

Inhalt der Vorlesung

1 Einführung, Informationstheorie

1.1	Aufgaben der Nachrichtentechnik.....	1-1
1.2	Allgemeines Modell zur Informationsübertragung.....	1-2
1.3	Begriffe der Informationstheorie.....	1-3
1.4	Beispiele für Systeme zur Informationsübertragung.....	1-7
1.5	Mehrfachausnutzung von Übertragungsstrecken.....	1-9
1.6	Pegel und Übertragungsmaße	1-12

2 Lineare Übertragungssysteme

2.1	Unterscheidung lineares und nichtlineares System	2-1
2.2	Eigenschaften und Beispiele linearer Übertragungssysteme.....	2-2
2.2.1	Dämpfungsglieder	2-2
2.2.2	Leitungen	2-3
2.2.3	Siebschaltungen, Laufzeitglieder, Entzerrer	2-12
2.2.4	Breitbandverstärker, Rauschen	2-13
2.2.5	Schmalbandverstärker	2-17

3 Siebschaltungen

3.1	Filter-Grundtypen	3-1
3.2	Tiefpass-Standardcharakteristiken	3-2
3.3	Hochpassfilter	3-5
3.4	Aktive Filter 2. Ordnung, Beispiele.....	3-6
3.5	Biquad-Filter	3-9
3.6	Universalfilter mit 4 Operationsverstärkern.....	3-11

4 Verzerrungen

4.1	Lineare und nichtlineare Verzerrungen	4-1
4.2	Nichtlineare Verzerrungsmaße	4-2
4.3	Klirrfaktor	4-2
4.4	Nichtlineare Kennlinie bei Zweitonaussteuerung.....	4-6

5 Modulation und Mischung

5.1	Modulationsarten	5-1
5.1.1	Schwingungsmodulation	5-2
5.1.2	Pulsmodulation	5-2
5.2	Amplitudenmodulation	5-3
5.3	Messung des Modulationsgrades	5-5
5.4	AM-Modulator	5-6
5.5	AM-Demodulatoren	5-7
5.6	Frequenzmischung	5-8
5.7	Frequenzmischung im Überlagerungsempfänger	5-9

6 Digitale Basisbandübertragung

6.1	Digitalisierung eines Analogsignals	6-1
6.2	Abtastung des Analogsignals	6-2
6.3	Halteglied	6-3
6.4	Quantisierung	6-3
6.5	Übertragungssystem mit Signalkompression und Expandierung	6-6
6.6	PCM-Übertragungssystem	6-8

7 Aufgaben

1. Einführung, Informationstheorie

1.1 Aufgaben der Nachrichtentechnik

Übertragung, Vermittlung, Verarbeitung von Nachrichten

Übertragungssystem: Informationen sollen möglichst wirtschaftlich und fehlerfrei von einer Informationsquelle zu einer Informationssenke übertragen werden. Das System stellt man sich als eine feste Verbindung von zwei „Teilnehmern“ vor, zwischen denen in einer Richtung die Informationsübertragung stattfindet.

Vermittlungssystem: Ein Netzwerk mit mehreren Teilnehmern ist so zu organisieren, dass Informationen zwischen den Teilnehmern möglichst wirtschaftlich, fehlerfrei und zwischen allen Teilnehmern gleichzeitig übertragen werden kann. Neben der technischen Realisierung der Übertragung muss das Durchschalten der Verbindung und die Übermittlung der Information im Netz organisiert werden. Sind die Teilnehmer nicht ortsfest (z.B. in einem Mobilfunknetz), dann muss sich die Vermittlung den Veränderungen eines Teilnehmers dynamisch anpassen.

Verarbeitungssysteme für Nachrichten bedeutet die Verarbeitung von Informationen und ist u.a. Gegenstand der Informatik.

Nachricht, Signal und Information

Nachrichten werden physikalisch durch Signale dargestellt. Bei der Übertragung von Nachrichten sind die Signale Zeitfunktionen, z.B. $u(t)$, $i(t)$, bei der Speicherung von Nachrichten (oder allg. Informationen) treten die Signale als ortsabhängige Größen (z.B. Magnetisierung einer Festplatte, Bild) auf.

Eine Nachricht besteht aus dem Signal und der Information. Signale stellen nur die physikalische Repräsentation der Nachricht dar (z.B. Spannung, Schalldruck, Leuchtdichte), Information ist der Inhalt einer Nachricht. Sie ist ein abstrakter, an keine physikalische Größe gebundener Begriff. Das Maß der Information ist der Informationsgehalt I und wird in Bits angegeben.

Die zu übertragenden Nachrichten lassen sich je nach Art ihrer Entstehung als Quellensignale verschieden klassifizieren und weiter nach Anwendungsgebieten unterteilen. In der klassischen Nachrichtentechnik wurde noch unterschieden in

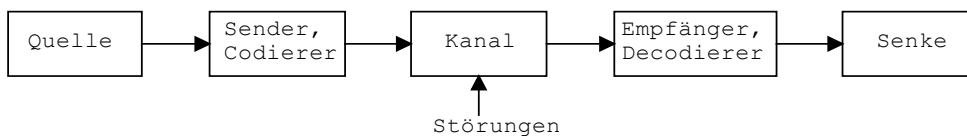
Akustische Signale: Rundfunk (Übertragung klangtreuer Musik und Sprache)
Fernsprechen (Übertragung verständlicher Sprache)

Bildsignale: Fernsehen (Übertragung beweglicher Bilder)
FAX (Übertragung feststehender Bilder)

Datensignale: Fernschreiben (Zeichenübertragung)
Datenübertragung (Informationsaustausch zwischen Maschinen)

Durch das Eindringen der Digital- und Computertechnik in praktisch alle Bereiche der Nachrichtentechnik, der Vernetzung von Computern und ihres Einsatzes als Multimedia-Werkzeuge werden fast alle Quellensignale digitalisiert, digital verarbeitet und als Datensatz übertragen.

1.2 Allgemeines Modell zur Informationsübertragung:



Aufgabe des Systems: Wirtschaftliche und fehlerarme Übertragung von Nachrichten, häufig Mehrfachausnutzung des Übertragungskanals

Quelle: gibt Information ab, als diskrete Quelle Zeichen aus einem begrenzten Zeichenvorrat (Alphabet), als kontinuierliche Quelle ein Analogsignal

Sender: wandelt Quellinformation in ein zur Übertragung über den Kanal geeignetes Signal

Kanal: physikalisches oder technisches Medium zur Signalübertragung

Empfänger: wandelt Empfangssignal zurück in Quellinformation

Senke: Ort der Informationsverarbeitung

Die Signalverarbeitung auf der Sende- und Empfangsseite richtet sich nach den Übertragungseigenschaften des Kanals. Diese sind der Kanal-Frequenzgang bzw. die Bandbreite und die im Kanal auftretenden Störungen. Als Maß für die Störungen wird meistens das am Kanalausgang auftretende Verhältnis von Signalleistung und Störleistung (engl. signal to noise ratio, SNR) verwendet, das in analogen Übertragungssystemen allgemein ein Maß für die Signalqualität darstellt.

Jede analoge Signalquelle (z.B. Mikrofon, Sensor) gibt neben dem eigentlichen Signal ebenfalls Störungen ab, d.h. auch schon das Quellensignal hat ein bestimmtes SNR. Das Ziel der Signalübertragung ist es, das SNR, das die Signalquelle abgibt, möglichst nicht zu verringern (fehlerarme Übertragung).

Zu Beginn der Nachrichtentechnik fand die gesamte Signalverarbeitung ausschließlich in Analogtechnik statt, da die Quellensignale nur in analoger Form vorliegen. Bei langen Übertragungsstrecken können die Signale durch die Streckendämpfung in ihrer Amplitude soweit geschwächt werden, dass das SNR auf nicht mehr ausreichend kleine Werte sinkt. Eine Verlängerung der Strecke ist dann nur durch Erhöhung des Sendesignals am Kanaleingang möglich. Eine Zwischenverstärkung des Signals auf der Übertragungsstrecke reduziert das SNR weiter, da jeder reale Verstärker, bedingt durch sein Eigenrauschen, dem Signal Rauschleistung zufügt.

Durch den Einsatz der Digital- und Computertechnik liegen die Quellensignale gleich in digitaler Form vor (z.B. ASCII-Zeichen) bzw. nach der Digitalisierung der analogen Quellensignale. Sie werden dann als Digitalsignale weiterverarbeitet und können z.B. durch den Einsatz von Regenerativverstärkern praktisch ohne Qualitätsverlust über beliebig lange Strecken übertragen werden. Die zusätzliche Verwendung von Codierung zur Sicherheit gegen Übertragungsfehler erhöht zudem die Leistungsfähigkeit der Übertragungssysteme, die Komplexität nimmt aber ebenfalls zu.

1.3 Begriffe der Informationstheorie

Die Informationstheorie beschreibt die Eigenschaften von Nachrichten einer diskreten Quelle.

1. Informationsgehalt

Die von der Quelle abgegebenen Zeichen treten mit einer Wahrscheinlichkeit p_x auf. Je geringer p_x ist, umso größer ist der Informationsgehalt eines Zeichens, $I_x \sim 1/p_x$.

Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von zwei voneinander unabhängigen Zeichen ist gleich dem Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten, $p_{xy}=p_x \cdot p_y$, der Informationsgehalt dafür soll aber gleich der Summe der beiden Einzel-Informationsgehalte sein. Diese Forderung lässt sich mit Hilfe der Logarithmusfunktion erfüllen, die ein Produkt in eine Summe überführt.

Nach diesen Überlegungen ergibt sich für den Informationsgehalt eines Zeichens, das die Quelle abgibt aus

$$I_x = \lg\left(\frac{1}{p_x}\right) \quad \text{in bit/Zeichen} \quad (1-1)$$

mit p_x = Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Zeichens.

Die Wahl der Zweierlogarithmus (\lg) ist willkürlich. Für den einfachsten Fall einer binären Informationsquelle, die nur die Zeichen 0 und 1 abgibt, hat bei gleicher Auftrittswahrscheinlichkeit ($p_x=0,5$) jedes Zeichen den Informationsgehalt $I_x = 1\text{bit}$.

Zur Klarstellung: In der Informationstheorie wird nicht die Bedeutung einer Nachricht als deren Informationsgehalt aufgefasst, sondern lediglich die Auftrittswahrscheinlichkeit eines Zeichens. Geringe Auftrittswahrscheinlichkeit bedeutet hier großen Informationsgehalt („Neuigkeitswert“).

Beispiel: Bei einem Alphabet von 32 Zeichen, die alle mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auftreten, ist $p_x=1/32$ und der Informationsgehalt eines Zeichens $I_x = \lg(32) = 5\text{Bit}$. Ist die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Zeichens geringer, dann tritt es seltener auf und hat damit einen größeren Informationsgehalt („Neuigkeitswert“) als häufiger auftretende Zeichen.

2. mittlerer Informationsgehalt, Entropie

Wenn die Zeichen aus einem Vorrat von N Zeichen stammen und von der Quelle alle nacheinander abgegeben werden, ist der mittlere Informationsgehalt für jedes abgegebene Zeichen gleich dem Produkt aus der Häufigkeit seines Auftretens, also seiner Wahrscheinlichkeit p_x , und seines Informationsgehaltes, $\lg(p_x^{-1})$.

Den mittleren Informationsgehalt der Quelle (Ergiebigkeit) erhält man dann aus der Summe der mittleren Informationsgehalte aller vorkommenden Zeichen

$$H = \sum_{x=1}^N p_x \cdot \lg\left(\frac{1}{p_x}\right) \quad \text{in bit/Zeichen} \quad (1-2)$$

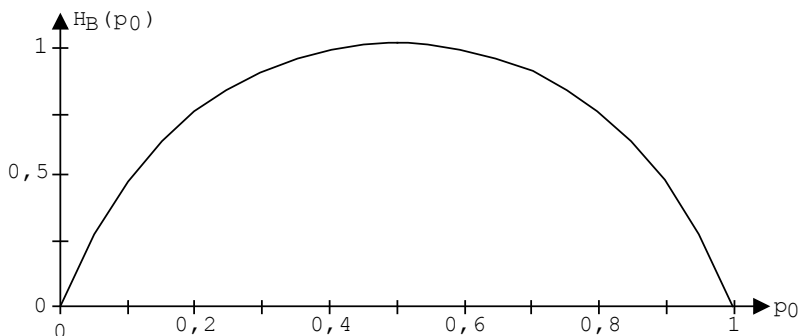
H wird auch als Entropie bezeichnet und beschreibt, wie viel Information von einer Quelle abgegeben wird. Die Entropie ist zugleich ein Maß für die Anzahl der Bits, die zur Codierung eines Zeichens erforderlich sind. Man kann die Entropie, also den Codierungsaufwand, aber erst dann bestimmen, wenn die Auftrittswahrscheinlichkeiten der Zeichen bekannt sind. Haben alle N Zeichen die gleiche Auftrittswahrscheinlichkeit, ist $p_x=1/N$ und es ergibt sich als triviales Ergebnis:

$$H_{\text{gleich}} = N \cdot (1/N) \cdot \lg(N) = \lg(N) = H_{\text{max}} \quad (\text{Maximalwert})$$

Beispiel: Liegt eine binäre Informationsquelle vor, die nur die Zustände 1 und 0 abgibt, und beträgt die Wahrscheinlichkeit für das Symbol „0“ gleich p_0 , dann ist die Wahrscheinlichkeit für „1“ gleich $(1-p_0)$.

Die Entropie der Binärquelle in Abhängigkeit der Auftrittswahrscheinlichkeit p_0 beträgt dann

$$H_B(p_0) = p_0 \cdot \lg(1/p_0) + (1-p_0) \cdot \lg(1/(1-p_0)) = -p_0 \cdot \lg(p_0) - (1-p_0) \cdot \lg(1-p_0)$$



Die grafische Darstellung $H_B = f(p_0)$ wird als Shannon'sche Funktion bezeichnet. Man erkennt aus ihr, dass bei $p_0 = p_1 = 0,5$ die Entropie ihren Maximalwert hat.

Allgemein gilt: Bei gleicher Auftrittswahrscheinlichkeit aller Zeichen hat die Entropie ihren Maximalwert H_{\max} . H_{\max} wird als Entscheidungsgehalt bezeichnet. Er gibt den größten Informationsgehalt an, den eine Nachrichtenquelle je Zeichen abgeben kann.

Wenn sich die Auftrittswahrscheinlichkeiten der Zeichen unterscheiden, verringert sich die Entropie. Als Folge kann auch der Codierungsaufwand je Zeichen reduziert werden.

Die deutsche Sprache (26 Buchstaben) benötigt bei gleicher Auftrittswahrscheinlichkeit je Buchstabe einen Codierungsaufwand von $H_S = H_{S\max} = \lg(26) = 4,7$ bit je Buchstabe.

Tatsächlich ist der mittlere Informationsgehalt (Entropie) geringer. Berücksichtigt man die verschiedenen Auftrittswahrscheinlichkeiten der Buchstaben (z.B. ist „e“ häufiger vertreten als „y“), erhält man $H_{SB} \approx 4,1$ bit/Buchstabe.

Bei Buchstabenfolgen besteht zwischen den Buchstaben eine statistische Bindung, die mit der bedingten Wahrscheinlichkeit beschrieben werden kann. Da bestimmte Buchstabenfolgen häufiger auftreten als andere, wird die Entropie weiter verringert, bei Bezug auf Silben wird die Entropie $H_{SS} \approx 2,8$ bit/Buchstabe.

Wird diese Betrachtung auf längere Buchstabenfolgen ausgedehnt, ergibt sich eine weitere Reduktion der Entropie, da es in der Sprache mehr sinnlose als sinnvolle Buchstabenkombinationen bzw. Wörter gibt und ebenso mehr sinnlose als sinnvolle Sätze.

Bei Berücksichtigung dieser Zusammenhänge erhält man für die deutsche Sprache einen mittleren Informationsgehalt von $H_S \approx 1,5$ bit/Buchstabe.

3. Redundanz

Zur Übertragung der von einer Quelle abgegebenen Zeichen müssen diese in eine passende physikalische Form (Signal) gewandelt werden. Diesen Vorgang bezeichnet man als Codierung. Die am häufigsten angewendete Methode ist die Binärcodierung. Der erforderliche Codierungsaufwand je Zeichen (Wortlänge) wird prinzipiell durch H_{\max} bestimmt, solange keine weiteren Eigenschaften der Quelle bekannt sind.

Ist der mittlere Informationsgehalt H eines Zeichens kleiner als der theoretische Maximalwert H_{\max} der Quelle, könnte mit geringerer Wortlänge codiert werden. Die Differenz von H_{\max} und H ist die Redundanz R :

$$R = H_{\max} - H \quad (1-3)$$

Je geringer also der mittlere Informationsgehalt (Entropie) einer Quelle gegenüber H_{\max} ist, umso größer ist ihre Redundanz.

Durch Beseitigung von Redundanz wird der Codierungsaufwand verringert. Dadurch lassen sich pro Zeiteinheit mehr Zeichen übertragen. Die Reduktion der Quellenredundanz ist Aufgabe des Quellencodierers.

Die Erkenntnis, dass eine Nachrichtenquelle redundante, also überflüssige Information abgeben kann, wurde erst durch Shannons Arbeiten zur Informationstheorie bekannt. Sie leitete Folgeaktivitäten zur Digitalisierung und Codierung von Signalen ein, und führte letzten Endes zur Verdrängung der analogen Signalübertragung und -verarbeitung durch die digitale Nachrichtentechnik

4. Informationsfluss

Ist T_m die mittlere Zeit, in der die Quelle ein Zeichen abgibt, dann ist der Informationsfluss aus der Quelle

$$F = \frac{H}{T_m} \quad \text{in bit/Sekunde oder Baud (Bd)} \quad (1-4)$$

Beispiel: Die maximale Sprechgeschwindigkeit beträgt ca. 33 Buchstaben/s also ist $T_m \approx 1/33 \text{ s/Buchstabe}$.

Mit $H_s \approx 1,5 \text{ bit/Buchstaben}$ ist der max. Informationsfluss der deutschen Sprache $F_{\max} \approx 50 \text{ bit/Sekunde}$. Der maximale Informationsfluss für eine bewusste Informationsverarbeitung des Menschen ist etwa nur halb so groß - er liegt bei ca. 20 bit/Sekunde.

5. Kanalkapazität

Für das auf Seite 2 dargestellte Modell einer Informationsübertragung ist es wichtig zu wissen, welche Eigenschaften der Übertragungskanal besitzen muss, wenn die von einer Quelle pro Zeiteinheit abgegebene Informationsmenge über den Kanal fehlerfrei übertragen werden soll.

Allgemein versteht man unter der Kanalkapazität C den über einen Kanal maximal fehlerfrei übertragbaren Informationsfluss, also $C = F_{\max}$ (1-5)

Die wesentlichen Eigenschaften eines Kanals oder eines Übertragungssystems sind

- Bandbreite B bzw. bei Tiefpasssystemen die Grenzfrequenz f_g
- Verhältnis Nutzsignalleistung zu Stör- bzw. Rauschleistung

Für einen analogen Tiefpasskanal mit der Grenzfrequenz f_g und weißem Rauschen mit Gauß'scher Amplitudenverteilung sowie einem Signal mit Gauß'scher Amplitudenverteilung hat Shannon die Kanalkapazität berechnet:

$$C = f_g \cdot \lg \left(1 + \frac{P_s}{P_r} \right) \quad \text{in bit/sec} \quad (1-6)$$

Darin sind P_s die Signalleistung und P_r die Rausch- bzw. Störleistung am Kanalausgang. Das Verhältnis P_s/P_r ist das Signal-Rausch-Verhältnis (SNR) und stellt einen wichtigen Qualitätsparameter von Signalen dar.

Die Gleichung gibt den Grenzwert der über einen Kanal übertragbaren Informationsmenge je Zeiteinheit an. Sie sagt weiterhin aus, dass (bis zu bestimmten Grenzwerten) auch bei stark gestörten Signalen, also geringem SNR, durch Erhöhung der Bandbreite noch Information übertragen werden kann.

Führt man ein spezielles Verhältnis Gesamtleistung $P_s + P_r$ zu Rauschleistung P_r bzw. dessen logarithmisches Maß, den Signal-Rauschabstand SNNR ein,

$$\text{SNNR} = 10 \cdot \lg \left(\frac{P_s + P_r}{P_r} \right) \quad (\text{in dB}) \quad (1-7)$$

dann ergibt sich mit $\lg(x) = \lg(x)/\lg(2)$ eine einfache Beziehung für die Kanalkapazität:

$$C = \frac{f_g}{3} \cdot \text{SNNR} \quad (1-8)$$

Bei großen Werten für SNNR ist $\text{SNNR} \approx \text{SNR}$ (in dB).

Mit der Gleichung für die Kanalkapazität können für gebräuchliche Übertragungssysteme aus den Kanaleigenschaften f_g und SNNR die Übertragungskapazitäten von analogen Übertragungskanälen berechnet werden.

Beispiel: Kanalkapazitäten analoger Übertragungssysteme und Datenraten vergleichbarer digitaler Quellsignale

Informationsart	Analogsystem			Informationsfluss aus Quellencodierer
	f_g	SNR	C	
Fernsprechen	$\approx 50\text{kHz}$	40 dB	ca. 670 kbit/s	6,5 kbit/s (Mobilfunk)
FM-Rundfunk	$\approx 200\text{kHz}$	60 dB	ca. 4 Mbit/s	64 kbit/s (MPEG, Mono)
Fernsehen	5MHz	45 dB	ca. 75 Mbit/s	5 Mbit/sec (MPEG2)

Die Tabelle zeigt, dass die Kanalkapazität bei Analogsystemen wesentlich größer ist, als für die zu übertragende Informationsmenge erforderlich wäre. Digital-systeme erlauben eine bessere Ausnutzung der Übertragungskapazitäten.

6. Nachrichtenquader

Wird Gl.(1-6) auf beiden Seiten mit der Übertragungszeit T multipliziert, erhält man die Informationsmenge I.

$$I = C \cdot T = f_g \cdot \lg\left(1 + \frac{P_s}{P_r}\right) \cdot T = B \cdot \text{SNNR} \cdot T \quad \text{in Bit} \quad (1-9)$$

Danach ergibt sich die übertragene Informationsmenge aus dem Produkt der drei Größen Bandbreite B, Signal-Stör-Abstand SNNR und Übertragungszeit T und kann als Volumen eines Quaders angesehen werden.

Wenn der Informationsfluss einer Quelle größer als die Kapazität des Übertragungskanals ist, kann man die gesamte Informationsmenge I der Quelle noch fehlerfrei übertragen, wenn die Übertragungszeit T vergrößert wird, z.B. durch Zerlegung der Information in Datenpakete und Zwischenspeicherung im Übertragungssystem.

7. Maximale Kanalkapazität

Nach Gl.(1-6) kann auch bei beliebig kleinem Signal-Stör-Verhältnis noch Information übertragen werden, wenn nur die Kanalbandbreite erhöht wird. Da die untere Grenze der Störleistung durch thermisches Rauschen (siehe Kap. 2) begrenzt wird, das mit der Bandbreite zunimmt, existiert aber ein oberer Grenzwert für die Kanalkapazität.

Mit $P_r = k \cdot T \cdot B$ (thermisches Rauschen, in jedem elektrischen Leiter vorhanden) erhält man

$$C_{\max} = B \cdot \lg\left(1 + \frac{P_s}{k \cdot T \cdot B}\right) = B \cdot \frac{\ln(1 + P_s/(k \cdot T \cdot B))}{\ln 2} \approx B \cdot \frac{P_s}{k \cdot T \cdot B} \cdot \frac{1}{\ln 2} = \frac{P_s}{k \cdot T \cdot \ln 2} \quad (1-10)$$

mit $\ln(1+x) \approx x$ wenn $x \ll 1$ und $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{Wsec/K}$, T=absolute Temperatur

Gl. (1-10) hat nur Bedeutung bei sehr großen Bandbreiten bzw. bei extrem kleinen Signalleistungen, die in der Größenordnung des thermischen Rauschens liegen.

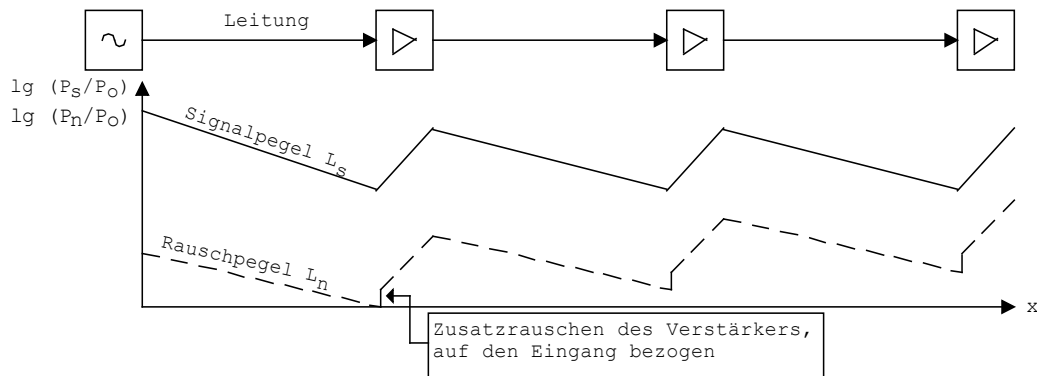
Aus den Gleichungen folgt, dass bei Bandbreiteerhöhung die Kanalkapazität nur bis zu einem bestimmten Maximalwert vergrößert werden kann. Einzig die Erhöhung der Signalleistung P_s kann die Kanalkapazität beliebig vergrößern.

1.4 Beispiele für Systeme zur Nachrichtenübertragung

Das allgemeine Modell zur Informationsübertragung beschreibt eine einkanalige, nur in einer Richtung arbeitende, Übertragungsstrecke.

1. Leitungsübertragung eines analogen Signals

Bei der Leitungsübertragung werden Signale durch die Leitungsdämpfung geschwächt und müssen nach bestimmten Abständen verstärkt werden. Da die Verstärker ein Eigenrauschen besitzen, wird das Signal-Rausch-Verhältnis nach jedem Abschnitt verringert.

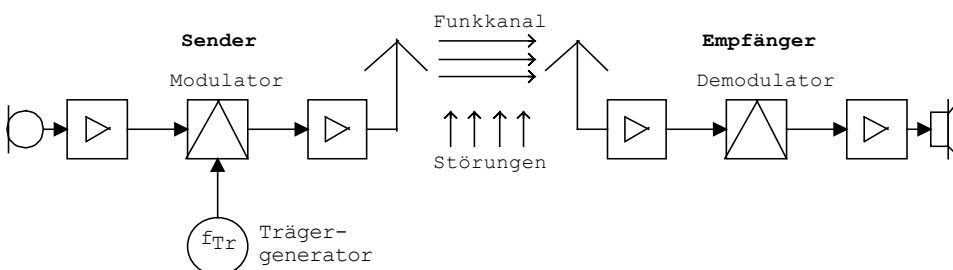


Mit zunehmender Länge der Kabel nehmen das SNR und in geringem Maße auch die Bandbreite ab; die Übertragungskapazität sinkt. Unberücksichtigt bleiben hier von außen einwirkende Störungen, die das SNR weiter verschlechtern.

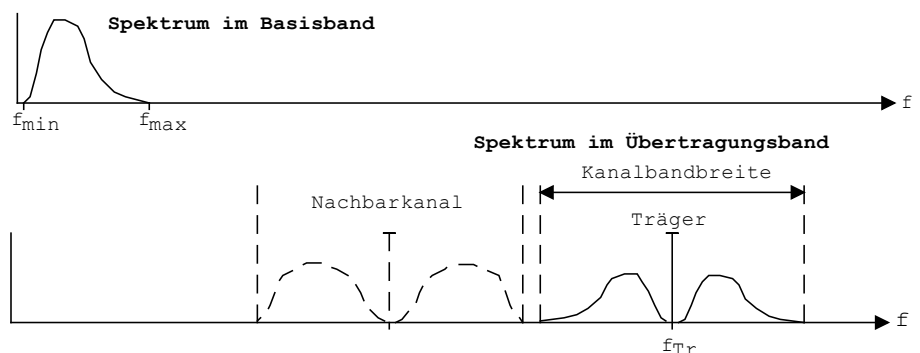
Bei der Übertragung über Kabel nimmt die Signalamplitude mit e^{-x} ab, wodurch die Signalleistung bei größeren Längen auf nicht mehr ausreichende Werte sinkt. Für größere Entfernungen benutzt man dann besser Funkstrecken, da bei ihnen die Signalamplituden nur mit $1/x$ abnehmen.

2. Analoges Funkübertragungssystem

Ein Funkkanal kann elektromagnetische Schwingungen nur bei höheren Frequenzen (Abmessungen der Antennen in der Größenordnung der Wellenlänge) übertragen.



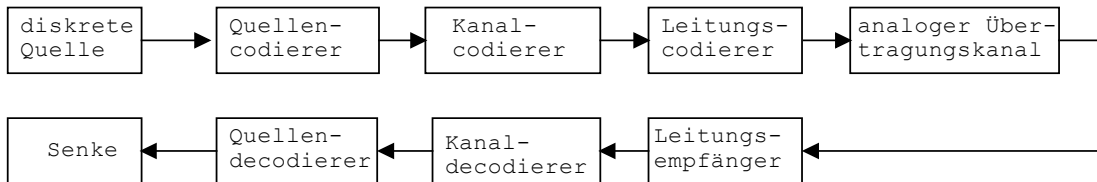
Auf der Sendeseite wird das Frequenzspektrum aus dem Basisband durch Modulation in den gewünschten Frequenzbereich verschoben. Die Entstehung von zwei zueinander gespiegelten Seitenbändern ist eine Eigenschaft der hier angenommenen Amplitudenmodulation.



Auf der Empfangsseite muss das Signal verstärkt werden, ehe es im Demodulator wieder in das Basisband verschoben wird. Da andere Nutzer benachbarte Funkkanäle belegen, steht nur eine begrenzte Bandbreite zur Verfügung. Der Empfänger muss daher selektiv arbeiten und darf nur Spektralanteile innerhalb der Kanalbandbreite verarbeiten.

Wenn das Übertragungsmedium insgesamt eine größere Bandbreite aufweist als die Nachricht benötigt, kann es von anderen Nachrichtenquellen mitbenutzt werden (Multiplex-Technik). Im obigen Beispiel wird die Frequenzmultiplextechnik angewendet, bei der jede Quelle einen eigenen Kanal in Form eines festgelegten Stücks Bandbreite des Übertragungsmediums belegt. Für den Mittelwellen-AM-Rundfunk beträgt z.B. der Trägerabstand und damit die Kanalbandbreite 9kHz.

3. Digitales Übertragungssystem



Bei einem digitalen Übertragungssystem werden Daten übertragen. Die diskrete Quelle gibt Zeichen aus einem begrenzten Zeichenvorrat (z.B. ASCII-Zeichen, Ausgangswerte eines AD-Umsetzers) ab. Die Zeichen liegen meistens als serielle Bitmuster vor.

Jeder der folgenden Signalverarbeitungsblöcke hat ganz bestimmte Aufgaben.

Quellencodierer: entfernt redundante Teile in der Nachricht, dadurch Verringerung des Informationsflusses F

Kanalcodierer: Anpassung an die Eigenschaften des Kanals, Sicherung gegen Störungen (z.B. durch Zufügen von Paritybits); Umformung des Signals nach einer Codierungsvorschrift. Es wird i.a. redundante Information hinzugefügt, die einer störsicheren Übertragung der Nachricht dient; Erhöhung des Informationsflusses

Leitungscodierer: Umwandlung der Zeichen (Bits) in eine für die Übertragung günstige Form, z.B. Entfernung des Gleichspannungsanteils, Hinzufügen zusätzlicher Bits zur Taktrückgewinnung, Übertragung als moduliertes Signal zur Mehrfachausnutzung des Übertragungskanals

Leitungsempfänger: Verstärkung des Signals, u.U. Demodulation, Taktrückgewinnung

Kanaldecodierer: Fehlererkennung und Korrektur, zusätzliche Information des Kanalcodierers wird entfernt

Quellendecodierer: Rekonstruktion des Quellensignals, Anpassung der Signale an die Nachrichtensenke, z.B. DA-Umsetzung

1.5 Mehrfachausnutzung von Übertragungsstrecken

Die meisten Übertragungswege stellen größere Bandbreiten zur Verfügung, als ein einzelner Übertragungskanal benötigt. Aus wirtschaftlichen Gründen findet daher eine Mehrfachausnutzung statt (Multiplexbetrieb).

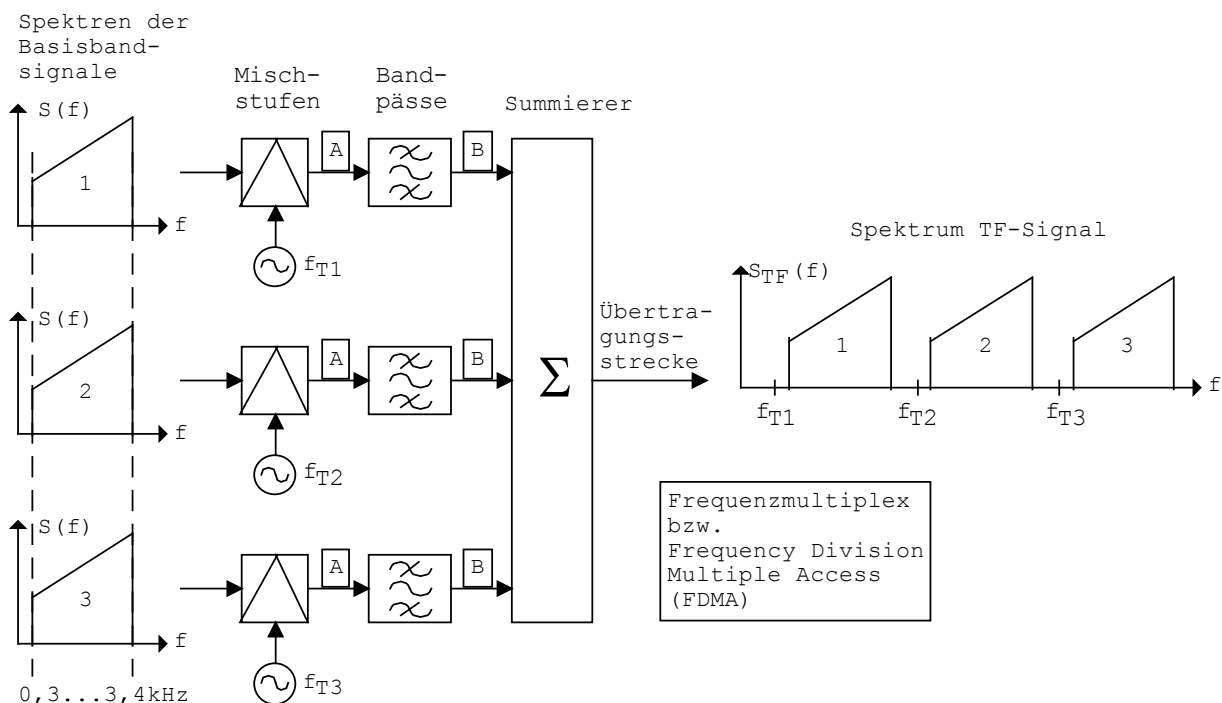
Prinzipiell ist dann eine Mehrfachausnutzung möglich, wenn eine der drei Größen B , T , $SNNR$ des Nachrichtenquaders größer als für einen Kanal erforderlich ist und somit auf die einzelnen Informationskanäle aufgeteilt werden.

Entsprechend der drei Größen B , T und $SNNR$ unterscheidet man drei Prinzipien der Mehrfachausnutzung.

1. Frequenzmultiplex

Übertragung der verschiedenen Quellensignale in versetzten Frequenzlagen. Jeder Informationskanal belegt dauerhaft einen bestimmten, gegenüber anderen Kanälen unterschiedlichen Frequenzbereich des Übertragungswegs. Von der gesamten Bandbreite der Übertragungsstrecke steht jeder Quelle nur ein Teil zur Verfügung.

