phasengang des Systems. Welches bertragungsverhalten des Systems ergibt sich daraus?

LSUNG: Aus der Differenzengleichung folgt durch z-Transformation und Auflsen die bertragungsfunktion $H(z)$

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{1}{2}(z^{-1}X(z) + z^{-2}X(z)) = \frac{1}{2}(z^{-1} + z^{-2})X(z) \\ H(z) &= \frac{1}{2}(z^{-1} + z^{-2}) = \frac{1}{2}\frac{(z+1)}{z^2}. \end{aligned}$$

Da der einzige Pol bei $z = 0$ und damit innerhalb des Einheitskreises liegt, ist das System stabil und der Frequenzgang kann aus der bertragungsfunktion direkt abgelesen werden

$$H(j\Omega) = \frac{1}{2}\frac{(e^{j\Omega}+1)}{e^{2j\Omega}} = \frac{e^{j\frac{\Omega}{2}}}{2}\frac{(e^{j\frac{\Omega}{2}} + e^{-j\frac{\Omega}{2}})}{e^{2j\Omega}} = \frac{e^{j\frac{\Omega}{2}}}{e^{2j\Omega}}\cos(\frac{\Omega}{2}) = e^{-j\frac{3\Omega}{2}}\cos(\frac{\Omega}{2}).$$

Betrag und Phase sind dann gegeben durch

$$\begin{aligned} |H(j\Omega)| &= \cos(\frac{\Omega}{2}) \\ \Phi(j\Omega) &= -\frac{3\Omega}{2}. \end{aligned}$$

1, so dass auch die Wahrscheinlichkeitsdichte im Intervall 1 ist. Fr die beiden Teilprozesse gilt dann jeweils

$$\begin{aligned}
E(X_n) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x dx = 0 \\
E(X_n^2) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x^2 dx = \frac{1}{12} \\
E(Y_n) &= \int_0^1 y dy = \frac{1}{2} \\
E(Y_n^2) &= \int_0^1 y^2 dy = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt dann

$$\begin{aligned}
E(R_n) &= E(X_n + Y_n - 1) = E(X_n) + E(Y_n) - 1 = 0 + \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} \\
E(R_n^2) &= E((X_n + Y_n - 1)^2) = E(X_n^2 + Y_n^2 + 1 - 2X_n - 2Y_n + 2X_nY_n) \\
&= E(X_n^2) + E(Y_n^2) + 1 - 2E(X_n) - 2E(Y_n) + 2E(X_nY_n) \\
&= \frac{1}{12} + \frac{1}{3} + 1 - 2 \cdot 0 - 2 \cdot \frac{1}{2} + 2E(X_n)E(Y_n) = \frac{5}{12} + 2 \cdot 0 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{12}.
\end{aligned}$$

Die Varianz ergibt sich daraus durch

$$V(R_n) = E(R_n^2) - E^2(R_n) = \frac{5}{12} - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{12} - \frac{1}{4} = \frac{1}{6}.$$

Fr die Autokorrelationsfunktion (Autokorrelationsfolge) erhlt man

$$\begin{aligned}
r_{RR}(k) &= E(R_nR_{n+k}) = E((X_n + Y_n - 1)(X_{n+k} + Y_{n+k} - 1)) \\
&= E(X_nX_{n+k} + X_nY_{n+k} - X_n + Y_nX_{n+k} + Y_nY_{n+k} - Y_n - X_{n+k} - Y_{n+} + 1) \\
&= E(X_nX_{n+k}) + E(X_n)E(Y_{n+k}) - E(X_n) + E(Y_n)E(X_{n+k}) + E(Y_nY_{n+k}) - E(Y_n) \\
&\quad -E(X_{n+k}) - E(Y_{n+k}) + 1
\end{aligned}$$

Dafr brauchen wir noch die folgenden Erwartungswerte

$$\begin{aligned}
E(X_nX_{n+k}) &= \left\{ \begin{array}{cc} E(X_n^2) & k = 0 \\ E(X_n)E(X_{n+k}) & k \neq 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} \frac{1}{12} & k = 0 \\ 0 \cdot 0 & k \neq 0 \end{array} \right\} = \delta_k \frac{1}{12} \\
E(Y_nY_{n+k}) &= \left\{ \begin{array}{cc} E(Y_n^2) & k = 0 \\ E(Y_n)E(Y_{n+k}) & k \neq 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} \frac{1}{3} & k = 0 \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} & k \neq 0 \end{array} \right\} = \frac{1}{4} + \delta_k \frac{1}{12}.
\end{aligned}$$

Fr die Autokorrelationsfunktion (Autokorrelationsfolge) erhlt man damit

$$\begin{aligned}
r_{RR}(k) &= E(X_nX_{n+k}) + E(X_n)E(Y_{n+k}) - E(X_n) + E(Y_n)E(X_{n+k}) + E(Y_nY_{n+k}) - E(Y_n) \\
&\quad -E(X_{n+k}) - E(Y_{n+k}) + 1 \\
&= \delta_k \frac{1}{12} + 0 \cdot \frac{1}{2} - 0 + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{3} + \delta_k \frac{1}{12} - \frac{1}{2} - 0 - \frac{1}{2} + 1 \\
&= \delta_k \frac{1}{12} + \frac{1}{4} + \delta_k \frac{1}{12} = \delta_k \frac{1}{6} + \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Die mittlere Gesamtleitung des Prozesses lsst sich durch den Wert der Autokorrelationsfunktion an der Stelle $\tau = 0$ bestimmen

$$\bar{P} = r_{XX}(0) = \frac{\cos(\frac{\pi}{2}0)}{1-0^2} = 1.$$

AUFGABE 10 (5 PUNKTE): Ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ hat die Autokorrelationsfunktion

$$r_{XX}(\tau) = \frac{1}{4}e^{-\frac{|\tau|}{2}}.$$

Wie erzeugen Sie den stochastischen Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ aus weißem Rauschen der Varianz $\sigma^2 = 1$? Knnen Sie das weiße Rauschen aus dem stochastischen Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ wiedergewinnen?

LSUNG: Eingangsprozess ist in unserem Fall weißes Rauschen mit dem Leistungsdichtespektrum $S_{RR} = \sigma^2 = 1$. Ausgangsprozess ist der gewnschte stochastische Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$, dessen Autokorrelationsfunktion gegeben ist durch

$$r_{XX}(\tau) = \frac{1}{4}e^{-\frac{|\tau|}{2}}.$$

Die Fourier-Transformationen ergibt, dass das Leistungsdichtespektrum $S_{XX}(j\omega)$ gegeben ist durch

$$\begin{aligned}
r_{XX}(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet\; S_{XX}(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau}\frac{1}{4}e^{-\frac{|\tau|}{2}}d\tau \\
&= \frac{1}{4}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{-j\omega\tau}e^{\frac{\tau}{2}}d\tau + \int_{0}^{\infty} e^{-j\omega\tau}e^{-\frac{\tau}{2}}d\tau\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{(-j\omega\tau+\frac{1}{2})\tau}d\tau + \int_{0}^{\infty} e^{(-j\omega-\frac{1}{2})\tau}d\tau\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{e^{(-j\omega\tau+\frac{1}{2})\tau}}{-j\omega+\frac{1}{2}}\Big|_{-\infty}^{0} + \frac{e^{(-j\omega-\frac{1}{2})\tau}}{-j\omega-\frac{1}{2}}\Big|_{0}^{\infty}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{-j\omega+\frac{1}{2}} + \frac{-1}{-j\omega-\frac{1}{2}}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{(-j\omega-\frac{1}{2})-(-j\omega+\frac{1}{2})}{(-j\omega+\frac{1}{2})(-j\omega-\frac{1}{2})}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{(-j\omega+\frac{1}{2})(j\omega+\frac{1}{2})}\right) \\
&= \frac{1}{(-2j\omega+1)(2j\omega+1)}
\end{aligned}$$

KLAUSUR ZU SIGNALE & SYSTEME II

AM

22. JANUAR 2014

VON

8.00 BIS 10.00 UHR

7 Punkte

Name: [redacted] Matrikelnum[redacted] Note: 24/50

AUFGABE 1 (3 PUNKTE): Gegeben seien ein diskretes LTI-System mit der Impulsantwort $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ und ein Eingangssignal $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ 1/3

$$h_n = \sigma_n \cdot \frac{1}{2^n} \qquad x_n = \delta_n - \frac{1}{4}\delta_{n-2}.$$

Ist das System S kausal und stabil? Bestimmen Sie das Ausgangssignal $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ bei Erregung des Systems mit dem Eingangssignal $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ und skizzieren Sie es!

