электронный журнал
МОЛОДЕЖНЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК
Издатель ФГБОУ ВПО "МГТУ им. Н.Э. Баумана". Эл No. ФС77-51038.

УДК 004.94

Численный метод решения задачи двумерной стационарной теплопроводности, основанный на статистическом методе

Бурдужа В. В., *студент*
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,
кафедра «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Научный руководитель: Градов В.М., д.т.н, профессор
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана
gradov@bmstu.ru

Введение

Для решения задач стационарной теплопроводности в двумерной области могут быть использованы различные приближенные методы, среди которых наиболее популярны метод переменных направлений (продольно-поперечная схема), статистический метод и его модификации, локально-одномерный метод и др.

В настоящей работе строится метод, основанный на идеях вероятностного подхода, но свободный от процедуры розыгрыша частиц, весьма затратной по времени счета.

Постановка задачи

Исходное двумерное уравнение теплопроводности имеет вид:

$$k\left(\frac{d^2U}{dx^2}+\frac{d^2U}{dy^2}\right)=f(x,y), \qquad (1)$$

где k – коэффициент теплопроводности, f (x, y) – функция источников энергии.

Функция f (x, y) в настоящей работе задается следующим образом:

$$f(x,y) = -5*\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\right]$$

Для решения задачи распределения тепла в пластине к этому уравнению добавляются условия однозначности.

Уравнение решается в области $G=\{0\le x\le l_x, 0\le y\le l_y\}$ – прямоугольнике со сторонами l_x и l_y, с граничными условиями I рода. В дальнейшем принимается $l_x = l_y = 1$м, с граничными условиями, заданными следующим образом:

$$\begin{cases} u(0,y) = 0, \\ u(l_x,y) = 50, \\ u(x,0) = 0, \\ u(x,l_y) = 50. \end{cases} \quad (2)$$

Согласно заданным граничным условиями значение температуры на верхней и правой границах постоянно и равно 50°C, а температура на левой и нижней границах поддерживается на уровне 0°C.

Методы решения задачи стационарной теплопроводности

Продольно-поперечная схема

В области G вводится разностная сетка и для значений функции $u_{i,j}$ в узлах сетки составляется разностная схема[1]. В левую часть уравнения вводится производная по времени $\frac{\partial u}{\partial t}$ и решается задача на установление. После этого можно воспользоваться продольно-поперечной схемой.

В этом случае решение задачи сводится к решению двух систем с трехдиагональными матрицами вида:

$$\frac{u_{ij}^{k+\frac{1}{2}} - u_{ij}^{k}}{\tau/2} = \Lambda_1 u_{ij}^{k+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 u_{ij}^{k} + f\left(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}}\right) \qquad (3)$$

$$\frac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^{k+\frac{1}{2}}}{\tau/2} = \Lambda_1 u_{ij}^{k+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 u_{ij}^{k+1} + f\left(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}}\right) \quad (4)$$

$$1 \le i \le N_x - 1, 1 \le j \le N_y - 1, 0 \le k \le M - 1$$

Здесь $u_{ij}^{k+\frac{1}{2}}$ – значение температуры в узле (i, j) на промежуточном (k+1/2) слое, Λ_1 и Λ_2 – разностные операторы .

Из системы (3), (4) находятся значения u_{ij}^{k+1} на (k+1)-м временном слое.

Схема (3) неявна по направлению x и явна по направлению y, а схема (4) явна по направлению x и неявна по направлению y, что позволяет использовать для нахождения решения одномерные прогонки.

После нахождения на (k+1)-м слое решения, описанные выше действия повторяются для всех моментов времени до выполнения условия $\left[\frac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^{k}}{u_{ij}^{k+1}}\right] < \varepsilon$, где ε – точность счета.