Anwendung beim Rundfunk, früher in der Fernsprechtechnik bei der Trägerfrequenzübertragung (TF-Technik) über Leitungen



Prinzip der Frequenzmultiplex-Übertragung

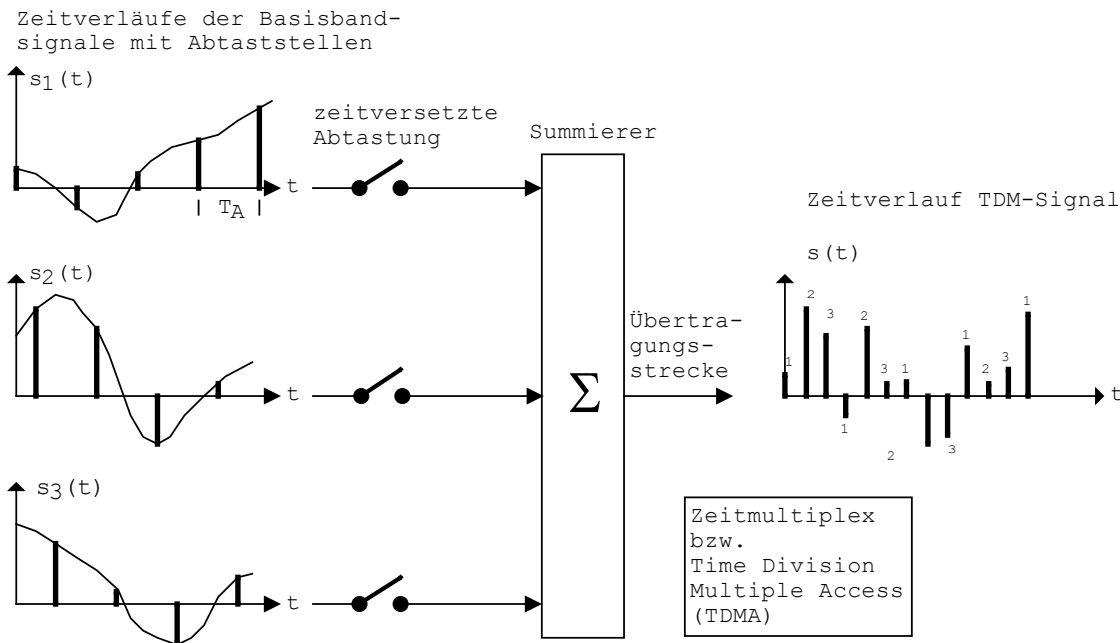
Die Basisbandsignale belegen alle den gleichen Frequenzbereich. In den Mischstufen werden sie in unterschiedliche Frequenzlagen verschoben (Frequenzmischung). Die Mischstufen oder Modulatoren sind Ringmischer. An den Punkten A entsteht ein Zweiseitenband-AM-Signal mit unterdrücktem Träger. Die Bandpässe, die unterschiedliche Grenzfrequenzen haben, lassen nur das obere Seitenband passieren. An den Punkten B entsteht ein Einseitenband-AM-Signal. Jeder der Zweige verschiebt das Spektrum des Basisbandsignals um die jeweilige Trägerfrequenz f_{Tn} nach oben.

Die TF-Übertragungstechnik wurde durch die PCM-Übertragungstechnik abgelöst, bei der mehrere Kanäle im Zeitmultiplexverfahren übertragen werden (Time Division Multiple Access, TDMA)

2. Zeitmultiplex

Übertragung der verschiedenen Quellensignale in versetzten, periodisch wiederkehrenden Zeitabschnitten. Jeder Informationskanal benutzt die gesamte Bandbreite des Übertragungswegs nur während eines kurzen Zeitabschnitts. Für die Echtzeitübertragung muss bei der Wahl der Wiederholzeit das Abtasttheorem beachtet werden.

Das Zeitmultiplexverfahren wird z.B. in PCM-Übertragungssystemen (Kap. 6) angewendet. Es werden dann aber keine abgetasteten sondern digitalisierte Analogwerte übertragen. Bei Sprachsignalen findet eine Abtastung mit 8kHz und eine Quantisierung mit 8 Bit statt.



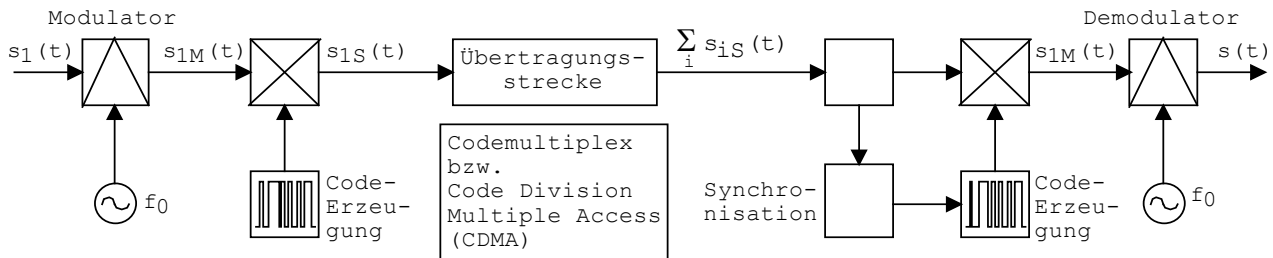
Prinzip der Zeitmultiplex-Übertragung (mit Analog-Signalen)

Der Kanal 1 speist in gleichen Zeitabständen, die gleich dem Abtastintervall $T_A = 1/f_A$ (f_A = Abtastfrequenz) sind, die Abtastwerte in die Strecke. Die Breite der übertragenen Impulse hängt von der verfügbaren Bandbreite der Übertragungsstrecke ab.

Eine Kombination von Zeit- und Frequenzmultiplex, bei dem ein Informationskanal einen periodisch wiederkehrenden Zeitabschnitt und einen bestimmten Frequenzbereich des Übertragungskanal belegt, wird im Mobilfunk nach dem GSM-Standard verwendet (D1-, D2-Netz).

3. Codemultiplex

Jeder Kanal belegt gleichzeitig mit allen anderen den Übertragungsweg in seiner gesamten Bandbreite, ist aber mit einem ganz bestimmten Code moduliert, der auch auf der Empfangsseite zur Rückgewinnung verwendet wird. Andere Kanäle erzeugen auf der Empfangsseite nach der Decodierung Störungen, da sie mit einem anderen Code moduliert wurden und reduzieren dadurch das Signal-Stör-Verhältnis (SNR). Solange das SNR einen Grenzwert nicht unterschreitet, steht für eine fehlerfreie Übertragung genügend Übertragungskapazität zur Verfügung.



Prinzip der Codemultiplex-Übertragung

Auf der Sendeseite wird das Quellsignal zunächst in einer Modulationsstufe in den zu übertragenden Frequenzbereich transformiert. Anschließend erfolgt eine weitere Modulation mit einem speziellen, für jeden Kanal zugewiesenen Code, durch den das Signalspektrum stark verbreitert (gespreizt) wird. Das Sendesignal belegt nun die volle Bandbreite der Übertragungsstrecke.

Auf der Empfangsseite werden die gespreizten Signale aller auf der Strecke übertragenen Kanäle empfangen. Die Multiplikation mit dem richtigen Kanalcode entspricht einer Korrelation und liefert am Ausgang wieder das entspreizte, also bandbreitenreduzierte Signal des zum Code zugehörigen Sendesignals. Die Empfangssignale der anderen Kanäle werden nicht entspreizt, sie erhöhen nur das Störgeräusch, verringern also das SNR.

Die anschließende Demodulation liefert wieder das Basisbandsignal.

Durch die Spreizung wird die relativ geringe Bandbreite des modulierten Signals $s_{1M}(t)$ auf die wesentlich größere Bandbreite der Übertragungsstrecke verteilt. Dadurch bleibt der störende Einfluss von meist schmalbandigen Störsignalen gering, da ihr Spektrum in der Korrelatorstufe des Empfängers stark verbreitert wird. Ein Tiefpassfilter im Demodulator beseitigt die hochfrequenten Anteile der Störsignale sowie aller nichtkorrelierten Signalanteile.

1.6 Pegel und Übertragungsmaße

In vielen nachrichtentechnischen Systemen und bei Messgeräten werden die elektrischen Größen Spannung und Leistung häufig im logarithmischen Maßstab (Pseudoeinheit dB=Dezibel) als Maß, Abstand oder Pegel angegeben.

Unterscheidung Maß und Pegel:

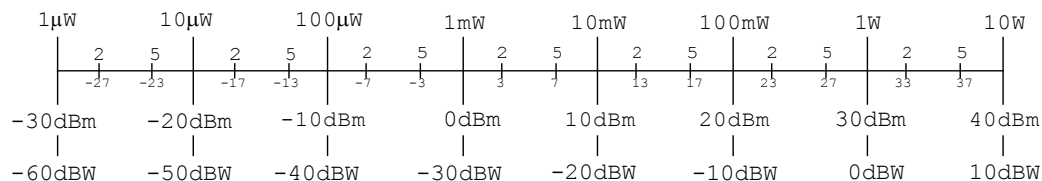
Maß, Abstand = Logarithmus eines Verhältnisses

Pegel = Logarithmus eines Verhältnisses, wobei eine der Größen ein frei gewählter oder absoluter Bezugswert ist

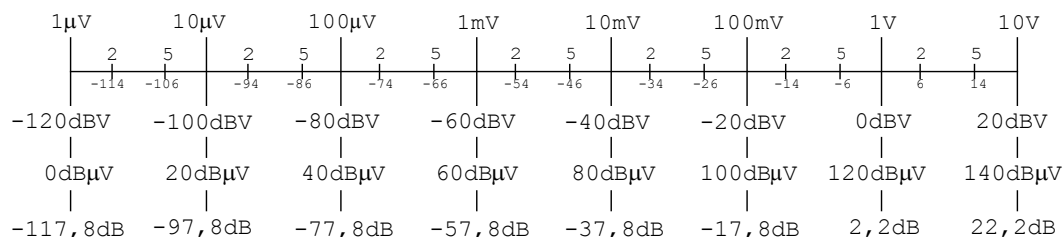
Absoluter Pegel L

Pegeleinheit	Bezug auf	Bezugswiderstand Z_0	Berechnung
dBm	1mW	meist 50Ω	$L_p = 10 \cdot \lg(P/1\text{mW})$
dBW	1W	meist 50Ω	$L_p = 10 \cdot \lg(P/1\text{W})$
dBV	1V		$L_u = 20 \cdot \lg(U/1\text{V})$
dB μ V	1 μ V	75Ω	$L_u = 20 \cdot \lg(U/1\mu\text{V})$
dB	0,775V	600Ω	$L_u = 20 \cdot \lg(U/0,775\text{V})$

Leistungen und Leistungspegel



Spannungen und Spannungspegel



Übertragungsmaße, Signalabstände

Leistungsverstärkung(-smaß) (oder Abstand): $v_p = 10 \cdot \lg(P_2/P_1)$ in dB

Spannungsverstärkung(-smaß) (oder Abstand): $v_u = 20 \cdot \lg(U_2/U_1)$ in dB

Leistungsdämpfung(-smaß): $a_p = 10 \cdot \lg(P_1/P_2)$ in dB

Spannungsdämpfung(-smaß): $a_u = 20 \cdot \lg(U_1/U_2)$ in dB

Wichtig: Bei Leistungsverstärkungen bzw. Leistungspegeln wird das logarithmierte Verhältnis mit 10 multipliziert (Umrechnung Bel -> Dezi-Bel), bei Spannungsverstärkungen bzw. Spannungspegeln mit 20.

Werden die Eingangs- und Ausgangsspannungen bzw. -leistungen an **gleichen Widerständen** gemessen werden, gilt: $v_p = v_u$ bzw. $a_p = a_u$ (alles in dB).

2. Lineare Übertragungssysteme

2.1 Unterscheidung lineares und nichtlineares System

Betrachtet werden je ein einfaches lineares und ein nichtlineares Übertragungssystem, die nur mit Kennlinien beschrieben werden.

Linearer Verstärker

$$y(t) = A \cdot x(t)$$

a. Überlagerung am Eingang: $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$

$$y(t) = A \cdot x_1(t) + A \cdot x_2(t)$$

(Überlagerungssatz)

Nichtlinearer Verstärker

$$y(t) = a \cdot x^2(t)$$

$$\begin{aligned} y(t) &= a \cdot [x_1(t) + x_2(t)]^2 \\ &= a \cdot x_1^2(t) + a \cdot x_2^2(t) \\ &\quad + 2 \cdot a \cdot x_1(t) \cdot x_2(t) \end{aligned}$$

Überlagerungssatz ist ungültig!

b. Ansteuerung mit einer harmonischen Schwingung: $x(t) = \hat{x} \cdot \cos \omega t$

$$y(t) = A \cdot \hat{x} \cdot \cos \omega t$$

Am Ausgang tritt nur die Eingangsfrequenz auf.

$$\begin{aligned} y(t) &= a \cdot \hat{x}^2 \cdot \cos^2 \omega t \\ &= \frac{a \hat{x}^2}{2} + \frac{a \hat{x}^2}{2} \cdot \cos 2 \omega t \end{aligned}$$

Am Ausgang treten neue Frequenzen auf!

c. Ansteuerung mit 2 harmonischen Schwingungen: $x(t) = \hat{x}_1 \cos(\omega_1 t) + \hat{x}_2 \cos(\omega_2 t)$

$$x(t) = A \hat{x}_1 \cos(\omega_1 t) + A \hat{x}_2 \cos(\omega_2 t)$$

$$\begin{aligned} y(t) &= a \cdot [\hat{x}_1 \cos \omega_1 t + \hat{x}_2 \cos \omega_2 t]^2 \\ &= \frac{a \hat{x}_1^2}{2} + \frac{a \hat{x}_2^2}{2} \\ &\quad + a \cdot \hat{x}_1 \cdot \hat{x}_2 \cdot \cos(\omega_1 - \omega_2)t \\ &\quad + a \cdot \hat{x}_1 \cdot \hat{x}_2 \cdot \cos(\omega_1 + \omega_2)t \\ &\quad + \frac{a \hat{x}_1 \hat{x}_2}{2} \cos 2\omega_1 t \\ &\quad + \frac{a \hat{x}_1 \hat{x}_2}{2} \cos 2\omega_2 t \end{aligned}$$

Am Ausgang treten nur die Eingangsfrequenzen auf.

Am Ausgang entstehen neue Frequenzanteile:
Kombinationen und Vielfache der Eingangsfrequenzen

Da bei nichtlinearen Systemen der Überlagerungssatz keine Gültigkeit mehr besitzt, können viele Analysemethoden der linearen Systemtheorie nicht verwendet werden.

2.2 Eigenschaften und Beispiele linearer Übertragungssysteme

Bei sinusförmiger Anregung bleibt die Kurvenform erhalten (Sinustreue).

Es gilt der Überlagerungssatz: Wird das System mit mehreren Sinusschwingungen unterschiedlicher Frequenz angeregt, treten nur Schwingungen mit der gleichen Frequenz auf, lediglich Amplituden und Phasenlagen sind verändert.

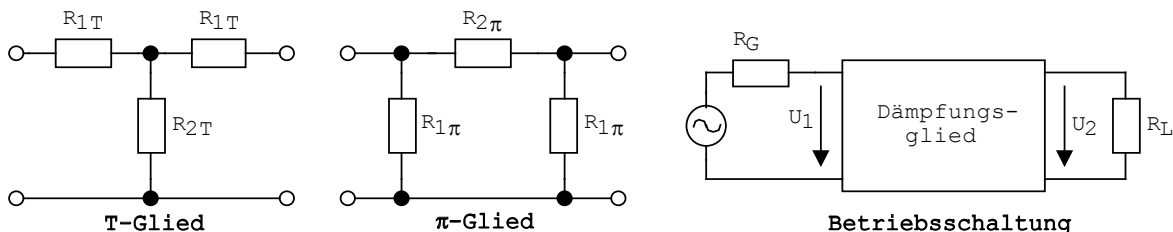
Im Frequenzbereich wird das Übertragungsverhalten des linearen Systems mit dem Amplitudengang $|H(f)|$ und dem Phasengang $\varphi(f)$ bzw. dem komplexen Frequenzgang $H(f)$ beschrieben.

Im Zeitbereich benutzt man bei bestimmten Anwendungen die Sprungantwort, seltener die Impulsantwort. Aus der Sprungantwort (Rechteckübertragungsverhalten) lässt sich das prinzipielle Verhalten bei tiefen und hohen Frequenzen und das Einschwingverhalten ansehen.

2.2.1 Dämpfungsglieder

Dämpfungsglieder haben einen symmetrischen Aufbau (\rightarrow Ein- und Ausgang können vertauscht werden). Sie sollen für einen breiten Frequenzbereich (z.B. 0..4GHz) bei bestimmter Generator- und Lastimpedanz (z.B. 50Ω) eine gleichbleibende Dämpfung aufweisen. Eingesetzt werden Sie zur definierten Signalabschwächung und zur Verbesserung der Anpassung.

Grundsaltungen und Betriebsschaltung:



Eigenschaften eines Dämpfungsgliedes: Wellenwiderstand und Dämpfung

Der **Wellenwiderstand** ist der geometrische Mittelwert aus Kurzschluss- und Leerlaufeingangsimpedanz: $Z_W = \sqrt{Z_{eL} \cdot Z_{eK}}$ (2-1)

Z_{eL} = Eingangsimpedanz bei $R_L = \infty$, Z_{eK} = Eingangsimpedanz bei $R_L = 0$

Die **Dämpfung** ist allgemein das Verhältnis von **Eingangs- zu Ausgangsspannung** bei Abschluss mit dem Wellenwiderstand ($R_L = Z_W$):

$$\text{Dämpfungsfaktor: } A = \left. \frac{U_1}{U_2} \right|_{R_L = Z_W} \quad (2-2)$$

$$\text{Dämpfungsmaß (in dB): } a = 20 \cdot \lg \frac{U_1}{U_2} \quad (2-3)$$

Als gewünschte Eigenschaft haben Dämpfungsglieder bei Abschluss mit $R_L = Z_W$ einen Eingangswiderstand $Z_e = Z_W$.

Berechnungsformeln für die Widerstände des T- und π -Glieds

$$R_{1T} = Z_W \cdot \frac{A - 1}{A + 1}, \quad R_{2T} = Z_W \cdot \frac{2 \cdot A}{A^2 - 1}; \quad R_{1\pi} = Z_W \cdot \frac{A + 1}{A - 1}, \quad R_{2\pi} = Z_W \cdot \frac{A^2 - 1}{2 \cdot A} \quad (2-4)$$

2.2.2 Leitungen

In Schaltungen und Systemen müssen bei höheren Signalfrequenzen Laufzeiteffekte durch die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Felder berücksichtigt werden, sobald die Abmessungen einer Schaltung in der Größenordnung der Wellenlänge kommen. Die Momentanwerte von Spannung und Strom sind dann nicht nur von der Zeit (Schwingung), sondern auch vom Ort abhängig, sie haben Welleneigenschaften. Die auftretenden Effekte werden in der Theorie der Leitungen behandelt, von der hier nur die wichtigsten Ergebnisse präsentiert werden.

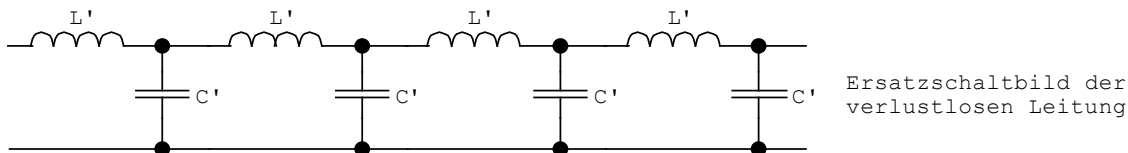
Leitungstypen

- Symmetrische Leitung (Doppelleitung, twisted pair)
- Koaxialleitung (unsymmetrisch)
- Lichtwellenleiter

Auf Leitungen breitet sich ein eingespeistes Signal als elektromagnetische Welle zum Leitungsende hin aus. Bei der drahtgebundenen Ausbreitung stehen elektrisches und magnetisches Feld als Vektoren senkrecht zueinander und senkrecht zur Ausbreitungsrichtung (TEM-Welle).

Die in den Feldern gespeicherte Energie wird in einem Ersatzschaltbild durch Induktivitäten in Längsrichtung und Kapazitäten zwischen den Leitern dargestellt. Beide Größen treten bei Leitungen als unendlich fein verteilte Elemente auf, man bezeichnet sie als Leitungsbeläge, Einheit $\mu\text{H/m}$ bzw. pF/m .

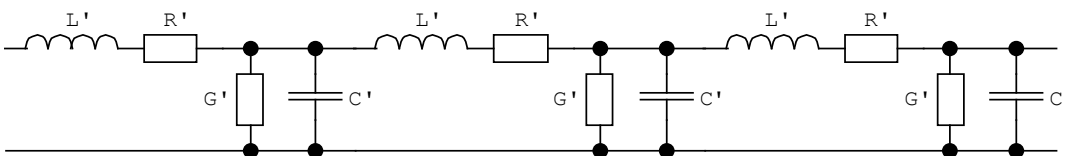
Verlustlose Leitung (gute Näherung bei kurzen Leitungen, „LC-Leitung“)



L' =Induktivitätsbelag in $\mu\text{H/m}$; C' =Kapazitätsbelag in pF/m

In realen Leitungen treten durch ohmsche Widerstände im Leiter und ein verlustbehaftetes Isolationsmaterial Verluste bei der Ausbreitung auf, wodurch Spannung und Strom längs der Leitung abnehmen. In einem Ersatzschaltbild werden die Verluste durch die zusätzliche Leitungsbeläge R' und G' beschrieben.

Verlustbehaftete Leitung (bei langen Leitungen mit Dämpfung)



R' =Widerstandsbelag in Ω/m ; G' =Ableitung in $\mu\text{S/m}$

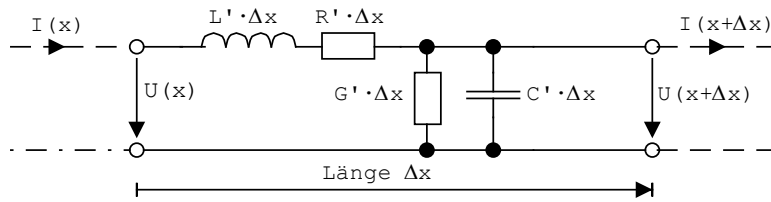
Alle 4 Leitungsbeläge sind nicht konstant, sondern haben eine mehr oder minder starke Abhängigkeit von der Frequenz.

Bei niedrigen Frequenzen (kHz-Bereich), bei denen die Leitungslänge nur einige Prozent der Wellenlänge beträgt, können die Leitungsbeläge durch Messung der Eingangswiderstände im Leerlauf bzw. Kurzschluss und Messung der Eingangskapazität bzw. Eingangsinduktivität im Leerlauf bzw. Kurzschluss näherungsweise bestimmt werden.

Mit zunehmender Frequenz macht sich als erstes eine Erhöhung des Widerstandsbelags durch den Skineneffekt bemerkbar und, ebenfalls durch den Skineneffekt, eine geringe Verringerung des Induktivitätsbelags. Bei höheren Frequenzen steigen die Verluste im Dielektrikum weiter an.

Leitungsgleichungen

Zur Berechnung wird ein Leitungselement der Länge Δx betrachtet und in die Leitung eine sinusförmige Spannung bzw. Strom eingespeist.



Durch Dämpfung auf der Leitung gilt $U(x+\Delta x) < U(x)$ und $I(x+\Delta x) < I(x)$. Die Änderungen von Spannung und Strom in einem Leitungselement sind

$$\Delta U(x) = U(x + \Delta x) - U(x) = -I(x) \cdot (j\omega L' + R') \cdot \Delta x$$

$$\Delta I(x) = I(x + \Delta x) - I(x) = -U(x + \Delta x) \cdot (j\omega C' + G') \cdot \Delta x$$

Daraus erhält man

$$\frac{\Delta U(x)}{\Delta x} = -(j\omega L' + R') \cdot I(x), \quad \text{und mit } \Delta x \rightarrow 0 : \frac{dU(x)}{dx} = -(j\omega L' + R') \cdot I(x)$$

$$\frac{\Delta I(x)}{\Delta x} = -(G' + j\omega C') \cdot U(x + \Delta x), \quad \text{und mit } \Delta x \rightarrow 0 : \frac{dI(x)}{dx} = -(G' + j\omega C') \cdot U(x)$$
(2-5)

Einmalige Ableitung und Einsetzen ergibt:

$$\frac{d^2 U(x)}{dx^2} = -(j\omega L' + R') \cdot \frac{dI(x)}{dx} = (j\omega L' + R') \cdot (G' + j\omega C') \cdot U(x)$$

$$\frac{d^2 I(x)}{dx^2} = -(G' + j\omega C') \cdot \frac{dU(x)}{dx} = (G' + j\omega C') \cdot (j\omega L' + R') \cdot I(x)$$
(2-6)

In den Differentialgleichungen für $U(x)$ und $I(x)$ tritt der Ort x nicht auf, was die Anzahl der Lösungen für $U(x)$ und $I(x)$ einschränkt. Ein möglicher Ansatz für den zunächst nur betrachteten Spannungsverlauf längs der Leitung ist:

$$U(x) = U' \cdot e^{-\gamma \cdot x}$$
(2-7)

Zweimalige Ableitung ergibt

$$\frac{d^2 U(x)}{dx^2} = \gamma^2 \cdot U' \cdot e^{-\gamma \cdot x} = \gamma^2 \cdot U(x)$$

und löst die Differentialgleichung. Ein zweiter Ansatz $U(x) = U'' \cdot e^{+\gamma \cdot x}$ löst aber auch die Differentialgleichung.

Durch Koeffizientenvergleich erhält man für den **Ausbreitungskoeffizienten γ**

$$\gamma = \sqrt{(j\omega L' + R') \cdot (G' + j\omega C')} = \sqrt{R'G' - \omega^2 L'C' + j\omega(L'G' + R'C')} = \alpha + j\beta$$
(2-8)

mit α = Dämpfungskoeffizient (-belag) und β = Phasenkoeffizient (-belag)

Der Ausbreitungskoeffizient ist im Allgemeinen komplex. Bei der verlustlosen Leitung ($R', G' = 0$) ist $\alpha = 0$ und $\beta = \omega \sqrt{L'C'}$.

Gl. (2-7) beschreibt die Spannungsverteilung einer auf der Leitung sich vom Eingang zum Ende hin ausbreitenden Welle. Für $x=0$ erhält man $U(x=0) = U' = U_1$, mit U_1 =Spannung am Leitungseingang

Somit gilt für die Spannung der sich zum Leitungsende hin laufenden Welle

$$U(x) = U_1 \cdot e^{-\gamma \cdot x} = U_1 \cdot e^{-\alpha \cdot x} \cdot e^{-j\beta \cdot x}$$
(2-9)

Der Term $U_1 \cdot e^{-\alpha \cdot x}$ beschreibt darin die Abnahme der Amplitude längs der Leitung, im Exponenten des letzten Terms steht die Phasenverschiebung der Spannung gegen die Eingangsspannung, $\varphi(x) = -\beta \cdot x$.

Leitungswellenlänge, Verkürzungsfaktor

Für die sich auf der Leitung ausbreitende Welle gibt der Phasenfaktor $e^{-j\beta x}$ an, wie sich zu einem festen Zeitpunkt die Phasenverschiebung in Ausbreitungsrichtung ändert. Wenn $\beta x = 2\pi$ wird, hat die Leitung eine Länge x , die genau einer Wellenlänge λ_L auf der Leitung ist,

$$\text{Leitungswellenlänge } \lambda_L = 2\pi/\beta. \quad (2-10)$$

Grundsätzlich ist die Wellenlänge auf einer Leitung, λ_L , kleiner oder höchstens gleich der Wellenlänge λ_0 im freien Raum. Das Verhältnis ist der Verkürzungsfaktor k ,

$$k = \frac{\lambda_L}{\lambda_0} = \frac{v_{ph}}{c_0}, \quad (2-11)$$

der ebenfalls angibt, um wie viel die Ausbreitungs- (Phasen-) geschwindigkeit v_{ph} auf der Leitung kleiner ist als die Ausbreitungsgeschwindigkeit c_0 (Lichtgeschwindigkeit) im freien Raum.

$$\text{Bei der verlustlosen Leitung gilt außerdem } k = \frac{1}{c_0 \cdot \sqrt{L' \cdot C'}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad (2-12)$$

mit ϵ_r = Dielektrizitätskonstante des Isolationsmaterials

Leitungsämpfung

Der Dämpfungsfaktor eines Übertragungssystems ist allgemein das Verhältnis von Eingangs- zu Ausgangsspannung. Für die Dämpfung einer Leitung mit der Länge L und Anpassung am Ausgang erhält man aus Gl. (2-9)

$$\frac{U_1}{U_2} = e^{\alpha L} = A_L, \text{ mit } A_L = \text{Dämpfungsfaktor der Leitung} \quad (2-13)$$

Das Dämpfungsmaß a_L in dB ist

$$a_L = 20 \cdot \lg\left(\frac{U_1}{U_2}\right) = 20 \cdot \lg(e^{\alpha L}) = 8,686 \cdot \alpha \cdot L \quad (2-14)$$

Die Dämpfung ist nur bei niedrigen Frequenzen frequenzunabhängig, Gl.(2-7). Bei Frequenzen ab einigen 100kHz nehmen R' durch Stromverdrängung im Leiter und G' durch dielektrische Verluste zu. Dämpfungswerte müssen aus Katalogen entnommen werden.

Wichtiges Ergebnis: Leitungen dämpfen durch ihre Wirkverluste exponentiell (im Gegensatz zu Funkstrecken).

Schwach gedämpfte Leitung

Bei der schwach gedämpften Leitung gilt $G' \approx 0$ und $R' \ll \omega L'$. Der Ausbreitungskoeffizient wird dann mit $\sqrt{1 + jx} \approx 1 + jx/2$ bei $x \ll 1$

$$\begin{aligned} \gamma &= \sqrt{(j\omega L' + R') \cdot (G' + j\omega C')} \approx \sqrt{(j\omega L' + R') \cdot j\omega C'} = \sqrt{-\omega^2 L' C' \left(1 - j \frac{R'}{\omega L'}\right)} \approx \sqrt{-\omega^2 L' C'} \cdot \left(1 - j \frac{R'}{2\omega L'}\right) \\ &\approx j\omega \sqrt{L' C'} \cdot \left(1 - j \frac{R'}{2\omega L'}\right) = \frac{R'}{2} \cdot \sqrt{\frac{C'}{L'}} + j\omega \sqrt{L' C'} = \alpha + j\beta \end{aligned}$$

$$\text{Dämpfungskoeffizient, schwach gedämpfte Leitung: } \alpha = \frac{R'}{2} \cdot \sqrt{\frac{C'}{L'}} \text{ in Np/m} \quad (2-15)$$

$$\text{Phasenkoeffizient, schwach gedämpfte Leitung: } \beta = \omega \sqrt{L' C'} \text{ in rad/m} \quad (2-16)$$

Beispiel: Koaxkabel RG 58 (im Labor für geschirmte Leitungen benutzt)

Aufdruck: $Z_W=50\Omega$; Isolation Polyäthylen mit $\epsilon_r = 2,25 = 9/4$; $C'=101\text{pF/m}$

$$\rightarrow L' = Z_W^2 \cdot C' = 2500\Omega^2 \cdot 101\text{pF/m} = 0,253\mu\text{H/m}; \quad k = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{2}{3}$$

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Welle auf der Leitung beträgt damit 200.000 km/sec. Eine Leitung von 5m Länge verzögert ein Signal um 25nsec. Bei $f=100\text{MHz}$ ist $\lambda_0=3\text{m}$ (Freiraum) und $\lambda_L = 3\text{m} \cdot k = 2\text{m}$.

Die Dämpfung beträgt nach einem Herstellerkatalog bei
 $f=1\text{MHz}$: 1dB/100m; $f=10\text{MHz}$: 4,7dB/100m; $f=100\text{MHz}$: 16dB/100m

Vergleich Kabel mit Funkstrecke (ungestörter Wellenausbreitung, Freiraum):

Eine ungestörte elektromagnetische Welle breitet sich in freien Raum als Kugelwelle aus. Für den Freiraum-Dämpfungsfaktor der abgestrahlten Leistung bzw. das Dämpfungsmaß erhält man:

$$A_0 = \left(4 \cdot \pi \cdot \frac{d}{\lambda}\right)^2 \quad \text{bzw.} \quad \alpha_0 = 10 \cdot \lg\left(4 \cdot \pi \cdot \frac{d}{\lambda}\right)^2 = 20 \cdot \lg\left(4 \cdot \pi \cdot \frac{d}{\lambda}\right) \quad (2-17)$$

mit d = Länge der Funkstrecke, λ = Wellenlänge, $\lambda = c_0/f$

Vergleicht man z.B. Kabel (RG58) und Funkstrecke bei verschiedenen Längen, erhält man für $f=100\text{ MHz}$:

Länge	100m	1km	10km	100km
Kabeldämpfung	16dB	160dB	1600dB (!)	16000db (!)
Funkfelddämpfung	52db	72dB	92dB	112dB

Die Kabeldämpfung lässt sich durch dämpfungsärmere Materialien und dickere Leiter verringern, ebenso die Funkfelddämpfung durch die Verwendung von Richtantennen.

Wellenwiderstand

Aus Gl. (2-6) folgt für den Stromverlauf längs der Leitung

$$I(x) = -\frac{dU(x)}{dx} \cdot \frac{1}{j\omega L' + R'}, \text{ und mit } \frac{dU(x)}{dx} = -\gamma \cdot U_1 \cdot e^{-\gamma \cdot x} \text{ erhält man}$$

$$I(x) = \frac{\gamma \cdot U_1 \cdot e^{-\gamma \cdot x}}{j\omega L' + R'} = \frac{\gamma \cdot U(x)}{j\omega L' + R'} = \frac{\sqrt{(j\omega L' + R') \cdot (j\omega C' + G')}}{j\omega L' + R'} \cdot U(x) \quad (2-18)$$

Das Verhältnis von Spannung zu Strom der sich auf der Leitung ausbreitenden Welle ist der Wellenwiderstand \underline{Z}_W ,

$$\frac{U(x)}{I(x)} = \sqrt{\frac{j\omega L' + R'}{j\omega C' + G'}} = \underline{Z}_W \quad (2-19)$$

Der Wellenwiderstand ist im Allgemeinen komplex und unabhängig vom Ort.

$$\text{Für } \omega=0 \text{ wird } \underline{Z}_W \text{ reell, } \underline{Z}_W|_{\omega=0} = Z_{W0} = \sqrt{\frac{R'}{G'}}, \quad (2-20)$$

ebenso für hohe Frequenzen, wenn $\omega L' \gg R'$ und $\omega C' \gg G'$ gilt,

$$\underline{Z}_W(\omega L' \gg R', \omega C' \gg G') = Z_{W\infty} = \sqrt{\frac{L'}{C'}} \quad (2-21)$$

Zwischen niedrigen und hohen Frequenzen hat der Wellenwiderstand ein reellkapazitives Verhalten.

Für den Fall nicht zu niedriger Frequenzen darf G' gegen $\omega C'$ vernachlässigt werden. Damit erhält man für \underline{Z}_W :

$$\begin{aligned} \underline{Z}_W &= \sqrt{\frac{j\omega L' + R'}{j\omega C'}} = \sqrt{\frac{L'}{C'} - j \frac{R'}{\omega C'}} \\ &= \sqrt{\left(\frac{L'}{C'}\right)^2 + \left(\frac{R'}{\omega C'}\right)^2} \cdot e^{-j \arctan\left(\frac{R'}{\omega L'}\right)} \\ &= \sqrt{\frac{L'}{C'}} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{R'}{\omega L'}\right)^2} \cdot e^{-j \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{R'}{\omega L'}\right)} \end{aligned} \quad (2-22)$$

Mit zunehmender Frequenz nähern sich der Betrag von \underline{Z}_W gegen $Z_{W\infty}$ und der Phasenwinkel von negativen Werten gegen Null. Bei der Frequenz

$$\omega = \frac{R'}{\sqrt{3} \cdot L'} \text{ bzw. } f = \frac{R'}{\sqrt{3} \cdot 2\pi \cdot L'} \text{ ist } \underline{Z}_W = Z_{W\infty} \cdot \sqrt{2} \cdot e^{-j30^\circ} \quad (2-23)$$

Für die schwach gedämpfte Leitung ist $R' \ll \omega L'$, so dass unter der Wurzel $(R'/\omega L')^2$ gegen 1 vernachlässigt und die arctan-Funktion durch ihr Argument (im Bogenmaß) ersetzt werden kann.

$$\text{Der Wellenwiderstand wird dann } \underline{Z}_W \approx \sqrt{\frac{L'}{C'}} \cdot e^{-j \frac{R'}{2\omega L'}} \quad (2-24)$$

Hinweis: Gl. (2-24) gilt nur für sehr schwach gedämpfte Leitungen. Zur Auswertung der Ergebnisse des Laborversuchs „Leitungen“ sollte sie nicht benutzt werden., sondern besser Gl. (2-22).

Reflexion, Reflexionsfaktor

Die in Gln. (2-9) und (2-10) angegebenen Spannungs- und Stromverläufe längs der Leitung gelten nur, wenn das Verhältnis $U(x)/I(x) = \underline{Z}_W$ nicht verändert wird. Die Leitung darf sich dazu in ihrem Verlauf nicht verändern und muss am Ende mit einer Impedanz $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_W$ abgeschlossen werden (Anpassung, reflexionsfreier Abschluss).

Ist $\underline{Z}_2 \neq \underline{Z}_W$, wird das Spannungs-Strom-Verhältnis gestört und ein Teil der auf das Leitungsende treffenden Welle reflektiert. Durch die Reflexion treten dann zwei Wellen auf der Leitung auf: die (bisher nur betrachtete) zum Leitungsende hinlaufende und die durch Reflexion vom Leitungsende zum Eingang rücklaufende Welle.

Allgemein ergibt sich für die Spannungs- und Stromverteilung auf der Leitung

$$\underline{U}(x) = \underline{U}_{\text{hin}}(x) + \underline{U}_{\text{rück}}(x) \text{ und } \underline{I}(x) = \underline{I}_{\text{hin}}(x) - \underline{I}_{\text{rück}}(x) = \frac{\underline{U}_{\text{hin}}(x)}{\underline{Z}_W} - \frac{\underline{U}_{\text{rück}}(x)}{\underline{Z}_W} \quad (2-25)$$

Zu Gl. (2-25) kommt man auch, wenn für die Dgl. (2-6) beide Lösungsmöglichkeiten angesetzt werden:

$$\underline{U}(x) = \underline{U}' \cdot e^{-\gamma \cdot x} + \underline{U}'' \cdot e^{+\gamma \cdot x} \text{ bzw. } \underline{I}(x) = \underline{I}' \cdot e^{-\gamma \cdot x} - \underline{I}'' \cdot e^{+\gamma \cdot x} \quad (2-26)$$

Wobei für das Spannungs-Strom-Verhältnis jeder Teilwelle wieder gilt:

$$\frac{\underline{U}'}{\underline{I}'} = \underline{Z}_W \text{ und } \frac{\underline{U}''}{\underline{I}''} = \underline{Z}_W \quad (2-27)$$

In Gl. (2-26) beschreibt der erste Summand eine zum Leitungsende hin laufende Welle (Amplitude nimmt mit zunehmenden x ab) und der zweite eine vom Ende reflektierte Welle, bei der die Amplitude mit abnehmenden x kleiner wird.

