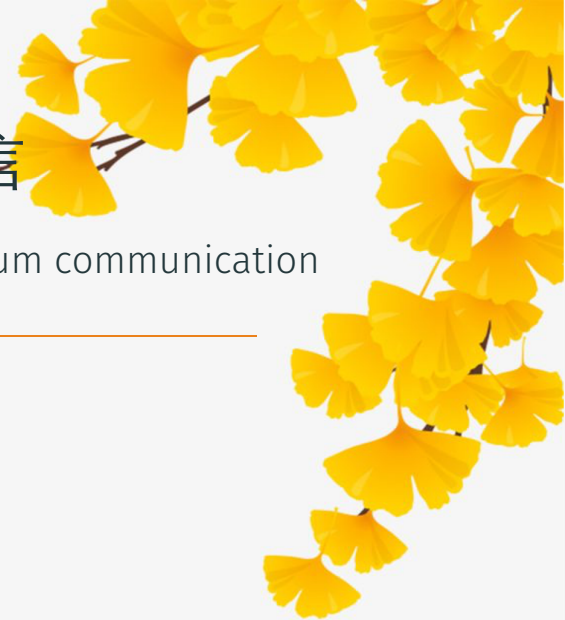
量子信息与量子通信

Quantum information and quantum communication

李小飞

光电科学与工程学院

2022 年 2 月 24 日



第 2 讲：量子逻辑门

Contents

求實求真
大氣大方

信息学基本原理

所有类型的计算都是加法，二进制加法是逻辑运算，逻辑门是实现各种逻辑运算的基础性元件。

例-1. 设计一个加法器，实现两整数之间的求和:

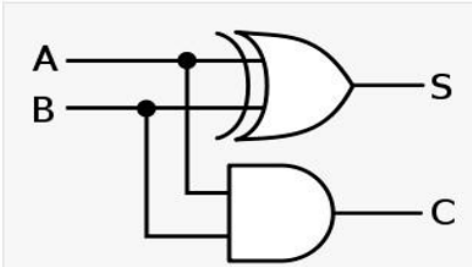
解: 对于小于 2^n 的正整数 M, N 可表示为:

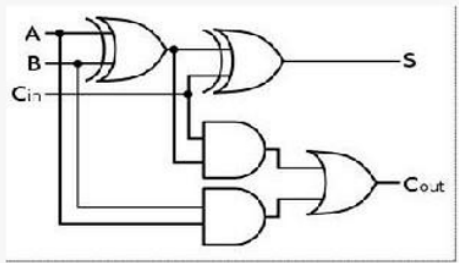
$$M = \sum_{i=0}^{n-1} a_i 2^i, \qquad N = \sum_{i=0}^{n-1} b_i 2^i$$

Table 1: 加法器真值表，其中 s_i, c_{i+1} 分别是求和位和进位

a_i	b_i	s_i	c_{i+1}
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

- a_i, b_i 不同时，s_i 置“1”，否则置“0”: 逻辑“异或”XOR $s_i = a_i \oplus b_i$
- a_i, b_i 都是 1 时，c_{i+1} 置“1”，否则置“0”: 逻辑“与”AND $c_{i+1} = a_i \wedge b_i$





半加器（上）和全加器（下）

考察发现：经典 XOR 门和 AND 门都是不可逆的！
不可逆过程有深刻的物理内含：

- 不可逆过程熵增加 $S = k_B \ln \Omega$
- 不可逆过程信息丢失 $\Delta S = k_B \ln 2$
- 不可逆过程消耗能量
- 不可逆过程不是幺正变换

当前通用的图灵机都是不可逆的！

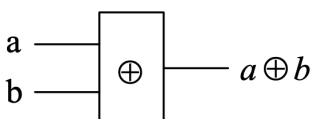
- 量子计算机通过酉操作（幺正变换）来实现信息处理，要求所有的逻辑门都是可逆的！

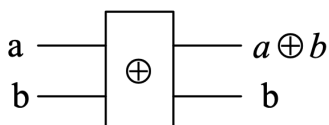
Bennett 证明

所有不可逆的计算机都可以改造为可逆计算机

例-2. 试把不可逆的异或门，改造为可逆的异或门:

