工程数学

Engineering Mathematics

李小飞 光电科学与工程学院 2022 年 4 月 12 日







Q Definition

偏微分方程 (PDE) 指未知函数是多元函数的微分方程,方程的函数 (物理量) 多以时间和空间为变量,这些方程的来源和应用通常具有物理学背景。又称 为数学物理方程。

方程的最高阶是二阶的称为二阶偏微分方程

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g$$

根据 $\Delta=b^2-ac$ 二阶偏微分方程可分为三类: 椭圆型 $(\Delta<0)$ 、双曲型 $(\Delta>0)$ 和抛物型 $(\Delta=0)$,

它们的代表分别是: 拉普拉斯 (泊松方程)、波动方程、热传导方程

□ 三大偏微分方程

·波动方程

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \\$$

·热传导方程

$$u_t = a^2 \nabla^2 u$$

· 拉普拉斯方程

$$\nabla^2 u = 0$$





固有函数正交

1. 波动方程

方程的建立 方程的求解 2. 热传导方程

3. 拉普拉斯方程



固有函数正交

1. 波动方程

方程的建立

方程的求解

2. 热传导方程

3. 拉普拉斯方程



万程的建立

● 例 1、求弦振动方程 考虑均匀柔软的细弦线,二端固定,受到扰动后在平衡位置作微小运动。分析位移函数 u(x, t) 满足的方程。

自然界普遍存在各种振动,振动的传播形成波, 服从统一的方程。



解: 建立坐标系, 取任意微元 ds, 临近拉力 T_1, T_2 :

水平: $T_2 \cos \alpha_2 = T_1 \cos \alpha_1 = T_0$

竖直: $T_2 \sin \alpha_2 - T_1 \sin \alpha_1 = ma = \rho ds \; u_{tt}$

有: $T_0(\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1) = \rho ds \ u_{tt}$

$$T_0[u_x(x+dx,t)-u_x(x,t)]=\rho dx\; u_{tt}$$

$$\frac{T_0}{\rho} \times \frac{u_x(x+dx,t) - u_x(x,t)}{dx} = u_{tt}$$

Tips: (1) 斜率就是一阶导,(2) 小角度条件下, $ds \simeq dx$

六氯六

得波动方程:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

定解条件:

- (1) 初始条件 $u(x,t)|_{t=0} = \psi(x)$, $u_t(x,t)|_{t=0} = \Psi(x)$
- (2) 边界条件 $u(x,t)|_{x=0} = 0$, $u(x,t)|_{x=l} = 0$

若质点受外力作用,有:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t)$$

Remark

波动方程描述了围绕平衡态小幅震荡的规律,它不仅可描述琴弦、鼓膜、耳机的震动,也描述着光波、声波、地震波、引力波,甚至弦论中弦的运动。

固有函数正交

1. 波动方程

方程的建立

方程的求解

2. 热传导方程

3. 拉普拉斯方程



方程的求解

● 例 2、求一维波动方程

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} \\ u(x,t)|_{t=0} = \psi(x), \quad u_t(x,t)|_{t=0} = \Psi(x) \\ u(x,t)|_{x=0} = 0, \quad u(x,t)|_{x=l} = 0 \end{cases}$$

解: (傅里叶) 设 u(x,t) = T(t)X(x), 代回方程, 得:

$$T''(t)X(x) = a^{2}T(t)X''(x)$$

可分离变量



$$\frac{T^{"}}{a^{2}T} = \frac{X^{"}}{X} = -\lambda$$

转化为两常微分方程

■Remark 偏微分方程与常微分方程的分离变量法有何不同? 解方程 (1): 有特征 (辅助) 方程

$$\mu^2 + \lambda = 0$$

根为:
$$\begin{cases} \mu_1 = +\sqrt{-\lambda} \\ \mu_2 = -\sqrt{-\lambda} \end{cases}$$

