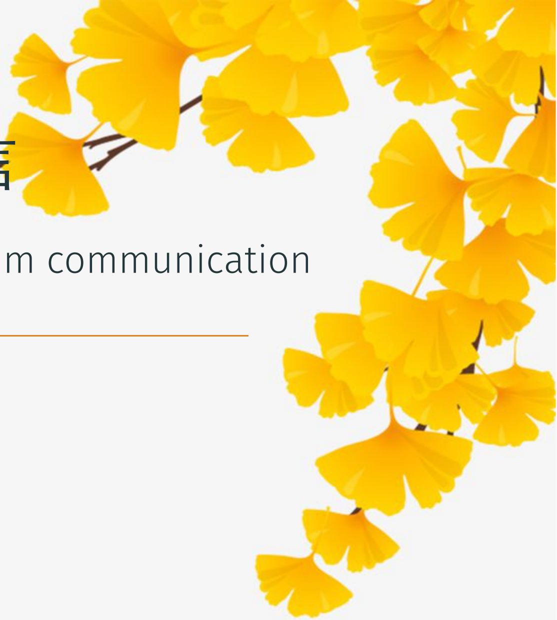
量子信息与量子通信

Quantum information and quantum communication



李小飞

光电科学与工程学院

2022 年 4 月 26 日

第 9： 电磁场的量子化

Contents

1. 电磁场

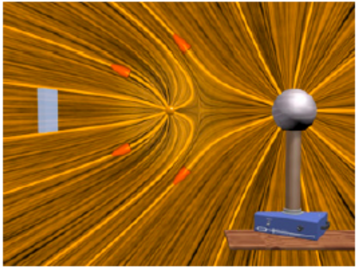
静电场

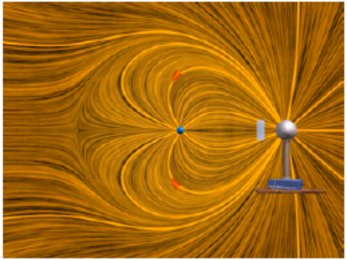
稳恒电流的磁场

交变电磁场

2. 电磁场的量子化

3. 辐射场





静电荷 (Q) 激发电场 $\vec{E}$, 静电荷通过电场发生相互作用.

电场强度:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{e}_r$$

高斯定理 (电通量):

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0}\int_V \rho dV$$

电势:

$$\varphi = \int_r^{\infty} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r}$$

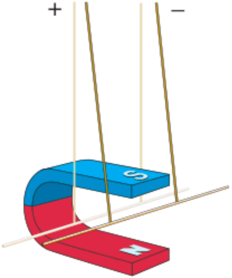
环路定理:

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$$

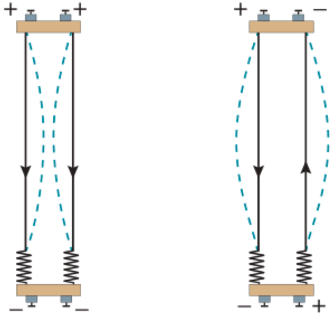
两者关系:

$$\vec{E} = -\frac{\partial\varphi}{\partial n}\vec{e}_n = -\mathrm{Grad}.\varphi = -\nabla\varphi$$

特点: 有源无旋



磁体对通电导线产生作用力



两条通电导线之间发生相互作用

运动电荷(电流)激发电场和磁场 $\vec{E}$, 通过电磁场发生相互作用.

磁感强度:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{I}d\vec{l} \times \vec{e}_r}{r^2}$$

高斯定理 (磁通量):

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

环路定理:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_s \vec{j} \times d\vec{S}$$

磁矢势:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{j}dV}{r}$$

特点: 有旋无源

交变电磁场

1. 电磁场
    - 静电场
    - 稳恒电流的磁场
2. 电磁场的量子化
3. 辐射场

感应电场

电荷在电磁场中受力:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{E}_k) = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

磁场变化产生感应电场: 高斯定理:

$$\oint \vec{E}_k \cdot d\vec{S} = 0$$

环路定理:

$$\oint \vec{E}_k \cdot d\vec{l} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \times d\vec{S}$$

