

Master d'Informatique : Parcours GIG

Représentations Géométriques et leurs traitements

: Lissage

Ricardo Uribe Lobello

Faculté de Sciences
Université d'Aix-Marseille

24/10/2019

Introduction

Définition de Lissage

Dans un sens général, il s'agit de la conception et le calcul des fonctions suffisamment lises sur des maillages surfaciques.

Utilité

Cette définition est suffisamment générale pour être appliquée à la position de sommets, coordonnées de textures ou déplacements des sommets.

Applications concrètes

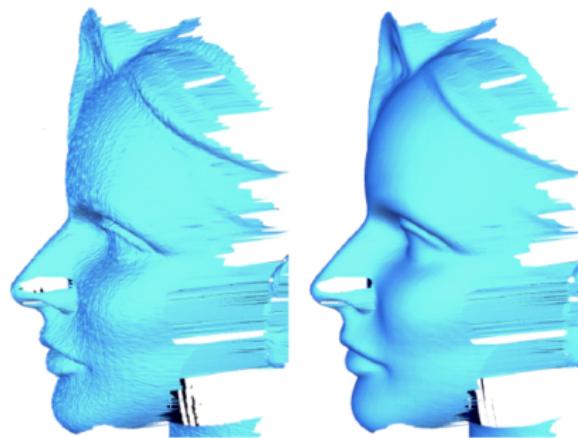
- Élimination du bruit sur un maillage.
- Optimisation d'une fonction d'énergie afin d'obtenir la fonction la plus lisse possible.

Motivation

Motivation

Applications

Élimination du bruit dans un maillage obtenu à partir d'un mécanisme de scanner laser ou LIDAR.

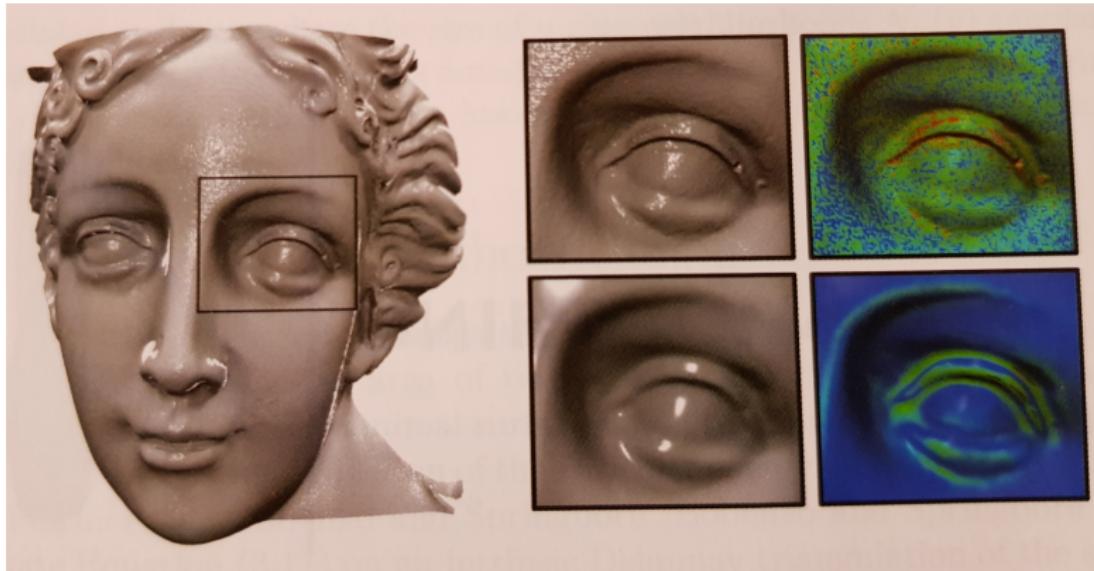


Desbrun, Meyer, Schroeder, Barr: *Implicit Fairing of Irregular Meshes using Diffusion and Curvature Flow*, SIGGRAPH 99

Motivation

Applications

Élimination du bruit dans un maillage.



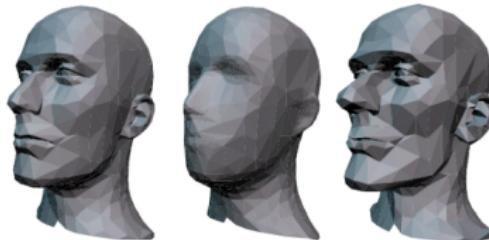
Motivation

Applications

Filtrage avancé des signaux définies sur un maillage.



Pauly, Kobbelt, Gross: *Point-Based Multi-Scale Surface Representation*, ACM TOG 2006

