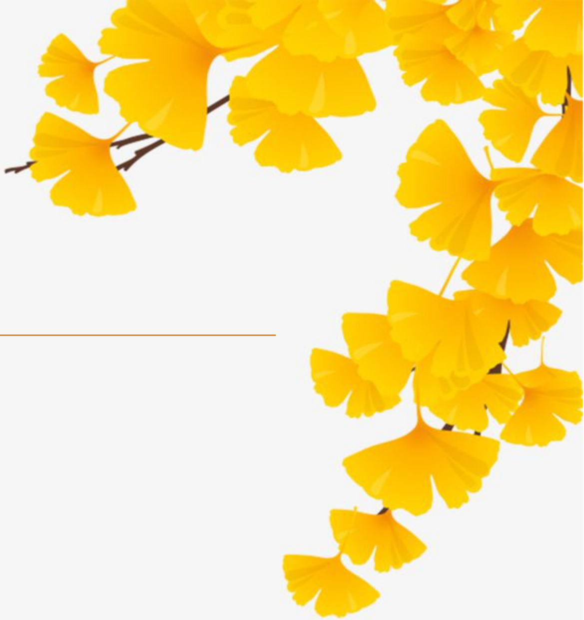
量 子 光 学

Quantum Optics



李小飞

光电科学与工程学院

2022 年 6 月 16 日

前情回顾

- 光场量子化 真空态 数态 产生湮灭算符
- 相干态 压缩态 辐射场
- 光子计数 关联函数 反聚束

电子科技大学
University of Electronic Science and Technology of China

第 14-15 讲： 光场的表示

Contents

求實求真
大氣大為

- 全同粒子的波函数

N 个全同费米子描述为反对称的斯莱特行列式

$$\Phi_A(q_1,q_2,\cdots,q_N)=C\begin{vmatrix}\phi_1(q_1) & \phi_1(q_2) & \cdots & \phi_1(q_N)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \phi_i(q_1) & \phi_i(q_2) & \cdots & \phi_i(q_N)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \phi_j(q_1) & \phi_j(q_2) & \cdots & \phi_j(q_N)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \phi_k(q_1) & \phi_k(q_2) & \cdots & \phi_k(q_N)\end{vmatrix}$$

N 个全同玻色子描述为对称的置换函数

$$\Phi_S(q_1,q_2,\cdots,q_N)=C\sum_P P[\phi_i(q_1)\,\phi_j(q_2)\cdots\cdots\phi_k(q_N)]$$

大氣大為 求實求真

全同粒子体系, 一个占据数分布对应一个态函数.

比如 2 个费米子占据三个单态: 占据数分布只有三个 110, 101, 011,
波函数可写成

$$|110\rangle, \quad |101\rangle, \quad |011\rangle$$

比如 2 个玻色子占据三个单态: 占据数分布只有六个 110, 101, 011, 200, 020, 002,
波函数可写成

$$|110\rangle, \quad |101\rangle, \quad |011\rangle, \quad |200\rangle, \quad |020\rangle, \quad |002\rangle$$

这种基于占据数描述全同粒子体系的方法, 叫占据数表象.

- 单模光场所有光子的能量都是 $\hbar\omega$. 能量本征态 $|n\rangle$ 表示存在 n 个场激发. 因此, $|n\rangle$ 正好表示具有 n 个光子的场, 称为光场的数态表象. 也称 $Fock$ 表象.

数态表象的性质

完备性与正交归一性

$$\sum_n |n\rangle\langle n| = 1, \qquad \langle n|m\rangle = \delta_{nm}$$

数态展开

$$|\Psi\rangle = \sum_n a_n |n\rangle$$

密度算符

$$\begin{aligned}
\rho = 1\cdot\rho\cdot 1 &= (\sum_n |n\rangle\langle n|)\rho(\sum_m |m\rangle\langle m|) \\
&= \sum_n\sum_m |n\rangle\langle n|\,\rho\,|m\rangle\langle m| \\
&= \sum_n\sum_m \rho_{nm}\,|n\rangle\langle m|
\end{aligned}$$

* 矩阵元: $$\rho_{nm} = \langle n | \rho | m \rangle$$

取 $n = m$, 得矩阵的迹

$$Tr(\rho) = \sum_n \rho_{nn} |n\rangle\langle n|$$

ρ_{nn} 是对角元, 描述测得场处于数态 $|n\rangle$ 的概率

证明: (1) 对于纯态

$$\begin{aligned}\rho_{nn} &= \langle n | \rho | n \rangle \\ &= \langle n || \psi\rangle\langle\psi || n \rangle \\ &= a_n^* a_n \\ &= \omega_n\end{aligned}$$

(2) 对于混态

$$
\begin{aligned}
\rho_{nn} &= \langle n \,|\rho|\, n\rangle \\
&= \left\langle n \left| \sum_i P_i \,|\psi_i\rangle\langle\psi_i| \right| n \right\rangle \\
&= \sum_i P_i \,\langle n \,||\psi_i\rangle\langle\psi_i||\, n\rangle \\
&= \sum_i P_i a_n^* a_n \\
&= \sum_i P_i \,|a_n|^2
\end{aligned}
$$

