工程数学

Engineering Mathematics

李小飞

光电科学与工程学院

1. 量子无限深势阱
   - 薛定谔方程基础
   - 薛定谔方程分离变量
   - 无限深势求解

2. 量子谐振子与厄密方程
   - 相互作用势
   - 量子谐振子方程
   - 厄密方程

3. 厄密多项式及性质
   - 生成函数
   - 性质
   - 归一化系数

第三章 薛定谔方程（I）（6 学时）

1. 量子无限深势阱
   - 薛定谔方程基础
   - 薛定谔方程分离变量
   - 无限深势求解
2. 量子谐振子与厄密方程
   - 相互作用势
   - 量子谐振子方程
   - 厄密方程
3. 厄密多项式及性质
   - 生成函数
   - 性质
   - 归一化系数

量子力学有关波函数的基本结论

- 波函数 Ψ 完全描述体系的状态，
- 波函数的模方与粒子出现的概率成比例，$\omega \sim |\Psi|^2$
- 波函数的演化服从薛定谔方程：$\hat{E}\Psi = \hat{H}\Psi$

薛定谔方程是量子力学基本方程，与牛顿力学的牛顿第二定理地位相当

方程的建立

建立薛定谔方程的可能方法:

- **观点** 1：最小作用量原理 $\int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = 0$
- **观点** 2：波动性和粒子性的结合
- **观点** 3：基本假设，不能从其他原理推导

含时薛定谔方程

标准形式:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{r},t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V(\vec{r}t)\right]\Psi(\vec{r},t)$$

若取 $i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \hat{E} \quad , \quad -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V(\vec{r},t) \quad \rightarrow \quad \hat{H}$

算符形式:

$$\hat{E}\ \Psi(\vec{r},t) = \hat{H}\ \Psi(\vec{r},t)$$

薛定谔方程 $\hat{E}\Psi = \hat{H}\Psi$ 为什么难求解?

多粒子体系的波函数:

$$\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n, t)$$

多粒子体系的哈密顿量:

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^{n} -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla_i^2 + \sum_{i=1}^{n} V(\vec{r}_i, t) + \sum_{i,j=1,i\neq j}^{n} U(\vec{r}_i, \vec{r}_j)$$

有可能分离变量法吗? 条件呢?

分离变量-> 定态薛定谔方程

势函数 $V(\vec{r},t)$ 若不显含时间 t，时间变量可分离

方程：$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{r},t)=\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2+V(\vec{r})\right]\Psi(\vec{r},t)$$

解: 设 $\Psi(\vec{r},t)=\Psi(\vec{r})f(t)$，代回方程

$$i\hbar\Psi(\vec{r})\frac{\partial}{\partial t}f(t)=f(t)\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2+V(\vec{r})\right]\Psi(\vec{r})$$

$$i\hbar\frac{1}{f(t)}\frac{\partial}{\partial t}f(t)=\frac{1}{\Psi(\vec{r})}\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2+V(\vec{r})\right]\Psi(\vec{r})=E$$

得两个微分方程：

I、演化方程 $i\hbar \dfrac{1}{f(t)} \dfrac{\partial}{\partial t} f(t) = E$

解方程，得：$f(t) = e^{-iEt/\hbar}$

II、定态薛定谔方程 $\left[-\dfrac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V(\vec{r})\right]\Psi(\vec{r}) = E\Psi(\vec{r})$

算符形式：$\hat{H}\Psi(\vec{r}) = E\Psi(\vec{r})$

哈密顿量决定定态薛定谔方程求解的难度！

分离变量-> 单粒子定态薛定谔方程

多粒子体系的定态薛定谔方程形式:

$$\left[\sum_{i=1}^{n}\hat{H}_i+\sum_{i,j=1,i\neq j}^{n}U(\vec{r}_i,\vec{r}_j)\right]\Psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2,...,\vec{r}_n)=E\Psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2,...,\vec{r}_n)$$

