Visual Computing

Fouriertheorie

Übungsblatt 4

Patrick Elsen, Dmytro Klepatskyi,
Costa Weiland, Nana Atchoukeu Chris-Mozart

Wintersemester 2018-2019
Technische Universität Darmstadt

Aufgabe 1: Abtastung

Die Signale $f_1(t)$ und $f_2(t)$ werden mit den Abtastzeiten $T_1 = 1/400s$ und $T_2 = 1/1500s$ abgetastet.

$$f_1(t) = \sin(2 * \pi * 100) = 0$$
$$f_2(t) = \sin(4000 * \pi) = 0$$

Wird das Abtasttheorem eingehalten?

Ja, auf jeden Fall: sowohl f_1 als auch f_2 sind konstante Ausdrücke, die nicht von t abhängen.

Anders würde es aussehen, wenn es sich hierbei um einen Tippfehler handelt, und $f_1(t) = \sin(2 * \pi * 100 * t)$ sowie $f_2(t) = \sin(4000 * \pi * t)$ gemeint sind. Das könnte eigentlich garnicht sein, da das Übungsblatt nicht korrigiert wurde. Aber dennoch gehen wir davon aus. Laut dem Abtasttheorem von Whittaker-Shannon wissen wir, dass für eine Funktion $f(t)$ mit der endlichen Grenzfrequenz u_G wir eine Abtastfrequenz nehmen müssen, die mindestens doppelt so hoch ist wie u_G. Die Funktion f_1 ist eine pure Sinusfunktion mit einer Frequenz von 100 Hz, eine Abtastrate von $T_1 = 1/400s$ ist also akzeptabel, hier ist das Abtasttheorem eingehalten. Anders sieht es bei der f_2 aus, diese hat eine Frequenz von 2000 Hz, die Abtastrate $T_2 = 1/1500s$ ist hier nicht ausreichend um das Abtasttheorem zu erfüllen.

Welchen Effekt erwarten Sie, wenn das Abtasttheorem nicht eingehalten ist? Erklären Sie diesen kurz.

Wenn ein Signal mit einer zu niedrigen Frequenz abgetastet wird, dann wird es nicht korrekt aufgezeichnet und kann nicht richtig rekonstruiert werden. Es entsteht ein sogenanntes Aliasing.

Aufgabe 2: Faltung

Was besagt der Faltungssatz? Nennen Sie eine in der Vorlesung genannte Anwendung und erklären Sie, warum der Faltungssatz angewandt wird.

Der Faltungssatz besagt: „Einer Faltung im Ortsraum entspricht einer Multiplikation im Frequenzraum“. Eine Faltung ist eine Operation, die man auf zwei Funktionen anwenden kann. Hierbei wird eine Funktion an der y-Achse gespiegelt, an der x-Achse verschoben, die Funktionen werden multipliziert und integriert. Diese Operation entspricht einer Multiplikation dieser Funktionen im Frequenzraum. Damit werden unter anderen Filter realisiert.

Aufgabe 3: Fouriertheorie

Die Fourierreihe ist definiert durch

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

mit

$$a_0 = \frac{1}{2n}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

Gegeben ist die folgende 2π-periodische Rechteckfunktion

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{wenn } -\pi \leq x < -\frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{wenn } -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2} \\ 1, & \text{wenn } \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \end{cases}$$

Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten und geben Sie die so weit wie möglich vereinfachte resultierende Fourierreihe an. Geben Sie auch alle Zwischenschritte an.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}(-1)\cos(nx)dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(0)\cos(nx)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-1)\cos(nx)dx\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\left[-\left(\frac{\sin(-\frac{\pi n}{2})}{n} - \frac{\sin(-\pi n)}{n}\right) + 0 - \left(\frac{\sin(\pi n)}{n} - \frac{\sin(\frac{\pi n}{2})}{n}\right)\right] \\ &= -\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\sin(\frac{\pi n}{2})}{n} - \frac{\sin(\frac{\pi n}{2})}{n}\right) \\ &= -\frac{1}{\pi}\left(-2\frac{\sin(\frac{\pi}{2}n)}{n}\right) = \frac{2}{\pi}\frac{\sin(\frac{\pi}{2}n)}{n} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}(-1)\sin(nx)dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(0)\ \sin(nx)dx\ + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-1)\sin(nx)dx\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{\cos(-\frac{\pi n}{2})}{n} - \frac{\cos(-\pi n)}{n}\right) + 0 + \left(\frac{\cos(\pi n)}{n} - \frac{\cos(\frac{\pi n}{2})}{n}\right)\right] = \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos(\frac{\pi n}{2})}{n} - \frac{\cos(\pi n)}{n} + \frac{\cos(\pi n)}{n} - \frac{\cos(\frac{\pi n}{2})}{n}\right) \\
&= \frac{1}{\pi}0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(\frac{\pi}{2}n)\cos(nx)}{n} \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin(\frac{\pi}{2})\cos(x)}{1} + \frac{\sin(\pi)\cos(2x)}{2} + \frac{\sin(\frac{3\pi}{2})\cos(3x)}{3} + ...\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\cos(x) - \frac{\cos(3x)}{3} + \frac{\cos(5x)}{5} - \frac{\cos(7x)}{7} + ...\right)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4: Mathematische Grundlagen