总之: 数态表象, 是个很好的表象. 量子光学通常做数态展开。

Contents

求實求真
大氣大為

过完备性

$$\frac{1}{\pi}\sum_{\alpha}|\alpha\rangle\langle\alpha| = 1$$

$$\frac{1}{\pi}\int d^2\alpha\,|\alpha\rangle\langle\alpha| = 1$$

相干态展开

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\pi}\int c_\alpha\,|\alpha\rangle\,d^2\alpha$$

归一性

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = 1$$

非正交性:

$$\langle\alpha|\beta\rangle = e^{-|\alpha-\beta|^2} = e^{\alpha^*\beta-\frac{1}{2}(|\alpha|^2+|\beta|^2)}$$

求實求真 大氣大為

例: 试证明相干态重要结论: $\displaystyle\int \alpha^k |\alpha\rangle\, d^2\alpha = 0, \quad k = 1, 2, \cdots$

证明: 把相干态做数态展开

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle\,, \quad \alpha = |\alpha|\, e^{i\varphi}$$

$$\begin{aligned}
\int \alpha^k |\alpha\rangle\, d^2\alpha &= \int e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \alpha^k \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle\, d^2\alpha \\
&= \sum_n \frac{|n\rangle}{\sqrt{n!}} \iint e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \alpha^{k+n} |\alpha|\, d|\alpha|\, d\varphi \\
&= \sum_n \frac{|n\rangle}{\sqrt{n!}} \int_0^\infty e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} |\alpha|^{k+n+1} d|\alpha| \int_0^{2\pi} e^{i(k+n)\varphi} d\varphi \\
&= 0
\end{aligned}$$

* $k + n$ 是正整数, 角度积分为零.

例：试证明相干态的单元分解式

$$a^\dagger |\alpha\rangle\langle\alpha| = \left(\alpha^* + \frac{\partial}{\partial\alpha}\right)|\alpha\rangle\langle\alpha|, \qquad |\alpha\rangle\langle\alpha| a = \left(\alpha + \frac{\partial}{\partial\alpha^*}\right)|\alpha\rangle\langle\alpha|$$

证明：相干态是真空态的平移

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}\alpha^*\alpha} e^{\alpha a^\dagger}|0\rangle, \qquad \langle\alpha| = e^{-\frac{1}{2}\alpha^*\alpha}\langle 0| e^{\alpha^* a}$$

$$|\alpha\rangle\langle\alpha| = e^{-\alpha^*\alpha} e^{\alpha a^\dagger}|0\rangle\langle 0| e^{\alpha^* a}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\alpha}|\alpha\rangle\langle\alpha| &= -\alpha^* e^{-\alpha^*\alpha} e^{\alpha a^\dagger}|0\rangle\langle 0| e^{\alpha^* a} + a^\dagger\alpha^* e^{-\alpha^*\alpha} e^{\alpha a^\dagger}|0\rangle\langle 0| e^{\alpha^* a} \\ &= -\alpha^*|\alpha\rangle\langle\alpha| + a^\dagger|\alpha\rangle\langle\alpha|\end{aligned}$$

$$\to a^\dagger |\alpha\rangle\langle\alpha| = \left(\alpha^* + \frac{\partial}{\partial\alpha}\right)|\alpha\rangle\langle\alpha|$$

情况不太好，似乎对相干态所有计算都必需展开到数态中进行！

试着在自身表象计算密度算符...

$$
\begin{aligned}
\rho &= \sum_{\alpha}\sum_{\beta}\rho_{\alpha\beta}\left|\alpha\right\rangle\left\langle\beta\right| \\
&= \frac{1}{\pi^2}\iint\left\langle\alpha\left|\rho\right|\beta\right\rangle\left|\alpha\right\rangle\left\langle\beta\right| d^2\alpha d^2\beta \\
&= \frac{1}{\pi^2}\iint d^2\alpha d^2\beta\left|\alpha\right\rangle\left\langle\beta\right|\left\langle\alpha\left|\rho\right|\beta\right\rangle e^{\frac{1}{2}\left(\left|\alpha\right|^2+\left|\beta\right|^2\right)}e^{-\frac{1}{2}\left(\left|\alpha\right|^2+\left|\beta\right|^2\right)} \\
&= \frac{1}{\pi^2}\iint d^2\alpha d^2\beta\left|\alpha\right\rangle\left\langle\beta\right| R(\alpha^*,\beta)e^{-\frac{1}{2}\left(\left|\alpha\right|^2+\left|\beta\right|^2\right)}
\end{aligned}
$$

上式, 定义了 $R(\alpha^*, \beta)$ 函数

$$
\begin{aligned}
R(\alpha^*, \beta) &= \langle \alpha \, |\rho| \, \beta \rangle \, e^{\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2)} \\
&= \sum_{n,m} \rho_{nm} \frac{(\alpha^*)^n (\beta)^m}{\sqrt{n!m!}}
\end{aligned}
$$

把 $\rho_{\alpha\beta}$ 用 $R(\alpha^*, \beta)$ 取待后, 好象可不到数态表象中进行计算了!
但是: 相干态不正交, 通过上式在数态中求 $R(\alpha^*, \beta)$ 函数是相当复杂的, 因为存在非对称元!

