

Traitement de maillages : Remaillage

Ricardo Uribe Lobello

Université d'Aix-Marseille

03/12/2019

Introduction

Idée générale

Le remaillage est une procédure pour améliorer la qualité d'un maillage.

De quelle manière

En réduisant la complexité du maillage par rapport à un certain critère de qualité.

Une définition plus formelle [Alliez et al. 07]

Le remaillage surfacique est une opération qui reçoit en entrée un maillage plongé en 3D et calcule un autre maillage contenant seulement des éléments respectant un certains critère de qualité tout en approximant acceptablement bien le maillage original.

Introduction

Maillage d'entrée

Dans le remaillage, le maillage d'entrée est censé être une surface 2-variété.

Critères de qualité

Les critères utilisés sont des critères pas topologiques comme les suivants :

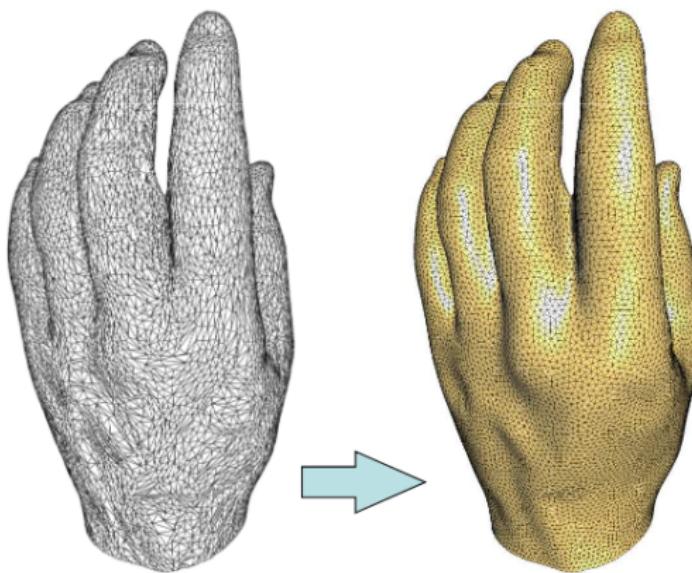
- Nombre de triangles.
- Forme des triangles.
- Orientation.
- Taille des triangles.
- Valence de sommets.
- Densité des sommets.

Motivation

Motivation

Applications

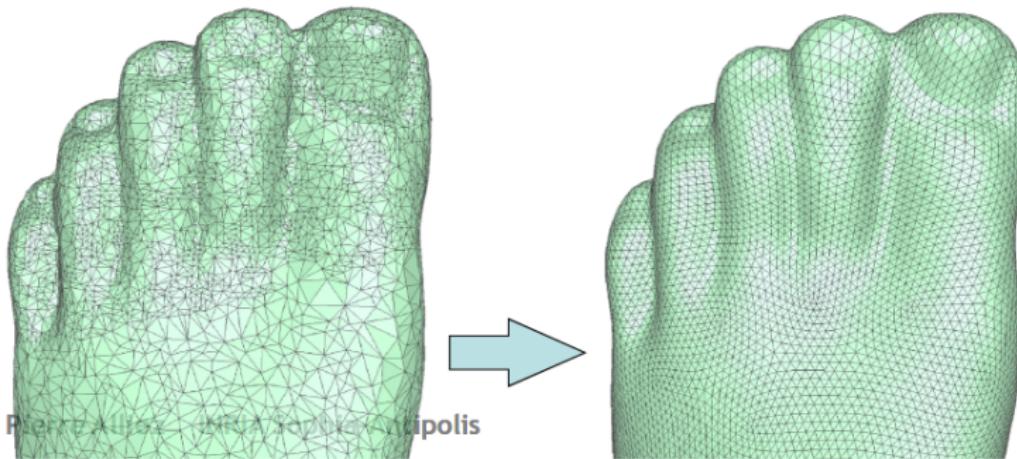
Modification de la géométrie et de la connectivité pour améliorer la qualité.



Motivation

Applications

Remplaçant un maillage pas structuré par un structuré et régulier.



Motivation

Applications

Les maillages obtenus par scanner fournissent une triangulation pas uniforme et irrégulière.

Objectif : Améliorer sa qualité générale.



SIGGRAPH 2007

Structure d'un maillage surfacique

Structure locale

Qu'est-ce que c'est ?

Elle est exprimé par le type, forme, orientation et distribution des éléments du maillage.

Structure locale

Qu'est-ce que c'est ?

Elle est exprimé par le type, forme, orientation et distribution des éléments du maillage.

Types d'éléments

- Triangles.
- Quadrangles.

Structure locale

Qu'est-ce que c'est ?

Elle est exprimé par le type, forme, orientation et distribution des éléments du maillage.

Types d'éléments

- Triangles.
- Quadrangles.

Forme des éléments

- Isotropiques (localement uniforme dans toutes les directions).
- Anisotropiques.

Comment la mesurer ?

- Ratio entre le rayon du circumcircle et la longueur de l'arrête la plus courte.



Structure Locale

Forme des éléments

- Isotropiques (localement uniforme dans toutes les directions).
- Anisotropiques.

Comment la mesurer ?

- Ratio entre le rayon du circumcircle et la longueur de l'arrête la plus courte.

Utilité

- Éléments isotropiques → Meilleur conditionnement des systèmes.
- Des éléments bien orientés permettent des meilleures approximations avec beaucoup moins d'éléments.
- Éléments anisotropiques se rapprochent plus des primitives géométriques utilisées dans la modélisation CAO.

Structure Locale

Densité des éléments

- Uniforme : Les éléments sont repartis de manière régulière sur la surface.
- Adaptative :
 - Le nombre d'éléments peut varier en dépendant de la courbure. Plus de courbure, les éléments qui modélisent correctement la région doivent être plus petits.

Alignment des éléments et orientation

- Le traitement d'un maillage correspond à un re-échantillonnage.
 - **Problème** : Les arêtes vives (discontinuités) peuvent être arrondies.
 - **Solution** : Des éléments fixes peuvent être alignés avec les arêtes vives du maillage.

Structure Globale

Sommet régulier

Il est défini comme celui qui a 6 sommets voisins s'il est intérieur et 4 s'il appartient à la frontière du maillage. 4 et 3 respectivement pour les maillages quadrangulaires.

Types de maillages

- **Irrégulier** : connectivité pas uniforme.
- **Semi-régulier** : Crées par subdivision, quantité des sommets irréguliers petite et constante.
- **Très régulier** : Presque tous les sommets sont réguliers. Pas issus d'une procédure de subdivision.
- **Régulier** : tous les sommets sont réguliers.

Structure Globale

Objectif du remaillage

- Capturer la structure globale du maillage d'entrée.
- Alignant groupes d'éléments au lignes caractéristiques du maillage.

Correspondance

Il est important de conserver le lien entre les sommets du maillage original et les sommets générés pendant la procédure de remaillage.
Comment ?

- **Paramétrisation globale** par projection vers un domaine 2-dimensionnel.
- **Paramétrisation locale** par paramétrisation d'un voisinage géodésique autour de chaque sommet original.
- **Projection** d'un nouveau sommet vers le sommet original le plus proche.

Distribution des triangles

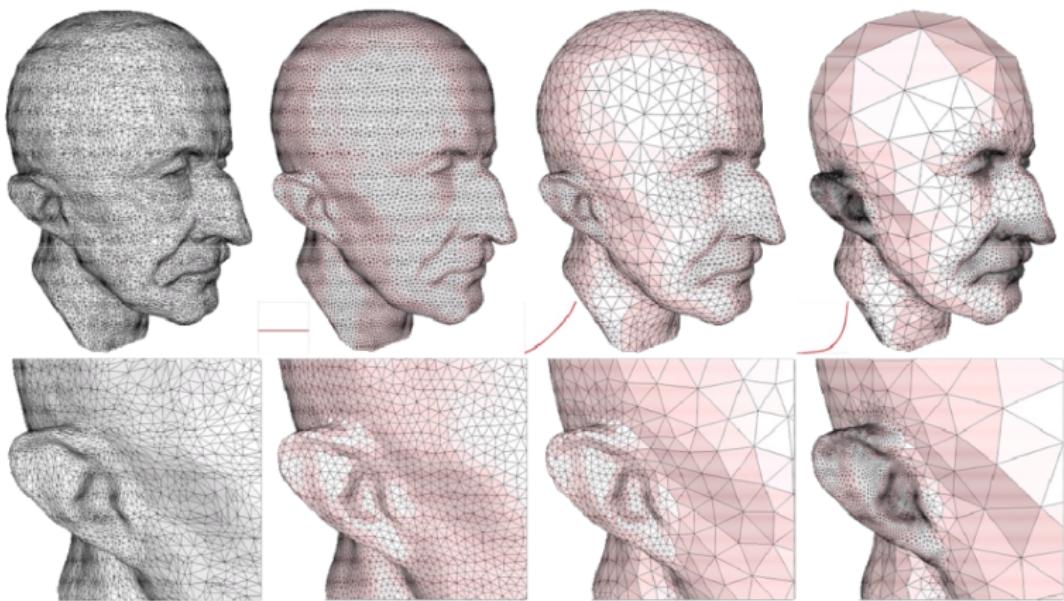


FIGURE – De gauche au droit, Maillage d'entrée, triangulation uniforme, triangulations adaptatives.