Die Konstanten \underline{U}' , \underline{U}'' und \underline{I}' , \underline{I}'' können aus Spannung und Strom am Leitungseingang oder am Leitungsausgang bestimmt werden.

$$\text{Am Leitungsanfang } (x=0) \text{ gilt: } \underline{U}(0) = \underline{U}' + \underline{U}'' = \underline{U}_1, \quad \underline{I}(0) = \frac{\underline{U}'}{\underline{Z}_W} - \frac{\underline{U}''}{\underline{Z}_W} = \underline{I}_1$$

Daraus erhält man

$$\begin{aligned} \underline{U}' &= \frac{\underline{U}_1 + \underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_W}{2} = \frac{\underline{U}_1}{2} \cdot \left(1 + \frac{\underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_W}{\underline{U}_1} \right) = \frac{\underline{U}_1}{2} \cdot \left(1 + \frac{\underline{Z}_W}{\underline{Z}_e} \right) \\ \underline{U}'' &= \frac{\underline{U}_1 - \underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_W}{2} = \frac{\underline{U}_1}{2} \cdot \left(1 - \frac{\underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_W}{\underline{U}_1} \right) = \frac{\underline{U}_1}{2} \cdot \left(1 - \frac{\underline{Z}_W}{\underline{Z}_e} \right) \end{aligned} \quad (2-28)$$

Mit \underline{Z}_e = Eingangsimpedanz der Leitung

Das Verhältnis von reflektierter zu hinlaufender Welle ist der Reflexionsfaktor. Am Leitungseingang ergibt sich

$$\underline{r}_e = \frac{\underline{U}_{\text{rück}}(0)}{\underline{U}_{\text{hin}}(0)} = \frac{\underline{U}''}{\underline{U}'} = \frac{1 - \underline{Z}_W/\underline{Z}_e}{1 + \underline{Z}_W/\underline{Z}_e} = \frac{\underline{Z}_e - \underline{Z}_W}{\underline{Z}_e + \underline{Z}_W} \quad (\text{Eingangsreflexionsfaktor}) \quad (2-29)$$

Die Reflexion entsteht meistens durch Fehlanpassung am Leitungsende, wenn $\underline{Z}_2 \neq \underline{Z}_W$ ist. Werden die Konstanten aus den Größen am Leitungsende ($x=L$) berechnet, erhält man

$$\underline{U}(L) = \underline{U}' \cdot e^{-\gamma \cdot L} + \underline{U}'' \cdot e^{+\gamma \cdot L} = \underline{U}_2 \quad \text{und} \quad \underline{I}(L) = \frac{\underline{U}'}{\underline{Z}_W} \cdot e^{-\gamma \cdot L} - \frac{\underline{U}''}{\underline{Z}_W} \cdot e^{+\gamma \cdot L} = \underline{I}_2$$

und daraus

$$\begin{aligned} \underline{U}' &= \frac{\underline{U}_2 + \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_W}{2} \cdot e^{\gamma \cdot L} = \frac{\underline{U}_2}{2} \cdot \left(1 + \frac{\underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_W}{\underline{U}_2} \right) \cdot e^{\gamma \cdot L} = \frac{\underline{U}_2}{2} \cdot \left(1 + \frac{\underline{Z}_W}{\underline{Z}_2} \right) \cdot e^{\gamma \cdot L} \\ \underline{U}'' &= \frac{\underline{U}_2 - \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_W}{2} \cdot e^{-\gamma \cdot L} = \frac{\underline{U}_2}{2} \cdot \left(1 - \frac{\underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_W}{\underline{U}_2} \right) \cdot e^{-\gamma \cdot L} = \frac{\underline{U}_2}{2} \cdot \left(1 - \frac{\underline{Z}_W}{\underline{Z}_2} \right) \cdot e^{-\gamma \cdot L} \end{aligned} \quad (2-30)$$

mit \underline{Z}_2 = Abschlussimpedanz der Leitung

Der Reflexionsfaktor \underline{r}_2 am Leitungsende ergibt sich aus

$$\underline{r}_2 = \frac{\underline{U}_{\text{rück}}(L)}{\underline{U}_{\text{hin}}(L)} = \frac{\underline{U}'' \cdot e^{+\gamma L}}{\underline{U}' \cdot e^{-\gamma L}} = \frac{1 - \underline{Z}_W/\underline{Z}_2}{1 + \underline{Z}_W/\underline{Z}_2} = \frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_W}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_W} \quad (\text{Abschlussreflexionsfaktor}) \quad (2-31)$$

$$\text{Setzt man darin } \underline{r}_e = \frac{\underline{U}''}{\underline{U}'}, \text{ erhält man } \underline{r}_e = \underline{r}_2 \cdot e^{-2\gamma L} = \underline{r}_2 \cdot e^{-2\alpha L} \cdot e^{-j2\beta L} \quad (2-32)$$

Der Eingangsreflexionsfaktor hängt somit vom Abschlusswiderstand, der Leitungsdämpfung und der Phasenverschiebung auf der Leitung ab.

Eingangsimpedanz der Leitung, Transformationseigenschaft

Im Prinzip beschreibt Gl.(2-32) das Verhalten am Leitungseingang, wenn die Leitung am Ende fehlangepasst wird.

Aus dem Eingangsreflexionsfaktor erhält man durch Umstellen von Gl. (2-29) die Eingangsimpedanz,

$$\underline{r}_e = \frac{\underline{Z}_e - \underline{Z}_W}{\underline{Z}_e + \underline{Z}_W} \rightarrow \underline{Z}_e = \underline{Z}_W \cdot \frac{1 + \underline{r}_e}{1 - \underline{r}_e}$$

mit Gl. (2-32) dann

$$\underline{Z}_e = \underline{Z}_W \cdot \frac{1 + \underline{r}_2 \cdot e^{-2\gamma L}}{1 - \underline{r}_2 \cdot e^{-2\gamma L}}$$

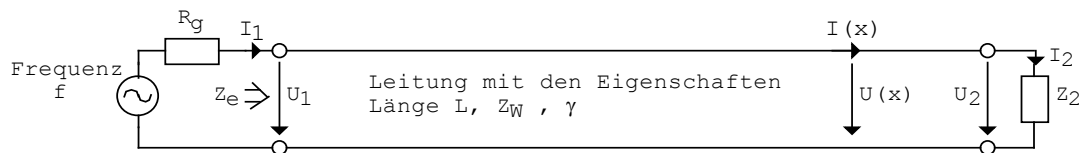
und mit Gl.(2-31)

$$\begin{aligned} \underline{Z}_e &= \underline{Z}_W \cdot \frac{1 + \frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_W}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_W} \cdot e^{-2\gamma L}}{1 - \frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_W}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_W} \cdot e^{-2\gamma L}} = \underline{Z}_W \cdot \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_W + (\underline{Z}_2 - \underline{Z}_W) \cdot e^{-2\gamma L}}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_W - (\underline{Z}_2 - \underline{Z}_W) \cdot e^{-2\gamma L}} \\ &= \underline{Z}_W \cdot \frac{(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_W) \cdot e^{+\gamma L} + (\underline{Z}_2 - \underline{Z}_W) \cdot e^{-\gamma L}}{(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_W) \cdot e^{+\gamma L} - (\underline{Z}_2 - \underline{Z}_W) \cdot e^{-\gamma L}} = \underline{Z}_W \cdot \frac{\underline{Z}_2 \cdot (e^{+\gamma L} + e^{-\gamma L}) + \underline{Z}_W \cdot (e^{+\gamma L} - e^{-\gamma L})}{\underline{Z}_2 \cdot (e^{+\gamma L} - e^{-\gamma L}) + \underline{Z}_W \cdot (e^{+\gamma L} + e^{-\gamma L})} \\ &= \underline{Z}_W \cdot \frac{\underline{Z}_2 \cdot \cosh(\gamma L) + \underline{Z}_W \cdot \sinh(\gamma L)}{\underline{Z}_2 \cdot \sinh(\gamma L) + \underline{Z}_W \cdot \cosh(\gamma L)} = \underline{Z}_W \cdot \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_W \cdot \tanh(\gamma L)}{\underline{Z}_2 \cdot \tanh(\gamma L) + \underline{Z}_W} \end{aligned}$$

$$\text{mit } \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

$$\underline{Z}_e = \underline{Z}_W \cdot \frac{\underline{Z}_2/\underline{Z}_W + \tanh(\gamma L)}{1 + \underline{Z}_2/\underline{Z}_W \cdot \tanh(\gamma L)} \quad (2-33)$$

Gl.(2-33) beschreibt, wie eine Impedanz \underline{Z}_2 durch eine Leitung mit Länge L , Wellenwiderstand \underline{Z}_W und Ausbreitungskoeffizient γ in eine Impedanz \underline{Z}_e transformiert wird.



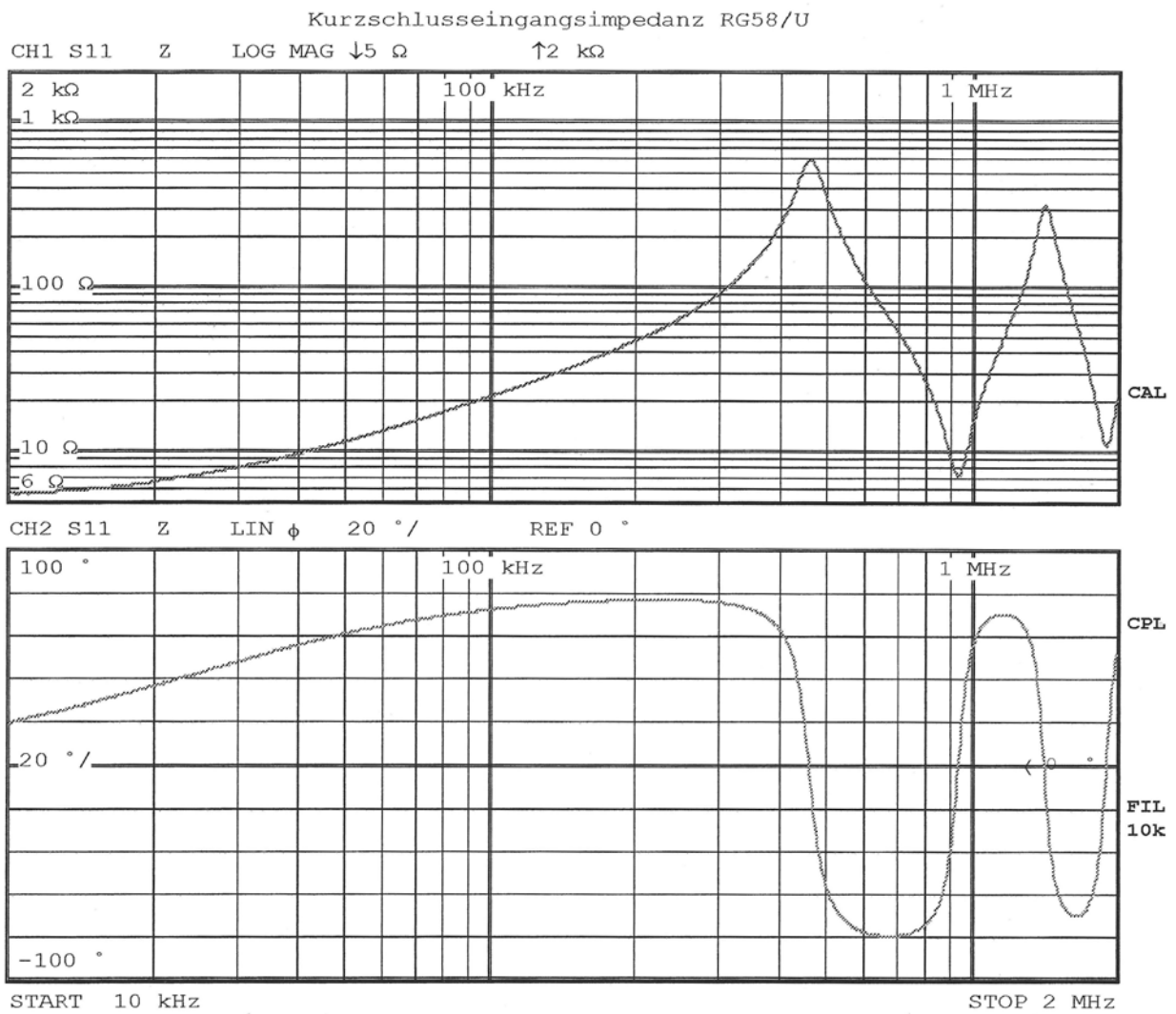
Die Transformation ist frequenzabhängig, da $\gamma = \sqrt{(j\omega L' + R') \cdot (G' + j\omega C')} = f(\omega)$ ist.

Spezialfälle für Abschlussimpedanzen und Leitungslängen

1. $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_W$ (Leitung ist mit dem Wellenwiderstand abgeschlossen). Als Eingangsimpedanz erhält man aus Gl.(2-33) $\underline{Z}_e = \underline{Z}_W$. Die Frequenzen müssen so hoch sein, dass $\underline{Z}_W = Z_{W\infty} = \sqrt{L'/C'}$, also reell wird. (Am Leitungseingang tritt über einen breiten Frequenzbereich ein konstanter Widerstand Z_W auf. Dieser Fall ist bei allen Systemverbindungen und auch in der Messtechnik anzustreben. Der Generator muss für einen Lastwiderstand Z_W ausgelegt sein (z.B. 50Ω)

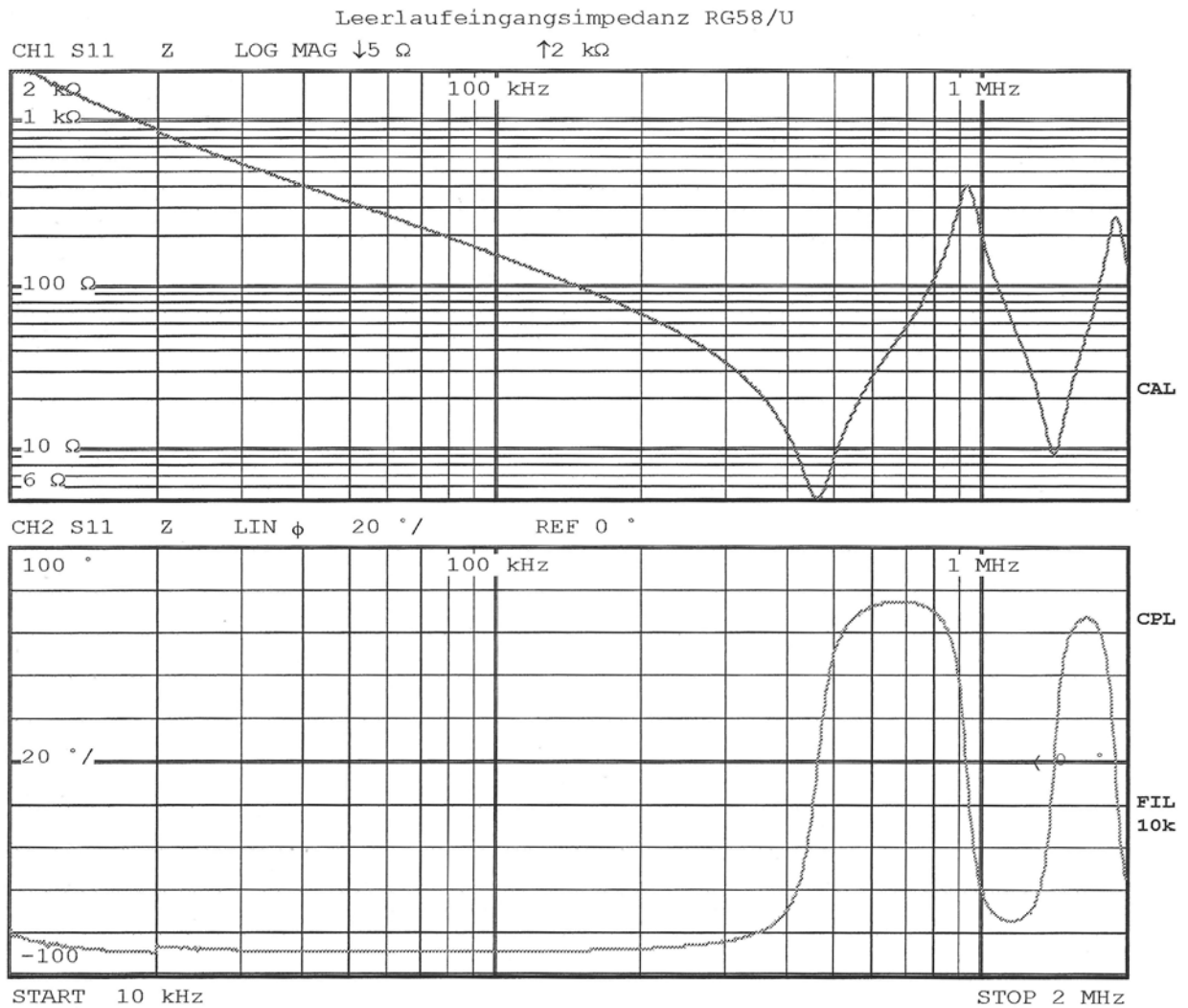
2. $\underline{Z}_2 = 0$ (Kurzschluss). Als Eingangsimpedanz erhält man $\underline{Z}_{eK} = \underline{Z}_W \cdot \tanh(\gamma L)$

Beispiel: $\underline{Z}_{eK} = f(f)$



3. $Z_2 \rightarrow \infty$ (Leerlauf). Als Eingangsimpedanz erhält man $Z_{eL} = Z_W / \tanh(\gamma L)$

Beispiel: $Z_{eL} = f(f)$



Aus Leerlauf- und Kurzschluss Eingangsimpedanz erhält man eine Gleichung zur Bestimmung des Wellenwiderstandes: $Z_{eK} \cdot Z_{eL} = Z_W^2$, bzw. $Z_W = \sqrt{Z_{eK} \cdot Z_{eL}}$

4. **Verlustlose Leitung:** $\gamma = j\beta$. Aus Gl. (2-33) erhält man $Z_e = Z_W \cdot \frac{Z_2/Z_W + j \tan(\beta L)}{1 + j Z_2/Z_W \cdot \tan(\beta L)}$

5. **Verlustlose Leitung und $L = \lambda_L/4$** ($\lambda/4$ -Leitung): $\gamma L = j\beta L = j \frac{2\pi}{\lambda_L} \cdot \frac{\lambda_L}{4} = j \frac{\pi}{2}$

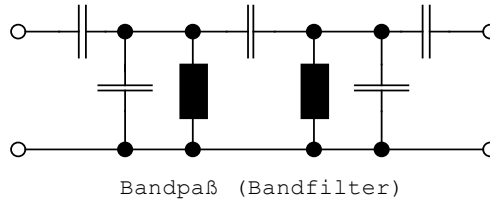
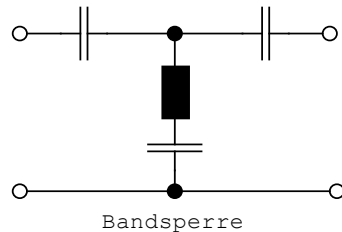
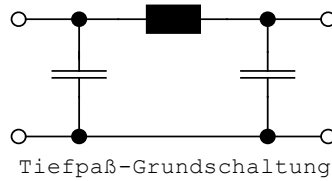
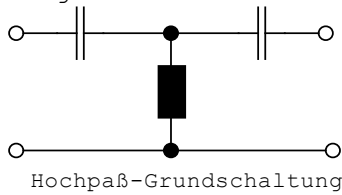
Als Eingangsimpedanz erhält man $Z_e = Z_W^2 / Z_2$.

Die Leitung wirkt als spezieller Transformator, aber nur in einem schmalen Frequenzbereich, in dem gerade eine Viertelwellenlänge auf die Leitung passt.

6. **Verlustlose Leitung und $L = n \cdot \lambda_L/2$** . Als Eingangsimpedanz erhält man $Z_e = Z_2$. Die Leitung hat keine Transformationseigenschaften, aber ebenfalls nur in einem schmalen Frequenzbereich.

2.2.3 Siebschaltungen

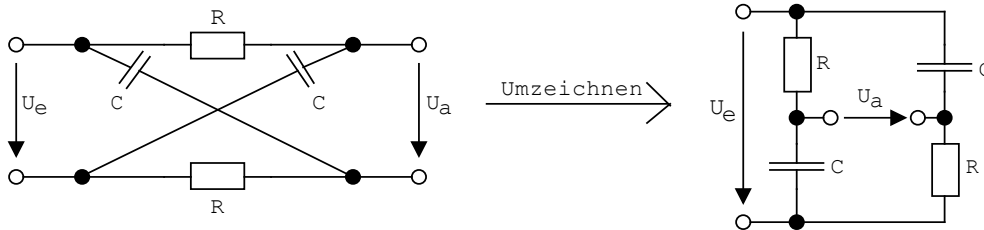
Man unterscheidet Hochpass, Tiefpass, Bandpass und Bandsperre. Die Grundsaltungen sind aus der T- und π -Schaltung abgeleitet.



Laufzeitglieder (Phasenschieber)

Sie weisen einen bestimmten Verlauf der Phase oder der Laufzeit in Abhängigkeit der Frequenz auf und werden zum Ausgleich von Phasenverzerrungen eingesetzt.

Beispiel: X-Schaltung

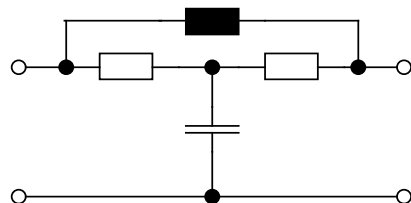


$$\frac{U_a}{U_e} = \dots = \frac{1 - j\omega RC}{1 + j\omega RC}; \quad \left| \frac{U_a}{U_e} \right| = 1 \quad \text{Die Schaltung hat Allpass-Verhalten.}$$

Entzerrer

Sie sollen einen definierten Verlauf der Dämpfung in Abhängigkeit der Frequenz aufweisen, um Dämpfungsverzerrungen von Systemen auszugleichen.

Grundsaltung: überbrücktes T-Glied



Zur Entzerrung bis zu Frequenzen von ca. 100kHz werden zunehmend Signalprozessoren eingesetzt.

2.2.4 Breitbandverstärker, Rauschen

Sie sollen Signale, deren Spektrum einen größeren Frequenzbereich einnimmt, gleichmäßig übertragen.

Im niederfrequenten Bereich bis ca. 100kHz werden dafür Operationsverstärker eingesetzt. Bei höheren Frequenzen bis zu einigen GHz verwendet man integrierte Breitbandverstärker, sog. Gain-Blocks.

Allgemein wird ein Verstärker durch die Eigenschaften

- Verstärkung
- Bandbreite
- (thermisches) Eigenrauschen
- Verzerrungen

charakterisiert. Das Eigenrauschen stellt die untere Grenze bei kleinen Eingangssignalpegeln dar. Bei großen Signalen treten am Ausgang durch Verzerrungen zusätzliche Spektralanteile auf, die im Eingangssignal nicht enthalten sind, und dadurch das Ausgangssignal verfälschen.

Als verzerrungsfreien Dynamikbereich eines Verstärkers bezeichnet man den Signalpegelbereich, bei dem das Ausgangssignal größer als das thermische Rauschen ist, Verzerrungen (die erst bei größeren Eingangssignalen auftreten) aber noch unterhalb des Ausgangsrauschpegels liegen.

Das thermische Rauschen ist ein in allen analogen nachrichtentechnischen Systemen auftretendes Zufallssignal. Es entsteht in elektrischen Leitern durch die regellose thermische Bewegung von Elektronen und stellt durch seine permanente Anwesenheit allgemein eine untere Wahrnehmungsgrenze für Signale dar. Bei der drahtlosen Übertragung bestimmt es neben anderen Rauschquellen die Grenze der Empfindlichkeit von Empfangssystemen.

Die spektrale Leistungsdichte des thermischen Rauschens ist bis zu sehr hohen Frequenzen (ca. 10^{13} Hz) konstant (weißes Rauschen). Die erzeugte Rauschleistung je Hz Bandbreite beträgt

$$\frac{P_{r0}}{1\text{Hz}} = 4 \cdot k \cdot T \quad (2-34)$$

k =Boltzmann-Konstante= $1,38 \cdot 10^{-23}$ Wsec/K; T =absolute Temperatur

Innerhalb einer Bandbreite B des Frequenzbereichs ist $P_{r0} = 4 \cdot k \cdot T \cdot B$.

An einem Wirkwiderstand R tritt die Rauschspannung

$$U_{r0} = \sqrt{P_{r0} \cdot R} = \sqrt{4 \cdot k \cdot T \cdot B \cdot R} \quad (2-35)$$

als Leerlaufspannung auf. U_{r0} hat keine Gleichspannungskomponente. Die Gleichung gibt den Effektivwert einer Wechselspannung an, z.B. $T=290\text{K}$, $B=1\text{MHz}$, $R=1\text{k}\Omega$: $U_{r0} = 4\mu\text{V}$

Da bei Breitbandübertragungssystemen meistens Leistungsanpassung besteht ($R_i=R_L$), ist die verfügbare Rauschleistung (Rechenwert)

$$P_r = k \cdot T \cdot B \quad (2-36)$$

Rauschen tritt in allen Übertragungssystemen neben den informationstragenden Signalen auf. Das Verhältnis von Signalleistung P_s und Rauschleistung P_r wird

$$\text{als Signal-Rauschleistungsverhältnis } \text{SNR} = \frac{P_s}{P_r} \quad (2-37)$$

$$\text{oder bei Signalpegeln } L_s \text{ und Rauschpegeln } L_r, \quad L_s = 10 \cdot \lg \frac{P_s}{P_0}, \quad L_r = 10 \cdot \lg \frac{P_r}{P_0},$$

$$\text{als Signal-Rauschleistungsabstand } \text{SNR(dB)} = L_s - L_r = 10 \cdot \lg \frac{P_s}{P_r} \quad (2-38)$$

bezeichnet.

Häufig treten zusätzlich zum Rauschen noch andere Störungen auf, z.B. Nebensprechen oder Einstrahlungen durch elektrische Geräte. Die Summe aller Stör-Leistungen, die im selben Frequenzbereich wie das Signalspektrum liegen, ergibt dann die Leistung P_r für das SNR in Gl.(2-38).

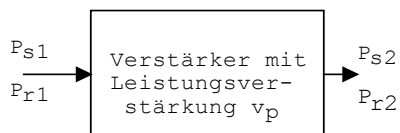
Der Signal-Störabstand stellt das wichtigste Qualitätsmerkmal in analogen nachrichtentechnischen Systemen dar, z.B. bei der Sprach- oder Bildübertragung:

SNR	Qualität
0dB	Grenze der Sprachverständlichkeit
26dB	Mindestforderung für Sprachübertragung
40dB	gute Wiedergabequalität, Mindestforderung bei Analog-Fernsehen
60dB	rauschfreie Wiedergabequalität (FM-Stereo)

Das SNR bestimmt auch die maximal über einen Kanal übertragbare Datenrate, da aus der Informationstheorie folgt, dass die Übertragungskapazität eines Nachrichtenkanals proportional zum Logarithmus des SNR ist, siehe Kap. 1.

Bei der analogen Signalverstärkung wird das SNR immer verringert. Aktive Bauelemente (Transistoren, OPV) besitzen neben inneren Wirkwiderständen zusätzliche Rauschquellen. Ihr Rauschverhalten wird mit der Rauschzahl F oder spektralen Rauschspannungen ($V/\sqrt{\text{Hz}}$) oder -strömen ($A/\sqrt{\text{Hz}}$) beschrieben.

An einem analog verstärkenden System lassen sich Signalleistung P_s und Rauschleistung P_r am Eingang und Ausgang definieren:



Das System verstärkt P_{s1} und P_{r1} und erzeugt durch seine inneren Rauschquellen noch eine zusätzliche Rauschleistung P_{rz2} am Ausgang:

$$P_{s2} = v_p \cdot P_{s1}, \quad P_{r2} = v_p \cdot P_{r1} + P_{rz2} \quad (2-39)$$

Das SNR am Ausgang ist kleiner als das SNR am Eingang:

$$\text{SNR}_2 = \frac{P_{s2}}{P_{r2}} = \frac{v_p \cdot P_{s1}}{v_p \cdot P_{r1} + P_{rz2}} = \frac{P_{s1}}{P_{r1} + P_{rz2}/v_p} < \frac{P_{s1}}{P_{r1}} = \text{SNR}_1$$

Die **Rauschzahl F** des Systems ist definiert als Verhältnis von Eingangs- zu Ausgangs-SNR:

$$F = \frac{\text{SNR}_1}{\text{SNR}_2} = \frac{\frac{P_{s1}}{P_{r1}}}{\frac{P_{s1}}{P_{r1} + P_{rz2}/v_p}} = \frac{P_{s1}}{P_{r1}} \cdot \frac{P_{r1} + P_{rz2}/v_p}{P_{s1}} = 1 + \frac{P_{rz2}/v_p}{P_{r1}} = 1 + \frac{P_{rz1}}{P_{r1}} = 1 + F_z \quad (2-40)$$

mit F_z = Zusatzrauschzahl. F , SNR_1 und SNR_2 treten in Gl.(2-40) als Signal-Rausch-**Verhältnisse** auf. F_z wird durch das Eigenrauschen des Systems bestimmt. Es ist die auf den Eingang zurückgerechnete zusätzliche Rauschleistung P_{rz2} , bezogen auf die Eingangsrauschleistung P_{r1} .

Neben der Rauschzahl F als Ergebnis eines Verhältnisses wird häufig das logarithmische Rauschmaß F' als Differenz der Signalrauschabstände angegeben:

$$F'(\text{dB}) = 10 \cdot \lg(F) = \text{SNR}_1(\text{dB}) - \text{SNR}_2(\text{dB}) \quad (2-41)$$

SNR_1 und SNR_2 sind in Gl. (2-41) die Signal-Rausch-Abstände.

Bei einem **passiven System**, z.B. Dämpfungsglied, das mit dem am Ein- und Ausgang angeschlossenen Generator bzw. Verbraucher im thermischen Gleichgewicht steht, sind die thermischen Rauschleistungen am Ein- und Ausgang gleich (Anpassung vorausgesetzt). Das Eingangssignal wird aber in seiner Amplitude abgeschwächt, so dass die Signalleistung am Ausgang geringer ist. Man erhält dann für die Signalrauschverhältnisse

$$\text{SNR}_1 = \frac{P_{s1}}{P_{r1}}, \quad \text{SNR}_2 = \frac{P_{s2}}{P_{r2}} \quad \text{und wegen } P_{r2} = P_{r1} \quad \text{und } P_{s1} = A_p \cdot P_{s2}$$

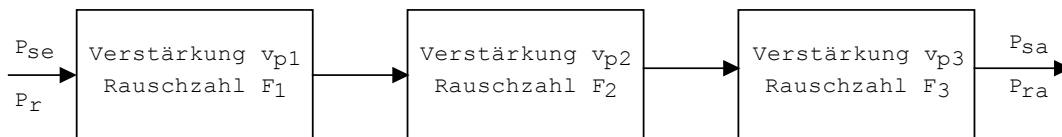
$$\text{für die Rauschzahl } F = \frac{\text{SNR}_1}{\text{SNR}_2} = \frac{P_{s1}}{P_{s2}} = A_p$$

(A_p = Leistungs-Dämpfungsfaktor)

$$\text{bzw. für das Rauschmaß } F'(\text{dB}) = 10 \lg(F) = 10 \lg(a_p) = a(\text{dB}) \quad (2-42)$$

Das Rauschmaß passiver Systeme also ist gleich ihrem Dämpfungsmaß.

Liegt eine **Kettenschaltung** von mehreren Teilsystemen vor, dann hat das erste System den größten Einfluss auf die Gesamtrauschzahl.



$$v_{p1}, v_{p2}, v_{p3} = \text{Leistungs-Verstärkungsfaktoren}$$

Die Gesamtrauschzahl ergibt sich aus der Gleichung

$$F_{\text{ges}} = \frac{\text{SNR}_e}{\text{SNR}_a} = F_1 + \frac{F_2 - 1}{v_{p1}} + \frac{F_3 - 1}{v_{p1} \cdot v_{p2}} + \dots \quad (2-43)$$

Beispiele

a. Ein Dämpfungsglied mit 6dB Dämpfung schwächt die Eingangssignalleistung auf ca. 1/4 ab. Da Ausgangs- und Eingangsrauschleistung gleich sind, ist SNR_2 um 6dB geringer als SNR_1 , das Rauschmaß F' beträgt daher 6dB und die Rauschzahl

$$F = 10^{F'(\text{dB})/10} = 3,98$$

b. Ein analoger Fernsehempfänger hat ein typisches Rauschmaß $F'=10\text{dB}$ und eine Empfangsbandbreite $B=6\text{MHz}$. Eine an den Empfängereingang mit $Z_e=60\Omega$ angepasste Antenne gibt ein Signal von $200\mu\text{V}$ ab ($T=290\text{K}$).

Die in den Eingang eingespeiste Signalleistung beträgt $P_{s1}=U_{s1}^2/Z_e=667\text{pW}$, die Eingangsrauschleistung $P_{r1}=k \cdot T \cdot B=2,4 \cdot 10^{-14}\text{W}$, und das SNR am Eingang $\text{SNR}_1 = P_{s1}/P_{r1} = 27778$ oder $44,4\text{dB}$.

Das SNR am Ausgang beträgt $\text{SNR}_2=\text{SNR}_1/F$ bzw. $\text{SNR}_2(\text{dB})=\text{SNR}_1(\text{dB})-F'(\text{dB})=34,4\text{dB}$ und reicht damit für ein einwandfreies Bild nicht mehr aus.

Zur Bildverbesserung muss das SNR am Eingang erhöht werden, z.B. durch Verwendung einer Richtantenne, die mehr Spannung abgibt, oder eines rauscharmen Vorverstärkers (z.B. $F'=3\text{dB}$, $v=20\text{dB}$), der die Gesamtrauschzahl verringert.

Mit einem Vorverstärker mit $F_1'=3\text{dB}$, $v_1=20\text{dB}$ wird die Gesamtrauschzahl

$$F_{\text{ges}} = F_1 + \frac{F_2 - 1}{v_{p1}} = 10^{3/10} + \frac{10^{10/10} - 1}{10^{20/10}} = 2,09 \quad \text{bzw. } F'_{\text{ges}}(\text{dB})=10 \cdot \lg(F_{\text{ges}})=3,2\text{dB}$$

Damit ist das SNR am Ausgang $\text{SNR}_a(\text{dB})=\text{SNR}_e(\text{dB})-F'_{\text{ges}}(\text{dB})=44,4\text{dB}-3,2\text{dB}=41,2\text{dB}$, was für ausreichende Bildqualität genügt.

Beispiel: Integrierter Breitbandverstärker (Agilent)

Cascadable Silicon Bipolar MMIC Amplifier

MSA-0385

Features

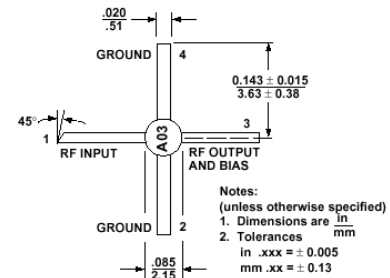
- **Cascadable 50 Ω Gain Block**
- **3 dB Bandwidth:**
DC to 2.5 GHz
- **12.0 dB Typical Gain at 1.0 GHz**
- **10.0 dBm Typical $P_{1\text{ dB}}$ at 1.0 GHz**
- **Unconditionally Stable ($k > 1$)**
- **Low Cost Plastic Package**

Description

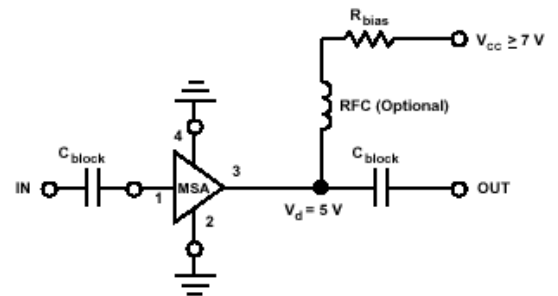
The MSA-0385 is a high performance silicon bipolar Monolithic Microwave Integrated Circuit (MMIC) housed in a low cost

plastic package. This MMIC is designed for use as a general purpose 50 Ω gain block. Typical applications include narrow and broad band IF and RF amplifiers in commercial and industrial applications.

The MSA-series is fabricated using Agilent's 10 GHz f_T , 25 GHz f_{MAX} , silicon bipolar MMIC process which uses nitride self-alignment, ion implantation, and gold metallization to achieve excellent performance, uniformity and reliability. The use of an external bias resistor for temperature and current stability also allows bias flexibility.