AUFGABE 2 (3 PUNKTE): Das Spektrum eines Signals ist gegeben durch 1/3

$$X(j\omega) = \pi\delta(\omega + 80\pi) + \pi\delta(\omega - 80\pi).$$

Das Signal wird mit einer Frequenz $f_a = 60Hz$ abgetastet. Welche Grundfrequenz ist zu hören? (Erklärende Skizzen sind ausreichend.) ✓

AUFGABE 3 (4 PUNKTE): Geben Sie eine Zustandsraumdarstellung für das diskrete LTI-System an, das durch die folgende Differenzengleichung definiert wird 4/4

$$y_n + y_{n-1} - 6y_{n-2} = x_n - 5x_{n-1} + 6x_{n-2}.$$ ✓

AUFGABE 4 (6 PUNKTE): Betrachten Sie das diskrete LTI-System, das in der Zustandsraumdarstellung gegeben ist durch 6/6

$$\begin{pmatrix} x_n^{(1)} \\ x_n^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{n-1}^{(1)} \\ x_{n-1}^{(2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot x_{n-1}$$

$$y_n = (0, 1) \cdot \begin{pmatrix} x_n^{(1)} \\ x_n^{(2)} \end{pmatrix} + x_n.$$ ✓

Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion aus der Zustandsraumdarstellung sowie die Impulsantwort des Systems. Ist das System stabil?

SS / WS 2013 | Semester E4 | Fach SS2 | Dozent RAU
FSR - Klausurensammlung

AUFGABE 5 (4 PUNKTE): Das digitale Hörgerät Ihres Opas hat eine Abtastfrequenz von $f_a = 1024$Hz. Er behauptet, dass er die a-Saite ($f = 440$Hz) seines Cellos in seinem Seniorenorchester jedoch immer noch innerhalb von 2s auf $\frac{1}{4}$Hz genau stimmen kann. Hat er recht oder ist das nur noch traurige Vergangenheit? 3/4

AUFGABE 6 (6 PUNKTE): Betrachten Sie das diskrete LTI-System, das durch folgende Differenzengleichung definiert ist

$$3y_n + y_{n-2} = 2x_n + 2x_{n-2}.$$

!

2/6

Berechnen und skizzieren Sie Amplituden- und Phasengang des Systems. Welches Übertragungsverhalten des Systems ergibt sich daraus?

AUFGABE 7 (6 PUNKTE): Entwerfen Sie einen diskreten Bandpass mit den Grenzfrequenzen $\Omega_u = \frac{\pi}{2}$ und $\Omega_o = \pi$. Wie sieht die Impulsantwort des Bandpasses aus? Handelt es sich um ein FIR-Filter oder IIR-Filter? 2/6

AUFGABE 8 (6 PUNKTE): Es sei ein zeit-diskreter Rauschprozess $(R_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ definiert

5/6

$$R_n = X_n \cdot Y_n + X_n.$$

✓

Dabei ist X eine im Intervall $[0,1]$ gleichverteilte Zufallsvariable und Y eine zu X stochastisch unabhängige und im Intervall $[0,1]$ gleichverteilte Zufallsvariable. Berechnen Sie Erwartungswert, Varianz und Autokorrelationsfunktion des Prozesses. Ist der Prozess stationär? Berechnen Sie das Leistungsdichtespektrum.

AUFGABE 9 (6 PUNKTE): Betrachten Sie den stochastischen Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ mit

$$X_t = 2\sin(20\pi t) + N_t$$

Dabei sei (N_t) ein im Frequenzband $[-20, 20]$Hz bandbegrenztes Gaußsches weißes Rauschen mit mittlerer Gesamtleistung 0,2W. Berechnen Sie das Leistungsdichtespektrum $S_{XX}(j\omega)$ des Prozesses. Bestimmen Sie die mittlere Gesamtleistung des Signals. Wie groß ist der Signal-Rausch-Abstand?

AUFGABE 10 (6 PUNKTE): Ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ hat die Autokorrelationsfunktion 0/6

$$r_{XX}(\tau) = \max(a - \alpha^2|\tau|, 0)$$

Berechnen Sie die Impulsantwort des Systems, das aus weißem Rauschen der Varianz $\sigma^2 = \alpha^2$ den Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ erzeugt hat. Dabei hilft Ihnen das Additionstheorem

$$1 - \cos x = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right).$$

SS / WS 2013 | Semester E4 | Fach SS2 | Dozent RAU
FSR - Klausurensammlung

2/16

(EINSEITIGE) LAPLACE-TRANSFORMATION

Die Zuordnung $\mathcal{L} : x(t) \longmapsto X(s)$ mit $s = \sigma + j\omega \in \mathbb{C}$, welche einem Signal $x(t)$ die komplexe Funktion

$$X(s) \;=\; \mathcal{L}(x(t)) = \int_0^\infty e^{-st} x(t) dt$$

zuordnet, heißt Laplace-Transformation. Schreibweise

$$x(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; X(s).$$

Im folgenden seien $x(t)$ und $y(t)$ kausale Signale.

Linearität	$ax(t) + by(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$aX(s) + bY(s)$
Differentiation im Zeitbereich	$\frac{d}{dt}x(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$sX(s) - x(0+)$
	$\frac{d^2}{dt^2}x(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$s^2X(s) - sx(0+) - x'(0+)$
Differentiation im Bildbereich	$(-1)^n t^n x(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{d^n}{ds^n}X(s)$
Integration im Zeitbereich	$\int_0^t x(\tau)d\tau$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{s}X(s)$
Integration im Bildbereich	$\frac{1}{t}x(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\int_s^\infty X(p)dp$
Ähnlichkeitssatz	$x(at) \quad (a > 0)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{a}X(\frac{s}{a})$
Verschiebungssatz	$x(t-a)\sigma(t-a) \quad (a > 0)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$e^{-as}X(s)$
Dämpfungssatz	$e^{-at}x(t) \quad (a > 0)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$X(s+a)$
Faltungssatz	$x(t) * y(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$X(s) \cdot Y(s)$

Laplace-Transformierte einiger bekannter kausaler Signale

$$e^{at}\sigma(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{1}{s-a} \quad (\Re(s) > \Re(a))$$

$$1\sigma(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{1}{s} \quad (\Re(s) > 0)$$

$$\delta(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; 1 \quad (\Re(s) > 0)$$

$$\cos(\omega t)\sigma(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{s}{s^2+\omega^2} \quad (\Re(s) > 0)$$

$$\sin(\omega t)\sigma(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \quad (\Re(s) > 0)$$

$$te^{at}\sigma(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{1}{(s-a)^2} \quad (\Re(s) > \Re(a))$$

$$t^n e^{at}\sigma(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \quad (\Re(s) > \Re(a))$$

$$e^{at}\cos(\omega t)\sigma(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{(s-a)}{(s-a)^2+\omega^2} \quad (\Re(s) > \Re(a))$$

$$e^{at}\sin(\omega t)\sigma(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2} \quad (\Re(s) > \Re(a))$$