Статистический метод (Монте-Карло)

Статистическое моделирование (метод Монте-Карло) как инструмент научного исследования возникло фактически одновременно с зарождением теории вероятностей. Стохастичность результатов многих физических экспериментов позволяли высказать предположение о случайности изучаемых процессов, а наблюдаемая устойчивость некоторых усреднённых величин давала возможность исследовать статистические свойства полученных результатов и законы, которым подчиняется их поведение. Использование подобного подхода, основанного на непосредственном физическом эксперименте, позволило впоследствии перейти к применению алгоритмов статистического моделирования для решения задач, которые, на первый взгляд, не поддаются вероятностной интерпретации[3].

Суть метода Монте-Карло, или статистического метода, применительно к рассматриваемой задаче, заключается в запуске процесса блуждания N частиц из каждого узла заданной сетки и фиксации попадания каждой из этих частиц в границы. При этом значение температуры в узле получается по следующей формуле:

$$U_{ij} = \frac{1}{4*N}\sum Uгр. + f(x,y) * h^2 * K_б,$$

где Uij – значение температуры в узле с координатами i и j, N – число разыгрываемых частиц, Uгр. – значение температуры граничных узлов, в которые попали частицы в процессе блуждания, h – шаг сетки, Кб – число шагов при блуждании.

Кажущаяся простота алгоритма, возможность использовать унифицированный подход к решению задач с различными краевыми условиями, вычислять решение в отдельных заданных узлах сетки, а также другие положительные свойства метода по-прежнему побуждают исследователей к его использованию.

На точность решения оказывает большое влияние выбор размеров сетки. При чрезмерно большом шаге по обоим направлениям результат получится слишком усредненным, наоборот, слишком малый шаг может привести к ошибке вычислений. При небольшом количестве частиц, блуждающих в заданной области результат может быть недостоверным.

К существенному недостатку статистического метода следует отнести медленное выполнение данного метода, поскольку сложность работы его алгоритма равна O(Ni*Mj*N*Np), где Ni и Mj - размер сетки, N - число разыгрываемых частиц, Np - среднее число блужданий. При больших размерах сетки и большом числе разыгрываемых частиц получение результатов работы статистического метода может занять продолжительное время.

Чтобы решить проблему быстродействия возможно применение одной из модификаций статистического метода. Обход узлов сетки не по порядку, а начиная от границ и со сдвигом к центру, позволяет быстрее производить блуждание за счет достижения хотя бы одной из границ за одно перемещение частицы. Сложность алгоритма в данном случае уменьшается до O(Ni*Mj*N).

Данная модификация статистического метода, базирующаяся на сужении границ, натолкнула автора на мысль о зависимости между количеством частиц, показанных в узлах на границе, и расстоянием до узла, из которого производится розыгрыш. Очевидно, что вероятность попадания частицы в узел, расстояние до которого меньше, будет выше, чем в более отдаленный узел. Поскольку при бесконечном числе разыгрываемых частиц статистический метод сходится к некоторому решению, дающему наибольшую точность, то можно предположить, что при достаточно большом N результат будет зависеть исключительно от количества частиц, распределенных по границам пластины пропорционально расстоянию до начальных узлов. Основываясь на этом предположении, можно модифицировать статистический метод, чтобы решить проблему быстродействия.

Приближенный метод решения задачи теплопроводности, основанный на статистическом методе

Учитывая приведенные выше рассуждения можно модифицировать статистический метод, заменив этап блуждания частиц расчётом распределения частиц по границам, используя расстояние от текущего узла до каждой из границ пластины. Для расчета количества частиц, попадающих в текущий узел с координатами i и j, можно воспользоваться следующим алгоритмом:

1. Вычисляется расстояние $\mathrm{S_m}$ от узла (i, j) до границ по четырем направлениям вдоль линий сетки (m = 1,n).
$$S_1 = (\mathrm{N_x} - \mathrm{i})\mathrm{h_x}, S_2 = \left(\mathrm{N_y} - \mathrm{j}\right)\mathrm{h_y}, S_3 = \mathrm{ih_x}, S_4 = \mathrm{jh}_y$$
2. Определяется доля частиц, которая согласно методу должна переместится из узла (i, j) на границу $\mathrm{p_m} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{\mathrm{S_m}}{\sum S_\mathrm{m}}\right), m = 1{,}4.$
3. Находится количество частиц, попавших на каждую границу $\mathrm{N_m} = \mathrm{p_m}N$, $m = 1{,}4$