Typical Biasing Configuration



Electrical Specifications^[1], $T_A = 25^\circ\text{C}$

Symbol	Parameters and Test Conditions: $I_d = 35\text{ mA}$, $Z_0 = 50\ \Omega$	Units	Min.	Typ.	Max.
GP	Power Gain ($ S_{21} ^2$) $f = 0.1\text{ GHz}$ $f = 1.0\text{ GHz}$	dB	10.0	12.5 12.0	
ΔGP	Gain Flatness $f = 0.1\text{ to }1.6\text{ GHz}$	dB		± 0.7	
$f_3\text{ dB}$	3 dB Bandwidth	GHz		2.5	
VSWR	Input VSWR $f = 0.1\text{ to }3.0\text{ GHz}$			1.5:1	
	Output VSWR $f = 0.1\text{ to }3.0\text{ GHz}$			1.7:1	
NF	50 Ω Noise Figure $f = 1.0\text{ GHz}$	dB		6.0	
$P_{1\text{ dB}}$	Output Power at 1 dB Gain Compression $f = 1.0\text{ GHz}$	dBm		10.0	
IP_3	Third Order Intercept Point $f = 1.0\text{ GHz}$	dBm		23.0	
t_D	Group Delay $f = 1.0\text{ GHz}$	psec		125	
V_d	Device Voltage	V	4.0	5.0	6.0
dV/dT	Device Voltage Temperature Coefficient	mV/ $^\circ\text{C}$		-8.0	

Note:

1. The recommended operating current range for this device is 20 to 50 mA. Typical performance as a function of current is on the following page.

Der Verstärker ist für 50 Ω -Systeme gedacht. Seine Ein- und Ausgangsimpedanzen weichen jedoch etwas von 50 Ω ab, hier ersichtlich aus dem VSWR. Das VSWR (voltage standing wave ratio) beschreibt die auf einer Leitung durch Fehlanpassung auftretende Welligkeit und kann in den Reflexionsfaktor umgerechnet werden:

$$|r| = \frac{\text{VSWR} - 1}{\text{VSWR} + 1}$$

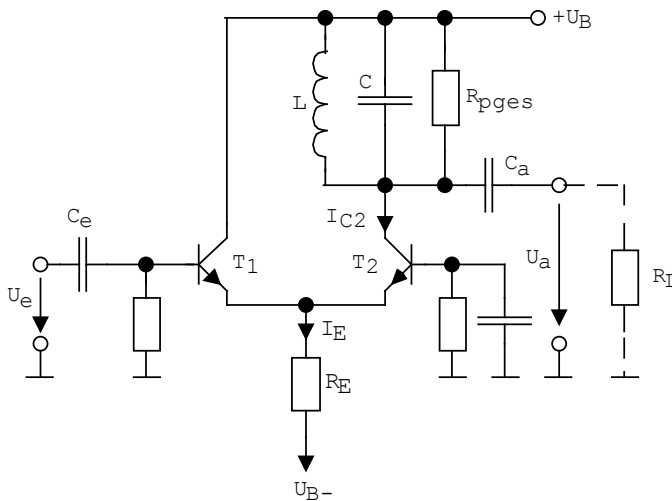
Bis 1GHz beträgt die Verstärkung mindestens 10dB. Bei 10dBm Ausgangspegel (=10mW oder 0,71V an 50 Ω) findet schon eine leichte Begrenzung statt, der Ausgangspegel ist hier um 1dB verringert (1dB gain compression). Das Rauschmaß bei 1GHz beträgt 6dB entsprechend einer Rauschzahl von 4.

Der „third order intercept point“ IP_3 gibt einen gedachten Wert der Ausgangsleistung an, bei dem bei Zweitonansteuerung die Ausgangssignalleistung gleich der Leistung von Verzerrungsanteilen 3. Ordnung ist. Werden bei Zweitonaussteuerung die Eingangspegel um je 1dB erhöht, dann erhöhen sich der Ausgangssignalepegel ebenfalls um je 1dB, die Verzerrungen 3. Ordnung aber um 3dB. Eine gedachte Verlängerung der Ausgangspegel ergibt einen Schnittpunkt, den IP_3 .

2.2.5 Schmalbandverstärker

Schmalbandverstärker dienen zur Verstärkung schmaler Frequenzbereiche, wobei das Verhältnis von oberer und unterer Grenzfrequenz < 2 (1 Oktave) ist.

Beispiel: Differenzverstärker mit Schwingkreis



$$\text{Verstärkung: } \frac{U_a}{U_e} = \frac{I_E}{4 \cdot U_T} \cdot \underline{Z}_p \quad (2-44)$$

$$\text{mit } \underline{Z}_p = \frac{1}{j\omega C + \frac{1}{R_{p\text{ges}}} + \frac{1}{j\omega L}}$$

In $R_{p\text{ges}}$ sind alle Verluste des Schwingkreises und der am Ausgang liegende Lastwiderstand zusammengefasst.

$$\text{Mit } j\omega C + \frac{1}{j\omega L} = j\sqrt{\frac{C}{L}} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$$

und $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ wird

$$\underline{Z}_p = \frac{R_{p\text{ges}}}{1 + j \frac{R_{p\text{ges}}}{\sqrt{L/C}} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \quad (2-45)$$

und mit $Q_B = \frac{R_{p\text{ges}}}{\sqrt{L/C}}$ (Betriebsgüte), $v = \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$ (normierte Verstimmung),

$$\text{erhält man für den Betrag der Verstärkung } \left| \frac{U_a}{U_e} \right| = \frac{I_E}{4 \cdot U_T} \cdot \frac{R_{p\text{ges}}}{\sqrt{1 + Q_B^2 \cdot v^2}} \quad (2-46)$$

Die Gleichung gibt den Amplitudengang des selektiven Verstärkers an. Bei der Resonanzfrequenz des Schwingkreises ($\omega = \omega_0$) ist $v=0$, der Verstärker hat dort seine größte Verstärkung:

$$\left| \frac{U_a}{U_e} \right|_{\text{max}} = \frac{I_E}{4 \cdot U_T} \cdot R_{p\text{ges}} \quad (2-47)$$

Für $\omega > \omega_0$ und $\omega < \omega_0$ wird \underline{Z}_p kleiner, wodurch die Verstärkung absinkt. Durch das frequenzabhängige Verhalten von \underline{Z}_p ist der Verstärker schmalbandig.

Die Grenzfrequenzen erhält man aus dem Abfall der Verstärkung auf -3dB vom Maximalwert:

$$\left| \frac{U_a}{U_e} \right|_{f=f_g} = \frac{|U_a/U_e|_{\text{max}}}{\sqrt{2}} \rightarrow 1 + Q_B^2 \cdot v^2 = 2 ; \left| Q_B \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right| = 1 \quad (2-48)$$

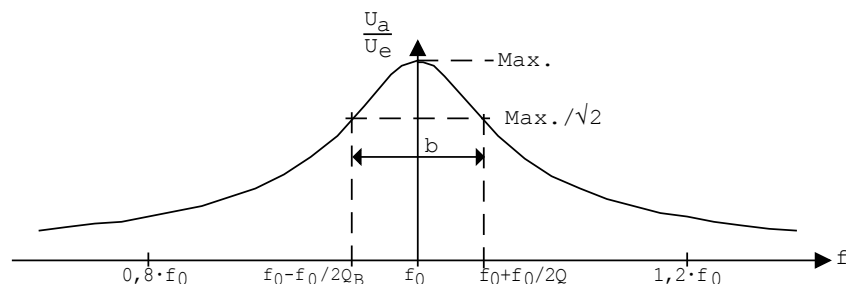
Wenn $Q_B > 5$ ist, erhält man

$$f_1 \approx f_0 - \frac{f_0}{2 \cdot Q_B} \quad (\text{untere Grenzfrequenz}) \quad \text{und} \quad f_2 \approx f_0 + \frac{f_0}{2 \cdot Q_B} \quad (\text{obere Grenzfrequenz})$$

$$\text{bzw. die Bandbreite } b = f_2 - f_1 = f_0/Q_B \quad (2-49)$$

Beispiel:

Betragsfrequenzgang der Verstärkung bei $Q_B=10$



3. Siebschaltungen

Ein ideales Übertragungssystem soll Signale verzerrungsfrei übertragen (siehe Kap. 5), d.h. folgende Eigenschaften haben:

1. konstanter Amplitudengang für den Übertragungsfrequenzbereich
2. frequenzproportionale Phasenverschiebung für den Übertragungsfrequenzbereich, d.h. konstante Laufzeit

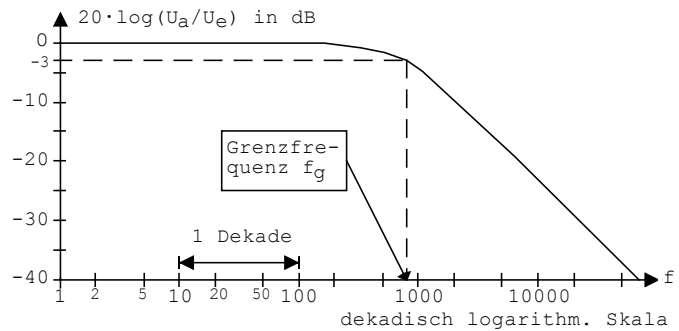
3.1 Filter-Grundtypen

Ideale Frequenzgänge

a. Tiefpaß:

$$\underline{H}(f) = H_0 \cdot e^{-j2\pi f\tau} \quad \text{für } 0 \leq f \leq f_g$$

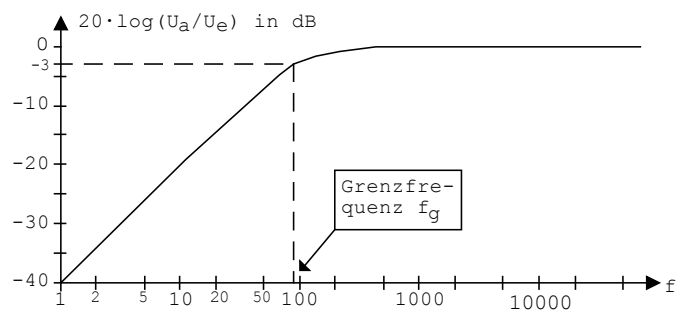
$$= 0 \quad \text{für } f_g < f < \infty$$



b. Hochpaß

$$\underline{H}(f) = 0 \quad \text{für } 0 \leq f < f_g$$

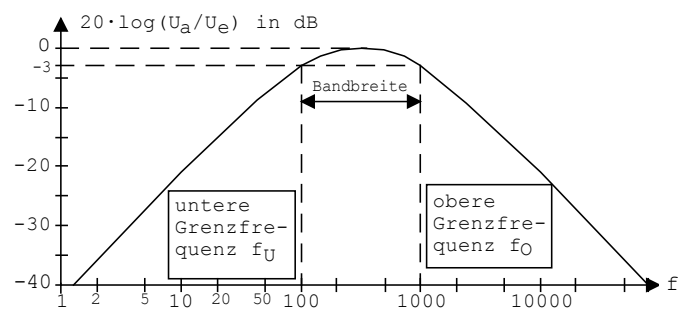
$$= H_0 \cdot e^{-j2\pi f\tau} \quad \text{für } f_g \leq f < \infty$$



c. Bandpaß

$$\underline{H}(f) = H_0 \cdot e^{-j2\pi f\tau} \quad \text{für } f_U \leq f \leq f_O$$

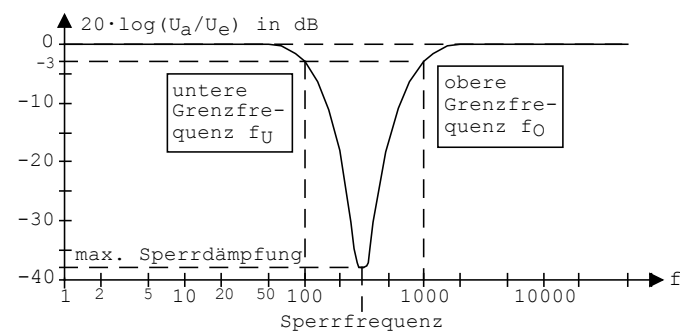
$$= 0 \quad \text{für } 0 \leq f < f_U \quad \text{und } f_O < f < \infty$$



d. Bandsperre

$$\underline{H}(f) = H_0 \cdot e^{-j2\pi f\tau} \quad \text{für } 0 \leq f \leq f_U \quad \text{und } f_O \leq f < \infty$$

$$= 0 \quad \text{für } f_U < f < f_O$$



3.2 Tiefpass-Standardcharakteristiken

Die angegebenen idealen Frequenzgänge lassen sich in der Praxis nicht realisieren, da Schaltungen mit konzentrierten Bauelementen Frequenzgänge haben, die mit gebrochen rationalen Funktionen, d.h. als Quotienten zweier Polynome, beschrieben werden.

$$\underline{H}(\omega) = H_0 \cdot \frac{P_Z(\omega)}{P_N(\omega)}$$

mit $H_0 = \text{Konstante}$;

$P_Z(\omega), P_N(\omega) = \text{Zähler-, Nennerpolynom}$; $P(\omega) = 1 + c_1 \cdot (j\omega) + c_2 \cdot (j\omega)^2 + \dots$

Die Einschränkung auf Potenzreihen im Zähler und Nenner des Frequenzgangs führt auf die auf der vorigen Seite dargestellten realen Amplitudengänge.

Der Frequenzgang eines aus konzentrierten Bauelementen aufgebauten Tiefpasses n-ter Ordnung lässt sich allgemein durch die Gleichung

$$\underline{H}(\Omega) = H_0 \cdot \frac{1}{1 + C_1 \cdot j\Omega + C_2 \cdot (j\Omega)^2 + C_3 \cdot (j\Omega)^3 + \dots + C_n \cdot (j\Omega)^n} \quad (3-1)$$

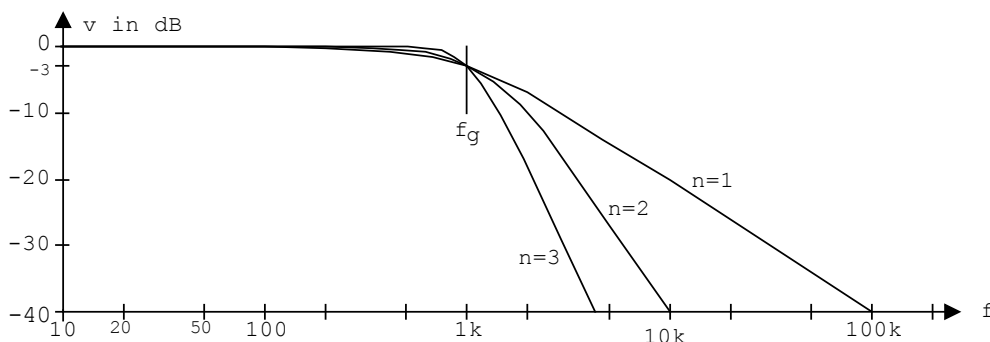
mit $\Omega = \omega/\omega_g = f/f_g$ (normierte Frequenz) ausdrücken. Die Koeffizienten $C_1 \dots C_n$ bestimmen den Filtertyp.

Die hier behandelten 3 Standard-Tiefpässe bilden durch passende Auswahl der Koeffizienten den Frequenzgang des idealen Tiefpasses abschnittsweise nach.

Der **Butterworth- oder Potenz-Tiefpass** hat einen Betrags-Frequenzgang nach der Gleichung ($H_0=1$)

$$|\underline{H}(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \Omega^{2n}} \quad n = \text{Ordnung des Filters} \quad (H_0=1) \quad (3-2)$$

Er weist einen maximal flachen Amplitudengang im Durchlassbereich auf, d.h. bis zur Grenzfrequenz bleibt der Amplitudengang umso länger konstant, je höher der Grad n des Filters ist und knickt dann mit $-n \cdot 20\text{dB/Dekade}$ ab.



Da bei der Optimierung des Übertragungsverhaltens der Phasengang unberücksichtigt blieb, hat der Potenztiefpass ein deutliches Überschwingen in der Sprungantwort, das mit zunehmender Ordnung größer wird.

Der **Tschebyscheff-Tiefpass** ist optimiert auf steilen Dämpfungsanstieg oberhalb der Grenzfrequenz. Sein Betrags-Frequenzgang lautet ($H_0=1$)

$$|\underline{H}(\omega)| = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \cdot T_n^2(\Omega)} \quad (n = \text{Ordnung des Filters}) \quad (3-3)$$

Mit $\Omega = \omega/\omega_g$;

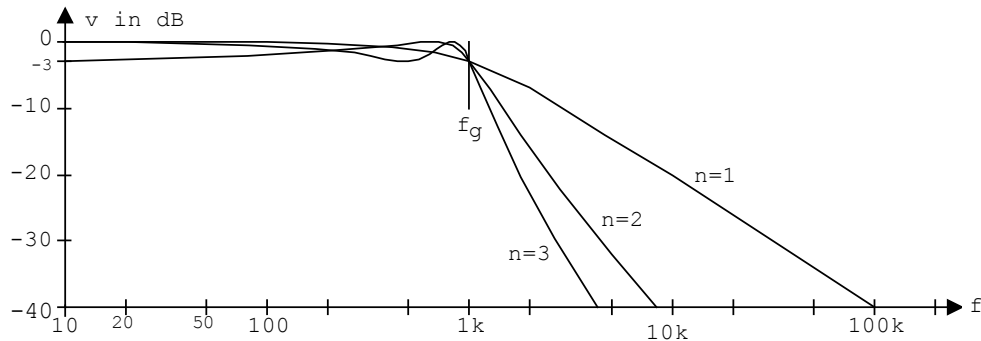
$T_n(\Omega) = \text{Tschebyscheff'sches Polynom vom Grad } n$; $\varepsilon = \text{Welligkeitsfaktor}$

$$\begin{aligned} T_n(\Omega) &= \cos(n \cdot \arccos \Omega) && \text{für } \Omega \leq 1 \\ &= \cosh(n \cdot \operatorname{arcosh} \Omega) && \text{für } \Omega > 1 \end{aligned}$$

Im Durchlassbereich schwankt der Amplitudengang zwischen 0dB und einem Maximalwert $a_{\max}=10 \cdot \log(1+\epsilon^2)$ dB und es treten n Extremwerte auf.

Bei der Grenzfrequenz ω_g wird ebenfalls der Wert a_{\max} erreicht. Oberhalb der Grenzfrequenz nimmt seine Dämpfung zunächst stärker zu als beim Butterworth-Tiefpass.

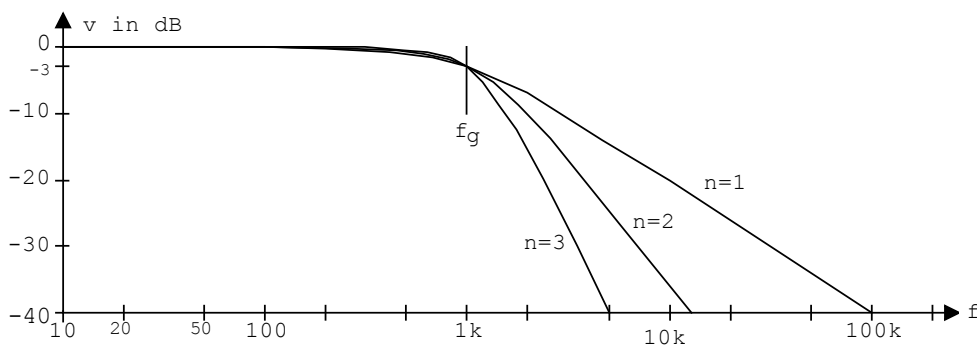
Amplitudengänge von Tschebyscheff-Tiefpässen



Der **Bessel-Tiefpass** ist optimiert auf geringes Überspringen bei der Übertragung von Rechteckimpulsen. Mit zunehmender Ordnungszahl bleibt die Gruppenlaufzeit, siehe Kap. 4, im Durchlassbereich länger konstant, d.h. zwischen Ein- und Ausgang muss die Phasenverschiebung im Durchlassbereich möglichst linear verlaufen. Die Bedingung eines frequenzlinearen Phasengangs und des 3dB-Abfalls des Amplitudengangs bei der Grenzfrequenz ω_g führt für das Nennerpolynom der Gl.(3-1) auf die Bessel-Polynome.

n	Nennerpolynom
1	$1 + j\Omega$
2	$1 + 1,362(j\Omega) + 0,618(j\Omega)^2$
3	$1 + 1,756(j\Omega) + 1,233(j\Omega)^2 + 0,361(j\Omega)^3$

Der Frequenzgang des Bessel-Tiefpasses beginnt schon deutlich vor der Grenzfrequenz abzufallen.

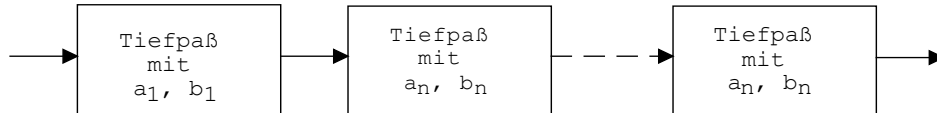


Gegenüber dem Amplitudengang des Butterworth-Tiefpasses ergibt sich schon im Durchlaßbereich ein abfallender Verlauf, im Sperrbereich erfolgt eine allmähliche Annäherung an die Grenzsteigung $-n \cdot 20\text{dB/Dekade}$. Die Sprungantwort zeigt ein geringes Überspringen, das mit zunehmender Ordnung kleiner wird.

Koeffizientenbestimmung

Für praktische Anwendungen ist es zweckmäßig, das Nennerpolynom der Gl.(3-1) in Produkte von höchstens 2.Ordnung zu zerlegen. Bei der schaltungstechnischen Realisierung entspricht dann jeder Produktterm einem Tiefpass 2. Ordnung. Die Einzeltiefpässe werden durch Hintereinanderschalten zum Gesamttiefpass zusammengefasst. Beim Zusammenschalten ist auf Entkopplung zu achten, was meistens erfüllt ist, wenn ein Folgetiefpass niederohmig angesteuert wird.

Schema zur Zusammenschaltung der Teilschaltungen



Der allgemeine Frequenzgang hat dann die Form

$$\underline{H}(\Omega) = H_0 \cdot \frac{1}{1 + a_1 j\Omega + b_1 (j\Omega)^2} \cdot \frac{1}{1 + a_2 j\Omega + b_2 (j\Omega)^2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{1 + a_n j\Omega + b_n (j\Omega)^2} \quad (3-4)$$

Die Koeffizienten $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n$ sind nun so zu wählen, dass die Definitionsgleichungen für die Amplitudengänge der Standardfilter erfüllt werden.

Beispiel: Koeffizientenbestimmung für den Butterworth-Tiefpaß und $n = 1..4$

Amplitudengang: $|\underline{H}(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \Omega^{2n}} \quad \Omega = \omega/\omega_g = f/f_g$

n = 1 : $a_1 \neq 0$, alle anderen = 0

Gl.(3-4): $\underline{H}(\Omega) = \frac{1}{1 + a_1 \cdot j\Omega}$, $|\underline{H}(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + a_1^2 \cdot \Omega^2} = \frac{1}{1 + \Omega^{2 \cdot 1}} \rightarrow a_1=1$

n = 2 : $a_1, b_1 \neq 0$, alle anderen = 0

Gl.(3-4): $\underline{H}(\Omega) = \frac{1}{1 + a_1 \cdot j\Omega + b_1 \cdot (j\Omega)^2}$, $|\underline{H}(\Omega)|^2 = \frac{1}{(1 - b_1 \cdot \Omega^2)^2 + a_1^2 \cdot \Omega^2} = \frac{1}{1 + \Omega^{2 \cdot 2}}$
 $\rightarrow a_1 = \sqrt{2} ; b_1 = 1$

n = 3 : $a_1=1; b_1=1; a_2=1; b_2=0$

n = 4 : $a_1=1,848; b_1=1; a_2=0,765; b_2=1$

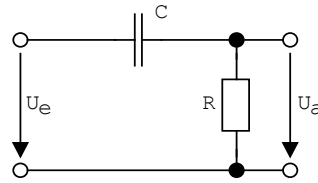
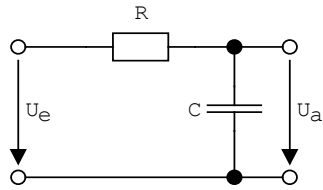
Koeffizienten der 3 Standardtiefpässe für $n = 1..4$:

Tiefpaß	n	a ₁	b ₁	a ₂	b ₂
Butterworth	1	1	0	0	0
	2	1,414	1	0	0
	3	1	1	1	0
	4	1,848	1	0,765	1
Tschebyscheff amax=3dB	1	1	0	0	0
	2	1,065	1,931	0	0
	3	0,36	1,192	3,35	0
	4	2,185	5,534	0,196	1,201
Bessel	1	1	0	0	0
	2	1,362	0,618	0	0
	3	0,999	0,477	0,756	0
	4	1,339	0,489	0,774	0,389

Die Tabelle zeigt, dass erst ab $n=2$ in den Frequenzgängen Unterschiede zu erwarten sind. Koeffizienten für Filter höherer Ordnungen finden sich in der Literatur, z.B. Tietze/Schenk, Halbleiterschaltungstechnik, Springer-Verlag

3.3 Hochpassfilter

Die Frequenzgänge von Hochpassfiltern lassen sich aus denen von Tiefpässen durch eine Frequenztransformation berechnen. Vergleicht man z.B. einen einfachen RC-Tiefpass mit einem einfachen RC-Hochpass,

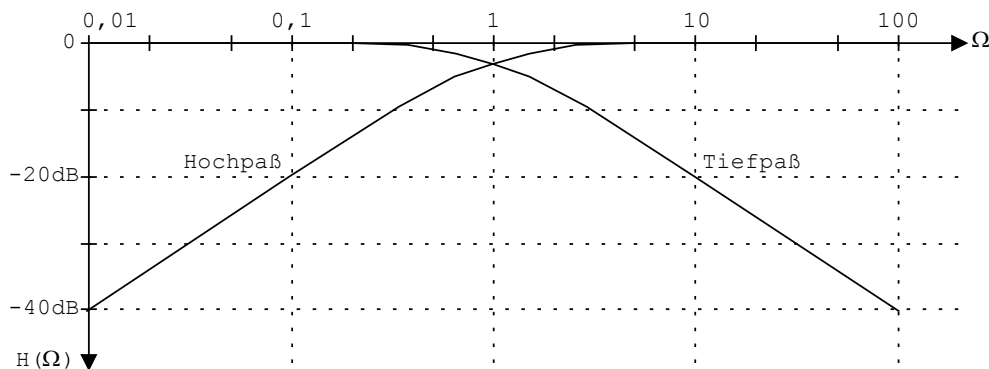


erhält man folgende Ausdrücke für die Frequenzgänge:

$$H_{TP}(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\omega_g}} = \frac{1}{1 + j\Omega}$$

$$H_{HP}(\omega) = \frac{1}{1 + \frac{1}{j\omega RC}} = \frac{1}{1 + \frac{\omega_g}{j\omega}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{j\Omega}}$$

Den Frequenzgang des Hochpasses erhält man aus dem des Tiefpasses durch Ersatz von $j\Omega$ durch $1/(j\Omega)$. In der Darstellung der Frequenzgänge in doppeltlogarithmischer Darstellung zeigt sich, dass der Frequenzgang des Hochpasses aus dem des Tiefpasses durch Spiegelung an der Achse $\Omega=1$ bzw. bei $\omega=\omega_g$ entsteht. Das entspricht dem Ersatz der normierten Variablen $j\Omega$ durch $1/(j\Omega)$.



Mit der Tiefpass-Hochpass-Transformation, $j\Omega \rightarrow 1/(j\Omega)$, erhält man für die Hochpass-Übertragungsfunktion 2. Ordnung

$$\underline{H}(\Omega) = H_0 \cdot \frac{1}{1 + \frac{a_1}{j\Omega} + \frac{b_1}{(j\Omega)^2}} = \frac{H_0}{1 + \frac{a_1 \cdot \omega_g}{j\omega} + \frac{b_1 \cdot \omega_g^2}{(j\omega)^2}} = H_0 \cdot \frac{\frac{1}{b_1 \cdot \omega_g^2} \cdot (j\omega)^2}{1 + \frac{a_1}{b_1 \cdot \omega_g} (j\omega) + \frac{1}{b_1 \cdot \omega_g^2} (j\omega)^2} \quad (3-5)$$

Gl.(3-5) ist die **Ausgangsgleichung zur Berechnung der Hochpass-Standardfilter**, wenn die Koeffiziententabelle auf S. (3-4) benutzt werden soll. Die Koeffizienten a_1 , b_1 bestimmen wieder die Form des Frequenzgangs. Der Verlauf des entsprechenden Tiefpass-Frequenzgangs erscheint an der Grenzfrequenz gespiegelt. Filter höherer Ordnung erhält man durch Kettenschaltung von Filtern 1. und 2. Ordnung.

Ebenso kann man durch ähnliche Frequenztransformationen aus dem Frequenzgang des Tiefpasses Bandpass und Bandsperre ableiten.

3.4 Aktive Filter 2. Ordnung

Bei der schaltungstechnischen Realisierung von aktiven Filtern mit Operationsverstärkern (OP) haben die Filter 2. Ordnung eine besondere Bedeutung, da sie nur einen OP benötigen. Ihre Frequenzgänge lauten in allgemeiner Form:

Tiefpass:
$$\underline{H}_{\text{TP}}(\Omega) = \frac{v_0}{1 + a_1 \cdot j\Omega + b_1 \cdot (j\Omega)^2} \quad \begin{array}{l} v_0 = \text{Verstärkung bei } \omega \rightarrow 0 \\ \Omega = \omega/\omega_g = f/f_g \end{array} \quad (3-6)$$

Hochpass:
$$\underline{H}_{\text{HP}}(\Omega) = \frac{v_\infty \cdot \frac{1}{b_1} \cdot (j\Omega)^2}{1 + \frac{a_1}{b_1} \cdot j\Omega + \frac{1}{b_1} \cdot (j\Omega)^2} \quad v_\infty = \text{Verstärkung bei } \omega \rightarrow \infty \quad (3-7)$$

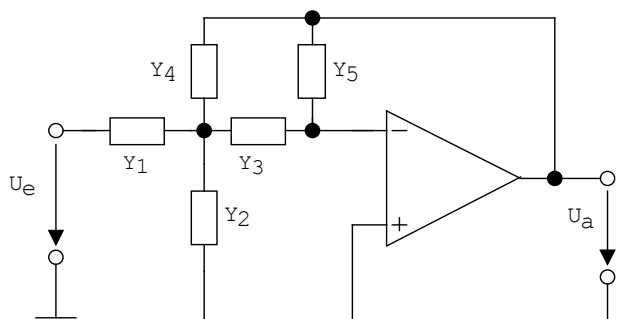
Bandpass:
$$\underline{H}_{\text{BP}}(\Omega) = \frac{v_{\text{max}} \cdot A \cdot j\Omega}{1 + A \cdot j\Omega + (j\Omega)^2} \quad v_{\text{max}} = \text{maximale Verstärkung} \quad (3-8)$$

Bandsperre:
$$\underline{H}_{\text{BS}}(\Omega) = H_0 \cdot \frac{1 + (j\Omega)^2}{1 + A \cdot j\Omega + (j\Omega)^2} \quad (3-9)$$

Die Frequenzgänge von Hoch-, Tief- und Bandpass haben ähnliche Formen. Schaltungen dieser Filter mit einem OPV haben die gleiche Grundstruktur. Der Frequenzgang der Bandsperre weist im Zähler eine Summe auf, die zur Erzielung der Nullstelle im Frequenzgang benötigt wird. Man verwendet dazu eine Brückenschaltung, die bei der Sperrfrequenz abgeglichen ist und dadurch im Frequenzgang eine Nullstelle aufweist.

Allgemeine Schaltung mit Mehrfachgegenkopplung

Tiefpass, Hochpass und Bandpass lassen sich aus einer gemeinsamen Grundschaltung mit invertierendem Verstärker entwickeln. Dazu wird die Schaltung zunächst mit 5 Admittanzen dargestellt.



Die Übertragungsfunktion mit idealem OPV lautet:

$$\frac{U_a}{U_e} = \frac{-Y_1 \cdot Y_3}{Y_5 \cdot (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4) + Y_3 \cdot Y_4} \quad (3-10)$$

Zur Verwendung als aktives Filter 2. Ordnung müssen folgende Bedingungen eingehalten werden:

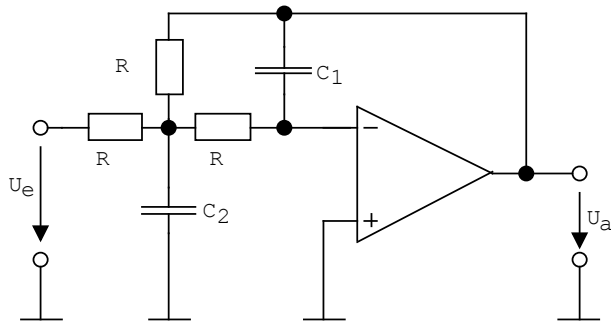
1. Alle Y sind nur Widerstände oder Kondensatoren, $Y_n = 1/R_n$ oder $Y_n = j\omega C_n$.
2. Damit die Schaltung stabil arbeitet, muss ein Gleichstrompfad vom Ausgang zum invertierenden Eingang existieren. Somit müssen Y₅ oder Y₃ und Y₄ Widerstände sein!
3. Soll die Übertragungsfunktion von 2. Ordnung sein, müssen in der Schaltung mindestens 2 Kondensatoren und 2 Widerstände enthalten sein. Somit hat die Schaltung entweder 3 Widerstände und 2 Kondensatoren oder 2 Widerstände und 3 Kondensatoren.

Zur Filterrealisierung muß Gleichung (3-10) durch Einsetzen von $1/R$ bzw. $j\omega C$ in die Leitwerte $Y_1 \dots Y_5$ in eine der Übertragungsfunktionen (3-6) ... (3-8) gebracht werden.

Aufgabe: Entwickeln Sie aus der allgemeinen Schaltung mit Mehrfachgegenkopplung Tiefpass und Hochpass und geben Sie die Übertragungsfunktionen an!

Beispiele für aktive Filter 2. Ordnung

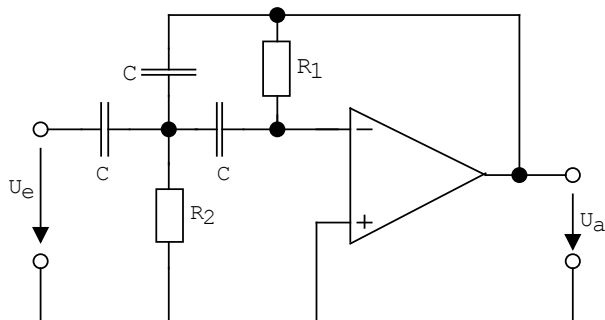
Hoch- und Tiefpässe 2. und höherer Ordnung werden als Standardfilter ausgelegt. Die Koeffizienten a und b in den Berechnungsformeln sind abhängig vom Filtertyp (siehe Tabelle S. 3-4)

a. Tiefpass mit Mehrfachgegenkopplung

$$C_1 = \frac{a}{3} \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f_g \cdot R}$$

$$C_2 = \frac{3 \cdot b}{a} \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f_g \cdot R}$$

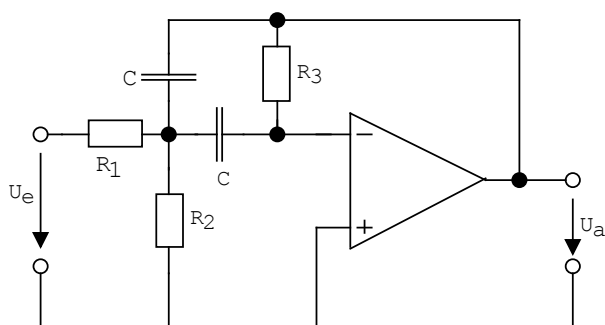
f_g =Grenzfrequenz

b. Hochpass mit Mehrfachgegenkopplung

$$R_1 = \frac{3}{a} \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f_g \cdot C}$$

$$R_2 = \frac{a}{3 \cdot b} \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f_g \cdot C}$$

f_g =Grenzfrequenz

c. Bandpass mit Mehrfachgegenkopplung

Mittenfrequenz:

$$f_m = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot C} \cdot \sqrt{\frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2 \cdot R_3}}$$

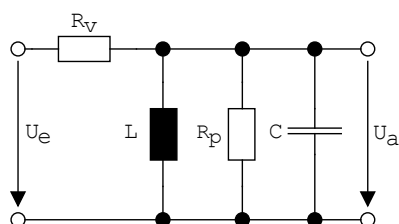
Bandbreite b:

$$b = \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot \pi \cdot C \cdot R_3}$$

max. Verstärkung (bei f_m):

$$v_{\max} = \frac{R_3}{2 \cdot R_1}$$

Vergleich: passiver LC-Bandpass



Mittenfrequenz: $f_m = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}}$

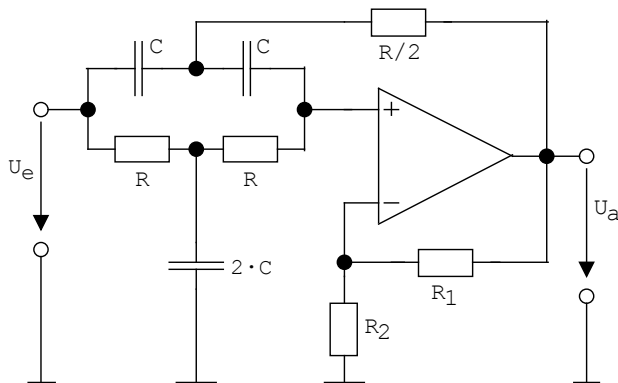
Bandbreite: $b = \frac{R_v + R_p}{2 \cdot \pi \cdot C \cdot R_v \cdot R_p}$

max. Verstärkung (bei f_m): $v_{\max} = \frac{R_p}{R_v + R_p}$

d. Bandsperre

Die Bandsperre hat eine unendlich große Sperrdämpfung bei der Sperrfrequenz. In der Praxis sind durch Bauteiletoleranzen selten größere Sperrdämpfungen als 60dB (Abschwächung 1:1000) erreichbar.