解: 对于无相互作用体系, 有 $U(\vec{r}_i,\vec{r}_j)=0$,

$$\hat{H}=\sum_{i=1}^{n}-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla_i^2+\sum_{i=1}^{n}V(\vec{r}_i)=\sum_{i=1}^{n}\hat{H}_i$$

方程可分离变量, 设:

$$\begin{cases}\Psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2,...,\vec{r}_n)=\Psi(\vec{r}_1)\Psi(\vec{r}_2)...\Psi(\vec{r}_n)\\ E=E_1+E_2+...+E_n\end{cases}$$

代回方程,

得单粒子体系的定态薛定谔方程组

$$\begin{cases} \hat{H}_1 \Psi(\vec{r}_1) = E_1 \Psi(\vec{r}_1) \\ \hat{H}_2 \Psi(\vec{r}_2) = E_2 \Psi(\vec{r}_2) \\ \dots \\ \hat{H}_n \Psi(\vec{r}_n) = E_n \Psi(\vec{r}_n) \end{cases}$$

分离变量-> 单分量定态薛定谔方程

单粒子体系的定态薛定谔方程形式:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V(x,y,z)\right]\Psi(x,y,z) = E\Psi(x,y,z)$$

解: 如果势函数 $V(x,y,z) = V_1(x) + V_2(y) + V_3(z)$，则 $\hat{H} = \hat{H}(x) + \hat{H}(y) + \hat{H}(z)$，方程可分离变量:

设 $\Psi(x,y,z) = \Psi_1(x)\Psi_2(y)\Psi_3(z)$, $E = E_x + E_y + E_z$,

代回方程, 得方程组（见讲义）

$$\begin{cases} \hat{H}(x)\Psi_1(x) = E_x\Psi_1(x) \\ \hat{H}(y)\Psi_2(y) = E_y\Psi_2(y) \\ \hat{H}(z)\Psi_3(z) = E_z\Psi_3(z) \end{cases}$$

单粒子体系的定态薛定谔方程形式:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V(r,\theta,\varphi)\right]\Psi(r,\theta,\varphi) = E\Psi(r,\theta,\varphi)$$

解: 如果势函数 $V(r,\theta,\varphi) = V_1(r) + V_2(\theta) + V_3(\varphi)$，则 $\hat{H} = \hat{H}(r) + \hat{H}(\theta) + \hat{H}(\varphi)$，方程可分离变量:
得方程组:

$$\begin{cases} \hat{H}(r)\Psi_1(r) = E_r\Psi_1(r) \\ \hat{H}(\theta)\Psi_2(\theta) = E_\theta\Psi_2(\theta) \\ \hat{H}(\varphi)\Psi_3(\varphi) = E_\varphi\Psi_3(\varphi) \end{cases}$$

例 1、一维无限深势阱 I

一粒子处于如下一维无限深势阱，求解含时薛定谔方程

$$V(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < a \\ +\infty & x < 0, x > a \end{cases}$$

解: 势函数不显含时间 t，含时薛定谔方程可分离变量，时间演化方程已求得（见前），现求定态薛定谔方程:

$$\begin{cases} \left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + 0\right]\Psi(x) = E\Psi(x) \quad 0 < x < a, & (1) \\ \left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \infty\right]\Psi(x) = E\Psi(x) \quad x < 0,\ x > a & (2) \end{cases}$$

方程（2）：解为 $\Psi(x)=0$ ……

方程（1）：令 $k^2=\dfrac{2\mu E}{\hbar^2}$，方程是如下边值问题:

$$\begin{cases}\Psi''(x)+k^2\Psi(x)=0\\ \Psi(0)=0\ ,\quad \Psi(a)=0\end{cases}$$

特征方程有两虚根，通解为:

$$\Psi(x)=A\cos(kx)+B\sin(kx)$$

取 $x=0, x=a$, 代入上式，由零边值条件得:

$$A=0,\qquad \sin ka=0$$

有：$ka=n\pi\rightarrow k=\dfrac{n\pi}{a}=\sqrt{\dfrac{2\mu E}{\hbar^2}}$

固有值（能级）： $E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2\mu a^2}(n = 1, 2, 3, ...)$

