《工程数学》习题一

1．用分离变量法解常微分方程初值问题$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=ry(1-\dfrac{y}{K}),\ x>0\\ y(0)=y_0\end{cases}$

解：用常微分方程分离变量法

$$\frac{dy}{y(1-y/K)}=rdx$$

由于

$$\frac{1}{y(1-y/K)}=\frac{K}{y(K-y)}=\frac{1}{y}+\frac{1}{K-y}$$

所以由分离变量法等式两端积分得

$$\ln\frac{y}{K-y}=rx+c_0$$

两端取指数函数，

$$\frac{y}{K-y}=\exp(rx+c_0)$$

整理得

$$y(x)=\frac{K}{1+\exp(-rx-c_0)}$$

将初值条件代入，得

$$\exp(-c_0)=\frac{K}{y_0}-1$$

所以

$$y(x)=\frac{K}{1+(K/y_0-1)\exp(-rx)}\text{ 或 }y(x)=\frac{Ky_0}{y_0+(K-y_0)\exp(-rx)}$$

2．求欧拉方程通解：$x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+x\dfrac{dy}{dx}-n^2y=0$

解：做自变量变换，令$x=\exp(t)$，即$t=\ln x$，由于$\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{x}$。应用复合函数求导公式得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt})=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}$$

代入欧拉方程得

$$\frac{d^2y}{dt^2}-n^2y=0$$

应用二阶常微分方程求解公式得

$$y(t)=C_1\exp(nt)+C_2\exp(-nt)$$

将自变量还原得

$$y(x)=C_1x^n+C_2x^{-n}$$

3．求傅里叶级数展开 $f(x)=\begin{cases}\pi+x, & -\pi\le x<0\\ \pi-x, & 0\le x\le\pi\end{cases}$

解：由于是偶函数，展开为余弦级数，设

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\cos kx$$

由正交性得

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)dx=\frac{1}{2\pi}[-(\pi-x)^2]\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)\cos kxdx$$

$$=\frac{2}{\pi}[(\pi-x)\frac{1}{k}\sin kx]\Big|_0^{\pi}+\frac{2}{k\pi}\int_0^{\pi}\sin kxdx$$

$$=\frac{2}{\pi k^2}[-\cos kx]\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{k^2\pi}[1-\cos k\pi]=\frac{2}{\pi k^2}[1-(-1)^k]$$

有奇数项系数非零

$$a_{2m-1}=\frac{4}{\pi}\frac{1}{(2m-1)^2}，(m=1,2,\cdots)$$

所以

$$f(x)=\frac{\pi}{2}+\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^2}\cos(2m-1)x$$

求满足下列方程的二元函数：$u(x,y)$

4．（1）．$\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$；　　（2）．$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$；　　（3）．$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$.

解：(1)将方程两端对变量 x 积分，得 $u(x,y)=g(y)$，这里 $g(x)$是任意函数；

(2)将方程两端先对变量 y 积分，得 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=f_1(x)$；再将两端对 x 积分得

$$u(x,y)=\int f_1(x)dx+g(y)$$

记 $f(x)=\int f_1(x)dx$，得 $u(x,y)=f(x)+g(y)$；

(3)将方程两端先对变量 y 积分，得一阶方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}+u=f(x)$$

参考一阶常微分方程求解公式，得

$$u(x,y)=\exp(-x)[\int\exp(x)f(x)+g(y)]$$

《工程数学》习题二

1. 求解固有值问题 $\begin{cases}X''(x)+\lambda X=0, & 0<x<l\\ X'(0)=0, X(l)=0\end{cases}$

解：显然固有值 $\lambda\ge0$，方程有通解

$$X(x)=A\cos\sqrt{\lambda}x+B\sin\sqrt{\lambda}x$$

利用边界条件得

$$B=0，\quad A\cos\sqrt{\lambda}l+B\sin\sqrt{\lambda}l=0$$

联立得线性方程组

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ \cos\sqrt{\lambda}l & \sin\sqrt{\lambda}l\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A\\ B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