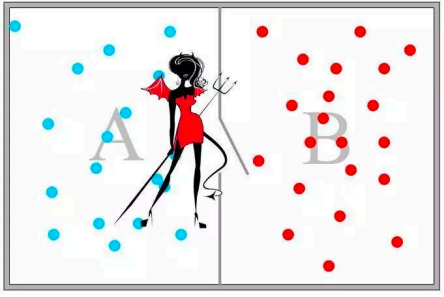
解: 改造方法如图





可逆源于所有信息被保留，信息的擦除消耗能量增加熵，导致不可逆。

绝热容器分成两格，中间是由“妖”控制的一扇“门”，分子作无规则热运动时会向门上撞击，“门”可以选择性的将速度较快的分子放入一格，较慢的分子放入另一格. 这样，体系的熵在减少！



1981 年，Bennett 证明“妖”必须去除前面分子的信息，这消耗能量并导致 $k_B \ln 2$ 的熵增。

基本结论:

- 微观过程是可逆的
- 微观过程服从量子力学原理
- 演化过程是幺正的
- 基于幺正变设计的量子逻辑门是可逆的
- 如果有一套普适的量子逻辑门，发展量子计算机是可行的

- 分析：单量子比特波函数

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \qquad (|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1)$$

矩阵：

$$|\psi\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

因此，

(1) 单比特逻辑门是操作 C^2 空间的 2×2 的矩阵，

(2) 单比特逻辑门必须是幺正（酉）矩阵（可逆性要求）

经典非门: $0 \to 1, \qquad 1 \to 0$

量子非门: $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad \to \quad \alpha|1\rangle + \beta|0\rangle$

例-2. 试证明 σ_x 矩阵就是单比特量子非门:

$$X \equiv \sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|$$

证明: (1) 量子非, 对于 $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, 有

$$X|\psi\rangle = X \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \end{bmatrix} = \beta|0\rangle + \alpha|1\rangle = \alpha|1\rangle + \beta|0\rangle$$

(2) 幺正性

$$X^\dagger = (X^*_{ij})^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

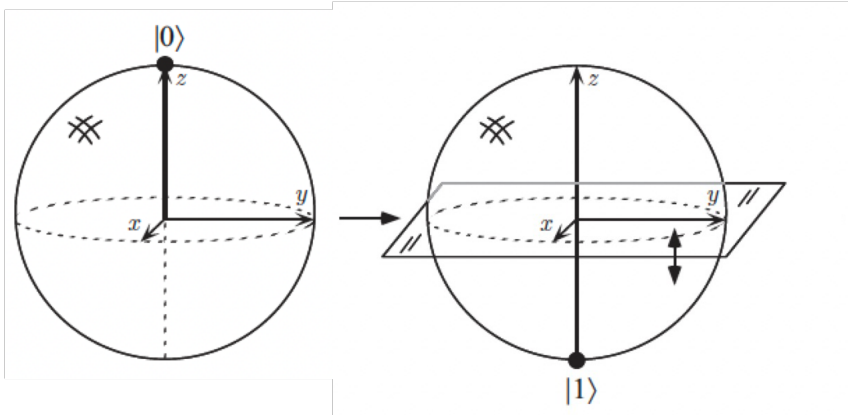
$$X^\dagger X = XX^\dagger = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = I$$

证毕!

- 很明显, 这是比特反转

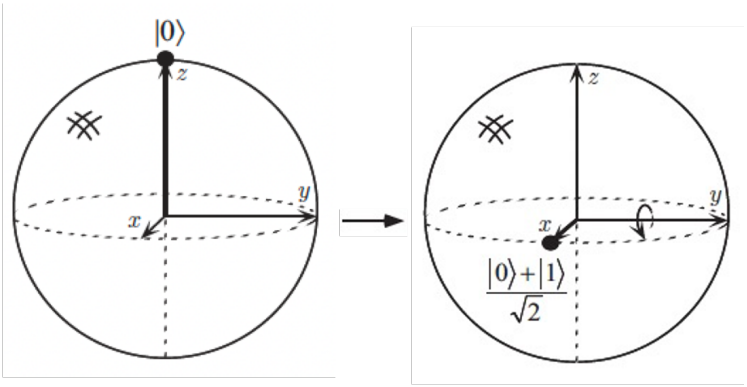
$$X|0\rangle = |1\rangle, \qquad X|1\rangle = |0\rangle$$