能级间隔： $\triangle E = E_{n+1} - E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2\mu a^2}(2n + 1)$

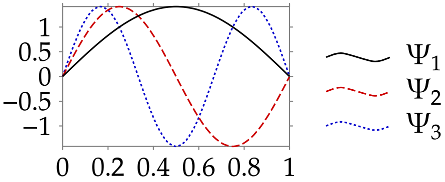
固有函数： $\Psi_n(x) = B_n \sin(\frac{n\pi}{a}x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin(\frac{n\pi}{a}x)$

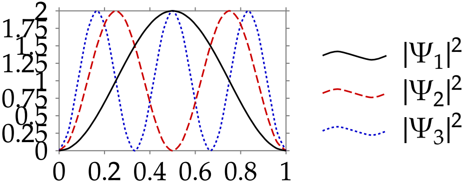
归一化： $\int_0^a \Psi_n^*(x)\Psi_n(x)dx = \int_0^a |B_n|^2 \sin^2(\frac{n\pi}{a}x)dx = 1$

系数： $B_n = \sqrt{\frac{2}{a}}$

解（波函数）：

$$\Psi_n(x,t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin(\frac{n\pi}{a}x)e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t} & 0 < x < a \\ 0 & x < 0, x > a \end{cases}$$


1
0.5
0
−0.5
−1
0 0.2 0.4 0.6 0.8 1
Ψ_1
Ψ_2
Ψ_3


2
1.75
1.5
1.25
1
0.75
0.5
0.25
0
0 0.2 0.4 0.6 0.8 1
$|\Psi_1|^2$
$|\Psi_2|^2$
$|\Psi_3|^2$

例 2、无限深势阱 II

设有一粒子处于如下一维无限深势阱中，求解薛定谔方程

$$V(x) = \begin{cases} 0 & |x| < \dfrac{a}{2} \\ +\infty & |x| > \dfrac{a}{2} \end{cases}$$

解: 势函数与上例存在平移关系，令 $x' = x + a/2$

有： $\sin(\dfrac{n\pi}{a}x') = \sin(\dfrac{n\pi}{a}(x + a/2))$

$$= \sin\frac{n\pi}{a}x\cos\frac{n\pi}{2} + \cos\frac{n\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{2}$$

n 为偶数： $E_{2m} = \dfrac{2m^2\pi^2\hbar^2}{\mu a^2}$

$$\Psi_{2m}(x) = B_{2m}\sin(\frac{2m\pi}{a}x),$$

n 为奇数：$E_{2m+1} = \frac{(2m+1)^2\pi^2\hbar^2}{2\mu a^2}$

$$\Psi_{2m+1}(x) = B_{2m+1}\cos(\frac{(2m+1)\pi}{a}x),$$

归一化，求系数...

如果把势阱宽改为 2a, 直接求解，可得：

固有值（能级）： $E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{8\mu a^2}(n = 1, 2, 3, ...)$

固有函数：$\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin(\frac{n\pi}{a}(x+a))$

比较两种解之间的关系！明确势阱平移与伸缩后解的写法。

例 3、无限深势阱 III

求解一维无限深势阱的非定常问题

$$\begin{cases} i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}\Psi = -\dfrac{\hbar^2}{2\mu}\dfrac{\partial^2\Psi}{\partial^2 x^2}, \quad (0 < x < L, t > 0) \\ \Psi(0,t) = 0, \quad \Psi(L,t) = 0 \\ \Psi(x,0) = f(x) \end{cases}$$

解: 令 $\Psi(x,t) = \Psi(x)T(t)$,代回方程,得:

$$\begin{cases} \Psi''(x) + k^2\Psi(x) = 0 \\ \Psi(0) = 0\ , \quad \Psi(L) = 0 \end{cases}$$

固有值: $E_n = \dfrac{n^2\pi^2\hbar^2}{2\mu L^2}(n = 1,2,3,\ldots)$

固有函数: $\Psi_n(x) = \sin(\dfrac{n\pi}{L}x)$

时间函数：$T_n(t) = \exp(-iE_n t/\hbar)$

级数解为：$\Psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \exp(-iE_n t/\hbar) \sin(\frac{n\pi}{L}x)$