Distribution des triangles

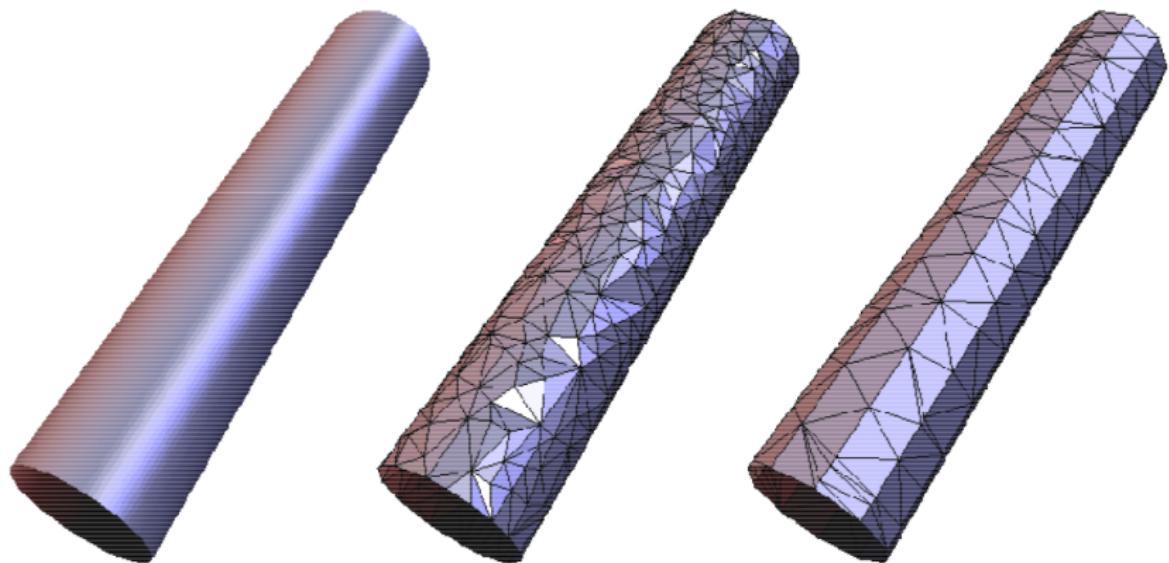


FIGURE – Orientation des triangles par rapport à la forme globale.

Distribution des triangles

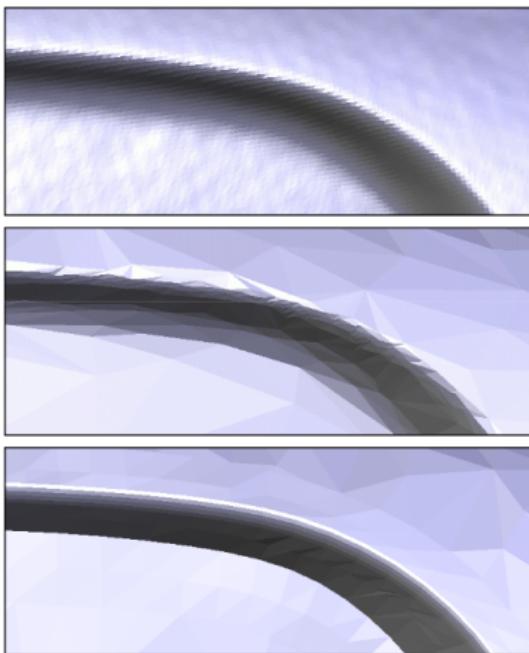


FIGURE – Orientation des triangles sur les arêtes vives (ou lignes caractéristiques).

Régularité du maillage

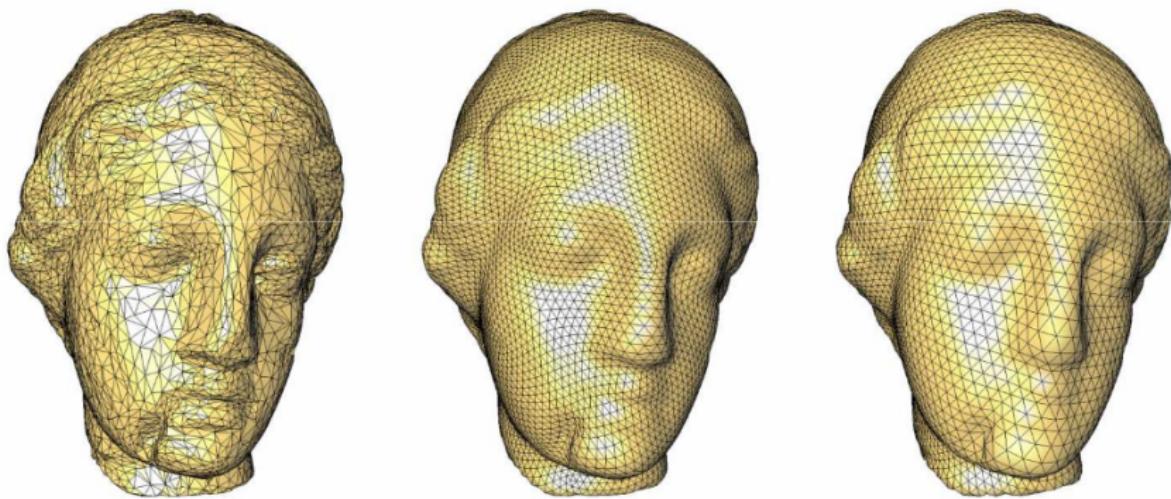


FIGURE – (Gauche) Irrégulier. (Centre) Semi-régulier. (Droite) Régulier.

Diagrammes de Voronoï et Triangulation de Delaunay

Diagramme de Voronoï

Définition

Soit $\mathcal{P} = \{\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\}$ un ensemble de points (ou sites) dans \mathcal{R}^d , pour chaque site p_i , nous pouvons définir sa région de Voronoï $\mathcal{V}(\mathbf{p}_i)$ tel que :

$$\mathcal{V}(\mathbf{p}_i) = \{\mathbf{x} \in \mathcal{R}^d : \|\mathbf{x} - p_i\| \leq \|\mathbf{x} - p_j\|, \forall j \neq i\} \quad (1)$$

L'ensemble de ces cellules, leurs arêtes et leurs relations d'incidence forment un complexe cellulaire appelé le **Diagramme de Voronoï de \mathcal{P}** .

Diagramme de Voronoï

Définition

Soit $\mathcal{P} = \{\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\}$ un ensemble de points (ou sites) dans \mathcal{R}^d , pour chaque site p_i , nous pouvons définir sa région de Voronoï $\mathcal{V}(\mathbf{p}_i)$ tel que :

$$\mathcal{V}(\mathbf{p}_i) = \{\mathbf{x} \in \mathcal{R}^d : \|\mathbf{x} - p_i\| \leq \|\mathbf{x} - p_j\|, \forall j \neq i\} \quad (1)$$

L'ensemble de ces cellules, leurs arêtes et leurs relations d'incidence forment un complexe cellulaire appelé le **Diagramme de Voronoï de \mathcal{P}** .

Triangulation de Delaunay

La structure duale du diagramme de Voronoï est connue comme la **Triangulation de Delaunay**.

Diagramme de Voronoï

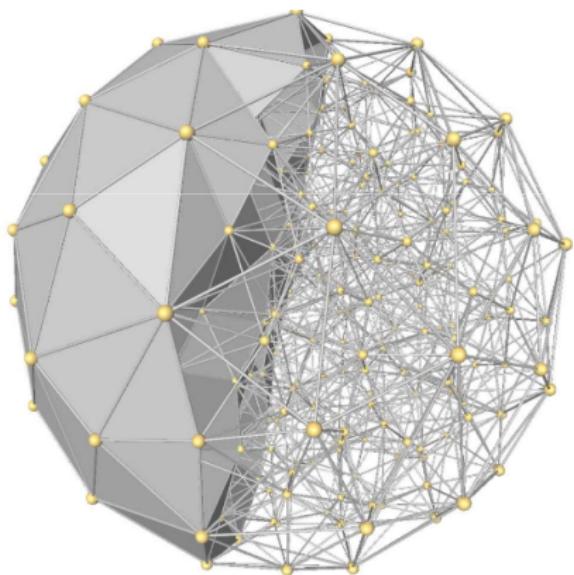
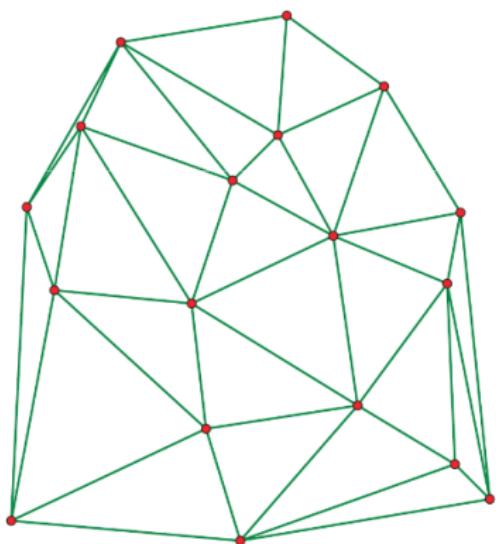


FIGURE – Tringulation de Delaunay en 2D (gauche) et en 3D (droite).

Triangulation de Delaunay contrainte

Définition

Si X est un sous-ensemble d'un ensemble de $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^d$ et $Del(\mathcal{P})$ la triangulation de Delaunay de \mathcal{P} . Ainsi, la *triangulation de Delaunay contrainte* de \mathcal{P} est le sous-complexe $Del_X(\mathcal{P})$ des cellules de $Del(\mathcal{P})$ qui interceptent X .

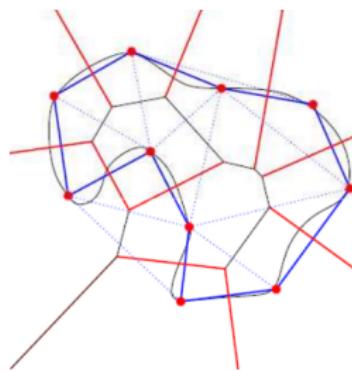


FIGURE – Tringulation de Delaunay restricted en 2D.

Algorithmes basés sur la triangulation

Trois types de méthodes

- **Gourmands :** Utilisation des modifications locales successives jusqu'à converger sur les critères de qualité demandés.

Trois types de méthodes

- **Gourmands** : Utilisation des modifications locales successives jusqu'à converger sur les critères de qualité demandés.
- **Variationnels** : Formulation du problème de remaillage comme la minimisation d'une énergie. Une base énergie est équivalente à une bonne solution ou bon maillage.

Trois types de méthodes

- **Gourmands** : Utilisation des modifications locales successives jusqu'à converger sur les critères de qualité demandés.
- **Variationnels** : Formulation du problème de remaillage comme la minimisation d'une énergie. Une base énergie est équivalente à une bonne solution ou bon maillage.
- **Incrémental** : ces algorithmes combinent le raffinement avec une décimation du maillage. Il est aussi possible d'avoir une procédure de relaxation.

Méthode de triangulation de Delaunay par raffinement

Deux concepts de base

Boule de surface

C'est une boule centrée sur la surface et qui circumscrire une des facettes de Delaunay. Elle sera dénotée $B_f = B(\mathbf{c}_f, r_f)$ comme la boule de Delaunay qui circumscribe la facette f et centrée en \mathbf{c}_f avec du rayon r_f .

