·开发与应用·

三角形对的快速相交测试

张忠祥， 王士同
（江南大学 信息工程学院，江苏 无锡 214122）

摘 要：为提高碰撞检测的响应速度，提出了一种基于Ayellet算法的改进算法。该算法从代数的角度出发，首先快速排除掉三角形对不相交或共面的两种情况，然后分别计算一个三角形与另一个三角形所在平面的相交线段，最后检测这两条线段是否有公共点。如果有公共点则三角形对相交，反之则不相交。该算法也可以应用于类似的问题，如矩形对的相交测试、多边形对的相交测试。实验结果表明，该算法的速度优于改进前的算法。

关键词：碰撞检测；三角形对；相交测试；矩形对；多边形对
中图法分类号：TP391.9 **文献标识码**：A **文章编号**：1000-7024 (2010) 04-0869-03

Fast intersection test for triangle to triangle

ZHANG Zhong-xiang, WANG Shi-tong
(School of Information Technology, Jiangnan University, Wuxi 214122, China)

Abstract: To improve the response speed of collision detection, an improved algorithm based on Ayellet algorithm is proposed. The algorithm from the algebraic point of view, firstly fast rejects the possibilities of the disjointed or coplanar triangles, secondly separately calculates the intersecting line segments between one triangle and the plane defined by the other triangle, finally detects if there are the public points between the two segments. If any the triangles are intersection, conversely do not intersect. This algorithm can also be applied to similar problems, such as rectangle to rectangle intersection test, and polygon to polygon intersection test. Experiments show that the proposed algorithm is faster than Ayellet algorithm.

Key words: collision detection; triangle to triangle; intersection test; rectangle to rectangle; polygon to polygon

0 引 言

碰撞检测在许多学科中是一个很基础的问题，例如计算机动画，虚拟现实，机器人技术，计算机仿真，实体造型和图形学等学科或领域都涉及了该问题。碰撞检测问题基于现实生活中一个普遍存在的事实：两个不可穿透的物体不可能共享相同的空间区域。在计算机动画中，对象必须能够针对碰撞检测的结果做出如实的合理的响应，反映出真实的动态效果；在机器人研究中[1]，机器人与障碍物间的碰撞检测是机器人的运动规划和避免碰撞的基础。近年来，随着计算机动画、虚拟现实技术和分布交互仿真等技术的兴起，碰撞检测再一次成为研究的热点。

原始的碰撞检测做法，就是对组成这两个对象的所有三角形片（假如对象由三角形面片组成）分别检测，这样做的话就需要进行很多次的三角形对相交测试，非常耗时。尽管这种方法可以得到正确的结果，但当模型的复杂度增高时，这种$O(n^2)$次的相交测试显然是无法容忍的。此外，这些测试通常发生在两个物体非常接近或快要碰撞时，因而检测的速度是碰撞检测的核心问题，显的尤其重要。

许多碰撞检测的算法是通过使用数据结构的层次模型来减少三角形对相交测试次数，在遍历过程中，排除了不可能相交基本几何元素的集合，在底部的层次结构，再对它们的基本几何元素进行两两间的相交测试，以精确确定是否有碰撞发生。

本文提出了一种基于Ayellet算法[2]的改进算法，该算法从代数的角度出发，首先建立6个线性方程，其中3个线性方程的方程组检测三角形 T_A 上的三条边与三角形 T_B 所在平面π_2是否存在相交的交点，另外3个线性方程的方程组检测三角形T_B的三条边与三角形T_A所在平面π_1是否存在相交的交点。如果有交点则计算出这些相交的点，没相交的点则可以快速排除掉这两个三角形分离的情况；然后计算三角形T_A与三角形T_B所在平面π_2的相交线段，反过来计算三角形T_B与三角形T_A所在平面π_1的相交线段，最后检测这两条线段是否有公共点，而不去计算这两条线段相交点的具体坐标。如果有公共点则三角形对相交，反之则不相交。