取 t=0, 代入初值条件，得：$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(\frac{n\pi}{L}x)$

得系数：$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L \sin(\frac{n\pi}{L}x)dx, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$

作业

1、求定态薛定谔方程

$$\begin{cases} \Psi''(x) + \dfrac{2\mu E}{\hbar^2}\Psi(x) = 0, & |x| < a/2 \\ \Psi(-a/2) = \Psi(a/2) = 0 \end{cases}$$

2、求解非定常问题

$$\begin{cases} i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}\Psi = -\dfrac{\hbar^2}{2\mu}\dfrac{\partial^2\Psi}{\partial^2 x^2}, & (0 < x < L, t > 0) \\ \Psi(0,t) = 0, \quad \Psi(L,t) = 0 \\ \Psi(x,0) = f(x) \end{cases}$$

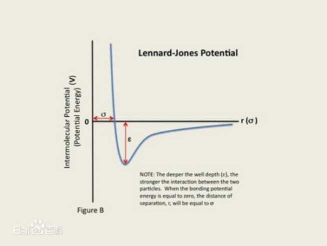
3、求三维无限势阱问题

$$V(x,y,z) = \begin{cases} 0 \quad , & 0 < x,y,z < a \\ +\infty, & others \end{cases}$$

相互作用势

例 1、相互作用势的二阶近似

半经验 Lennard-Jones 势（如图所示）



实际的相互作用势 V(x) 较 L-J 势更复杂，试求其在平衡位置附近的二阶近似

解: 不管多复杂，在平衡位置（$x=a$）附近可泰勒展开

$$V(x)=V(a)+\frac{1}{1!}\frac{\partial V}{\partial x}|_{x=a}(x-a)+\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}|_{x=a}(x-a)^2+\ldots$$

一阶导应为零，二阶近似可写为

$$\begin{aligned}V(x)&\approx V(a)+\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}|_{x=a}(x-a)^2\\&=V_0+\frac{1}{2}k(x-a)^2\end{aligned}$$

取坐标原点为（a,V_0），得:

$$V(x)=\frac{1}{2}kx^2$$

弹性势

弹簧力正是势函数 V(x) 在平衡位置附近的二阶近似

$$F = -\frac{\partial V}{\partial x} = -kx$$

把势函数 V(x) 写成弹性势:

$$V(x) = \frac{1}{2}\mu\omega^2 x^2$$

量子谐振子方程

例 2、求解谐振子薛定谔方程

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t)=[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{x^2}+\frac{1}{2}\mu\omega^2x^2]\Psi(x,t)$$

解: 令 $\Psi(x,t)=\Psi(x)T(t)$，代回方程
时间和位置分离变量:
时间函数：$T(t)=\exp(-iEt/\hbar)$
位置函数满足定态薛定谔方程

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{2}\mu\omega^2x^2\right]\Psi(x)=E\Psi(x)$$

整理:

$$\frac{1}{\frac{\mu\omega}{\hbar}}\frac{\mathrm{d}^2\Psi}{\mathrm{d}x^2}+\left(\frac{2E}{\omega\hbar}-\frac{\mu\omega}{\hbar}x^2\right)\Psi=0$$

令: $\xi=\alpha x$，做自变量伸缩变换

$$\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\xi}\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x}=\alpha\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\xi}$$

$$\frac{\mathrm{d}\Psi^2}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\alpha\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\xi})=\alpha^2\frac{\mathrm{d}^2\Psi}{\mathrm{d}\xi^2}$$

代回方程，得

$$\left[\frac{\hbar^2\alpha^2}{2\mu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi^2}+(E-\frac{\mu\omega^2\xi^2}{2\alpha^2})\right]\Psi(\xi)=0$$

同除二阶导数项系数，得

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi^2}+\frac{2\mu}{\hbar^2\alpha^2}(E-\frac{\mu\omega^2\xi^2}{2\alpha^2})\right]\Psi(\xi)=0$$