方程组有非零解条件为系数矩阵行列式为零，即

$$\cos\sqrt{\lambda}l=0$$

由余弦函数零点得：

$$\sqrt{\lambda}l=\frac{2n+1}{2}\pi$$

所以固有值和固有函数分别为

$$\lambda_n=[\frac{(2n+1)\pi}{2l}]^2，\quad X_n=\cos\frac{(2n+1)\pi}{2l}x$$

2．求波动方程解$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx},(0<x<l,t>0)\\ u\big|_{x=0}=u_x\big|_{x=l}=0,\\ u\big|_{t=0}=3\sin3\pi x/2l+6\sin5\pi x/2l,\\ u_t\big|_{t=0}=0\end{cases}$

解：对应的固有值和固有函数分别为

$$\lambda_n=[\frac{(2n+1)\pi}{2l}]^2，\quad X_n=\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x,\ (n=1,2,\cdots)$$

波动方程通解为

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos\frac{(2n+1)\pi a}{2l}t+b_n\sin\frac{(2n+1)\pi a}{2l}t]\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x$$

将初值条件代入得

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x=3\sin\frac{3\pi}{2l}x+6\sin\frac{5\pi}{2l}x，$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)\pi a}{2l}b_n\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x=0$$

对比级数两端，待定系数法得

$$a_1=3,\ a_2=6，\quad a_n=0,\ (n\neq1,n\neq2)，\quad b_n=0,\ (n=1,2,\cdots)$$

所以

$$u(x,t)=3\sin\frac{3\pi}{2l}at\cdot\sin\frac{3\pi}{2l}x+6\sin\frac{5\pi}{2l}at\cdot\sin\frac{5\pi}{2l}x$$

3．求解热传导方程$\begin{cases}u_t=a^2u_{xx},\ (t>0,\ 0<x<l)\\ u(0,t)=0,u(l,t)=0\\ u(x,0)=x(l-x)\end{cases}$

解：对应的固有值和固有函数分别为

$$\lambda_n=(\frac{n\pi}{l})^2，\quad X_n=\sin\frac{n\pi}{l}x,\ (n=1,2,\cdots)$$

热传导方程通解为

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\exp[-(\frac{n\pi}{l}a)^2t]\sin\frac{n\pi}{l}x$$

将初值条件代入得

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi}{l} x = x(l-x)$$

利用固有函数正交性得

$$B_n = \frac{2}{l}\int_0^l x(l-x)\sin\frac{n\pi}{l} x dx$$

应用分部积分法，令

$$u = x(l-x)\text{，}\quad v'' = \sin\frac{n\pi}{l} x$$

于是有

$$u'' = -2\text{，}\quad v = -(\frac{l}{n\pi})^2 \sin\frac{n\pi}{l} x$$

则积分

$$\int_0^l x(l-x)\sin\frac{n\pi}{l} x dx = \int_0^l uv'' dx = [uv' - u'v]\Big|_0^l + \int_0^l u'' v dx$$

所以

$$B_n = \frac{4}{l}(\frac{l}{n\pi})^2 \int_0^l \sin\frac{n\pi}{l} x dx = \frac{4}{l}(\frac{l}{n\pi})^3 [1-\cos n\pi]$$

故热传导方程解为

$$u(x,t) = \frac{8l^2}{\pi^3}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^3}\exp(\frac{(2m-1)^2\pi^2 a^2}{l^2} t)\sin\frac{(2m-1))\pi}{l} x$$

4．求定解问题 $\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x, y < 1 \\ u(0,y) = 0, u(1,y) = \sin 2\pi y \\ u(x,0) = 0, \ u(x,1) = 0 \end{cases}$

解：用分离变量法，令 $u(x,y) = X(x)Y(y)$ 代入方程，整理得

$$\frac{Y''}{Y} = -\frac{X''}{X} = -\lambda$$

导出常微分方程

$$Y'' + \lambda Y = 0\text{，}\quad X'' - \lambda X = 0$$

利用 Y 方向的齐次边界条件构造固有值问题

$$\begin{cases} Y'' + \lambda Y = 0 \\ Y(0) = Y(1) = 0 \end{cases}$$

固有值和固有函数分别为

$$\lambda_n = (n\pi)^2\text{，}\quad Y_n = \sin n\pi y, \ (n = 1, 2, \cdots)$$

将特征值代入 x 方向常微分方程得

$$X'' - (n\pi)^2 X = 0$$

通解为

$$X_n = a_n \sinh(n\pi x) + b_n \cosh(n\pi x)$$

将拉普拉斯方程基本解

$$u_n(x,y) = [a_n \sinh(n\pi x) + b_n \cosh(n\pi x)]\sin n\pi y$$

叠加，得拉普拉斯方程通解

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \sinh(n\pi x) + b_n \cosh(n\pi x)]\sin n\pi y$$