相比Ayellet算法，改进的算法不需要计算出三角形对的相交时的准确交点，从而减少了算术运算，在速度上的得到了提高。

收稿日期：2009-02-16；修订日期：2009-10-30。
作者简介：张忠祥（1983－），男，江苏盐城人，硕士研究生，研究方向为数字媒体；王士同（1964－），男，江苏扬州人，教授，博士生导师，研究方向为人工智能、模式识别、图像处理以及生物信息学。E-mail：zzx19832190@163.com

1 现有算法的概述

目前有很多种检测三维空间中两个三角形是否相交的算法，其中原始的算法是 brute-force 方法[3]，也叫蛮力法。其基本原理是通过检测一个三角形上的每一条边与另一三角形的每一条边是否相交，如果检测出有两条边相交，则这两个三角形相交。由于该算法要求解一系列的方程，使得该算法的效率非常低，因此很多人研究出了很多改进算法，这些算法主要可分为两种：一种是标量判别法，另一种是矢量判别法。

标量判别法是根据三维空间中的两个三角形到另一个三角形所在平面的距离以及两个三角形所在的两个平面的相交线的关系来判断这个两个三角形是否相交的算法[3]。比较有代表性的是 Moller 和 Held 算法。其中 Moller 和 Held 算法的基本原理如下[4]：设有两个三角形分别记为 T_A 和 T_B，对应的顶点分别为：$V_{0'}$、$V_{1'}$、$V_{2'}$和$V_{0''}$、$V_{1''}$、$V_{2''}$，三角形对应所在的两个平面分别记为π_1、π_2。首先计算三角形 T_B 到平面π_1 的距离记为d_{vi}(i=1,2,3)，然后根据d_{vi}来判断三角形对的关系。如果d_{vi}不等于零且同号，那么T_B和π_1的位于同一侧，可以快速排除不相交的情况。如果d_{vi}都等于零，那么这两三角形共面，接下来需要进二维的三角形对相交测试。如果d_{vi}有一个值为零，另外两个同号，需要再判断值为零的那个顶点是否在三角形 T_A 内。如果d_{vi}的 3 个值出现异号或者其中的两个值为零，则构造每个三角形与另外一个三角形所在平面的相交线段 s、l，接下来只需要检测这两条线段是否相交来判断三角形对是否相交。

矢量判别法是首先根据由两个三角形构成的 3 个行列式的计算值符号判定两个三角形在三维空间中的位置关系[3,5]，如果有相交的可能性再接着判别其是否相交。最具有代表性的算法是 Devillers&Guigue 算法[6-8]。其原理是首先对三角形 T_A 上的 3 个顶点与三角形 T_B 所在的平面π_2的位置关系进行讨论：当 3 个行列式同号且不为零，说明 T_A 的 3 个顶点在平面π_2同侧，则可以快速排除三角形对不相交的情况；当 3 个行列式均为零，说明 T_A 的 3 个顶点在平面π_2里，则两个三角形共面，接着需使用二维的三角形对相交测试方法进行检测；当 3 个行列式中一个为零，其余同号，行列式为零的点落在两平面的交线上，只要判断此点是否在另一三角形内；当 3 个行列式出现异号，则 T_A 的顶点位于平面π_2的两侧，T_A 与π_2相交。同理对 T_B 和π_1 做测试。与标量判别法类似，通过检测每一个三角形与另一个三角形所在平面构成的两条线段是否相交，判断这两个三角形是否相交。