相干态各种表示的基本思想

密度算符的 R 表示还是太复杂，有没有相对简单的表示呢？比如只存在对角元 C 数，

对于正规序 (normal) 算符，能否这样：

$$\overline{F}^{(n)}(a,a^\dagger)=\langle\rho F\rangle=\int P(\alpha)F^{(n)}(\alpha,\alpha^\dagger)d^2\alpha$$

对于反正规序 (anti-normal) 算符，能否这样：

$$\overline{F}^{(a)}(a,a^\dagger)=\langle\rho F\rangle=\int Q(\alpha)F^{(a)}(\alpha,\alpha^\dagger)d^2\alpha$$

对于对称序 (winger) 算符，能否这样：

$$\overline{F}^{(s)}(a,a^\dagger)=\langle\rho F\rangle=\int W(\alpha)F^{(s)}(\alpha,\alpha^\dagger)d^2\alpha$$

大气求实 大度求真

P 表示

继续把密度算符在相干态表象展开

$$\rho = \sum_{\alpha}\sum_{\beta} \rho_{\alpha\beta} \left|\alpha\right\rangle\left\langle\beta\right| = \frac{1}{\pi^2}\iint \rho_{\alpha\beta} \left|\alpha\right\rangle\left\langle\beta\right| d^2\alpha d^2\beta$$

* 式中的矩阵元为:

$$\rho_{\alpha\beta} = \left\langle\alpha\left|\rho\right|\beta\right\rangle = \left\langle\alpha\left|\left|\psi\right\rangle\left\langle\psi\right|\right|\beta\right\rangle = \sum_{n,m=0}^{+\infty} \frac{\rho_{nm}}{\sqrt{n!m!}} a^{\dagger n}\left|0\right\rangle\left\langle 0\right| a^m$$

取 $\alpha = \beta$,

$$\rho = \frac{1}{\pi^2}\iint \rho_{\alpha\alpha} \left|\alpha\right\rangle\left\langle\alpha\right| d^2\alpha d^2\alpha$$

四重积分，计算太复杂，改写：

$$\rho = \frac{1}{\pi^2}\iint \rho_{\alpha\alpha}\left|\alpha\right\rangle\left\langle\alpha\right| d^2\alpha d^2\alpha$$
$$= \int\left(\int \frac{d^2\alpha}{\pi^2}\rho_{\alpha\alpha}\right)\left|\alpha\right\rangle\left\langle\alpha\right| d^2\alpha$$
$$= \int P(\alpha)\left|\alpha\right\rangle\left\langle\alpha\right| d^2\alpha$$

的确是可以的

引入记号：

$$\delta(\alpha^* - a^\dagger)\delta(\alpha - a) = \frac{1}{\pi^2}\int e^{\beta^*(\alpha^*-a^\dagger)}e^{-\beta(\alpha-a)}d^2\beta$$

定义对角元函数：

$$P(\alpha) = \frac{1}{\pi^2}\int \rho_{\alpha\alpha}d^2\alpha = Tr[\rho\delta(\alpha^* - a^\dagger)\delta(\alpha - a)] = \frac{1}{\pi}\overline{\rho}^{(a)}(\alpha, \alpha^*)$$

它描述场处于相干态 $|\alpha\rangle$ 的概率，称为准概率-P 函数.

P 函数的性质

(1) 总概率归一

$$
\begin{aligned}
\sum_{\alpha} P(\alpha) = \int d^2\alpha P(\alpha) &= \int d^2\alpha P(\alpha) \cdot 1 \\
&= \int d^2\alpha P(\alpha) Tr(|\alpha\rangle\langle\alpha|) \\
&= Tr(\int d^2\alpha P(\alpha) \, |\alpha\rangle\langle\alpha|) \\
&= Tr(\rho) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

求實求真 大氣大爲

(2) 用 P 表示平均光子数

$$
\begin{aligned}
\overline{n} &= Tr(\rho\hat{n}) \\
&= Tr(\rho a^\dagger a) \\
&= Tr\left(\int d^2\alpha P(\alpha)\left|\alpha\right\rangle\left\langle\alpha\right| a^\dagger a\right) \\
&= \int d^2\alpha P(\alpha)\left\langle\alpha\right| a^\dagger a \left|\alpha\right\rangle \\
&= \int d^2\alpha P(\alpha)\alpha^*\alpha \\
&= \int P(\alpha)\left|\alpha\right|^2 d^2\alpha
\end{aligned}
$$

* 想象 $\left|\alpha\right|^2$ 代表 $\left|\alpha\right\rangle$ 的光子数, $P(\alpha)$ 代表处于 $\left|\alpha\right\rangle$ 的概率, 这个公式很好理解.
看来效果还不错!

(3) 用 P 表示均值公式:

$$
\begin{aligned}
\overline{F} &= \sum_i P_i \overline{F_i} \\
&= \sum_i P(\alpha_i) \langle \alpha_i | F(a, a^\dagger) | \alpha_i \rangle \\
&= \int P(\alpha) \langle \alpha | F(a, a^\dagger) | \alpha \rangle \, d^2\alpha \\
&= \int P(\alpha) \overline{F}^{<n>}(\alpha, \alpha^*) d^2\alpha
\end{aligned}
$$

* 真的很如意. 不过要注意, 算符得用正规序.