Tragen Sie die folgenden Punkte

$$
\begin{aligned}
A &= (5,7) \quad A \in (\mathbb{R}\times\mathbb{R}) \\
B &= (5,\frac{\pi}{2}) \quad B \in (\mathbb{R}\times[0,2\pi])
\end{aligned}
$$

in jeweils ein passendes Koordinatensystem ein und transformieren sie Polarkoordinaten zu kartesischen Koordinaten und umgekehrt. Runden Sie auf 4 Nachkommastellen.

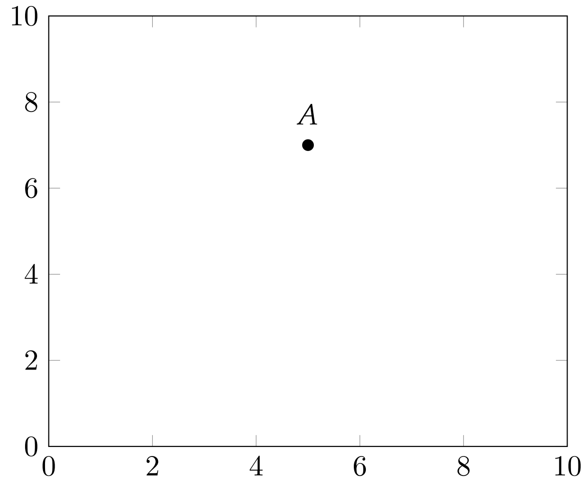
Um A, welches in einem kartesischen Koordinatensystem angegeben ist, in ein polares Koordinatensystem umzuformen, rechnen wir:

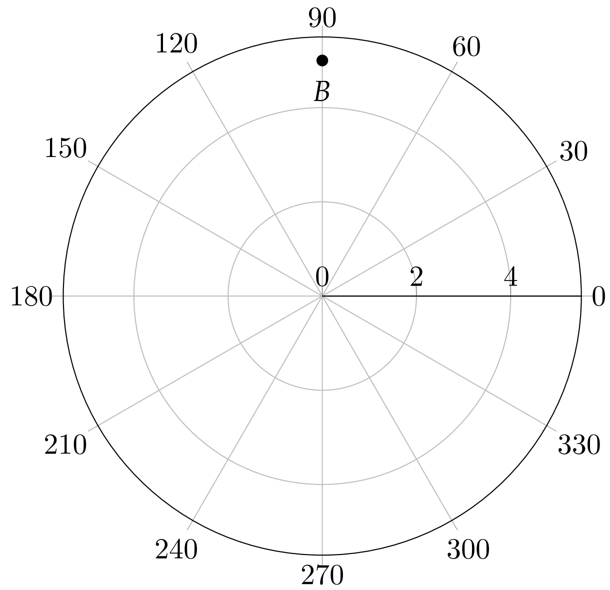
$$
\begin{aligned}
r &= \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{25+49} = 8,6023 \\
\varphi &= \arctan(\frac{7}{5}) = 0,9505
\end{aligned}
$$

Um B, welches in einem polaren Koodinatensystem angegeben ist, in ein karteisches System umzuwandeln, rechnen wir:

$$
\begin{aligned}
x &= r\cos(\varphi) = 5\cdot 0 = 0 \\
y &= r\sin(\varphi) = 5\cdot 1 = 5
\end{aligned}
$$

Jetzt können wir die beiden Punkte in Koordinatensysteme zeichnen.





Gegeben seien die folgenden Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Projektion $\vec{a}_{\vec{b}}$ des Vektors $\vec{a}$ auf den Vektor $\vec{b}$ sowie die Projektion $\vec{a}_{\vec{c}}$ des Vektors $\vec{a}$ auf den Vektor $\vec{c}$.

$$\vec{a}_{\vec{b}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} = \frac{3 * 3 + 0 * 4}{\sqrt{9 + 16}} = 1,8$$

$$\vec{a}_{\vec{c}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{|\vec{c}|} = \frac{3 * 0 + 0 * 2}{\sqrt{4}} = 0$$