Axe médian

L'axe médian $AM(\mathcal{O})$ d'un ensemble \mathcal{O} est l'ensemble fermé de points avec au moins deux points également proches (mesuré avec une distance $\rho(\mathbf{p})$) et placés sur la surface.

Une boule centré sur l'axe médian est nommée une boule médian.

Une autre définition d'axe médian : Les centres de toutes les boules médiennes d'un ensemble \mathcal{O} .

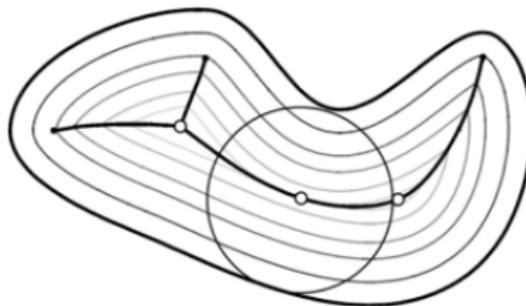
Méthode de triangulation de Delaunay par raffinement

Axe médian

L'axe médian $AM(\mathcal{O})$ d'un ensemble \mathcal{O} est l'ensemble fermé de points avec au moins deux points également proches (mesuré avec une distance $\rho(\mathbf{p})$) et placés sur la surface.

Une boule centré sur l'axe médian est nommée une boule médian.

Une autre définition d'axe médian :Les centres de toutes les boules médiennes d'un ensemble \mathcal{O} .



Méthode de triangulation de Delaunay par raffinement

L'idée générale

Il faut ajouter des points sur la surface jusqu'à que toutes les boules de surface ont un rayon r_f tel que $r_f \leq \psi(\mathbf{c}_f)$.

Description de l'algorithme

- ① Génération de la triangulation de Delaunay.
- ② Stockage de la liste de facettes mauvaises L .
- ③ Pendant que la liste L n'est pas vide.
 - ① Extraire une facette f de L .
 - ② Obtenez le centre de f , $\mathbf{c}_f = \text{Dual}(f) \cap \mathcal{S}$.
 - ③ Ajoutez \mathbf{c}_f à la liste de points \mathcal{P} .
 - ④ Mettez à jour la $D(\mathcal{P})$ et la $D_S(\mathcal{P})$.
 - ⑤ Mettez à jour L :
 - ① Éliminez les facettes de L qui n'appartiennent plus à $D_{S(\mathcal{P})}$.
 - ② Ajoutez les mauvaises facettes de $D_{S(\mathcal{P})}$ à L .

Méthode de triangulation de Delaunay par raffinement

Assomptions

Une mauvaise boule $B_f = B(\mathbf{c}_f, r_f)$ telle que $r_f > \psi(\mathbf{c}_f)$ définie sur \mathcal{S} et qui satisfait $\psi(\mathbf{x}) > \psi_{inf} > 0 \forall \mathbf{x} \in \mathcal{S}$.

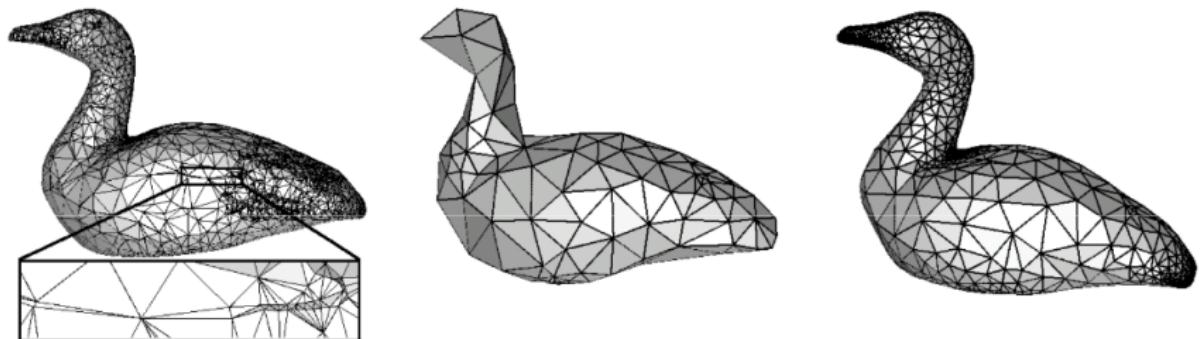
Si ψ est telle que $\psi \leq 0.2\rho$ (distance à l'axe médian).

Caractéristiques

- L'algorithme finira après un nombre fini de pas de raffinement.
- La triangulation finale offrira de garanties sur la qualité de l'approximation et la qualité de la triangulation.
 - Normales.
 - Courbures.
 - Aire.
- La triangulation finale aura la même topologie de la surface initiale.
- Les angles plats des triangles seront bornés.

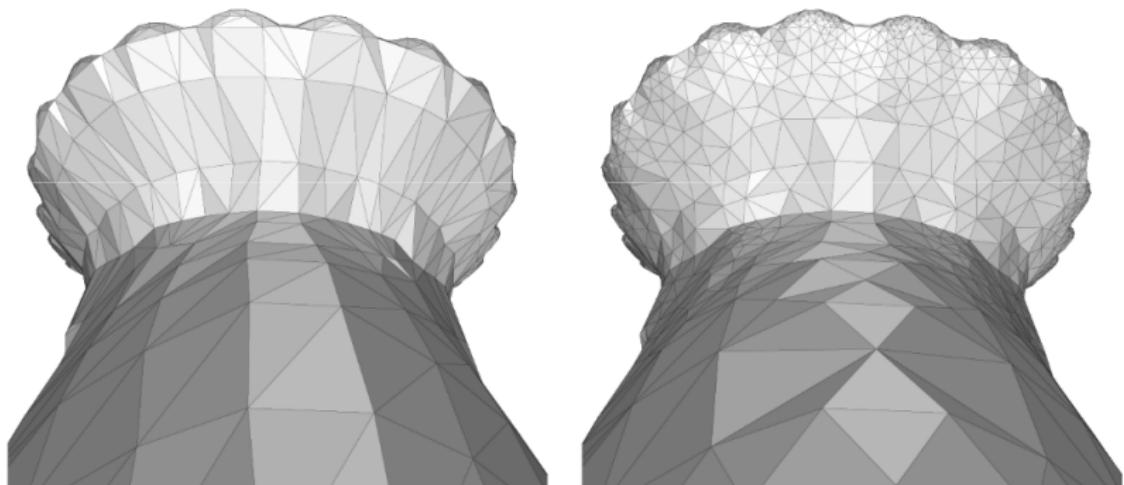


Méthode de triangulation de Delaunay par raffinement



[Dey-Li-Ray] IMRT 05, *Polygonal surface remeshing with Delaunay refinement*

Méthode de triangulation de Delaunay par raffinement



[Boissonnat-Oudot 03]

Méthode de triangulation de Delaunay par raffinement

Avantages

- Offre des garanties topologiques et géométriques dans les éléments générés.
- On obtient une tétraèdralisation à partir de laquelle on peut extraire une surface.
- Le maillage obtenu n'a pas des auto-intersections.

Méthode de triangulation de Delaunay par raffinement

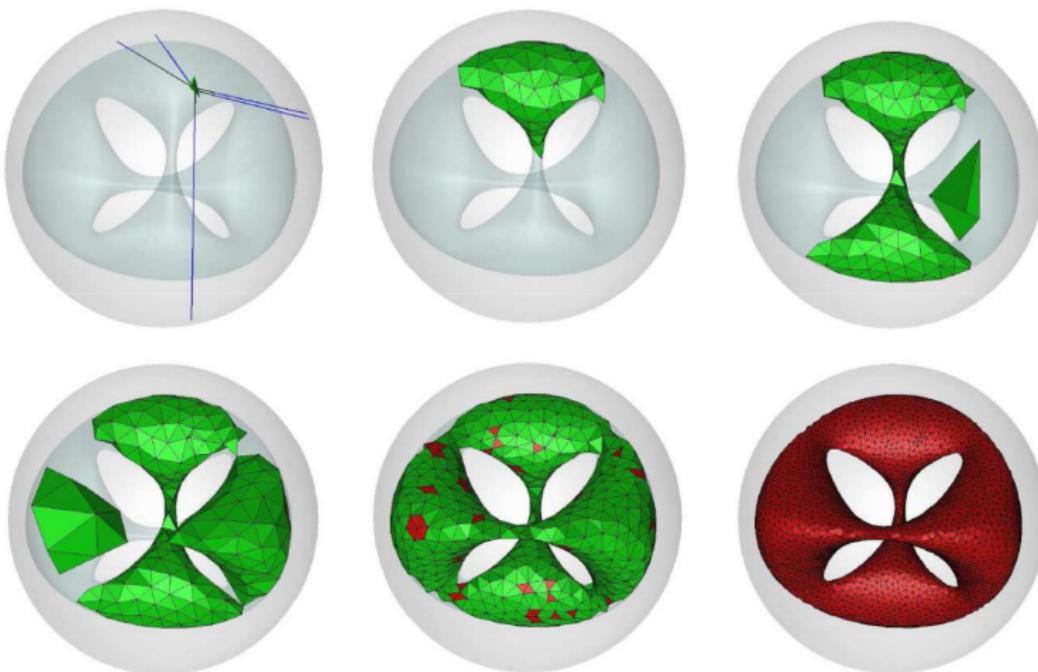


FIGURE – Application de l'algorithme sur un volume.

Méthodes variationnelles

Méthodes variationnelles

Idée générale

Obtenir des maillages de bonne qualité en utilisant une procédure d'optimisation.

Méthodes variationnelles

Idée générale

Obtenir des maillages de bonne qualité en utilisant une procédure d'optimisation.

Comment ?

En imposant des critères à optimiser :

- Forme et taille des triangles.
- Nombre de triangles.
- Nombre de sommets.
- Angles plats sur des triangles ou angles dièdres sur des tétraèdres.

Il y a des critères continus (angles) mais aussi discrets (nombre des triangles et des sommets).

Méthodes variationnelles

Objectif

Proposer une énergie à minimiser et une méthode pour arriver au minimum global (ou maximum) de cette énergie (un solveur).

Méthodes variationnelles

Objectif

Proposer une énergie à minimiser et une méthode pour arriver au minimum global (ou maximum) de cette énergie (un solveur).

Problème

L'espace de possibles solutions, ou de manière équivalente, maillages, est trop vaste et trouver une énergie et une méthode qui converge vers un minimum globale n'est pas toujours simple.