Приведем пример вычисления распределения частиц по границам пластины, используя описанный выше алгоритм. Пусть дано число частиц N=18. Принцип распределения частиц для узла (2,1) пропорционально расстоянию до границ представлен на следующем рисунке:

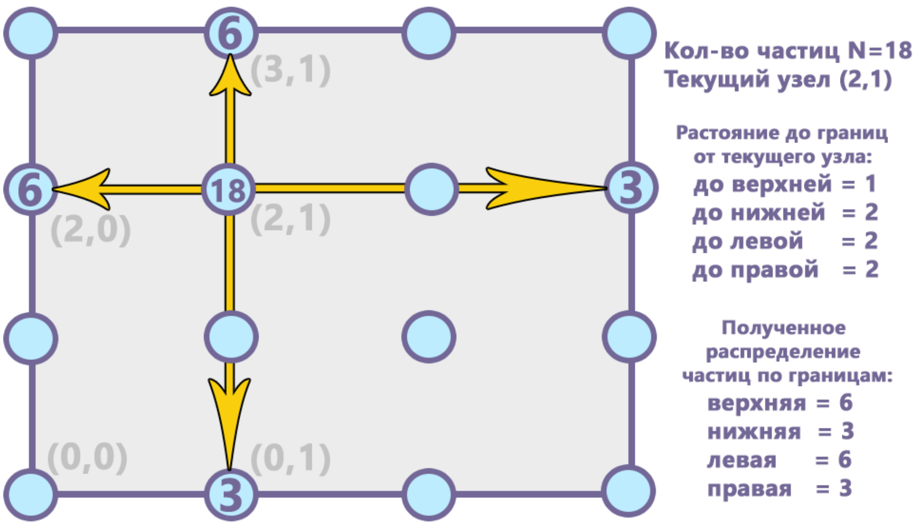

Рис. 1. Схема распределения числа частиц в пластине в узле (2.1)

Используя полученные выше значения распределений частиц по границам пластины можно получить значение температуры в текущем узле с координатами i и j, преобразовав формулу расчета, используемую в статистическом методе, следующем образом:

$$U_{ij} = \frac{1}{4 * N}[\text{Nв.} * (\text{Uгр. в.} + f(x,y) * h^2 * D_{\text{в.}}) + \text{Nн.} * (\text{Uгр. н.} + f(x,y) * h^2 * D_{\text{н.}}) + \text{Nп.} * (\text{Uгр. п.} + f(x,y) * h^2 * D_{\text{п.}}) + \text{Nл.} * (\text{Uгр. л.} + f(x,y) * h^2 * D_{\text{л.}})]$$

Следует обратить внимание на следующее допущение, представленное в данной формуле расчета температуры. Вместо количества блужданий используется значение расстояния до границы от текущего узла. Очевидно, что не все частицы в процессе блуждания будут попадать в границу пластины по наименьшему пути.

Преимущества использования приближенного метода решения стационарной задачи теплопроводности:

- сложность алгоритма уменьшилась до O(Ni*Mj), что позволяет существенно уменьшить время работы алгоритма по сравнению с статистическим методом;

- точность полученных результатов зависит от количества узлов сетки, при больших Ni и Nj точность алгоритма должна повышаться;
- оптимальное число частиц N для работы алгоритма должно быть кратно 2*(Nj+Ni) – 4, в противном случае возможно появление погрешности при отсечении нецелого количества распределяемых частиц (при использовании целочисленного деления);
- возможность использования для расчета поверхностей произвольных форм, и многомерных тел.