总电场(真空中):

$$\vec{E} = \vec{E}_k + \vec{E}_s$$

总电场基本方程

高斯定理:

$$\oint \vec{E}_k \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0}\int_V \rho dV$$

环路定理:

$$\oint \vec{E}_k \cdot d\vec{l} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \times d\vec{S}$$

总电流密度:

$$\vec{j} = \vec{j}_D + \vec{j}_c, \qquad \vec{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

总磁场基本方程

高斯定理:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

环路定理:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_s \vec{j} \times d\vec{S} + \mu_0 \epsilon_0 \int \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{S}$$

积分形式:

$$\oiint_{\mathbb{S}} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}s = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\oiint_{\mathbb{S}} \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}s = 0$$

$$\oint_{\mathbb{L}} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}l = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathbf{B}}}{\mathrm{d}t}$$

$$\oint_{\mathbb{L}} \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}l = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathbf{E}}}{\mathrm{d}t}$$

微分形式:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

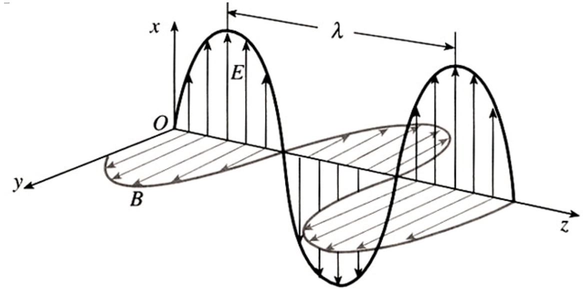
介质中, 定义电位移矢量 D 和磁场强度 H

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}, \qquad \vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M} = \frac{1}{\mu_0 \mu_r}$$

麦克斯韦方程:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho_f \\
\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\
\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\
\nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}
\end{aligned}$$

电磁场的能量



能量密度:

$$\omega = \frac{1}{2}(\epsilon_0 E_x^2 + \mu_0 H_y^2)$$

哈密顿量:

$$H = \frac{1}{2}\int_V (\epsilon_0 E_x^2 + \mu_0 H_y^2) dV$$

电磁波

对于真空 $(\rho_f = 0, \mathbf{J}_f = 0)$, 把

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}, \qquad \mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}$$

代入如下麦克斯韦方程

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

得:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) &= -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ &= -\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

由于

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$$
$$= -\nabla^2 \mathbf{E}$$

得:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

改写成

$$\boxed{E_{tt} = c^2 \nabla^2 \mathbf{E}}$$

这是波动方程的标准型(见数理方程)

由于电磁波是横波，当它在 z 方向转波时，有 $E_y = E_z = 0, B_x = B_z = 0$，考虑一个光学腔 $0 \le z \le L$

令 $E_x = U(z)T(t)$ 分离变量，得解：

- 固有值： $\lambda_n = \dfrac{n^2\pi^2}{L^2} = k_n^2$
- 固有解： $U_n(z) = \sin(k_n z)$
- 基本解：
  $$E_{x,n}(z,t) = T_n(t)U_n(z) = a_n \sin(k_j ct)\sin(k_n z) = a_n \sin(\nu_j t)\sin(k_n z)$$
- 叠加解： $E_x(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(\nu_n t)\sin(k_n z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q(t)\sin(k_n z)$

把解代入下式

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

得:

- 叠加解: $H_y(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\epsilon_0}{k_n} q'(t) \cos(k_n z)$
- 固有解正交归一化 $\int_0^L U_n(z) U_m(z) dz = \delta_{nm}$

  得系数 a_n

结论: 电磁场的运动可分解为一系列基本模式的振动, 在自由场条件下, 振动是自由的, 若有电荷或电流, 变成受迫振动.

Contents

场与粒子

1. 场是物质存在的基本形式
2. 所有的粒子都是场的量子，分为费米子和玻色子两大类
3. 场的量子与量子力学中的粒子并不完全一样，在非相对论近似下两都可以拟合在一起
4. 光子无非相对论近似，不可能被看做量子力学中的粒子
5. 电磁场量子化有着不同于一般意义的效应.

