

Géométrie Discrète : Axe médian et Amincissement homotopique

Ricardo Uribe Lobello

Université d'Aix-Marseille

03/12/2018

Axe médian

Axe médian

Idée intuitive

Imaginons une forme recouverte d'une prairie et supposons qu'un feu soit allumé à l'instant $t = 0$ sur sa frontière. Le feu se propage à vitesse constante dans la prairie, comme illustré sur la figure 9.1. Intuitivement, l'axe médian est le lieu où deux fronts de feu se rencontrent.

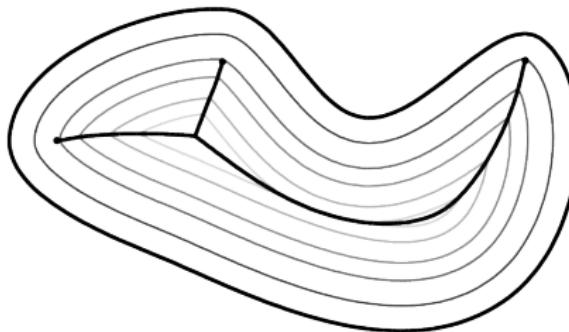


FIGURE – Illustration de l'extraction d'un axe médian.

Axe médian

De manière plus formelle

- Intersections des fronts dans un modèle de feu de prairie.
- Centres des bulles maximales contenues dans la forme :

B est maximale pour une forme X ssi $\nexists B' \in X$ et $B \in B'$

- Ensemble de bulles qui touchent la frontière de X au moins deux fois.
- C'est aussi l'uni-dimensionnel équivalent d'un contour.

Axe médian

De manière plus formelle

- Intersections des fronts dans un modèle de feu de prairie.
- Centres des bulles maximales contenues dans la forme :

B est maximale pour une forme X ssi $\nexists B' \in X$ et $B \in B'$

- Ensemble de bulles qui touchent la frontière de X au moins deux fois.
- C'est aussi l'uni-dimensionnel équivalent d'un contour.

Applications

- Analyse d'images et reconnaissance et description de formes.
- Planification de trajectoires en robotique.
- Segmentation des objets.
- Génération de maillages anisotropiques.



Axe médian

Définitions préliminaires

La boule ouverte de centre p et de rayon r est l'ensemble des points dont la distance euclidienne à p est inférieure strictement à r :

$$B^<(p, r) = \{q \in \mathbb{R}^n \mid \|p - q\| < r\} \quad (1)$$

Et une boule ouverte $B \subseteq X$ est maximale dans X si pour toute boule ouverte B' ,

$$B \subseteq B' \subseteq X \Rightarrow B = B' \quad (2)$$

L'axe médian

L'axe médian, $AM(X)$, est l'ensemble des centres des boules maximales de X

Axe médian et sa relation avec le skeleton

Squelette

L'ensemble des points qui ont au moins deux points les plus proches dans le complémentaire de X .

IMPORTANT : Le squelette est contenu dans l'axe médian qui est lui-même contenu dans la fermeture du squelette.

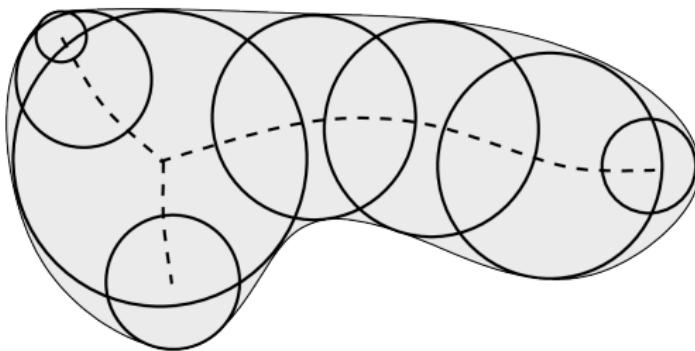


FIGURE – Illustration de l'extraction d'un axe médian à partir d'une forme continue.

Axe médian et le squelette

Homotopie

Deux formes sont dits homotopes lorsqu'il est possible de passer de manière continue de l'une à l'autre.

Homotopies de formes

Un squelette a la même homotopie que la forme originale.

Réversibilité de l'axe médian

Si nous étiquetons chaque point p de l'axe médian par le rayon $\delta(p)$ de la boule maximale centrée en p , nous avons assez d'information pour reconstruire la forme. En d'autres termes, l'axe médian muni de la fonction δ fournit un codage réversible :

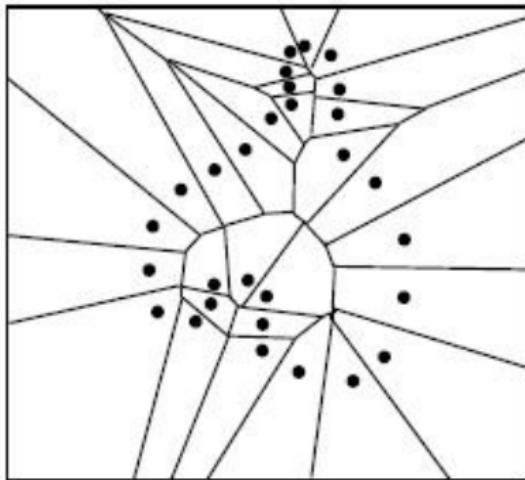
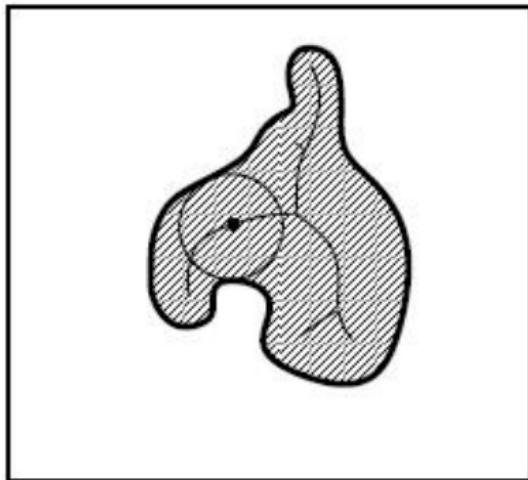
$$X = \bigcup_{p \in AM(X)} B^<(p, \delta(p)) \quad (3)$$

Extraction de l'Axe médian avec un Diagramme de Voronoï

Description

Utilisation du diagramme de Voronoï (DV) des points sur le bord de l'objet.

Ensuite approximation avec les arêtes du DV contenues à l'intérieur de la forme.



Axe médian

Concepts de base

Bulles discrètes et bulles euclidiennes

Si on considère un prédictat $EstCouvert(B, B')$ qui va retourner vrai si $B \subseteq B'$ si :

- Si B et B' sont des bulles euclidiennes \Rightarrow Le prédictat est exécuté en $O(1)$.
- Si B et B' sont des bulles discrètes \Rightarrow Le prédictat est $O(\max(|B|, |B'|))$.

$$B \subset B' \Rightarrow (B \cap \mathbb{Z}^2) \subset (B' \cap \mathbb{Z}^2) \quad (4)$$

Mais :

$$B \subset B' \Leftrightarrow (B \cap \mathbb{Z}^2) \subset (B' \cap \mathbb{Z}^2) \quad (5)$$

Utilisation d'une approche de force brute avec complexité $O(|X|^2 r_{\max}^2)$ avec r_{\max} la valeur maximale dans la transformée en distance.