2 算法设计与实现

现假设三角形 A 和 B 是三维空间中的任意两个三角形，如果 A 和 B 相交，那么必有一个三角形的边和另外一个三角形的面相交。这样的话就可以通过测试三角形的三条边来检测两个三角形否相交。设三角形 B 中一个顶点是 P，p_1 和 p_2 是它的两条边，$q_i(1\leqslant i\leqslant 3)$是三角形 A 的边，其对应的顶点为 Q_i，如图 1 所示。要找到由 p_1 和 p_2 所定义的面和边 $q_i(1\leqslant i\leqslant 3)$ 相交的点，就需要求解下面的方程。

$$P+\alpha_1\times p_1+\alpha_2\times p_2=Q_i+\beta_i\times q_i \tag{1}$$

为了保证相交的点位于三角形的内部，需要满足下面的

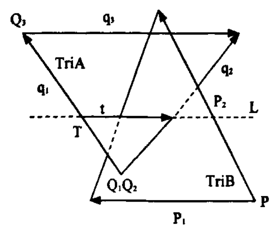


图 1　三维空间的三角形对

约束条件：$0\leqslant\beta_i\leqslant 1$，$\alpha_1,\alpha_2\geqslant 0$，$\alpha_1+\alpha_2\leqslant 1$。显然要进行 6 次这样的测试，3 次是对三角形 A 的边与三角形 B 所在的面的检测，还有 3 次是对三角形 B 的边与三角形 A 所在的面的检测，因此需要求解 6 个方程。可以通过约去公共元素和利用线性矩阵求解减少算术运算。

首先求解其中的 3 个方程得到β_i，这里 A 和 B 的角色是任意选取的。如果不存在满足约束条件的β_i 的值（下面叫合法的β_i），就可以快速的排除分离的三角形对。否则用β_i 的值来构造每个三角形与另一个三角形所在平面的相交线段，然后对这两个相交线段的进行相交检测。两个线段如果相交，则三角形对相交，反之则没有。算法大致可分为 4 个步骤。

2.1 求解β_i的值

设 $r_i=Q_i-P$ 则公式(1)可以写成下面的矩阵形式

$$(p_1 p_2 q_i)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ -\beta_i\end{pmatrix}=(r_i) \tag{2}$$

定义矩阵 $A(v)=(p_1|p_2|v)$则方程(2)又可以写成

$$A(q_i)x_i=r_i \tag{3}$$

式中：$x_i=(\alpha_1,\alpha_2,-\beta_i)$为了保证相交的点在边 q_i 上，方程的解必须满足条件 $0\leqslant\beta_i\leqslant 1$，只有满足该条件，才称$\beta_i$ 为合法的。公式(3)可以通过行列式来求解，可得到$\beta_i=-\dfrac{|A(q_i)|}{|A(r_i)|}$。

矩阵 $A(q_i)$ 和 $A(r_i)$ 的行列式可以通过行列式展开法来求解。p_1 和 p_2 都是行列式的前两列，可以消除第 3 行，这样的话，则行列式的代数余子式相同，所以代数余子式只要计算一次就可以了。当 i=3 时

$$\begin{aligned}q_3&=q_2-q_1\\ Q_3&=Q_1+q_1\\ r_3&=P-Q_3=P-(Q_1+q_1)=r_1+q_1\end{aligned} \tag{4}$$

由于行列式中有一列是线性的，所以当 i=3 时可得到下面的公式

$$\begin{aligned}|A(q_3)|&=|A(q_2-q_1)|=|A(q_2)|-|A(q_1)|\\ |A(r_3)|&=|A(r_1)|+|A(q_1)|\end{aligned} \tag{5}$$

因为当 i=1,2 时，公式(5)右边的行列式已经被计算出，所以当 i=3 时就可以直接使用计算出来的行列式的值。总之，在这一步只要解两个方程，而不是 3 个方程。每个方程只要求解一个变量，代数余子式只要计算一次，减少了计算工作。

2.2 快速排除分离的和共面的三角形对

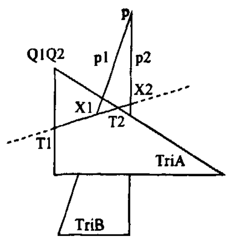
如果没有合法β_i 存在，那么三角形 A 的 3 个顶点都在平面 B 同一侧，这两个三角形是不可能相交的。该算法中快速排除分离三角形对的速度比 Moller 和 Held 算法速度要快很多。