应用 X 方向的边界条件之一，

$$u(0,y)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi y=0$$

知 $b_n=0,\ (n=1,2,\cdots)$ 。再应用 X 方向另一边界条件

$$u(1y)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sinh(n\pi)\sin n\pi y=\sin\pi y$$

确定系数

$$a_2=\frac{1}{\sinh 2\pi},a_n=0,\ (n\neq 2)$$

故原方程解

$$u(x,y)=\frac{\sinh(2\pi x)}{\sinh 2\pi}\sin 2\pi y$$

《工程数学》习题三

1．已知$\Phi(\theta)=A\cos\sqrt{\lambda}\theta+B\sin\sqrt{\lambda}\theta$满足条件：$\Phi(2\pi)=\Phi(0)$，$\Phi'(2\pi)=\Phi'(0)$，并要求 A 和 B 不全为零。求证：$\sqrt{\lambda}=n$，（ $n=$ 1，2，…… ）。

证：将条件$\Phi(2\pi)=\Phi(0)$， $\Phi'(2\pi)=\Phi'(0)$代入表达式

$$\Phi(\theta)=A\cos\sqrt{\lambda}\theta+B\sin\sqrt{\lambda}\theta$$

得

$$A=A\cos\sqrt{\lambda}2\pi+B\sin\sqrt{\lambda}2\pi\text{，}\quad B=-A\sin\sqrt{\lambda}2\pi+B\cos\sqrt{\lambda}2\pi$$

联立得线性方程组

$$\begin{bmatrix}\cos 2\pi\sqrt{\lambda}-1 & \sin 2\pi\sqrt{\lambda}\\ -\sin 2\pi\sqrt{\lambda} & \cos 2\pi\sqrt{\lambda}-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A\\ B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

方程组有非零解的条件为系数矩阵行列式为零，即

$$[\cos 2\pi\sqrt{\lambda}-1]^2+\sin^2 2\pi\sqrt{\lambda}=0$$

整理得

$$\cos 2\pi\sqrt{\lambda}=1$$

利用余弦函数的最大值点得

$$2\pi\sqrt{\lambda}=2n\pi$$

所以

$$\lambda_n=n^2\text{，}\ \Phi_n(\theta)=A\cos n\theta+B\sin n\theta\text{，（}A^2+B^2\neq 0\text{）}$$

2．求解常微分方程： $r^2\dfrac{d^2R}{dr^2}+r\dfrac{dR}{dr}-n^2R=0$

解：做自变量变换，令$r=\exp(t)$，即$t=\ln r$，代入方程化简得

$$\frac{d^2R}{dt^2}-n^2R=0$$

求解得

$$R=C_1\exp(nt)+C_2\exp(-nt)$$

将$r=\exp(t)$代入得

$$R=C_1r^n+C_2r^{-n}$$

3. 求定解问题$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0, & (0<r<r_0) \\ u|_{r=r0}=A\sin 2\theta \end{cases}$

解：利用圆域内拉普拉斯方程求解公式

$$u(r,\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}r^n[a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta]$$

将边界条件代入得

$$u(r_0,\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta]r_0^n=A\sin 2\theta$$

对比两端系数得

$$b_2 r_0^2=A,\ b_n=0,(n\neq 2)，\ a_n=0,\ (n=1,2,\cdots)$$

故原拉普拉斯方程解

$$u(r,\theta)=\frac{A}{r_0^2}r^2\sin 2\theta$$

4. 求定解问题$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0, & (0<r<1) \\ u|_{r=1}=\cos 2\theta \end{cases}$

解：利用圆域内拉普拉斯方程求解公式

$$u(r,\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}r^n[a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta]$$

将边界条件代入得

$$u(1,\theta)\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta]=\cos 2\theta$$

对比两端系数得

$$a_2=1\ \ a_n=0,(n\neq 2)，\ b_n=0,\ (n=1,2,\cdots)$$

故原拉普拉斯方程解

$$u(r,\theta)=r^2\cos 2\theta$$

《工程数学》习题四

1．求定态薛定谔方程波函数

$$\begin{cases}\psi''(x)+\dfrac{2\mu E}{\hbar^2}\psi(x)=0, & x\in(0,\ L) \\ \psi(0)=0,\ \psi(L)=0\end{cases}$$