Extraction de l'Axe médian

Calcul avec la Transformée en distance (DT)

Extraction à partir d'une forme discrète $X \subseteq \mathbb{Z}^n$. Soit d la distance discrète choisie pour définir les boules. Ainsi, la transformée en distance $DT : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{N}$ associe à chaque point P sa distance au complémentaire de X :

$$DT[P] = \min_{Q \in \bar{X}} d(P, Q) \quad (6)$$

Avec $Q \in \bar{X}$ le point le plus proche à P .

Conclusion

$DT[P]$ donne précisément le rayon de la plus grande boule stricte centrée en P et contenue dans la forme :

$$B(P) = B^<(P, DT[P]) \quad (7)$$

Extraction de l'Axe médian

Détection des points

Pour déterminer si un point P appartient à l'axe médian, il suffit de tester pour tout vecteur $\vec{V} \in \mathbb{Z}^n$, si la boule centrée en $P + \vec{V}$ et de rayon $DT[P + \vec{V}]$ recouvre la boule centrée en P et de rayon $DT[P]$ ou si :

$$B(P) \subseteq B(P + \vec{V}) \quad (8)$$

Dans le cas aucune boule $B(P + \vec{V})$ ne recouvre $B(P)$, le point P appartient à l'axe médian.

Caractérisation des boules maximales

La caractérisation des boules maximales dépend beaucoup de la distance utilisée.

Extraction de l'Axe médian

Caractérisation de Boules par masque de Chamfrein

$$P \in AM \iff DT[P + \vec{V}] < DT[P] + w, \forall (\vec{V}, w) \in \mathcal{M} \quad (9)$$

Pour une masque de Chamfrein de cardinalité k , cette caractérisation fournit un critère consistant à examiner k points $P + \vec{V}$ autour de P .

Critère

Si le point P ne propage pas son information de distance au bord d'un autre point lors de la transformation de distance, alors, il est le centre d'une boule maximale.

Attention

Ce critère ne marche que pour les distances d_1 et les distances d_∞ .

Extraction de l'Axe médian

Caractérisation de Boules par masque de Chamfrein

Critère de maximum local (LMC)

$$P \in AM \iff DT[P + \vec{V}] < DT[P] + w, \forall (\vec{V}, w) \in \mathcal{M} \quad (10)$$

Pour une masque de Chamfrein de cardinalité k , cette caractérisation fournit un critère consistant à examiner k points $P + \vec{V}$ autour de P .

Critère

Si le point P ne propage pas son information de distance au bord d'un autre point lors de la transformation de distance, alors, il est le centre d'une boule maximale.

Attention

Ce critère ne marche que pour les distances d_1 et les distances d_∞ .

Extraction de l'Axe médian

Caractérisation de Boules par masque de Chamfrein

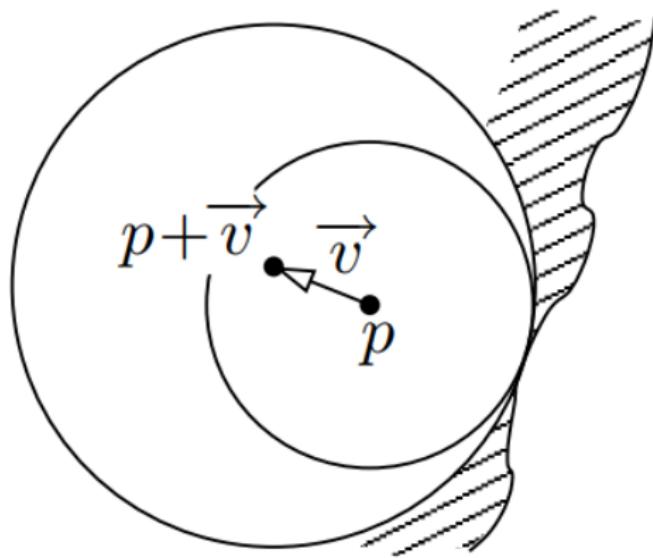


FIGURE – Caractérisation de Boules par masque de Chamfrein. Boule de recouvrement.

Extraction de l'Axe médian

Caractérisation de Boules par masque de Chamfrein

Résultat

Pour les distances d_4 et d_8 en 2D et d_6 et d_{26} en 3D, ou, pour toute distances de Chamfrein avec des points $w = 1$ l'ensemble de points vérifiant ce critère est *exactement* l'axe médian.

Mais

Pour des $w > 1$, le LMC détecte les points de l'axe médian plus des points qui ne sont pas les centres de boules maximales. Pire, ces points sont nombreux et particulièrement près du bord de la forme.

Pourquoi ? Boules d'équivalence

Deux boules de rayon r et r' sont équivalentes si les ensembles des points $B_d(O, r)$ et $B_d(O, r')$ sont identiques. Même si les valeurs des points sur la DT sont en général différents.

Extraction de l'Axe médian

Caractérisation par table de correspondance

Soit $O \in \mathbb{Z}^n$ l'origine et introduisons $Lut(\vec{V}, r)$ comme le rayon de la plus petite boule centrée en $O + \vec{V}$ et qui contient la boule de centre O et de rayon r tel que :

$$Lut(\vec{V}, r) = \min\{r' \mid B^<(O, r) \subseteq B^<(O + \vec{V}, r')\} \quad (11)$$

$Lut(\vec{V}, r)$ représente également le rayon de la plus petite boule centrée en $P + \vec{V}$ et contenant $B^<(P, r)$.

Par conséquence

$B^<(P, r) \subseteq B^<(P + \vec{V}, Lut(\vec{V}, r))$ et cette dernière est incluse dans la forme si et seulement si $Lut(\vec{V}, r) \leq DT[P + \vec{V}]$. Ce qui permet d'établir une caractérisation de l'axe médian.

Extraction de l'Axe médian

Caractérisation par table de correspondance

$$P \in AM \iff DT[P + \vec{V}] < Lut(\vec{V}, DT[P]), \forall \vec{V} \in \mathcal{V}$$

Avec $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{Z}^n$ comme un ensemble de vecteurs pour lequel nous cherchons le plus petit possible.

Analyse

Toute boule non maximale $B(P)$ est incluse dans une boule maximale $B(P + \vec{V})$ de rayon au plus s . Alors, on peut déduire que $O + \vec{V}$ appartient à $B^<(O, s)$.

Conclusion

Il suffit donc de considérer comme voisinage de test l'ensemble des vecteurs qui, placés en l'origine, ont leur extrémité dans $B^<(O, s)$ pour que l'équivalence soit encore vraie.

Extraction de l'Axe médian

Algorithme d'extraction de l'axe médian

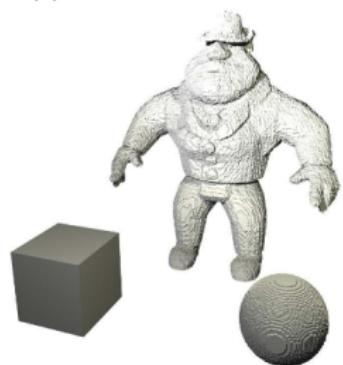
- ① Calcul de la transformée en distance, DT .
- ② Calcul de la taille des objets $s = \max_P DT[P]$.
- ③ Calcul du voisinage de test \mathcal{V} et de la *Lut* sur $\mathcal{V} \times [0, s]$.
- ④ Extraction des points de l'axe médian avec la DT , \mathcal{V} et la *Lut*.