令 $\frac{\mu^2\omega^2}{\hbar^2\alpha^4}=1$，得伸缩系数:

$$\alpha^2=\frac{\mu\omega}{\hbar}$$

引入特征值

$$\lambda=\frac{2E}{\omega\hbar}$$

得二阶常微分方程

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2\Psi}{\mathrm{d}\xi^2}+\left(\lambda-\xi^2\right)\right]\Psi=0$$

考虑渐近行为，当 $|x| \to \infty, \xi \to \infty$，有 $\xi^2 \gg \lambda$，方程可近似为

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2} - \xi^2\right)\Psi = 0$$

方程并无表达式解，但通过检验平方指数函数的导数

$$\frac{d^2}{d\xi^2}\exp(\frac{\xi^2}{2}) = (\xi^2 + 1)\exp(\frac{\xi^2}{2})$$
$$\frac{d^2}{d\xi^2}\exp(-\frac{\xi^2}{2}) = (\xi^2 - 1)\exp(-\frac{\xi^2}{2})$$

当 $\xi \to \infty$，这两导数可近似为：

$$(\xi^2)\exp(\frac{\xi^2}{2}) \quad , \quad (\xi^2)\exp(-\frac{\xi^2}{2})$$

因此，极限状态解应与如下函数相关联

$$C_1 \exp(\frac{\xi^2}{2}) + C_2 \exp(-\frac{\xi^2}{2})$$

考虑到波函数的有界性，应删除发散项（第一项），得极限状态波函数的简洁形式

$$\Psi_\infty(\xi) \sim C_2 \exp(-\frac{\xi^2}{2})$$

现考虑非极限状态，解函数可写成：

$$\Psi(\xi) = H(\xi)e^{-\xi^2/2}$$

解函数的确定等价于多项式函数 H 的确定。
对上式求导：

$$\Psi'(\xi) = H'(\xi)e^{-\xi^2/2} - H(\xi)\xi e^{-\xi^2/2}$$

$$\Psi''(\xi) = \left[\left(\xi^2 - 1\right)H - 2\xi H' + H''\right]e^{-\xi^2/2}$$

代回原方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2\Psi}{\mathrm{d}\xi^2} + \left(\lambda - \xi^2\right)\Psi = 0$

得关于多项式 $H(\xi)$ 的方程:

$$H'' - 2\xi H' + (\lambda - 1)H = 0$$

取 $\lambda - 1 = 2n$，方程转化为 n 阶厄密方程

$$H'' - 2\xi H' + 2nH = 0$$

由

$$\lambda = 2n + 1 = \frac{2E}{\hbar\omega}$$

解出能量固有值 (能级)

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

固有函数由 n 阶厄密方程给出......

厄密方程

例 3、求解 n 阶厄密方程

$$H'' - 2\xi H' + 2nH = 0$$

解: 幂级数方法求解，令:

$$H = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \xi^k$$

求一阶导和二阶导，代回厄密方程，可得系数递推式:

$$c_{k+2} = \frac{2(k-n)}{(k+2)(k+1)} c_k, \quad (k = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

分偶数阶和奇数阶写

$$c_{2m} = (-1)^m \frac{2^m n(n-2)(n-4)\ldots(n-2m+2)}{(2m)!} c_0$$

显然有 $c_{2m} = 0$， $(2m > n)$

$$c_k = (-1)^m \frac{2^m n\,!!}{k!} c_0, \quad (2m = k)$$

$$c_{2m+1} = (-1)^m \frac{2^m (n-1)(n-3)(n-5)\ldots(n-2m+1)}{(2m+1)!} c_1$$

显然有 $c_{2m+1} = 0$， $(2m+1 > n)$

$$c_k = (-1)^m \frac{2^m n!!}{k!} c_1, \quad (2m+1 = k)$$

所有系数求得，幂级数得解

$$\begin{cases} y_1(\xi) = [1 - \frac{2n}{2!}\xi^2 + \frac{2^2 n(n-2)}{4!}\xi^4 - \ldots] \\ y_2(\xi) = [\xi - \frac{2(n-1)}{3!}\xi^3 + \frac{2^2(n-1)(n-3)}{5!}\xi^5 - \ldots] \end{cases}$$