(4) 场处于任意相干态 $|\beta\rangle$ 概率的 P 表示

$$
\begin{aligned}
\rho_{\beta\beta} &= \langle\beta|\rho|\beta\rangle \\
&= \left\langle\beta\middle|\int P(\alpha)\,|\alpha\rangle\langle\alpha|\,d^2\alpha\middle|\beta\right\rangle \\
&= \int d^2\alpha P(\alpha)\,\langle\beta\,|\alpha\rangle\langle\alpha|\,\beta\rangle \\
&= \int d^2\alpha P(\alpha)\,|\langle\beta\,|\alpha\rangle|^2 \\
&= \int d^2\alpha P(\alpha) e^{-|\alpha-\beta|^2} \\
&= \delta(\alpha-\beta)\delta(\alpha^*-\beta^*)
\end{aligned}
$$

说明: 虽然 $P(\alpha)$ 代表处于 $|\alpha\rangle$ 的概率, 但是不能用 $P(\beta)$ 描述处于 $|\beta\rangle$ 态的概率.

$$
P(\beta) = \frac{1}{\pi}\int \rho_{\beta\beta} d^2\beta \neq \rho_{\beta\beta}
$$

(5) P 函数的傅里叶变换

$$
\begin{aligned}
\rho_{-\beta\beta} &= \langle -\beta|\rho|\beta\rangle \\
&= \left\langle -\beta\left|\int P(\alpha)\,|\alpha\rangle\langle\alpha|\right|\beta\right\rangle d^2\alpha \\
&= \int P(\alpha)d^2\alpha\,\langle -\beta\,|\alpha\rangle\,\langle\alpha\,|\beta\rangle \\
&= \int P(\alpha)e^{-|\beta|^2}e^{-|\alpha|^2}e^{\beta\alpha^*-\beta^* a}d^2\alpha \\
\rho_{-\beta\beta}e^{|\beta|^2} &= \int [P(\alpha)e^{-|\alpha|^2}]e^{\beta\alpha^*-\beta^* a}d^2\alpha \\
\to P(\alpha)e^{-|\alpha|^2} &= \frac{1}{\pi^2}\int [\rho_{-\beta\beta}e^{|\beta|^2}]e^{\beta^*\alpha-\beta a^*}d^2\beta
\end{aligned}
$$

即: 分布函数 $P(\alpha)e^{-|\alpha|^2}$ 与密度算符 $\rho_{-\beta\beta}e^{|\beta|^2}$ 互为傅里叶变换.

例：设光场处于相干态 $|\gamma\rangle$，求密度算符的 P 表示

解：$|\gamma\rangle$ 态的密度算符为

$$\rho = |\gamma\rangle\langle\gamma|$$

$$\begin{aligned}
\rho_{-\beta\beta} &= \langle -\beta|\rho|\beta\rangle \\
&= \langle -\beta|\gamma\rangle\,\langle\gamma|\beta\rangle \\
&= e^{-|\beta|^2} e^{-|\gamma|^2} e^{\beta\gamma^* - \beta^*\gamma} \\
\rho_{-\beta\beta} e^{|\beta|^2} &= e^{-|\gamma|^2} e^{\beta\gamma^* - \beta^*\gamma} \\
P(\alpha) e^{-|\alpha|^2} &= \frac{1}{\pi^2} \int [e^{-|\gamma|^2} e^{\beta\gamma^* - \gamma^* a}] e^{\beta^*\alpha - \beta a^*} d^2\beta \\
&= e^{-|\gamma|^2} \delta(\alpha^* - \gamma^*)\delta(\alpha - \gamma) \\
&= e^{-|\gamma|^2} \delta^2(\alpha - \gamma)
\end{aligned}$$

$$\rightarrow P(\alpha) = \delta^2(\alpha - \gamma)$$

$$\begin{aligned}
\rho = |\gamma\rangle\langle\gamma| &= \int P(\alpha)\,|\alpha\rangle\langle\alpha|\,d^2\alpha \\
&= \int \delta^2(\alpha - \gamma)\,|\alpha\rangle\langle\alpha|\,d^2\alpha
\end{aligned}$$

例: 设光场处于数态 $|n\rangle$, 求密度算符的 P 表示

解: $|n\rangle$ 态的密度算符为

$$\rho = |n\rangle\langle n|$$

$$\begin{aligned}
\rho_{-\beta\beta} &= \langle -\beta|\rho|\beta\rangle \\
&= \langle -\beta|n\rangle\,\langle n|\beta\rangle \\
&= \left\langle n|e^{-\frac{|-\beta|^2}{2}}\sum_n \frac{(-\beta)^n}{\sqrt{n!}}|n\right\rangle \left\langle n|e^{-\frac{|\beta|^2}{2}}\sum_n \frac{\beta^n}{\sqrt{n!}}|n\right\rangle \\
&= e^{-|\beta|^2}\frac{(-|\beta|^2)^n}{n!}
\end{aligned}$$

$$\rho_{-\beta\beta}e^{|\beta|^2} = \frac{(-|\beta|^2)^n}{n!}$$

大氣大為 求實求真

$$
\begin{aligned}
P(\alpha)e^{-|\alpha|^2} &= \frac{1}{\pi^2}\int[\frac{(-|\beta|^2)^n}{n!}]e^{\beta^*\alpha-\beta a^*}d^2\beta \\
&= \frac{1}{n!\pi^2}\int(-|\beta|^2)^n e^{\beta^*\alpha-\beta a^*}d^2\beta
\end{aligned}
$$

积分是发散的, 不可能表示为一个正常函数.