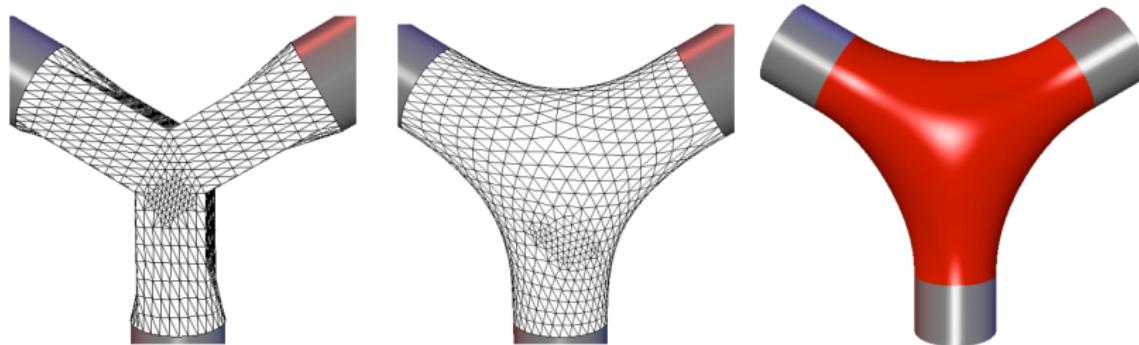


Guskow, Sweldens, Schroeder: *Multiresolution Signal Processing for Meshes*, SIGGRAPH 99

Motivation

Applications

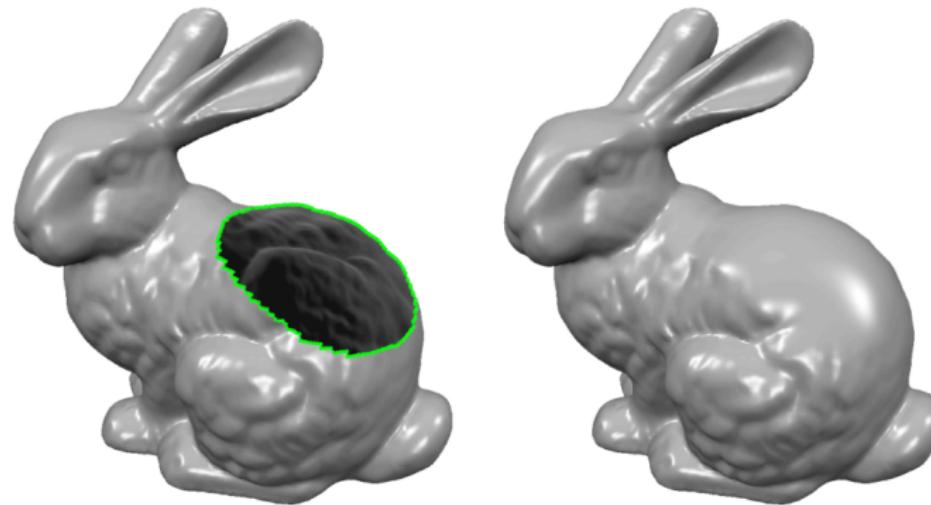
Optimisation d'une fonction définie sur le maillage.



Motivation

Applications

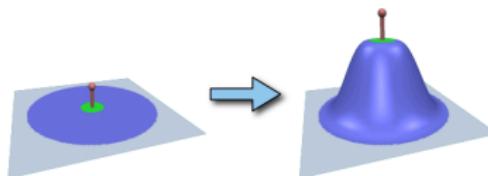
Remplissage des trous en utilisant une fonction de minimisation d'énergie pour trouver le patch optimal.



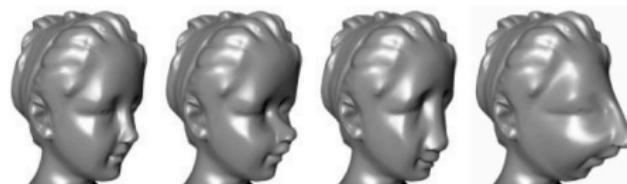
Motivation

Applications

Modélisation et déformation des maillages.



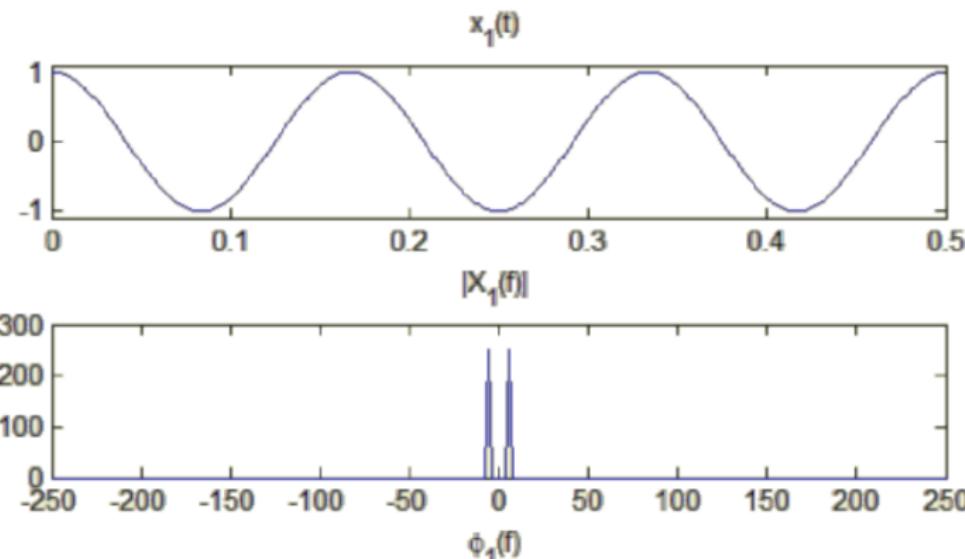
Botsch, Kobbelt: *An intuitive framework for real-time freeform modeling*, SIGGRAPH 04



Kobbelt, Campagna, Vorsatz, Seidel: *Interactive Multi-Resolution Modeling on Arbitrary Meshes*, SIGGRAPH 98

Dualité Spatiale et Fréquentielle

- Il est possible de représenter une fonction dans le domaine spatial comme une somme de fonctions de base sur un ensemble de fréquences.
- Dans le domaine fréquentiel, nous pouvons voir les fréquences



Analyse Spectral

Transformée de Fourier

Définition de la transformée de Fourier sur une variable.