n 阶厄密方程的解：

$$H(\xi) = c_0 y_1(\xi) + c_1 y_2(\xi).$$

量子谐振子方程的解：

$$\Psi(\xi) = [c_0 y_1(\xi) + c_1 y_2(\xi)]e^{-\xi^2/2}$$

根据波函数的有界性性质，H 应取多项式（不能为无穷级数）。当 n 为偶数时，$c_1 = 0$，当 n 为奇数时，$c_0 = 0$。待定系数由定解条件给出...

为了更好地描述，将系数递推式降幂排列，现令最高次项系数为：

$$c_n = 2^n$$

系数递推式可写为：

$$c_{k-2} = -\frac{k(k-1)}{2(n-k+2)}c_k$$

$$c_{n-2} = -\frac{n(n-1)}{2\times 2}c_n$$

$$c_{n-4} = (-1)^2\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\times 2\times 4}2^n$$

$$c_{n-2m} = (-1)^m\frac{n!}{2^m(2m)!!(n-2m)!}2^n = (-1)^m\frac{n!}{m!(n-2m)!}2^{n-2m}$$

厄密方程的解为厄米多项式:

$$H(\xi)=\sum_{m=0}^{M}(-1)^m\frac{n!}{m!(n-2m)!}2^{n-2m}\xi^{n-2m},\quad M=[n/2]$$

量子谐振子的解为

$$\Psi_n(\xi)=N_n\exp(-\frac{\xi^2}{2})H(\xi)$$

归一化解:(...)

$$\Psi_n(x)=\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}2^n n!}\right)^{1/2}\exp(-\frac{\alpha^2x^2}{2})H(\alpha x)$$

定态波函数为

$$\Psi_n(x,t)=\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}2^n n!}\right)^{1/2}\exp(-\frac{\alpha^2x^2}{2}-\frac{i}{\hbar}E_nt)H(\alpha x)$$

作业：

1、计算积分

$$\left\{ \int_0^{+\infty} e^{-x^2/2} dx \right.$$

2、　根据厄米多项式表达式，写出前五个厄米多项式，并分析 $H_n'(x)$ 与 $H_{n-1}(x)$　之间的联系

3、求解厄米方程

$$\left\{ \frac{d^2H}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 4nH = 0 \right.$$

4、　列出厄米方程的几种形式，说明厄米方程的特点

1 量子无限深势阱
  - 薛定谔方程基础
  - 薛定谔方程分离变量
  - 无限深势求解

2 量子谐振子与厄密方程
  - 相互作用势
  - 量子谐振子方程
  - 厄密方程

3 厄密多项式及性质
  - 生成函数
  - 性质
  - 归一化系数

生成函数

例 1、求厄密多项式的生成函数

找一个函数，它的展开系数刚好就是 Hermite 多项式

$$w(x,t) = e^{2xt-t^2}$$

试证明，上述二元函数就是 Hermite 多项式的一个母函数

解: 把函数做关于变量 t 的 Taylor 展开:

$$w(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} c_n(x) t^n$$

需证明:

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} - 2x\frac{d}{dx} + 2n\right] c_n(x) = 0$$

证明： 1)、由 $\dfrac{\partial w}{\partial x} = 2te^{2xt-t^2} = 2t\ w(x,t)$, 得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} c\,'_n(x) t^n = 2t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} c_n(x) t^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} 2c_n(x) t^{n+1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} 2nc_{n-1}(x) t^n$$