解：令$\lambda=\dfrac{2\mu E}{\hbar^2}$，则定态薛定谔方程为，$\psi''+\lambda\psi=0$，结合齐次边界条件，得固有值和固有函数

$$\lambda_n=(\frac{n\pi}{L})^2，\ \psi_n(x)=B_n\sin\frac{n\pi}{L}x$$

由等式，$\lambda_n=\frac{2\mu E_n}{\hbar^2}$ 解得 $E_n=\frac{\hbar^2}{2\mu}\lambda_n=\frac{\hbar^2}{2\mu}(\frac{n\pi}{L})^2$。由规一化条件

$$\int_0^L B_n^2\sin^2\frac{n\pi}{L}xdx=B_n^2\frac{L}{2}=1$$

得规一化系数，$B_n=\sqrt{\frac{2}{L}}$。所以波函数

$$\psi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{n\pi}{L}x$$

2．求定态薛定谔方程波函数

$$\begin{cases}\psi''(x)+\frac{2\mu E}{\hbar^2}\psi(x)=0,\ x\in(-L/2,\ L/2)\\ \psi(-L/2)=0,\ \psi(L/2)=0\end{cases}$$

解法 1：利用习题 1 结论，做自变量平移变换: $x=z+L/2$。代入波函数得

$$\psi_n=\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{n\pi}{L}(z+L/2)$$

应用正弦函数和角公式，得

$$\psi_n(z)=\sqrt{\frac{2}{L}}[\sin\frac{n\pi}{L}z\cos\frac{n\pi}{2}+\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi}{L}z]$$

n 为偶数时，有 $\sin\frac{n\pi}{2}=0$，此时，$\psi_n(z)=\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{n\pi}{L}z$；

n 为奇数时，有 $\cos\frac{n\pi}{2}=0$，此时，$\psi_n(z)=\sqrt{\frac{2}{L}}\cos\frac{n\pi}{L}x$。

解法 2：令 $\lambda=\frac{2\mu E}{\hbar^2}$， 方程有通解

$$\psi(x)=A\cos\sqrt{\lambda}x+B\sin\sqrt{\lambda}x$$

应用边界条件得齐次线性代数方程

$$\begin{bmatrix}\cos\sqrt{\lambda}L/2 & -\sin\sqrt{\lambda}L/2\\ \cos\sqrt{\lambda}L/2 & \sin\sqrt{\lambda}L/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A\\ B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

为了使得 A 和 B 不全为零，取系数矩阵行列式为零，即

$$2\cos\frac{\sqrt{\lambda}L}{2}\sin\frac{\sqrt{\lambda}L}{2}=0$$

由余弦函数零点，得

$$\frac{\sqrt{\lambda}L}{2}=\frac{2n+1}{2}\pi,\quad \lambda_n=(\frac{2n+1}{L}\pi)^2$$

由正弦函数零点，得

$$\frac{\sqrt{\lambda}L}{2}=n\pi,\quad \lambda_n=(\frac{2n}{L}\pi)^2$$

第一种情况代入线性代数方程，得 B=0，A 为任意非零数；第二种情况代入线性代数方程得 A=0，B 为任意非零数。再由规一化条件得两种情况下波函数分别为

$$\psi_{2n+1}(z)=\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{(2n+1)\pi}{L}x,\ \psi_{2n}(z)=\sqrt{\frac{2}{L}}\cos\frac{2n\pi}{L}x$$

调整指标，对应的固有值分别为

$$\lambda_{2n+1}=(\frac{2n+1}{L}\pi)^2,\ \lambda_{2n}=(\frac{2n}{L}\pi)^2$$

3. 写出初边值问题 $\begin{cases} i\hbar\dfrac{\partial\Psi}{\partial t}=-\dfrac{\hbar^2}{2\mu}\dfrac{\partial^2\Psi}{\partial x^2},\ (0<x<a,\ t>0) \\ \Psi(0,t)=0,\ \Psi(a,t)=0 \\ \Psi(x,0)=\varphi(x) \end{cases}$ 的级数解.