Méthodes variationnelles

Objectif

Proposer une énergie à minimiser et une méthode pour arriver au minimum global (ou maximum) de cette énergie (un solveur).

Problème

L'espace de possibles solutions, ou de manière équivalente, maillages, est trop vaste et trouver une énergie et une méthode qui converge vers un minimum globale n'est pas toujours simple.

Une possibilité

Distribuer les sommets avec isotropie sur un domaine 2D produit des bons triangles.

Mais : cette propriété n'est pas valable en 3D (des slivers peuvent apparaître).

Méthodes variationnelles

Diagramme de Voronoï Centroidal (DVC)

Il s'agit de construire une tessellation de Voronoï sur un domaine borné Ω telle que les sites sont tous placés au centre de masse (centroids \mathbf{c}_i) des cellules de Voronoï. Un centroid \mathbf{c}_i est exprimé comme :

$$\mathbf{c}_i = \frac{\int_{V_i} \mathbf{x} \cdot \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}{\int_{V_i} \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}$$

Où $\rho(\mathbf{x})$ est une fonction de densité conçue pour contrôler la taille des cellules de Voronoï.

Méthodes variationnelles

Diagramme de Voronoï Centroidal (DVC)

Il est possible d'exprimer la construction d'un DVC comme la procédure de minimisation d'une énergie définie en fonction des sites $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ et de ses cellules de Voronoï correspondantes $\mathcal{V}(\mathbf{p}_1), \dots, \mathcal{V}(\mathbf{p}_n)$ en tenant compte d'une fonction de densité $\rho(\mathbf{x})$ comme suit :

$$E(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n, V_1, \dots, V_n) = \sum_{i=1}^n \rho(\mathbf{x}) \|\mathbf{x} - \mathbf{p}_i\| d\mathbf{x}$$

Méthodes variationnelles

Diagramme de Voronoï Centroidal (DVC)

Il est possible d'exprimer la construction d'un DVC comme la procédure de minimisation d'une énergie définie en fonction des sites $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ et de ses cellules de Voronoï correspondantes $\mathcal{V}(\mathbf{p}_1), \dots, \mathcal{V}(\mathbf{p}_n)$ en tenant compte d'une fonction de densité $\rho(\mathbf{x})$ comme suit :

$$E(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n, V_1, \dots, V_n) = \sum_{i=1}^n \rho(\mathbf{x}) \|\mathbf{x} - \mathbf{p}_i\| d\mathbf{x}$$

Conclusion

L'énergie E est minimisée quand les sites \mathbf{p}_i sont les centres de masse \mathbf{c}_i de leurs cellules respectives.

Méthodes variationnelles

Comment construire un Diagramme de Voronoï Centroidal

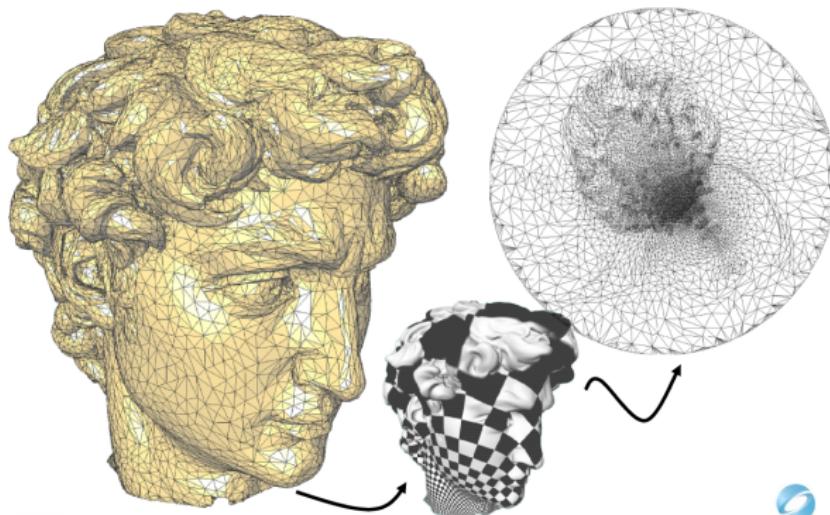
En utilisant la méthode de relaxation de LLoyd [LLoyd 82] comme suit :

- ① Construisez la tessellation de Voronoï correspondante aux sites \mathbf{p}_i .
- ② Calculez la position des centres de masse \mathbf{c}_i de chaque cellule de Voronoï.
- ③ Déplacez les sites à la position des centres de masse.
- ④ Revenez aux étapes 1, 2 et 3 jusqu'à arriver au niveau de convergence désiré.

Méthodes variationnelles

Implantation paramétrique du DVC

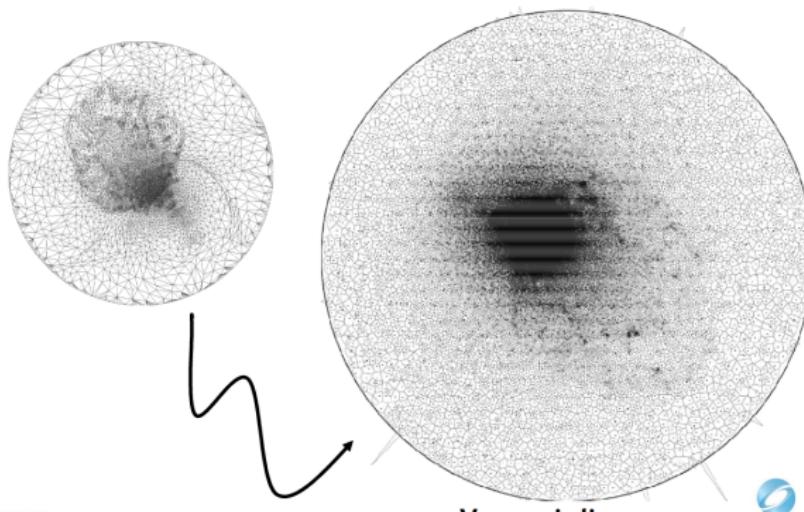
Créer une paramétrisation conforme du maillage afin de la projeter dans un domaine 2D et réaliser la construction du DVC dans le domaine bidimensionnel.



Méthodes variationnelles

Implantation paramétrique du DVC

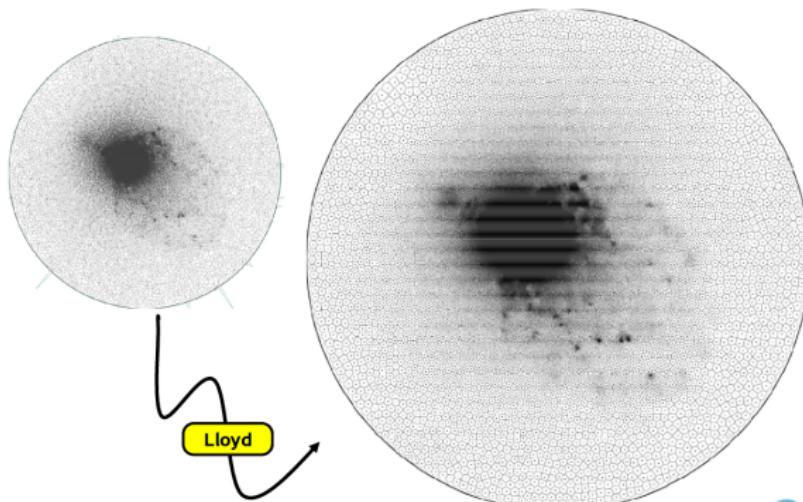
Créer une paramétrisation conforme du maillage afin de la projeter dans un domaine 2D et réaliser la construction du DVC dans le domaine bidimensionnel.



Méthodes variationnelles

Implantation paramétrique du DVC

Créer une paramétrisation conforme du maillage afin de la projeter dans un domaine 2D et réaliser la construction du DVC dans le domaine bidimensionnel.

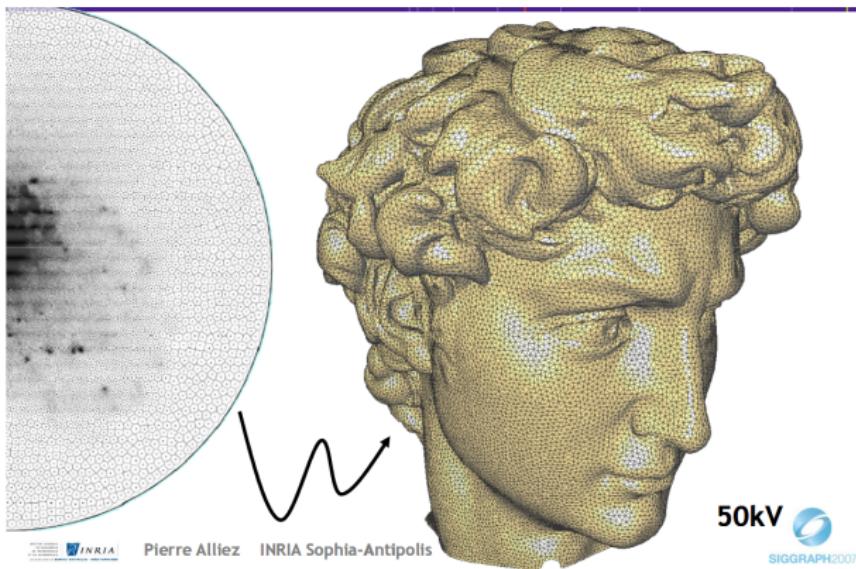


centroidal Voronoi diagram SIGGRAPH2007

Méthodes variationnelles

Implantation paramétrique du DVC

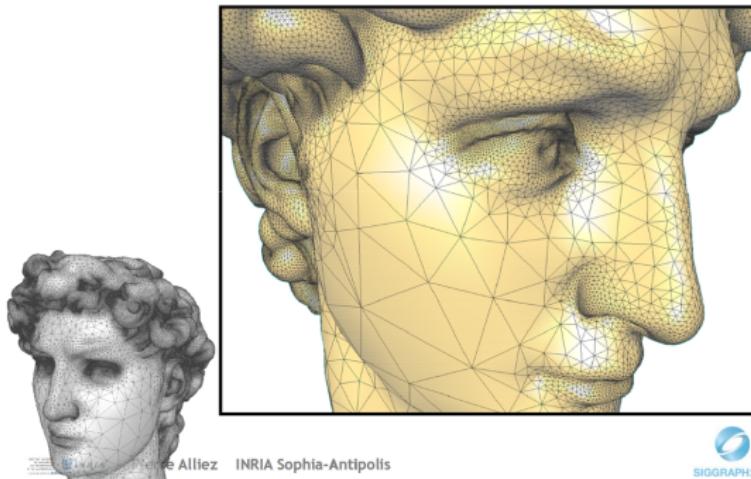
Créer une paramétrisation conforme du maillage afin de la projeter dans un domaine 2D et réaliser la construction du DVC dans le domaine bidimensionnel.