如果行列式$A(q_i)$都为 0，则这两个三角形的在三维空间

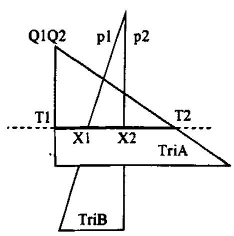
中是共面的，这时就可以用共面情况下的三角形对相交测试方法来检测。这里不做讨论，Moller 中有讲述。

2.3 构造每个三角形与另一个三角形所在平面的相交线段

如果上述两种情况都不满足，则三角形 A 和三角形 B 所在的平面 B 会有一个相交线段，是两个三角形各自所在平面相交直线的一部分，如图 2 所示。线段的两个点刚好是三角形 A 的边和平面 B 相交的两个点，这两个点可通过β_i计算得到：$Q_i+\beta_i\times q_i$。用T_i标记相交线段的端点，如果β_1和β_2是合法的，则T_1、T_2可通过下面的公式得到



(a) 三角形对不完全相交



(b) 三角形对完全相交

图 2　三角形对在三维空间中的位置关系

$$T_1=Q_1+\beta_1 q_1$$
$$T_2=Q_2+\beta_2 q_2 \tag{6}$$
$$\overrightarrow{T_1T_2}=\beta_2 q_2-\beta_1 q_1$$

同理，互换下三角形 A 和平面 B 的角色，则可以得到三角形 B 和三角形 A 所在的平面 A 的相交线段，用X_i标记相交线段的端点，如果β_1和β_2是合法的，则X_1、X_2可通过下面的公式得到

$$X_1=P+\beta_1' p_1$$
$$X_2=P+\beta_2' p_2 \tag{7}$$
$$\overrightarrow{X_1X_2}=X_2-X_1=\beta_2' p_2-\beta_1' p_1$$

2.4 对相交线段进行检测

接下来只需要检测向量$\overrightarrow{T_1T_2}$和$\overrightarrow{X_1X_2}$是否相交就可以判断出三角形对是否相交。三角形对相交通常有两种情况：一种是不完全相交，一种是完全相交，如图 2 所示。我们的算法不需要区分这两种情况，只要比较向量$\overrightarrow{T_1T_2}$和$\overrightarrow{X_1X_2}$及T_1、T_2、X_1、X_2这 4 个点之间的最大距离向量$\vec{t}$的关系就可以了。如果$|\overrightarrow{T_1T_2}|+|\overrightarrow{X_1X_2}|\geq|\vec{t}|$则说明向量$\overrightarrow{T_1T_2}$和$\overrightarrow{X_1X_2}$有公共点，则可断定两个三角形相交；如果$|\overrightarrow{T_1T_2}|+|\overrightarrow{X_1X_2}|<|\vec{t}|$则说明向量$\overrightarrow{T_1T_2}$和$\overrightarrow{X_1X_2}$没有公共点，则断定两个三角形不相交。在图 2(a)中$\vec{t}=\overrightarrow{T_1X_2}=X_2-T_1$，图 2(b)中，$\vec{t}=\overrightarrow{T_1T_2}=T_2-T_1$。算法的流程如图 3 所示。

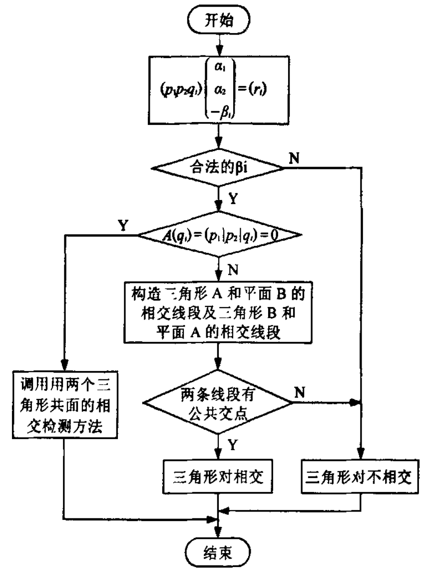


图 3　算法流程

3 实验结果

该实验在硬件配置为 CPU 主频双核 2.0GHZ，内存 2GB，显存 128MB 的 PC 机上运行，程序使用 OBB 树做数据结构和 RAPID 软件包，RAPID 软件包可以在网上免费下载，开发工具使用 VC6.0。图 4 是采用 Torus 的模型的实验效果图，颜色为红色时说明有三角形对发生了相交，白色则没有。

