4. Результаты моделирования

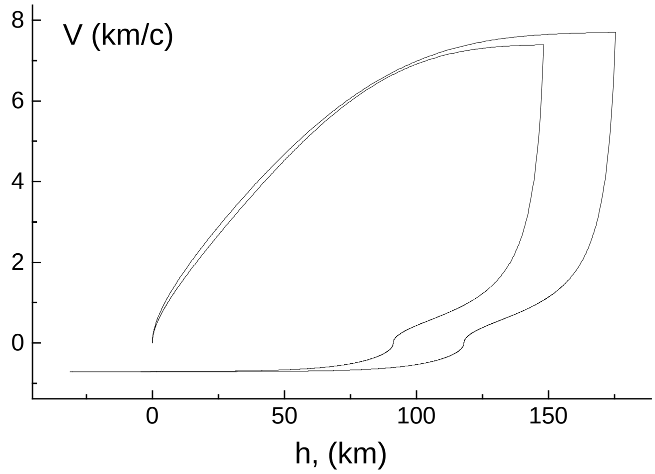

Рис.4.23. Скорость ракеты при разных расходах горючего $m_{кон}$ =0.03m_m. 1)α=0.25 m_m/c;

На рис. 4.23 показано изменение скорости ракеты от высоты. Программа масштабирована так, что скорость υ - измеряется в км/с, высота в км, масса измеряется в единицах m_m =10^7 кг, m =2 m_m, g=0.0098 kг/c^2, s=0.0001 км^2, u=4 км/с, ρ_0 =129 m_m /км^3 – плотность воздуха на поверхности Земли при нормальных условиях. Как видно из рисунка, на высоте 159 км топливо закончилось, максимальная скорость при этом υ =7.6 км/с. Затем ракета начинает терять высоту и в конечном итоге падает на Землю.

Отметим, что в данной работе рассматривается вертикальный взлет ракеты. Если имеется горизонтальная составляющая скорости ракеты, то математическая модель несколько видоизменяется. Возникает новая задача, соответственно более точная математическая модель, описывающая полет ракеты в космос. Таким образом, имеем иерархический метод построения математической модели полета ракеты за пределы Земли.

4.13. Полет баллистической ракеты

1. **Постановка задачи.** Задача расчета полета баллистической ракеты заключается в определении траектории полета.

4. Построение математической модели. В общем случае математическая модель движения тел с переменной массой для вертикального взлета описывается уравнением:

$$m(t)\frac{d\upsilon}{dt} = \alpha u - F_{сопр} - g\frac{R^2}{(R+h)^2}, \qquad (4.38)$$

$$\frac{dh}{dt} = \upsilon.$$

Здесь α - расход топлива, обычно для баллистических ракет она равна примерно 1 т/с, u – скорость истечения газов и она не превышает $u = (2 \div 3)\,\text{км}/c$.

$$F_{сопр} = k\upsilon^2, \quad k = 0.5\, cS\rho_{среды},$$

где c – коэффициент лобового сопротивления, S – площадь поперечного сечения ракеты, $\rho_{среды}$ – плотность воздуха убывает по закону

$\rho_{среды} = \rho_0\, 10^{-\beta h}$, здесь β =0.125·км$^{-1}$,

Масса ракеты изменяется согласно закону

$$m(t) = \begin{cases} m_0 - \alpha t, \text{если } m(t) \le m_{конс} \\ m_{конс}, \text{если } m(t) = m_{конс} \end{cases} \tag{4.39}$$

$m_0 = m_{топл} + m_{конс}$ – начальная масса ракеты, заправленной топливом. Под $m_{конс}$ понимается обычно полезная масса (масса боеголовки, спутника) и конструкционная масса (масса топливных баков, двигателей, систем управления и т.д.), т.е. та масса, которая остается после полного выгорания топлива.

Теперь на основе этой математической модели построим другую, более сложную с учетом горизонтальной составляющей (рис.4.24).