但是, 它是一个可以取负值的函数. 因此, 在非经典光场, $P(\alpha)$ 失却了经典概率的含义. 表现出奇特的量子特性.

Q 表示

(1) 正规排序密度算符定义 Q 函数:

$$Q(\alpha) = Tr[\rho\delta(\alpha - a)\delta(\alpha^* - a^\dagger)] = \frac{1}{\pi}\overline{\rho}^{(n)}(\alpha, \alpha^*)$$

* 注意与 P 函数对比:

$$P(\alpha) = Tr[\rho\delta(\alpha^* - a^\dagger)\delta(\alpha - a)] = \frac{1}{\pi}\overline{\rho}^{(a)}(\alpha, \alpha^*)$$

(2) 反正规排序算符的均值公式:

$$\langle F^{(a)}(a, a^\dagger)\rangle = \int Q(\alpha)\overline{F}^{(a)}(\alpha, \alpha^*)d^2\alpha$$

(3) 与 P 函数的关系 (傅里叶变换):

$$Q(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int d^2\alpha' P(\alpha')e^{-|(\alpha'-\alpha)|^2}$$

(4) Q 函数是非负正定有界的, 证明如下:

$$
\begin{aligned}
Q(\alpha) &= \frac{1}{\pi}\langle\alpha|\rho|\alpha\rangle \\
&= \frac{1}{\pi}\left\langle \alpha \left| \sum_i P_i \left|\psi_i\right\rangle\left\langle\psi_i\right| \right| \alpha \right\rangle \\
&= \frac{1}{\pi}\sum_i P_i \left\langle\alpha \,|\psi_i\right\rangle\left\langle\psi_i\right|\, \alpha\rangle \\
&= \frac{1}{\pi}\sum_i P_i \left|\left\langle\psi_i \,|\alpha\right\rangle\right|^2 \leq \frac{1}{\pi}
\end{aligned}
$$

因此,Q 函数更适合于描述没有经典对应的纯量子态的概率.

(5) Q 函数与密度算符有如下简单关系

$$Q(\alpha) = \frac{1}{\pi}\langle\alpha|\rho|\alpha\rangle$$

证明:

$$\begin{aligned}
Q(\alpha) &= Tr[\rho\delta(\alpha - a)\delta(\alpha^* - a^\dagger)] \\
&= Tr[\rho\delta(\alpha - a)\cdot 1\cdot\delta(\alpha^* - a^\dagger)] \\
&= \frac{1}{\pi}Tr\int \rho\delta(\alpha - a)\,|\beta\rangle\langle\beta|\,\delta(\alpha^* - a^\dagger)d^2\beta \\
&= \frac{1}{\pi}Tr(\rho\,|\alpha\rangle\langle\alpha|) \\
&= \frac{1}{\pi}\langle\alpha\,|\rho|\,\alpha\rangle
\end{aligned}$$

例: 求数态的 Q 表示

解:设体系处于数态纯态 $|n\rangle$,

$$
\begin{aligned}
Q(\alpha) &= \frac{1}{\pi}\langle\alpha|\rho|\alpha\rangle \\
&= \frac{1}{\pi}\sum_i P_i|\langle\psi_i|\alpha\rangle|^2 \\
&= \frac{1}{\pi}|\langle n|\alpha\rangle|^2 \\
&= \frac{|\alpha|^{2n}}{n!\pi}e^{-|\alpha|^2}
\end{aligned}
$$

例: 求相干态的 Q 表示

解:设体系处于相干纯态 $|\beta\rangle$,

$$
\begin{aligned}
Q(\alpha) &= \frac{1}{\pi}\langle\alpha|\rho|\alpha\rangle \\
&= \frac{1}{\pi}\sum_i P_i |\langle\psi_i|\alpha\rangle|^2 \\
&= \frac{1}{\pi}|\langle\beta|\alpha\rangle|^2 \\
&= \frac{1}{\pi}e^{-|(\alpha-\beta)|^2}
\end{aligned}
$$

这正是原点在 β 的高斯分布函数.