比特反转的物理图像



基矢变换: $|0\rangle \to |+\rangle = \dfrac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}, \qquad |1\rangle \to |-\rangle = \dfrac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$

物理图像: 把 z 方向的基矢变换成 x 方向的基矢



例-4. 试证明如下矩阵就是基矢变换门:

$$H \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(X+Z) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

证明: (1) 基矢变换

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} = |+\rangle$$

同理 $$H|1\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} = |-\rangle$$

(2) 幺正性

$$H^\dagger H = HH^\dagger = I$$

证毕!

$$H|0\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$H|1\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

- 统一表示为: (x,z 分别取 0 或 1)

$$H|x\rangle = \frac{\sum_z (-1)^{xz}|z\rangle}{\sqrt{2}}$$

- 很明显 H 是自共轭矩阵，有：

$$H^\dagger = H \to H^2 = I$$

例-5. 试证明 H 可以完成反向变换：

$$H|+\rangle = |0\rangle, \qquad H|-\rangle = |1\rangle$$

证明：

$$\begin{aligned} H|0\rangle &= |+\rangle, & H|0\rangle &= |-\rangle \\ HH|0\rangle &= H|+\rangle, & HH|0\rangle &= H|-\rangle \\ |0\rangle &= H|+\rangle, & |0\rangle &= H|-\rangle \end{aligned}$$

证毕！

相位反转: $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad \rightarrow \quad \alpha|0\rangle - \beta|1\rangle$

例-3. 试证明 σ_z 矩阵就是相位反转门:

$$Z \equiv \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -i|0\rangle\langle 1| + i|1\rangle\langle 0|$$

证明: (1) 相位反转

$$Z \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ -\beta \end{bmatrix}$$

(2) 幺正性

$$Z^\dagger Z = Z Z^\dagger = I$$

证毕! ● 很明显 $Z|0\rangle = |0\rangle, \quad Z|1\rangle = -|1\rangle = e^{i\pi}|1\rangle$

既然态矢都在 Block 球面，相位反转 (Z-Gate) 就是绕 Z 轴旋转 180 度 (π) (为什么?)

- 绕 Z 轴旋转 90 度 ($\frac{\pi}{2}$) 的门是 S-Gate.

$$Z|1\rangle = e^{i\pi}|1\rangle$$

$$S|1\rangle = e^{i\pi/2}|1\rangle$$

解得:

$$S \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\pi}{2}} \end{bmatrix}$$

由于 $i = \sqrt{-1}$, 也称 S-Gate 为 $\sqrt{Z}$-Gate

- 绕 Z 轴旋转 45 度的门为 T-Gate，也称 $\pi/8$-Gate

$$T \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\pi}{4}} \end{bmatrix} = e^{\frac{i\pi}{8}} \begin{bmatrix} e^{\frac{-i\pi}{8}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\pi}{8}} \end{bmatrix}$$

- 绕 Z 轴旋转任意角度 (φ) 的门为旋转门 $R_z(\varphi)$-Gate

$$R_z(\varphi) \equiv \begin{bmatrix} e^{-i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi/2} \end{bmatrix}$$