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i \omega x} dx \quad (1)$$

Une autre manière d'écrire.

$$e^{-2\pi i \omega x} = \cos(2\pi \omega x) + i \sin(2\pi \omega x) \quad (2)$$

Fonctions de base

Sin et Cos peuvent être utilisées comme les fonctions de base pour construire une représentation en fréquence de la fonction $f(x)$.

$f(x)$ peut être représentée comme une somme de sinus et cosinus sur les différentes fréquences contenues dans la fonction originale.



Analyse Spectral

Inverse de la transformée de Fourier

Inverse de la transformée de Fourier sur une variable.

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{2\pi i \omega x} d\omega \quad (3)$$

Et si on considère $F(\omega)$ comme la projection de $f(x)$ sur les vecteurs de base $e^{2\pi i \omega x}$:

$$F(\omega) = \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} \langle f(x), e^{2\pi i \omega x} \rangle \quad (4)$$

On obtient que :

$$f(x) = \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} \langle f(x), e^{2\pi i \omega x} \rangle e^{2\pi i \omega x} \quad (5)$$

Analyse Spectral

Transformée de Fourier pour filtrage

Pour éliminer toutes les fréquences dehors un intervalle $[\omega_1, \omega_2]$ il faut simplement utiliser l'équation 6 à l'intérieur de cet intervalle :

$$\bar{f}(x) = \sum_{\omega=-\omega_1}^{\omega_2} \langle f(x), e^{2\pi i \omega x} \rangle e^{2\pi i \omega x} \quad (6)$$

Comme on considère que les fréquences sont des valeurs réelles et pas des entiers, l'équation précédente devient une intégrale :

$$\bar{f}(x) = \int_{-\omega_1}^{\omega_2} \langle f(x), e^{2\pi i \omega x} \rangle e^{2\pi i \omega x} d\omega \quad (7)$$

La question principale

Comment utiliser les principes de la transformée de Fourier sur un maillage ?

Harmoniques sur des surfaces

Harmoniques sur des surfaces

Lien entre la Transformée de Fourier et les fonctions sur des surfaces

Le vagues complexes, ou les fonctions sinus et cosinus, sont des eigenfonctions de l'opérateur de Laplace (ou de divergence) :

$$\Delta(e^{2\pi i \omega x}) = \frac{d^2}{dx^2} e^{2\pi i \omega x} = -(2\pi \omega)^2 e^{2\pi i \omega x} \quad (8)$$

Rappel sur les Eigenfonctions

Une fonction e_i est une eigenfonction de l'opérateur de Laplace pour une eigenvaleur λ_i si :

$$\Delta(e_i) = \lambda_i e_i \quad (9)$$

Harmoniques sur des surfaces

Discrétisation d'une fonction sur un maillage

Il faut remplacer la fonction continue $f(x)$ par sa discrétisation sur les points du maillage.

$$f : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{R} \implies (f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n))^T \quad \forall v_i \in \mathcal{S} \quad (10)$$

Opérateur de Laplace-Beltrami

La matrice \mathbf{L} est l'opérateur de Laplace-Beltrami qui calcule le Laplacien pour chaque sommet v_i :

$$\begin{pmatrix} \Delta f(v_1) \\ \Delta f(v_2) \\ \vdots \\ \Delta f(v_n) \end{pmatrix} = \mathbf{L} \begin{pmatrix} f(v_1) \\ f(v_2) \\ \vdots \\ f(v_n) \end{pmatrix} \quad (11)$$

Harmoniques sur des surfaces

Discrétisation de l'opérateur de Laplace-Beltrami

Pour chaque sommet v_i sur un maillage \mathcal{S} .

$$\Delta f(v_i) = \sum_{v_j \in \mathcal{N}_1(v_i)} [\cot \alpha_{i,j} + \cot \beta_{i,j}] [f(v_j) - f(v_i)] \quad (12)$$

Avec $\mathcal{N}_1(v_i)$ l'ensemble des sommets connectés à v_i par une arête.

Opérateur de Laplace-Beltrami

La matrice \mathbf{L} est symétrique et contient les poids pour discrétiser le Laplacien au sommet v_i .

$$\Delta f(v_i) = \sum_{v_j \in \mathcal{N}_1(v_i)} p_{i,j} [f(v_j) - f(v_i)] \quad (13)$$

Harmoniques sur des surfaces

Opérateur de Laplace-Beltrami

La matrice \mathbf{L} est composée de la manière suivante :

$$m_{i,j} = \begin{cases} -\sum_{v_k \in N_1(v_i)} w_{i,k}, & i = j, \\ w_{i,j}, & v_j \in N_1(v_i), \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases} \quad (14)$$

Chaque valeur $m_{i,j}$ représente le poids pour l'opérateur de Laplace-Beltrami dans le vertex v_i .

