Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана
Кафедра «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Математическая статистика

Домашняя работа №1

Студент	Инфлянскас Р. В.
Группа	ИУ7-61
Вариант	10
Преподаватель	Власов П. А.

8 мая 2014 г.

1. Задача №1

Условие

Исследователь зафиксировал по одной реализации каждой из случайных величин $X_1, \ldots, X_{200}$. Известно, что $DX_i \leqslant 4$, $i = \overline{1;200}$. Оценить вероятность того, что отклонение среднего арифметического этих случайных величин от среднего арифметического их математических ожиданий не превосходит 0.2.

Решение

Рассмотрим среднее арифметическое случайных величин $X_1, \ldots, X_{200}$ как случайную величину Y:

$$Y = \frac{1}{200}\sum_{i=1}^{200} X_i = \sum_{i=1}^{200} \frac{1}{200} X_i$$

Пользуясь свойствами дисперсии (учитывая, что $X_1, \ldots, X_{200}$ являются независимыми) получим:

$$DY = \sum_{i=1}^{200} (\frac{1}{200})^2 DX_i = \frac{1}{40000}\sum_{i=1}^{200} DX_i$$

Оценим DY, зная оценки $DX_i \leqslant 4$, $i = \overline{1;200}$:

$$\sum_{i=1}^{200} DX_i \leqslant 200 \times 4 = 800$$

$$\frac{1}{40000}\sum_{i=1}^{200} DX_i \leqslant \frac{1}{40000} \times 800$$

$$DY \leqslant 0.02$$

Воспользуемся вторым неравенством Чебышева для случайной величины DY:

$$P\{|Y - MY| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{DY}{\varepsilon^2}$$

$$P\{|Y - MY| \geqslant 0.2\} \leqslant \frac{DY}{0.2^2} \leqslant \frac{0.02}{0.04} = 0.5$$

Покажем, что математическое ожидание среднего арифметического случайных величин $X_1, \ldots, X_n, \quad n \in \boldsymbol{Z}$ равняется среднему арифметическому математических ожиданий этих случайных величин, используя свойство математического ожидания суммы случайных величин:

$$M[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i] = \frac{1}{n}M[\sum_{i=1}^{n} X_i] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} MX_i$$

Таким образом:

$$MY = \frac{1}{200}\sum_{i=1}^{200} MX_i$$

То есть MY — среднее арифметическое математических ожиданий случайных величин $X_1, \ldots, X_{200}$.

Ответ

Вероятность того, что отклонение среднего арифметического этих случайных величин от среднего арифметического их математических ожиданий не превосходит 0.2 равна 0.5.

2. Задача №2

Условие

С использованием метода моментов для выборки $\vec{x}_n = (x_1, \ldots, x_n)$ найти точечные оценки параметров заданного закона распределения генеральной совокупности X:

$$f_X(x) = \frac{x^\theta}{\Gamma(\theta+1)} e^{-x}, \quad x > 1$$

Решение

Используем определение гамма-функции:

$$\Gamma(\theta) = \int_0^\infty t^{\theta-1} e^{-t} dt$$

а также рекуррентное соотношение $\Gamma(\theta+1) = \theta\Gamma(\theta)$, получим следующие выражения для первого начального момента:

$$m_1 = \int_0^\infty \frac{x^\theta x}{\Gamma(\theta+1)} e^{-x} dx = \frac{1}{\Gamma(\theta+1)} \int_0^\infty x^{\theta+1} e^{-x} dx = \frac{\Gamma(\theta+2)}{\Gamma(\theta+1)} = \frac{\Gamma((\theta+1)+1)}{\Gamma(\theta+1)} =$$
$$= \frac{(\theta+1)\Gamma(\theta+1)}{\Gamma(\theta+1)} = \theta + 1$$

Находим момент выборки $\hat{\mu}_1 = \bar{x}$. Приравнивая момент $m_1 = MX$ к соответствующему моменту выборки, получаем:

$$\theta + 1 = \bar{x}$$
$$\theta = \bar{x} - 1$$

Ответ

$\theta = \bar{x} - 1$

3. Задача №3

Условие

С использованием метода максимального правдоподобия для выборки $x_5 = (x_1, \ldots, x_5)$ найти точечные оценки параметров заданного закона распределения генеральной совокупности X:

$$f_X(x) = 2\theta x e^{-\theta x}, \quad x > 0$$

Решение

Ответ