Сравнение приближенного метода с продольно-поперечной схемой и статистическим методом

Чтобы оценить работу предложенной модификации статистического метода, необходимо сравнить его с продольно-поперечной схемой и стандартным статистическим методом по признакам точности и быстродействия.

В качестве общих исходных данных для расчетов были взяты следующие значения:

- число разбиений сетки Ni и Mj по x и по y равно 100 в обоих направлениях;
- коэффициент теплопроводности выбран для неодимового стекла;
- длина и ширина пластины равна единице.

Для проведения сравнения были зафиксированы результаты работы метода продольно-поперечной схемы с точностью EPS=0,0000001 и шагом по времени tao=0.5. Данное распределение температуры в пластине было выбрано как эталонное, то есть наиболее близкое к реальному физическому распределению. Значения отклонений, представленных на рис. 2, 3, 4 являются относительными. Максимальная температура при нагреве пластины бралась 50°С.

Сперва было проведено сравнение решений продольно-поперечной схемы и статистического метода при большом заданном N, чтобы зафиксировать отклонение в работе статистического метода. Отклонение в результатах метода продольно-поперечной схемы и статистического метода при заданном N=100000 представлено на следующем рисунке:

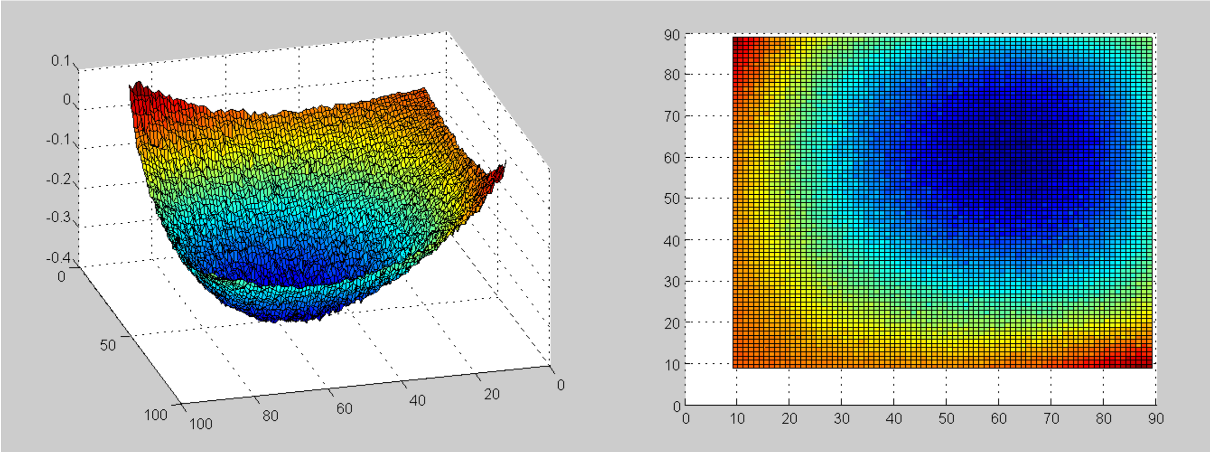

Рис. 2. Отклонение в результатах метода продольно-поперечной схемы и статистического метода при заданном N=100000

Параметры отклонения:
Min: -0.3229
Max: 0.08317
Процент наибольшего отклонения: 0.60%

Статистический метод позволяет получить точные результаты при большом выбранном числе частиц. На характер смещения отклонения от продольно-поперечной схемы влияют используемая формула расчета тепла в узле статистического метода и работа генератора случайных чисел при выполнении блужданий.