WS 2013 | Semester EL | Fach SS2 | Dozent RAU
FSR - Klausurensammlung

FOURIER-TRANSFORMATION

Die Zuordnung $\mathcal{F} : x(t) \longmapsto X(j\omega)$ mit $\omega \in \mathbb{R}$, welche einem Signal $x(t)$ die komplexe Funktion

$$X(j\omega) = \mathcal{F}(x(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} x(t) dt$$

zuordnet, heißt Fourier-Transformation oder Spektrum von $x(t)$. Schreibweise

$$x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet X(j\omega).$$

Die Zuordnung $\mathcal{F}^{-1} : X(j\omega) \longmapsto x(t)$ mit $\omega \in \mathbb{R}$, welche einem Spektrum $X(s)$ ein komplexes Signal $x(t)$

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}(X(j\omega)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} X(j\omega) d\omega$$

zuordnet, heißt inverse Fourier-Transformation. Im folgenden seien $x(t)$ und $y(t)$ (komplexe) Signale.

Linearität	$ax(t) + by(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$aX(j\omega) + bY(j\omega)$
Dualität	$x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet X(j\omega)$		$X(jt) \circ\!\!-\!\!\bullet 2\pi x(-\omega)$
Skalierung	$x(at) \quad (a \neq 0)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{\lvert a \rvert} X(\frac{j\omega}{a})$
	$\frac{1}{\lvert b \rvert} x(\frac{t}{b}) \quad (b \neq 0)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$X(bj\omega)$
Translation	$x(t+a)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$e^{aj\omega} X(j\omega)$
	$e^{j\omega_0 t} x(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$X(j(\omega - \omega_0))$
Differentiation im Zeitbereich	$\frac{d}{dt} x(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$j\omega X(j\omega)$
Integration im Zeitbereich	$\int_0^t x(\tau) d\tau$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi F(0) \delta(j\omega)$
Faltungssatz	$x(t) * y(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$X(j\omega) \cdot Y(j\omega)$
Multiplikationssatz	$2\pi x(t) \cdot y(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$X(j\omega) * Y(j\omega)$

Fourier-Transformierte einiger bekannter Signale

$$\begin{aligned}
\mathrm{rect}(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet \mathrm{si}(\frac{\omega}{2}) \\
\frac{1}{T}\mathrm{rect}(\frac{t}{T}) &\circ\!\!-\!\!\bullet \mathrm{si}(\frac{\omega T}{2}) \\
\delta(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet 1 \\
1 &\circ\!\!-\!\!\bullet 2\pi\delta(\omega) \\
\sigma(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \\
e^{j\omega_0 t} &\circ\!\!-\!\!\bullet 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \\
\cos(\omega_0 t) &\circ\!\!-\!\!\bullet \pi(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)) \\
\sin(\omega_0 t) &\circ\!\!-\!\!\bullet \frac{\pi}{j}(\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0))
\end{aligned}$$

86 / WS 2013 | Semester EG | Fach SS2 | Dozent RAU
FSR - Klausurensammlung

z-TRANSFORMATION

Die Zuordnung $\mathcal{Z} : x_n \longmapsto X(z)$ mit $z \in \mathbb{C}$, welche einem diskreten Signal x_n die komplexe Funktion

$$X(z) \;=\; \mathcal{Z}(x_n) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} x_n$$

zuordnet, heißt (einseitige) z-Transformation. Im folgenden seien x_n und y_n diskrete Signale.

Linearität	$ax_n + by_n$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$aX(z) + bY(z)$
Verschiebungssatz	x_{n-n_0}	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$z^{-n_0}X(z)$
Ähnlichkeitssatz	$a^n x_n$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$X(\frac{z}{a})$
Differenzen im Zeitbereich	$x_n - x_{n-1}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{z-1}{z}X(z)$
	$x_n - 2x_{n-1} + x_{n-2}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{z^2-2z+1}{z^2}X(z)$
Summen im Zeitbereich	$\sum_{k=0}^{n} x_k$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{z}{z-1}X(z)$
Summation über Zeitfolge	$\sum_{k=0}^{\infty} x_k$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$X(z)\|_{z=1}$
lineare Gewichtung	nx_n	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$-z\frac{d}{dz}X(z)$
Zeitinversion	x_{-n}	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$X(\frac{1}{z})$
konjugiert komplexes Signal	x_n^*	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$X^*(z^*)$
Faltungssatz	$x_n * y_n$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$X(z) \cdot Y(z)$

z-Transformation wichtiger Eingangssignale

$$a^{-n}\sigma_n \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{za}{za-1} \quad (|z| > \frac{1}{|a|})$$

$$a^n\sigma_n \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{z}{z-a} \quad (|z| > |a|)$$

$$na^n\sigma_n \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{az}{(z-a)^2} \quad (|z| > |a|)$$

$$n^2a^n\sigma_n \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{az}{(z-a)^2} + 2\frac{a^2z}{(z-a)^3} \quad (|z| > |a|),$$

$$\sigma_n \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{z}{z-1} \quad (|z| > 1)$$

$$\delta_n \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad 1$$

$$e^{j\omega nT}\sigma_n \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{z}{z-e^{j\omega T}} \quad (|z| > 1)$$

$$e^{-j\omega nT}\sigma_n \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{z}{z-e^{-j\omega T}} \quad (|z| > 1)$$

$$\cos(\omega nT)\sigma_n \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{z^2 - z\cos(\omega T)}{z^2 - 2z\cos(\omega T) + 1} \quad (|z| > 1)$$

$$\sin(\omega nT)\sigma_n \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{z\sin(\omega T)}{z^2 - 2z\cos(\omega T) + 1} \quad (|z| > 1)$$

WS / SS | Semester | Fach | Dozent
2013 | E4 | SS2 | RAU
FSR - Klausurensammlung

z-TRANSFORMATION

Die Zuordnung $\mathcal{Z} : x_n \longmapsto X(z)$ mit $z \in \mathbb{C}$, welche einem diskreten Signal x_n die komplexe Funktion

$$X(z) = \mathcal{Z}(x_n) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} x_n$$

zuordnet, heißt (einseitige) z-Transformation. Im folgenden seien x_n und y_n diskrete Signale.

Linearität	$ax_n + by_n$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$aX(z) + bY(z)$
Verschiebungssatz	x_{n-n_0}	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$z^{-n_0}X(z)$
Ähnlichkeitssatz	$a^n x_n$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$X(\frac{z}{a})$
Differenzen im Zeitbereich	$x_n - x_{n-1}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{z-1}{z}X(z)$
	$x_n - 2x_{n-1} + x_{n-2}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{z^2-2z+1}{z^2}X(z)$
Summen im Zeitbereich	$\sum_{k=0}^{n} x_k$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{z}{z-1}X(z)$
Summation über Zeitfolge	$\sum_{k=0}^{\infty} x_k$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$X(z)\|_{z=1}$
lineare Gewichtung	nx_n	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$-z\frac{d}{dz}X(z)$
Zeitinversion	x_{-n}	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$X(\frac{1}{z})$
konjugiert komplexes Signal	x_n^*	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$X^*(z^*)$
Faltungssatz	$x_n * y_n$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$X(z) \cdot Y(z)$

z-Transformation wichtiger Eingangssignale

$$a^{-n}\sigma_n \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{za}{za-1} \quad (|z| > \frac{1}{|a|})$$

$$a^n\sigma_n \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{z}{z-a} \quad (|z| > |a|)$$

$$na^n\sigma_n \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{az}{(z-a)^2} \quad (|z| > |a|)$$

$$n^2a^n\sigma_n \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{az}{(z-a)^2} + 2\frac{a^2z}{(z-a)^3} \quad (|z| > |a|),$$

$$\sigma_n \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{z}{z-1} \quad (|z| > 1)$$

$$\delta_n \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad 1$$

$$e^{j\omega nT}\sigma_n \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{z}{z-e^{j\omega T}} \quad (|z| > 1)$$

$$e^{-j\omega nT}\sigma_n \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{z}{z-e^{-j\omega T}} \quad (|z| > 1)$$

$$\cos(\omega nT)\sigma_n \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{z^2 - z\cos(\omega T)}{z^2 - 2z\cos(\omega T) + 1} \quad (|z| > 1)$$

$$\sin(\omega nT)\sigma_n \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{z\sin(\omega T)}{z^2 - 2z\cos(\omega T) + 1} \quad (|z| > 1)$$