Méthodes variationnelles

Implantation anisotropique paramétrique du DVC

Créer une paramétrisation conforme du maillage afin de la projeter dans un domaine 2D et réaliser la construction du DVC dans le domaine bidimensionnel en utilisant la fonction ρ pour contrôler la taille des triangles.



Remaillage Incrémental

Remaillage Incremental

Idée générale

Ces algorithmes sont basés sur des opérations élémentaires et locales appliquées sur le maillage.

- Fusion d'arêtes (Collapsing).
- Subdivision d'arêtes (Split).
- Retournement d'arêtes (Flip).
- Repositionnement des sommets (Relocation).

Important

- Pas besoin de paramétrisation.
- Pas besoin de diagramme de Voronoï.
- Approche simple et robuste.

Remaillage Incrémental

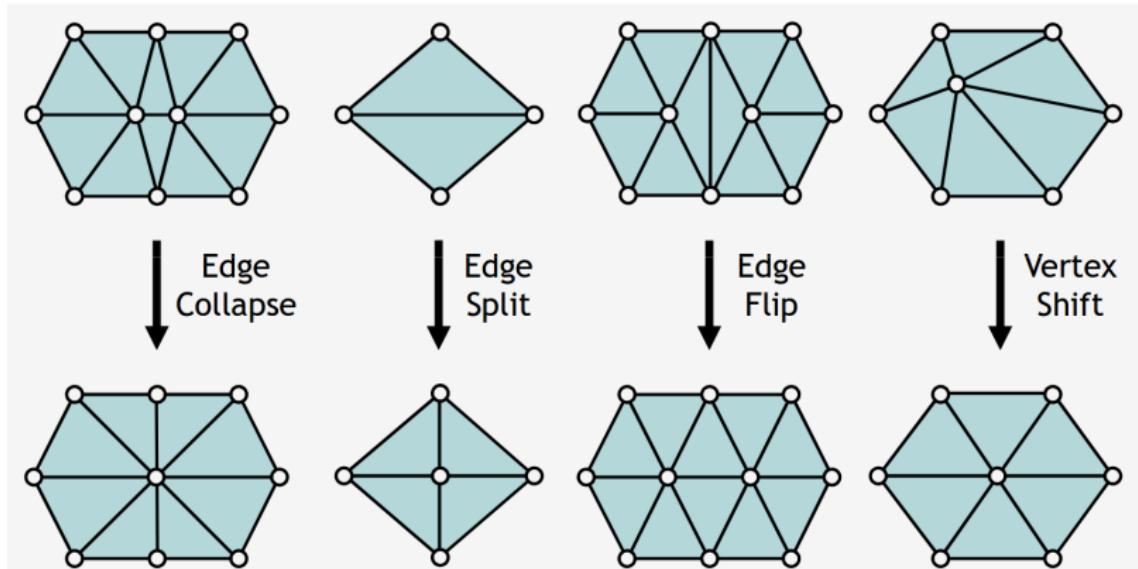


FIGURE – Opérations locales de base pour le remaillage incrémental.

Remaillage Incrémental

Description de l'algorithme

L'algorithme reçoit un maillage et un largeur d'arête objectif (lao).
Il faut exécuter le pseudo-code de manière itérative.

① Remaillage (lao)

- ① seuilMinimal = $\frac{4}{5} * \text{lao}$
- ② seuilMaximal = $\frac{4}{3} * \text{lao}$
- ③ for $i = 0$ to 10 do
 - ① divisiondArêtesLongues(seuilMaximal)
 - ② fusiondArêtesCourtes(seuilMaximal,seuilMinimal)
 - ③ égaliserConnectivité()
 - ④ RelaxationTangentielle()
 - ⑤ ProjeterALaSurface()

Paramètres de la méthode

Les seuils $\frac{4}{5}$ et $\frac{4}{3}$ sont nécessaires pour assurer que la méthode converge vers un largeur d'arête uniforme sur tout le maillage.



Remaillage Incrémental

Comment implanter le mécanisme de fusion d'arêtes ?

`fusionDAretesCourtes(seuilMaximal,seuilMinimal)`

Remaillage Incrémental

Comment planter le mécanisme de fusion d'arêtes ?

fusionDAretesCourtées(seuilMaximal,seuilMinimal)

- ① **TanQue** il existe une arête e avec $\text{largeur}(e) < \text{seuilMinimal}$ faire
 - ① Soit $e = (a, b)$ et soit $a[1], \dots, a[n]$ l'ensemble des sommets voisins à a
 - ② fusionner = vrai
 - ③ **Pour** $i = 1$ à n faire
 - ① **Si** la $\text{largeur}(b, a[i]) > \text{seuilMaximal}$ **Alors** fusionner = faux
 - ④ **Si** fusionner est vrai **Alors** fusionner a avec b sur l'arête e

Comment égaliser les connectivités des sommets ?

Remaillage Incrémental

Comment planter le mécanisme de fusion d'arêtes ?

fusionDAretesCourtées(seuilMaximal,seuilMinimal)

- ① **TanQue** il existe une arête e avec $\text{largeur}(e) < \text{seuilMinimal}$ faire
 - ① Soit $e = (a, b)$ et soit $a[1], \dots, a[n]$ l'ensemble des sommets voisins à a
 - ② fusionner = vrai
 - ③ **Pour** $i = 1$ à n faire
 - ① Si la $\text{largeur}(b, a[i]) > \text{seuilMaximal}$ **Alors** fusionner = faux
 - ④ Si fusionner est vrai **Alors** fusionner a avec b sur l'arête e

Comment égaliser les connectivités des sommets ?

Réalisant des retournements (flipping) d'arêtes jusqu'à obtenir une valence optimale (si possible) de 6 pour les sommets intérieurs et de 4 pour les sommets frontaliers.

Remaillage Incrémental

Comment implanter le mécanisme d'égalisation de la valence ?

egalisationValence()

Remaillage Incrémental

Comment planter le mécanisme d'égalisation de la valence ?

égalisationValence()

① Pour chaque arête e faire

- ① Soient a, b, c, d l'ensemble des sommets dans les deux triangles incidents à e
- ② $\text{déviationAvant} = \text{abs}(\text{valence}(a) - \text{valenceObjectif}(a)) + \text{abs}(\text{valence}(a) - \text{valenceObjectif}(a)) + \text{abs}(\text{valence}(c) - \text{valenceObjectif}(c)) + \text{abs}(\text{valence}(d) - \text{valenceObjectif}(d))$
- ③ Retourner(e)
- ④ $\text{déviationApres} = \text{abs}(\text{valence}(a) - \text{valenceObjectif}(a)) + \text{abs}(\text{valence}(a) - \text{valenceObjectif}(a)) + \text{abs}(\text{valence}(c) - \text{valenceObjectif}(c)) + \text{abs}(\text{valence}(d) - \text{valenceObjectif}(d))$
- ⑤ Si $\text{déviationAvant} \leq \text{déviationApres}$ alors
 - ① Retourner(e)

Remaillage Incrémental

Relaxation tangentiel

Il peut être conçu comme un lissage sur le maillage.
Comment ?

Remaillage Incrémental

Relaxation tangentiel

Il peut être conçu comme un lissage sur le maillage.

Comment ?

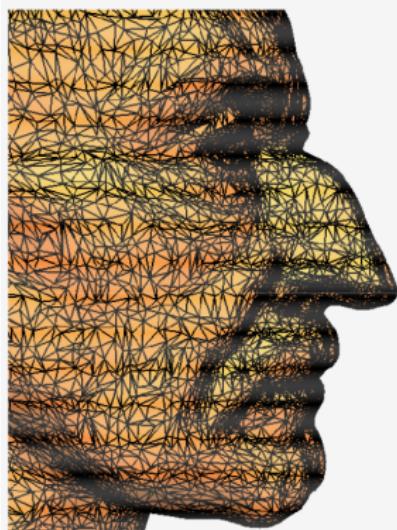
Utilisation de l'approximation uniforme de l'opérateur de Laplace-Beltrami.

$$\mathbf{q} = \frac{1}{|\mathcal{N}_1(\mathbf{p})|} \sum_{\mathbf{p}_j \in \mathcal{N}_1(\mathbf{p})} \mathbf{p}_j \quad (2)$$

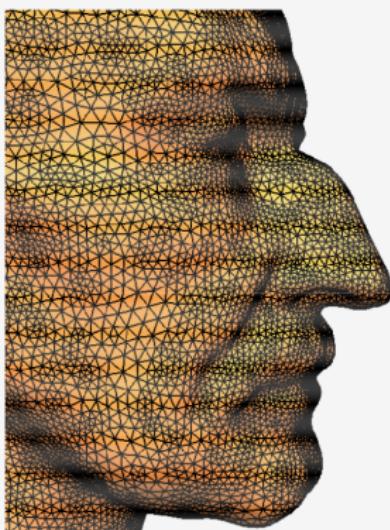
Et la nouvelle position \mathbf{p}' de \mathbf{p} est calculée en projetant \mathbf{q} sur la plan tangent de \mathbf{p} .

$$\mathbf{p}' = \mathbf{q} + \mathbf{n}\mathbf{n}^T(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \quad (3)$$

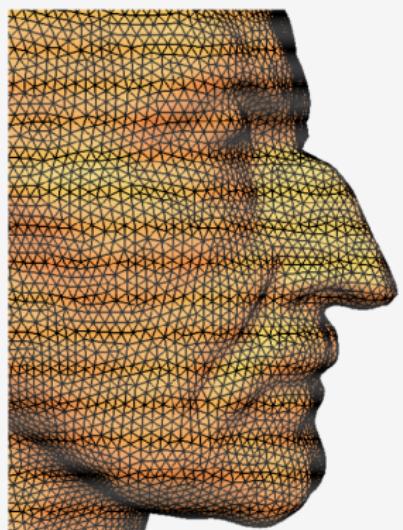
Remaillage Incrémental



Original



$(\frac{1}{2}, 2)$



$(\frac{4}{5}, \frac{4}{3})$

Remaillage Incremental

Comment préserver les arêtes vives ?