例: 求压缩态的 Q 表示

解: 设压缩纯态为 $|\beta,\xi\rangle$, 则其密度算符为

$$\rho = |\beta,\xi\rangle\langle\xi,\beta|$$

Q 函数为:

$$\begin{aligned}
Q(\alpha) &= \frac{1}{\pi}\sum_i P_i |\langle\psi_i|\alpha\rangle|^2 \\
&= \frac{1}{\pi}|\langle\xi,\beta|\alpha\rangle|^2 \\
&= \frac{1}{\pi}|\langle\alpha|\beta,\xi\rangle|^2 \\
&= \frac{1}{\pi}|\langle\alpha|S(\xi)D(\beta)|0\rangle|^2 \\
&= \frac{1}{\pi}|\langle\alpha|S(\xi)|\beta\rangle|^2
\end{aligned}$$

大氣大為 求實求真

* 求 $\langle\alpha\,|S(\xi)|\,\beta\rangle$

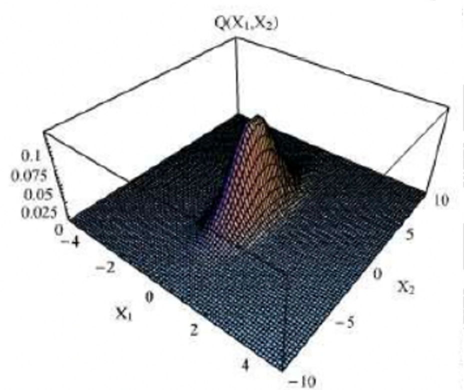
$$
\begin{aligned}
\langle\alpha\,|S(\xi)|\,\beta\rangle &= \frac{1}{\alpha^*}\langle\alpha\,|a^\dagger S|\,\beta\rangle \\
&= \frac{1}{\alpha^*}\langle\alpha\,|SS^\dagger a^\dagger S|\,\beta\rangle \\
&= \frac{1}{\alpha^*}\langle\alpha\,|S(a^\dagger\cosh r - ae^{-i2\varphi}\sinh r)|\,\beta\rangle \\
&= \frac{1}{\alpha^*}[\cosh r(\frac{1}{2}\beta^* + \frac{\partial}{\partial\beta}) - \beta e^{-i2\varphi}\sinh r]\,\langle\alpha\,|S(\xi)|\,\beta\rangle
\end{aligned}
$$

这是一个有关 $\langle\alpha\,|S(\xi)|\,\beta\rangle$ 的方程, 可解出:$\langle\alpha\,|S(\xi)|\,\beta\rangle$, 代回 $\cdots$

$$
\begin{aligned}
Q(\alpha) =& \frac{\mathrm{sech}(r)}{\pi} \Big\{ -(|\alpha|^2 + |\beta|^2) + (\alpha^*\beta + \beta^*\alpha)\mathrm{sech}(r) \\
& -\frac{1}{2}\left[e^{i2\varphi}(\alpha^{*2} + \beta^{*2}) + e^{-i2\varphi}(\alpha^{*2} - \beta^{*2})\right] \tanh(r) \Big\}
\end{aligned}
$$

令

$$
\begin{aligned}
Q(\alpha) &\equiv Q(X_1, X_2) \\
X_1 &= \frac{1}{2}(\alpha + \alpha^*) \\
X_2 &= \frac{1}{2}(\alpha - \alpha^*)
\end{aligned}
$$



例: 已知体系的 $Q(\alpha)$ 函数, 试求 $P(\alpha)$ 函数

解: 它们之间存在傅里叶变换关系

$$
\begin{aligned}
Q(\alpha) &= \frac{1}{\pi}\int d^2\alpha' P(\alpha') e^{-|(\alpha'-\alpha)|^2} \\
&= \frac{1}{\pi}\int d^2\alpha' P(\alpha') e^{-|\alpha'|^2} e^{-|\alpha|^2} e^{\alpha'\alpha^* + (\alpha')^*\alpha} \\
Q(\alpha) e^{|\alpha|^2} &= \frac{1}{\pi}\int d^2\alpha' [P(\alpha') e^{-|\alpha'|^2}] e^{\alpha'\alpha^* + (\alpha')^*\alpha} \\
P(\alpha') e^{-|\alpha'|^2} &= \frac{1}{\pi}\int d^2\alpha [Q(\alpha) e^{|\alpha|^2}] e^{-\alpha'\alpha^* - (\alpha')^*\alpha} \\
P(\alpha') &= \frac{e^{|\alpha'|^2}}{\pi}\int d^2\alpha [Q(\alpha) e^{|\alpha|^2}] e^{-\alpha'\alpha^* - (\alpha')^*\alpha}
\end{aligned}
$$

大气大为 求实求真

(1) 对称排序密度算符定义 $Winger$ 函数:

$$W(\alpha)=\frac{1}{\pi}\overline{\rho}^{(s)}(\alpha,\alpha^*)$$

(2) 对称排序算符的均值公式:

$$\langle F^{(s)}(a,a^\dagger)\rangle=\int W(\alpha)\overline{F}^{(s)}(\alpha,\alpha^*)d^2\alpha$$