Harmoniques sur des surfaces

Opérateur de Laplace-Beltrami

Illustration de l'amplitude des fonctions harmoniques de base sur la géométrie d'un maillage.



B. Vallet, B. Levy. *Spectral geometry processing with manifold harmonics*. Technical report, INRIA-ALICE, 2007.

Harmoniques sur des surfaces

Equivalences en fréquence

- Les eigen-vecteurs de la matrice \mathbf{L} sont les *vibrations naturelles* du maillage.
- Les eigen-valeurs correspondantes sont les *fréquences naturelles* du maillage.
- Comme \mathbf{L} est symétrique et positive semi-définie alors ses eigen-vecteurs forment une base orthogonale (si nous l'utilisons sans pondérer les poids avec la surface de la cellule de Voronoï autour d'un sommet).

Représentation discrète de la fonction de filtrage

Utilisation des eigen-vectors \mathbf{e}_i pour filtrer la fonction \mathbf{f} :

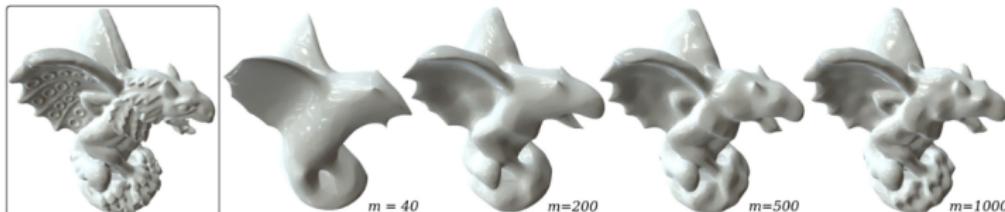
$$\mathbf{f} = \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{f} \rangle \mathbf{e}_i \quad (15)$$

Harmoniques sur des surfaces

Pour filtrer des fréquences

Pour éliminer les hautes fréquences, il est nécessaire d'utiliser seulement les premiers $m < n$ eigen-vecteurs.

$$\mathbf{f} = \sum_{i=1}^m \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{f} \rangle \mathbf{e}_i \quad (16)$$



B. Vallet, B. Levy. *Spectral geometry processing with manifold harmonics*. Technical report, INRIA-ALICE, 2007.

Flou de Diffusion

Flou de diffusion

Basé sur l'équation de diffusion
dans le temps :

$$\frac{\partial f(t)}{\partial t} = \mu \Delta f(t)$$

Avec μ comme le facteur de
diffusion.

Flou de diffusion

Basé sur l'équation de diffusion dans le temps :

$$\frac{\partial f(t)}{\partial t} = \mu \Delta f(t)$$

Avec μ comme le facteur de diffusion.

- Comment est-ce que cette diffusion s'applique sur une image ?

Flou de diffusion

Basé sur l'équation de diffusion dans le temps :

$$\frac{\partial f(t)}{\partial t} = \mu \Delta f(t)$$

Avec μ comme le facteur de diffusion.

- Comment est-ce que cette diffusion s'applique sur une image ?
- Comment est-ce que cette diffusion peut s'appliquer sur un maillage ?

Flou de diffusion

Basé sur l'équation de diffusion dans le temps :

$$\frac{\partial f(t)}{\partial t} = \mu \Delta f(t)$$

Avec μ comme le facteur de diffusion.

- Comment est-ce que cette diffusion s'applique sur une image ?
- Comment est-ce que cette diffusion peut s'appliquer sur un maillage ?



Flou de diffusion

Application sur une surface

Le flou de diffusion est basé sur l'utilisation de l'équation de diffusion

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \lambda \Delta f(x, t)$$

Cette équation est une équation linéaire partielle de deuxième degré.

Flou de diffusion

Application sur une surface

Le flou de diffusion est basé sur l'utilisation de l'équation de diffusion

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \lambda \Delta f(x, t)$$

Cette équation est une équation linéaire partielle de deuxième degré.

Objectif

L'équation précédente peut être utilisée pour lisser une fonction arbitraire f définie sur les sommets d'un maillage.

Flou de diffusion

Application sur une surface

Le flou de diffusion est basé sur l'utilisation de l'équation de diffusion

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \lambda \Delta f(x, t)$$

Cette équation est une équation linéaire partielle de deuxième degré.

Objectif

L'équation précédente peut être utilisée pour lisser une fonction arbitraire f définie sur les sommets d'un maillage.

Attention

Il faut discréteriser sur les points du maillage mais aussi sur le temps.

Flou de diffusion

Discrétisation sur le maillage

Comme avant, on estime la valeur du laplacien sur chacun des sommets du maillage \mathcal{S} .

$$\frac{\partial f(v_i, t)}{\partial t} = \lambda \Delta f(v_i, t) \quad \forall v_i \in \mathcal{S}$$

Ce qui peut s'écrire en notation matricielle comme :

$$\frac{\partial \mathbf{f}(t)}{\partial t} = \lambda \mathbf{L} \mathbf{f}(t)$$

Question : La fonction est maintenant définie en fonction du temps. Pourquoi ?

Flou de diffusion

Discrétisation sur le maillage

Comme avant, on estime la valeur du laplacien sur chacun des sommets du maillage \mathcal{S} .

$$\frac{\partial f(v_i, t)}{\partial t} = \lambda \Delta f(v_i, t) \quad \forall v_i \in \mathcal{S}$$

Ce qui peut s'écrire en notation matricielle comme :

$$\frac{\partial \mathbf{f}(t)}{\partial t} = \lambda \mathbf{L} \mathbf{f}(t)$$

Question : La fonction est maintenant définie en fonction du temps. Pourquoi ?