Si les arêtes vives sont déjà marquées, alors :

Remaillage Incrémental

Comment préserver les arêtes vives ?

Si les arêtes vives sont déjà marquées, alors :

- Sommets placés exactement sur une arête vive sont écartés de la procédure d'itération géométrique.

Remaillage Incremental

Comment préserver les arêtes vives ?

Si les arêtes vives sont déjà marquées, alors :

- Sommets placés exactement sur une arête vive sont écartés de la procédure d'itération géométrique.
- Les sommets faisant partie d'une arête vive ne peuvent pas être fusionnés qu'avec autres sommets sur la même arête vive.

Remaillage Incrémental

Comment préserver les arêtes vives ?

Si les arêtes vives sont déjà marquées, alors :

- Sommets placés exactement sur une arête vive sont écartés de la procédure d'itération géométrique.
- Les sommets faisant partie d'une arête vive ne peuvent pas être fusionnés qu'avec autres sommets sur la même arête vive.
- La séparation de deux sommets (split) doit créer deux arêtes et un sommet nouveau sur l'arête vive.

Remaillage Incrémental

Comment préserver les arêtes vives ?

Si les arêtes vives sont déjà marquées, alors :

- Sommets placés exactement sur une arête vive sont écartés de la procédure d'itération géométrique.
- Les sommets faisant partie d'une arête vive ne peuvent pas être fusionnés qu'avec autres sommets sur la même arête vive.
- La séparation de deux sommets (split) doit créer deux arêtes et un sommet nouveau sur l'arête vive.
- Les arêtes faisant partie de l'arête vive ne sont jamais retournés.

Remaillage Incrémental

Comment préserver les arêtes vives ?

Si les arêtes vives sont déjà marquées, alors :

- Sommets placés exactement sur une arête vive sont écartés de la procédure d'itération géométrique.
- Les sommets faisant partie d'une arête vive ne peuvent pas être fusionnés qu'avec autres sommets sur la même arête vive.
- La séparation de deux sommets (split) doit créer deux arêtes et un sommet nouveaux sur l'arête vive.
- Les arêtes faisant partie de l'arête vive ne sont jamais retournés.
- Le lissage tangentiel n'est réalisé qu'en parallèle aux arêtes vives.

Remaillage Incremental

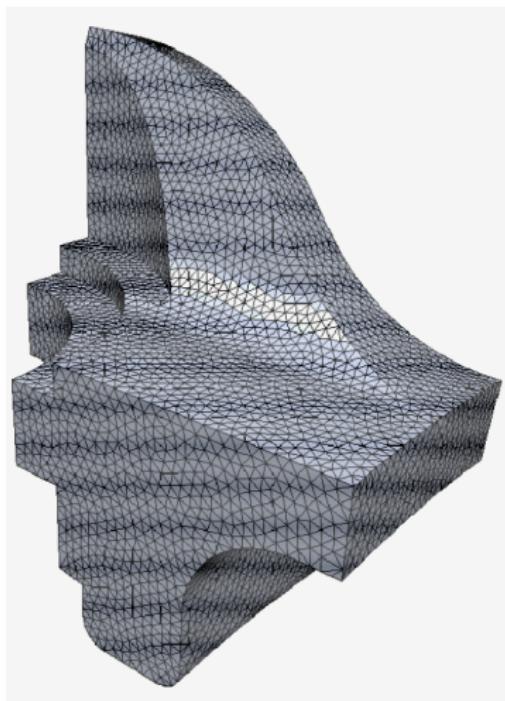


FIGURE – Application du maillage incrémental sur une pièce mécanique.

Remaillage Incrémental

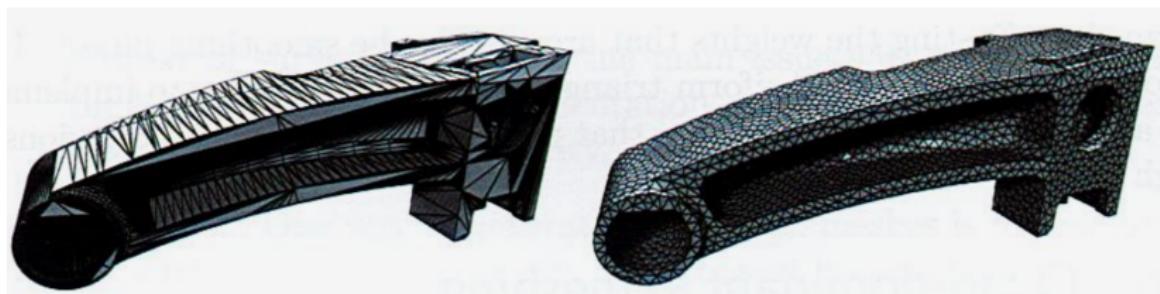


FIGURE – Application du remaillage incrémental sur une pièce mécanique. L'algorithme conserve les arêtes vives.

Remaillage incrémental

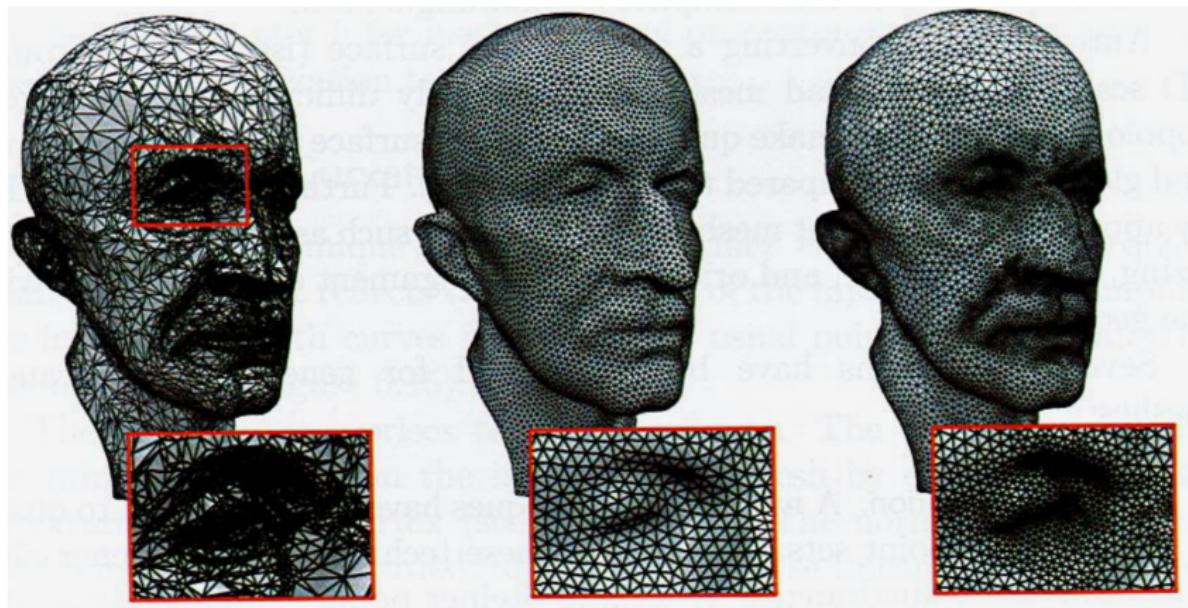
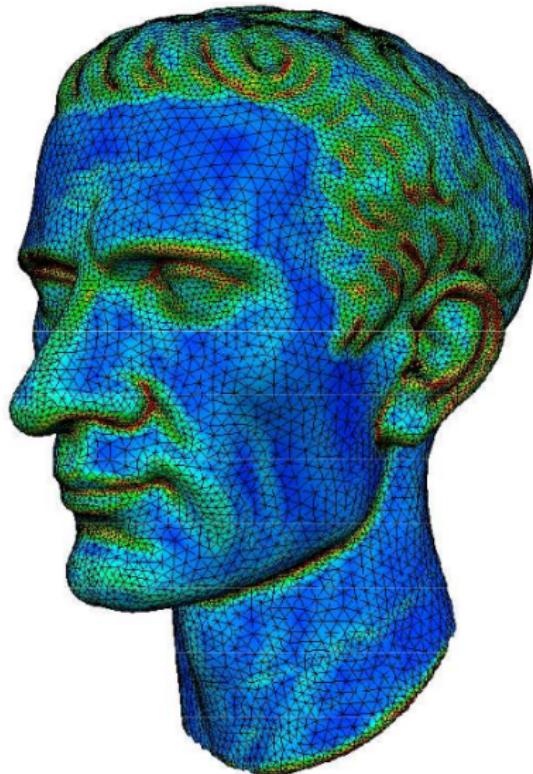


FIGURE – Application du remaillage incrémental. Il est possible de générer des maillages uniformes mais aussi des maillages adaptatifs.

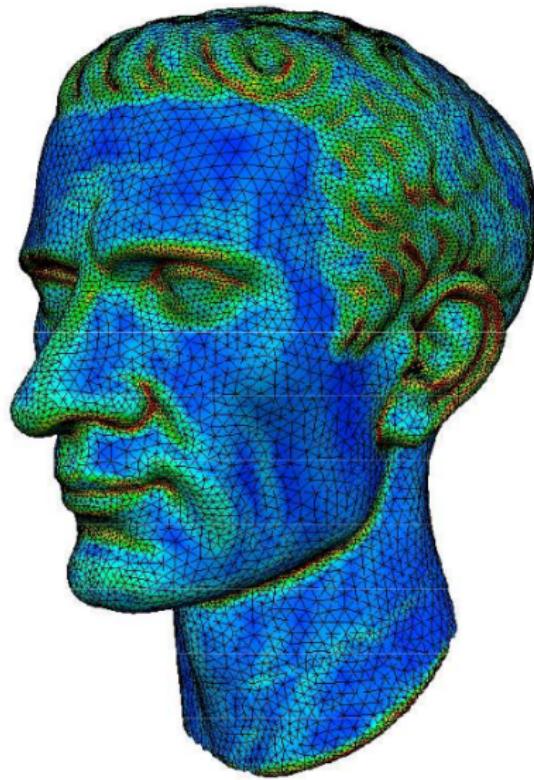
Remaillage Incrémental

- Comment est-ce qu'on pourrait obtenir un maillage adaptatif en utilisant une approche incrémentale ?