- 分情况讨论:
- (1) 相异实根 $(\lambda < 0)$ 有通解: $X = Aexp^{\sqrt{-\lambda}x} + Bexp^{-\sqrt{-\lambda}x}$ 分别取 x = 0, x = l, 得定解方程组:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ exp^{\sqrt{-\lambda} l} & exp^{-\sqrt{-\lambda} l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



有解条件为:
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ exp^{\sqrt{-\lambda}\,l} & exp^{-\sqrt{-\lambda}\,l} \end{vmatrix} = 0$$
 很明显,这个行列式不等于 0 ,所以只有零解(A=0, B=0)

(2) 相同实根
$$(\lambda = 0)$$
,

则通解为:
$$X = Ax + B$$

分别取
$$x = 0, x = l$$
, 得定解方程组:

$$\begin{cases} B = 0 \\ Al + B = 0 \end{cases}$$

也只有零解



(3) 虚根
$$(\lambda>0)$$
, 即: $\mu_1=i\sqrt{\lambda}$, $\mu_2=-i\sqrt{\lambda}$

通解为: $X = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x$

分别取 x = 0, x = l, 得定解方程组:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos(\sqrt{\lambda} l) & \sin(\sqrt{\lambda} l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

系数行列式要为零

$$\sin(\sqrt{\lambda} \ l) = 0$$

$$\sqrt{\lambda} \ l = n \ \pi(n = 1, 2, 3, \dots)$$

• 固有值:
$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{I^2}$$

• 固有解:
$$X_n = \sin \frac{n\pi}{l} x = \sin \omega_n x$$



解方程 ||:

$$T'' + \lambda a^2 T = 0$$

代入
$$\lambda_n$$
, 得: $T'' + \lambda_n a^2 T = 0$

变形: $T'' + \omega_n^2 a^2 T = 0$

特征方程有虚根,通解:

$$T_n = C_n \cos \omega_n \ a \ t + D_n \sin \omega_n \ a \ t$$

原方程的基本解:

$$\begin{array}{rcl} u_n(x,t) & = & T_n(t)X_n(x) \\ & = & (a_n\cos\omega_n at + b_n\sin\omega_n at)\sin\omega_n x \\ & = & (a_n\cos\frac{n\pi at}{l} + b_n\sin\frac{n\pi at}{l})\sin\frac{n\pi x}{l} \end{array}$$

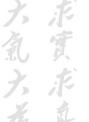


叠加解 (解函数):

$$\begin{array}{lcl} u(x,t) & = & \displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) \\ & = & \displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n \pi a t}{l} + b_n \sin \frac{n \pi a t}{l}) \sin \frac{n \pi x}{l} \end{array}$$

Remark 叠加解的思考与讨论:

- ·数学理解: 线性方程解的线性组合,依然是方程的解
- ·物理理解: It is not complicated. It is just a lot of it.
- 核心成果: 傅里叶级数与傅里叶变换



定系数,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi at}{l} + b_n \sin \frac{n\pi at}{l}) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

(1)
$$u(x,0) = \varphi(x) \implies \varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

$$(2) \ u_t(x,0) = \Psi(x) \implies \Psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi a}{l}$$

$$(2) \ u_t(x,0) = \Psi(x) \implies \Psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{n\pi a}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}$$

由傳里叶变换公式 (非对称), 写出系数:

田得里叶变换公式 (
$$2\int n\pi$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

$$b_n = \frac{l}{n\pi a} \frac{2}{l} \int_0^l \Psi(x) \sin\frac{n\pi x}{l} dx = \frac{2}{n\pi a} \int_0^l \Psi(x) \sin\frac{n\pi x}{l} dx$$