Réponse : Parce que la discrétisation sur la surface \mathcal{S} est exprimé à l'intérieur de la matrice \mathbf{L} .

Flou de diffusion

Discrétisation sur le temps (représentation explicite)

Il faut diviser les pas dans le temps dans intervalles réguliers de longueur h . Donc :

$$\frac{\partial \mathbf{f}(t)}{\partial t} \approx \mathbf{f}(t + h) - \mathbf{f}(t)$$

Ce qui peut s'écrire en notation matricielle comme :

$$\mathbf{f}(t + h) = \mathbf{f}(t) + h\lambda \mathbf{L}\mathbf{f}(t)$$

Ce qui est une représentation explicite de l'intégration d'Euler.

Flou de diffusion

Discrétisation sur le temps (représentation explicite)

Il faut diviser les pas dans le temps dans intervalles réguliers de longueur h . Donc :

$$\frac{\partial \mathbf{f}(t)}{\partial t} \approx \mathbf{f}(t + h) - \mathbf{f}(t)$$

Ce qui peut s'écrire en notation matricielle comme :

$$\mathbf{f}(t + h) = \mathbf{f}(t) + h\lambda \mathbf{L}\mathbf{f}(t)$$

Ce qui est une représentation explicite de l'intégration d'Euler.

Problème

Pour arriver à borner l'erreur d'approximation, h peut devoir être très petit.

Flou de diffusion

Discrétisation sur le temps (représentation implicite)

Pour obtenir une robustesse sur n'importe quelle taille de h , il faut probablement utiliser la représentation implicite de l'intégration d'Euler sous la forme de :

$$\mathbf{f}(t + h) = \mathbf{f}(t) + h\lambda \mathbf{L}\mathbf{f}(t + h)$$

Ou ce qui est équivalent :

$$(\mathbf{Id} - h\lambda \mathbf{L})\mathbf{f}(t + h) = \mathbf{f}(t)$$

Dans une représentation matricielle.

Flou de diffusion

Discrétisation sur le temps (représentation implicite)

Pour obtenir une robustesse sur n'importe quelle taille de h , il faut probablement utiliser la représentation implicite de l'intégration d'Euler sous la forme de :

$$\mathbf{f}(t + h) = \mathbf{f}(t) + h\lambda \mathbf{L}\mathbf{f}(t + h)$$

Ou ce qui est équivalent :

$$(\mathbf{Id} - h\lambda \mathbf{L})\mathbf{f}(t + h) = \mathbf{f}(t)$$

Dans une représentation matricielle.

Problèmes

Cette représentation ajoute un extra niveau de calcul compliquant l'implantation du solveur pour la résolution du système.



Flou de diffusion

Application pour le lissage

Pour appliquer un lissage sur le maillage, la fonction \mathbf{f} devient la fonction pour la position $f(x, y, z)$ des sommets du maillage. L'application de ce filtrage en utilisant la représentation explicite devient :

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i + h\lambda\Delta\mathbf{x}_i$$

Flou de diffusion

Application pour le lissage

Pour appliquer un lissage sur le maillage, la fonction \mathbf{f} devient la fonction pour la position $f(x, y, z)$ des sommets du maillage. L'application de ce filtrage en utilisant la représentation explicite devient :

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i + h\lambda\Delta\mathbf{x}_i$$

Résultat

Les sommets du maillage seront déplacés dans la direction de la normale de la surface dans une quantité dépendant de la courbure moyenne de la surface au point \mathbf{x}_i .

Question

Pourquoi est-ce qu'on obtient ce résultat ?

Flou de diffusion

Résultat

Les sommets du maillage seront déplacés dans la direction de la normale de la surface dans une quantité dépendant de la courbure moyenne de la surface au point \mathbf{x}_i .

Pourquoi ?

Parce que le Laplacien est exprimé en fonction de la normale de la surface et de la courbure moyen dans l'équation suivante :

$$\Delta \mathbf{x} = -2\mathcal{H}\vec{\mathbf{n}}$$

Flou de diffusion

Résultat

Les sommets du maillage seront déplacés dans la direction de la normale de la surface dans une quantité dépendant de la courbure moyenne de la surface au point x_i .

Flou de diffusion

Résultat

Les sommets du maillage seront déplacés dans la direction de la normale de la surface dans une quantité dépendant de la courbure moyenne de la surface au point x_i .

Question

Est-ce que l'approximation du Laplace-Beltrami est importante ?

Flou de diffusion

Résultat

Les sommets du maillage seront déplacés dans la direction de la normale de la surface dans une quantité dépendant de la courbure moyenne de la surface au point x_i .

Question

Est-ce que l'approximation du Laplace-Beltrami est importante ?

Important à savoir

Pour obtenir ce résultat, il faut utiliser une bonne approximation du Laplace-Beltrami.

- L'approximation avec la cotangente permet d'obtenir le résultat attendu.
- L'approximation uniforme déplace les sommets vers le barycentre du voisinage de manière tangentielle.



Flou de diffusion

Application sur un maillage bruité.

