Capítulo 1

Práctica 1. Inducción.

En algunos ejercicios de inducción se nos pide calcular el término general de una suma de términos, por ejemplo:

1. $1 + 2 + 3 + ... + n$
2. $1 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$
3. $1 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$
4. $\sum_{i=1}^{n}(2i - 1)$
5. $\sum_{i=1}^{n}(1/2^i)$

Podemos utilizar la combinación de comandos **sum** y **simpsum**.

(%ixx) `sum(i,i,1,n);`
(%oxx) $\sum_{i=1}^{n} i$

mientras que

(%ixx) `sum(i,i,1,n), simpsum;`
(%oxx) $\frac{n^2+n}{2}$

Ejercicio: *Calcula el término general en el resto de los ejemplos anteriores.*

En otros casos, esta estrategia no tiene éxito, por ejemplo:

(%ixx) `sum(1/((2*i-1)*(2*i+1)),i,1,n),simpsum;`
(%oxx) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)}$

Podemos utilizar el paquete "simplify_sum", al que invocamos:

```
(%ixx) load (simplify\_sum);
 Warning - you are redefining the Maxima function lcm
(%oxx) /usr/share/maxima/5.20.1/share/contrib/solve_rec/simplify_sum.mac

(%ixx) simplify_sum( %);
```
(%oxx) $\frac{n}{2n+1}$

Otro ejercicio tipo consiste en probar por inducción alguna propiedad que ocurre para todo número natural, como las siguientes:

1. $7^n - 1$ es múltiplo de 6
2. $7^{2n} + 16n - 1$ es múltiplo de 64
3. $a^{2n} - b^{2n}$ es divisible por a+b
4. $2^n \geq 2n + 1$

Podemos, en primer lugar, obtener los primeros términos de la secuencia y comprobar sobre ellos la propiedad (es el primer paso en una demostración por inducción). Para el apartado a) obtenemos los 30 primeros elementos ya divididos por 6:

```
(%ixx)  sec_a:makelist((7^n-1)/6, n,1,30);
(%oxx) [1,8,57,400,2801,19608,137257,960800,6725601,47079208,329554457,
2306881200,16148168401,113037178808,791260251657,5538821761600,
38771752331201,271402266318408,1899815864228857,13298711049602000,
93090977347214001,651636841430498008,4561457890013486057,
31930205230094402400,223511436610660816801,1564580056274625717608,
10952060393922380023257,76664422757456660162800,536650959302196621139601,
3756556715115376347977208]
```

que efectivamente son todos enteros, así que la propiedad se verifica para los primeros números naturales. Ahora, supongamos que $7^n - 1$ es múltiplo de 6 (hipótesis de inducción), y tenemos que probar que también lo es $7^{n+1} - 1$. Veamos qué ocurre con la diferencia entre ambos términos:

(%ixx) `7^(n+1)-1 -(7^n -1);`

(%oxx) $7^{n+1} - 7^n$

que no nos da información, pero si lo simplificamos:

(%ixx) `rat(%);`

(%oxx) $6 \cdot 7^n$

Ahora un sencillo razonamiento sobre divisibilidad (si a y b-a son múltiplos de k, entonces b es múltiplo de k), prueba que $7^{n+1} - 1$ es también múltiplo de 6.
Realizamos un procedimiento similar para el segundo apartado:
Primero se calcula qué ocurre con los primeros términos

```
(%ixx) sec_b:makelist((7^(2*n)+16*n-1)/64,n,1,10);
(%oxx) [1,38,1839,90076,4413677,216270114,10597235515,519264540152,
 25443962467353, 1246754160900190]
```

Vamos a usar el mismo razonamiento de divisibilidad que antes, así que calculamos la diferencia entre dos términos consecutivos:

```
(%ixx) (7^(2*(n+1))+16*(n+1)-1)-(7^(2*n)+16*n-1);
(%oxx) 7^(2*(n+1))-7^(2*n)+16*(n+1)-16*n
```

Simplificamos después de dividir por 64:

(%ixx) `rat(% /64);`

(%oxx) $\frac{(3(7^n)^2+1)}{4}$

Pero nos remite a otro problema de inducción: para que el resultado de dividir por 64 sea entero, tenemos que probar que el numerador de esta fracción es múltiplo de 4 para cada n. Es claro que para n=0 ocurre, así que volvemos a utilizar el recurso de restar dos términos consecutivos:

(%ixx) `3*7^(2*(n+1))-3*7^(2*n);`

(%oxx) $3 * 7^{2(n+1)} - 3 * 7^{2n}$.

(%ixx) `rat(%);`

(%oxx)$144 * (7^n)^2$

Y como 144 es múltiplo de 4, tenemos probada nuestra propiedad.
La estrategia con el apartado c) es diferente. Como siempre comenzamos comprobando que la propiedad ocurre para los primeros números naturales; en este caso procedemos a dividir:

```
(%ixx) divide(a^(2)-b^(2),a+b);
(%oxx) [a-b,0]
```

en esta respuesta el primer término es el cociente y el segundo es el resto. Como el resto es cero el término era divisible por $a + b$. En realidad era algo sencillo de comprobar a mano, puesto que todos sabemos de memoria que *suma por diferencia diferencia de cuadrados*. Pero la ventaja de utilizar maxima es que podemos obtener también rápidamente los cocientes de los siguientes términos, que nos darán una idea de la solución general:

`(%ixx) divide(a^(4)-b^(4),a+b);`
`(%oxx)`$[-b^3 + ab^2 - a^2 b + a^3, 0]$

`(%ixx) divide(a^(6)-b^(6),a+b);`
`(%oxx)`$[-b^5 + ab^4 + a^2 y^3 + a^3 b^2 - a^4 b + a^5, 0]$

Si observamos los cocientes aparecen todas las combinaciones de a y b que en total sumen grado 2n-1. Ahora comprueba a mano:

$$(a^{2n} - b^{2n}) = (a + b)(-b^{2n-1} + ab^{2n-2} - \cdots - a^{2n-2}b + a^{2n-1})$$

En realidad en esta resolución **no** hemos usado inducción, tenemos en este caso una demostración directa.

Ejercicios:

Hallar el menor entero positivo n_0 para el cual $n! \geq 2^n$. Tomando el caso n_0 como base de la inducción, demostrar que la desigualdad es cierta para todo $n \geq n_0$

Hallar el valor apropiado de n_0 como base de la inducción en los casos siguientes y demostrar que el enunciado es cierto para todo $n \geq n_0$.

1. $n^2 + 6n + 8 \geq 0$
2. $n^3 \geq 256n^2$

Comprueba que el polinomio $p(x) = x^2 + x + 41$ produce números primos cuando x es un número natural comprendido entre 1 y 30. Puedes usar el comando **factor** *que nos da la descomposición en primos de un número natural. ¿Es cierto que $n^2 + n + 41$ es primo para todo número natural $n > 1$?*

El monje francés Marin Mersenne afirmó, en 1644, que los números de la forma $2^n - 1$ son primos para los valores n = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127 and 257 y no lo son para el resto de números menores que 257. Compruébalo. ¿Es cierto que los números de la forma $2^p - 1$ son primos para todo número primo p?

Algunas curiosidades sobre los números de Mersenne pueden leerse en

http://primes.utm.edu/glossary/xpage/MersennesConjecture.html