Die Verstärkung v außerhalb der Sperrfrequenz darf nur zwischen 1 und 2 liegen, sonst kommt es durch die Mitkopplung zu Instabilitäten.



Sperrfrequenz:

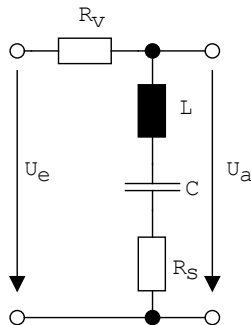
$$f_0 = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot R \cdot C}$$

Verstärkung außerhalb der Sperrfrequenz: $v = 1 + R_1/R_2 = 1..2$

Sperrbreite B:

$$B = f_0 \cdot 2 \cdot \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)$$

Vergleich: passive LC-Bandsperre („Saugkreis“)



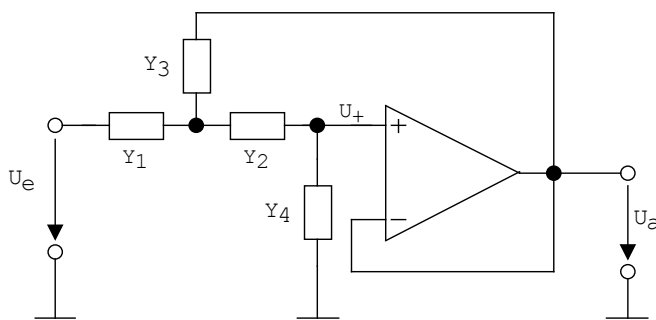
$$\text{Sperrfrequenz: } f_0 = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}}$$

$$\text{Sperrbreite B: } B = \frac{R_v + R_s}{2 \cdot \pi \cdot L}$$

$$\text{Abschwächung (bei } f_0\text{): } v_{\min} = \frac{R_s}{R_v + R_s}$$

Einfache Filterschaltung mit Mitkopplung

In der dargestellten Schaltung arbeitet der OPV als einfacher Spannungsfolger (wie ein Emitterfolger) mit der Spannungsverstärkung 1 ($U_a = U_+$). Über Y_3 und Y_2 liegt vom Ausgang zum nichtinvertierenden Eingang eine Mitkopplung vor, die aber schwächer ist als die Gegenkopplung. Dadurch arbeitet die Schaltung immer stabil.



Für die Übertragungsfunktion ergibt sich

$$\frac{U_a}{U_e} = \frac{Y_1 \cdot Y_2}{Y_1 \cdot Y_2 + Y_4 \cdot (Y_1 + Y_2 + Y_3)} \quad (3-11)$$

Wählt man $Y_1=1/R_1$, $Y_2=1/R_2$, $Y_3=j\omega C_1$, $Y_4=j\omega C_2$, erhält man als Übertragungsfunktion

$$\frac{U_a}{U_e} = \frac{1}{1 + j\omega C_2(R_1 + R_2) + (j\omega)^2 C_1 C_2 R_1 R_2} \quad (\text{Tiefpass}) \quad (3-12)$$

Vertauscht man Widerstände und Kondensatoren, also $Y_1=j\omega C_1$, $Y_2=j\omega C_2$, $Y_3=1/R_1$, $Y_4=1/R_2$, ergibt sich

$$\frac{U_a}{U_e} = \frac{(j\omega)^2 C_1 C_2 R_1 R_2}{1 + j\omega R_1(C_1 + C_2) + (j\omega)^2 C_1 C_2 R_1 R_2} \quad (\text{Hochpass}) \quad (3-13)$$

3.5 Biquad-Filter

Die bisher behandelten Filterschaltungen ließen sich entweder nur als Tiefpass, Hochpass oder Bandpass einsetzen. In ihren Übertragungsfunktionen traten nur im Nenner Potenzreihen auf. Hochpass und Bandpass besaßen zusätzlich im Zähler einen von der Frequenz linear oder quadratisch abhängigen Term.

Übertragungsfunktionen, die im Zähler und im Nenner eine Potenzreihe bis zur 2. Ordnung aufweisen, bezeichnet man als biquadratische Übertragungsfunktionen. Filter, die eine solche Übertragungsfunktion besitzen, heißen Biquadratische- oder Biquad-Filter. Ihre Übertragungsfunktion lautet in allgemeiner, normierter Form:

$$\underline{H}(\Omega) = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 \cdot j\Omega + \alpha_2 (j\Omega)^2}{1 + \beta_1 \cdot j\Omega + \beta_2 \cdot (j\Omega)^2} \quad (3-14)$$

Durch Wahl der Koeffizienten lassen sich verschiedene Übertragungsfunktionen erzeugen, z.B.

$\alpha_1, \alpha_2 = 0$: Tiefpass 2. Ordnung
 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_2 = 0$: Tiefpass 1. Ordnung
 $\alpha_0, \alpha_2, \beta_2 = 0$: Hochpass 1. Ordnung
 $\alpha_0, \alpha_1 = 0$: Hochpass 2. Ordnung
 $\alpha_0, \alpha_2 = 0$: Bandpass 2. Ordnung
 $\alpha_1 = 0$: Bandsperre 2. Ordnung

Biquad-Filter mit Integratoren

Stellt man die Übertragungsfunktion nach der Ausgangsgröße (z.B. U_a) um, erhält man mit $H(\Omega) = U_a/U_e$

$$U_a = U_e \frac{\alpha_0}{1 + \beta_1 j\Omega + \beta_2 (j\Omega)^2} + U_e \frac{\alpha_1 j\Omega}{1 + \beta_1 j\Omega + \beta_2 (j\Omega)^2} + U_e \frac{\alpha_2 (j\Omega)^2}{1 + \beta_1 j\Omega + \beta_2 (j\Omega)^2} \quad (3-15)$$

Die Ausgangsgröße ergibt sich aus der Summe von drei Teilübertragungsfunktionen, nämlich einem Tiefpass, einem Bandpass und einem Hochpass.

Die drei Teilübertragungsfunktionen der Gl. (3-15) sind an der nebenstehenden Schaltung vorhanden, die aus einem invertierenden Summierer und zwei (nicht-invertierenden) Integratoren besteht. Die Schaltung wird auch als Zustands-Variablen-Filter bezeichnet.

Die drei Ausgangsspannungen U_1 , U_2 und U_3 erhält man aus der Knotengleichung des invertierenden Eingangs des 1. Operationsverstärkers,

$$U_e/R_1 + U_1/R_2 + U_2/R_3 + U_3/R_4 = 0,$$

und den Übertragungsfunktionen der Integratoren

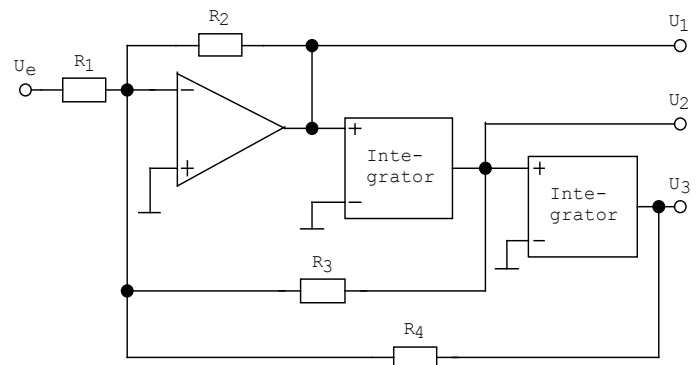
$$U_2 = \frac{U_1}{j\omega\tau}, \quad U_3 = \frac{U_2}{j\omega\tau}$$

Einsetzen und Umstellen in die Knotengleichung ergibt:

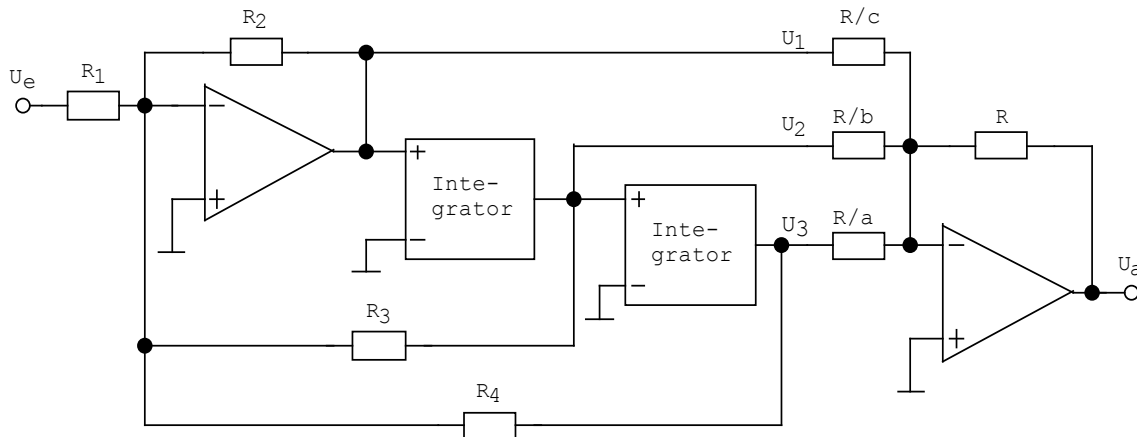
$$\frac{U_1}{U_e} = -\frac{R_4}{R_1} \cdot \frac{(j\omega\tau)^2}{1 + j\omega\tau \cdot R_4/R_3 + (j\omega\tau)^2 \cdot R_4/R_2}$$

$$\frac{U_2}{U_e} = -\frac{R_4}{R_1} \cdot \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau \cdot R_4/R_3 + (j\omega\tau)^2 \cdot R_4/R_2}$$

$$\frac{U_3}{U_e} = -\frac{R_4}{R_1} \cdot \frac{1}{1 + j\omega\tau \cdot R_4/R_3 + (j\omega\tau)^2 \cdot R_4/R_2}$$



An den 3 Ausgängen der Schaltung treten die drei Summanden der Biquad-Übertragungsfunktion auf, wobei die Koeffizienten α_0 , α_1 und α_2 noch alle gleich 1 sind. Führt man die drei Ausgänge über eine invertierende Summationsschaltung zusammen, erhält man die gesamte biquadratische Übertragungsfunktion.



Die Ausgangsspannung des Summierers ist $U_a = -(U_1 \cdot c + U_2 \cdot b + U_3 \cdot a)$

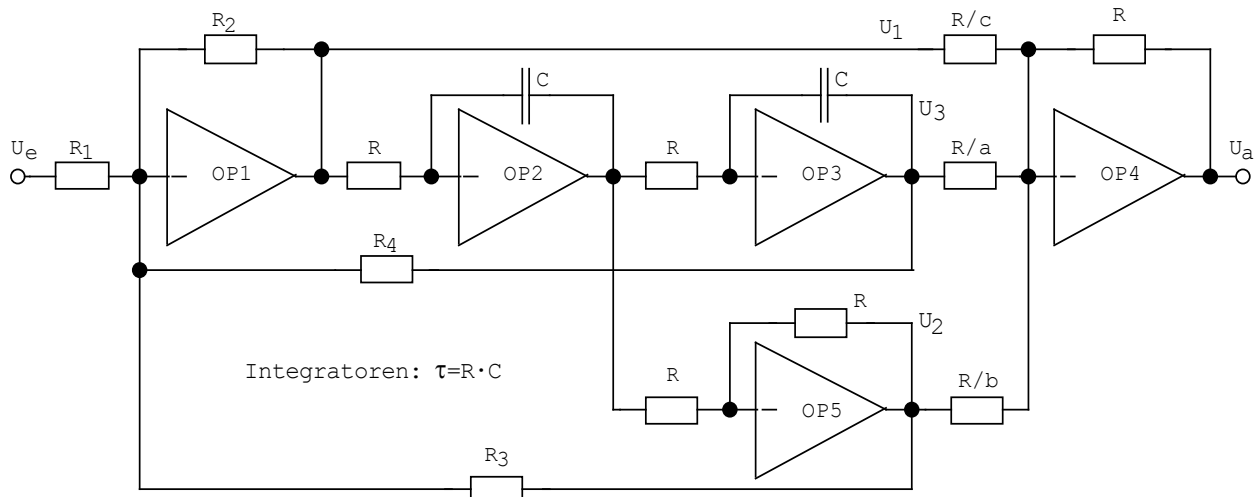
Wird zusätzlich $R_1=R_4$, dann ist

$$\frac{U_a}{U_e} = \frac{a + j\omega\tau \cdot b + (j\omega\tau)^2 \cdot c}{1 + j\omega\tau \cdot R_4/R_3 + (j\omega\tau)^2 \cdot R_4/R_e}$$

Die Schaltung stellt ein Universalfilter dar, mit dem man durch Veränderung der Widerstände alle Grundtypen von Filtern 2. Ordnung realisieren kann.

Biquad-Filter mit Operationsverstärkern

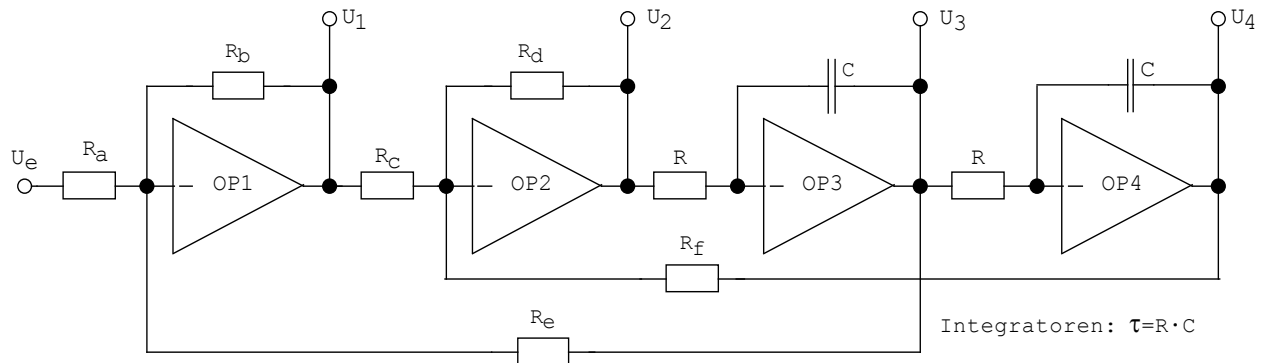
Für den Aufbau mit Operationsverstärkern ist die Verwendung von invertierenden Integratoren wesentlich einfacher. Man muss dann in die Schaltung eine zusätzliche invertierende Verstärkerstufe einfügen, damit die Phasenbeziehungen stimmen.



Die dargestellte Schaltung hat dieselbe Funktion wie die vorherige. In ihr werden alle Operationsverstärker in invertierender Grundschialtung als Verstärker oder Integrator betrieben. Zur Übersichtlichkeit sind die nichtinvertierenden Eingänge fortgelassen, in der Schaltung liegen sie alle auf Nullpotential. Die Ausgangsspannung des ersten Integrators mit OP2 wird durch OP5 invertiert und dann auf OP1 zurückgeführt bzw. auf den Ausgangssummierer OP4 gegeben. Die Ausgangsspannung des 2. Integrators braucht nicht invertiert zu werden, da er von OP2 schon eine invertierte Eingangsspannung erhält.

3.6 Universalfilter mit 4 Operationsverstärkern

Grundsätzlich benötigt man für Biquads 2 Integratoren. Lässt man in der letzten Schaltung den Umkehraddierer mit OP4 weg und speist das Eingangssignal an OP5 ein, dann erhält man die folgende Schaltung mit nur 4 Operationsverstärkern. An ihren Ausgängen tritt hinsichtlich der Eingangsspannung U_e voneinander getrennt das Übertragungsverhalten von Tiefpass, Hochpass, Bandpass und Bandsperre auf.



Aus den Teilübertragungsfunktionen der invertierenden Grundsaltung,

$$U_1 = -U_e \cdot \frac{R_b}{R_a} - U_3 \cdot \frac{R_b}{R_e}$$

$$U_2 = -U_1 \cdot \frac{R_d}{R_c} - U_4 \cdot \frac{R_d}{R_f}$$

$$U_3 = -\frac{U_2}{j\omega\tau}$$

$$U_4 = -\frac{U_3}{j\omega\tau}$$

ergibt sich

$$\frac{U_1}{U_e} = -\frac{R_b}{R_a} \cdot \frac{1 + \frac{R_f}{R_d} \cdot (j\omega\tau)^2}{1 + \frac{R_b R_f}{R_c R_e} \cdot (j\omega\tau) + \frac{R_f}{R_d} \cdot (j\omega\tau)^2} \quad (\text{Bandsperre})$$

$$\frac{U_2}{U_e} = \frac{R_b R_f}{R_a R_c} \cdot \frac{(j\omega\tau)^2}{1 + \frac{R_b R_f}{R_c R_e} \cdot (j\omega\tau) + \frac{R_f}{R_d} \cdot (j\omega\tau)^2} \quad (\text{Hochpass})$$

$$\frac{U_3}{U_e} = -\frac{R_b R_f}{R_a R_c} \cdot \frac{(j\omega\tau)}{1 + \frac{R_b R_f}{R_c R_e} \cdot (j\omega\tau) + \frac{R_f}{R_d} \cdot (j\omega\tau)^2} \quad (\text{Bandpass})$$

$$\frac{U_4}{U_e} = \frac{R_b R_f}{R_a R_c} \cdot \frac{1}{1 + \frac{R_b R_f}{R_c R_e} \cdot (j\omega\tau) + \frac{R_f}{R_d} \cdot (j\omega\tau)^2} \quad (\text{Tiefpass})$$

4. Verzerrungen

4.1 Lineare und nichtlineare Verzerrungen

Das Übertragungsverhalten eines linearen Systems wird mit der komplexen Übertragungsfunktion

$$\underline{H}(f) = |\underline{H}(f)| \cdot e^{j\varphi(f)} \quad (4-1)$$

beschrieben, wobei $|\underline{H}(f)|$ den Betragsfrequenzgang und $\varphi(f)$ den Phasengang angibt.

Bei einem **verzerrungsfreien Übertragungssystem** ist das Ausgangssignal $y(t)$ ein getreues Abbild des Eingangssignals $x(t)$: $y(t) = H_0 \cdot x(t - \tau)$

mit H_0 =konstante Amplitudenbewertung, τ =konstante Verzögerung

Eine Transformation der Gleichung in den Frequenzbereich ergibt mit Anwendung des Verschiebungssatzes

$$\underline{Y}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \cdot e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} H_0 \cdot x(t - \tau) \cdot e^{-j2\pi f t} dt = \dots = H_0 \cdot e^{-j2\pi f \tau} \cdot \underline{X}(f)$$

Daraus erhält man den Frequenzgang des verzerrungsfreien Übertragungssystems,

$$\underline{H}(f) = \frac{\underline{Y}(f)}{\underline{X}(f)} = H_0 \cdot e^{-j2\pi f \tau},$$

mit konstantem Amplitudengang $|\underline{H}(f)| = H_0$ und linearem Phasengang $\varphi(f) = -2\pi f \tau$.

Mit der Definition der **Gruppenlaufzeit**,

$$\tau_{gr}(f) = - \frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = - \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d\varphi(f)}{df},$$

erhält man aus dem Phasengang des verzerrungsfreien Übertragungssystems wieder eine konstante Laufzeit, $\tau_{gr}(f) = \tau$.

Eine Änderung der Gruppenlaufzeit mit der Frequenz bedeutet, dass unterschiedliche Frequenzanteile in einem Signal zu unterschiedlichen Zeiten am Ausgang auftreten. Die Folge ist z.B. Überspringen bei der Übertragung von Rechteckimpulsen.

Auswirkung der Gruppenlaufzeit bei der Sprachübertragung:

Laufzeitunterschied	1..2 msec	10..15 msec	15..30 msec	> 50 msec
Wirkung	natürliche Sprache	kaum merkbar	verringerte Silbenverständlichkeit	schlechte Verständlichkeit

Lineare Verzerrungen liegen vor, wenn $|\underline{H}(f)|$ frequenzabhängig ist und wenn sich $\varphi(f)$ nicht linear mit der Frequenz verändert.

Lineare Systeme sind sinustreu: wird ein lineares System mit sinusförmiger Schwingung angeregt, dann wird die Kurvenform durch die linearen Verzerrungen nicht verändert, sondern nur ihre Amplitude und Phasenlage.

Bei Anregung mit nichtsinusförmigen, periodischen Signalen, z.B. mit Rechteckimpulsen, findet eine Veränderung der Kurvenform statt. Alle nichtsinusförmigen, periodischen Signale lassen sich in eine Summe von Sinusschwingungen zerlegen. Das lineare System bewertet mit $|\underline{H}(f)|$ die einzelnen Spektralanteile in ihrer Amplitude und verschiebt mit $\varphi(f)$ ihre Phasenlage zueinander. Dadurch verändert sich die Kurvenform.

Bei Systemuntersuchungen verwendet man häufig Rechteckimpulse. Werden die Rechteckimpulse unverzerrt übertragen, hat das System Breitbandverhalten (vgl. Oszilloskop-Tastkopf). Aus dem Anstiegsverhalten lässt sich die obere Grenzfrequenz abschätzen und aus den Impulsdach-Verläufen das Gleichstrom-Übertragungsverhalten.

Nichtlineare Verzerrungen treten bei Systemen mit nichtlinearer Übertragungskennlinie auf. In Verstärkerschaltungen muss bei Großsignalaussteuerung (beim Bipolartransistor ab ca. 1mV!) die Kennlinienkrümmung der Bauelemente berücksichtigt werden.

Durch die Verzerrungen findet auch bei sinusförmiger Ansteuerung eine Veränderung der Kurvenform statt. Dadurch enthält das Ausgangssignal des Systems zusätzliche, neue Frequenzanteile, die im Eingangssignal nicht enthalten waren.

Nichtlineare Verzerrungen in Verstärkern lassen sich durch Gegenkopplung verringern.

4.2 Nichtlineare Verzerrungsmaße

Wird ein Verstärker mit nichtlinearer Übertragungskennlinie mit einer oder mehreren Frequenzen angesteuert, entstehen am Ausgang neben den Eingangsfrequenzen zusätzliche neue Frequenzen, die meistens unerwünscht sind (Ausnahmen: Frequenzmischung, Modulation).

Aus ihren Amplituden lassen sich Maße für die nichtlinearen Verzerrungen ableiten.

Unterscheidungen:

1. Aussteuerung mit einer Frequenz (Eintonaussteuerung): Erzeugung von Oberschwingungen, Beschreibung der Verzerrung mit dem Klirrfaktor

2. Aussteuerung mit zwei Frequenzen: Erzeugung von Oberschwingungen und Kombinationsfrequenzen, i.a. $|m \cdot f_1 \pm n \cdot f_2|$; Beschreibung der Verzerrung mit dem Intermodulationsfaktor (Elektroakustik) bzw. dem Intercept-Point (HF-Technik).

3. Aussteuerung mit drei oder mehr Frequenzen (bei Systemen, die modulierte Schwingungen übertragen; z.B. AM: 3 Frequenzen); Beschreibung der Verzerrung mit dem Kreuzmodulationsfaktor (Aussteuerung mit einer unmodulierten und einer modulierten Schwingung) oder der Modulationsverzerrung (Aussteuerung mit einer modulierten Schwingung).

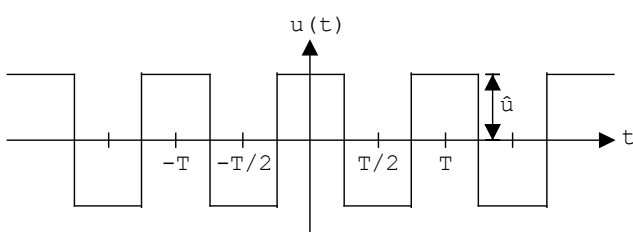
4.3 Klirrfaktor k

Definition des Klirrfaktors: $k = \frac{\text{Effektivwert aller Oberschwingungen}}{\text{Effektivwert der Gesamtschwingung}^*}$
*ohne Gleichanteil

$$k = \frac{\sqrt{Y_2^2 + Y_3^2 + Y_4^2 + \dots}}{\sqrt{Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 + \dots}} = \frac{\sqrt{\sum_{i=2}^{\infty} Y_i^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} Y_i^2}} \times 100 \text{ in } \% \quad (4-2)$$

$$\text{Teilkirrfaktor: } k_i = \frac{Y_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} Y_i^2}} \times 100 \text{ in } \% \quad (4-3)$$

Beispiel: Klirrfaktor einer Rechteckspannung mit 50% Tastgrad



Fourier-Reihe der Rechteckspannung:

$$u(t) = \frac{4\hat{u}}{\pi} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \cos(2n+1)\omega t}{2n+1}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$= \frac{4\hat{u}}{\pi} \cdot \left[\cos(\omega t) - \frac{1}{3} \cos(3\omega t) + \frac{1}{5} \cos(5\omega t) - \frac{1}{7} \cos(7\omega t) + \dots \right] \quad (4-4)$$

Im Spektrum treten nur ungeradzahlige Harmonische auf.

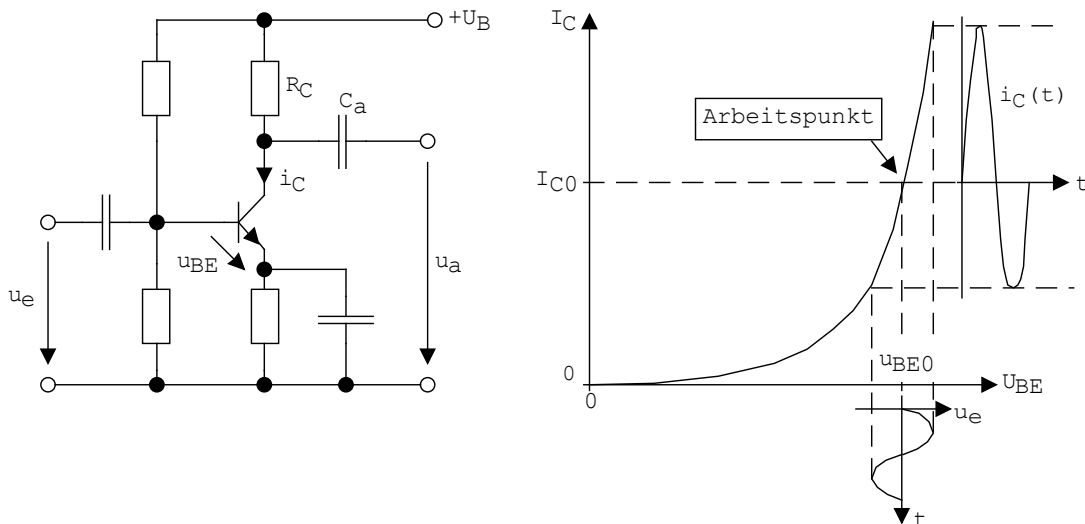
Die Berechnung des Klirrfaktors nach der Definitionsgleichung ist aufwendig, da die Amplitude der Harmonischen nur langsam abnimmt und viele Glieder berücksichtigt werden müssten.

Eine Umformung der Definitionsgleichung liefert

$$k = \sqrt{\frac{\sum_{i=2}^{\infty} U_i^2}{U_{ges}^2}} = \sqrt{1 - \frac{U_1^2}{U_{ges}^2}} \quad (4-5)$$

$$U_1^2 = \frac{\hat{u}_1^2}{2} = \frac{8\hat{u}^2}{\pi^2}, \quad U_{ges}^2 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u^2(t) dt = \hat{u}^2 \quad -> \quad k_R = \sqrt{1 - 8/\pi^2} \approx 0,435 = 43,5\%$$

Beispiel: Klirrfaktor eines Transistorverstärkers in Emitterschaltung



Für die Übertragungskennlinie gilt mit $U_{BE} = U_{BE0} + u_e(t)$:

$$I_C = I_S \cdot e^{U_{BE}/U_T} = I_S \cdot e^{(U_{BE0} + u_e(t))/U_T} = I_S \cdot e^{U_{BE0}/U_T} \cdot e^{u_e(t)/U_T} = I_{C0} \cdot e^{u_e(t)/U_T} \quad (4-6)$$

Die e-Funktion kann in eine Potenzreihe entwickelt werden (z.B. über die Taylor-Reihe):

$$e^{u_e(t)/U_T} = 1 + \frac{u_e(t)}{U_T} + \frac{u_e^2(t)}{2 \cdot U_T^2} + \frac{u_e^3(t)}{6 \cdot U_T^3} + \dots + \frac{u_e^n(t)}{n! \cdot U_T^n} + \dots$$

Bei sinusförmiger Ansteuerung ist $u_e(t) = \hat{u}_e \cdot \cos(\omega_e t)$

Für die praktische Berechnung wird hier die Reihe nach dem 4. Glied abgebrochen.

$$i_C(t) = I_{C0} \cdot \left(1 + \frac{\hat{u}_e \cdot \cos(\omega_e t)}{U_T} + \frac{\hat{u}_e^2 \cdot \cos^2(\omega_e t)}{2 \cdot U_T^2} + \frac{\hat{u}_e^3 \cdot \cos^3(\omega_e t)}{6 \cdot U_T^3} \right) \quad (4-7)$$

Nach der Zerlegung der cos-Glieder höherer Ordnung und der Zusammenfassung gleicher Frequenzkomponenten erhält man

$$\begin{aligned}
 i_C(t) &= I_{C0} \cdot \left(1 + \frac{\hat{u}_e^2}{4 \cdot U_T^2} \right) && \text{(Gleichanteil)} \\
 &+ I_{C0} \cdot \left(\frac{\hat{u}_e}{U_T} + \frac{3 \cdot \hat{u}_e^3}{24 \cdot U_T^3} \right) \cdot \cos(\omega_e t) && \text{(Grundschiwingung)} \\
 &+ I_{C0} \cdot \frac{\hat{u}_e^2}{4 \cdot U_T^2} \cdot \cos(2\omega_e t) && \text{(1. Oberschiwingung)} \\
 &+ I_{C0} \cdot \frac{\hat{u}_e^3}{24 \cdot U_T^2} \cdot \cos(3\omega_e t) && \text{(2. Oberschiwingung)}
 \end{aligned}$$

Der Kollektorstrom ist verzerrt und periodisch. Sein Spektrum enthält einen Gleichanteil (\approx Arbeitspunkt I_{C0}) und ganzzahlig Vielfache der Eingangsfrequenz. Bei Kennlinien, die als Potenzreihe n. Ordnung beschrieben werden und mit sinusförmigen Spannungen angesteuert werden, treten im Ausgangssignal Spektrallinien bis zur n. Harmonischen bzw. (n-1). Oberschiwingung auf.

Die Ausgangsspannung ist der vom Gleichanteil befreite Wechselanteil von U_C . Mit $u_C(t) = U_B - R_C \cdot i_C(t)$ erhält man

$$\begin{aligned}
 u_a(t) &= -R_C \cdot I_{C0} \cdot \left(\frac{\hat{u}_e}{U_T} + \frac{3 \cdot \hat{u}_e^3}{24 \cdot U_T^3} \right) \cdot \cos(\omega_e t) \\
 &- R_C \cdot I_{C0} \cdot \frac{\hat{u}_e^2}{4 \cdot U_T^2} \cdot \cos(2\omega_e t) \\
 &- R_C \cdot I_{C0} \cdot \frac{\hat{u}_e^3}{24 \cdot U_T^2} \cdot \cos(3\omega_e t)
 \end{aligned}$$

Frequenzkomponenten der Ausgangsspannung:

$$\begin{aligned}
 \hat{u}_{a1} &= -R_C \cdot I_{C0} \cdot \left(\frac{\hat{u}_e}{U_T} + \frac{3 \cdot \hat{u}_e^3}{24 \cdot U_T^3} \right) \\
 \hat{u}_{a2} &= -R_C \cdot I_{C0} \cdot \frac{\hat{u}_e^2}{4 \cdot U_T^2} \quad \text{(2. Harmonische)} \\
 \hat{u}_{a3} &= -R_C \cdot I_{C0} \cdot \frac{\hat{u}_e^3}{24 \cdot U_T^2} \quad \text{(3. Harmonische)}
 \end{aligned}$$

Bei nicht zu starker Aussteuerung ist $\hat{u}_{ages} \approx \hat{u}_a$ und man erhält für die Teilklirrfaktoren

$$k_2 = \frac{\hat{u}_{a2}}{\hat{u}_{ages}} \approx \frac{\hat{u}_e}{4U_T}, \quad k_3 = \frac{\hat{u}_{a3}}{\hat{u}_{ages}} \approx \frac{\hat{u}_e^2}{24U_T^2} \quad (4-8)$$

Schon bei kleinen Eingangsspannungen werden relativ große Klirrfaktoren erreicht; z.B. $\hat{u}_e = 10\text{mV}$: $k_2 = 9,6\%$ und $k_3 = 0,6\%$

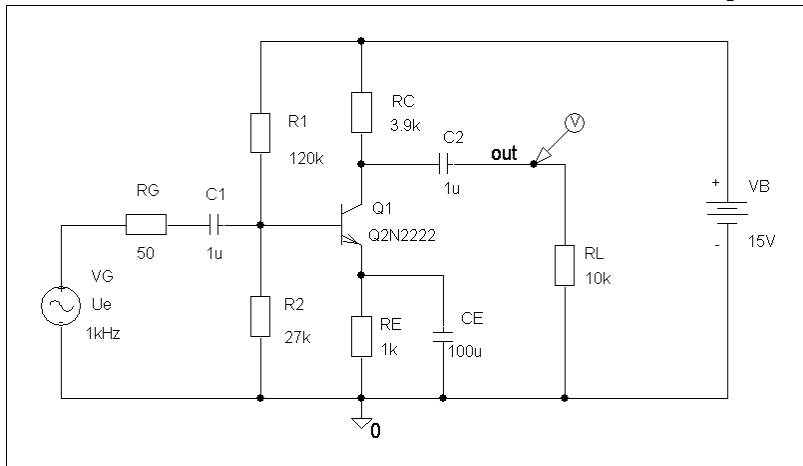
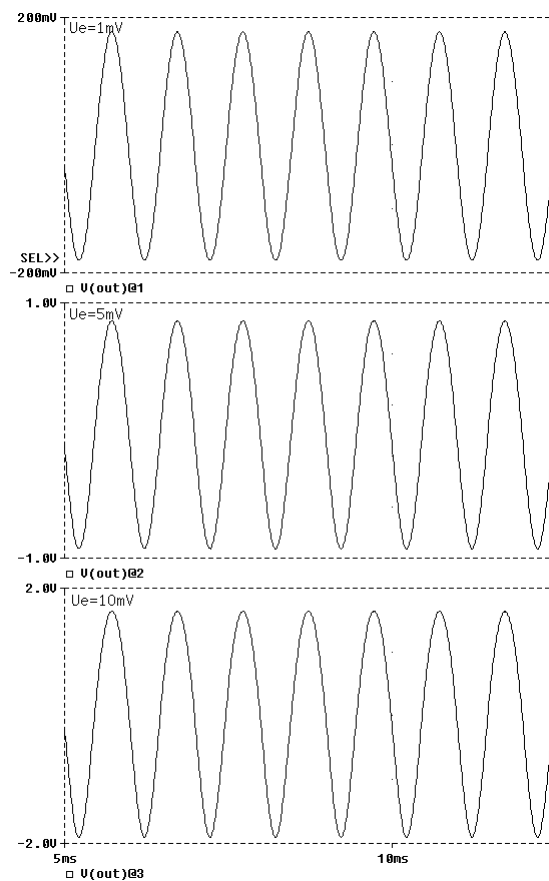
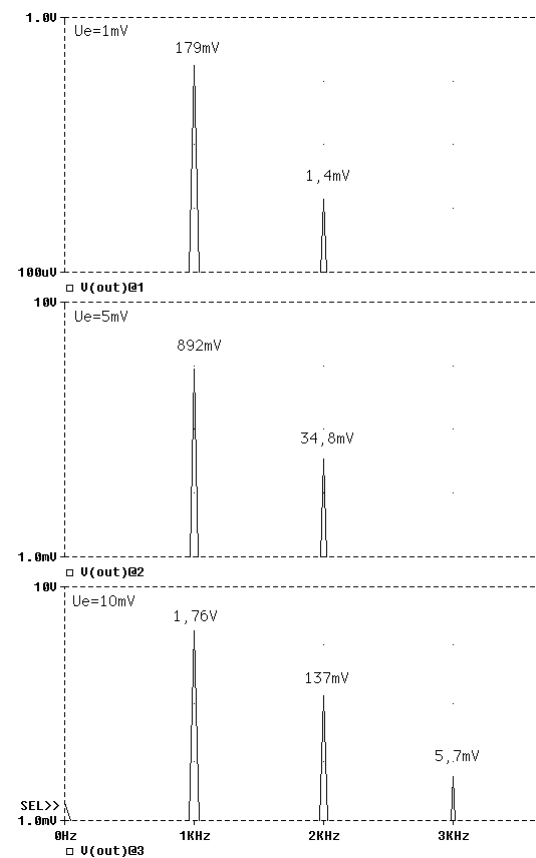
Bei einer Eingangsspannung von $\hat{u}_e = 1\text{mV}$ hat die Emitterschaltung einen Klirrfaktor von ca. 1%.