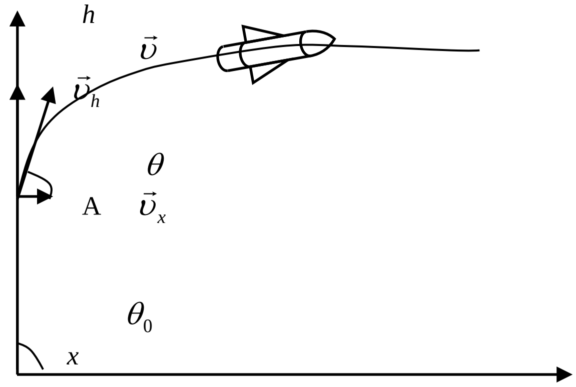

Рис.4.24

При запуске ракеты первоначально его направляют вертикально, затем при достижении определенной скорости (обычно после достижения звуковой скорости), его траекторию меняют, добавляют горизонтальную составляющую скорости.

$$m(t)\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \alpha\vec{u} + \vec{F}_{сопр} + \vec{\tilde{g}} \cdot m(t)$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\upsilon}.$$

Здесь мы ввели обозначение $\tilde{g} = g\frac{R^2}{(R+y)^2}$. Распишем эти уравнения по проекциям

$$m(t)\frac{d\upsilon_y}{dt} = \alpha u_y - F_{y_{сопр}} - \tilde{g} \cdot m(t)$$

$$m(t)\frac{d\upsilon_x}{dt} = \alpha u_x - F_{x\,сопр},$$

$$\frac{dy}{dt} = \upsilon_y = \upsilon \sin\theta, \quad \frac{dx}{dt} = \upsilon_x = \upsilon\cos\theta$$

Возьмем производную по времени от υ_y, считая что $\theta = \theta(t)$

$$\frac{d\upsilon_y}{dt} = \sin\theta\frac{d\upsilon}{dt} + \upsilon\cos\theta\frac{d\theta}{dt}$$

Подставим его в выражение и разделим обе части уравнения на $m(t)\cdot\sin\theta$, тогда получим

$$\frac{d\upsilon}{dt} + \upsilon\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{\alpha u_y - F_{y_{сопр}}}{m(t)\sin\theta} - \tilde{g}\frac{1}{\sin\theta}$$

Учет того, что $u_y = u\sin\theta$ и $F_{y_{сопр}} = F_{сопр}\sin\theta$ приводит к следующему уравнению

$$\frac{d\upsilon}{dt}+\upsilon\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{d\theta}{dt}=\frac{\alpha u-F_{conp}}{m(t)}-\tilde{g}\frac{1}{\sin\theta}$$

В правой части прибавим и вычтем одно и то же выражение $\tilde{g}\sin\theta$ от этого уравнение не измениться

$$\frac{d\upsilon}{dt}+\upsilon\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{d\theta}{dt}=\frac{\alpha u-F_{conp}}{m(t)}-\tilde{g}\sin\theta+\tilde{g}\sin\theta-\tilde{g}\frac{1}{\sin\theta}$$

это уравнение допускает разделение производных, и его можем записать в виде системы уравнений

$$\frac{d\upsilon}{dt}=\frac{\alpha u-F_{conp}}{m(t)}-\tilde{g}\sin\theta,$$

$$\upsilon\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{d\theta}{dt}=\tilde{g}(\sin\theta-\frac{1}{\sin\theta}).$$

Проведя простые преобразования второго уравнения, можем привести его к виду

$$\frac{d\theta}{dt}=-\tilde{g}\cdot\frac{\cos\theta}{\upsilon}.$$

Таким образом, для описания полета баллистической ракеты имеем следующую математическую модель

$$\frac{dy}{dt}=\upsilon\sin\theta, \quad \frac{dx}{dt}=\upsilon\cos\theta$$

$$\frac{d\upsilon}{dt}=\frac{\alpha u-F_{conp}}{m(t)}-g\cdot\frac{R^2}{(R+y)^2}\sin\theta$$

$$\frac{d\theta}{dt}=-g\cdot\frac{R^2}{(R+y)^2}\frac{\cos\theta}{\upsilon}$$

Здесь надо учесть формулу изменения массы при полете ( ) и начальное отклонение угла полета ракеты при достижении звуковой скорости.