(3) 相干纯态 $|\beta\rangle$ 的 Winger 函数:

$$W(\alpha)=\frac{2}{\pi}e^{-2|(\alpha-\beta)|^2}$$

求實求真 大氣大為

(4) 纯数态 $|n\rangle$ 的 Winger 函数:

$$W(\alpha)=\frac{2}{\pi}(-1)^n e^{-2|\alpha|^2}L_n(4|\alpha|^2)$$

式中, L_n 是拉盖尔多项式

(5) 与 P 函数的关系 (傅里叶变换)

$$W(\alpha)=\frac{2}{\pi}\int d^2\alpha' P(\alpha')e^{-2|(\alpha'-\alpha)|^2}$$

Contents

设有随机变量 x, 其对应的可观测量 X 的概率密度为

$$\rho(x) \geq 0, \qquad \text{with} \int \rho(x)dx = 1$$

第 n 阶矩定义为:

$$\langle x^n \rangle = \int x^n \rho(x)dx$$

如果所有阶的矩 $\{\langle x^n \rangle\}$ 都知道，则可求出 $\rho(x)$

对所有阶的矩加权求和，可得 e 指数的矩

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ik)^n}{n!}\langle x^n\rangle = \int e^{ikx}\rho(x)dx$$
$$= \langle e^{ikx}\rangle$$

由 e 指数的矩定义特征函数

$$C(k) \equiv \langle e^{ikx}\rangle$$

显然，特征函数与概率密度存在傅里叶变换关系

$$C(k) = \int e^{ikx}\rho(x)dk$$
$$\rho(x) = \frac{1}{2\pi}\int e^{-ikx}C(k)dk$$

当然，可以从特征函数计算变量的矩

$$\langle x^n \rangle = \frac{1}{i^n} \frac{d^n}{dk^n} C(k) \Big|_{k=0}$$

在量子力学相干表象里，根据算符排序的不同，可定义三种特征函数

$$\begin{aligned} C_W(\lambda) &= Tr[\rho e^{\lambda a^\dagger - \lambda^* a}] \\ &= Tr[\rho D(\lambda)], \qquad \text{(Wigner)} \\ C_N(\lambda) &= Tr[\rho e^{\lambda a^\dagger} e^{-\lambda^* a}], \qquad \text{(正规序)} \\ C_A(\lambda) &= Tr[\rho e^{-\lambda a^\dagger} e^{\lambda^* a}], \qquad \text{(反正规序)} \end{aligned}$$

三者的关系为：

$$C_W(\lambda) = C_N(\lambda) e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2} = C_A(\lambda) e^{\frac{1}{2}|\lambda|^2}$$

三者的统一定义：

$$C(\lambda, s) = Tr[\rho e^{\lambda a^\dagger - \lambda^* a + s|\lambda|^2/2}]$$

有

$$C(\lambda, 0) = C_W(\lambda), \quad C(\lambda, 1) = C_N(\lambda), \quad C(\lambda, -1) = C_A(\lambda)$$

大氣大為 求實求真

同理，从特征函数可计算各种排序的算符的矩（均值）

$$\langle a^{\dagger m} a^n \rangle = Tr[\rho a^{\dagger m} a^n] = \frac{\partial^{(m+n)}}{\partial \lambda^m \partial(-\lambda^*)^n} C_N(\lambda) \Big|_{\lambda=0}$$

$$\langle a^m a^{\dagger n} \rangle = Tr[\rho a^m a^{\dagger n}] = \frac{\partial^{(m+n)}}{\partial \lambda^n \partial(-\lambda^*)^m} C_A(\lambda) \Big|_{\lambda=0}$$

$$\langle \{a^{\dagger m} a^n\}_W \rangle = Tr[\rho \{a^{\dagger m} a^n\}_W] = \frac{\partial^{(m+n)}}{\partial \lambda^m \partial(-\lambda^*)^n} C_W(\lambda) \Big|_{\lambda=0}$$

大氣大為 求實求真

例: 试证明特征函数 $C_A(\lambda)$ 与 $Q(\alpha)$ 存在傅里叶变换关系

证明:

$$\begin{aligned} C_A(\lambda) &= Tr[\rho e^{-\lambda a^\dagger} e^{\lambda^* a}] \\ &= Tr[e^{\lambda^* a} \rho e^{-\lambda a^\dagger}] \\ &= \frac{1}{\pi} \int \left\langle \alpha | e^{\lambda^* a} \rho e^{-\lambda a^\dagger} | \alpha \right\rangle d^2\alpha \\ &= \int Q(\lambda) e^{\lambda a^* - \lambda^* \alpha} d^2\alpha \end{aligned}$$

因此,

$$Q(\alpha) = \frac{1}{\pi^2} \int C_A(\lambda) e^{\lambda^* \alpha - \lambda a^*} d^2\lambda$$

大氣大為 求實求真

同理,

$$P(\alpha) = \frac{1}{\pi^2} \int C_N(\lambda) e^{\lambda^* \alpha - \lambda a^*} d^2\lambda$$

$$W(\alpha) = \frac{1}{\pi^2} \int C_W(\lambda) e^{\lambda^* \alpha - \lambda a^*} d^2\lambda$$