Look – Up – Table (Lut)

Les valeurs contenues dans la *Lut* peuvent être pré-calculées une fois pour toutes et rangées dans une table de correspondance.

Extraction d'Axe médian par table de correspondance

(a)



(b)



(c)



FIGURE – Application de l'algorithme sur plusieurs exemples.

Extraction d'Axe médian



FIGURE – Extraction de l'axe médian à partir du volume Al et Neige 254.

Extraction d'Axe médian

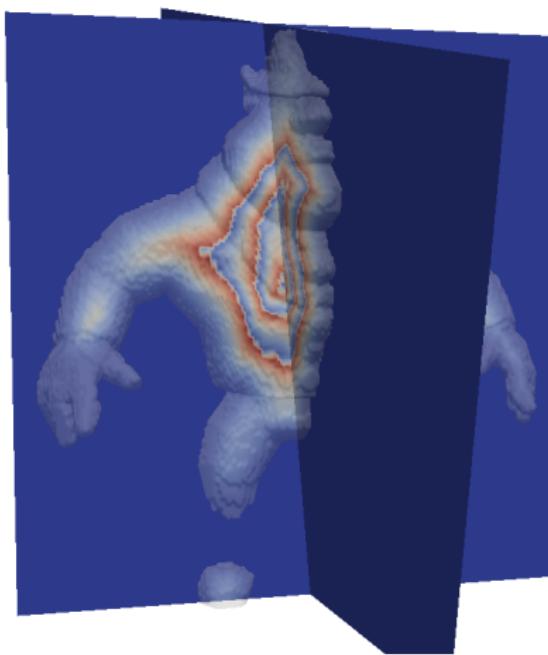


FIGURE – Extraction de l'axe médian à partir du volume Al et Neige 254.

Extraction d'Axe médian



FIGURE – Extraction de l'axe médian à partir du volume Al et Neige 254.

Extraction d'Axe médian

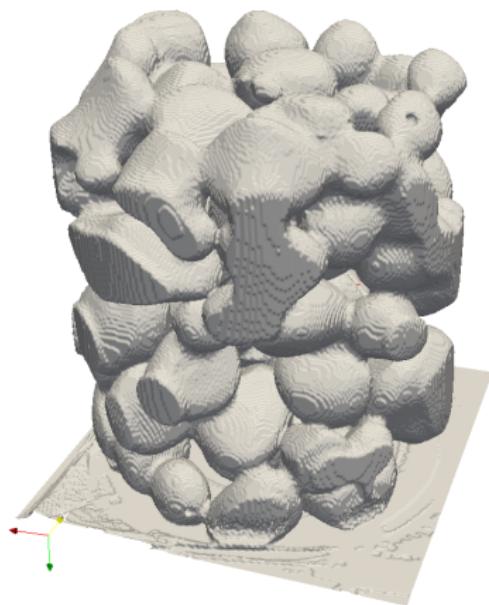


FIGURE – Extraction de l'axe médian à partir du volume Al et Neige 254.

Extraction d'Axe médian

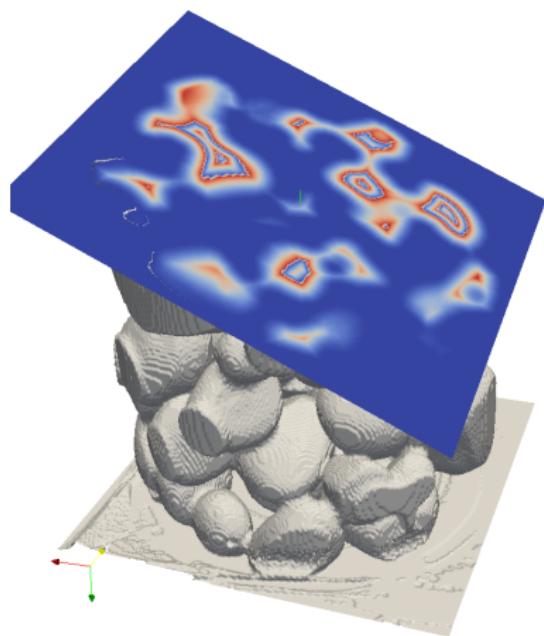


FIGURE – Extraction de l'axe médian à partir du volume AI et Neige 254.

Extraction d'Axe médian

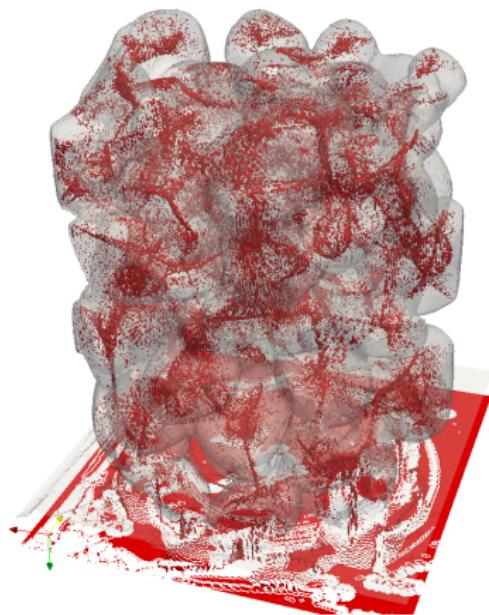


FIGURE – Extraction de l'axe médian à partir du volume AI et Neige 254.

Extraction d'Axe médian

Objet	$\mathcal{F} = AM(\mathcal{S})$	$\hat{\mathcal{F}}$ RAGNEMALM ET AL.	$\hat{\mathcal{F}}$ Greedy
	104	56 (-46%) [$<0.01s$]	66 (-36%) [$< 0.01s$]
			
	1292	795 (-38%) [0.1s]	820 (-36%) [0.19s]
			
	17238	6177 (-64%) [48.53s]	6553 (-62%) [57.79s]

FIGURE – Comparaison des algorithmes d'extraction d'axe médian.

Axe médian euclidien discret

Concepts de base

Paraboloïdes elliptiques

Caractérisation des points de l'axe médian s'appuyant sur un relèvement des boules et des formes dans \mathbb{R}^3 .

Considérons une boule ouverte $B \subseteq \mathbb{R}^2$ de centre (i, j) et de rayon r et notons :

$$h_B(x, y) = r^2 - (x - i)^2 - (y - j)^2 \quad (12)$$

La boule B est l'ensemble des points (x, y) tels que $h_B(x, y) > 0$.

Paraboloïde

Nous associons à B le paraboloïde elliptique $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^3$ défini comme l'ensemble des points $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ d'équation $z = h_b(x, y)$.

Axe médian euclidien discret

Concepts de base

Paraboloïdes elliptiques

Nous associons à B le paraboloïde elliptique $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^3$ défini comme l'ensemble des points $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ d'équation $z = h_b(x, y)$.

Relation entre B et \mathcal{P}

les points en-dessous du paraboloïde \mathcal{P} intersectent le plan $z = 0$ en la boule B .

Le *dome* associé à B est l'ensemble des points $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ au-dessous du paraboloïde \mathcal{P} et au-dessus du plan $z = 0$:

$$\hat{B} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z < h_b(x, y)\} \quad (13)$$

Définition de la forme Y en utilisant les paraboloïdes

$$\hat{Y} = \cup_{B \subseteq Y} \hat{B} \quad (14)$$

Axe médian euclidien discret

Concepts de base

Définition de la forme Y en utilisant les paraboloïdes

L'union des boules B qui sont l'intersection de \mathcal{P} avec $z = 0$ permettent de reconstruire la forme Y ou :

$$\hat{Y} = \bigcup_{B \subseteq Y} \hat{B} \quad (15)$$

Dôme maximale

Un *dôme* est maximale en \hat{Y} si elle n'est pas contenue dans n'importe quelle autre *dôme* dans \hat{Y} .