物理问题：如何将电磁场中以场形式的能量，用腔中的模式来表达，变成一份一份的能量子(光子)。

谐振子哈密顿量：$H = \dfrac{p^2}{2m} + \dfrac{1}{2}\omega^2 x^2$

量子化标准化程序

1. 写出经典哈密顿，改写为共轭变量形式，并给出正则方程

$$\frac{\mathrm{d}p_l}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H_l}{\partial q_l}$$
$$\frac{\mathrm{d}q_l}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H_l}{\partial p_l}$$

2. 共轭变量的算符满足量子力学基本对易关系

$$[q_l, p_m] = i\hbar\delta_{lm}$$

3. 把哈密顿代入薛定谔方程，得量子解.

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi\rangle = H|\Psi\rangle$$

注意电磁波的叠加解:

- $E_x(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q(t) \sin(k_n z)$
- $H_y(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\epsilon_0}{k_n} q'(t) \cos(k_n z)$

电磁场按腔模式展开时, 电场的展开系数与各模的广义位置相关, 磁场的展开系数与各模的广义动量相关. 写成三维形式, 可以表示为:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}} \sum_l^{\infty} p_l(t) \mathbf{E}_l(\mathbf{r})$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r},t) = -\frac{1}{\sqrt{\mu_0}} \sum_l^{\infty} \omega_l q_l(t) \mathbf{H}_l(\mathbf{r})$$

展开系数是 E 和 H 的矩阵表示.

代回麦克斯韦方程, 得

$$\ddot{p}_l + \omega_l^2 p_l = 0$$

$$\dot{q}_l = p_l$$

因此, 电磁场的能量, 可写成

$$H = \frac{1}{2}\int_V (\mu_0 \mathbf{H}^2 + \epsilon_0 \mathbf{E}^2) dV$$

$$= \sum_l^{\infty} \frac{1}{2}(p_l^2 + \omega_l^2 q_l^2)$$

$$= \sum_l^{\infty} H_l$$

谐振子: $H = \dfrac{p^2}{2m} + \dfrac{1}{2}\omega^2 x^2$, 电磁场可视为一组无耦合离散谐振子的无穷集.

求解

对哈密顿 $H_l = \frac{1}{2}(p_l^2 + \omega_l^2 q_l^2)$ 求导，得哈密顿运动方程

$$\frac{\mathrm{d}p_l}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H_l}{\partial q_l} = -\omega_l^2 q_l$$

$$\frac{\mathrm{d}q_l}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H_l}{\partial p_l} = p_l$$

说明 p_l 和 q_l 是电磁场的一对正则共轭变量. 令

$$a_l = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_l}}(\omega_l q_l + i p_l)$$

$$a_l^* = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_l}}(\omega_l q_l - i p_l)$$

哈密顿变为

$$H_l = \frac{1}{2}\hbar\omega_l(a_l a_l^* + a_l^* a_l)$$

反向求得

$$q_l = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_l}}(a_l + a_l^*)$$

$$p_l^* = -\sqrt{\frac{\hbar\omega_l}{2}}(a_l - a_l^*)$$

代回哈密顿运动方程:

$$\frac{\mathrm{d}a_l}{\mathrm{d}t} = -i\omega_l a_l$$

$$\frac{\mathrm{d}a_l^*}{\mathrm{d}t} = i\omega_l a_l^*$$

解得

$$\begin{cases} a_l(t) & = a_l(0)e^{-i\omega_l t} \\ a_l^*(t) & = a_l^*(0)e^{i\omega_l t} \end{cases}$$

说明腔场为驻波解!

1. 电磁场

2. 电磁场的量子化

简振模展开

行波展开

单模量子化

3. 辐射场

大气大为 求实求真

自由空间电磁场

自由空间电磁场模为平面波(行波), 解的形式为:

$$\hat{e}_\sigma exp(\pm i(\omega_k t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})), \qquad k^2 = \frac{\omega_k^2}{c^2}$$

式中 $\hat{e}_\sigma$ 为偏振方向上的单位矢量, $\sigma = 1$ or 2 代表两个振动方向, 它们相互正交且都与波矢 $\mathbf{k}$ 正交.