Remaillage Incrémental

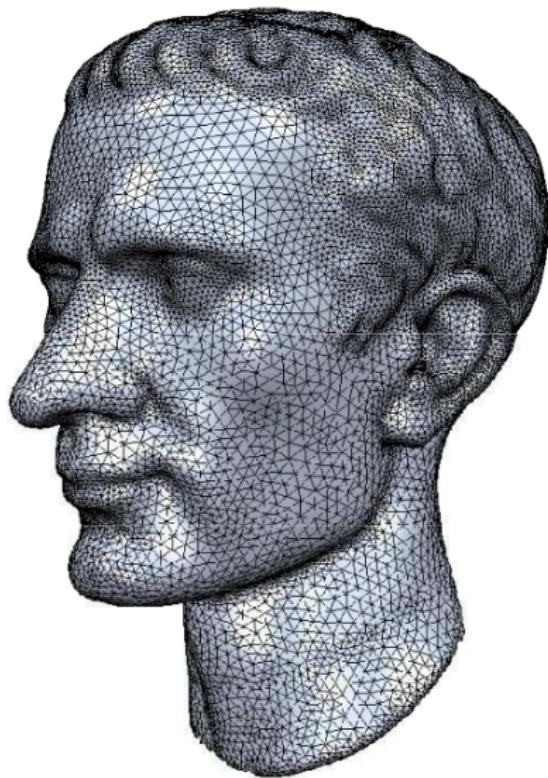
- Comment est-ce qu'on pourrait obtenir un maillage adaptatif en utilisant une approche incrémentale ?
 - Adapter la longueur objective des arêtes en fonction de la courbure.
 - Appliquer les opérations de fusion et de subdivision en concordance.



Remaillage Incrémental

Conclusions

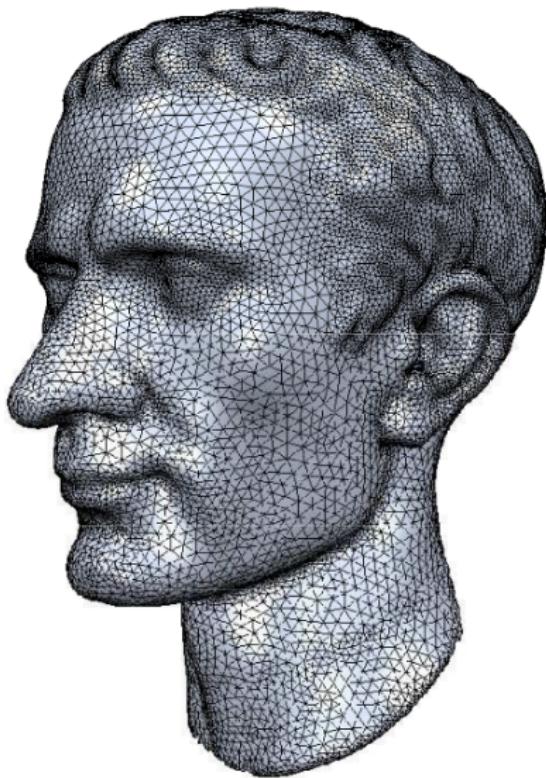
- Qualité du maillage :



Remaillage Incrémental

Conclusions

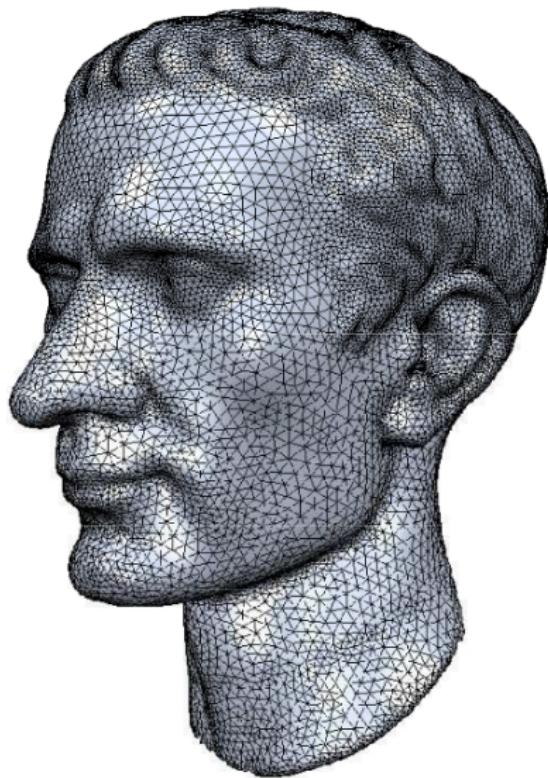
- Qualité du maillage :
 - Triangles bien formés.
 - Valence 6.



Remaillage Incrémental

Conclusions

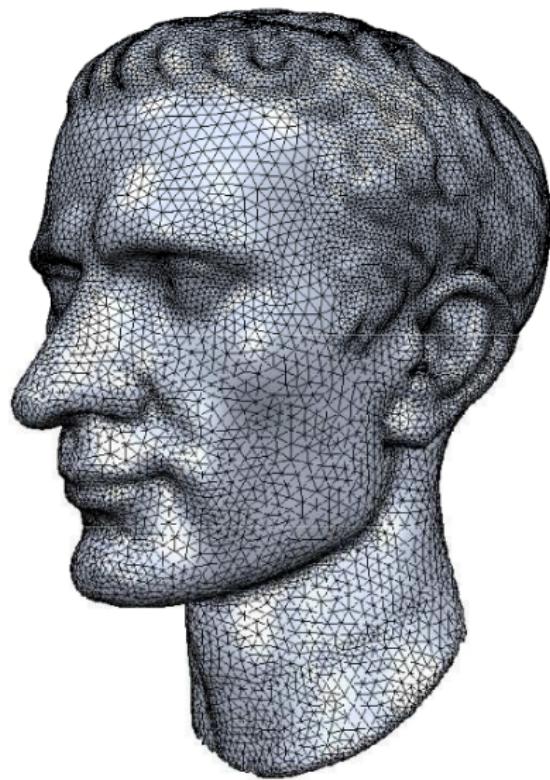
- Qualité du maillage :
 - Triangles bien formés.
 - Valence 6.
- Extensions possibles :
 - Préservation des arêtes vives.
 - Adaptation à la courbure.



Remaillage Incrémental

Conclusions

- Qualité du maillage :
 - Triangles bien formés.
 - Valence 6.
- Extensions possibles :
 - Préservation des arêtes vives.
 - Adaptation à la courbure.
- Implémentation :
 - Facile.
 - Efficace au niveau computationnel.
 - 100K sommets dans moins de 5 sec (il y a 12 ans).



Remaillage Quad-Dominant

Remaillage Quad-Dominant

Qu'est-ce que c'est

Modéliser la surface avec des quads au lieu de triangles. Très utilisé en informatique graphique, conception graphique assistée par ordinateur (CAO) et ingénierie inversée.

Pourquoi ?

Représentation très convenable à cause de la nature du produit tensoriel.

Pour quelles applications ?

- B-Spline fitting.
- Simulation.
- Classification des textures.
- Rendu avec des cartes modulées.

Remaillage Quad-Dominant

Avantages

- (Anisotropie) Il est possible d'orienter les éléments quadrangulaires dans les directions des courbures principales. Des quads allongés sur la direction de la courbure minimal et étroits sur la direction de la courbure maximale.
- Simplification et ré-échantillonnage facile du maillage.
- Il est possible (pas toujours) de respecter des conditions d'orthogonalité entre les arêtes du maillage.

Création d'un maillage quadrangulaire

Il est un problème difficile de générer un maillage quadrangulaire à partir d'un maillage triangulaire.

Remaillage Quad-Dominant

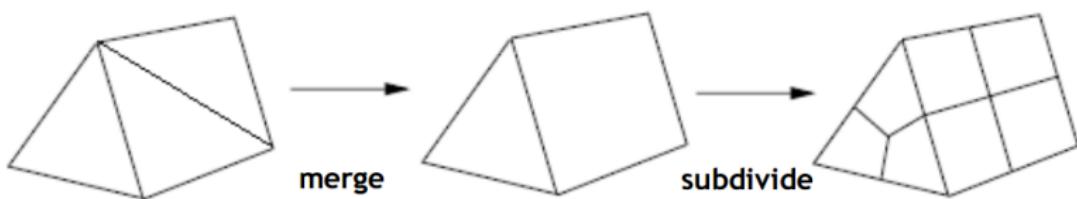
Méthodes pour construire un maillage quadrangulaire

- **Quadrangulation** : génération d'un maillage quadrangulaire à partir d'un nuage de points. Les points sont ajoutés un par un et les quads sont générés au fur et à mesure.
- **Conversion** : Création du maillage de quads à partir d'un maillage triangulaire. Cela peut être fait en fusionnant des paires de triangles, des 4-8 subdivisions des triangles, bissection des maillages hex-dominants et subdivision barycentrique.
- **Échantillonnage des courbes** : Commencer à partir des courbes alignées sur les directions principales de l'entrée. Les maillages sont quad-dominants si les courbes suivent la courbure. Ensuite, les courbes sont connectés via un échantillonnage.