Conclusion

Une boule B est maximale dans Y si et seulement si son dôme \hat{B} est maximal dans \hat{Y} .

Axe médian euclidien discret

Concepts de base

Conclusion

Une boule B est maximale dans Y si et seulement si son dôme \hat{B} est maximal dans \hat{Y} .

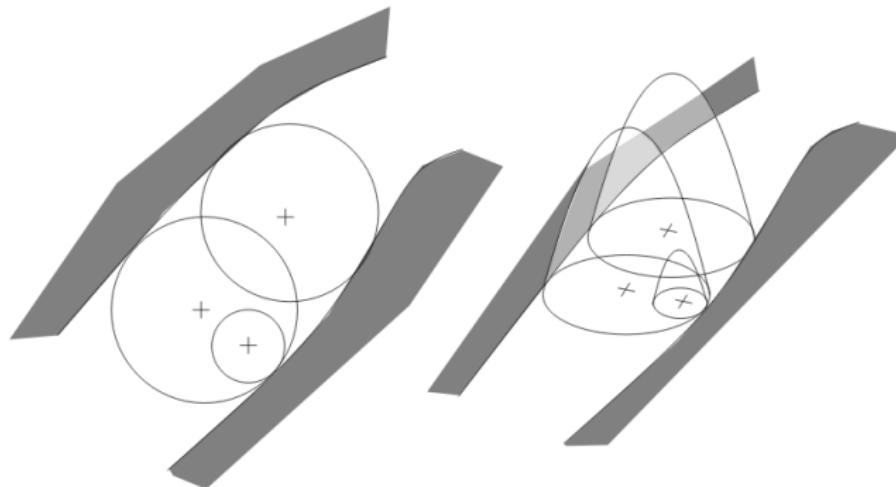


FIGURE – Illustration de la projection des paraboloïdes en 2D.

Axe médian euclidien discret

Concepts de base

Remarquez

Au-dessus du plan $z = 0$, la frontière de \hat{Y} coïncide avec l'enveloppe supérieure des paraboloïdes associés aux boules B contenues dans Y . Cette enveloppe a pour équation $z = h(x, y)$ avec :

$$h(x, y) = \max_{B \subseteq Y} h_B(x, y) \quad (16)$$

Une boule est maximale si et seulement si son dôme touche l'enveloppe supérieure des paraboloïdes.

Définition formelle

Soit $Y \subseteq \mathbb{R}^2$ une union finie de boules ouvertes. Soit B une boule ouverte de \mathbb{R}^2 . Alors :

$$B \text{ maximale en } Y \iff \exists (x, y) \in B, h_B(x, y) = h(x, y) \quad (17)$$

Axe médian euclidien discret

Définitions

Définition formelle

Soit $Y \subseteq \mathbb{R}^2$ une union finie de boules ouvertes. Soit B une boule ouverte de \mathbb{R}^2 . Alors :

$$B \text{ maximale en } Y \iff \exists (x, y) \in B, h_B(x, y) = h(x, y) \quad (18)$$

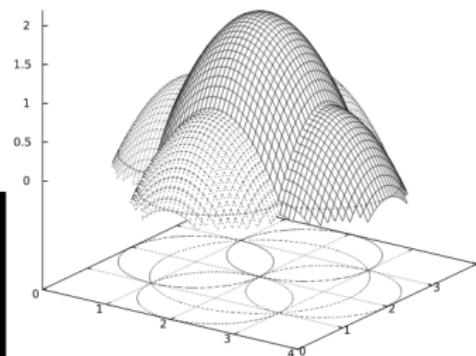
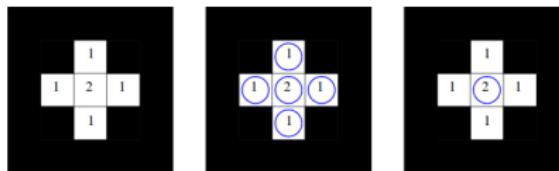


FIGURE – (A gauche) Transformée e distance d'une forme simple. (A droite) Représentation des paraboloïdes correspondantes.

Axe médian euclidien discret

Définitions

Propriétés

- L'algorithme est dit séparable parce qu'il procède dimension par dimension et est facilement généralisable aux grilles anisotropes et aux dimensions supérieures.
- Il est linéaire au nombre de points de la grille discrète.

Description

A partir d'une forme discrète $X \subseteq [1, m]^2$:

- Calcul de la transformée en distance euclidienne.
- Calculer dans chaque point discret (x, y) l'altitude de l'enveloppe supérieure des paraboloïdes associés aux boules B contenues dans la forme Y .
- Élimination des centres de boules qui font partie de l'enveloppe supérieur mais pas de l'axe médian discret.



Axe médian euclidien discret : Première étape (RAPPEL) Calcul de la transformée en distance

Calcul de la transformée en distance

Ce sujet a été déjà étudié dans d'autres séances et il est hors la portée de ce cours.

Dans ce cas là, nous utilisons la transformée en distance avec la **distance euclidienne au carré**.

Résultat

Nous disposons d'une image $f : [1, m]^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ mémorisant, en chaque point discret (x, y) , le carré de sa distance euclidienne au complémentaire de X .

Axe médian euclidien discret : Première étape (RAPPEL) Calcul de la transformée en distance

Description des étapes

- 1 Construire une transformée en distance euclidienne pour chaque ligne de l'image originale P tel que pour une ligne donnée j :

$$g(i, j) = \min_x \{ |i - x|; 0 \leq x < n \text{ et } (x, y) \in \bar{P} \} \quad (19)$$

La complexité de cette étape est $O(n^d)$.

- 2 Ensuite, construire l'image finale $H = \{h(i, j)\}$ avec une procédure appliquée sur les colonnes comme suit :

$$h(i, j) = \min_y \{ g(i, y)^2 + (j - y)^2; 0 \leq y < n \} \quad (20)$$

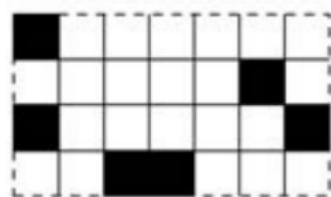
La complexité de cette étape est $O(\text{Moyenne}(n)^d)$ mais il y a des algorithmes avec une complexité de $O(n)$.

Axe médian euclidien discret : Première étape (RAPPEL) Calcul de la transformée en distance

Transformée en distance unidimensionnelle

Construire une transformée en distance euclidienne pour chaque ligne de l'image originale P tel que pour une ligne donnée j :

$$g(i, j) = \min_x \{ |i - x|; 0 \leq x < n \text{ et } (x, y) \in \bar{P} \} \quad (21)$$



(a)

→	1	2	3	4	5	6
→	5	4	3	2	1	1
→	1	2	3	2	1	
→	2	1		1	2	3

(b)

↓	1	4	5	2	1	2
↓	1	2	4	4	1	1
↓	1	1	1	2	1	
↓	1	1		1	2	1

(c)

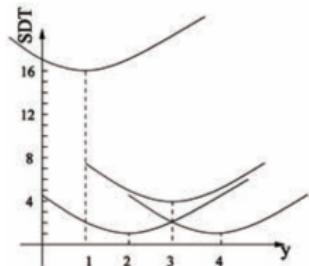
FIGURE – Illustration du calcul de la transformée en distance séparable.