SS / WS 2013 | Semester E4 | Fach SS2 | Dozent RAU
FSR - Klausursammlung

1/3

(1)

$y_n = h_n * x_n$

$y_n = \left(\sigma_n - \frac{1}{2^n}\right) * \left(\delta_n - \frac{1}{4}\delta_{n-2}\right)$

$y_n = \left(\sigma_n 2^{-n}\right) * \left(\delta_n - \frac{1}{4}\delta_{n-2}\right)$

$y_n = \sigma_n 2^{-n} * \delta_n - \sigma_n 2^{-n} * \frac{1}{4}\delta_{n-2}$

$=$

(2)

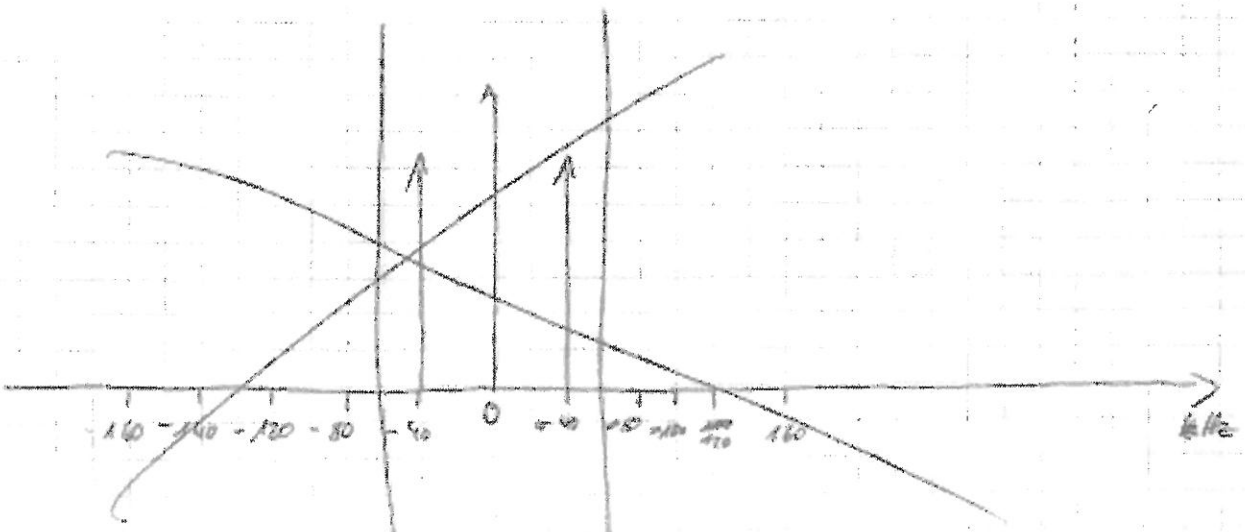
1/3

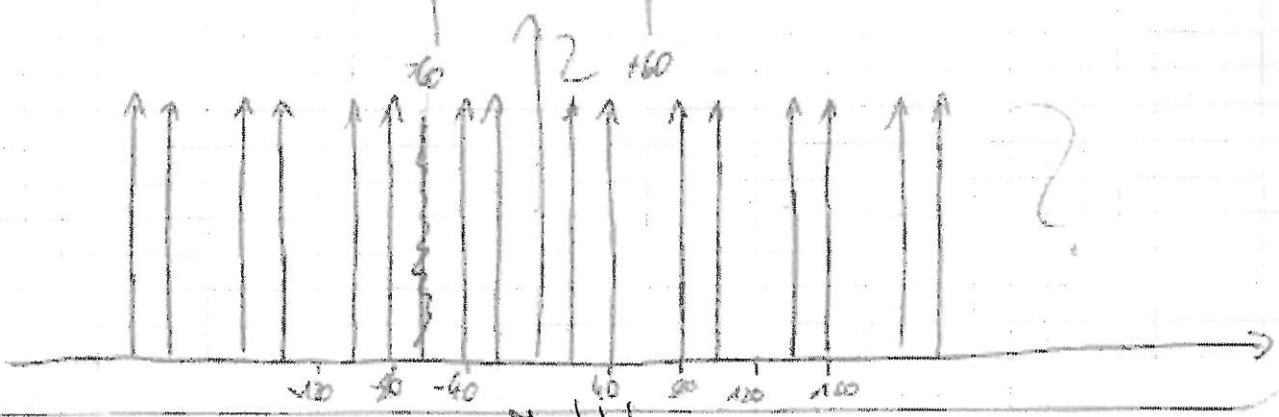
$\omega + 80\pi = 0 \qquad \omega - 80\pi = 0$

$2\pi f + 80\pi = 0 \qquad 2\pi f - 80\pi = 0$

$f = \frac{-80\pi}{2\pi} \qquad f = \frac{80\pi}{2\pi}$ und was bringt mir das?

$f = \underline{\underline{-40}}\ Hz \qquad f = 40$





?

[redacted]

(3)

$$y_n + y_{n-1} - 6y_{n-2} = x_n - 5x_{n-1} + 6x_{n-2}$$

$$y_n + y_{n-1} + 5x_{n-1} - x_n = 6x_{n-2} + 6y_{n-2}$$

$$y_n + y_{n-1} + 5x_{n-1} - x_n = x_{n-1}^{(1)}$$

$$y_n - x_n = x_{n-1}^{(1)} - y_{n-1} - 5x_{n-1}$$

$$y_n - x_n = x_n^{(2)}$$

$$y_n = x_n^{(2)} + x_n$$

4/4

$$x_{n-1}^{(1)} = 6x_{n-2} + 6y_{n-2}$$

$$x_n^{(1)} = 6x_{n-1} + 6y_{n-1} = 6x_{n-1} + 6x_{n-1}^{(2)} + 6x_{n-1}$$

$$x_n^{(1)} = 12x_{n-1} + 6x_{n-1}^{(2)}$$

$$x_n^{(2)} = x_{n-1}^{(1)} - y_{n-1} - 5x_{n-1} = x_{n-1}^{(1)} - x_{n-1}^{(2)} - x_{n-1} - 5x_{n-1}$$

$$= x_{n-1}^{(1)} - x_{n-1}^{(2)} - 6x_{n-1}$$

$$y_n = x_n^{(2)} + x_n$$

$$\begin{pmatrix} x_n^{(1)} \\ x_n^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1}^{(1)} \\ x_{n-1}^{(2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \end{pmatrix} x_{n-1}$$

$$y_n = \begin{pmatrix} 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n^{(1)} \\ x_n^{(2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} x_n$$