Für hochwertige Verstärker ist der Klirrfaktor zu groß!

Er lässt sich verringern durch

- Gegenkopplung (senkt gleichzeitig die Verstärkung)
- Verwendung von Feldeffekttransistoren (quadratische Übertragungskennlinie)
- Verwendung von Differenzverstärkern (spiegelsymmetrische Übertragungskennlinie, $k_2 \rightarrow 0$)

Simulation eines Transistorverstärkers mit PSpice

Ausgangsspannungen bei $U_e=1\text{mV}$, 5mV , 10mV Ausgangsspektren bei $U_e=1\text{mV}$, 5mV , 10mV 

Klirrfaktoren

$$U_e=1\text{mV}: k = \frac{\sqrt{1,4^2}}{\sqrt{179^2 + 1,4^2}} = 0,0078 = 0,78\%$$

$$U_e=5\text{mV}: k = \frac{\sqrt{34,8^2}}{\sqrt{892^2 + 34,8^2}} = 0,039 = 3,9\%$$

$$U_e=10\text{mV}: k = \frac{\sqrt{137^2 + 5,7^2}}{\sqrt{1760^2 + 137^2 + 5,7^2}} = 0,0777 = 7,8\%$$

4.4 Nichtlineare Kennlinie bei Zweitonaussteuerung

Bei der Aussteuerung mit zwei Frequenzen, f_1 und f_2 entstehen Oberschwingungen $n \cdot f_1$ und $m \cdot f_2$ sowie Kombinationsfrequenzen $|p \cdot f_1 \pm q \cdot f_2|$.

Beispiel: Ansteuerung eines Bipolartransistors mit zwei Frequenzen

Transistor: $I_C = I_S \cdot e^{U_{BE} / U_T}$

mit $U_{BE} = U_{BE0} + u_e(t)$,

$I_S \cdot e^{U_{BE0} / U_T} = I_{C0}$

und $u_e(t) = u_1(t) + u_2(t)$

erhält man $I_C = I_{C0} \cdot e^{\frac{u_1(t) + u_2(t)}{U_T}}$

$I_{C0} = \text{Arbeitspunkt}$

Näherung der e-Funktion als Potenzreihe 3. Ordnung: $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$

Für den Kollektorstrom ergibt sich dann

$$i_C(t) \approx I_{C0} \cdot \left(1 + \frac{u_1(t) + u_2(t)}{U_T} + \frac{(u_1(t) + u_2(t))^2}{2 \cdot U_T^2} + \frac{(u_1(t) + u_2(t))^3}{6 \cdot U_T^3} \right) \quad (4-9)$$

Durch Einsetzen von $u_1(t) = \hat{u}_1 \cdot \cos \omega_1 t$, $u_2(t) = \hat{u}_2 \cdot \cos \omega_2 t$

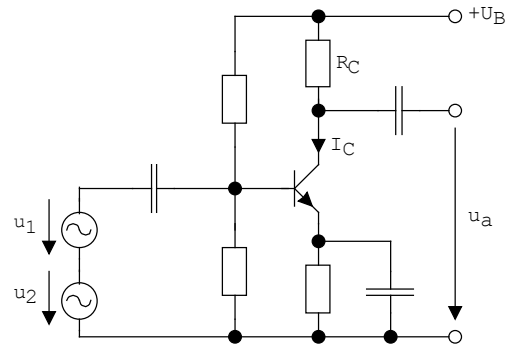
erhält man nach der Ausrechnung und Zusammenfassung von Summanden mit gleicher Frequenz einen Ausdruck mit 13 Spektralanteilen:

$$\begin{aligned} i_C(t) = & I_{C0} \cdot \left(1 + \frac{\hat{u}_1^2}{4U_T^2} + \frac{\hat{u}_2^2}{4U_T^2} \right) \\ & + I_{C0} \cdot \left(\frac{\hat{u}_1}{U_T} + \frac{\hat{u}_1^3}{8U_T^3} + \frac{\hat{u}_1 \cdot \hat{u}_2^2}{4U_T^3} \right) \cdot \cos \omega_1 t \\ & + I_{C0} \cdot \left(\frac{\hat{u}_2}{U_T} + \frac{\hat{u}_2^3}{8U_T^3} + \frac{\hat{u}_1^2 \cdot \hat{u}_2}{4U_T^3} \right) \cdot \cos \omega_2 t \\ & + I_{C0} \cdot \frac{\hat{u}_1^2}{4U_T^2} \cdot \cos 2\omega_1 t \\ & + I_{C0} \cdot \frac{\hat{u}_2^2}{4U_T^2} \cdot \cos 2\omega_2 t \\ & + I_{C0} \cdot \frac{\hat{u}_1^3}{24U_T^2} \cdot \cos 3\omega_1 t \\ & + I_{C0} \cdot \frac{\hat{u}_2^3}{24U_T^2} \cdot \cos 3\omega_2 t \\ & + I_{C0} \cdot \frac{\hat{u}_1 \cdot \hat{u}_2}{2U_T^2} \cdot \cos(\omega_1 + \omega_2)t \quad (1) \\ & + I_{C0} \cdot \frac{\hat{u}_1 \cdot \hat{u}_2}{2U_T^2} \cdot \cos(\omega_1 - \omega_2)t \quad (2) \\ & + I_{C0} \cdot \frac{\hat{u}_1^2 \cdot \hat{u}_2}{8U_T^3} \cdot \cos(2\omega_1 + \omega_2)t \quad (3) \\ & + I_{C0} \cdot \frac{\hat{u}_1^2 \cdot \hat{u}_2}{8U_T^3} \cdot \cos(2\omega_1 - \omega_2)t \quad (4) \\ & + I_{C0} \cdot \frac{\hat{u}_1 \cdot \hat{u}_2^2}{8U_T^3} \cdot \cos(2\omega_2 + \omega_1)t \quad (5) \\ & + I_{C0} \cdot \frac{\hat{u}_1 \cdot \hat{u}_2^2}{8U_T^3} \cdot \cos(2\omega_2 - \omega_1)t \quad (6) \end{aligned}$$

Die Terme (1) und (2) bezeichnet man als Intermodulationsprodukte 2. Ordnung (von Summanden 2. Ordnung der Potenzreihe).

Sie werden z.B. in Mischstufen zur Frequenzumsetzung ausgenutzt, wobei alle anderen Terme durch Filter auszusieben sind.

Die Terme (4) und (6) stören vor allem in HF-Verstärkern, wenn ω_1 und ω_2 dicht zusammen liegen, da sie Phantomsignale in der Nähe von ω_1 und ω_2 erzeugen. Sie sind, zusammen mit den Termen (3) und (5), die Intermodulationsprodukte 3. Ordnung.

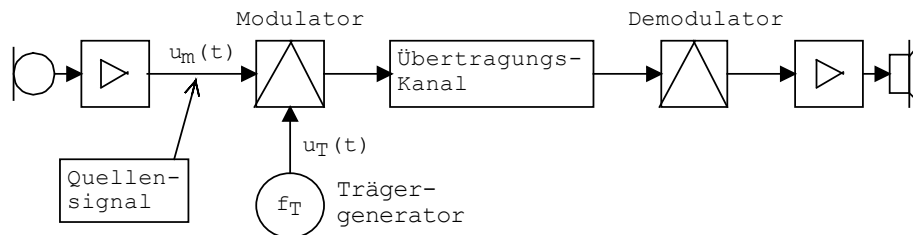


5. Modulation und Mischung

Modulation: Aufprägen eines Signals (Information) auf eine Trägergröße

(Frequenz-)Mischung: Multiplikation eines Signals (Zeitfunktion) mit einer harmonischen Schwingung.

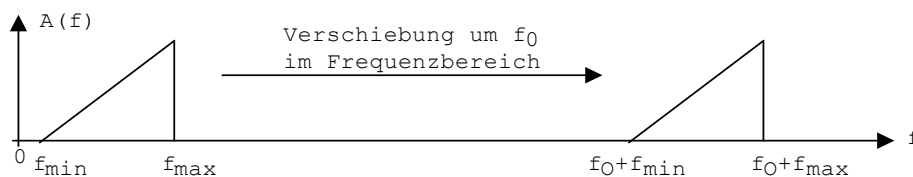
Bei der Modulation wird ein Signalparameter einer Trägerschwingung durch ein Modulationssignal (Information) verändert. In den meisten Modulationssystemen wird dabei das Quellensignal im Basisband-Frequenzbereich in einen anderen, i.a. höher liegenden Frequenzbereich umgesetzt. Die Veränderung der Trägerschwingung findet im Modulator statt.



Die Mischung von Frequenzen wird angewendet, um das Spektrum eines Signals im Frequenzbereich zu verschieben.

Aufwärtsmischung: Verschiebung eines Signalspektrums zu höheren Frequenzlagen

Abwärtsmischung: Verschiebung eines Signalspektrums zu niedrigeren Frequenzlagen



Nach dem Verschiebesatz muss für eine Verschiebung um f_0 das Signal mit einem komplexen Drehzeiger mit der Frequenz f_0 multipliziert werden. In analoger Schaltungstechnik wird meist nur eine reelle Multiplikation durchgeführt, wodurch das Spektrum des aufwärtsgemischten Signals ein zusätzliches Spiegelbild unterhalb von f_0 aufweist.

Bei Aufwärtsmischung und Modulation verfolgt man ähnliche Ziele, nämlich die Übertragung von Signalen in anderen Frequenzlagen. Während bei der Mischung das Signalspektrum nicht verändert werden darf, lediglich seine Lage, hat i.a. ein moduliertes Signal ein gegenüber dem Quellensignal geändertes Spektrum. Der Informationsgehalt bleibt aber gleich.

5.1 Modulationsarten

Die Modulationsarten werden danach unterteilt, ob das Quellensignal $u_m(t)$ in analoger oder digitaler Form vorliegt und ob der Trägergenerator mit $u_T(t)$ eine harmonische Schwingung oder ein pulsförmiges Signal abgibt.

Quellensignal	Schwingungsmodulation Träger sinusförmig	Pulsmodulation Träger pulsförmig
Analog	Amplitudenmodulation, AM Frequenzmodulation, FM Phasenmodulation, PM	Puls-Amplitudenmodulation, PAM Puls-Frequenzmodulation, PFM Puls-Phasenmodulation, PPM Puls-Dauermodulation, PDM, PWM
Digital	Amplitudenumtastung, ASK Frequenzumtastung, FSK Phasenumtastung, PSK	Puls-Codemodulation, PCM

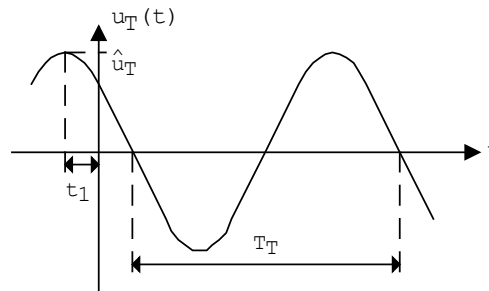
5.1.1 Schwingungsmodulation

Die Trägerschwingung hat sinusförmigen Verlauf:

$$u_T(t) = \hat{u}_T \cdot \cos(2\pi \cdot f_T \cdot t + \varphi_0) = \hat{u}_T \cdot \cos[\Phi_T(t)] \quad (5-1)$$

Die Trägerparameter sind

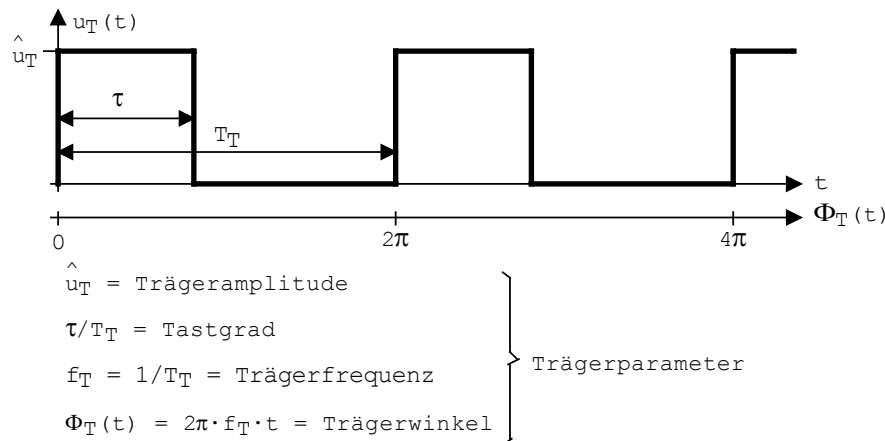
- Trägeramplitude \hat{u}_T
- Trägerfrequenz f_T
- Trägerwinkel $\Phi_T = 2\pi \cdot f_T \cdot t + \varphi_0$



Bei AM bzw. ASK wird \hat{u}_T in Abhängigkeit von $u_m(t)$ verändert,
 bei FM bzw. FSK wird f_T in Abhängigkeit von $u_m(t)$ verändert,
 bei PM bzw. PSK wird Φ_T in Abhängigkeit von $u_m(t)$ verändert.

5.1.2 Pulsmodulation

Die Trägerschwingung $u_T(t)$ hat rechteckförmigen Verlauf:



Ist das Quellensignal $u_m(t)$ ein analoges Signal,

dann wird bei PAM \hat{u}_T in Abhängigkeit von $u_m(t)$ verändert,
 bei PFM f_T in Abhängigkeit von $u_m(t)$ verändert,
 bei PPM Φ_T in Abhängigkeit von $u_m(t)$ verändert
 und bei PDM τ in Abhängigkeit von $u_m(t)$ verändert.

Wenn das Quellensignal $u_m(t)$ ein digitales Signal ist, das durch periodische Abtastung und Quantisierung entstanden ist, kann es als serielles Datensignal übertragen werden. Wird es periodisch (z.B. als 8-bit-Muster) innerhalb einer Pulsperiode T_T übertragen, liegt ein PCM-Signal vor. Das Signal befindet sich aber immer noch im Basisband-Frequenzbereich, die Puls-Trägerfrequenz f_T ist dann gleich der Abtastfrequenz.

5.2 Amplitudenmodulation

Die Trägeramplitude \hat{u}_T wird durch das Modulationssignal $u_m(t)$ verändert. Für den Demodulationsvorgang ist es wichtig, dass für $u_m(t)=0$ auch noch eine Trägerschwingung erzeugt wird (gewöhnliche AM).

Von der Trägerschwingung $u_T(t) = \hat{u}_T \cdot \cos \Omega_T t$ wird somit die Amplitude \hat{u}_T im Modulator durch $u_m(t)$ verändert, somit wird aus \hat{u}_T eine Zeitfunktion $\hat{u}_T \cdot (1 + C \cdot u_m(t))$

Zeitfunktion des AM-Signals

Bei einem sinusförmigen Modulationssignal $u_m(t) = \hat{u}_m \cdot \cos \omega_m t$ erhält man

$$\begin{aligned} u_{AM}(t) &= \hat{u}_T \cdot (1 + C \cdot u_m(t)) \cdot \cos \Omega_T t \\ &= \hat{u}_T \cdot \cos \Omega_T t \cdot (1 + C \cdot \hat{u}_m \cdot \cos \omega_m t) \\ &= \hat{u}_T \cdot \cos \Omega_T t \cdot (1 + m \cdot \cos \omega_m t) \end{aligned} \quad (5-2)$$

mit $C = \text{Modulatorkonstante}$ und $C \cdot \hat{u}_m = m$, Modulationsgrad

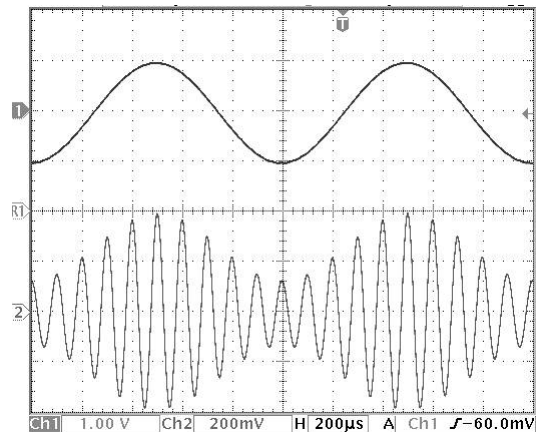
Der Modulationsgrad darf nur Werte zwischen 0 (unmodulierte Schwingung) und 1 annehmen.

Beispiel: AM-Signal, $m=50\%$, sinusförmiges Modulationssignal, $f_m=1\text{kHz}$, Trägerfrequenz 10kHz

Oben: Modulationssignal
Unten: AM-Schwingung

Bei Modulation verändert sich der Scheitelwert der AM-Schwingung. Er schwankt zwischen $\hat{u}_T \cdot (1 + m)$ und $\hat{u}_T \cdot (1 - m)$.

Für $m=1$ steigt der maximale Scheitelwert auf $2 \cdot \hat{u}_T$ an.



Spektrum des AM-Signals

Das Frequenzspektrum der AM-Schwingung ergibt sich aus

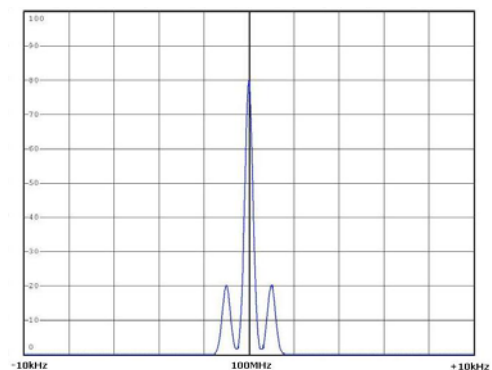
$$\begin{aligned} u_{AM}(t) &= \hat{u}_T \cdot \cos \Omega_T t \cdot (1 + m \cdot \cos \omega_m t) \\ &= \hat{u}_T \cdot \cos \Omega_T t + \frac{m \cdot \hat{u}_T}{2} \cdot \cos(\Omega_T + \omega_m)t + \frac{m \cdot \hat{u}_T}{2} \cdot \cos(\Omega_T - \omega_m)t \end{aligned} \quad (5-3)$$

Es enthält drei Komponenten:

1. $\hat{u}_T \cdot \cos \omega_T t$ Trägerfrequenz
2. $\hat{u}_T \cdot m/2 \cdot \cos(\Omega_T + \omega_m)t$ obere Seitenfrequenz
3. $\hat{u}_T \cdot m/2 \cdot \cos(\Omega_T - \omega_m)t$ untere Seitenfrequenz

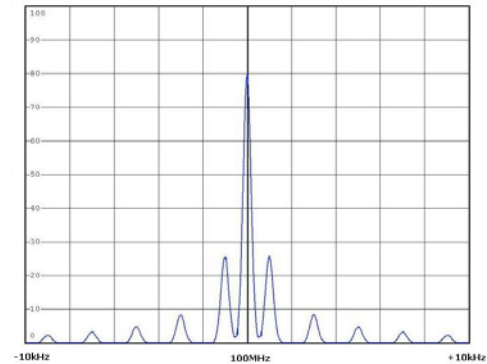
Beispiel: AM-Signal, $m=50\%$, sinusförmiges Modulationssignal, $f_m=1\text{kHz}$, $f_T=100\text{MHz}$
Darstellung: lineare Amplitudenskala, Mittenfrequenz 100MHz , SPAN 20kHz , RBW 300Hz

Aus dem Spektrum ist ersichtlich, dass durch den Modulationsvorgang das Basisbandsignal im Frequenzbereich verschoben wird und links und rechts des Trägers erscheint.



Beispiel: AM-Signal, $m=50\%$, rechteckförmiges Modulationssignal mit Tastgrad 0,5; $f_m=1\text{kHz}$
 Darstellung: lineare Amplitudenskala, Mittenfrequenz 100MHz, SPAN 20kHz, RBW 300Hz

Besteht das Modulationssignal aus einem ausge dehnten Frequenzspektrum, dann erscheint es links und rechts des Trägers in Kehrlage und Regellage als unteres und oberes Seitenband. Die benötigte Bandbreite eines AM-Signals ist doppelt so groß wie die Bandbreite des Basisbandsignals.



Spektrale Leistungsverteilung der AM-Schwingung

Die betrachteten Schwingungen sind entweder Ströme oder Spannungen. Hier wird auf die Spannungen Bezug genommen, wobei $P = U_{\text{eff}}^2 / R$ gilt.

	Amplitude	Effektivwert	Leistung
Träger	\hat{u}_T	$\frac{\hat{u}_T}{\sqrt{2}}$	$\frac{(\hat{u}_T)^2}{2R}$
ein Seitenband	$\frac{m \cdot \hat{u}_T}{2}$	$\frac{m \cdot \hat{u}_T}{2 \cdot \sqrt{2}}$	$\frac{m^2 \cdot \hat{u}_T^2}{8R}$

Leistung der AM-Schwingung

$$P_{\text{AM}} = P_{\text{Tr}} + P_{\text{USB}} + P_{\text{OSB}}$$

$$P_{\text{AM}} = \frac{\hat{u}_T^2}{2R} + \frac{m^2 \cdot \hat{u}_T^2}{8R} + \frac{m^2 \cdot \hat{u}_T^2}{8R} = \frac{\hat{u}_T^2}{2R} \left(1 + \frac{m^2}{2} \right) \quad (5-4)$$

relative Leistung der Seitenfrequenzen:

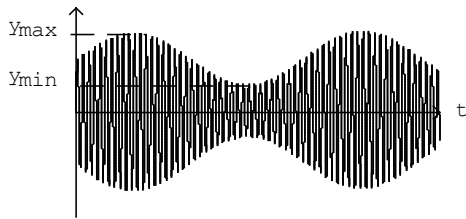
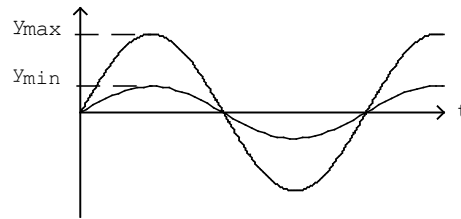
$$\frac{\sum P_{\text{seite}}}{P_{\text{AM}}} = \frac{\frac{m^2}{4} \cdot \hat{u}_T^2}{\frac{\hat{u}_T^2}{2} \left(1 + \frac{m^2}{2} \right)} = \frac{m^2}{2 + m^2} \leq \frac{1}{3} \quad (5-5)$$

Beim AM-Rundfunk ist $m_{\text{max}} \approx 0,3$. Dann ergibt sich ein Verhältnis $\sum P_{\text{seite}} / P_{\text{AM}} \approx 0,043$. Im Träger, der keine Information enthält, stecken bei $m=0,3$ ca. 97,5% der Gesamtleistung!

Der Vorteil dieser unwirtschaftlichen Situation liegt im besonders einfachen Aufbau des Demodulators auf der Empfängerseite.

5.3 Messung des Modulationsgrades

1. Messung mit dem Oszilloskop im y-t-Betrieb

Triggerung auf ω_m Triggerung auf Ω_T

In beiden Fällen gilt für den Modulationsgrad: $m = \frac{Y_{\max} - Y_{\min}}{Y_{\max} + Y_{\min}}$ (5-6)

2. Messung mit dem Spektrumanalysator

Gleichung (5-3) beschreibt das Spektrum einer AM-Schwingung:

$$u_{AM}(t) = \hat{u}_T \cdot \cos \Omega_T t + \frac{m \cdot \hat{u}_T}{2} \cdot \cos(\Omega_T + \omega_m)t + \frac{m \cdot \hat{u}_T}{2} \cdot \cos(\Omega_T - \omega_m)t$$

Die Amplituden der beiden Seitenschwingungen betragen jeweils $\hat{u}_{\text{seite}} = \frac{m \cdot \hat{u}_T}{2}$

Damit ergibt sich der Modulationsgrad aus dem 2fachen Amplitudenverhältnis von Seiten- zu Trägerschwingung, $m = 2 \cdot \frac{\hat{u}_{\text{seite}}}{\hat{u}_T} \cdot 100$ (in %) (5-7)

Werden die Spektrallinien als Pegel in dBm gemessen, ist der Modulationsgrad:

$$m = 2 \cdot 10^{(L_{\text{seite}} - L_T)/20} \cdot 100 \text{ (in \%)} \quad (5-8)$$

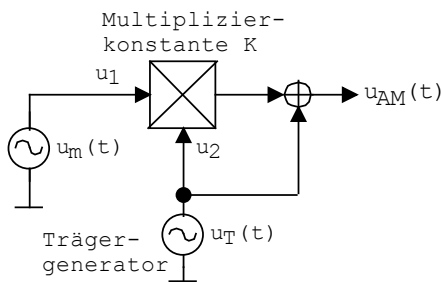
5.4 AM-Modulator

Die Gleichung (5-2) der AM-Zeitfunktion,

$$u_{AM}(t) = \hat{u}_T \cdot \cos \Omega_T t + C \cdot \hat{u}_m \cdot \cos \omega_m t \cdot \hat{u}_T \cdot \cos \Omega_T \quad (C = \text{Modulatorkonstante})$$

beschreibt Amplitudenmodulation als Multiplikation der Trägerschwingung $\hat{u}_T \cdot \cos \Omega_T t$ mit einem Signal $\hat{u}_m \cdot \cos \omega_m t$. Die zusätzliche Addition mit der Trägerschwingung wird zur Erzeugung der Hüllkurve benötigt. Die Hüllkurve ist dann ein Abbild des Modulationssignals. Aus der Hüllkurve lässt sich auf der Empfangsseite sehr einfach das Signal wiedergewinnen.

Die Operation Multiplikation und Addition ist mit einem Multiplizierer und einer Additionsstufe möglich.



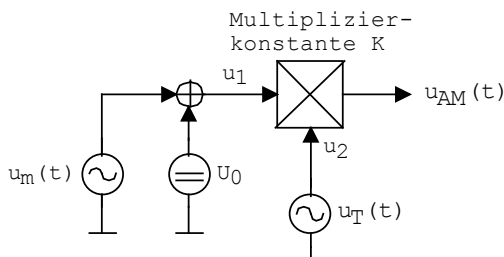
$K = \text{Multipliziererkonstante,}$
Einheit V^{-1}

$$\text{Ausgangsspannung: } u_{AM}(t) = K \cdot u_m(t) \cdot u_T(t) + u_T(t)$$

Mit sinusförmiger Trägerschwingung $u_T(t)$ und Modulationssignal $u_m(t)$ erhält man:

$$\begin{aligned} u_{AM}(t) &= K \cdot \hat{u}_m \cdot \cos \omega_m t \cdot \hat{u}_T \cdot \cos \Omega_T t \\ &\quad + \hat{u}_T \cdot \cos \Omega_T t \\ u_{AM}(t) &= \hat{u}_T \cdot \cos \Omega_T t \\ &\quad + \frac{K \cdot \hat{u}_m \cdot \hat{u}_T}{2} \cdot \cos(\Omega_T - \omega_m)t \\ &\quad + \frac{K \cdot \hat{u}_m \cdot \hat{u}_T}{2} \cdot \cos(\Omega_T + \omega_m)t \end{aligned} \quad (5-9)$$

Die ausgangsseitige Additionsstufe kann entfallen, wenn zum Modulationssignal $u_m(t)$ eine konstante Spannung addiert wird:



Ausgangsspannung:

$$\begin{aligned} u_{AM}(t) &= K \cdot u_1(t) \cdot u_2(t) \\ &= K \cdot (\hat{u}_m \cdot \cos \omega_m t + U_0) \cdot \hat{u}_T \cdot \cos \Omega_T t \\ &= K \cdot U_0 \cdot \hat{u}_T \cdot \cos \Omega_T t + K \cdot \hat{u}_m \cdot \cos \omega_m t \cdot \hat{u}_T \cdot \cos \Omega_T t \\ &= K \cdot U_0 \cdot \hat{u}_T \cdot \cos \Omega_T t \\ &\quad + \frac{K \cdot \hat{u}_m \cdot \hat{u}_T}{2} \cdot \cos(\Omega_T - \omega_m)t \\ &\quad + \frac{K \cdot \hat{u}_m \cdot \hat{u}_T}{2} \cdot \cos(\Omega_T + \omega_m)t \end{aligned}$$

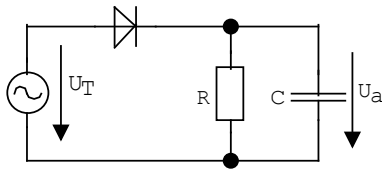
Wird $U_0 \cdot K = 1$ gewählt, d.h. $U_0 = 1/K$, erhält man

$$\begin{aligned} u_{AM}(t) &= \hat{u}_T \cdot \cos \Omega_T t + \frac{\hat{u}_m / U_0 \cdot \hat{u}_T}{2} \cdot \cos(\Omega_T - \omega_m)t + \frac{\hat{u}_m / U_0 \cdot \hat{u}_T}{2} \cdot \cos(\Omega_T + \omega_m)t \\ &= \hat{u}_T \cdot \cos \Omega_T t + \frac{m \cdot \hat{u}_T}{2} \cdot \cos(\Omega_T - \omega_m)t + \frac{m \cdot \hat{u}_T}{2} \cdot \cos(\Omega_T + \omega_m)t \end{aligned} \quad (5-10)$$

Der Modulationsgrad ist dann nur noch vom Verhältnis von \hat{u}_m / U_0 abhängig.

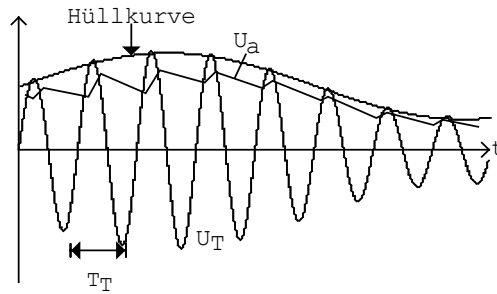
5.5 AM-Demodulatoren

Im **Hüllkurvendemodulator** wird mit Hilfe einer Gleichrichterschaltung die Hüllkurve der AM-Schwingung erzeugt.



Zeitkonstante $\tau = R \cdot C$:

$$\tau \gg T_T \text{ und } \tau \ll T_m = 2\pi/\omega_m$$



Auslegung des Ladekondensators

Im Idealfall soll die Ausgangsspannung U_a der Hüllkurve folgen. Durch die Auf- und Entladungen des Kondensators besteht U_a stückweise aus Sinus- und Exponentialfunktionen.

Die Änderungsgeschwindigkeit der Kondensatorspannung muß größer als die Änderungsgeschwindigkeit der Amplitude der modulierten AM-Schwingung sein, also

$$\left| \frac{dU_a(t)}{dt} \right| \geq \left| \frac{d\hat{U}_T(t)}{dt} \right| \quad (5-11)$$

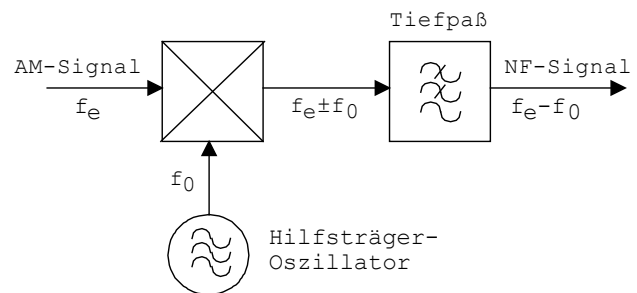
$$\text{Daraus folgt für die Zeitkonstante } T: \tau \leq \frac{\sqrt{1 - m^2}}{m \cdot 2\pi \cdot f_{m, \max}} \quad (5-12)$$

$$\text{Häufig benutzte Näherung: } 10 \cdot T_T < \tau < \frac{1}{f_{m, \max}} \quad (5-13)$$

z.B. AM-Rundfunk: $f_0 = 455 \text{ kHz}$, $f_{m, \max} = 5 \text{ kHz}$, $m \leq 0,3$

Gl. (5-12): $\tau \leq 100 \mu\text{sec}$; Gl. (5-13): $20 \mu\text{sec} \leq \tau \leq 200 \mu\text{sec}$

Im **Synchrondemodulator** wird die AM-Schwingung mit einem Hilfsoszillator in einem Multiplizierer in das Basisband abwärts gemischt. Von den Mischprodukten muss nach der Multiplikation die NF-Komponente mit einem Tiefpass herausgefiltert werden.



AM-Schwingung:

$$\begin{aligned} U_{AM}(t) &= \hat{u}_T \cdot (1 + m \cdot \cos \omega_m t) \cdot \cos \Omega_T t \\ &= \hat{u}_T \cdot \cos \Omega_T t + \frac{\hat{u}_T \cdot m}{2} \cdot \cos(\Omega_T + \omega_m)t + \frac{\hat{u}_T \cdot m}{2} \cdot \cos(\Omega_T - \omega_m)t \end{aligned}$$

Im Multiplizierer wird die AM-Schwingung mit dem Hilfsträger $U_0(t) = \hat{U}_0 \cdot \cos \Omega_0 t$ multipliziert, wobei die Frequenz des Hilfsträgers $\Omega_0 = \Omega_T$ ist.

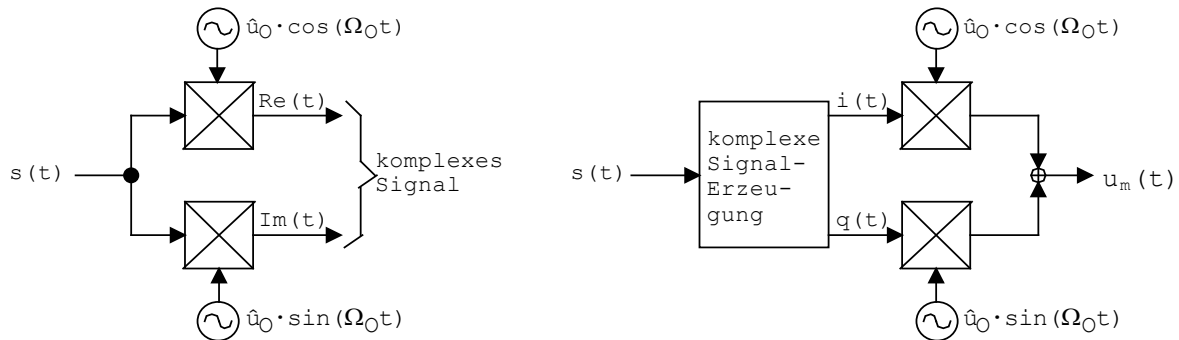
$$\begin{aligned} U_{AM}(t) \cdot U_0(t) &= \hat{U}_0 \hat{u}_T \cos^2 \Omega_0 t + \frac{\hat{U}_0 \hat{u}_T m}{2} \cos \Omega_0 t \cos(\Omega_0 + \omega_m)t + \frac{\hat{U}_0 \hat{u}_T m}{2} \cos \Omega_0 t \cos(\Omega_0 - \omega_m)t \\ &= \frac{\hat{U}_0 \hat{u}_T}{2} + \frac{\hat{U}_0 \hat{u}_T m}{2} \cos \omega_m t + \frac{\hat{U}_0 \hat{u}_T}{2} \cos 2\Omega_0 t + \frac{\hat{U}_0 \hat{u}_T}{4} \cos(2\Omega_0 + \omega_m)t + \frac{\hat{U}_0 \hat{u}_T}{4} \cos(2\Omega_0 - \omega_m)t \end{aligned}$$

In der letzten Gleichung ist der 2. Summand das demodulierte AM-Signal, das durch den Tiefpass herausgefiltert wird.

5.6 Frequenzmischung

Der Verschiebungssatz II der Fouriertransformation besagt, dass die Multiplikation einer Zeitfunktion $s(t)$ mit einem komplexen Drehzeiger eine Verschiebung im Frequenzbereich bewirkt: $e^{j2\pi f_0 t} \cdot s(t) \xrightarrow{\text{FT}} \underline{s}(f - f_0)$

Für die schaltungstechnische Realisierung benötigt man 2 Multiplizierer, die jeder mit dem Signal und jeweils einer Sinus- bzw. Cosinusschwingung angesteuert werden.



Nachteilig ist, dass das Ausgangssignal komplex ist und damit zweikanalig weiterverarbeitet werden muss.

Wenn man aus dem Eingangssignal $s(t)$ zunächst ein komplexes Signal (Drehzeiger) erzeugt, ergibt die Addition der beiden Mischer-Ausgangssignale das im Frequenzbereich verschobene, reelle Eingangssignal.

Mit $s(t) = \hat{s} \cdot \sin(\omega_s t)$ ist $i(t) = \hat{s} \cdot \sin(\omega_s t)$ und $q(t) = \hat{s} \cdot \cos(\omega_s t)$.