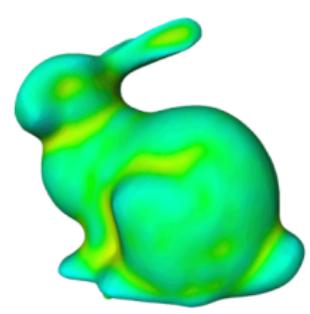
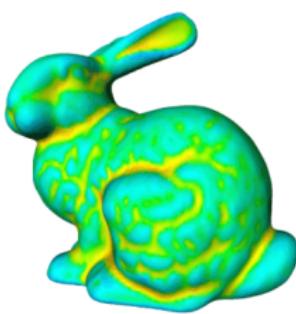
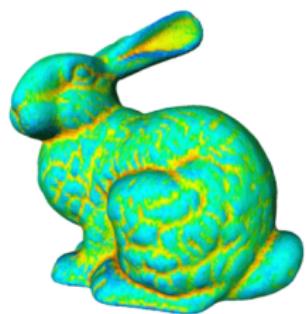


FIGURE – (Gauche) Maillage original avec la courbure. (Centre) Résultat après 5 itérations. (Droite) Résultat après 20 itérations.

Flou de diffusion d'ordre supérieur

Construction

La définition matricielle du Laplacien nous permet d'utiliser des flous de diffusion d'ordre supérieur comme suit :

$$\Delta^k f = \Delta(\Delta^{k-1} f)$$

Flou de diffusion d'ordre supérieur

Construction

La définition matricielle du Laplacien nous permet d'utiliser des flous de diffusion d'ordre supérieur comme suit :

$$\Delta^k f = \Delta(\Delta^{k-1} f)$$

Avantages

Ils fournissent un filtre passe-bas avec des meilleures propriétés.

Flou de diffusion d'ordre supérieur

Construction

La définition matricielle du Laplacien nous permet d'utiliser des flous de diffusion d'ordre supérieur comme suit :

$$\Delta^k f = \Delta(\Delta^{k-1} f)$$

Avantages

Ils fournissent un filtre passe-bas avec des meilleures propriétés.

Applications

- Quand appliqué localement, Δ^2 produit des frontières entre la région lissée et la région fixée qui sont C^1 .
- Par contre, appliqué localement, le Laplacien ne produit que des frontières C^0 .

Méthodes d'optimisation

Optimisation de surfaces (Fairing)

Objectif

Obtenir une surface aussi lisse que possible. Cela implique, en général, éliminer les détails géométriques pas nécessaires et coïncide très suivant avec l'élimination des hautes fréquences sur le maillage → **Principe de la forme la plus simple.**

Optimisation de surfaces (Fairing)

Objectif

Obtenir une surface aussi lisse que possible. Cela implique, en général, éliminer les détails géométriques pas nécessaires et coïncide très suivant avec l'élimination des hautes fréquences sur le maillage → **Principe de la forme la plus simple.**

Une fonction à optimiser

L'équation de la membrane permet de minimiser l'aire d'une surface.

$$E_M(\mathbf{x}) = \int \int_{\Omega} \sqrt{^2 \det(\mathbf{I})} dudv$$

Avec des contraintes sur les coordonnées déterminant la bordure de la surface.

Le résultat est une surface minimale en forme de bulle.

Optimisation de surfaces

Problèmes

L'optimisation de ce type d'équation est très compliquée dû au caractère non-linéaire des équations liées à la première forme fondamentale.

Solution

Utiliser une approximation impliquant seulement les premières dérivées partielles de la fonction ou *équation de Dirichlet*.

$$\bar{E}_M(\mathbf{x}) = \int \int_{\Omega} \left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right\|^2 du dv$$

Pour optimiser cette fonction il est nécessaire d'utiliser le **calcul de variations** afin de minimiser le problème dans un espace de fonctions de dimension infini.

Optimisation de surfaces

Solution

Il faut trouver une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathcal{R}$ qui minimise l'énergie (ou l'aire) de la membrane :

$$E_M(f) = \int_a^b \left(\frac{df}{dx} \right)^2 dx$$

Sous des conditions de frontière en a et b .

En supposant que f est la fonction qui minimise E_M , en choisissant des conditions de frontière convenables telles que $u(a) = u(b) = 0$ et en utilisant l'intégration par parties, alors :

$$E_M(f) = - \int_a^b \left(\frac{d^2 f}{dx^2} \right) u = 0$$

Et pour respecter les conditions de frontière :

Optimisation de surfaces

Conclusion

La minimisation de l'équation de la membrane ou l'aire d'une triangulation peut être exprimée comme la résolution de l'équation suivante :

$$\overline{E}_M(\mathbf{x}) \rightarrow \text{min valeur} \iff \Delta\mathbf{x}(u, v) = 0$$

Optimisation de surfaces

Conclusion

La minimisation de l'équation de la membrane ou l'aire d'une triangulation peut être exprimée comme la résolution de l'équation suivante :

$$\bar{E}_M(\mathbf{x}) \rightarrow \text{min valeur} \iff \Delta \mathbf{x}(u, v) = 0$$

Sur un maillage

En utilisant les coordonnées des sommets du maillages et l'approximation discrète du Laplace-Beltrami, résoudre l'équation 37 devient équivalent à résoudre le système linéaire :

$$\mathbf{L} \mathbf{x} = 0$$

Avec la solution non trivial.