固有函数正交

1. 波动方程

方程的建立

方程的求解

2. 热传导方程

3. 拉普拉斯方程



≠ 固有函数正交性

■ 例 3、试证明固有函数的正交性

$$X_n = \sin \frac{n\pi}{l} x$$

解:固有函数是固有方程的解:

$$X_n'' + \lambda_n X_n = 0$$

$$X_m^{''} + \lambda_m X_m = 0$$

用
$$X_m$$
 乘第一式, X_n 乘第二式,

$$X_m X_n'' + \lambda_n X_m X_n = 0$$

$$X_n X_m'' + \lambda_m X_n X_m = 0$$

两式相减:

$$(\lambda_n-\lambda_m)X_nX_m=X_nX_m^{''}-X_mX_n^{''}$$



积分:

$$\begin{split} (\lambda_n - \lambda_m) \int\limits_0^t X_n X_m dx &= \int\limits_0^t [X_n X_m'' - X_m X_n''] dx \\ &= [X_n X_m' - X_m X_n']_0^l - \int\limits_0^l [X_n' X_m' - X_m' X_n'] dx \end{split}$$

$$(\lambda_n - \lambda_m) \int_0^t X_n X_m dx = 0$$

$$\int X_n X_m dx = 0 \ , \quad (n \neq m)$$



当 $n=m\neq 0$ 时,

$$\int_{0}^{l} X_{n} X_{m} dx = \int_{0}^{l} X_{n} X_{n} dx$$

$$= \int_{0}^{\infty} \sin^2 \frac{n\pi}{l} x dx = \frac{l}{2}$$

正交归一性

$$\int_{0}^{t} X_{n} X_{m} dx = \begin{cases} 0, & (n=m) \\ \frac{l}{2}, & (n \neq m) \end{cases}$$

17/6

≠ 求解实例

解函数:

● 例 4、求解零初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} &, \quad 0 < x < 1, t > 0 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 \\ u(x, 0) = \sin \pi x, u_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$

解: 固有值:
$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} = n^2 \pi^2$$

固有函数:
$$X_n = \sin \frac{n\pi}{l} x = \sin n\pi x$$

$$\begin{array}{rcl} u(x,t) & = & \displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi at}{l} + b_n \sin \frac{n\pi at}{l}) \sin \frac{n\pi x}{l} \\ & = & \displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\pi t + b_n \sin n\pi t) \sin n\pi x \end{array}$$





代入初值条件,

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \qquad b_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^l \Psi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

$$= 2 \int_0^1 \sin(\pi x) \sin n\pi x dx \qquad = \frac{2}{n\pi} \int_0^1 0 \sin n\pi x dx = 0$$

$$= 2 \int_0^1 \sin(\pi x) \sin \pi x dx = 1 \quad (n = 1)$$

解函数: $u(x,t) = \cos(\pi t)\sin(\pi x)$



求解波动方程初边值问题

1.
$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} , & 0 < x < l, t > 0 \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = \sin \frac{\pi x}{l}, u_t(x,0) = \sin \pi x \end{cases}$$
2.
$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} , & 0 < x < l, t > 0 \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = 3\sin \frac{3\pi x}{2l} + 6\sin(\frac{5\pi x}{2l}), u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$
3.
$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} , & 0 < x < 1, t > 0 \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = \sin 2\pi x, u_t(x,0) = x(1-x) \end{cases}$$

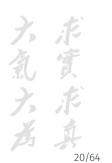


1. 波动方程

2. 热传导方程

方程的建立 方程的求解 三类边界条件

3. 拉普拉斯方程



方程的建立

方程的求解

三类边界条件

3. 拉普拉斯方程

2. 热传导方程

1. 波动方程



万程的建立

● 例 1、建立热传导方程

实验发现, 热量总是从温度高的地方传向温度低的地方, 服从傅里叶热传导定律:

$$q=-k\nabla u$$

式中,q 是热流强度 (定义为单位时间通过单位横截面积的热量);k 是材料的导热系数; ∇ 是梯度算子 $(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z})$,u 是温度函数。 试建立温度函数 u(x,y,z,t) 所满足的方程。

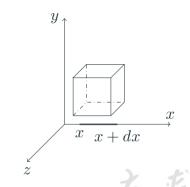
解: 傅里叶热传导定律有分量形式

$$q_{x_i} = -k \frac{\partial}{\partial x_i} u$$

 $(q_x|_{x+dx}-q_x|_x)dydz$

考虑单位时间介质任意小体积×方向的净流入:

$$= -\frac{\partial q_x}{\partial x} dx dy dz$$
$$= \frac{\partial}{\partial x} (k \frac{\partial u}{\partial x}) dx dy dz$$