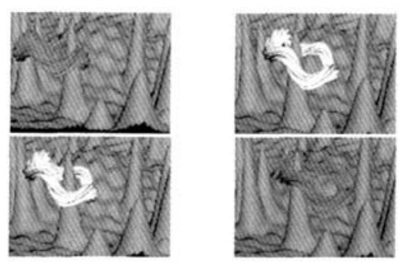


图 4　实验效果

和目前已有的算法相比，由于该算法不需要计算出准确的相交点，所以减少了算术运算，表 1 是该算法和目前的几个算法在算术运算上进行了分析比较。

表 1　不同算法的算术运算比较

算法	+/−	MUL	CMP	DIV	ABS	=
Held	74/94	35/45	33/50	1	3	51
Moller	54	57	12/28	−	3/9	69/75
Ayellet	26/27	56/57	13	−	−	31/35
Ours	21/22	46/47	15	−	3/6	25/26

为了便于和 Ayellet 算法及别的算法进行比较，我们进行了 19 566 次的三角形对相交测试，实验结果显示该算法是理想的。

(下转第 875 页)

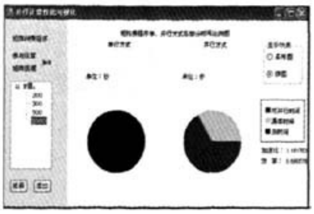


图 4　通信与并行时间比例

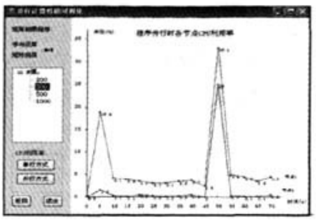


图 5　并行程序各节点 CPU 使用情况

矩阵规模为 300 时 CPU 的使用情况。可观察到并行程序在运行开始时以及后期某一时刻会大量占用 CPU 资源，程序员可以根据此视图查找原因，对该程序算法进行相应优化，避免性能瓶颈，以提高并行程序执行效率。

4　结束语

在并行计算研究领域中，有关算法效率、算法复杂度、算法执行时间等问题一直是研究者们不断探索和努力解决的主要内容。对并行计算性能可视化问题的研究在上述研究领域中起到的推进作用是不可忽视的。本文设计的基于异构平台的性能可视化模型可方便的获取性能数据并进行可视化，经实验表明是可行且简便的。下一步的工作是优化数据获取方式，扩展性能监测功能，便于程序员及用户多方位地分析程序、更有效地定位性能瓶颈，从而达到高效计算的目的。

参考文献:

[1] 来淼. 并行算法性能评测及并行监测工具关键技术的研究与实现[D].国防科学技术大学,2003.

[2] Barton P M,Jeffrey K H,Mark D C.The paradyn parallel performance measurement tool [J]. IEEE Computer, 1995,28 (11): 37-46.

[3] Michael T H,Jennifer E F.Paragraph:A performance visualization tool for MPI[J].University of Illinois and University of Tennessee,2003.

[4] 徐杰锋,舒继武,郑纬民.并行处理可视化监测环境[J].清华大学学报(自然科学版),2003,43(4):532-535.

[5] 马捷. 并行程序性能可视化分析系统的研究与实现[D]. 西安: 西安交通大学,1998.

[6] 王文义, 王春霞. PC 集群及其并行程序性能的实用检测方法[J].计算机工程与应用,2004,40(14):117-119.

