Master GIG 2

Pierre Mattioli – Johan Mabily – Théodore Gueguen

TP de modélisation géométrique : Courbures discrètes

1) Exercices

a) Tenseur de courbures

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

$$g(x,y) \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ a_0x^2 + a_1xy + a_2y^2 + a_3x + a_4y \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Repère du plan tangent}}$

$$\frac{dg}{dx} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2a_0x + a_1y + a_3 \end{pmatrix} \qquad \frac{dg}{dy} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2a_2y + a_1x + a_4 \end{pmatrix}$$

$\boxed{I_p}$

$$I_p = \begin{pmatrix} \frac{dg}{dx} \cdot \frac{dg}{dx} & \frac{dg}{dx} \cdot \frac{dg}{dy} \\ \frac{dg}{dx} \cdot \frac{dg}{dy} & \frac{dg}{dy} \cdot \frac{dg}{dy} \end{pmatrix}$$

$\boxed{II_p}$

$$II_p = \begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} l &= \frac{d^2g}{dx^2} \cdot n_p &= 2a_0 \\ m &= \frac{d^2g}{dx\,dy} \cdot n_p &= a_1 \\ n &= \frac{d^2g}{dy^2} \cdot n_p &= 2a_2 \end{aligned}$$

$\boxed{K}$ Pour calculer la tenseur de courbure, on prend $I_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$K_p = I_p^{-1} \times II_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2a_0 & a_1 \\ a_1 & 2a_2 \end{pmatrix}$$

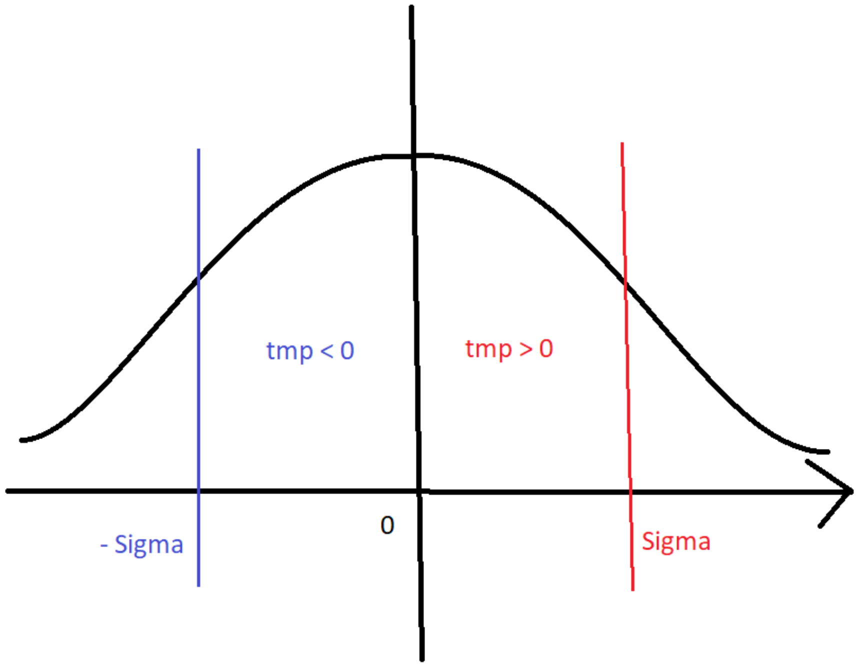
$$= \begin{pmatrix} 2a_0 & a_1 \\ a_1 & 2a_2 \end{pmatrix}$$

$$\det(K_p) = (2a_0 \times 2a_2) - (a_1 \times a_1) = \boxed{4a_0a_2 - a_1^2}$$

$$H = \frac{2a_0 + 2a_2}{2} = \boxed{a_0 + a_2}$$

b) Carte de courbure de K

On veut afficher la courbure en fonction de la valeur **tmp** retenue à un sommet. On applique une colorisation par sommet en fonction de la moyenne **m** de ces valeurs et de l'écart type **sigma**. Pour simplifier on ramène m à tmp avec tmp = tmp – m.



On choisit de modifier les couleurs en fonction de ces données avec les conditions suivantes.

Si tmp < 0

- rouge → 255 * (-sigma + tmp) / - sigma
- vert → rouge
- bleu → 255

Si tmp > 0

- rouge → 255
- vert → bleu
- bleu → 255 * (sigma - tmp) / sigma

Ci-dessous le résultat sur le maillage BunnyLowPoly.obj