比较系数，有：

$$c\,'_n(x) = 2nc_{n-1}(x)$$

$$c\,''_n(x) = 2nc\,'_{n-1}(x) = 4n(n-1)c_{n-2}(x)$$

2）由 $\dfrac{\partial w}{\partial t}=2(x-t)e^{2xt-t^2}=2(x-t)\ w(x,t)$，得

$$\frac{\partial w}{\partial t}+2(t-x)\ w(x,t)=0$$

把展开式代入上式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}nc_n(x)t^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}2(t-x)c_n(x)t^n=0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}nc_n(x)t^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-2x}{n!}c_n(x)t^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{n!}c_n(x)t^{n+1}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}c_{n+1}(x)t^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-2x}{n!}c_n(x)t^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n!}c_{n-1}(x)t^n=0$$

比较系数，有：

$$c_{n+1}(x) - 2xc_n(x) + 2nc_{n-1}(x) = 0$$

$$c_n(x) - 2xc_{n-1}(x) + 2(n-1)c_{n-2}(x) = 0$$

3) 把（1）中得到的结论

$$c'_n(x) = 2nc_{n-1}(x)$$

$$c''_n(x) = 4n(n-1)c_{n-2}(x)$$

代入（2）中得到的结论，得：

$$c_n(x) - \frac{x}{n}c'_n(x) + \frac{1}{2n}c''_n(x) = 0$$

整理为：

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} - 2x\frac{d}{dx} + 2n\right]c_n(x) = 0$$

证毕！

即有：$c_n(x) = H_n(x)$

递推公式

既然： $c_n(x) = H_n(x)$

$$c'_n(x) = 2nc_{n-1}(x)$$

$$\rightarrow \quad H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x)$$

$$c_n(x) - 2xc_{n-1}(x) + 2(n-1)c_{n-2}(x) = 0$$

$$\rightarrow \quad H_n(x) - 2xH_{n-1}(x) + 2(n-1)H_{n-2}(x) = 0$$

有： $H_0(x) = 1, H_1(x) = 2x,$

微分形式

$$w(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}c_n(x)t^n,\qquad w(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}H_n(x)t^n$$

由 Taylor 展式，知：

$$\begin{aligned}H_n(x)&=\left[\frac{\partial^n w}{\partial t^n}\right]_{t=0}\\&=e^{x^2}\left[\frac{\partial^n}{\partial t^n}e^{-(x-t)^2}\right]_{t=0}\\&=(-1)^n e^{x^2}\left[\frac{d^n}{d u^n}e^{-u^2}\right]_{u=x}\end{aligned}$$

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{d x^n}e^{-x^2}$$

正交性

例 2、证明厄密多项式正交性

是带权函数（$\rho(x) = exp(-x^2)$）的正交函数系：

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} H_m(\xi) H_n(\xi) d\xi & = & 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} H_n(\xi) H_n(\xi) d\xi & = & 2^n n! \sqrt{\pi} \end{cases}$$

证明: 谐振子方程: $\frac{\mathrm{d}^2\Psi}{\mathrm{d}\xi^2} + \left(\lambda - \xi^2\right)\Psi = 0$

代入 $\lambda = 2n + 1$

$\rightarrow \Psi_n'' + (2n + 1 - \xi^2)\Psi_n = 0$

解为: $u_n(x) = H_n(\xi) e^{-\xi^2/2}$，代回方程，得:

$$u_n'' + (2n+1-\xi^2)u_n = 0\ ,\ \ u_m'' + (2m+1-\xi^2)u_m = 0$$

$$u_m u_n'' + (2n+1-\xi^2)u_m u_n = 0$$
$$u_n u_m'' + (2n+1-\xi^2)u_n u_m = 0$$

$$u_m u_n'' - u_n u_m'' + 2(n-m)u_n u_m = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [u_m u_n'' - u_n u_m'']d\xi$$

$$= [u_m u_n'' - u_n u_m'']\,|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} [u_m' u_n' - u_n' u_m']d\xi = 0$$

因此 $2(n-m)\int_{-\infty}^{+\infty} u_n u_m d\xi = 0$

即： $\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(\xi)H_n(\xi)d\xi = 0$

由递推公式:

$$H_n - 2xH_{n-1} + 2(n-1)H_{n-2} = 0$$
$$=> \quad H_n^2 - 2xH_nH_{n-1} + 2(n-1)H_nH_{n-2} = 0$$

$$H_{n+1} - 2xH_n + 2nH_{n-1} = 0$$
$$=> \quad H_{n+1}H_{n-1} - 2xH_nH_{n-1} + 2nH_{n-1}^2 = 0$$