Axe médian euclidien discret : Première étape (RAPPEL) Calcul de la transformée en distance

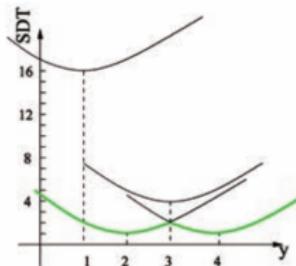
Enveloppe inférieure des paraboles

Construire l'image finale $H = \{h(i, j)\}$ avec une procédure appliquée sur les colonnes comme suit :

$$h(i, j) = \min_y \{g(i, y)^2 + (j - y)^2; 0 \leq y < n\}$$



(a)



(b)

FIGURE – Illustration de la deuxième étape du calcul de la transformée en distance pour la colonne 4 du P .

Axe médian euclidien discret : Première étape (RAPPEL) Calcul de la transformée en distance

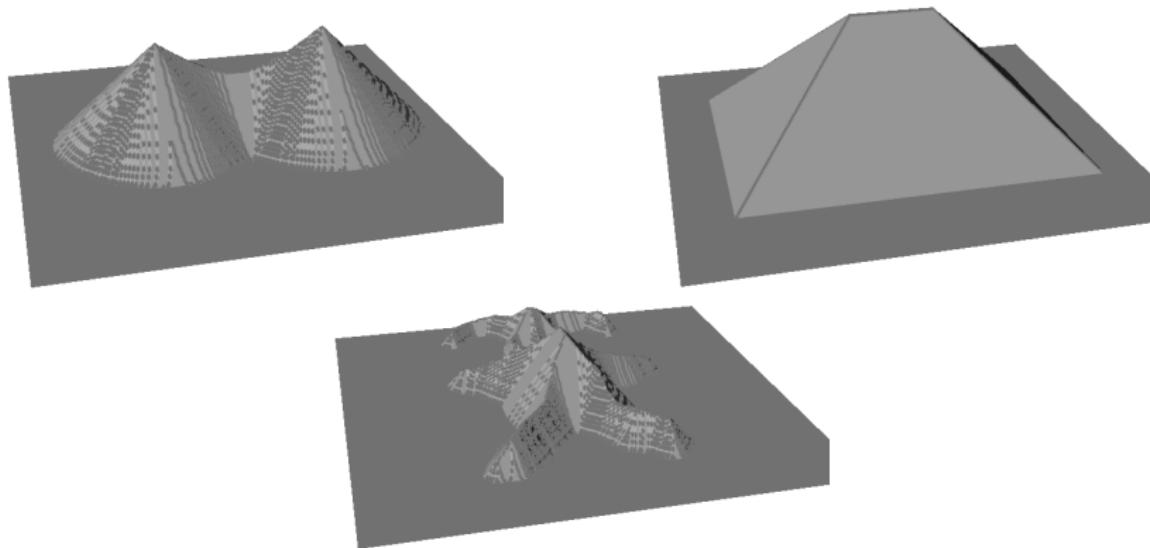


FIGURE – Illustration de l'extraction de la transformée en distance partir de trois formes discrètes. Deux cercles, un rectangle et un bon homme.

Axe médian euclidien discret : Deuxième étape

Extraction de l'enveloppe supérieure des paraboloïdes

Calcul de l'enveloppe supérieure des paraboloïdes

Nous calculons l'image $h : [1, m]^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ définie par :

$$h(x, y) = \max_{1 \leq i, j \leq m} \{f(i, j) - (x - i)^2 - (y - j)^2\} \quad (22)$$

Comme dit précédemment, ceci revient à calculer, en chaque point discret (x, y) , l'altitude de l'enveloppe supérieure des paraboloïdes associés aux boules B contenues dans la forme continue de X qu'on dénommera Y .

Implantation

Il y a des algorithmes séparables en complexité $O(m^2)$ pour calculer cette image.

Axe médian euclidien discret : Deuxième étape

Extraction de l'enveloppe supérieure des paraboloïdes

Calcul de l'enveloppe supérieure des paraboloïdes

Nous calculons l'image $h : [1, m]^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ définie par :

$$h(x, y) = \max_{1 \leq i, j \leq m} \{f(i, j) - (x - i)^2 - (y - j)^2\} \quad (23)$$

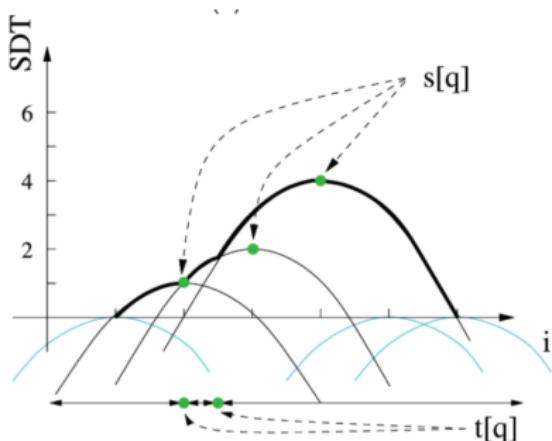
Comme dit précédemment, ceci revient à calculer, en chaque point discret (x, y) , l'altitude de l'enveloppe supérieure des paraboloïdes associés aux boules B contenues dans la forme continue de X qu'on dénommera Y .

Implantation

Il y a des algorithmes séparables en complexité $O(m^2)$ pour calculer cette image.

Axe médian euclidien discret : Deuxième étape

Extraction de l'enveloppe supérieure des paraboloïdes



F	0	0	1	2	4	0	0
---	---	---	---	---	---	---	---

G	0	0	1	3	4	3	0
---	---	---	---	---	---	---	---

REDT	0	0	1	1	1	1	0
------	---	---	---	---	---	---	---

FIGURE – Illustration de la procédure unidimensionnelle pour extraire l'enveloppe supérieur d'un ensemble de paraboloïdes.

Axe médian euclidien discret : Troisième étape

Élimination des paraboloïdes non pertinentes

Objectif

Obtenir un axe médian simplifié mais qui capture bien la forme originale.

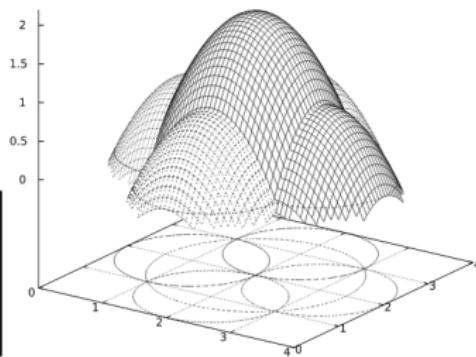
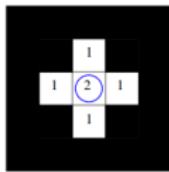
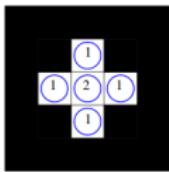
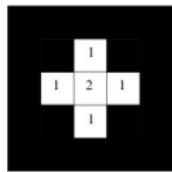


FIGURE – (A gauche) Transformée e distance d'une forme simple. (A droite) Représentation des paraboloïdes correspondantes.

Axe médian euclidien discret : Troisième étape

Élimination des paraboloïdes non pertinentes

Objectif

Obtenir un axe médian simplifié mais qui capture bien la forme originale.