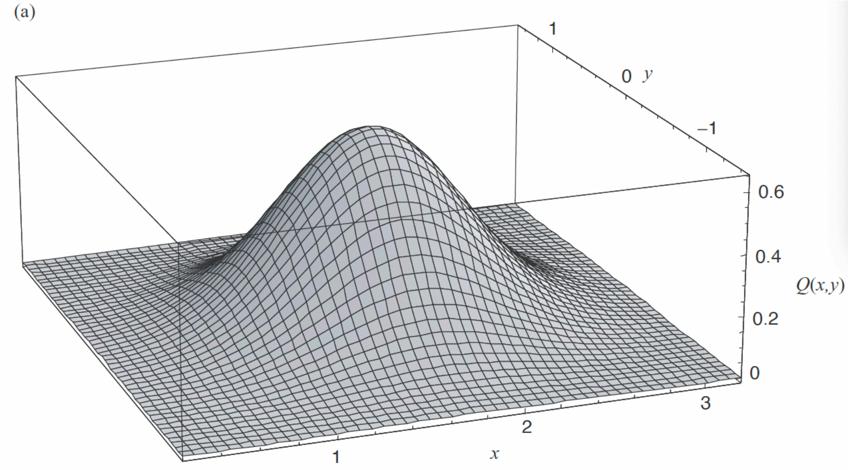
代入

$$C_W(\lambda) = C_N(\lambda) e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2}$$

有

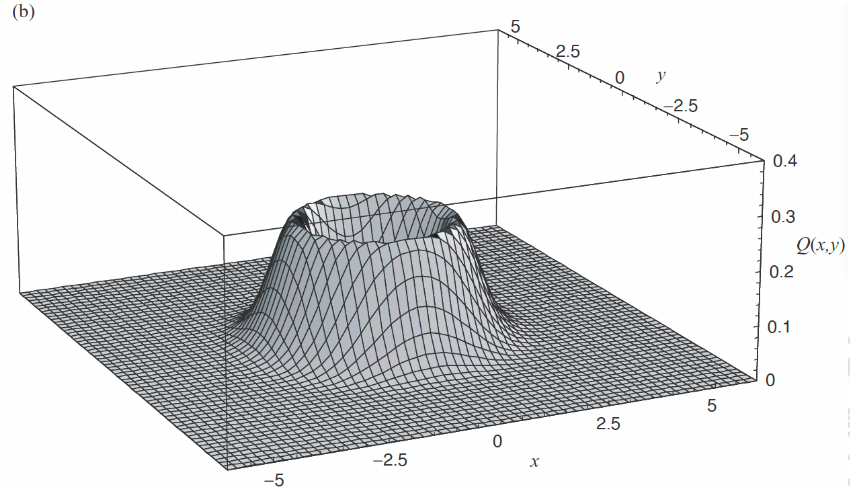
$$W(\alpha) = \frac{1}{\pi^2} \int C_N(\lambda) e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2} \exp(\lambda^* \alpha - \lambda a^*) d^2\lambda$$

因此，从特征函数，可以直接得到各概率函数 $W(\alpha), P(\alpha), Q(\alpha)$ 表示

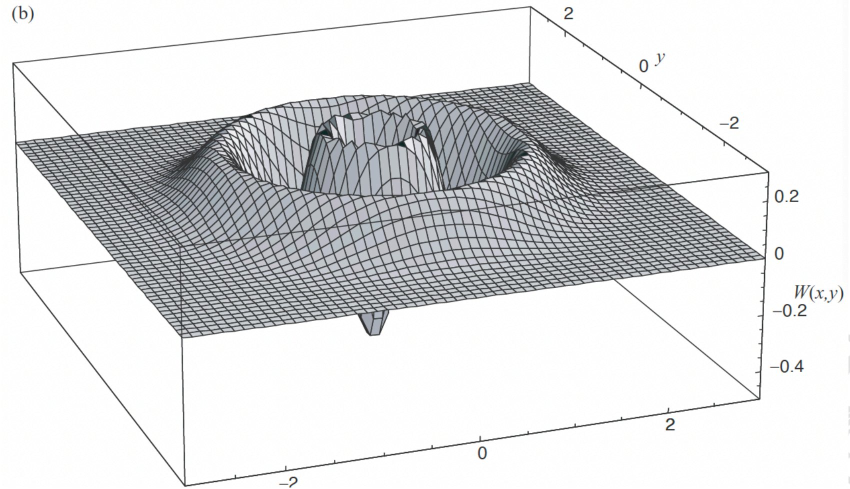


一个平均光子数为 10 的相干态的 $Q(\alpha)$ 函数 $(\alpha = x + iy)$

求實求真 大氣大為



数态 $|n\rangle = |3\rangle$ 的 $Q(\alpha)$ 函数 $(\alpha = x + iy)$



数态 $|n\rangle = |3\rangle$ 的 W 函数. 存在振荡和“负概率”区域 (非经典效应)

1. 试证明

$$Trf(a,a^{\dagger}) = \frac{1}{\pi} Tr \int f(a,a^{\dagger}) \left|\alpha\right\rangle \left\langle\alpha\right| d^2\alpha$$

2. 试证明

$$Trf(a,a^{\dagger}) = \frac{1}{\pi} Tr \int \left\langle\alpha\right| f(a,a^{\dagger}) \left|\alpha\right\rangle d^2\alpha$$

3. 设压缩态为 $|\beta,\xi\rangle$, 求光子数分布:

$$P(n) = \left|\langle n \,|\beta,\xi\rangle\right|^2$$

大气大为 求实求真

电子科技大学
University of Electronic Science and Technology of China

Thanks for your attention!

A & Q

求實求真
大氣大為