经箱归一化, 可离散化行波, 得

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L}(l_1\mathbf{i} + l_2\mathbf{j} + l_3\mathbf{k}), \qquad l_i = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

行波本征模为

$$\mathbf{u}_{k\sigma}(\mathbf{r}) = \hat{e}_\sigma e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

行波展开

自由空间电磁场按行波展开

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = i\sum_{k,\sigma}^{\infty}\left(\frac{\hbar\omega_k}{2\epsilon_0 V}\right)^{1/2}\hat{e}_\sigma[a_{k\sigma}(t)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - a^*_{k\sigma}(t)e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}]$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r},t) = i\sum_{k,\sigma}^{\infty}\left(\frac{\hbar\omega_k}{2\mu_0 V}\right)^{1/2}(\hat{e}_k \times \hat{e}_\sigma)[a_{k\sigma}(t)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - a^*_{k\sigma}(t)e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}]$$

箱内总能量:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}\int_V (\mu_0\mathbf{H}^2 + \epsilon_0\mathbf{E}^2)dV \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k,\sigma}^{\infty}\hbar\omega_k(a_{k\sigma}a^*_{k\sigma} + a^*_{k\sigma}a_{k\sigma}) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k,\sigma}^{\infty}(p^2_{k\sigma} + \omega^2_k q^2_{k\sigma}) = \sum_{k,\sigma}^{\infty} H_{k\sigma} \end{aligned}$$

哈密顿运动方程

$$\frac{\mathrm{d}p_{k\sigma}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H_{k\sigma}}{\partial q_{k\sigma}} = -\omega_{k\sigma}^2 q_{k\sigma}$$

$$\frac{\mathrm{d}q_{k\sigma}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H_{k\sigma}}{\partial p_{k\sigma}} = p_{k\sigma}$$

小结: 能过光腔解和行波解, 可以得到电磁场的谐振模 (驻波) 或行波模 (平面波) 的线性叠加解. 下面对单模进行量子化.

1. 电磁场

2. 电磁场的量子化

简振模展开

行波展开

单模量子化

3. 辐射场

大气大为 求实求真

产生湮灭算符

(1) 由正则共轭变量写出产生湮灭算符

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega q + ip) \\
a^{\dagger} &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega q - ip)
\end{aligned}
$$

(2) 基于正则共轭变量量子化条件,

$$[q,p]=i\hbar$$

求产生湮灭算符对易关系

解:

$$
\begin{aligned}
[a,a^\dagger] &= aa^\dagger - a^\dagger a \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}\right)^2[(\omega q+ip)(\omega q-ip)-(\omega q-ip)(\omega q+ip)] \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}\right)^2 2i\omega(pq-qp) \\
&= -\left(\frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}\right)^2 2i\omega[q,p] \\
&= -\left(\frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}\right)^2 2i\omega(i\hbar) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

(3) 单模驻波场相关力学量算符

产生湮灭算符

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega q + ip)$$

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega q - ip)$$

反向求得正则共轭变量算符

$$q = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}(a + a^\dagger)$$

$$p = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}}(a^\dagger - a)$$

代入, 得哈密顿算符

$$
\begin{aligned}
H_l &= \frac{1}{2}(p_l^2 + \omega_l^2 q_l^2) \\
H &= \frac{1}{2}[(i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}}(a^\dagger - a))^2 + \omega^2(\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}(a + a^\dagger))^2] \\
&= \frac{1}{2}[(i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}}(a^\dagger - a))^2 + (\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}}(a + a^\dagger))^2] \\
&= \frac{1}{4}\hbar\omega[(a + a^\dagger)^2 - (a^\dagger - a)^2] \\
&= \frac{1}{4}\hbar\omega[2aa^\dagger - 2a^\dagger a + 4a^\dagger a] \\
&= \hbar\omega a^\dagger a + \frac{1}{2}\hbar\omega
\end{aligned}
$$