6/6

(4)

$$z\,\vec{X}(z) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \vec{X}(z) + \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \end{pmatrix} X(z)$$

$$\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \vec{X}(z) = \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \end{pmatrix} X(z)$$

$$\vec{X}(z) = \begin{pmatrix} z & -6 \\ -1 & z+1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \end{pmatrix} X(z)$$

$$\vec{X}(z) = \frac{1}{z^2+z-6} \begin{pmatrix} z+1 & 6 \\ 1 & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \end{pmatrix} X(z)$$

$$\vec{X}(z) = \frac{1}{z^2+z-6} \begin{pmatrix} 12z+12-36 \\ 12-6z \end{pmatrix} X(z)$$

[redacted]

(4) $Y(z) = \left((0,1)\frac{1}{z^2+z-6}\begin{pmatrix}12z-24\\12-6z\end{pmatrix}+1\right)X(z)$

$H(z) = (0,1)\frac{1}{z^2+z-6}\begin{pmatrix}12z-24\\12-6z\end{pmatrix}+1$

$H(z) = \frac{12-6z}{z^2+z-6}+1$

$z_{1,2} = -\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+6}$

$= -\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{24}{4}}$

$= -\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}}$

$= -\frac{1}{2}\pm\frac{5}{2}$

$z_1 = -\frac{1}{2}+\frac{5}{2} = -\frac{4}{2} = -2$

$z_2 = -\frac{1}{2}-\frac{5}{2} = -\frac{6}{2} = -3$

$H(z) = \frac{12-6z}{(z+2)(z+3)}+1$

$H(z) = -6\frac{z+2}{(z+2)(z+3)}+1$

$H(z) = -6\frac{1}{(z+3)}+1$

$H(z) = -6z^{-1}\frac{z}{z-(-3)}+1$

$h_n = -6(-3)^{n-1}\sigma_{n-1}+\delta_n$

Das System ist nicht stabil da der Pole größer 1 ist!

(5) $f_A = 10\,\mathrm{kHz}$

$f_A = 10{,}24\,\mathrm{kHz}$

$2s$ $\frac{1}{4}\,\mathrm{kHz}$

WS 2013	Semester E4	Fach SS2	Dozent KAU

FSR - Klausursammlung

(6) $H(\Omega) = 2\,\frac{e^{j\Omega 2}+1}{3e^{j\Omega 2}+1}\;\frac{3}{3}$

$= \frac{2\,e^{j\Omega}(e^{j\Omega}+e^{-j\Omega})}{3e^{j\Omega 2}+1}\;\frac{2}{2}$

$= \frac{4e^{j\Omega}\cos(\Omega)}{(3e^{j\Omega}+1)}\;\frac{3}{3}$

$= \frac{12\,e^{j\Omega}\cos\Omega}{9e^{j\Omega 2}+3} = \frac{12e^{j\Omega}\cos\Omega}{3e^{j\Omega}(3e^{j\Omega}+e^{-j\Omega})}$

(6) $H(\Omega) = \frac{4e^{j\Omega}}{3e^{j\Omega 2}+1}\cos(\Omega)$

$= \frac{4e^{j\Omega}}{e^{j\Omega}(3e^{j\Omega}+e^{-j\Omega})}\cos(\Omega)$

$=$

SS / WS 2013 | Semester E4 | Fach SS2 | Dozent KAU
FSR - Klausursammlung

[redacted]

(6)

$$Y(z)\,(3+z^{-2}) = X(z)\,(2+2z^{-2})$$

$$H(z) = \frac{2+2z^{-2}}{3+z^{-2}} = \frac{2z^2+2}{3z^2+1}$$

$z_{1,2} = \frac{0}{2} \pm \sqrt{0-\frac{1}{3}}$

$$H(j\Omega) = 2\,\frac{e^{j2\Omega}+1}{3e^{j2\Omega}+1} = 2e^{j\Omega}\,\frac{(e^{j\Omega}+e^{-j\Omega})}{3e^{j2\Omega}+1}\,\frac{2}{2}$$

$$= 4e^{j\Omega}\,\frac{(e^{j\Omega}+e^{-j\Omega})}{6e^{j\Omega 2}+2} = \cancel{\frac{\cos(\Omega)}{\ }}$$

$$= \frac{4e^{j\Omega}}{2}\,\frac{(e^{j\Omega}+e^{-j\Omega})}{3e^{j\Omega 2}+1} = \frac{2e^{j\Omega}}{3e^{j2\Omega}+1}\cos(\Omega) = \frac{4e^{j\Omega}}{3e^{j2\Omega}+1}\cos(\Omega)$$

$$\cancel{= \frac{\cos\Omega}{\ }\,\frac{4e^{j\Omega}}{3e^{j\Omega}(e^{j\Omega}+3e^{-j\Omega})}\,\frac{\cos\Omega}{\cos(\Omega)}\,\frac{2}{3e^{j\Omega}}}$$

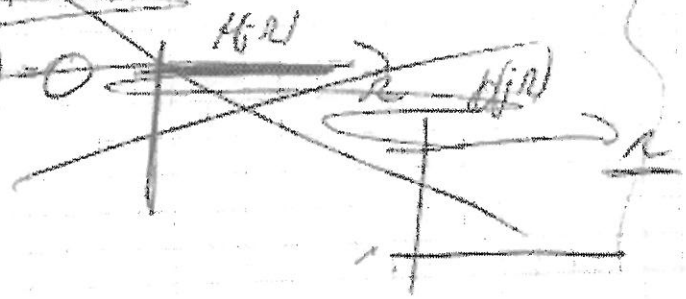
$$\cancel{= \frac{2}{3e^{j\Omega}(e^{j\Omega}+1)}}$$

$$\cancel{= \frac{2}{\ }}$$

$$\cancel{|H(j\Omega)| = 1}$$

$$\cancel{\Phi(j\Omega) = 0}$$

Lösere Seite



(8)

$R_n = X_n \cdot Y_n + X_n$

~~E Rn~~

$$E(X_n) = \int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

5/6

$$E(X_n^2) = \int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$E(Y_n) = \int_0^1 y\,dy = \frac{1}{2}$$

$$E(Y_n^2) = \int_0^1 y^2\,dy = \frac{1}{3}$$

$$E(R_n) = E(X_n Y_n + X_n) = E(X_n Y_n) + E(X_n)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \text{[redacted]}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$$

WS / SS	Semester	Fach	Dozent
2013	E4	SS2	KAV

FSR - Klausursammlung

11/16

$(X_n Y_n + X_n)(X_n Y_n + X_n)$

(8) $E(R_n^2) = E((X_n \cdot Y_n + X_n)^2)$

$= E(X_n^2 Y_n^2 + 2X_n^2 Y_n + X_n^2)$

$= E(X_n^2 Y_n^2) + 2E(X_n^2 Y_n) + E(X_n^2)$

$= \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$

$= \frac{1}{8} + \frac{2}{6} + \frac{1}{3} = \frac{4}{9} + \frac{2}{6} = \frac{24}{54} + \frac{18}{54} = \frac{42}{54} = \frac{21}{27} = \frac{7}{9}$

$\frac{1}{3}$

$V(R_n) = E(R_n^2) - E^2(R_n) = \frac{7}{9} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{9} - \frac{9}{16}$

$=$

$r_{RR} = E(R_n R_{n+k}) = E((X_n \cdot Y_n + X_n)(X_{n+k} Y_{n+k} + X_{n+k}))$

$= E(X_n X_{n+k} Y_n Y_{n+k} + X_n Y_n X_{n+k} + X_n X_{n+k} Y_{n+k} + X_n X_{n+k})$

$= E(X_n X_{n+k} Y_n Y_{n+k}) + E(Y_n) E(X_n X_{n+k}) + E(X_n X_{n+k})$

$E(X_n X_{n+k} Y_n Y_{n+k}) = \begin{cases} k=0 & X_n^2 Y_n^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \\ k \neq 0 & E(X_n Y_n) E(X_{n+k} Y_{n+k}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16} \end{cases}$