Remaillage Quad-Dominant

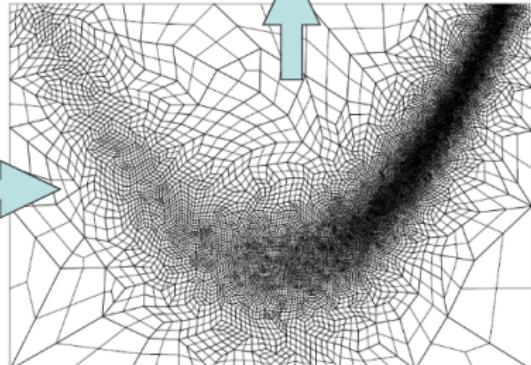
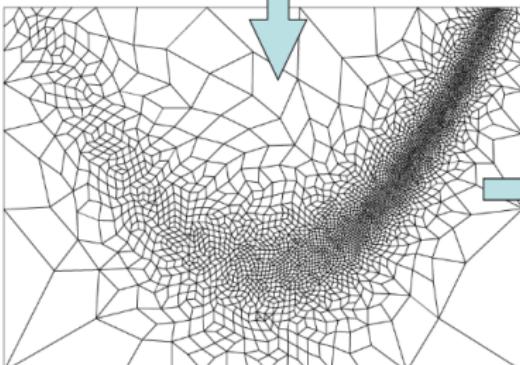
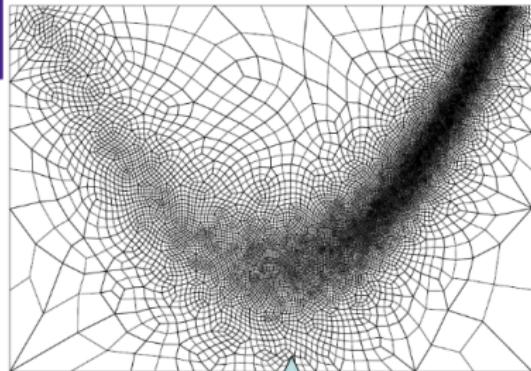
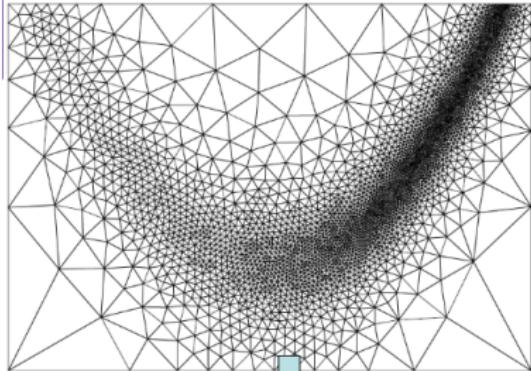
Méthode de conversion de triangulation vers des quadrangles

- [Borouchaki-Frey 96] *Adaptive Triangular-Quadrilateral Mesh Generation.*



Remaillage Quad-Dominant

Méthode de conversion de triangulation vers des quadrangles



Remaillage Quad-Dominant

Méthode basé sur les lignes de courbure [Alliez et al. 03a]

- Estimation du tenseur de courbure 3D T_c pour chaque sommet.
- La composante normale du T_c est ignorée et un tenseur 2D continu par morceaux est créé en appliquant une paramétrisation conforme en 2D.
- Le champ tensoriel est lissé en utilisant un noyau gaussien.
- Les singularités (champ du signe de la courbure) du champ tensoriel sont calculées.
- Ré-échantillonnage du maillage dans le domaine paramétrique en suivant les lignes principales de courbure.
- Les nouveaux sommets sont obtenus en intersectant les lignes de courbure et en traitant les points singuliers.

Remaillage Quad-Dominant (méthode basée sur les courbures)

Définition du Tenseur de courbure

Le tenseur de courbure est défini pour chaque sommet v du maillage de la manière suivante :

$$\mathbf{C}(v) = \frac{1}{A(v)} \sum_{\mathbf{e} \in A(v)} \beta(\mathbf{e}) \|\mathbf{e} \cap A(v)\| \bar{\mathbf{e}} \bar{\mathbf{e}}^T$$

Avec :

- $A(v)$: Aire autour le voisinage du sommet v .
- $\beta(\mathbf{e})$: l'angle dièdre entre les deux facettes incidentes à \mathbf{e} .
- $\|\mathbf{e} \cap A(v)\|$: la longueur d'intersection entre \mathbf{e} et l'aire $A(v)$.
- $\bar{\mathbf{e}} = \frac{\mathbf{e}}{\|\mathbf{e}\|}$.

Remaillage Quad-Dominant (méthode basée sur les courbures)

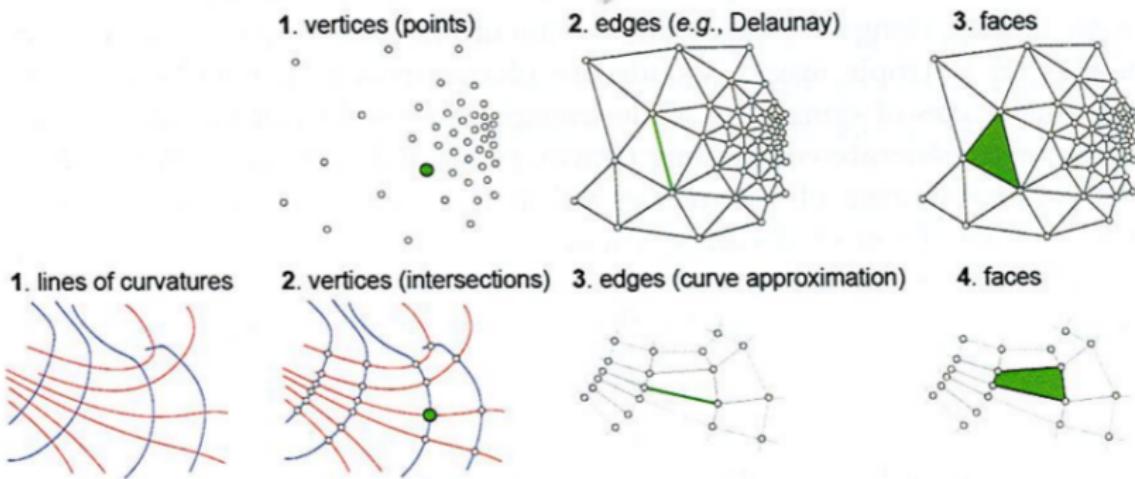


FIGURE – Illustration de l'implantation de l'algorithme de génération d'un maillage quad-dominant en utilisant les lignes de courbure.

Remaillage Quad-Dominant (méthode basée sur les courbures)

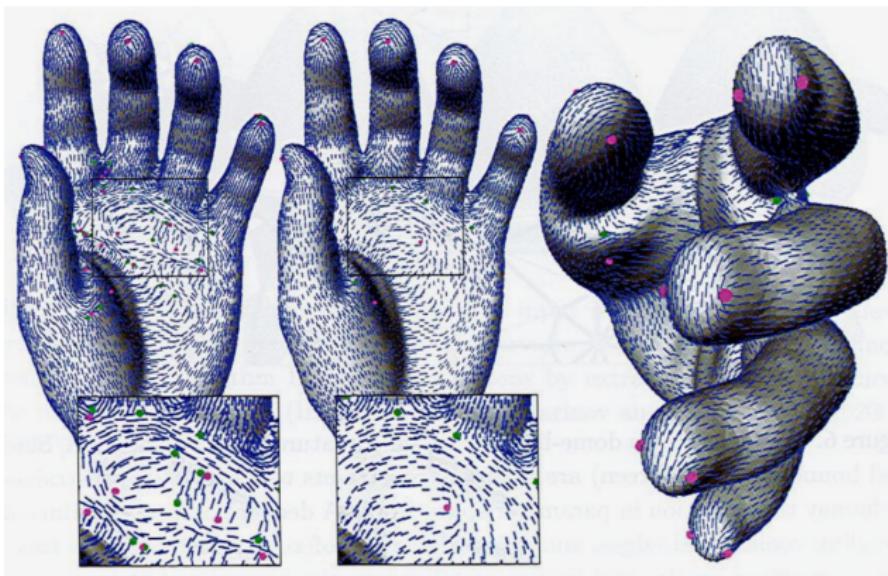


FIGURE – Illustration du calcul des lignes de courbure. Les points de changement de courbure sont colorés.

Remaillage Quad-Dominant (méthode basée sur les courbures)

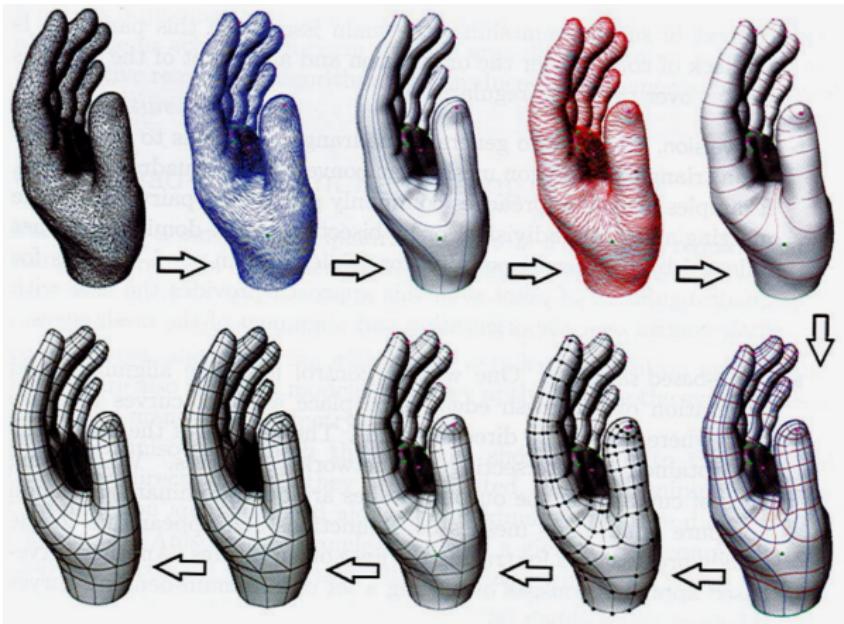


FIGURE – Algorithme de génération d'un maillage quad-dominant en utilisant les lignes de courbure.

Remaillage Quad-Dominant

Méthode sans paramétrisation [Marinov et Kobbelt 04]

- Calcul de courbures en 3D alors applicable sur des maillages avec de arbitraire genre.
- Possible calcul de courbures sur des zones plaines avec l'extrapolation des informations directionnelles sur des régions voisines.

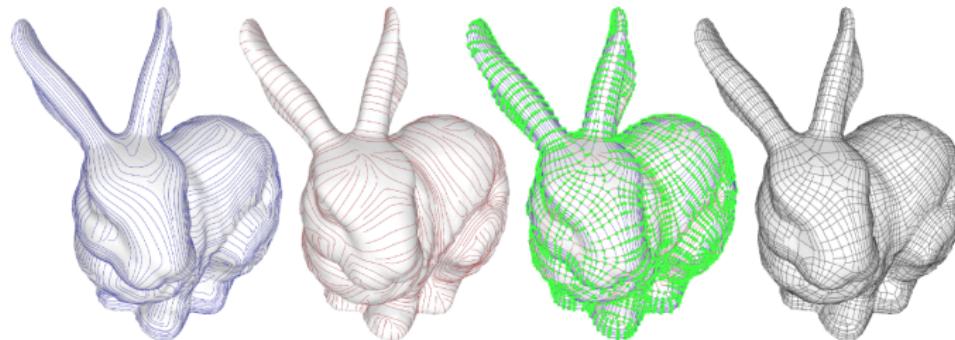


FIGURE – Algorithme de génération d'un maillage quad-dominant en 3D.