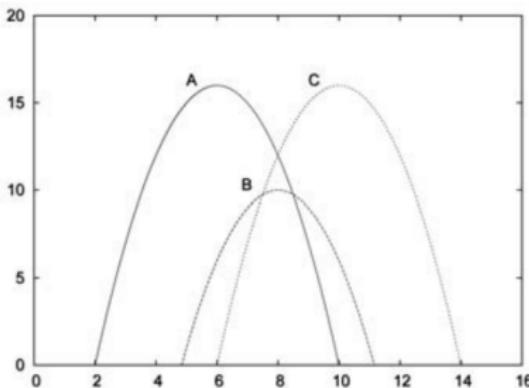


FIGURE – Illustration unidimensionnelle de paraboloïdes (B dans l'exemple) qui ne font pas partie du skeleton.

Axe médian euclidien discret : Troisième étape

Élimination des paraboloïdes non pertinentes

Procédure

Pour chaque colonne j de l'image soit $\{\mathcal{F}_x(i)\}_{i=0..N}$ l'ensemble de paraboloïdes sur cette colonne. Ainsi, chaque paraboloïde est défini comme $\mathcal{F}_x(i) = f(x, j) - (i - x)^2$. Alors :

- Pour chaque $\mathcal{F}_x(i)$ soit \mathcal{D}_x son segment associé et D_x son segment discret correspondant.
- Soient deux paraboloïdes de centres x et x' , nous devons tester si l'une est incluse dans l'autre. Pour cela :
 - Tri des segments par rapport à sa extrémité gauche. S'il y a deux segments avec la même extrémité gauche, nous les trions par leurs extrémités droites.
 - Ainsi, il suffit de comparer les extrémités gauches pour vérifier si un segment est contenu dans l'autre. Si c'est le cas, celui qui est contenu est éliminé.

Axe médian euclidien discret : Troisième étape

Élimination des paraboloïdes non pertinentes

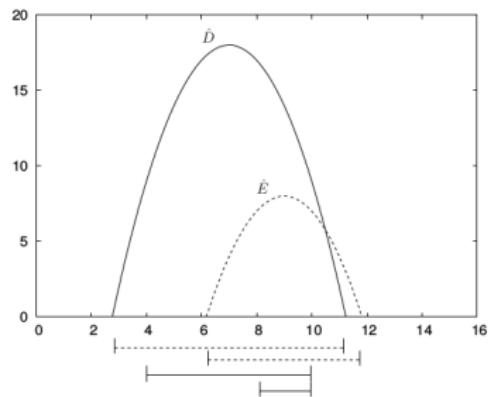


FIGURE – (Gauche) Les segments continus sont en continu et les segments discrets sont en pointillé. (Droite) Illustration de la procédure unidimensionnelle d'élimination de paraboloïdes par rapport à ses segments discrets.

Axe médian euclidien discret

Application

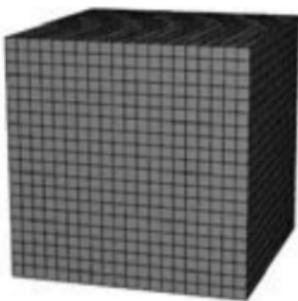


FIGURE – Application de l'algorithme séparable et réversible de détection de l'axe médian sur trois volumes.

Axe médian euclidien discret

Application

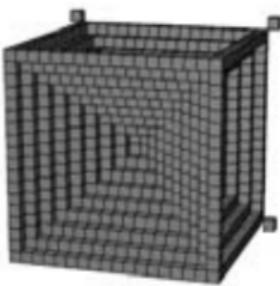


FIGURE – Application de l'algorithme séparable et réversible de détection de l'axe médian sur trois volumes.

Axe médian euclidien discret

Application



FIGURE – Application de l'algorithme séparable et réversible de détection de l'axe médian sur trois volumes.

Amincissement topologique

Amincissement topologique

Skeleton

- Un ensemble minimal d' X avec la même structure topologique.
- Si possible, il est fortement souhaitable que le skeleton soit centré dans la forme X .

Comment l'obtenir ?

- Amincissement avec élimination itérative des points individuels.
- Amincissement contrôlé de la forme à l'aide d'un noyau d'érosion.

Attention

Il faut établir des points de contrôle.

Amincissement topologique

Point simple

Un point $p \in X$ est simple pour X si X et $X \setminus \{p\}$ sont dans la même classe d'équivalence homotopique.

Par exemple :

- Dans deux dimensions, que l'objet et son complémentaire aient la même quantité de composants connexes.
- Dans trois dimensions, il faut préserver les tunnels et les trous.

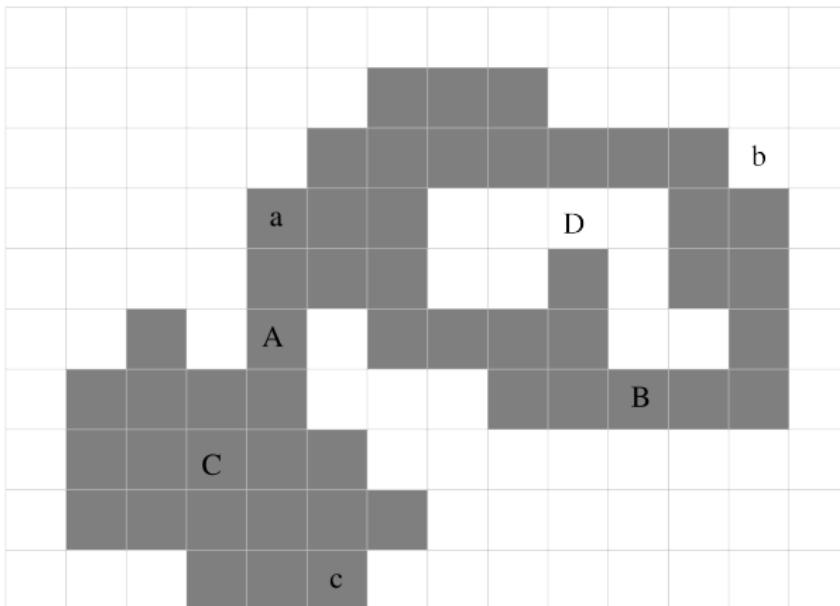
Transformation homotopique

En utilisant la définition de point simple. Soit ϕ une séquence d'insertions et d'éliminations des points simples. Alors, ϕ est une *Une transformation homotopique* si X et $\phi(X)$ sont dans la même classe d'équivalence homotopique.

Amincissement topologique

Exemples des points simples

Quels sont les points simples dans la forme suivante ?



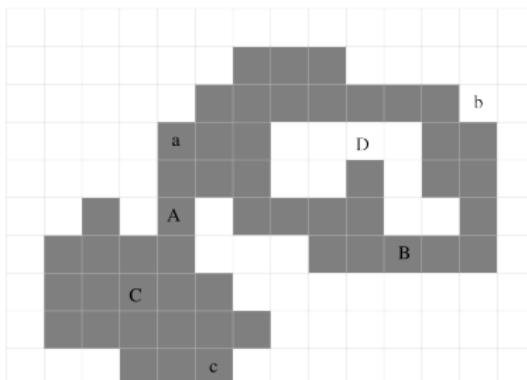
Amincissement topologique

Exemples des points simples

Quels sont les points simples dans la forme suivante ?