$c = a - b = \frac{1}{6} - \frac{1}{16}$

$= \frac{16}{144} - \frac{9}{144} = \frac{7}{144}$

$= \frac{7}{16} + \frac{7}{144} \delta_k$

$E(X_n X_{n+k}) = \begin{cases} k=0 & X_n^2 = \frac{1}{3} \\ k \neq & X_n \cdot X_{n+k} = \frac{1}{4} \end{cases} = \frac{1}{4} + \frac{5}{36} \delta_k$

$e = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{9}{36} - \frac{4}{36} = \frac{5}{36}$

$36 \cdot 36 = 72$
108
144

$r_{RR} = \frac{1}{16} + \frac{7}{144} \delta_k + 8 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{5}{36} \delta_k\right) + \frac{1}{4} + \frac{5}{36} \delta_k$

$= \frac{1}{16} + \frac{4}{16} + \frac{4}{16} + \frac{7}{144} \delta_k + \frac{20}{144} \delta_k + \frac{20}{144} \delta_k$

$= \frac{9}{16} + \frac{47}{144} \delta_k$ Der Prozess ist stationär!

$+ 2 \cdot 144$

~~10 $r_{xx}(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet S_{xx}$~~

(9)

$$S_{RR}(j\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_{RR}(k) \cdot e^{-jk\Omega} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{9}{16} + \frac{47}{144} \delta_k \right) e^{-jk\Omega} = \frac{47}{144} + \frac{9}{16} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\Omega}$$

$$= \frac{47}{144} + \frac{9}{16} \, 2\pi \, \mathrm{III}_{2\pi}(\Omega)$$

(10)

$r_{xx}(\tau)$

0 6

WS	Semester	Fach	Dozent
2013	E4	SS2	RAU

FSR - Klausursammlung

(5)

$f_a = 1024\,Hz$

3/4

$2s \quad \frac{1}{4}\,Hz$

$2s = \frac{2^k}{f_a} = \frac{N}{f_a}$ Abtastwerte

$2 \cdot 1024 = 2^k$

$2048 = 2^{11}$

$\Rightarrow k = 11$

Hat er das a noch?

$\frac{f_a}{N} \leq \frac{1}{4}\,Hz$

$\frac{2^{10}\,Hz}{2^{11}} \leq \frac{1}{4}\,Hz$

$2^{10} \cdot 2^2 \leq 2^{11}$

$2^{12} \leq 2^{11}$

$4096 \leq 2048$

Hat nicht er kann es nicht!

Es ist vorgegeben!

SS / WS	Semester	Fach	Dozent
2013	E4	SS2	KAU

FSR - Klausurensammlung

[redacted]

(7)

2/6

$\cancel{\omega_u = \tan\left(\frac{\pi}{2}\right)}$

$\omega_u = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

$\omega_o = \tan\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1-\cos\pi}{\sin\pi} = \frac{1-(-1)}{0} = \infty$

$\cancel{\tan\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{1}{0}}$

Ausbrach!

$\omega_o = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{0}$

$H(s) = \frac{B \cdot Ts}{T^2 s^2 + BTs + 1}$

$\cancel{\omega_m = \sqrt{\omega_o \cdot \omega_u} = \sqrt{1} = 1}$

$\cancel{T = \frac{1}{\omega_m} = \frac{1}{1} = 1}$

$\cancel{H(s) = \frac{-\frac{3}{2}\, 2s}{\left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot s^2 -}}$

$\omega_m = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot 1} = \frac{1}{2}$

$T = \frac{1}{\omega_m} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{2}}$

$H(s) = \frac{-\frac{3}{2} \cdot 2s}{(2)^2 \cdot s^2 + \left(\frac{3}{2}\right) 2s + 1}$

$B = \frac{\omega_o - \omega_u}{\omega_m} = \frac{\frac{1}{4} - \frac{4}{4}}{\frac{1}{2}}$

$= \frac{-s}{4s^2 - s + 1}$

$B = -\frac{3}{4} \cdot 2$

$= -\frac{6}{4} = \underline{\underline{-\frac{3}{2}}}$

$H(s) = \frac{-\frac{1}{4} s}{s^2 - \frac{1}{4} s - \frac{1}{4}}$

$H(z) = \frac{-\frac{1}{4}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)}{\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 - \frac{1}{4}\,\frac{z-1}{z+1} - \frac{1}{4}} = \frac{-\frac{1}{4}(z-1)}{\frac{(z-1)^2}{z+1} - \frac{1}{4}(z-1) - \frac{1}{4}(z+1)}$

$\cancel{z \quad \frac{1}{4}\,\frac{(z-1)(z+1)}{(z-1)^2}}$

$= \frac{-\frac{1}{4}(z-1)(z+1)}{(z-1)^2 - \frac{1}{4}(z-1)(z+1) - \frac{1}{4}(z+1)^2}$

$\cancel{H(z) = \frac{1}{4}(z-1)}$

$= \frac{-\frac{1}{4}(z^2 + \cancel{2z} - 1)}{z^2 - 2z + 1 - \frac{1}{4}(z^2 - 1) - \frac{1}{4}(z^2 + 2z + 1)}$

$= \cancel{z^2} - \frac{1}{4}\,\frac{z^2}{\frac{1}{2}z^2 - \frac{3}{2}z + 1} + \frac{1}{4}\,\frac{1}{\beta}$

$z^2 - 2z + 1 - \frac{1}{4}z^2 + \cancel{\frac{1}{4}} - \frac{1}{4}z^2 - \frac{2}{4}z + \cancel{\frac{1}{4}}$

$\frac{1}{2}z^2 - \frac{3}{2}z + 1$

$\frac{-\frac{1}{4}(z^2 - 1)}{z^2 - 3z + 2}$

(7) $H(z) = \frac{-\frac{1}{4}(z^2-1)}{z^2-3z+2} = \frac{-\frac{1}{4}z^2}{} + \frac{1}{4}$

$z_{1,2} = +\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}-\frac{8}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$

$\underline{z_1 = 2}$

$\underline{z_2 = 1}$

$H(z) = \frac{-\frac{1}{4}(z^2-1)}{(z-1)(z-2)}$

SS / WS	Semester	Fach	Dozent
2013	E4	SS2	KAU

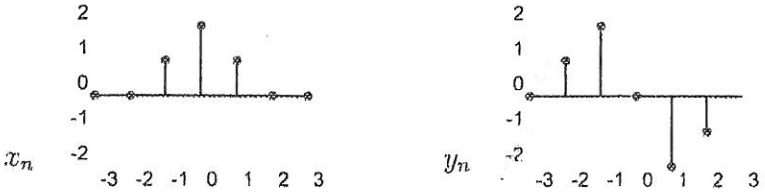
FSR - Klausursammlung

WS | Semester | Fach | Dozent
14/15 | E4b | SS2 | RAV
FSR - Klausurensammlung

KLAUSUR ZU SIGNALE & SYSTEME II
AM
2. FEBRUAR 2015 VON 8.00 BIS 10.00 UHR

Name: [redacted] Matrikelnummer: [redacted] Note:

AUFGABE 1 (5 PUNKTE): Gegeben ist ein diskretes LTI-System, das bei Erregung mit dem Eingangssignal $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ das Ausgangssignal $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ erzeugt.



Ist das System $\mathcal{S}$ kausal und stabil? Bestimmen Sie die Impulsantwort $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ des Systems sowie die Sprungantwort $(y_n^\sigma)_{n\in\mathbb{Z}}$ und skizzieren Sie beide.