解：应用分离变量法，设 $\Psi(x,t)=\psi(x)f(t)$，代入方程整理得

$$i\hbar\frac{1}{f(x)}\frac{d}{dt}f(t)=\frac{1}{\psi(x)}[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\partial^2}{\partial x^2}]\psi(x)=E$$

由此得常微分方程

$$i\hbar\frac{d}{dt}f(t)=Ef(t),\ -\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x)=E\psi(x)$$

第一个常微分方程有特解：

$$f(t)=\exp(-iEt/\hbar)$$

第二个常微分方程为能量固有值问题，由

$$E_n=\frac{\hbar^2}{2\mu}(\frac{n\pi}{a})^2,\ \psi_n=\sin\frac{n\pi}{a}x,\ (n=1,2,\cdots)$$

原问题基本解

$$\Psi_n(x,t)=\exp(-\frac{iE_n}{\hbar}t)\sin\frac{n\pi}{a}x,\ (n=1,2,\cdots)$$

原问题级数解

$$\Psi(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\exp(-\frac{iE_n}{\hbar}t)\sin\frac{n\pi}{a}x$$

4．利用固有值问题：$[\exp(-x^2)H_n'(x)]'+\lambda_n\exp(-x^2)H_n(x)=0$，证明

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-x^2)H_n(x)H_m(x)dx=0\text{，（}n\neq m\text{）}$$

证明：应用常微分方程得

$$H_m(x)[\exp(-x^2)H_n'(x)]'+\lambda_n\exp(-x^2)H_m(x)H_n(x)=0$$
$$H_n(x)[\exp(-x^2)H_m'(x)]'+\lambda_m\exp(-x^2)H_n(x)H_m(x)=0$$

将两式相减，并积分得

$$(\lambda_n-\lambda_m)\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-x^2)H_m(x)H_n(x)dx=$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}H_n(x)[\exp(-x^2)H_m'(x)]'dx-\int_{-\infty}^{+\infty}H_m(x)[\exp(-x^2)H_n'(x)]'dx$$

利用分部积分法得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}H_n(x)[\exp(-x^2)H_m'(x)]'dx=[H_n\exp(-x^2)H_m']_0^{\infty}-\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-x^2)H_m'H_n'dx$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty}H_m(x)[\exp(-x^2)H_n'(x)]'dx=[H_m\exp(-x^2)H_n']_0^{\infty}-\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-x^2)H_n'H_m'dx$$

两式相减右端得零，所以

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-x^2)H_n(x)H_m(x)dx=0，（n\neq m）$$

《工程数学》习题五

1．求二阶常微分方程通解：$r^2\dfrac{d^2R}{dr^2}+2r\dfrac{dR}{dr}-l(l+1)R=0$

解：做自变量变换，令 $r=\exp(t)$，即 $t=\ln r$，则方程化为

$$\frac{d^2R}{dt^2}+\frac{dR}{dt}-l(l+1)R=0$$

求解得

$$R=C_1\exp(lt)+C_2\exp(-(l+1)t)$$

利用变换得

$$R=C_1r^l+C_2r^{-(l+1)}$$

2．应用莱布尼兹公式，证明：$L_n(x)=e^x\dfrac{d^n}{dx^n}(x^ne^{-x})=\sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^k\dfrac{n!}{k!}x^k$

证明：应用乘积函数求高阶导数的莱布尼兹公式，得

$$\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k[(-1)^ke^{-x}][\frac{n!}{k!}x^k]$$

所以

$$e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^ne^{-x})=e^x\sum C_n^k[(-1)^ke^{-x}][\frac{n!}{k!}x^k]=\sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^k\frac{n!}{k!}x^k=L_n(x)$$

3．证明拉盖多项式的正交性：$\int_0^\infty e^{-x}L_n(x)L_m(x)dx=0$，（$m\neq n$）

证：由于 n 阶拉盖多项式 $L_n(x)$ 满足微分方程

$$xL_n''+(1-x)L_n'+nL_n=0$$

将方程左右同乘负指数函数，并简化得

$$[xe^{-x}L_n']'+ne^{-x}L_n=0$$

同理有 m 阶拉盖多项式 $L_m(x)$ 满足微分方程

$$[xe^{-x}L_m']'+me^{-x}L_m=0$$

由两个等式得

$$L_m[xe^{-x}L_n']'+ne^{-x}L_mL_n=0，\quad L_n[xe^{-x}L_m']'+me^{-x}L_nL_m=0$$

将两式相减并积分得

$$(n-m)\int_0^{+\infty}e^{-x}L_mL_ndx=\int_0^{+\infty}(L_n[xe^{-x}L_m']'-L_m[xe^{-x}L_n']')dx$$