Optimisation de surfaces

Minimisation de la surface de la zone Ω du maillage

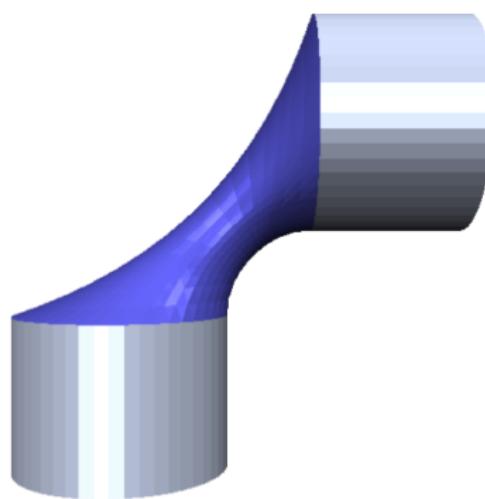


FIGURE – Résolution du système $\mathbf{L} \mathbf{x} = 0$

Optimisation de surfaces

Minimisation de la courbure

Il faut chercher à minimiser l'énergie sur une plate fine (thin-plate) définie par l'équation :

$$E_C(\mathbf{x}) = \int \int_{\Omega} k_1^2 + k_2^2 dudv$$

Avec k_1 et k_2 les courbures principales.

Approximation

Une approximation linéaire peut être obtenue en remplaçant les courbures par les dérivées secondes comme suit :

$$\bar{E}_C(\mathbf{x}) = \int \int_{\Omega} \left\| \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^2} \right\|^2 + 2 \left\| \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u \partial v} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial v^2} \right\|^2 dudv$$

Optimisation de surfaces

Équation de Euler-Lagrange

L'équivalent de l'équation précédente en utilisant le Laplacien devient :

$$\bar{E}_C(\mathbf{x}) \rightarrow \Delta^2 \mathbf{x}(u, v) = 0$$

Sur le domaine Ω en tenant aussi compte d'une frontière C^1 et des normales $\vec{n}(u, v)$ sur $\partial\Omega$.

Optimisation de surfaces

Équation de Euler-Lagrange

L'équivalent de l'équation précédente en utilisant le Laplacien devient :

$$\bar{E}_C(\mathbf{x}) \rightarrow \Delta^2 \mathbf{x}(u, v) = 0$$

Sur le domaine Ω en tenant aussi compte d'une frontière C^1 et des normales $\vec{n}(u, v)$ sur $\partial\Omega$.

Sur une maillage triangulaire

Cette approximation devient le système suivant :

$$\bar{E}_C(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{L}^2 \mathbf{x} = 0$$

Optimisation de surfaces

Équation de Euler-Lagrange

L'équivalent de l'équation précédente en utilisant le Laplacien devient :

$$\bar{E}_C(\mathbf{x}) \rightarrow \Delta^2 \mathbf{x}(u, v) = 0$$

Sur le domaine Ω en tenant aussi compte d'une frontière C^1 et des normales $\vec{n}(u, v)$ sur $\partial\Omega$.

Sur une maillage triangulaire

Cette approximation devient le système suivant :

$$\bar{E}_C(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{L}^2 \mathbf{x} = 0$$

ATTENTION : Au lieu de fixer positions et normales des sommets de la frontière, il est plus facile de fixer la position de deux rings des sommets sur la frontière.

Optimisation de surfaces

Sur une maillage triangulaire

Cette approximation devient le système suivant :

$$\bar{E}_C(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{L}^2\mathbf{x} = 0$$

ATTENTION : Au lieu de fixer positions et normales des sommets de la frontière, il est plus facile de fixer la position de deux rings des sommets sur la frontière.

Résultat

La frontière obtenue du domaine Ω est une frontière \mathcal{C}^1 (la dérivé première existe sur les points de la frontière).

Optimisation de surfaces

Minimisation de la courbure globale de la zone Ω du maillage

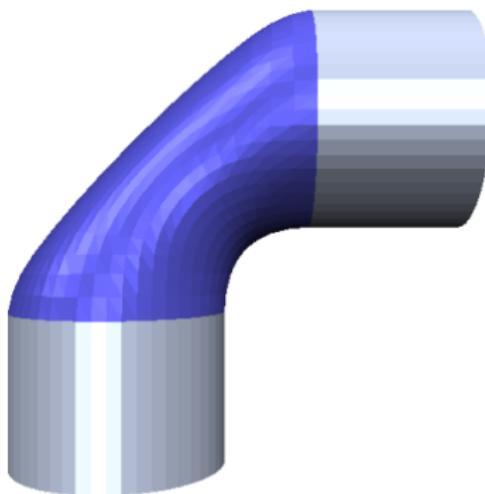


FIGURE – Résolution du système $\mathbf{L}^2 \mathbf{x} = 0$

Optimisation de surfaces

Minimisation de la variation de la courbure

Il est encore possible de minimiser des fonctions d'un ordre plus élevé. Par exemple, la variation de la courbure :

$$E_{VC}(\mathbf{x}) = \int \int_{\Omega} \left(\frac{\partial k_1}{\partial \mathbf{t}_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial k_2}{\partial \mathbf{t}_2} \right)^2 dudv$$

Avec k_1 et k_2 les courbures principales et \mathbf{t}_1 et \mathbf{t}_2 les directions principales correspondantes.