两次相减

$$H_n^2(\xi) - H_{n+1}H_{n-1} = 2nH_{n-1}^2(\xi) - 2(n-1)H_nH_{n-2}$$

乘以权重函数再积分, 得积分递推式:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2}H_n^2(\xi)d\xi = 2n\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2}H_{n-1}^2(\xi)d\xi$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} H_n^2(\xi) d\xi = 2n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} H_{n-1}^2(\xi) d\xi$$

$$= 2n \times 2(n-1) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} H_{n-2}^2(\xi) d\xi$$

$$= 2n \times 2(n-1) \ldots (2(n-n)) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} H_0^2(\xi) d\xi$$

$$= 2^n n! \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} H_0^2(\xi) d\xi$$

$$= 2^n n! \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi$$

$$= 2^n n! \sqrt{\pi}$$

求归一化系数

固有解为

$$\Psi_n(\xi) = N_n \exp(-\frac{\xi^2}{2})H(\xi)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[N_n \exp(-\frac{\xi^2}{2})H(\xi)]^2 d\xi = N_n^2 2^n n!\sqrt{\pi} = 1$$

$$N_n = \frac{1}{(2^n n!\sqrt{\pi})^{1/2}}$$

归一化固有函数:

$$\Psi_n(x) = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}2^n n!}\right)^{1/2} e^{-a^2x^2} H_n(\alpha x)$$

定态波函数:

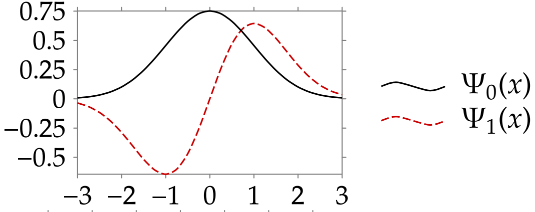
$$\Psi_n(x,t) = \Psi_n(x) e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}$$

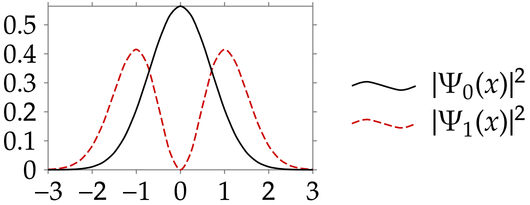
$$= \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}2^n n!}\right)^{1/2} e^{-a^2x^2-\frac{i}{\hbar}E_n t} H_n(\alpha x)$$

叠加解:

$$\Psi(x,t) = \sum a_n \Psi_n(x,t)$$

下图给出了基态和第一激发态函数及概率分布





课堂测试!

课堂测试题 1:

求处于如下势场:

$$V(x) = \frac{1}{2}\mu\omega^2 x^2 + \mu$$

中粒子的能量固有值和定态波函数。

作业

1、将函数 $f(x) = x^3 + 2x^2 + 1$ 按厄米多项式展开

参考答案：$f(x) = \frac{1}{8}H_3 + \frac{1}{2}H_2 + \frac{3}{4}H_1 + 2H_0$

2、写出厄米多项式的递推公式，并求

$H_n(0), H_n'(0), H_n(1), H_n'(1)$

3、求解如下初值问题

$$\begin{cases} i\hbar\dfrac{\partial\Psi}{\partial t} = \left[-\dfrac{\hbar^2}{2\mu}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{1}{2}\mu\omega^2x^2\right]\Psi \\ \Psi(x,0) = \psi(x) \end{cases}$$

作业

4、电荷为 q 的谐振子，受到沿 x 方向的外电场 ξ 的作用时，其势场为：

$$V(x) = \frac{1}{2}\mu\omega^2 x^2 + q\xi x$$

求解其能量固有值和定态波函数。（移轴法）