利用分部积分公式

$$\int_0^{+\infty}(L_n[xe^{-x}L_m']'-L_m[xe^{-x}L_n']')dx=(L_n[xe^{-x}L_m']-L_m[xe^{-x}L_n'])\Big|_0^{+\infty}$$

$$-\int_0^{+\infty}[xe^{-x}L_m'L_n'-xe^{-x}L_n'L_n']dx=0$$

所以

$$\int_0^\infty e^{-x}L_n(x)L_m(x)dx=0，（m\neq n）$$

4．证明多项式 $L_n^m(x)=(m+n)!\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\dfrac{x^k}{k!(n-k)!(m+k)!}$ 满足广义拉盖方程

$$x[L_n^m(x)]''+(m+1-x)[L_n^m(x)]'+nL_n^m(x)=0$$

证明：将幂级数 $L_n^m(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$ 代入方程，由于

$$nL_n^m(x)=\sum_{k=0}^{\infty}na_kx^k$$

一阶导数部分

$$(m+1-x)[L_n^m(x)]'=(m+1-x)\sum_{k=1}^{\infty}ka_kx^{k-1}$$

$$=(m+1)\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)a_{k+1}x^k-\sum_{k=0}^{\infty}ka_kx^k$$

二阶导数部分

$$x[L_n^m(x)]''=x\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)a_kx^{k-2}=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)a_kx^{k-1}=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)ka_{k+1}x^k$$

分别代入方程，得

$$\sum_{k=0}^{\infty}[(n-k)a_k+(k+1)(k+1+m)a_{k+1}]x^k=0$$

比较两端，知系数满足

$$(n-k)a_k+(k+1)(k+1+m)a_{k+1}=0 \qquad (*)$$

由于给定级数的通项系数，$a_k=(-1)^k\dfrac{(m+n)!}{k!(n-k)!(m+k)!}$。而

$$(n-k)a_k=(-1)^k\frac{(n-k)(m+n)!}{k!(n-k)!(m+k)!}=(-1)^k\frac{(m+n)!}{k!(n-k-1)!(m+k)!}$$

$$(k+1)(k+1+m)a_{k+1}=(-1)^{k+1}\frac{(k+1)(k+1+m)(m+n)!}{(k+1)!(n-k-1)!(m+k+1)!}$$

$$=(-1)^{k+1}\frac{(m+n)!}{k!(n-k-1)!(m+k)!}$$

将其代入式（*）得恒等式，故级数满足常微分方程。该表达式就是方程的解。

《工程数学》习题六

1．利用勒让德多项式微分形式计算积分：$\int_{-1}^{1}[P_1(x)]^2dx$，$\int_{-1}^{1}[P_2(x)]^2dx$

解：由让德多项式微分形式 $P_n(x)=\dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$，令 $\omega_n=(x^2-1)^n$。

用分部积分公式

$$\int_{-1}^{1}[\omega_1'\ ]^2dx=[\omega_1'\ \omega_1\ ]\Big|_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\omega_1''\ \omega_1dx=-2\int_{-1}^{1}(x^2-1)dx=\frac{8}{3}$$

所以

$$\int_{-1}^{1}[P_1(x)]^2dx=\frac{1}{2\times2}\int_{-1}^{1}[\omega_1'\ ]^2dx=\frac{2}{3}$$

而

$$\int_{-1}^{1}[\omega_2''\ ]^2 dx=[\omega_2''\ \omega_2'\ -\omega_2'''\ \omega_2]\Big|_{-1}^{1}+\int_{-1}^{1}\omega_2^{(4)}\omega_2 dx=4!\int_{-1}^{1}(x^2-1)^2 dx=16\times\frac{8}{5}$$

所以

$$\int_{-1}^{1}[P_2(x)]^2 dx=\frac{1}{2^2\times 2^2\times 2\times 2}\int_{-1}^{1}[\omega_1'\ ]^2 dx=\frac{2}{5}$$

2．证明：勒让德多项式的模$\int_{-1}^{1}[P_n(x)]^2 dx=\frac{2}{2n+1}$，（$n=\ 1,2,\cdots\cdots$）。