Approximation discrète

$$\bar{E}_{VC}(\mathbf{x}) \rightarrow \Delta^3 \mathbf{x}(u, v) = 0$$

Et sur un maillage triangulaire :

$$\bar{E}_{VC}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{L}^3 \mathbf{x} = 0$$

Optimisation de surfaces

Minimisation de la variation de la courbure globale
du maillage

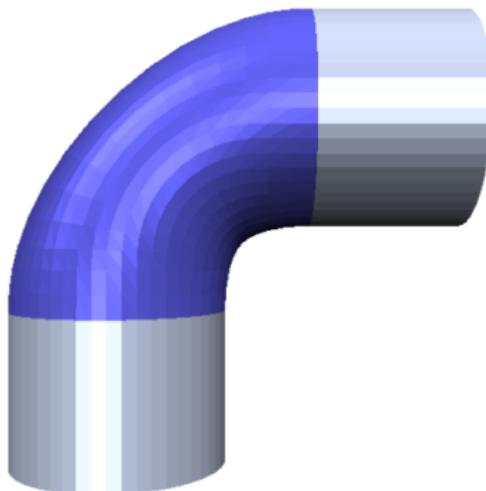


FIGURE – Résolution du système $\mathbf{L}^3 \mathbf{x} = 0$

Optimisation de surfaces

Analyse

Les surfaces minimales satisfont une équation d'*Euler-Lagrange* d'ordre k :

$$\Delta^k \mathbf{x} = 0$$

Comme le Laplacien de k -ième ordre est le vecteur de mise à jour d'un flou Laplacien du même ordre, la surface obtenue dans une optimisation de cet ordre est un état stable du flou de diffusion ou :

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \Delta^k \mathbf{x}$$

Ainsi, une fonction optimisée est aussi lisse que possible parce qu'un pas d'un flou de diffusion est équivalent à une itération pour la résolution du système $\Delta^k \mathbf{x} = 0$.

Conclusion : Un flou Laplacien converge vers une surface optimisée.

Méthodes alternatifs

Diffusion Anisotropique

Cette approche cherche à préserver les lignes principales d'un maillage en ajoutant un tenseur dépendant de la géométrie du maillage. Il est défini comme suit :

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \operatorname{div} \mathbf{D} \nabla \mathbf{x}$$

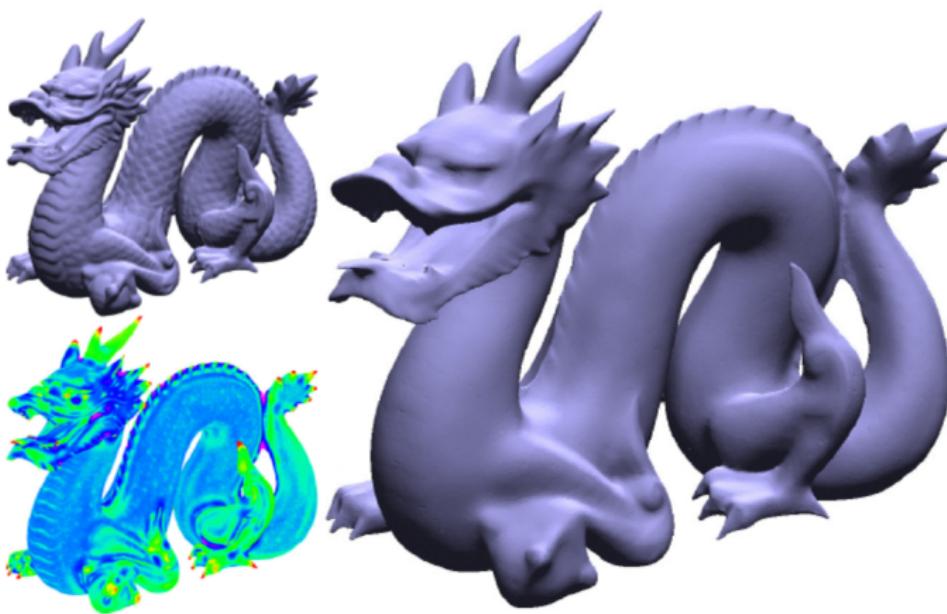
Filtrage bilatéral

Inspiré du filtrage d'images. Chaque normale devient une moyenne de ses normales dans un voisinage bien défini.

Lissage non linéaire

Ces méthodes résolvent les équations non linéaires $\Delta \mathbf{x} = 0$ au lieu de chercher à les remplacer avec des approximations linéaires.

Filtrage bilatéral



Jones, Durand, Desbrun: *Non-iterative feature preserving mesh smoothing*, SIGGRAPH 2003

Bibliographie

- Taubin : A signal processing approach to fair surface design, SIGGRAPH 1996
- Desbrun, Meyer, Schroeder, Barr : Implicit Fairing of Irregular Meshes using Diffusion and Curvature Flow, SIGGRAPH 99
- Botsch, Kobbelt : An Intuitive Framework for Real-Time Freeform Modeling, SIGGRAPH 2004
- Fleishman, Drori, Cohen-Or : Bilateral mesh denoising, SIGGRAPH 2003
- Jones, Durand, Desbrun : Non-iterative feature preserving mesh smoothing , SIGGRAPH 2003