Также было проведено сравнение результата, полученного приближенным методом, с решением продольно-поперечной схемы. Отклонение в работе методов представлено на следующем рисунке:

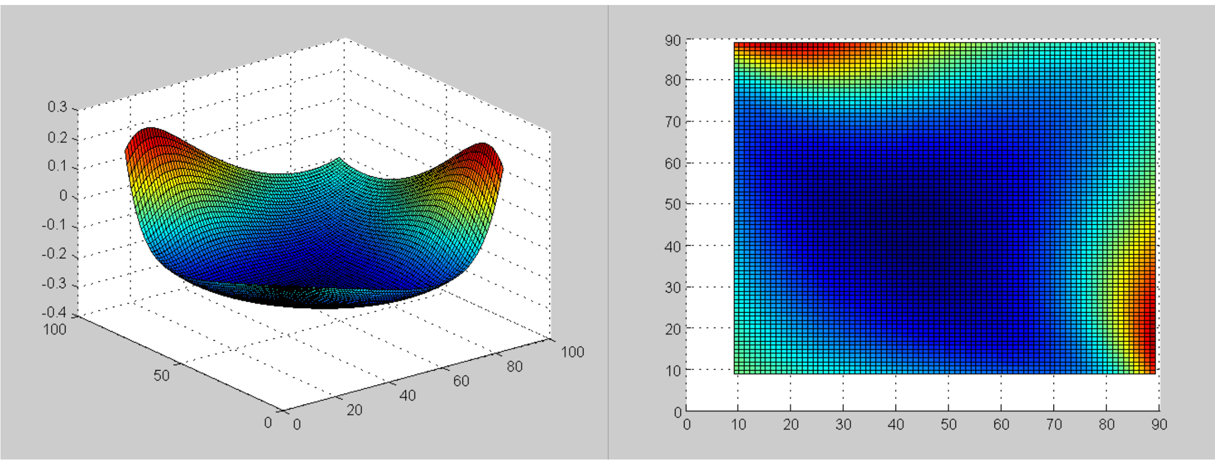

Рис. 3. Отклонение в работе методов продольно-поперечной схемы и приближенным методом

Параметры отклонения:
Min: -0.2728
Max: 0.19383
Процент наибольшего отклонения: 0.54%

Полученное отклонение характеризуется перепадами, сфокусированными в центральной области. В целом отклонение между двумя методами неравномерное. Однако, несмотря на это, разница между максимумами в полученных результатах этих двух методов составляет 0.54%, что говорит о получении более точного результата, чем зафиксированный ранее при работе статистического метода.

Также было произведено сравнение со статистическим методом при числе разыгрываемых частиц N=100000:

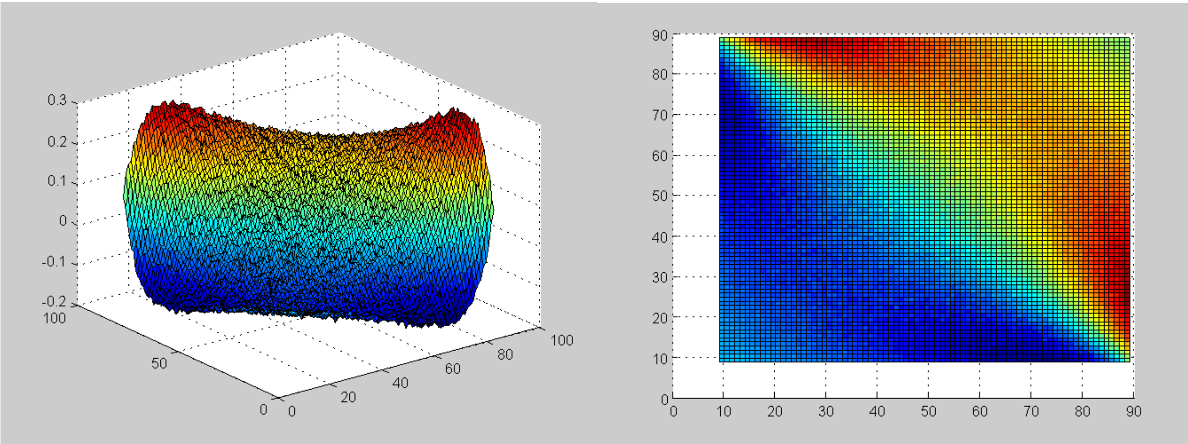

Рис. 4. Сравнение со статистическим методом с числом разыгрываемых частиц N=100000