[7] 卫兴武,刘晓平.一种实用的并行程序可视化性能分析方法[J].电脑应用技术,2007(4):16-21.

[8] 马桂杰,蒋昌俊,刘吟,等.基于插桩技术的并行程序性能分析方法设计和实现[J].计算机应用研究,2007,24(10):225-228.

[9] 李建华,刘玉生.Visual C#2005 全程指南[M].北京:电子工业出版社,2008.

(上接第 871 页)

4　结束语

本文从代数的角度出发提出了三维空间中三角形对的相交测试方法。相对 Ayellet[1]算法而言，改进后的算法不需要计算出三角形对相交时的具体交点坐标，只需要计算三角形 T_A 与三角形 T_B 所在平面 π_2 的相交线段，反过来计算三角形 T_B 与三角形 T_A 所在平面 π_1 的相交线段，最后检测这两条线段是否有公共点，而不去计算这两条线段相交点的具体坐标。若存在公共点则三角形对相交，反之则不相交。该算法减少了计算准确相交点的算术运算步骤，降低了算法的复杂度，缩短了测试所需时间，使得碰撞响应的速度得到了提高，能够更好的满足计算机动画的真实性和实时性要求。

参考文献:

[1] 高春晓, 刘玉树. 碰撞检测技术综述 [J]. 计算机工程与应用, 2002,38(5):9-11.

[2] Oren Tropp,Ayellet Tal,Ilan Shimshoni.A fast triangle to triangle intersection test for collision detection[J].Computer Animation and Virtual Worlds,2006,17:527-535.

[3] 邹益胜,丁国富,何邕,等.空间三角形快速相交检测算法[J].计算机应用研究,2008,25(10):2907-2909.

[4] 门晓鹏,吕晓峰,马登武,等.虚拟场景中基本几何元素相交测试技术[J].海军航空工程学院学报,2006,21(3):379-382.

[5] 许强,吕晓峰,马登武.三角形和三角形相交测试技术研究[J].计算机仿真,2006,23(8):76-78.

[6] Guigue P,Devillers O.Fast and robust triangle-triangle overlap test using orientation predicates [J]. Journal of Graphics Tools, 2003,8(1):25-42.

[7] Devillers O,Guigue P.Faster triangle-triangle intersection tests [R].Technical Report,2002:44-88.

[8] Shen H, Heng PA, Tang Z. A fast triangle-triangle overlap test using signed distances[J].Journal of Graphics Tools,2003,8(1):3-15.

三角形对的快速相交测试

作者： 张忠祥， 王士同， ZHANG Zhong-xiang， WANG Shi-tong
作者单位： 江南大学信息工程学院,江苏,无锡,214122
刊名： 计算机工程与设计 PKU
英文刊名： COMPUTER ENGINEERING AND DESIGN
年，卷(期)： 2010,31(4)

参考文献(8条)

1. 高春晓;刘玉树 碰撞检测技术综述[期刊论文]-计算机工程与应用 2002(05)

2. Oren Tropp;Ayellet Tal;Ilan Shimshoni A fast triangle to triangle intersection test for collision detection[外文期刊] 2006(5)

3. 邹益胜;丁国富;何邕 空间三角形快速相交检测算法[期刊论文]-计算机应用研究 2008(10)

4. 门晓鹏;吕晓峰;马登武 虚拟场景中基本几何元素相交测试技术[期刊论文]-海军航空工程学院学报 2006(03)

5. 许强;吕晓峰;马登武 三角形和三角形相交测试技术研究[期刊论文]-计算机仿真 2006(08)

6. Guigue P;Devillers O Fast and robust triangle-triangle overlap test using orientation predicates [外文期刊] 2003(01)

7. Devillers O;Guigue P Faster triangle-triangle intersection tests 2002

8. Shen H;Heng PA;Tang Z A fast triangle-triangle overlap test using signed distances[外文期刊] 2003(01)

本文读者也读过(5条)

引证文献(1条)