Un point $p \in X$ est (k, λ) -simple pour X si :

- X et $X \setminus \{p\}$ ont le même nombre de k -composants (composants connexes).
- X et $X \setminus \{p\}$ ont le même nombre de λ -composants (trous).



Amincissement topologique

Caractérisation locale

Dans 2 et 3 dimensions , (k, λ) -simplicité pour $p \in X$ peut être déterminée localement au point p . En utilisant un voisinage 3×3 en 2D et $3 \times 3 \times 3$ en 3D.

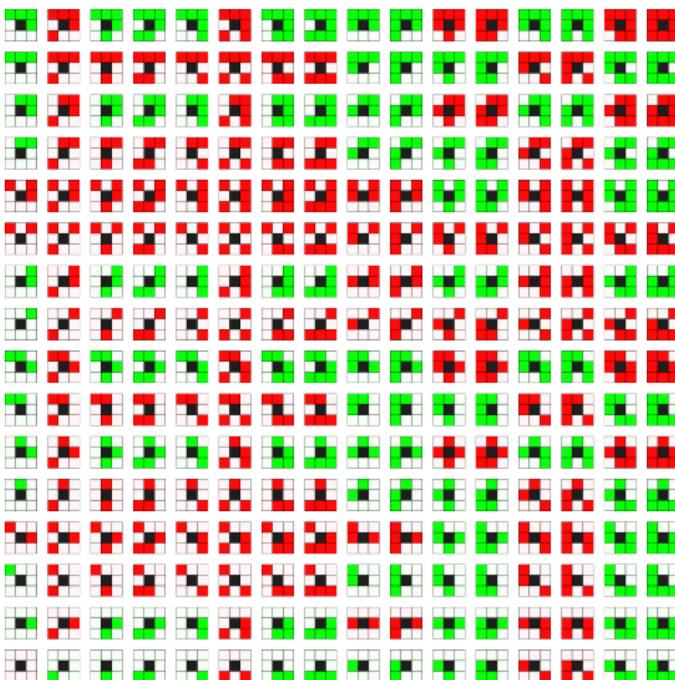
Définitions

- $N_8^*(p)$: Voisinage 8 autour de p .
- $C_k^p(X)$: ensemble de k -composants connexes dans X et qui sont adjacents à p .
- $T_k(p, X) = |C_k^p(N_8^*(p) \cup X)| \Rightarrow$
 $p \in X$ est (k, λ) -simple pour
 $X \iff T_k(p, X) = T_\lambda(p, \bar{X}) = 1$

Pour 3 dimensions, la définition de $T_k(p, X)$ est plus complexe mais encore locale.

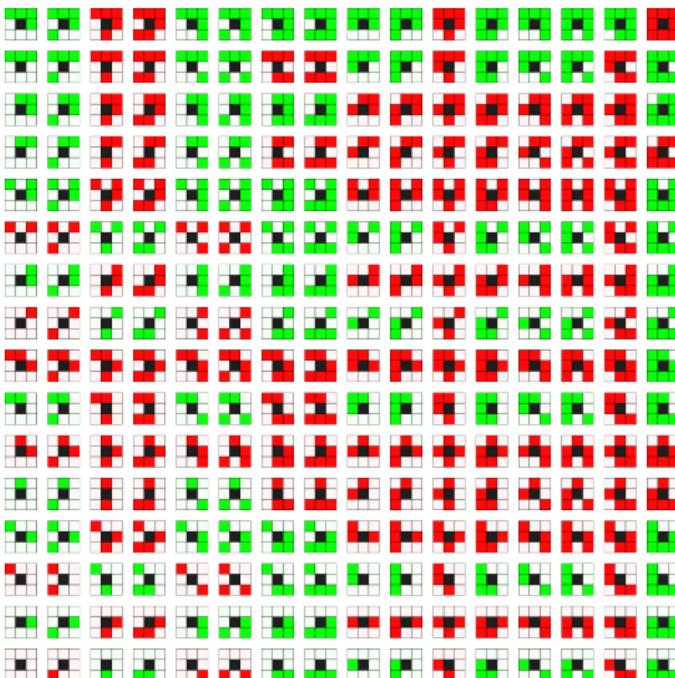
Amincissement topologique

Toutes les configurations locales en 2 dimensions



Amincissement topologique

Toutes les configurations locales en 2 dimensions



Amincissement topologique (dans 2D)

Idée générale

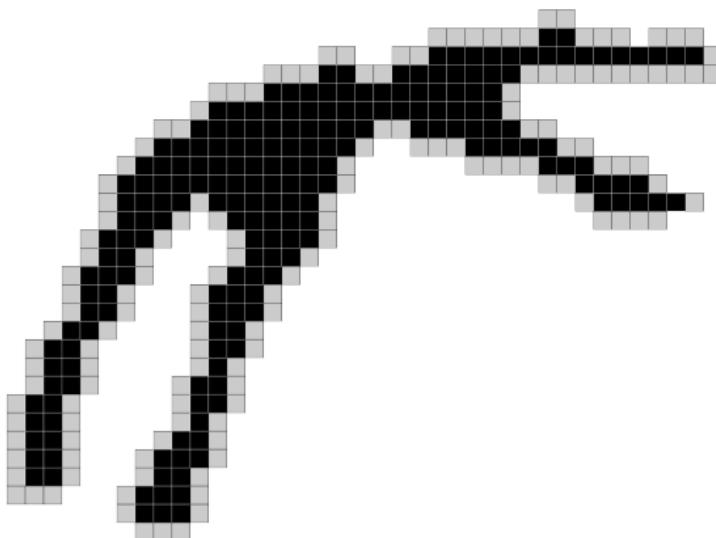
Réaliser des érosions sur des points simples, conservation des points qui ne sont pas simples, jusqu'à idempotence.



Amincissement topologique (dans 2D)

Idée générale

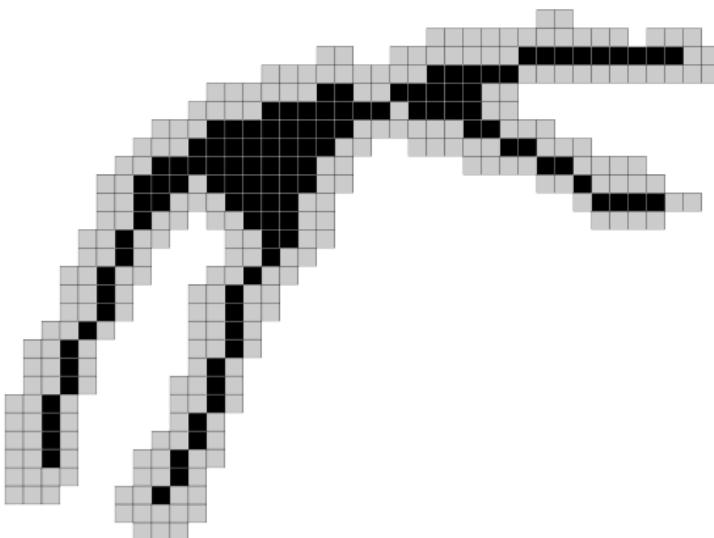
Réaliser des érosions sur des points simples, conservation des points qui ne sont pas simples, jusqu'à idempotence.



