Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана
Кафедра «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Математическая статистика

Домашняя работа №2

Студент	Инфлянскас Р. В.
Группа	ИУ7-61
Вариант	10
Преподаватель	Власов П. А.

2 июня 2014 г.

Задача №1

Условие

После обработки $n = 8$ результатов независимых наблюдений нормально распределенной случайной величины X, получено значение $\hat{\sigma}^2(\overrightarrow{X}_n) = 5.75$ смещенной оценки выборочной дисперсии. С какой вероятностью можно гарантировать выполнение неравенства $\overline{X}_n - 6.2 < M[X] < \overline{X}_n + 6.2$?

Решение

Из условия следует, что μ и σ неизвестны, требуется найти вероятность выполнения оценки μ. Воспользуемся для этого центральной статистикой

$$T(\overrightarrow{X}_n, \mu) = \frac{\mu - \overline{X}_n}{S(\overrightarrow{X}_n)} \sim St(n-1),$$

которая даёт следующие границы интервальной оценки математического ожидания с коэффициентом доверия γ, где $\alpha = \frac{(1-\gamma)}{2}$:

$$\underline{\mu}(\overrightarrow{X}_n) = \overline{X} - \frac{S(\overrightarrow{X}_n)}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha}(n-1)$$

$$\overline{\mu}(\overrightarrow{X}_n) = \overline{X} + \frac{S(\overrightarrow{X}_n)}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha}(n-1)$$

Выразим $t_{1-\alpha}(n-1)$ (квантиль уровня q для распределения Стьюдента с $n-1$ степенями свободы):

$$p = \frac{S(\overrightarrow{X}_n)}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha}(n-1)$$

$$t_{1-\alpha}(n-1) = \frac{p\sqrt{n}}{S(\overrightarrow{X}_n)} \tag{1}$$

Найдём $S(\overrightarrow{X}_n)$ по исправленной выборочной дисперсии:

$$S^2(\overrightarrow{X}_n) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{n}{n-1}\hat{\sigma}^2(\overrightarrow{X}_n)$$

$$S(\overrightarrow{X}_n) = \sqrt{S^2(\overrightarrow{X}_n)} \tag{2}$$

Подставим (2) в (1), а также $n = 8,\ p = 6.2$ из условия и получим:

$$t_{1-\alpha}(n-1) = \frac{p\sqrt{n}}{S(\overrightarrow{X}_n)} = \frac{6.2 \cdot \sqrt{8}}{\sqrt{\frac{8}{8-1} \cdot 5.75}} \approx 2.67$$

Поскольку в таблице (из приложения к учебнику) этого значения не нашлось, используем функцию `stats.t.cdf` из пакета `scipy` языка `Python`, которая принимает квантили и число степеней свободы как параметр, а возвращает значение функции распределения:

```
In : stats.t.cdf([2.67], 7)
Out: array([ 0.984])
```

Так как $\alpha = \frac{(1-\gamma)}{2}$, то есть $\gamma = 1 - 2a = 1 - 2(1-(1-a)) = -1 + 2(1-a) = -1 + 2 \cdot 0.984 = 0.968$

Ответ

0.968

Задача №2

Условие

На двух токарных автоматах изготавливают детали по одному чертежу. Из продукции первого станка было отобрано $n_1 = 9$ деталей, а из продукции второго — $n_2 = 11$ деталей. Выборочные дисперсии контрольного размера, определенные по этим выборкам, составляют $S^2(\overline{X}_{n_1}) = 5.9$ мкм^2 и $S^2(\overline{Y}_{n_2}) = 5.9$ мкм^2 соответственно. С использованием двустороннего критерия при уровне значимости $\alpha = 0.05$ проверить гипотезу о равенстве дисперсий контрольного размера деталей, изготовленных на разных станках.

Решение

Проверим гипотезу о равенстве дисперсий $H_0: \ D[X] = D[Y]$. По условию, требуется использовать двусторонний критерий, то есть конкурирующая гипотеза $H_1: \ D[X] \neq D[Y]$, а критическая область — двусторонняя.

Найдём отношение большей исправленной дисперсии к меньшей:

$$F_{\text{набл}} = \frac{S^2(\overline{X}_{n_1})}{S^2(\overline{Y}_{n_2})} = \frac{5.9}{5.9} = 1$$

Достаточно найти правую критическую точку $F_{\text{кр}_2}$ при уровне значимости, вдвое меньшем заданного. Тогда не только вероятность попадания критерия в «правую часть» критической области (то есть правее $F_{\text{кр}_2}$) равна $\alpha/2$, но и вероятность попадания в «левую часть» критической области (то есть левее $F_{\text{кр}_1}$) также равна $\alpha/2$. Так как эти события несовместны, то вероятность попадания рассматриваемого критерия во всю двустороннюю критическую область будет равна $\alpha/2 + \alpha/2 = \alpha$.

По таблице квантилей распределения Фишера, по уровню значимости, вдвое меньшем заданного, то есть при $\alpha/2 = 0.05/2 = 0.025$, а значит при $p = 1 - \alpha/2 = 0.975$, и числам степеней свободы $k_1 = n_1 - 1 = 9 - 1 = 8$, $k_2 = n_2 - 1 = 11 - 1 = 10$ находим критическую точку $F_{\text{кр}_2} = f_{0.975}(8, 10) = 3.85$.

Так как $F_{\text{набл}} < F_{\text{кр}}$, нулевую гипотезу о равенстве дисперсий принимаем.

Ответ

Гипотеза о равенстве дисперсий принимается.