AUFGABE 2 (3 PUNKTE): Das zusammengesetzte Signal

$$x(t) = \sin(2\pi t) + \sin(14\pi t)$$

wird mit einer Frequenz $f_a = 8Hz$ abgetastet. Was kann passieren? Und warum? (Erklärende Skizzen sind ausreichend.)

AUFGABE 3 (4 PUNKTE): Geben Sie eine Zustandsraumdarstellung für das diskrete LTI-System an, das durch die folgende Differenzengleichung definiert wird

$$y_n - \frac{1}{4}y_{n-1} - \frac{1}{8}y_{n-2} = x_n - 2x_{n-1}.$$

AUFGABE 4 (6 PUNKTE): Betrachten Sie das diskrete LTI-System, das mit $a \in \mathbb{R}$ in der Zustandsraumdarstellung gegeben ist durch

$$\begin{pmatrix} x_n^{(1)} \\ x_n^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}a^2 \\ 1 & \frac{1}{2}a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{n-1}^{(1)} \\ x_{n-1}^{(2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a^2 \\ \frac{1}{2}a - \frac{1}{a} \end{pmatrix} \cdot x_{n-1}$$

$$y_n = (0,1) \cdot \begin{pmatrix} x_n^{(1)} \\ x_n^{(2)} \end{pmatrix} + x_n.$$

Berechnen Sie die Übertragungsfunktion. Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist das System stabil? Bestimmen Sie für $a = 1$ die Impulsantwort des Systems.

WS 14/15 | Semester E4b | Fach SS2 | Dozent RAU
FSR - Klausurensammlung

AUFGABE 5 (4 PUNKTE): Für die Messung einer Geschwindigkeit v kann die Dopplerfrequenz f_D verwendet werden, sie ergibt bei einem üblichen Radargerät

$$f_D = \frac{2 \cdot v}{1.25cm}.$$

Welche Höchstgeschwindigkeit kann erfasst werden, wenn die digitale Messung mit einer Abtastrate von $f_a = 24kHz$ erfolgt und wie genau können Geschwindigkeiten innerhalb von $0.5s$ gemessen werden?

AUFGABE 6 (10 PUNKTE): Betrachten Sie das diskrete LTI-System, das mit $b \in \mathbb{R}, 0 \leq b \leq 2$ durch folgende Differenzengleichung definiert ist

$$(2+b)y_n + (2-b)y_{n-2} = 2x_n + 2x_{n-2}.$$

a) Berechnen und skizzieren Sie Amplituden- und Phasengang des Systems. Welches Übertragungsverhalten des Systems ergibt sich daraus?
b) Berechnen Sie für $b = \frac{2}{\sqrt{3}}$ die Grenzfrequenz(en) des Systems.

AUFGABE 7 (6 PUNKTE): Es sei $(R_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ein zeit-diskreter Rauschprozess mit

$$R_n = X_n \cdot Y_n + Y_n.$$

Dabei ist X eine im Intervall $[0,2]$ gleichverteilte Zufallsvariable und Y eine zu X stochastisch unabhängige und im Intervall $[-1,1]$ gleichverteilte Zufallsvariable. Berechnen Sie Erwartungswert, Varianz und Autokorrelationsfunktion des Prozesses. Ist der Prozess stationär? Berechnen Sie das Leistungsdichtespektrum.

AUFGABE 8 (6 PUNKTE): Betrachten Sie den stochastischen Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ mit

$$X_t = 4\sin(40\pi t) \cdot \cos(20\pi t) + N_t$$

Dabei sei (N_t) ein im Frequenzband $[-40,40]$Hz bandbegrenztes weißes Rauschen mit mittlerer Gesamtleistung 0,8W. Berechnen Sie Autokorrelationsfunktion $r_{XX}(\tau)$ und Leistungsdichtespektrum $S_{XX}(j\omega)$ des Prozesses. Bestimmen Sie die mittlere Gesamtleistung des Signals. Wie groß ist der Signal-Rausch-Abstand?

AUFGABE 9 (6 PUNKTE): Bestimmen Sie die Impulsantwort des Systems, das aus einem Eingangsprozess $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ mit der Autokorrelationsfunktion ($a \in \mathbb{R}_+$)

$$r_{XX}(\tau) = \frac{a}{2}e^{-a|\tau|}$$

einen Ausgangsprozess $(Y_t)_{t\in\mathbb{R}}$ macht mit der Autokorrelationsfunktion ($b \in \mathbb{R}_+$)

$$r_{YY}(\tau) = \frac{b}{2}e^{-b|\tau|}.$$

2/16

WS 14/15 | Semester E4b | Fach SS2 | Dozent RAU
FSR - Klausurensammlung

(EINSEITIGE) LAPLACE-TRANSFORMATION

Die Zuordnung $\mathcal{L} : x(t) \longmapsto X(s)$ mit $s = \sigma + j\omega \in \mathbb{C}$, welche einem Signal $x(t)$ die komplexe Funktion

$$X(s) \;=\; \mathcal{L}(x(t)) = \int_0^\infty e^{-st} x(t)dt$$

zuordnet, heißt Laplace-Transformation. Schreibweise

$$x(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; X(s).$$

Im folgenden seien $x(t)$ und $y(t)$ kausale Signale.

Linearität	$ax(t) + by(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$aX(s) + bY(s)$
Differentiation im Zeitbereich	$\frac{d}{dt}x(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$sX(s) - x(0+)$
	$\frac{d^2}{dt^2}x(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$s^2X(s) - sx(0+) - x'(0+)$
Differentiation im Bildbereich	$(-1)^n t^n x(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{d^n}{ds^n}X(s)$
Integration im Zeitbereich	$\int_0^t x(\tau)d\tau$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{s}X(s)$
Integration im Bildbereich	$\frac{1}{t}x(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\int_s^\infty X(p)dp$
Ähnlichkeitssatz	$x(at) \quad (a > 0)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{a}X(\frac{s}{a})$
Verschiebungssatz	$x(t-a)\sigma(t-a) \quad (a > 0)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$e^{-as}X(s)$
Dämpfungssatz	$e^{-at}x(t) \quad (a > 0)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$X(s+a)$
Faltungssatz	$x(t) * y(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$X(s) \cdot Y(s)$

Laplace-Transformierte einiger bekannter kausaler Signale

$$e^{at}\sigma(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{1}{s-a} \quad (\Re(s) > \Re(a))$$

$$1\sigma(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{1}{s} \quad (\Re(s) > 0)$$

$$\delta(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; 1 \quad (\Re(s) > 0)$$

$$\cos(\omega t)\sigma(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{s}{s^2+\omega^2} \quad (\Re(s) > 0)$$

$$\sin(\omega t)\sigma(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \quad (\Re(s) > 0)$$

$$te^{at}\sigma(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{1}{(s-a)^2} \quad (\Re(s) > \Re(a))$$

$$t^n e^{at}\sigma(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \quad (\Re(s) > \Re(a))$$

$$e^{at}\cos(\omega t)\sigma(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{(s-a)}{(s-a)^2+\omega^2} \quad (\Re(s) > \Re(a))$$

$$e^{at}\sin(\omega t)\sigma(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2} \quad (\Re(s) > \Re(a))$$

WS 14/15 | Semester E4b | Fach SS2 | Dozent RAU
FSR - Klausurensammlung

FOURIER-TRANSFORMATION

Die Zuordnung $\mathcal{F} : x(t) \longmapsto X(j\omega)$ mit $\omega \in \mathbb{R}$, welche einem Signal $x(t)$ die komplexe Funktion

$$X(j\omega) = \mathcal{F}(x(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} x(t) dt$$

zuordnet, heißt Fourier-Transformation oder Spektrum von $x(t)$. Schreibweise

$$x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet X(j\omega).$$

Die Zuordnung $\mathcal{F}^{-1} : X(j\omega) \longmapsto x(t)$ mit $\omega \in \mathbb{R}$, welche einem Spektrum $X(s)$ ein komplexes Signal $x(t)$

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}(X(j\omega)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} X(j\omega) d\omega$$

zuordnet, heißt inverse Fourier-Transformation. Im folgenden seien $x(t)$ und $y(t)$ (komplexe) Signale.