Параметры отклонения:
Min: -0.1856
Max: 0.2714
Процент наибольшего отклонения: 0.54%

На рисунке можно заметить, что наибольшее отклонение в результатах расположено по обоим сторонам от диагонали пластины. Причиной этому послужило допущение при определении расстояния до границ в работе алгоритма приближенного метода. Результат, представленный на рис. 4, был получен при использовании в формуле расчета теплоты наименьшего расстояния до границ пластины (перпендикуляр, проведенный от узла к границе). Данное значение расстояния абсолютно верно для вычислений в окрестности диагонали пластины, но определенно нарушается при расчете в остальных узлах.

Хотя точность приближенного метода с данным допущением остается высокой, возможно большее увеличение точности при изменении формулы определения расстояния для границ тела.

Сравнение времени работы методов

Для сравнения результатов времени работы методов значения точности продольно-поперечной схемы и количество частиц статистического метода были взяты таким образом, чтобы отклонение в результатах работы этих методов было менее 0,5%. Таким образом производилось сравнение работы методов, показывающих близкий друг другу результат. Сравнение времени работы этих методов представлено в таблице:

Сравнение времени работы различных методов для решения стационарной задачи определения теплопроводности пластины

Метод	**Время выполнения**
Статистический метод	1д. 12ч. 34м. 13с. 765 мс.
Статистический метод с уменьшением границ	1ч. 27м. 54с. 368 мс.
Продольно-поперечная схема	6с. 720 мс.
Продольно-поперечная схема (параллельные вычисления на 2-х ядрах процессора)	3с. 324 мс.
Приближенный метод	108 мс.

Основываясь на полученных данных, можно сделать вывод, что производительность статистического метода крайне низкая. Метод уменьшения границ в статистическом методе позволил существенно сократить время расчета, однако показатель работы более 1 часа является существенным. Использование параллельных вычислений позволяет сократить время работы, однако данный подход требует наличия компьютера с процессором, имеющим несколько физический ядер и значительным объемом оперативной памяти.

При близких результатах распределения тепла в пластине наиболее быстрыми являются продольно-поперечная схема и приближенный метод.

Заключение

В данной статье был представлен и описан приближенный метод решения стационарной задачи теплопроводности, основанный на статистическом методе. Проведенное исследование его эффективности и быстродействия показало высокие результаты по точности работы алгоритма и быстродействию по отношению к расчетам, проведенным по продольно-поперечной схеме и стандартным статистическим методом.

Приближенный алгоритм отставляет возможности для дальнейшей модификации, которые требуют отдельного исследования. Так точность результатов приближенного метода может быть повышена, при использовании других принципов определения отношений распределения частиц по границам пластины. Например, если использовать при расчетах не наименьшее, а усредненное расстояние от текущего узла до граничного узла.

Описанный детерминированный алгоритм позволяет достичь точности статистического метода при большом числе частиц при затратах на вычисления на порядки меньше времени.

Список литературы

1. Калиткин Н.Н. Численные методы: учебное пособие. 2-е изд., исправленное. СПб.: БХВ-Петербург, 2011. 592 с.
2. Самарский А.А. Введение в численные методы. Учебное пособие для вузов. 3-е изд., стер. СПб.: Издательство «Лань», 2005. 288 с.
3. Соболь И.М. Численные методы Монте-Карло. М.: Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1973. 312 с.
4. Кутателадзе С.С. Основы теории теплообмена. Новосибирск: Наука, 1970. 659 с.
5. Эккерт Э.Р., Дрейк Р.М. Теория тепло и массообмена. М.: Госэнергоиздат, 1961. 680 с.
6. Кафедра математики физического факультета МГУ. Схема переменных направлений для уравнения теплопроводности в прямоугольной области. Режим доступа: http://matematika.phys.msu.ru/files/stud_gen/8/OMM_Task02.pdf (дата обращения 09.11.13).