证：由勒让德多项式递推关系

$$(n+1)P_{n+1}(x)-(2n+1)xP_n(x)+nP_{n-1}(x)=0$$

以 n 代替$(n+1)$并将等式两端同乘以 P_n，得

$$n[P_n(x)]^2-(2n-1)xP_n(x)P_{n-1}(x)+(n-1)P_n(x)P_{n-2}(x)=0$$

积分得

$$n\int_{-1}^{1}[P_n\ (x)]^2 dx=(2n-1)\int_{-1}^{1}xP_n\ (x)P_{n-1}(x)dx$$

再将递推关系变型

$$xP_n\ =\frac{n+1}{2n+1}P_{n+1}+\frac{n}{2n+1}P_{n-1}$$

代入，得

$$n\int_{-1}^{1}[P_n\ (x)]^2 dx=n\frac{(2n-1)}{2n+1}\int_{-1}^{1}[P_{n-1}(x)]^2 dx$$

故

$$\int_{-1}^{1}[P_n\ (x)]^2 dx=\frac{2n-1}{2n+1}\int_{-1}^{1}[P_{n-1}(x)]^2 dx=\cdots=\frac{1}{2n+1}\int_{-1}^{+1}[P_0\ (x)]dx=\frac{2}{2n+1}$$

3．证明勒让德多项式正交性：$\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)dx=0$，（$m\neq n$）

证：由于 $P_n(x)$ 满足勒让德方程

$$(1-x^2)P_n''(x)-2xP_n'+n(n+1)P_n=0$$

写成等价形式

$$[(1-x^2)P_n'(x)]'+n(n+1)P_n\ =0$$

同理 $P_m(x)$ 满足

$$[(1-x^2)P_m'(x)]'+m(m+1)P_m\ =0$$

由此得

$$P_m[(1-x^2)P_n'(x)]'+n(n+1)P_mP_n\ =0$$

$$P_n[(1-x^2)P_m'(x)]'+m(m+1)P_nP_m\ =0$$

将两式相减差积分，得

$$[n(n+1)-m(m+1)]\int_{-1}^{+1}P_mP_n dx=\int_{-1}^{+1}(P_m[(1-x^2)P_n']'-P_n[(1-x^2)P_m']')dx$$

应用分部积分公式得

$$\int_{-1}^{+1}(P_m[(1-x^2)P_n']'-P_n[(1-x^2)P_m']')dx=(P_m[(1-x^2)P_n']-P_n[(1-x^2)P_m'])\Big|_{-1}^{+1}$$

$$-\int_{-1}^{+1}[(1-x^2)P_m'P_n'-(1-x^2)P_n'P_m']dx=0$$

故

$$\int_{-1}^{1} P_m(x) P_m(x) dx = 0, (m \neq n)$$

4． 计算积分$\int_{-1}^{+1} x^k P_n(x) dx$，其中 n 和 k 是任意正整数且$k \le n$。

解：当 $k<n$ 时，有

$$x^k = \sum_{j=0}^{k} c_j P_j(x)$$

利用勒让德多项式正交性，得

$$\int_{-1}^{+1} x^k P_n(x) dx = 0, \ (k < n)$$

当 $k = n$ 时，有

$$x^n = \sum_{j=0}^{n} c_j P_j(x)$$

参考勒让德多项式微分表达式，$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$，最高项系数为

$$\frac{(2n-1)!!}{n!}$$

所以$c_n = \frac{n!}{(2n-1)!!}$，故

$$\int_{-1}^{+1} x^n P_n(x) dx = \frac{n!}{(2n-1)!!} \int_{-1}^{+1} [P_n(x)]^2 dx = 2\frac{n!}{(2n+1)!!}$$

《工程数学》习题七

1．利用勒让德多项式正交性计算：$\int_{-1}^{+1} (2+3x) P_n(x) dx$

解：先将(2+3x)表示为勒让德多项式组合形式，

$$(2+3x) = 2P_0 + 3P_1$$

所以

$$\int_{-1}^{+1} (2+3x) P_n(x) dx = \int_{-1}^{+1} [2P_0 P_n + 3P_1 P_n] dx$$

利用正交性得

$$\int_{-1}^{+1} (2+3x) P_n(x) dx = \begin{cases} 4, & n = 0 \\ 2, & n = 1 \\ 0, & n \neq 0,1 \end{cases}$$