Linearität	$ax(t) + by(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$aX(j\omega) + bY(j\omega)$
Dualität	$x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet X(j\omega)$		$X(jt) \circ\!\!-\!\!\bullet 2\pi x(-\omega)$
Skalierung	$x(at) \quad (a \neq 0)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{\lvert a \rvert} X(\frac{j\omega}{a})$
	$\frac{1}{\lvert b \rvert} x(\frac{t}{b}) \quad (b \neq 0)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$X(bj\omega)$
Translation	$x(t+a)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$e^{aj\omega} X(j\omega)$
	$e^{j\omega_0 t} x(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$X(j(\omega - \omega_0))$
Differentiation im Zeitbereich	$\frac{d}{dt} x(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$j\omega X(j\omega)$
Integration im Zeitbereich	$\int_0^t x(\tau) d\tau$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi F(0) \delta(j\omega)$
Faltungssatz	$x(t) * y(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$X(j\omega) \cdot Y(j\omega)$
Multiplikationssatz	$2\pi x(t) \cdot y(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$X(j\omega) * Y(j\omega)$

Fourier-Transformierte einiger bekannter Signale

$$\begin{aligned}
\mathrm{rect}(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet \mathrm{si}(\frac{\omega}{2}) \\
\frac{1}{T}\mathrm{rect}(\frac{t}{T}) &\circ\!\!-\!\!\bullet \mathrm{si}(\frac{\omega T}{2}) \\
\delta(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet 1 \\
1 &\circ\!\!-\!\!\bullet 2\pi\delta(\omega) \\
\sigma(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \\
e^{j\omega_0 t} &\circ\!\!-\!\!\bullet 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \\
\cos(\omega_0 t) &\circ\!\!-\!\!\bullet \pi(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)) \\
\sin(\omega_0 t) &\circ\!\!-\!\!\bullet \frac{\pi}{j}(\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0))
\end{aligned}$$

SS / WS 14/15 | Semester E4b | Fach SS2 | Dozent RAU
FSR - Klausurensammlung

z-TRANSFORMATION

Die Zuordnung $\mathcal{Z} : x_n \longmapsto X(z)$ mit $z \in \mathbb{C}$, welche einem diskreten Signal x_n die komplexe Funktion

$$X(z) \;=\; \mathcal{Z}(x_n) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} x_n$$

zuordnet, heißt (einseitige) z-Transformation. Im folgenden seien x_n und y_n diskrete Signale.

Linearität	$ax_n + by_n$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$aX(z) + bY(z)$
Verschiebungssatz	x_{n-n_0}	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$z^{-n_0}X(z)$
Ähnlichkeitssatz	$a^n x_n$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$X(\frac{z}{a})$
Differenzen im Zeitbereich	$x_n - x_{n-1}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{z-1}{z}X(z)$
	$x_n - 2x_{n-1} + x_{n-2}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{z^2-2z+1}{z^2}X(z)$
Summen im Zeitbereich	$\sum_{k=0}^{n} x_k$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{z}{z-1}X(z)$
Summation über Zeitfolge	$\sum_{k=0}^{\infty} x_k$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$X(z)\|_{z=1}$
lineare Gewichtung	nx_n	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$-z\frac{d}{dz}X(z)$
Zeitinversion	x_{-n}	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$X(\frac{1}{z})$
konjugiert komplexes Signal	x_n^*	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$X^*(z^*)$
Faltungssatz	$x_n * y_n$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$X(z) \cdot Y(z)$

z-Transformation wichtiger Eingangssignale

$$a^{-n}\sigma_n \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{za}{za-1} \quad (|z| > \frac{1}{|a|})$$

$$a^n\sigma_n \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{z}{z-a} \quad (|z| > |a|)$$

$$na^n\sigma_n \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{az}{(z-a)^2} \quad (|z| > |a|)$$

$$n^2a^n\sigma_n \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{az}{(z-a)^2} + 2\frac{a^2z}{(z-a)^3} \quad (|z| > |a|),$$

$$\sigma_n \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{z}{z-1} \quad (|z| > 1)$$

$$\delta_n \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad 1$$

$$e^{j\omega nT}\sigma_n \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{z}{z-e^{j\omega T}} \quad (|z| > 1)$$

$$e^{-j\omega nT}\sigma_n \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{z}{z-e^{-j\omega T}} \quad (|z| > 1)$$

$$\cos(\omega nT)\sigma_n \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{z^2 - z\cos(\omega T)}{z^2 - 2z\cos(\omega T) + 1} \quad (|z| > 1)$$

$$\sin(\omega nT)\sigma_n \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{z\sin(\omega T)}{z^2 - 2z\cos(\omega T) + 1} \quad (|z| > 1)$$

... / WS	Semester	Fach	Dozent
14/15	E46	SS2	RAU

FSR - Klausurensammlung

DISKRETE FOURIER-TRANSFORMATION

Der Ausdruck

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

wird als komplexer Drehfaktor bezeichnet. Die Zuordnung $\mathcal{F} : x_n \longmapsto X_n$, welche einem diskreten Signal x_n für $n = 0, 1, 2, ..., N-1$ mit $N \in \mathbb{N}$ die diskrete Folge

$$X_n \;=\; \mathcal{F}(x_n) = \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} x_k$$

zuordnet, heißt diskrete Fourier-Transformation oder diskretes Spektrum von x_n. Die Zuordnung $\mathcal{F}^{-1} : X_n \longmapsto x_n$, welche einer diskreten Folge X_n für $n = 0, 1, 2, ..., N-1$ mit $N \in \mathbb{N}$ das diskrete Signal

$$x_n \;=\; \mathcal{F}^{-1}(X_n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}nk} X_k$$

zuordnet, heißt inverse diskrete Fourier-Transformation. Im folgenden seien x_n und y_n diskrete Signale.

Linearität	$ax_n + by_n$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$aX(z) + bY(z)$
Verschiebung im Zeitbereich (periodisch)	$x_{(k-k_0) mod\ N}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$X_n \cdot W_N^{nk_0}$
Modulation im Zeitbereich	$W_N^{-n_0 k} x_k$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$X_{(n-n_0) mod\ N}$
Zeitinversion	x_{N-k}	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	X_{N-n}
konjugiert komplexes Signal	x_k^*	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	X_{N-n}^*
Realteil und Imaginärteil	x_k^R	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{2}(X_n + X_{N-n}^*)$
	x_k^I	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{2j}(X_n - X_{N-n}^*)$
periodische Faltung	$x_k \otimes y_k$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$X_n \cdot Y_n$
Multiplikation	$x_k \cdot y_k$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{N} X_n \otimes Y_n$

diskrete Fourier-Transformation wichtiger Eingangssignale

δ_k	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	1
1	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$N\delta_n$
$(\text{Ш}_{N/n_0})_k$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$n_0(\text{Ш}_{n_0})_n$
$W_N^{-n_0 k}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$N\delta_{(n-n_0) mod\ N}$
$\cos(2\pi\frac{n_0}{N}k)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{N}{2}(\delta_{(n+n_0) mod\ N} + \delta_{(n-n_0) mod\ N})$
$\sin(2\pi\frac{n_0}{N}k)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{N}{2}j(\delta_{(n+n_0) mod\ N} - \delta_{(n-n_0) mod\ N}))$.

6/16