 $(\frac{\partial u}{\partial z})]dxdydz$

悉的热量净流入: $\left[\frac{\partial}{\partial x}(k_x\frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(k_y\frac{\partial u}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(k_z\frac{\partial u}{\partial z})\right]dxdydz$

流入的热量导致介质温度发生变化 (热量守恒定律)

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t}dxdydz=[\frac{\partial}{\partial x}(k_x\frac{\partial u}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(k_y\frac{\partial u}{\partial y})+\frac{\partial}{\partial z}(k_z\frac{\partial u}{\partial z})]dxdydz$$

其中 C 是比热, ρ 是质量密度

对于各向同性介质:

$$\begin{split} c\rho\frac{\partial u}{\partial t} &= k[\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial u}{\partial z})] \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{k}{c\rho}[\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial u}{\partial z})] \\ u_t &= a^2[u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}] \\ u_t &= a^2\nabla^2 u = a^2\triangle u \end{split}$$

為真

对于一维导线: $u_t=a^2u_{xx}$ 如果有热源 F(x,y,z,t), 令 $f=\frac{F}{c\rho}$: $u_t=a^2u_{xx}+f$ 如果时间足够长,温度应不再随时间变化 $(u_t=0)$,得

- 无源 Laplace 方程: $\nabla^2 u = 0$
- 有源 Poisson 方程: $\nabla^2 u = -f$

■Remark 传导方程描述了热、电、声、磁、光等传输的基本规律,也称输运方程。

24/64

方程的建立

1. 波动方程

2. 热传导方程

方程的求解 三类边界条件 3. 拉普拉斯方程

✓ 方程的求解

■ 例 2、求解热传导方程

对于有限长导线, 求解一维热传导方程初边值问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & (0 < x < l, t > 0) \\ u(x,t)|_{t=0} = \psi(x) \\ u(x,t)|_{x=0} = 0, & u(x,t)|_{x=l} = 0 \end{cases}$$

解: 方程可分离变量,设 u(x,t) = T(t)X(x),代回方程

$$T^{'}(t)X(x) = a^{2}T(t)X^{''}(x)$$

$$\frac{T^{'}}{a^{2}T} = \frac{X^{''}}{X} = -\lambda$$





```
转化为两个常微分方程

方程 (I): \begin{cases} X^{''} + \lambda X = 0 \ , \ 0 < x < l \\ X(0) = 0 \ , \ X(l) = 0 \end{cases}
方程 (II): \begin{cases} T^{'} + \lambda a^{2}T = 0 \end{cases}
```

方程 (1) 是原固有值问题, 有解:

固有值: $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}$

固有函数: $X_n = \sin \frac{n\pi}{l} x$

27/64

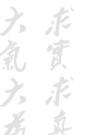
解方程 $||:T^{'}+\lambda a^{2}T=0$ 代入 λ_{n} , 得: $T^{'}+\lambda_{n}a^{2}T=0$ 变形成: $T^{'}+rT=0$

这是衰减数学模型,有公式:

$$T = Bexp(-rt)$$

通解:
$$T_n = B_n \exp(-(\frac{n\pi a}{l})^2 t)$$
 原方程的解为:

$$\begin{split} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \exp(-(\frac{n\pi a}{l})^2 t) \sin \frac{n\pi}{l} x \end{split}$$



代入定解条件:

$$u(x,0) = \psi(x) \Longrightarrow$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{l} x$$
 由傳里叶变换公式(非对称),得系数:

$$B_n = \frac{2}{l} \int_{0}^{1} \psi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx, \quad (n = 1, 2, 3, ...)$$



■ 例 3、求解热传导方程

对于有限长的导线, 求解如下一维热传导方程

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < L, \ t > 0 \\ u(0,t) = 0, & u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = x(L-x) \end{cases}$$

解: 零边界条件确定的固有值和固有函数:

固有值:
$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2} = (\frac{n\pi}{L})^2$$

固有函数:
$$X_n = \sin \frac{n\pi}{l} x = \sin \frac{n\pi}{L} x$$



解函数:

$$\begin{split} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \exp(-(\frac{n\pi a}{l})^2 t) \sin \frac{n\pi}{l} x \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \exp(-(\frac{n\pi a}{L})^2 t) \sin \frac{n\pi}{L} x \end{split}$$

$$B_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx$$
$$= \frac{2}{l} \int_0^L x(L-x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx$$

 $=4\frac{L^2}{(n\pi)^3}[1-(-1)^n]$

$$= \frac{2}{L} \times 2 \times (\frac{L2}{n\pi})^3 [1 - \cos n\pi]$$

$$-\cos n\pi$$
]

$$\cos n\pi$$
]

$$\cos n\pi$$
]



解函数:
$$u(x,t)=(\frac{4L^2}{\pi^3})\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}[1-(-1)^n]\exp(-(\frac{n\pi a}{L})^2t)\sin\frac{n\pi}{L}x$$

方程的建立 方程的求解

三类边界条件

3. 拉普拉斯方程

方氣方為

31/64

1. 波动方程

2. 热传导方程

╱ 固有值问题 ||

● 例 4、求解第二类边界条件热传导方程

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} &, \quad 0 < x < l, t > 0 \\ u_x(0,t) = 0, u_x(l,t) = 0 \\ u(x,0) = \psi(x) \end{cases}$$

解: 分离变量后, 偏微分方程可转化为

分程(I):
$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \ , \ 0 < x < l \\ X'(0) = 0 \ , \ X'(l) = 0 \end{cases}$$
 方程(II):
$$\begin{cases} T' + \lambda a^2 T = 0 \end{cases}$$



注意到方程 (1) 是导数边界条件 (二类边界条件), 不是原固有值问题。

• 解方程 (I): 基于以前的讨论,只有在 $\lambda > 0$ 即特征方程有虚根时,方程才有非零解。

通解为:

$$X = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x$$

求导:

$$X'(x) = \sqrt{\lambda}[-A\sin\sqrt{\lambda}x + B\cos\sqrt{\lambda}x]$$

代入导数边界条件 (分别取 x = 0, x = l), 得方程组

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\sin(\sqrt{\lambda} l) & \cos(\sqrt{\lambda} l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



系数行列式为零,得 $\sin \sqrt{\lambda} l = 0$

$$\lambda_n = (\frac{n\pi}{I})^2$$
 , $(n = 0, 1, 2, \dots)$

代回方程组, 得待定系数: $[A,B]^T = [1,0]^T$

固有函数:

固有值:

$$X_n = \cos \frac{n\pi}{l} x \;, \quad (n = {\color{red}0}, 1, 2, \ldots...)$$

级数解:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \exp(-(\frac{n\pi a}{l})^2 t) \cos \frac{n\pi}{l} x$$

系数:
$$\begin{cases} B_0 &= \frac{1}{l} \int_0^l \psi(x) dx \\ B_n &= \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx, \quad (n=1,2,.....) \end{cases}$$

求真

级数解:

$$u(x,t) = \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \exp(-(\frac{n\pi a}{l})^2 t) \cos \frac{n\pi}{l} x$$

■Remark 导数边界条件导致:

- · 固有函数: $X_n = \sin \frac{n\pi}{l} x \rightarrow X_n = \cos \frac{n\pi}{l} x$
- · 存在 n=0 项: $\cos \frac{n\pi}{l} = \cos \frac{0\pi}{l} = 1$





■ 例 5、求解如下初边值问题

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} &, \ 0 < x < \pi, t > 0 \\ u_x(0,t) = 0, u_x(l,t) = 0 \\ u(x,0) = x^2(\pi - x)^2 \end{cases}$$

解: 这是导数边界条件, 确定的固有值和固有函数为:

固有值:
$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2} = (\frac{n\pi}{\pi})^2 = n^2$$