2. 求单位球内调和函数，满足边值问题：

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}) = 0$$

$$u\big|_{r=1} = \cos^2\theta$$

解：用分离变量法，令$u = F(r)G(\theta)$，代入方程，得

$$G(r^2F''+2rF')+F(G''+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}G')=0$$

上式各项同除 FG，得

$$\frac{r^2F''+2rF'}{F}+\frac{G''+c\tan G'}{G}=0$$

令

$$\frac{G''+c\tan G'}{G}=-\frac{r^2F''+2rF'}{F}=-\lambda$$

得常微分方程

$$G''+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}G'+\lambda G=0$$

$$r^2F''+2rF'-\lambda F=0$$

在第一个方程中，令 $\cos\theta=x$， $y(x)=y(\cos\theta)=G(\theta)$ 则方程化为勒让德方程

$$(1-x^2)y''-2xy'+\lambda y=0$$

当 $\lambda=n(n+1)$ 时，有 n 阶勒让德多项式 $P_n(x)$解。将 $\lambda=n(n+1)$ 代入第二个方程，得

$$r^2F''+2rF'-n(n+1)F=0$$

这是欧拉方程，求解得

$$F_n(r)=C_nr^n$$

所以原方程有基本解 $u_n=C_nr^nP_n(\cos\theta)$，由叠加原理得通解如下

$$u(r,\theta)=\sum_{b=0}^{\infty}C_nr^nP_n(\cos\theta)$$

利用边界条件，得

$$u(1,\theta)=\sum_{b=0}^{\infty}C_nP_n(\cos\theta)=\cos^2\theta$$

令 $\cos\theta=x$，由于

$$P_0=1，\quad P_2=\frac{1}{2}(3x^2-1)$$

所以

$$x^2=\frac{2}{3}P_2+\frac{1}{3}P_0$$

即有

$$\sum_{b=0}^{\infty}C_nP_n(x)=\frac{2}{3}P_2+\frac{1}{3}P_0$$

对比系数，得

$$C_0=\frac{1}{3}，\ C_2=\frac{2}{3}，\ C_n=0,\ (n\neq 0,2)$$

最后得边值问题的解为

$$u(r,\theta)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}r^2P_2(\cos\theta)=\frac{1}{3}+r^2(\cos^2\theta-\frac{1}{3})$$

3．利用余弦函数台劳展开式证明：$\boldsymbol{J_{-1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi\,x}}\cos x}$。

证明：由 n 阶贝塞尔函数的级数形式

$$J_n(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{n+2m}}{2^{n+2m}m!\Gamma(n+m+1)}$$

得

$$J_{-1/2}(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{-1/2+2m}}{2^{-1/2+2m}m!\Gamma(-1/2+m+1)}$$

利用伽玛函数的特殊值$\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$，得

$$\Gamma(m-1/2+1)=(m-1/2)(m-3/2)\cdots(1/2)\sqrt{\pi}$$

$$=\frac{1}{2^m}(2m-1)(2m-3)\cdots 1\sqrt{\pi}=\frac{\sqrt{\pi}}{2^m}(2m-1)!!$$

所以

$$2^{2m}m!\Gamma(-1/2+m+1)=\sqrt{\pi}(2m)!!(2m-1)!!=\sqrt{\pi}(2m)!$$

由于

$$\cos x=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{(2m)!}x^{2m}$$

故

$$J_{-1/2}(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{-1/2+2m}}{2^{-1/2+2m}m!\Gamma(-1/2+m+1)}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{(2m)!}x^{2m}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$$

4．证明贝塞尔函数递推关系：$\frac{d}{dx}[x^{-n}J_n(x)]=-x^{-n}J_{n+1}(x)$，

证：利用贝塞尔函数级数表达式得

$$\frac{d}{dx}[x^{-n}J_n(x)]=\frac{d}{dx}[\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{n+2m}m!\Gamma(n+m+1)}]=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m 2m\,x^{2m-1}}{2^{n+2m}m!\Gamma(n+m+1)}$$

令$m=k+1$，并消去公因式得

$$\frac{d}{dx}[x^{-n}J_n(x)]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}x^{2k+1}}{2^{n+1+2k}k!\Gamma(n+1+k+1)}=-x^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{n+1+2k}}{2^{n+1+2k}k!\Gamma(n+1+k+1)}$$

$$=-x^n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{n+1+2m}}{2^{n+1+2m}m!\Gamma(n+1+m+1)}=-x^nJ_{n+1}(x)$$