3. Задания на моделирование

4. Построить дискретную модель уравнений и разностную схему. Написать алгоритм решения дифференциальных уравнений (4.38).
5. Составить программу согласно алгоритму. Выходные данные представить в графической форме. Рекомендуется использовать графический пакет ORIGIN.
6. Задания для вычислительного эксперимента
   - 6.1. Провести моделирование полета баллистической ракеты при значениях параметров m_0=6 10^5 кг, $m_{кон}$ = 10^4 кг.
   - 6.2. Построить графики в переменных *(a(t), t), (v(t), t), (m(t), t), (y,x), (v(t), y).*
   - 6.3. Выяснить условия достижения первой космической скорости.

4. Результаты моделирования

Программа на Паскале для моделирования полета ракеты дана в приложении. Один из результатов расчета для начальной массы ракеты m_0:=20, массы конструкции m_k = 5, реактивной тяги α =0.3 км/с, скорости истечения газов из сопла u:=1.05 км/с приведен на рис.4.25. При достижении скорости до звуковой $\upsilon_з$:=0.34 км/с, задается начальный угол отклонения ракеты равной 40^0.

Отметим, что в данной работе рассматривается полет баллистической ракеты. Здесь не учтено, кариолисовы силы, с какой широты и в каком направлении запускается ракета. Учет этих условий, может привести к более реальной модели, в которой учитывается скорость вращения Земли, кариолисовы силы, отклоняющие попадание ракеты в точно заданное пункт. Таким образом, здесь мы имеем иерархический метод построения математической модели полета ракеты – от простой модели мы перешли к сложной, но более реальной.

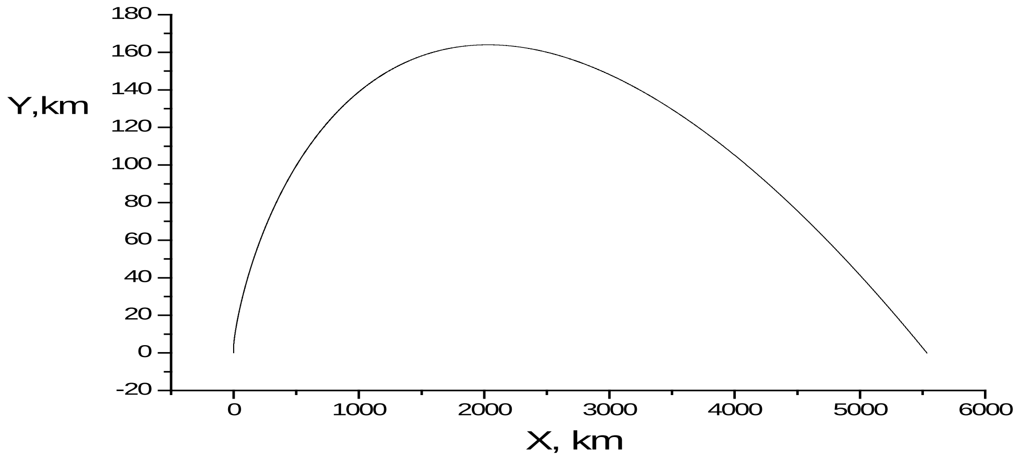

Рис.4.25

4.14. Многоступенчатая ракета

1. Постановка задачи. Построить модель вертикального взлета многоступенчатой ракеты.

2. Построение математической модели. Движение для тел с переменной массой (ракеты) описывается с помощью уравнения Мещерского. В модифицированном виде она записывается в виде

$$m_i(t)\frac{d\upsilon_i}{dt} = F_{i,тяги} - F_{сопр,i} - G\frac{Mm_i}{(R+h_i)^2},$$

$$\frac{dh_i}{dt} = \upsilon_i, \qquad (4.40)$$

$$F_{сопр} = k_2\upsilon_i^2, \quad k_2 = 0.5\, cS\rho_{среды},$$

здесь $i = 1,2,3,4$ - число ступеней ракеты, G – гравитационная постоянная, R – радиус Земли, $F_{тяги}$ – сила тяги двигателя. При решении данной задачи необходимо воспользоваться решением для одноступенчатой ракеты, m_0 - начальная масса ракеты, заправленной топливом, под $m_{кон}$ понимается обычно полезная масса (масса спутника) и структурная масса (масса топливных баков,