Für $u_m(t)$ erhält man

$$\begin{aligned} u_m(t) &= \hat{s} \cdot \sin(\omega_s t) \cdot \hat{u}_0 \cdot \cos(\Omega_0 t) \cdot K + \hat{s} \cdot \cos(\omega_s t) \cdot \hat{u}_0 \cdot \sin(\Omega_0 t) \cdot K \\ &= \hat{s} \cdot \hat{u}_0 \cdot K \cdot \left[\frac{1}{2} (\sin(\Omega_0 + \omega_s)t - \sin(\Omega_0 - \omega_s)t) + \frac{1}{2} (\sin(\Omega_0 + \omega_s)t + \sin(\Omega_0 - \omega_s)t) \right] \\ &= \hat{s} \cdot \hat{u}_0 \cdot K \cdot \sin(\Omega_0 + \omega_s)t \end{aligned}$$

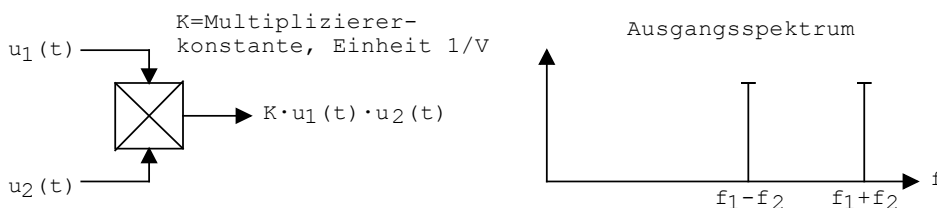
Die gewöhnliche Mischung erfolgt nur durch einfache, reelle Multiplikation zweier Signale.

Wird ein Analogmultiplizierer mit zwei harmonischen Schwingungen angesteuert,

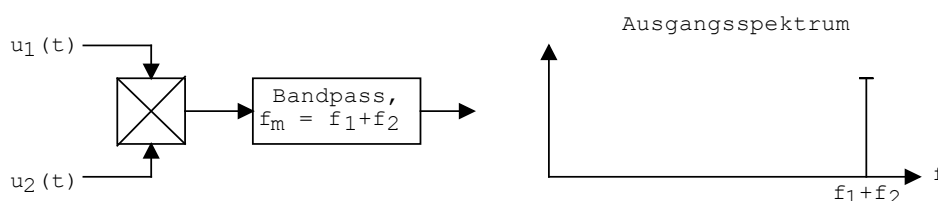
$$u_1(t) = \hat{u}_1 \cdot \cos(\omega_1 t), \quad u_2(t) = \hat{u}_2 \cdot \cos(\omega_2 t),$$

dann erhält man am Ausgang des Multiplizierers

$$K \cdot u_1(t) \cdot u_2(t) = K \cdot \hat{u}_1 \cdot \hat{u}_2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (\cos(\omega_1 - \omega_2)t + \cos(\omega_1 + \omega_2)t) \quad (5-14)$$



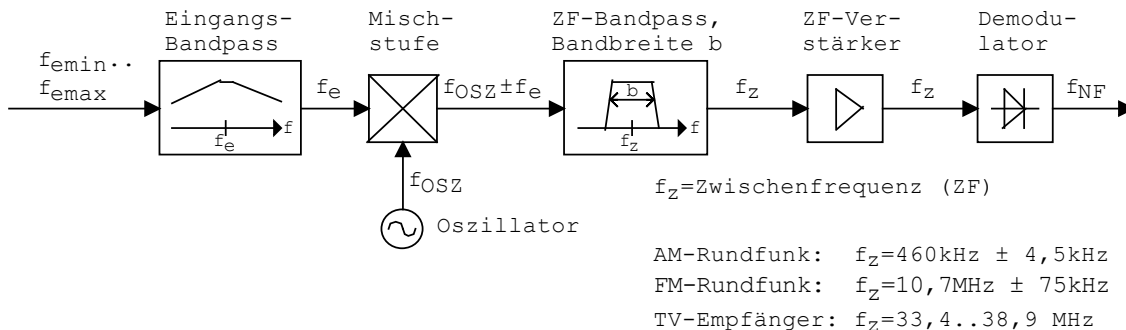
Die Terme mit der Summen- bzw. Differenzfrequenz bezeichnet man als Mischprodukte. Meist ist man nur an einem der beiden Mischprodukte interessiert. Die unerwünschten Frequenzen im Ausgangsspektrum müssen dann durch Filter entfernt werden.



5.7 Frequenzmischung im Überlagerungsempfänger

In vielen Übertragungssystemen besteht die Aufgabe, ein Signalspektrum aus beliebigen Frequenzlagen in andere zu verschieben, ohne dabei die spektrale Zusammensetzung zu ändern. Ein typisches Beispiel für die Anwendung der Frequenzmischung ist der Überlagerungsempfänger.

Blockschaltbild eines Überlagerungsempfängers



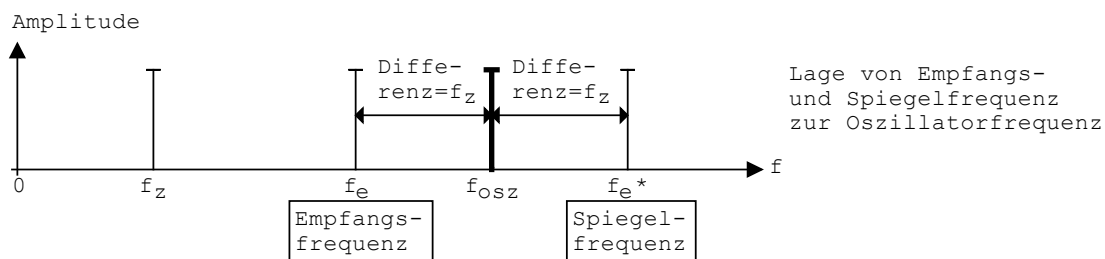
In ihm wird das zu empfangende Signal im Eingangsbandpass zunächst grob gefiltert, dann in der Mischstufe in eine Zwischenfrequenz (ZF) abwärts gemischt, herausgefiltert, verstärkt und demoduliert. Wenn auf eine andere Eingangsfrequenz abgestimmt werden soll, muss die Frequenz des Oszillators und die Mittenfrequenz des Eingangsbandpasses verändert werden. Dabei ist die Differenz zwischen Eingang- und Oszillatorfrequenz immer gleich der Zwischenfrequenz.

Die ganze Anordnung wirkt so, dass aus dem Eingangsfrequenzspektrum ein schmaler Frequenzabschnitt herausgefiltert wird. Die Lage des Abschnitts wird durch die Oszillatorfrequenz bestimmt, seine Breite durch die Bandbreite b des ZF-Verstärkers. Ein Vorteil ist, dass die Breite des Abschnitts (Selektivität) durch den ZF-Bandpass bestimmt wird und unabhängig von der Lage ist.

Die Hauptselektion und -verstärkung der Anordnung liegt im ZF-Verstärker, der eine an die jeweilige Modulationsart angepasste Durchlassbandbreite besitzt. In einfachen Empfängern werden im ZF-Verstärker zur Filterung mehrere Bandfilter eingesetzt, die über Verstärkerstufen gekoppelt sind. Die Verstärkerstufen können in der Verstärkung verändert werden (automatische Verstärkungsregelung, AVR), wodurch bei starken oder schwachen Eingangssignalen eine nur geringe Schwankung der Ausgangsspannung des ZF-Verstärkers erreicht wird.

Der Oszillator schwingt um die ZF versetzt meist oberhalb der Empfangsfrequenz; $f_{\text{OSZ}} = f_e + f_z$. Für eine bestimmte Empfangsfrequenz f_e ist der Oszillator auf eine Frequenz $f_{\text{OSZ}} = f_e + f_z$ abzustimmen. Nachteilig dabei ist, dass es, je nach Schaltung der Mischstufe, noch mindestens eine weitere Eingangsfrequenz f_e gibt, die ebenfalls in den Bereich der ZF fallen können.

Die Mischstufe erzeugt an ihrem Ausgang die Frequenzen $f_z = f_{\text{OSZ}} \pm f_e$. Neben der eigentlichen Empfangsfrequenz $f_e = f_{\text{OSZ}} - f_z$ existiert daher eine 2. Empfangsmöglichkeit $f_e^* = f_{\text{OSZ}} + f_z = f_e + 2 \cdot f_z$, die sog. Spiegelfrequenz.



Die Spiegelfrequenz darf nicht auf den Eingang der Mischstufe gelangen. Daher findet mit Hilfe des Eingangs-Bandpasses eine Vorselektion der Eingangsfrequenz statt.

Beispiel: AM-Rundfunk
 $f_e = 535\text{kHz} \dots 1605\text{kHz}$
 $f_z = 460\text{kHz} \rightarrow f_{\text{osz}} = f_e + f_z = 995\text{kHz} \dots 2065\text{kHz}$
 $f_e^* = f_e + 2 \cdot f_z = 1455\text{kHz} \dots 2525\text{kHz}$ (Spiegelfrequenzen)

Ist der Empfänger auf $f_e=550\text{kHz}$ abgestimmt ($f_{\text{osz}}=1010\text{kHz}$), dann wird ohne Vorkreis zusätzlich ein Signal auf $f=1470\text{kHz}$ empfangen, da es ebenfalls vom Mischer in die ZF umgesetzt wird.

Der Eingangs-Bandpass wird gemeinsam mit dem Oszillator abgestimmt.

Kommerzielle Überlagerungsempfänger arbeiten mit Mehrfachumsetzung und mehreren Zwischenfrequenzen. Bei ihnen wird häufig eine hohe 1.ZF verwendet, die über der maximalen Eingangsfrequenz liegen kann. Als Eingangs-Bandpass kann dann ein fest eingestellter Tiefpass oder Bandpass verwendet werden, da die Spiegelfrequenz deutlich über der maximalen Eingangsfrequenz liegt. Die eigentliche Selektion, d.h. Trennung des gewünschten Kanals von den Nachbarkanälen, findet dann in der 2. ZF statt.

Die Bandbreite b des ZF-Verstärkers richtet sich nach der belegten Bandbreite der modulierten Schwingung.

AM-Rundfunk: $b = 9\text{kHz}$

FM-Rundfunk: $b = 150\text{kHz}$

Analog-Fernsehen: $b = 5,5\text{MHz}$

Die meisten heutigen Empfänger arbeiten mit integrierten Mixern und ZF-Verstärkern. Als ZF-Filter werden dann häufig keramische Filter zusammen mit Bandfiltern eingesetzt, wodurch man eine optimale, rechteckförmige Durchlasskurve erhält.

Im Demodulator wird das Signal aus der Frequenzlage der Zwischenfrequenz wieder in das Basisband (z.B. Tonfrequenzbereich) umgesetzt.

Als Demodulatoren werden verwendet, bei AM: Hüllkurvendemodulator
Synchrondemodulator

bei FM: Phasendiskriminator (veraltet)
Koinzidenzdemodulator

Das Prinzip des Überlagerungsempfängers wird auch im HF-Spektrumanalysator angewendet. Bei ihm findet wegen des großen Eingangsfrequenzbereichs (z.B. $10\text{kHz} \dots 1,8\text{GHz}$) eine Umsetzung mit mehreren Mischstufen und ZF-Verstärkern statt. Die Frequenzlage der 1. ZF liegt oberhalb der maximalen Empfangsfrequenz. Zur Vorselektion wird dann nur ein festabgestimmter Tiefpass benutzt. Die ZF-Bandbreite ist umschaltbar und bestimmt die Fähigkeit, noch eng zusammenliegende Spektrallinien aufzulösen. Als Demodulator wird ein logarithmischer Gleichrichter verwendet wodurch man Spektrallinien mit großen Pegelunterschieden gemeinsam darstellen kann.

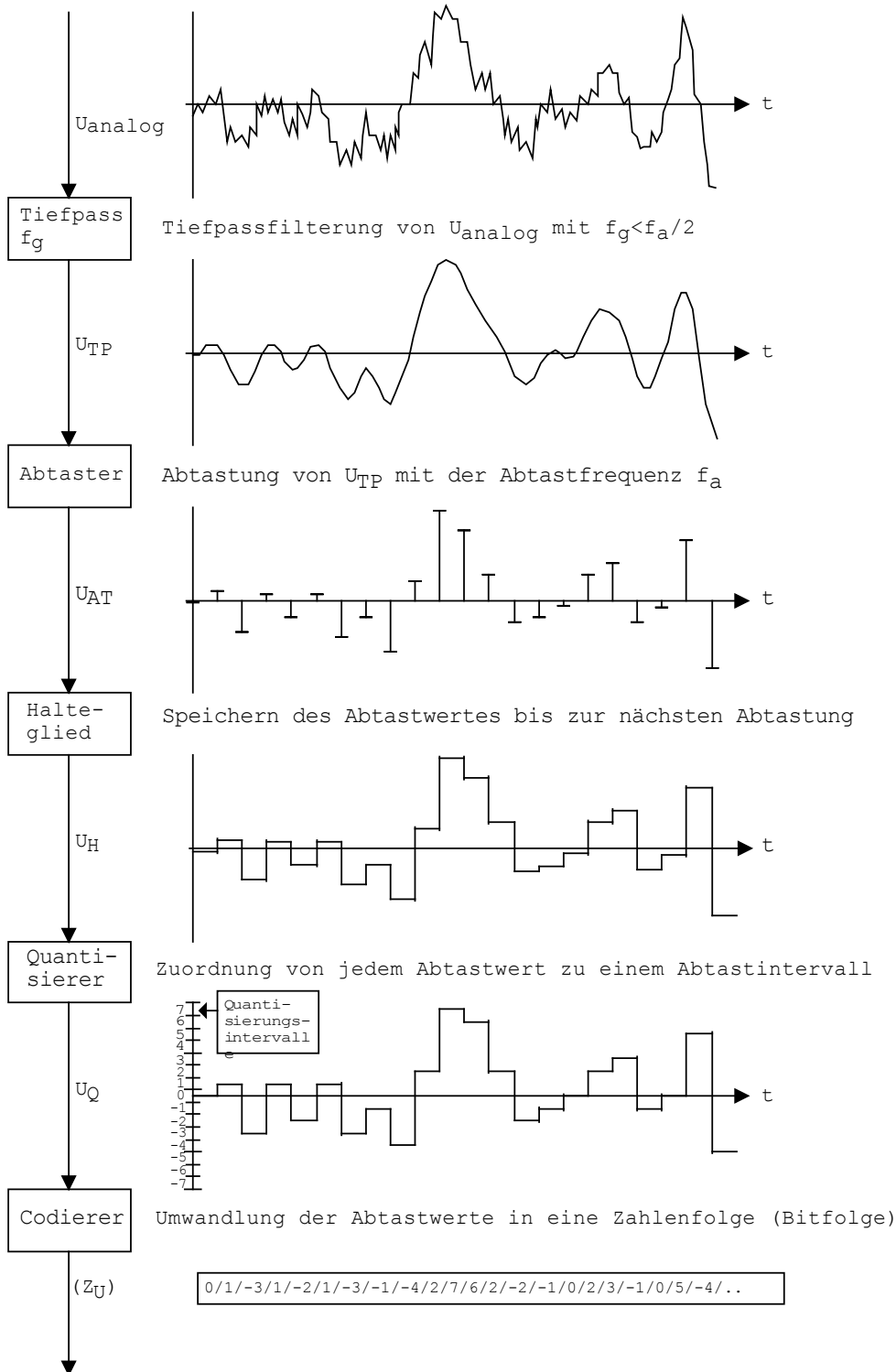
6. Digitale Basisbandübertragung

6.1 Digitalisierung eines Analogsignals

Analogsignal: Verlauf wert- und zeitkontinuierlich, Spektrum ist bandbegrenzt

Digitalsignal: Verlauf wert- und zeitdiskret, Spektrum ist periodisch

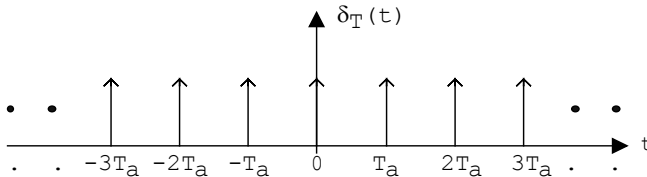
Verarbeitungsschritte:



6.2 Abtastung des Analogsignals

Das abgetastete Signal u_{AT} lässt sich mathematisch als Multiplikation des tiefpassgefilterten Analogsignals u_{TP} mit einem Deltakamm beschreiben.

Der Delta-Kamm ist ein periodisch wiederholter Delta-Impuls:

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n \cdot T_a)$$


Für das abgetastete Signal erhält man

$$u_{AT}(t) = u_{TP}(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n \cdot T_a) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_{TP}(n \cdot T_a) \cdot \delta(t - n \cdot T_a) \quad (6-1)$$

Der letzte Ausdruck folgt aus der Beziehung $x(t) \cdot \delta(t - T_a) = x(T_a) \cdot \delta(t - T_a)$ und beschreibt das Abtastsignal als eine Folge bewerteter Dirac-Impulse.

Zur Bestimmung des Spektrums des abgetasteten Signals, $\underline{U}_{AT}(f)$, wird der Multiplikationssatz der Fouriertransformation angewendet:

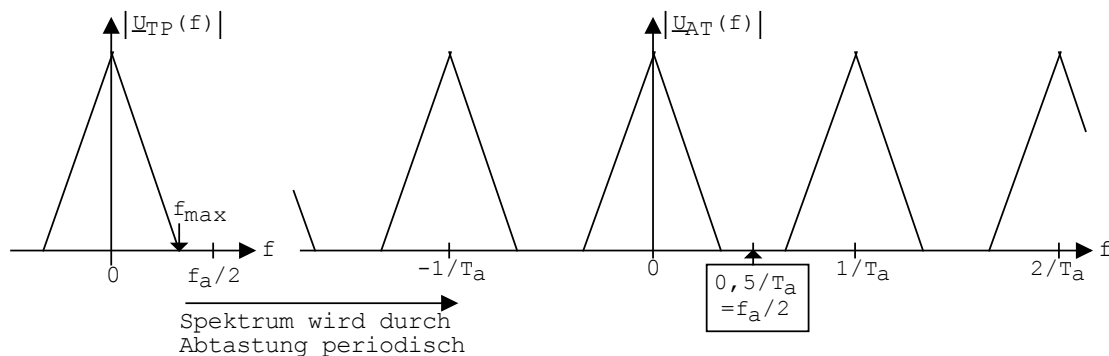
$$u_{TP}(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n \cdot T_a) \xrightarrow{F.-Tr.} F\{u_{TP}(t)\} * F\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n \cdot T_a)\right\} = \underline{U}_{AT}(f)$$

$F\{u_{TP}(t)\}$ ist darin die Fouriertransformierte von $u_{TP}(t)$. Für $\underline{U}_{AT}(f)$ erhält man

$$\underline{U}_{AT}(f) = \frac{1}{T_a} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{U}_{TP}(f - n \cdot f_a) \quad (6-2)$$

Da die Fouriertransformierte des Deltakamms wieder ein Deltakamm ist (bewertet mit $1/T_a$) ergibt die Faltung im Frequenzbereich ein mit $1/T_a$ periodisches Spektrum:

Die Periode ist $1/T_a = f_a$ (Abtastfrequenz).



Die Abtastung erfolgt nur dann fehlerfrei, wenn keine Überlappungen der periodischen Spektren auftreten. Das ist der Fall, wenn $f_a/2 < f_{\max}$ ist bzw. wenn die Abtastfrequenz f_a mindestens doppelt so groß ist wie die im Signalspektrum vorkommende maximale Frequenz f_{\max} : $f_a > 2 \cdot f_{\max}$ (Abtasttheorem)

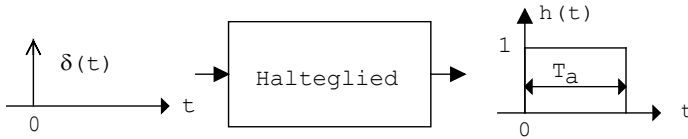
Zur Unterdrückung von Frequenzanteilen oberhalb der halben Abtastfrequenz wird das Analogsignal vor der Abtastung in einem Tiefpassfilter mit $f_g < f_a/2$ bandbegrenzt.

Für Telefonqualität reicht es aus, das Sprach-Frequenzspektrum von 300Hz..3,4kHz zu übertragen. Da mit 8 kHz abgetastet wird (1 Sprachkanal bei ISDN), muss das Tiefpassfilter zur Bandbegrenzung zwischen 3,4 kHz und der halben Abtastfrequenz von 4 kHz die Signalanteile soweit abschwächen, daß sie im Rauschen verschwinden. Die Amplitude von auftretenden Rausch- bzw. Störspannungen wird durch den Quantisierer bestimmt.

6.3 Halteglied

Das Halteglied hält den theoretisch unendlich schmalen Abtastwert bis zur nächsten Abtastung fest. Die Haltezeit ist gleich der Periodendauer der Abtastfrequenz. Während dieser Zeit muss der folgende A/D-Umsetzer den gehaltenen Abtastwert quantisiert haben.

Das Halteglied erzeugt bei Anregung mit einem δ -Impuls einen Rechteckimpuls der Dauer T_a .



$$\text{Seine Impulsantwort lautet damit } h(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T_a} - \frac{T_a}{2}\right) \quad (6-3)$$

und die Übertragungsfunktion

$$\underline{H}(f) = \mathcal{F}\left\{\text{rect}\left(\frac{t}{T_a} - \frac{T_a}{2}\right)\right\} = T_a \cdot \text{si}(\pi \cdot f \cdot T_a) \cdot e^{-j\pi f \cdot T_a} \quad (6-4)$$

Das Halteglied besitzt einen Amplitudengang, der den Verlauf einer Betrags-Si-Funktion hat. Dadurch wird das Spektrum des abgetasteten Signals verformt. Man erhält für das Spektrum am Ausgang des Haltegliedes:

$$\underline{U}_H(f) = \underline{U}_{AT}(f) \cdot \underline{H}(f) = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{U}_{TP}(f - n \cdot f_a) \right) \cdot \text{si}(\pi \cdot f \cdot T_a) \cdot e^{-j\pi f \cdot T_a} \quad (6-5)$$

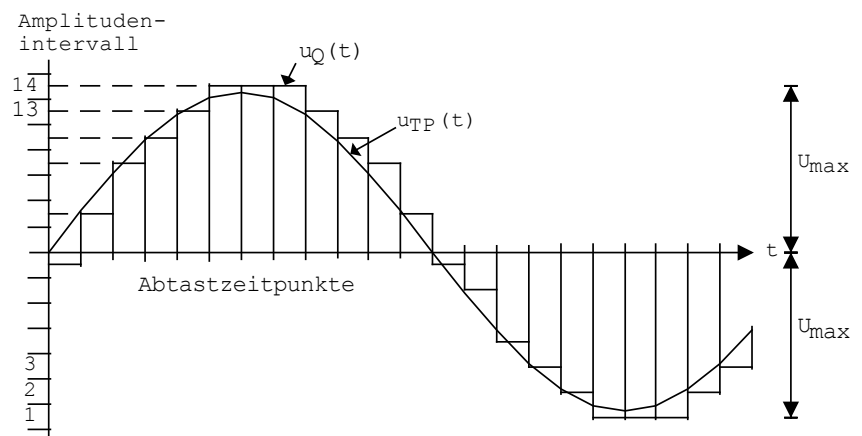
bzw. für das Betragsspektrum

$$|\underline{U}_H(f)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{U}_{TP}(f - n \cdot f_a) \right| \cdot |\text{si}(\pi \cdot f \cdot T_a)| \quad (6-6)$$

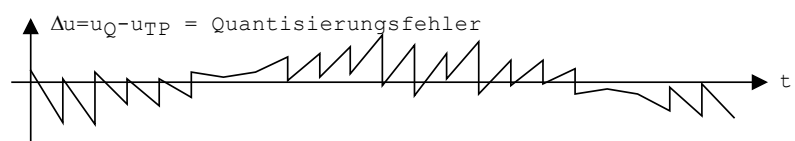
Durch den Frequenzgang des Haltegliedes ist das Spektrum $|\underline{U}_H(f)|$ nicht mehr periodisch, sondern mit einer Si-Funktion bewertet.

6.4 Quantisierung

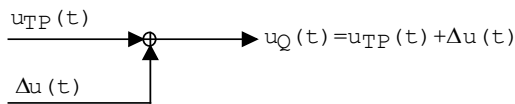
Bei der Quantisierung wird zu den Abtastzeitpunkten jeder Abtastwert einem bestimmten Amplitudenintervall zugeordnet. Dadurch entstehen Abweichungen des quantisierten Signals zum jeweiligen Abtastwert, die als Quantisierungsfehler bezeichnet werden.



Beispiel: Abtastung und Quantisierung einer Sinusschwingung

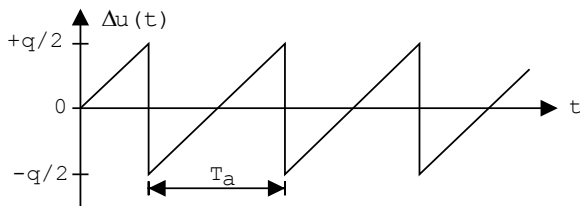


Der Quantisierungsfehler Δu hat rauschähnlichen Charakter, man spricht vom Quantisierungsgeräusch.

Modell zur Entstehung des quantisierten Signals:

Das quantisierte Signal $u_Q(t)$ entsteht aus dem Analogsignal $u_{TP}(t)$ durch Abtastung von $u_{TP}(t)$, Halten des Abtastwerts über ein Abtastintervall und Quantisieren. Wenn die Abtastfrequenz groß gegen die Signalfrequenz ist, ist die Änderung von u_{TP} im Abtastintervall so gering, dass der Quantisierungsfehler, d.h. die Abweichung von $u_Q(t)$ gegen $u_{TP}(t)$, höchstens den Wert $\pm q/2$ des Quantisierungsintervalls q erreicht.

Zeitverlauf des Quantisierungsfehlers



Nimmt man zur Vereinfachung einen sägezahnförmigen Verlauf des Quantisierungsfehlers an, erhält man für den quadratischen Mittelwert (\sim Leistung) des Quantisierungsfehlers

$$\overline{\Delta u^2} = \frac{1}{T_a} \cdot \int_{-T_a/2}^{T_a/2} (\Delta u(t))^2 dt = \int_{-T_a/2}^{T_a/2} \left(\frac{q}{T_a} \cdot t \right)^2 dt = \frac{q^2}{12} \quad (6-7)$$

Bei einem dreieckförmigen Verlauf des Analogsignals treten alle Amplitudenwerte gleich häufig auf (gleichverteilte Amplituden). Der Quantisierungsfehler hat dann den dargestellten sägezahnförmigen Verlauf.

Für den quadratischen Mittelwert eines Analogsignals mit dreieckförmigen Verlauf und U_{\max} = Scheitelwert erhält man

$$\overline{u_{TP}^2} = \frac{U_{\max}^2}{3} \quad (6-8)$$

und das Signal-Rausch-Verhältnis wird

$$\frac{S}{N} = \frac{P_{\text{nutz}}}{P_{\text{stör}}} = \frac{\overline{u_{TP}^2}}{\overline{\Delta u^2}} = 4 \cdot \frac{u_{\max}^2}{q^2} \quad (6-9)$$

Das quantisierte Signal wird in digitaler Form meistens binär codiert. Dabei wird der gesamte Spannungsbereich von $-U_{\max}$ bis $+U_{\max}$ (Wechselspannung) in $2 \cdot U_{\max}/q$ Intervalle zerlegt, die mit n Bits codiert werden.

Die Anzahl der Amplitudenintervalle ist $2^n = \frac{2 \cdot U_{\max}}{q}$

$$\text{und das Signal-Rausch-Verhältnis wird } \frac{S}{N} = 4 \cdot \left(\frac{2^n}{2} \right)^2 \quad (6-10)$$

$$\text{bzw. der Signal-Stör-Abstand } \left. \frac{S}{N} \right|_{\text{dB}} = 10 \cdot \log \frac{S}{N} = n \cdot 6\text{dB} \quad (6-11)$$

Wird mit 8Bit quantisiert, beträgt der maximale Signal-Stör-Abstand (bei Vollaussteuerung) 48dB.

Für ein sinusförmiges Signal ergibt sich bei gleichem Scheitelwert ein etwas größerer quadratischer Mittelwert des Signals $u_{TP}(t)$ als bei dreieckförmigen Verlauf und man erhält für den Signal-Stör-Abstand:

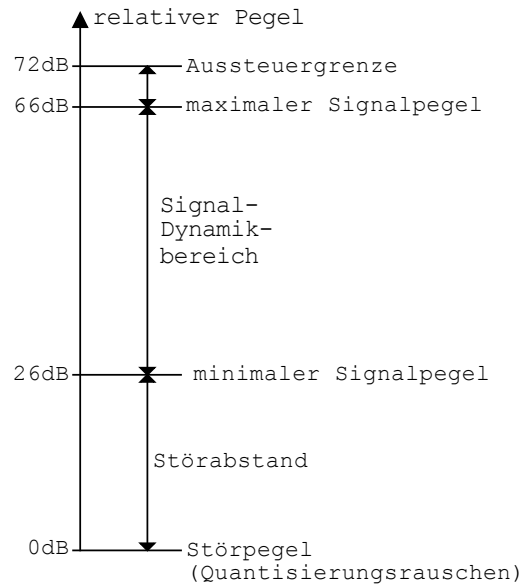
$$\left. \frac{S}{N} \right|_{\text{dB}} = n \cdot 6\text{dB} + 1,8\text{dB}$$

Für die Signal-Störabstände bei Sprachübertragung (Telephonie) fordert man die nebenstehend dargestellten Relativpegel (bezogen auf Rauschen).

Aus dem maximalen Signal-Stör-Abstand von 72dB folgt eine erforderliche Wortlänge bei der Quantisierung von

$$n = \frac{72\text{dB}}{6\text{db} / \text{Bit}} = 12\text{Bit},$$

was unwirtschaftlich wäre.

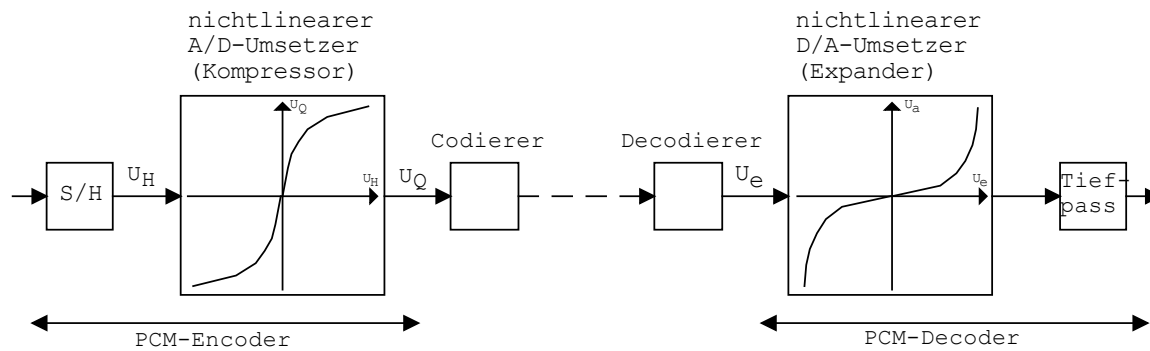


Wünschenswert ist eine Quantisierung mit 8 Bit. Sie kann erreicht werden, wenn eine nichtlineare Quantisierungskennlinie benutzt wird. Dabei werden kleine Amplituden feiner quantisiert als große, wodurch zwar bei großen Amplituden das Quantisierungsgeräusch zunimmt, der Signal-Stör-Abstand dann aber ungefähr konstant bleibt, da dann auch die Signalleistung größer wird.

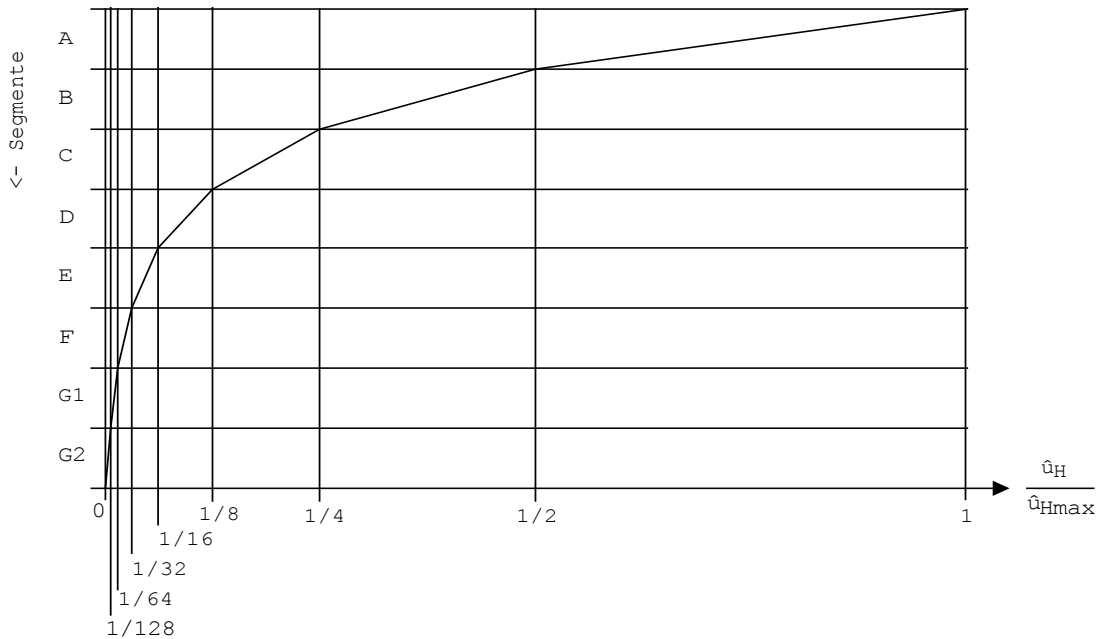
Durch die nichtlineare Quantisierung findet auf der Sendeseite eine Signalkompression (Einengung des Dynamikbereichs) statt. Sie muß auf der Empfangsseite durch eine Signal-Expansion wieder rückgängig gemacht werden.

Für die Kompression und Expansion wird in Europa beim ISDN-System die A-Kennlinie mit 13 Steigungsabschnitten (13-Segment-Kennlinie) verwendet. (USA: μ -Kennlinie mit 15 Segmenten).

6.5 Übertragungssystem mit Signalkompression und Expandierung (Kompondierung)



13-Segment-Kennlinie (eine Hälfte, A-Kennlinie)



Aufbau der Kennlinie für Spannungen $u_H > 0$: 8 Segmente A, B, ..., G2 mit jeweils 16 Intervallen.

Bei Spannungen $u_H < 0$ hat die Kennlinie ebenfalls 8 Segmente.

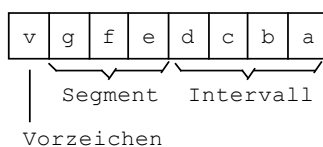
Insgesamt gibt es 16 Segmente mit je 16 Intervallen = 256 Stufen.

-> Codierung mit 8 Bit.

Die gesamte Kennlinie hat, wie nebenstehend dargestellt, 13 Segmente mit unterschiedlicher Steigung und Lage.

Mit den inneren 4 G-Intervallen hat die 13-Segment-Kennlinie 16 Segmente. Jedes Segment ist in 16 Intervalle unterteilt. Im 8 bit Codewort geben die 4 untersten Bits das Intervall und die 4 obersten Bits das Segment bzw. Vorzeichen an.

Aufbau eines 8 bit Codewortes:



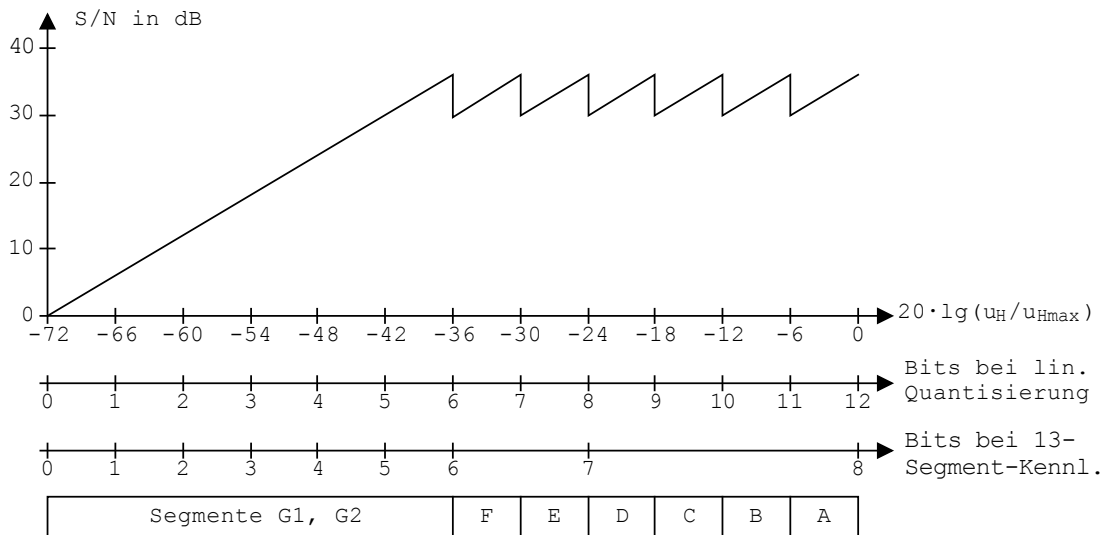
Segment	Bereich \hat{u}_a/\hat{u}_{amax}	
A	1...1/2	
B	1/2...1/4	
C	1/4...1/8	
D	1/8...1/16	
E	1/16...1/32	
F	1/32...1/64	
G1	1/64...1/128	Segmente haben die gleiche Steigung
G2	1/128...0	
G2	0...-1/128	
G1	-1/128...-1/64	
F	-1/64...-1/32	
E	-1/32...-1/16	
D	-1/16...-1/8	
C	-1/8...-1/4	
B	-1/4...-1/2	
A	-1/2...-1	

Signal-Stör-Abstand der 13-Segment-Kennlinie

Bei kleinen Amplituden im Bereich $-\frac{1}{64} < \frac{\hat{u}_H}{\hat{u}_{H \max}} < +\frac{1}{64}$ wird linear mit 6 Bit

quantisiert. Der Signal-Stör-Abstand steigt hier mit 6dB/Bit. Darüber verdoppelt sich das Quantisierungsintervall bei Verdopplung der Amplitude, wodurch der Signal-Stör-Abstand jedes Mal um 6dB reduziert wird.