- 不失一般性，存在各方向的旋转门

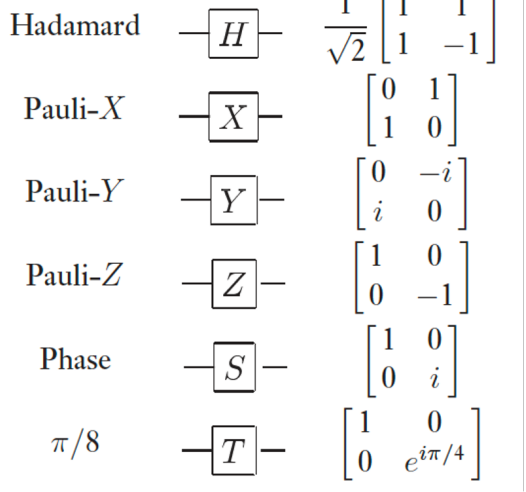
$$R_z(\theta) \equiv e^{-i\theta Z/2}$$

$$R_y(\theta) \equiv e^{-i\theta Y/2}$$

$$R_x(\theta) \equiv e^{-i\theta X/2}$$

$$R_{\hat{n}}(\theta) \equiv e^{-i\theta \hat{n}\cdot\sigma/2}$$

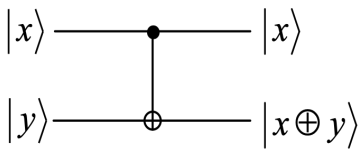
小结：常用单比特量子门



它们都是幺正 (U) 门

1. 控制非门 (Controlled-Not-Gate)

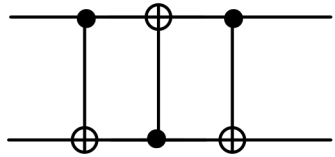
$$C-NOT \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



输入	输出
$\|x\rangle\|y\rangle$	$\|x\rangle\|x \oplus y\rangle$
$\|00\rangle$	$\|00\rangle$
$\|01\rangle$	$\|01\rangle$
$\|10\rangle$	$\|11\rangle$
$\|11\rangle$	$\|10\rangle$

- 控制位 (x) 置位时，对目标位 (y) 做非操作

2. 交换门 (Switch-Gate)



输入$|a,b\rangle$ $\rightarrow$ 输出$|b,a\rangle$

证明:

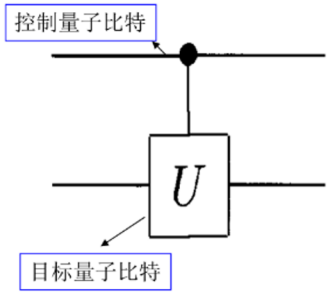
$$|a\rangle|b\rangle \rightarrow |a\rangle|a\oplus b\rangle$$

$$|a\rangle|a\oplus b\rangle \rightarrow |a\oplus(a\oplus b))|a\oplus b\rangle = |b\rangle|a\oplus b\rangle$$

$$|b\rangle|a\oplus b\rangle \rightarrow |b\rangle|b\oplus(a\oplus b\rangle = |b\rangle|a\rangle$$

证毕!

3. 控制 U 门 $(U_0:I, U_1:X, U_2:Y, U_3:Z, \cdots)$



功能：U 是单量子比特的任意酉算子。如果控制位置位，则 U 作用到目标位上，否则目标位不变。

$$|c\rangle|t\rangle \to |c\rangle U^c|t\rangle$$

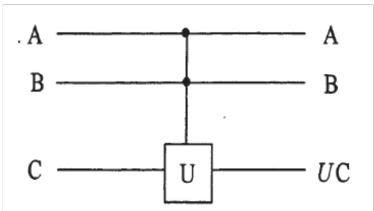
显然，当 U=X 时，就是控制非门 (CNOT)

- 通过设计一系列的控制 U 门，我们可以控制系统的初态向目标态的演化!

依据：量子力学的演化假设，薛定谔方程与酉变换等价，有：

$$|\text{末态}\rangle = \prod_i U_i |\text{初态}\rangle$$

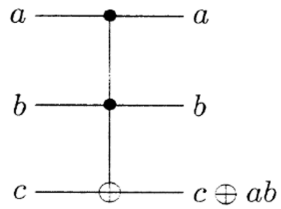
4. 双控制位的控制 U 门 $(C^2(U))$



功能：只有当两个控制位都置位时，U 才作用到目标位上，否则目标位不变。

显然，当 U=X 时，就是控制非门 (CNOT)