代入得电磁场强度算符,

$$\mathbf{E}_l(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}} p_l \mathbf{E}_l(\mathbf{r})$$

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}} \left(i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}}(a^\dagger - a)\right)\mathbf{E}(\mathbf{r})$$

$$= i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0}}\mathbf{E}(\mathbf{r})(a - a^\dagger)$$

$$\mathbf{H}_l(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\sqrt{\mu_0}} \omega_l q_l \mathbf{H}_l(\mathbf{r})$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0}} \omega\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}(a + a^\dagger)\mathbf{H}(\mathbf{r})$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\mu_0}}\mathbf{H}(\mathbf{r})(a + a^\dagger)$$

$a \neq a^\dagger$, 不是自伴算符, 不具厄密性. 有必要研究其具体性质.

对于能量第 n 个本征态,

$$H|n\rangle = E_n|n\rangle, \quad aH|n\rangle = E_n a|n\rangle$$

$$\begin{aligned}
Ha|n\rangle &= (\hbar\omega a^\dagger a + \frac{1}{2}\hbar\omega)a|n\rangle \\
&= (\hbar\omega a^\dagger aa + \frac{1}{2}\hbar\omega a)|n\rangle \\
&= (\hbar\omega(-1 + aa^\dagger)a + \frac{1}{2}\hbar\omega a)|n\rangle \\
&= (\hbar\omega aa^\dagger a - a\frac{1}{2}\hbar\omega)|n\rangle \\
&= a(\hbar\omega a^\dagger a - \frac{1}{2}\hbar\omega)|n\rangle
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Ha\left|n\right\rangle &= a(\hbar\omega a^{\dagger}a + \frac{1}{2}\hbar\omega - \hbar\omega)\left|n\right\rangle \\
&= (aH - a\hbar\omega)\left|n\right\rangle \\
&= (E_n - \hbar\omega)a\left|n\right\rangle
\end{aligned}
$$

也就是说 $a\left|n\right\rangle$ 也是能量本性态, 本征值为 $E_n - \hbar\omega = E_{n-1}$ 即有一份能量 $\hbar\omega$ 被湮灭, 故称 a 为湮灭算符

性质 1:

$$
\boxed{a\left|n\right\rangle = D_n\left|n-1\right\rangle}
$$

$$
Ha\left|n\right\rangle = H\left|n-1\right\rangle = E_{n-1}\left|n-1\right\rangle = (E_n - \hbar\omega)\left|n-1\right\rangle
$$

同理可证:

$$Ha^\dagger |n\rangle = (E_n + \hbar\omega)a^\dagger |n\rangle$$

也就是说 $a^\dagger |n\rangle$ 也是能量本性态, 本征值为 $E_n + \hbar\omega = E_{n-1}$ 即产生一份能量 $\hbar\omega$, 故称 $a^\dagger$ 为产生算符

性质 2:

$$\boxed{a^\dagger |n\rangle = C_n |n+1\rangle}$$

真空态

本征能量可无限地增加, 但不能被无限湮灭, 设最小的为 E_0, 对应本征态 $|0\rangle$

性质 3:

$$\boxed{a\,|0\rangle = 0}$$

$$H = \hbar\omega a^\dagger a + \frac{1}{2}\hbar\omega, \qquad H - \frac{1}{2}\hbar\omega = \hbar\omega a^\dagger a$$

$$(H - \frac{1}{2}\hbar\omega)\,|0\rangle = \hbar\omega a^\dagger a\,|0\rangle = \hbar\omega a^\dagger 0 = 0$$

$$H\,|0\rangle = \frac{1}{2}\hbar\omega\,|0\rangle = E_0\,|0\rangle$$

性质 4:

$$\boxed{E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega}$$

从真空态出发，相继使用产生算符，每次产生一份能量 $\hbar\omega$，因此能量本征值为

$$E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

粒子数态:
对电磁场来说，单模场的本征态 $|n\rangle$ 描述的是该模上有 n 个光子，每个光子的能财都是 $\hbar\omega$ 即:$|n\rangle$ 态描述的是含有 n 个光量子的态. 因此，能量本征态 $|n\rangle$ 也称为粒子数态. 占有数算符为 $N = a^\dagger a$，有本征方程:

$$a^\dagger a\,|n\rangle = n\,|n\rangle$$

归一化系数

产生湮灭算符分别产生和消灭这个模式的一个光子

$$a\,|n\rangle = D_n\,|n-1\rangle, \qquad a^\dagger\,|n\rangle = C_n\,|n+1\rangle$$

$$\begin{aligned} a^\dagger a\,|n\rangle &= a^\dagger D_n\,|n-1\rangle \\ &= D_n C_{n-1}\,|n\rangle = n\,|n\rangle \end{aligned}$$

$$D_n C_{n-1} = n \qquad \cdots (1)$$

$$\begin{aligned} D_n &= \langle n-1\,|a|\,n\rangle \\ &= \left(\langle n\,|a^\dagger|\,n-1\rangle\right)^* \\ &= C^*_{n-1} \qquad \cdots (2) \end{aligned}$$

联立 (1)(2), 得 $C_{n-1} = \sqrt{n} = D_n, C_n = \sqrt{n+1}$

占有数算符 $N = a^\dagger a$ 的本征函数系是正交归一完备系, 构成的表象称为粒子数表象, 也称为 Fock 表象.

例-1. 试证明 *Fock* 态下电磁场的电场强度平均值为零:

证明: 设电磁场处于 *Fock* 态 $|n\rangle$

$$
\begin{aligned}
\langle n|\mathbf{E}|n\rangle &= \left\langle n\left|\imath\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0}}\mathbf{E}(\mathbf{r})(a-a^\dagger)\right|n\right\rangle \\
&= \left\langle n\left|\imath\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0}}\mathbf{E}(\mathbf{r})a\right|n\right\rangle - \left\langle n\left|\imath\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0}}\mathbf{E}(\mathbf{r})a^\dagger\right|n\right\rangle \\
&= 0 - 0 = 0
\end{aligned}
$$

* 相位随机性导致测量平均值为零! Fock 表象一般用于处理小粒子数的情况.

单模场的量子涨落

例-2. 考虑一维单模驻波场，求电场和磁场强度的量子涨落：

解: 一维单模驻波场的电场和磁场算符为

$$E_x(z,t) = -i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{\epsilon_0 L}}\sin kz\left(a^\dagger(t) - a(t)\right)$$

$$H_y(z,t) = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\mu_0 L}}\cos kz\left(a(t) + a^\dagger(t)\right)$$

设光场处于 FOCK 态 $|n\rangle$，有:

$$\langle n\left|E_x(z,t)\right|n\rangle = \langle n\left|H_y(z,t)\right|n\rangle = 0$$

令 $E_0 = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{\epsilon_0 L}}$

$$
\begin{aligned}
\left\langle n \left| E_x^2 \right| n \right\rangle &= \left\langle n \left| -E_0^2 \sin^2 kz (a^\dagger(t) - a(t))^2 \right| n \right\rangle \\
&= 2E_0^2 \sin^2 kz \left\langle n \left| a^\dagger a \right| n \right\rangle \\
&= 2E_0^2 \sin^2 kz \left\langle n \left| n + \frac{1}{2} \right| n \right\rangle \\
&= 2(n + \frac{1}{2}) E_0^2 \sin^2 kz
\end{aligned}
$$

量子涨落:

$$
\begin{aligned}
\langle \Delta E_x \rangle &= \sqrt{\langle (\Delta E_x)^2 \rangle} = \langle (E_x^2) \rangle - \langle E_x \rangle^2 \\
&= \sqrt{2} \sqrt{n + \frac{1}{2}} E_0 \left| \sin kz \right|
\end{aligned}
$$