Man erhält folgenden Zusammenhang zwischen Signalamplitude und Signal-Stör-Abstand:



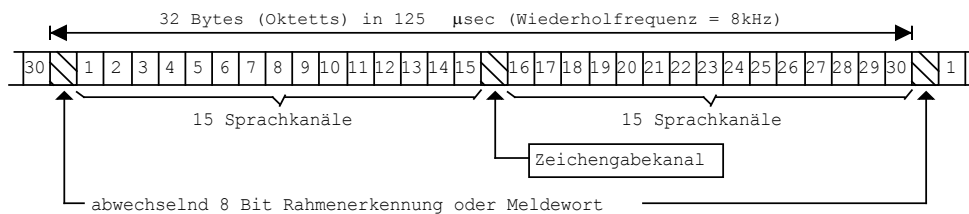
Aus der Darstellung ist ersichtlich, daß der Signal-Stör-Abstand bei größeren Amplituden zwischen 30 und 36 dB schwankt. Der für Telefon-Sprachübertragung geforderte Wert von mindestens 26 dB wird eingehalten.

6.6 PCM-Übertragungssystem

Das mit 8kHz abgetastete und mit 8 Bit nichtlinear quantisierte Sprachsignal stellt einen PCM Basiskanal dar und bildet z.B. beim ISDN einen B-Kanal. Seine Datenrate beträgt $8 \text{ Bit} \cdot 8\text{kHz} = 64\text{kBit/Sekunde}$. Für eine ökonomische Übertragung werden mehrere PCM-Kanäle zu Multiplex-Kanälen gebündelt.

System PCM 30/32: 30 Sprach- oder Datenkanäle mit je 64 kBit/sec und 2 Betriebskanäle, insgesamt 32 Kanäle

Aufbau eines PCM-Rahmens



Die Datenrate r_{BIT} eines PCM30 Kanals beträgt $32 \cdot 8\text{Bit}/125\mu\text{sec} = 2048 \text{ kBit/sec}$. Für die Übertragung eines Bits steht eine Zeit von

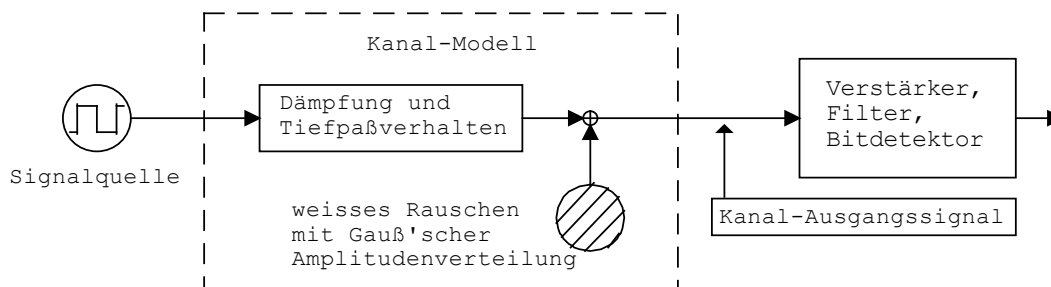
$$t_{\text{BIT}} = \frac{1}{r_{\text{BIT}}} = \frac{1}{2048 \cdot 10^3 \cdot \text{sec}^{-1}} = 0,488 \mu \text{ sec zur Verfügung.}$$

Zur weiteren Bündelung lassen sich mehrere PCM30 Kanäle zusammenfassen.

PCM-Hierarchie:

PCM 30	30/32 Kanäle	2048 kBit/sec	verdrillte Adern
PCM 120	120/132 Kanäle	8448 kBit/sec	Koaxialkabel
PCM 480	480/512 Kanäle	34,368 MBit/sec	Breitband-Koax oder LWL
PCM 1920	1920/2176 Kanäle	139,264 MBit/sec	Breitband-Koax oder LWL
PCM 7680	7680/8828 Kanäle	564,992 MBit/sc	Breitband-Koax oder LWL

Der Datenstrom eines PCM-Basiskanal oder Multiplexkanals wird im einfachsten Fall als Impulsfolge übertragen. Dabei sind die Eigenschaften des Übertragungskanals zu berücksichtigen. Häufig wird ein Kanal mit Dämpfung, Tiefpassverhalten und additiven weißen Rauschen angenommen.

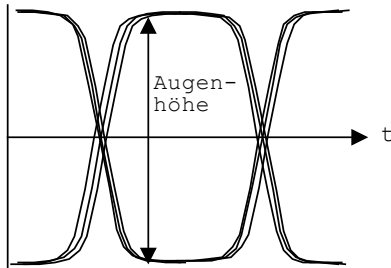


Die benötigte Kanalbandbreite hängt von der Datenrate der Signalquelle ab. Bei einer wechselnden 1/0 -Folge der Bits (NRZ-Signal) benötigt man mindestens die sogenannte Nyquistbandbreite

$$b_N = \frac{1}{2 \cdot t_{\text{BIT}}} = \frac{r_{\text{BIT}}}{2} \quad (6-12)$$

um die Grundschwingung des Rechtecksignals zu übertragen. Es treten dann aber schon starke Abweichungen des Kanal-Ausgangssignals vom Sendesignal auf. Grundsätzlich gilt, daß bei Tiefpassverhalten des Kanals die Flankensteilheit der Rechteck-Sendeimpulse abnimmt und dass, je nach der Durchlaufzeit der Frequenzanteile des Sendesignals über den Kanal, Ein- und Ausschwingvorgänge an den Flanken auftreten.

Zur Darstellung der Verformungen der Sendeimpulse bei der Übertragung durch den Kanal überlagert man am Ausgang viele Impulse zu Beginn ihrer positiven und negativen Flanke, z.B. indem man ein Oszilloskop auf beiden Flanken triggern lässt. Das entstehende Bild hat bei bestimmten Verzerrungen die Form eines Auges und wird als Augendiagramm bezeichnet.

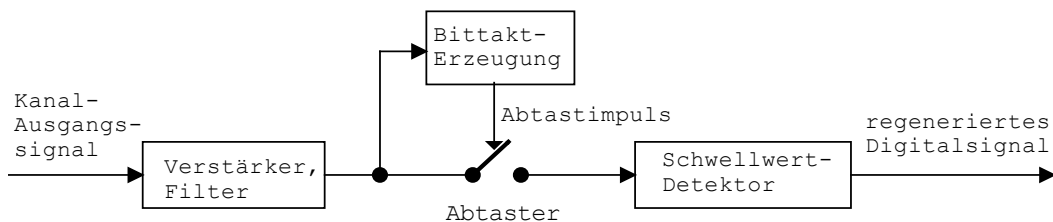


Zur störungsfreien Detektion am Kanalausgang sollte die Augenöffnung in horizontaler und vertikaler Richtung möglichst breit sein.

Die Augenhöhe gibt vor, wo die Detektionsschwellen für Low- und High-Pegel liegen. Bei geringer Augenhöhe und zusätzlich überlagerten Störungen oder Rauschen erhöht sich die Fehlerhäufigkeit.

Damit der Empfänger den Bitstrom im richtigen Zeitpunkt abtastet, muß er über eine Synchronisationseinrichtung verfügen, die den Bittakt erzeugt. Das damit wiedergewonnene Taktsignal triggert einen Abtaster, der im Idealfall in der Mitte eines Bits den Momentanwert des Bitstroms erfasst. Ein nachfolgender Pegeldetektor (Entscheider) stellt fest, ob der Momentanwert oberhalb oder unterhalb eines bestimmten Schwellwerts liegt und gibt dann eine 0 oder 1 ab.

Bei starken Störeinflüssen im Kanal kann man an den Empfängereingang ein Filter legen, das Störungen unterdrückt. Häufig wird ein signalangepasstes Filter (matched filter) benutzt, dessen Ausgangssignal für bestimmte Impulsformen des Sendesignals einen maximalen Signal-Stör-Abstand hat.



prinzipieller Aufbau eines Empfängers für Digitalsignale

Wird die Datenrate erhöht, verringert sich die Breite der Augenöffnung und durch das Ausschwingen benachbarter Impulse auch die Augenhöhe, wodurch der Schwellwertdetektor zunehmend falsche Bits erkennt und die Bitfehlerrate ansteigt. Eine Verbesserung der Detektion lässt sich erreichen, wenn die Sendeimpulse vor Aussendung so verformt werden, daß sie weniger hochfrequente Anteile enthalten. Der Tiefpasseinfluss des Kanals auf die Impulsform wird dadurch reduziert. Die Veränderung der Sendeimpulse wird auch notwendig, da bei längeren Folgen von 1 oder 0 der Bittakt für den Abtaster nicht mehr erzeugt werden kann. Da im Zuge der Leitungen häufig Gleichstromsperrern vorhanden sind, darf das Sendesignal ebenfalls keine Gleichstromkomponente enthalten, sonst würde das Empfangssignal laufend seinen Mittelwert verschieben.

Die fehlende Gleichstromübertragung erfordert eine spezielle Leitungscodierung. Anstelle des einfachsten NRZ-Codes (non-return-to zero) verwendet man z.B. den AMI-Code (gleichstromfrei) oder den Manchester-Code (gleichstromfrei und „selbsttaktend“), d.h. er enthält die (doppelte) Bittaktfrequenz.

7. Aufgaben zur Vorlesung Grundlagen der Nachrichtentechnik

1. Diskrete Informationsquelle

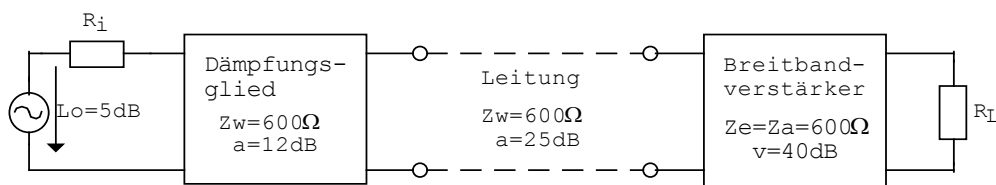
Eine diskrete Nachrichtenquelle gibt Zeichen ab, deren Auftreten voneinander unabhängig ist. Der gesamte Zeichensatz umfasst 6 Zeichen mit den Auftrittswahrscheinlichkeiten p_i :

Zeichen	A	B	C	D	E	F
p_i	0,1	0,15	0,3	0,08	0,25	0,12

- Begründen Sie, warum die Quelle nicht mehr als die 6 Zeichen abgeben kann!
- Wie groß ist der Informationsgehalt beim Auftreten der Zeichenketten ACE und BDF?
- Wie groß ist der mittlere Informationsgehalt der Quelle?
- Wie viel Bits je Zeichen werden mindestens zur Codierung benötigt?
- Jedes Zeichen werde mit 4 Bits codiert und es werden pro Sekunde 1000 Zeichen ausgesendet. Wie groß ist der Informationsfluss?

2. Übertragungssystem

In ein Übertragungssystem, bestehend aus Sender, Dämpfungsglied, Leitung, Verstärker und Lastwiderstand wird vom Sender ein **Leerlaufpegel** von 5dB eingespeist, $R_i = R_L = 600\Omega$.

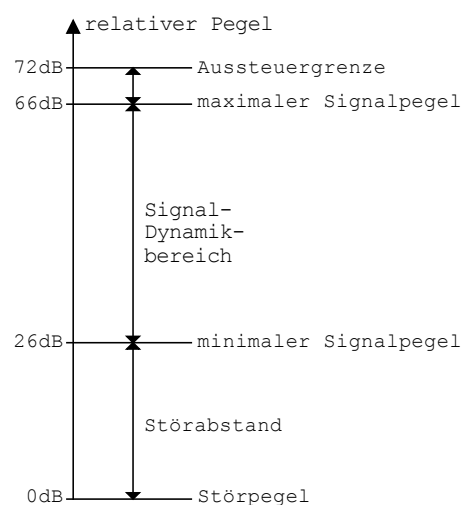


- Wie groß sind die Spannungen am Ein- und Ausgang des Verstärkers?
- Welche Leistung wird an den Lastwiderstand abgegeben?
- Wie groß muss der Leerlauf-Sendepegel sein, damit im Lastwiderstand eine Leistung von 1mW erzeugt wird?

3. SNR, Dynamikbereich

Ein Fernsprech-Übertragungssystem soll hinsichtlich des Signal-Dynamikbereichs und des Störabstands die in der Skizze dargestellten Anforderungen erfüllen.

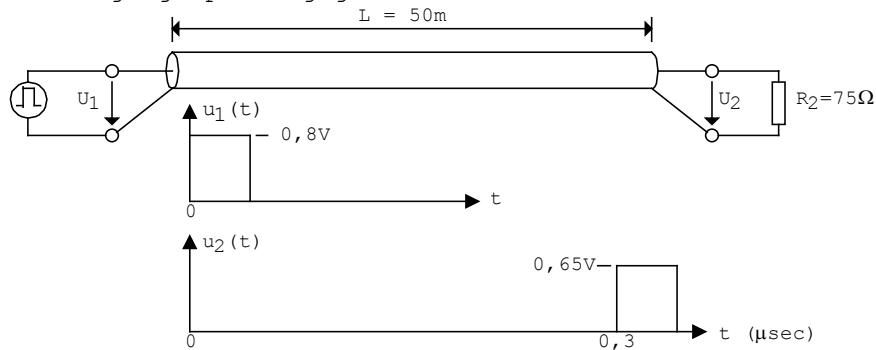
- Geben sie die Maximal- und Minimalwerte der Signalspannungen (Sinusverlauf) an, wenn der maximale Aussteuerbereich (Aussteuerergrenze) im Übertragungssystem $\pm 1V$ (Spitzenwert) beträgt! Berücksichtigen Sie dabei, dass im Pegeldiagramm immer auf **Effektivwerte** Bezug genommen wird!
- Wie groß ist der Effektivwert der Störspannung?



- Für eine twisted-pair-Leitung im Ortsnetz beträgt die Grenzfrequenz bei Längen bis zu einigen km ca. 100kHz, und es wird ein Störabstand von mindestens 26dB garantiert. Wie groß ist die maximale Übertragungskapazität bei 26dB und bei 66dB Störabstand?

4. Impulsübertragung auf einer Leitung

An einer Leitung wurden bei der Anpassung am Ausgang die dargestellten Verläufe von Ein- und Ausgangsspannung gemessen.



- Berechnen Sie Dämpfungsbelag in dB/m und Phasenbelag in Grad/m. ($f=500\text{kHz}$)
- Geben Sie die Leitungsbeläge unter der Annahme einer schwach gedämpften Leitung und $G'=0$ an!

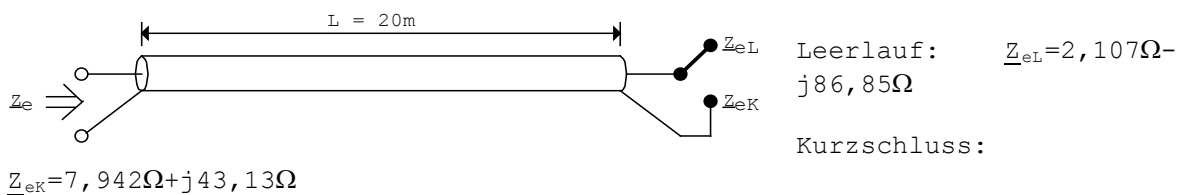
5. Leitung mit Belägen

An einer Leitung von 50m Länge wurden bei $f=300\text{kHz}$ für die Leitungsbeläge folgende Werte ermittelt: $R'=0,8\Omega/\text{m}$; $L'=350\text{nH}/\text{m}$; $C'=120\text{pF}/\text{m}$; $G'=10\mu\text{S}/\text{m}$

- Skizzieren Sie das Ersatzschaltbild für ein 2m langes Stück dieser Leitung ($f=300\text{kHz}$)!
- Berechnen Sie den Wellenwiderstand nach Betrag und Phase (in Grad), den Dämpfungsbelag (in Np/m) und den Phasenbelag (in rad/m). ($f=300\text{kHz}$)
- In die reflexionsfrei abgeschlossene Leitung von 50m Länge wird ein sinusförmiges Signal mit $\hat{u}=1\text{V}$, $f=300\text{kHz}$ eingespeist. Welche Amplitude und welche Phasenverschiebung (in Grad) hat die Spannung am Ausgang?

6. Leitung mit Leerlauf/Kurzschluss

An einer verlustbehafteten Leitung von 20m Länge wurden bei Leerlauf bzw. Kurzschluss am Leitungsende folgende Werte der Eingangsimpedanz gemessen ($f=1\text{MHz}$):



Die Eingangskapazität der Leitung bei offenem Ende betrug $C_e = 1,6\text{nF}$.

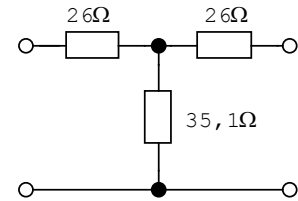
- Berechnen Sie den Wellenwiderstand nach Betrag und Phase!
- Bestimmen Sie die Leitungsbeläge C' , L' und R' unter der Annahme, dass $G'=0$ ist!

Hinweis: Die Gleichungen für die schwach verlustbehaftete Leitung dürfen nicht verwendet werden.

7. Dämpfungsglied

Analysieren Sie das nebenstehende Dämpfungsglied!

- Mit welchem Widerstand R_L muss das Dämpfungsglied abgeschlossen werden, damit der Eingangswiderstand gleich dem Abschlusswiderstand ist?
- Welche Dämpfung hat das Dämpfungsglied unter Betriebsbedingungen?



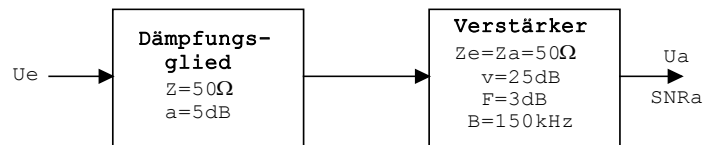
8. SNR eines Empfängers

Ein Empfänger hat ein Rauschmaß von 7dB, eine Bandbreite von 100kHz und jeweils 50Ω Ein- und Ausgangswiderstand. Neben dem Eingangssignal tritt im System nur thermisches Rauschen auf.

- Wie groß ist das Signal-Rausch-Leistungsverhältnis am Eingang und am Ausgang bei einer Eingangsspannung von $1\mu\text{V}$? ($T=290\text{K}$).
- Bei welcher Eingangsspannung beträgt der Signal-Rauschabstand am Ausgang 26dB?

9. Zweistufiges Empfangssystem

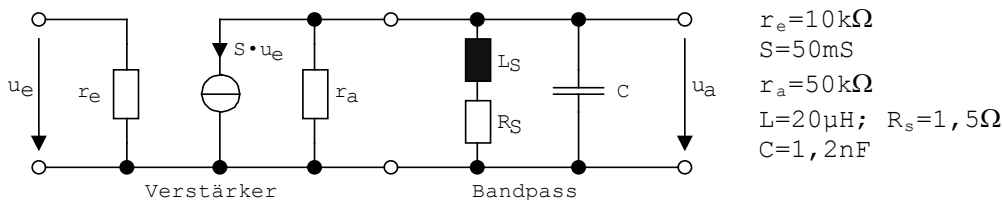
Ein Empfangssystem besteht aus einem Dämpfungsglied mit 5dB Dämpfung und einem Schmalbandverstärker mit 25dB Verstärkung, 150kHz Bandbreite und 3dB Rauschmaß. ($T=290\text{K}$)



- Wie groß sind Gesamtverstärkung und Gesamttrauschmaß?
- Bei welcher Eingangsspannung tritt am Ausgang ein Signal-Rauschabstand von 40dB auf?

10. Schmalbandverstärker

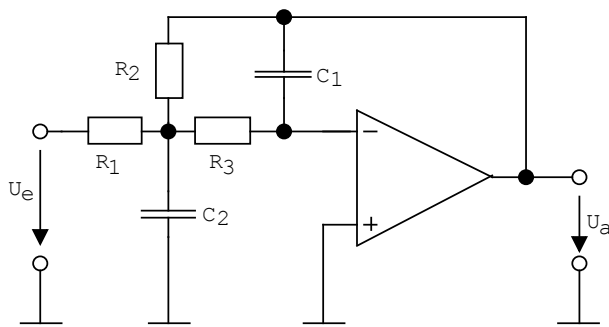
Das skizzierte selektive Verstärkersystem, bestehend aus Verstärker- und Bandpassblock, ist zu analysieren.



- Rechnen Sie zuerst die Serienschaltung von L_S und R_S in eine Parallelschaltung von L_P und R_P um. Für die Parallelschaltung kann angenommen werden, dass $\omega L_S \gg R_S$ ist.
- Berechnen Sie Mittenfrequenz, Bandbreite und maximale Verstärkung!
- Wie groß ist die Bandbreite bei 20dB Amplitudenabfall vom Maximalwert?

11. Aktiver Tiefpass

Der dargestellte aktive Tiefpass ist zu analysieren. Die Grenzfrequenz beträgt $f_g = 4\text{kHz}$.



$$\begin{aligned} R_1 &= 1\text{k}\Omega \\ R_2 &= 2,2\text{k}\Omega \\ R_3 &= 2,9\text{k}\Omega \\ C_1 &= 4,7\text{nF} \\ C_2 &= 33\text{nF} \end{aligned}$$

idealer Operationsverstärker

- Stellen Sie die Übertragungsfunktion in Normalform auf und geben Sie die maximale Verstärkung an!
- Bestimmen Sie die Filterkoeffizienten! Welchem der drei Standardtiefpässe kommt die Schaltung am nächsten?
- Die Bauelementwerte der Schaltung sind für eine max. Verstärkung von 1 (Betrag), gleiche Filterkoeffizienten und gleiche Grenzfrequenz neu zu berechnen. An den Widerstandswerten soll möglichst wenig geändert werden.

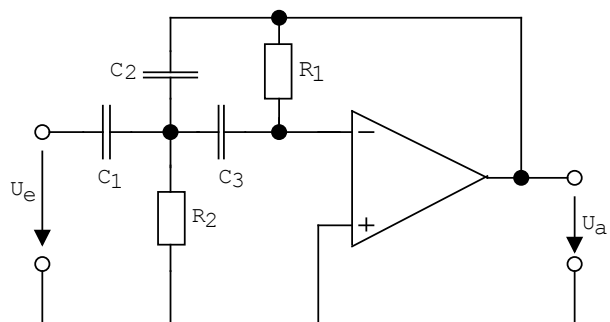
*Normalform: Nennerpolynom hat die Form $1 + a_1 \cdot j\omega + a_2 \cdot j\omega^2 + \dots$

12. Aktiver Hochpass

Anhand der dargestellten Schaltung ist ein Hochpass mit folgenden Eigenschaften zu entwerfen:

maximale Verstärkung: 7dB
Grenzfrequenz: 300Hz
Filtertyp: Butterworth

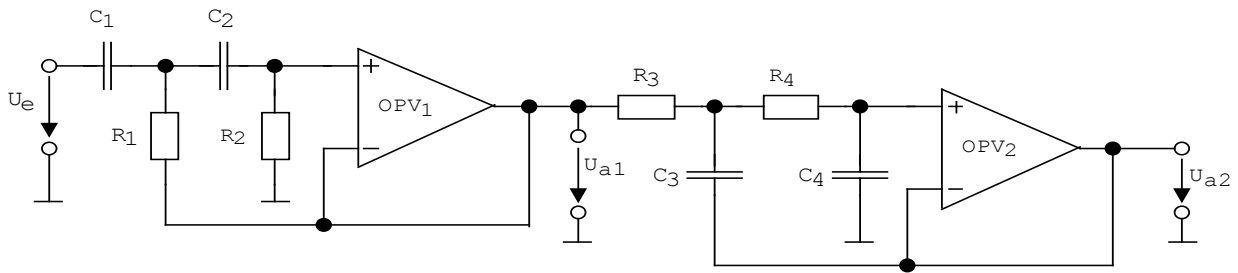
Die Kondensatoren C_2 und C_3 sollen jeweils einen Wert von 100nF haben.



- Stellen Sie die Übertragungsfunktion in einer der Formen nach Gl.(3-5) auf!
- Berechnen Sie Werte von C_1 , R_1 und R_2 !
- Wie ändern sich Verstärkung, Grenzfrequenz und die Filterkoeffizienten, wenn für die Widerstände nur Werte aus der Reihe E12 und für die Kondensatoren aus der Reihe E6 verwendet werden?

13. Bandpass

Analysieren Sie die dargestellte Filterschaltung.



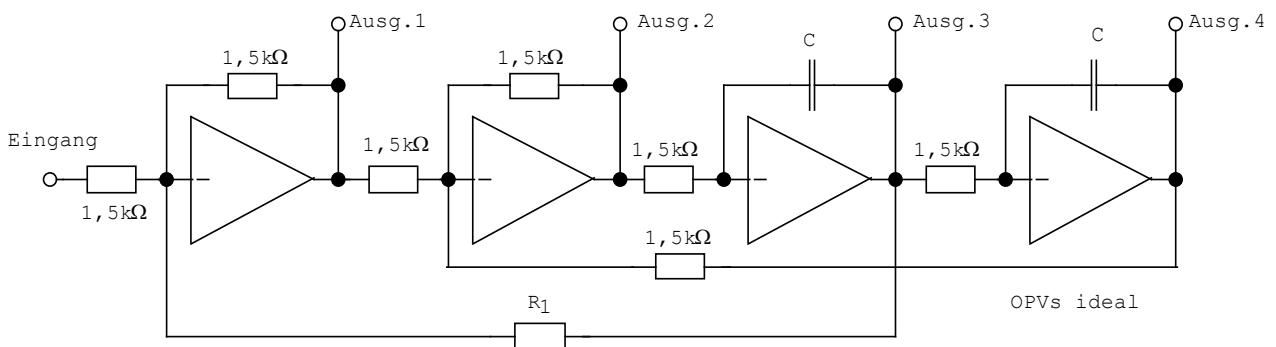
$$C_1=100\text{nF} \quad C_2=100\text{nF} \quad R_1=3,9\text{k}\Omega \quad R_2=7,5\text{k}\Omega$$

$$C_3=15\text{nF} \quad C_4=6,8\text{nF} \quad R_3=4,7\text{k}\Omega \quad R_4=4,7\text{k}\Omega$$

- Geben Sie die Übertragungsfunktionen U_{a1}/U_e und U_{a2}/U_{a1} der beiden Filter an!
- Bestimmen Sie die Filterkoeffizienten und die Grenzfrequenzen!
- Welchem Standardfilter kommen die Filterkoeffizienten am nächsten?
- Simulieren Sie die Schaltung mit PSpice o.ä. und bestimmen Sie die Grenzfrequenzen!
Unter PSpice können die Operationsverstärker durch eine spannungsgesteuerte Spannungsquelle (E) und $\text{gain}=1\text{e}5$ ersetzt werden.

14. Universalfilter

Die dargestellte Universal-Filterschaltung soll als Frequenzweiche eingesetzt werden, wobei nur die Trennung von hohen und tiefen Frequenzen benötigt wird.



- An welchen Ausgängen tritt Hochpass- bzw. Tiefpassverhalten auf?
- Geben Sie die Übertragungsfunktionen für Hoch- und Tiefpass in Normalform an!
- Berechnen Sie für den Tiefpass R_1 und C für Butterworth-Verhalten und eine Grenzfrequenz von 3kHz!
- Zeigen Sie rechnerisch, dass der Hochpass die gleiche Grenzfrequenz wie der Tiefpass hat!

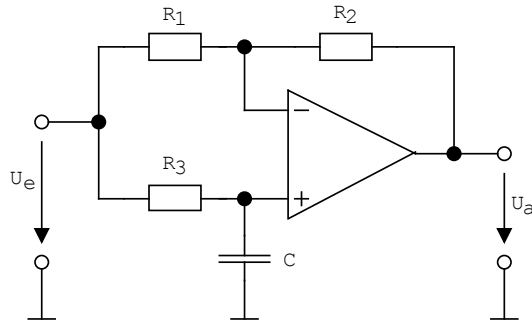
15. Lineare und nichtlineare Systeme

In der Nachrichtentechnik wird zwischen linearen und nichtlinearen Übertragungssystemen unterschieden.

- Nennen Sie jeweils 3 typische Eigenschaften der beiden Klassen von Übertragungssystemen!
- Erläutern Sie den Unterschied von linearen und nichtlinearen Verzerrungen!

16. Allpass

Analysieren Sie die dargestellte Schaltung eines Allpasses mit idealem OPV!

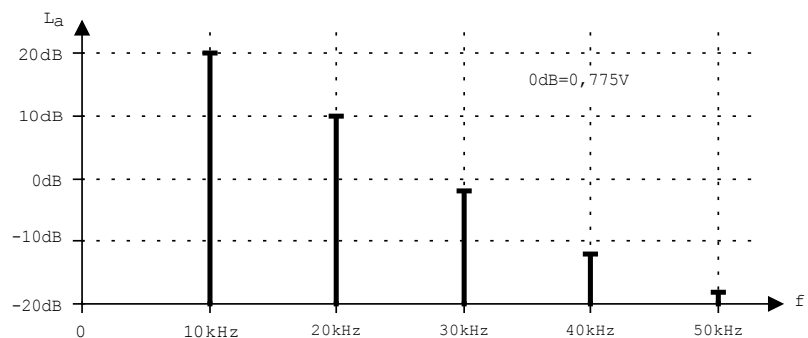


- Geben Sie die allgemeine Übertragungsfunktion U_a/U_e in Normalform an!
- Für welche Widerstandskombination hat die Schaltung allpassverhalten?
- Bestimmen Sie die maximale Gruppenlaufzeit für $R_1=R_2=R_3=10\text{k}\Omega$ und $C=22\text{nF}$ und überprüfen Sie das Ergebnis mit einer PSpice-Simulation

17. Klirrfaktorberechnung

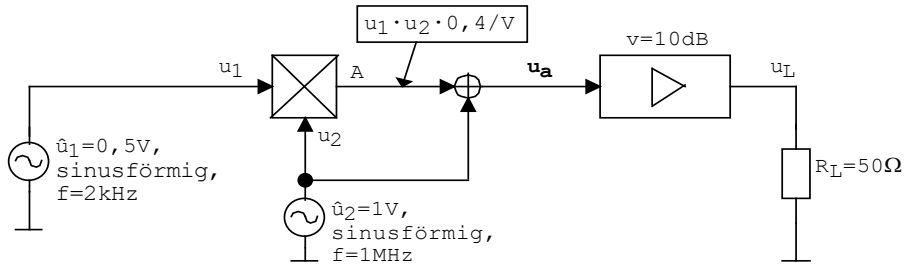
Das dargestellte Betragsspektrum wurde am Ausgang eines Verstärkers an einem Lastwiderstand von 50Ω gemessen. Die Eingangsfrequenz betrug 10kHz .

- Wie groß ist die gesamte Ausgangsleistung?
- Berechnen Sie den Klirrfaktor der Ausgangsspannung!



18. AM-Modulator mit Verstärker

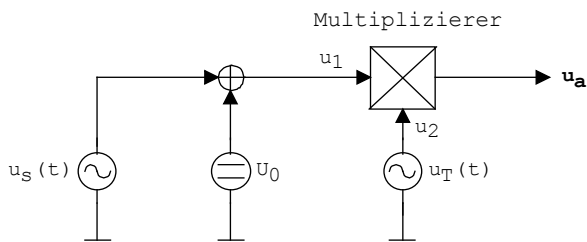
Gegeben ist ein AM-Modulator mit Analogmultiplizierer und Ausgangsverstärker.



- Berechnen Sie von u_a den Modulationsgrad und die Maximal- und Minimalwerte (Scheitelwerte)!
- Welche Spektralkomponenten treten am Ausgang A des Multiplizierers auf?
- Skizzieren Sie das Ausgangsspektrum von u_a mit Angabe von Amplituden und Frequenzen!
- Die AM-Schwingung speist über einen Verstärker (50Ω Eingangswiderstand) einen Last von 50Ω . Welche Leistung entsteht in R_L ?

19. AM-Modulator

Analysieren Sie den dargestellten AM-Modulator!



$$\text{Multiplizierer: } u_a = u_1 \cdot u_2 \cdot 2V^{-1}$$

$$u_s(t) = 0,8V \cdot \cos(\omega_s t)$$

$$U_0 = 2V$$

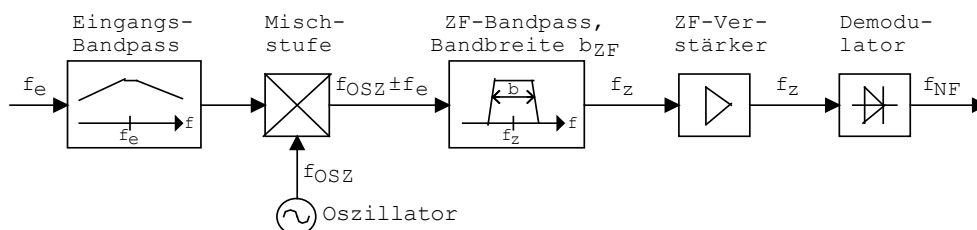
$$u_T(t) = 1,5V \cdot \cos(\Omega_0 t)$$

$$\Omega_0 = 2\pi \cdot 1\text{MHz}, \quad \omega_s = 2\pi \cdot 4\text{kHz}$$

- Wodurch unterscheidet sich der Modulator von dem in Aufgabe 18?
- Berechnen Sie den Modulationsgrad, \hat{u}_{amax} und \hat{u}_{amin} !

20. Überlagerungsempfänger

Ein Überlagerungsempfänger mit dem dargestellten Blockschaltbild soll ein AM-Signal von 972kHz empfangen werden. Die Zwischenfrequenz beträgt 450kHz.



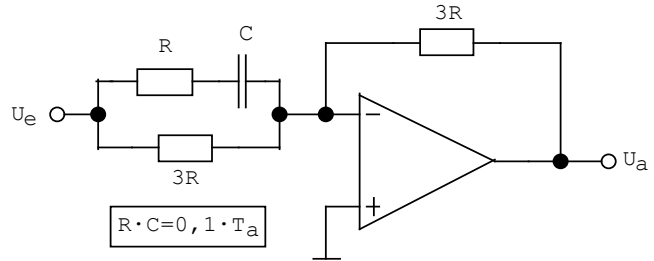
- Auf welcher Frequenz muss der Oszillator schwingen, damit das Signal empfangen werden kann?
- Die maximale Modulationsfrequenz des AM-Signals beträgt 4,5kHz. Welche Bandbreite muss der Bandpass vor dem ZF-Verstärker haben?
- Wozu wird der Eingangs-Bandpass benötigt? Machen Sie Angaben über seinen Amplitudengang, wenn die Spiegelfrequenz mit 40dB unterdrückt werden soll!

21. Si-Entzerrer

Die Speicherung eines abgetasteten Signalwertes mit einem Halteglied bis zum nächsten Abtastzeitpunkt entspricht einer Filterung des Signals mit einer Si-Funktion.

a. Geben Sie den durch das Halteglied bewirkten Amplitudenbewertungsfaktor für die Frequenzen $f=0$, $f_a/8$, $f_a/4$, $3f_a/8$ und $f_a/2$ an!

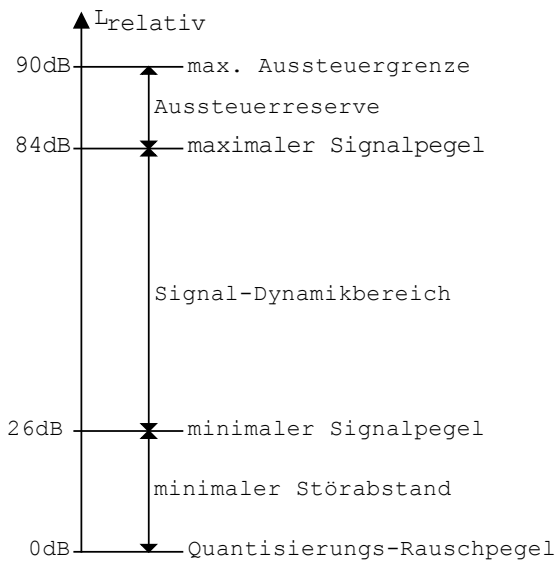
b. Eine einfache Schaltung zur Enzerrung des Halteglied-Frequenzgangs ist die dargestellte Schaltung, die hinter dem D/A-Umsetzer oder vor dem A/D-Umsetzer eingesetzt werden kann.



Berechnen Sie den Frequenzgang der Schaltung und die relativen Abweichungen zur Entzerrung einer Si-Funktion bei $f=0$, $f_a/4$, und $f_a/2$.

22. PCM-System

Ein PCM-System zur Digitalisierung von Signal-Wechselspannungen soll die in der Grafik dargestellten Forderungen hinsichtlich des Signal-Störabstandes und des Signaldynamikbereichs erfüllen.



a. Wie viel Bits werden für eine lineare Quantisierung benötigt?

b. Der maximale Aussteuerbereich des A/D-Umsetzers beträgt $1V_{ss}$. Wie groß ist der Effektivwert der Quantisierungs-Rauschspannung? (Annahme: Quantisierungsfehler hat dreieckförmigen Verlauf)

c. In welchem Amplitudenbereich (Effektivwerte) liegt die Signalspannung?