Amincissement topologique (dans 2D)

Idée générale

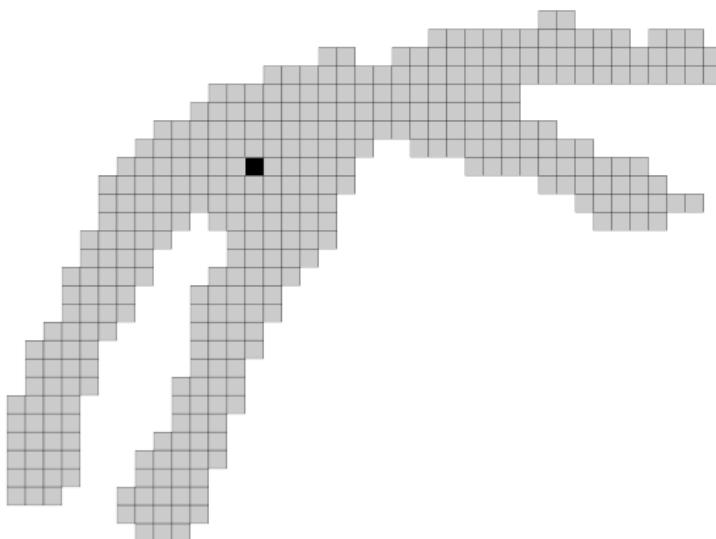
Réaliser des érosions sur des points simples, conservation des points qui ne sont pas simples, jusqu'à idempotence.



Amincissement topologique (dans 2D)

Idée générale

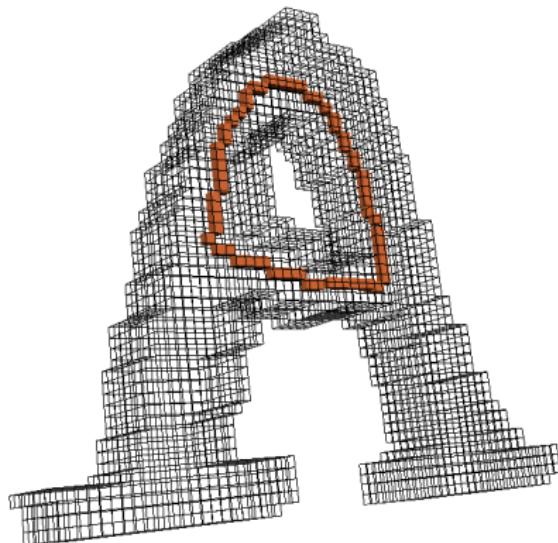
Réaliser des érosions sur des points simples, conservation des points qui ne sont pas simples, jusqu'à idempotence.



Amincissement topologique (dans 3D)

Idée générale

Réaliser des érosions sur des points simples, conservation des points qui ne sont pas simples, jusqu'à idempotence.



Amincissement topologique (dans 3D)

Algorithme général

$P = \{ p \text{ in } X \mid p \text{ est simple for } X \}$

Pendant que ($P \neq \text{vide}$)

$Q = \text{ensemble vide}$

Pour tous les points p en P

Si (p est simple for X)

$X = X \setminus \{p\}$

Pour tout q en $N(p)$

$Q = Q + \{q\}$

$P = \text{ensemble vide}$

Pour tous les points p en Q

SI (p est simple pour X)

$P = P + \{p\}$

Amincissement topologique (dans 3D)

Algorithme avec points complexes

En utilisant une fonction qui nous permet de décider entre points simples et points complexes, il est possible d'améliorer l'amincissement.

$P = \{ p \text{ en } X \mid p \text{ est simple pour } X \}$

Pendant que ($P \neq \text{vide}$)

$Q = \text{ensemble vide}$

Pour tous les points p en P

Si (p est simple pour X) et \\ (p n'est pas un point complexe)

$X = X \setminus \{p\}$

Pour tout q en $N(p)$

$Q = Q + \{q\}$

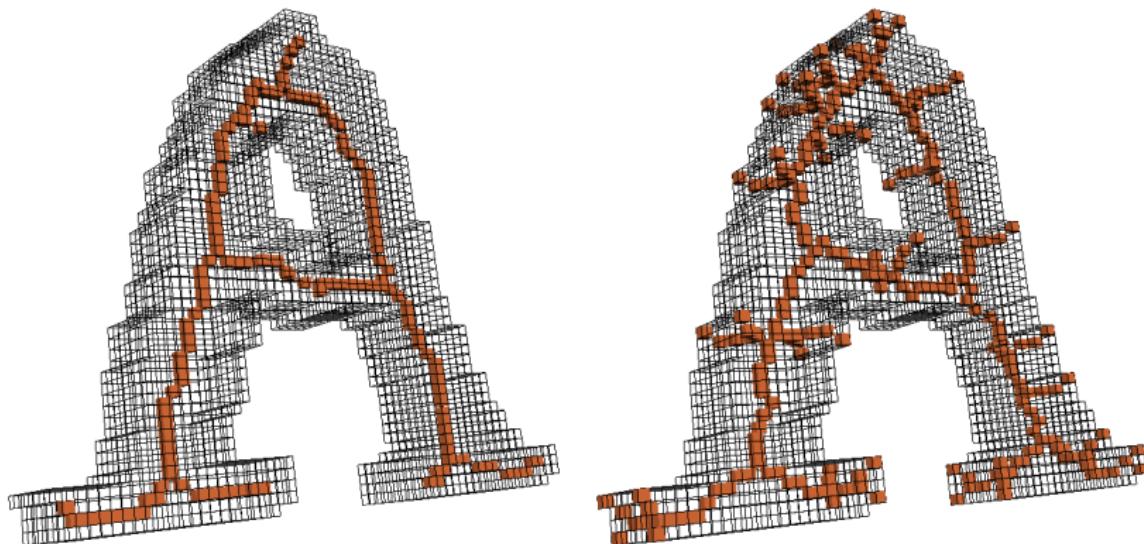
$P = \text{ensemble vide}$

Pour tous les points p en Q

Si (p est simple pour X)

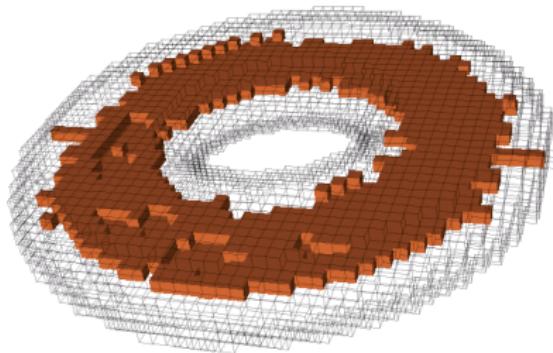
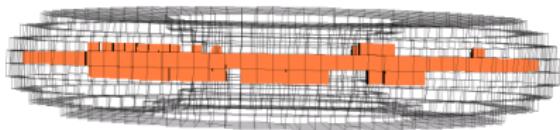
$P = P + \{p\}$

Amincissement topologique avec des points complexes (dans 3D)



Amincissement topologique avec des points complexes (dans 3D)

Il est possible d'utiliser des points complexes pour obtenir des squelettes surfaciques.



Amincissement topologique avec des points complexes (dans 3D)

Amincissement piloté

Utilisation d'une liste de priorité avec les valeurs de la transformée en distance.

Résultat : Une meilleure localisation du skeleton vers le centre de masse de la forme originale.

Amincissement parallèle

Idée générale : Marquage et élimination des points simples en parallèle.

- Ajout des contraintes sur des points simples afin de pouvoir réaliser l'élimination en parallèle.
- La procédure peut être guidée par l'orientation de la forme.

IMPORTANT : En général, les algorithmes parallèles sont plus efficaces et fournissent des skeletons placés au centre de la forme