例. 下面的 Toffoli 门，就是双控制位的控制非 (X) 门

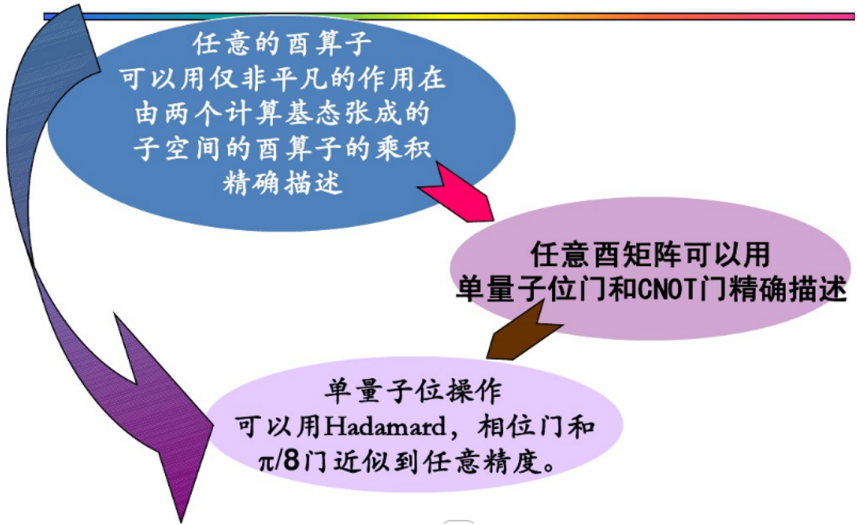


Inputs			Outputs		
a	b	c	a'	b'	c'
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	0

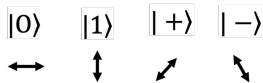
深刻意义

Toffoli 门是可逆门，是实现普适计算的基础。可以证明：经典条件下一位两位可逆门不足以实现 Toffoli 门。而量子条件下由 H，CNOT，S 和 T 门可以任意精度地近似任意酉操作。也就是说，只有在量子条件下，才可以实现普适的可逆计算！

构建普适门


任意的酉算子
可以用仅非平凡的作用在
由两个计算基态张成的
子空间的酉算子的乘积
精确描述
任意酉矩阵可以用
单量子位门和CNOT门精确描述
单量子位操作
可以用Hadamard，相位门和
π/8门近似到任意精度。

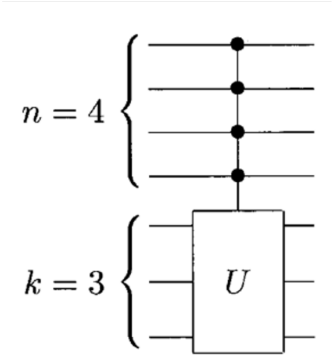
设光子偏振态与计算基矢态有如下关系：



试设计普适计算所必须的 H，CNOT，S 和 T 门

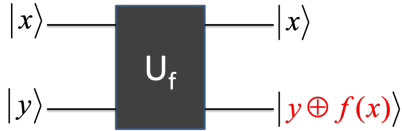
讨论专题

5. 多控制位多目标位的控制 U 门 $(C^n(U_k))$



功能：只有当所有控制位都置位时，U 才作用到目标位上，否则目标位不变。

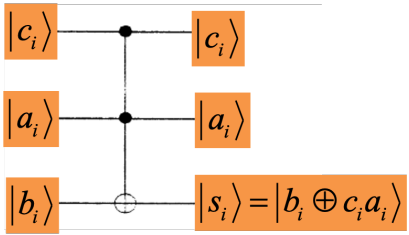
6. 经典函数的量子门阵列实现



- 任意经典函数都可以转化成二进位形式下的一系列逻辑运算，这些逻辑运算由量子门阵列 U_f 实现
- 输入位 $|x\rangle$, 经 U_f 运算后，得到函数值 $f(x)$
- $f(x)$ 要么是 0 要么是 1，只有当 $f(x)=1$ 时，才对目标位 (y) 做非操作，否则目标位不变。

$$U_f|x,y\rangle \qquad \rightarrow \qquad |x, y \oplus f(x)\rangle$$

这是一个量子加法器



$$|a, b\rangle \quad \rightarrow \quad |a, a+b\rangle$$

试给出真值表

Thanks for your attention!

A & Q