即使没有激发 (n=0), 依然存在真空涨落 $E_0 \left| \sin kz \right|$

Contents

大气大為 求實求真

1. 电磁场

2. 电磁场的量子化

3. 辐射场

密度算符

辐射场

纯态：用确定态矢量 $|\psi\rangle$ 完全描述体系的状态，基于外积，可以定义密度算符：

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$$

则，算符 A 的平均值为

$$\overline{A} = \langle\psi\,|A|\,\psi\rangle = tr(A\rho)$$

混态: 不能用确定的态, 而是用一组态矢量 $\{|\psi_n\rangle\}$ 才能完全描述体系的状态, 若用 P_n 表示用 $|\psi_n\rangle$ 描述体系的概率, 也可定义密度 (矩阵) 算符

$$\rho = \sum_n P_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n|$$

则, 算符 A 的平均值为

$$\overline{A} = \sum_n P_n \langle\psi_n|A|\psi_n\rangle = tr(A\rho)$$

证明: 由矩阵的迹的定义式

$$\begin{aligned} tr(A\rho) &= \sum_i \langle i|A\rho|i\rangle \\ &= \sum_{i,n} \langle i|AP_n|\psi_n\rangle\langle\psi_n|i\rangle \\ &= \sum_{i,n} \langle\psi_n|i\rangle\langle i|AP_n|\psi_n\rangle \\ &= \sum P_n\langle\psi_n|A|\psi_n\rangle \end{aligned}$$

性质 1. 试证明密度算符是厄密算符

证明:

$$
\begin{aligned}
\langle \Psi \,|\rho|\, \varphi\rangle &= \sum_n P_n \langle \Psi \,||\psi_n\rangle\langle\psi_n||\, \varphi\rangle \\
&= \sum_n P_n(\langle \varphi \,||\psi_n\rangle\langle\psi_n||\, \Psi\rangle)^* \\
&= (\langle \varphi \,|\rho|\, \Psi\rangle)^*
\end{aligned}
$$

性质 2. 试证明 $Tr\rho = 1$

证明:

$$
\begin{aligned}
Tr\rho &= \sum_{jj} \rho_{jj} \\
&= \sum_{n,j} P_n \left|\psi_n\right\rangle \left|j\right\rangle\left\langle j\right| \left\langle\psi_n\right| \\
&= \sum_{n,j} P_n \left\langle j \middle| \psi_n \right\rangle \left\langle \psi_n \middle| j \right\rangle \\
&= \sum_{n,j} P_n \left|c_{nj}\right|^2 \\
&= \sum_{n} P_n \sum_{j} \left|c_{nj}\right|^2 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

性质 3. 纯混态判据

$$\begin{cases} \text{纯态}: Tr\rho^2 = 1 \\ \text{混态}: Tr\rho^2 < 1 \end{cases}$$

证明: TODO

$$\begin{aligned} Tr\rho &= \sum_{jj} \rho_{jj} \\ &= \sum_{n,j} P_n \left|\psi_n\right\rangle \left|j\right\rangle\!\left\langle j\right| \left\langle\psi_n\right| \\ &= \sum_{n,j} P_n \left\langle j \middle| \psi_n \right\rangle \left\langle \psi_n \middle| j \right\rangle \\ &= \sum_{n,j} P_n \left|c_{nj}\right|^2 \\ &= \sum_{n} P_n \sum_{j} \left|c_{nj}\right|^2 \end{aligned}$$

性质 4. 密度算符的运动方程

$$i\hbar\frac{\partial\rho}{\partial t} = [H,\rho]$$

证明:

$$\begin{aligned}
i\hbar\frac{\partial\rho}{\partial t} &= i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\sum_n P_n\,|\psi_n\rangle\langle\psi_n| \\
&= \sum_n P_n[i\hbar\frac{\partial\,|\psi_n\rangle}{\partial t}\,\langle\psi_n| + |\psi_n\rangle\, i\hbar\frac{\partial\,\langle\psi_n|}{\partial t}] \\
&= \sum_n P_n[H\,|\psi_n\rangle\,\langle\psi_n| - |\psi_n\rangle\,\langle\psi_n|\,H] \\
&= [H\rho - \rho H] \\
&= [H,\rho]
\end{aligned}$$

1. 电磁场

2. 电磁场的量子化

3. 辐射场

密度算符

辐射场

Thanks for your attention!

A & Q

求實求真
大氣大為