固有函数:
$$X_n = \cos \frac{n\pi}{l} x = \cos nx$$

解函数:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \exp(-(\frac{n\pi a}{l})^2 t) \cos \frac{n\pi}{l} x$$



$$\begin{split} &=\frac{\pi}{15} \\ B_n &= \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 (\pi - x)^2 \cos nx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \times (-\frac{12\pi}{n^4}) [\cos n\pi + 1] \\ &= -\frac{24}{n^4} [(-1)^n + 1] \\ \text{解函数: } u(x,t) &= \frac{\pi^4}{30} - 24 \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n + 1}{n^4} \exp(-(na)^2 t) \cos nx \end{split}$$

 $B_0 = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) dx$

 $= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 (\pi - x)^2 dx$

Q 直接计算 n_0 项

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \exp(-(\frac{n\pi a}{l})^2 t) \cos \frac{n\pi}{l} x$$

代入初值条件:
$$x^2(\pi-x)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos \frac{n\pi}{l} x$$

取出第 0 项:
$$x^2(\pi-x)^2 = B_0 \cos \frac{0\pi}{l} x$$

积分:
$$\int_{0}^{\pi} x^{2}(\pi - x)^{2} dx = \int_{0}^{\pi} B_{0} dx$$

$$\frac{1}{6} \int (\pi - x)^4 dx = B_0 \pi$$

$$B_0 = \frac{1}{6\pi} \int_{2}^{\pi} (\pi - x)^4 dx = \frac{\pi^4}{30}$$

\) 计算积分 $\int_{0}^{\infty} x^{2}(\pi - x)^{2} \cos nx dx$ 细节

$$\psi(x) = x^2(\pi - x)^2$$
 , \mathbb{N} :

$$\psi'(x) = 2x(2x - \pi)(x - \pi)$$

$$\psi''(x) = 2\pi^2 - 12\pi x + 12x^2$$

$$\psi'''(x) = 24x - 12\pi$$

$$\psi^{(4)}(x) = 24$$

$$u^{(4)}(x) = \cos nx$$
,则:

$$\nu'''(x) = \frac{1}{n} \sin nx$$

$$\nu''(x) = -\frac{1}{n^2} \cos nx$$

$$\nu'(x) = -\frac{1}{n^3} \sin nx$$

$$\nu(x) = \frac{1}{n^4} \cos nx$$

$$\nu(x) = \frac{1}{n^4} \cos nx$$

应用分部积分公式

$$\int_{0}^{\pi} \psi(x)\nu^{(4)}(x)dx = [\psi\nu''' - \psi'\nu'' + \psi''\nu' - \psi'''\nu]|_{0}^{\pi} + \int_{0}^{\pi} \psi^{(4)}(x)\nu(x)dx$$
$$= [\psi\nu''' - \psi'\nu'' + \psi''\nu' - \psi'''\nu]|_{0}^{\pi}$$

- * (1) 式中: $\int_0^\pi \psi^{(4)}(x)\nu(x)dx = \frac{24}{n^4} \int_0^\pi \cos nx dx = 0$
- (2) 式中的第 1 和第 3 项等于零 $(\sin nx|_0^\pi)$
- (3) 式中第二项含 $2x(2x-\pi)(x-\pi)|_0^{\pi}$ 也为零, 因此有:

$$\int_{0}^{\pi} \psi(x)\nu^{(4)}(x)dx = [-\psi'''\nu]|_{0}^{\pi} = -\frac{12\pi}{n^{4}}[\cos n\pi + 1]$$





≠ 第三类边界条件

求第三类边界条件的固有值问题

$$III \begin{cases} X''(x) + \lambda X = 0 , & 0 < x < L \\ X'(0) = 0, X(L) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_n = \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4l^2} \\ X_n(x) = \cos \sqrt{\lambda} x \end{cases}$$

$$IV \begin{cases} X''(x) + \lambda X = 0 , & 0 < x < L \\ X(0) = 0, X'(L) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_n = \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4l^2} \\ X_n(x) = \sin \sqrt{\lambda} x \end{cases}$$

作业-1、求解热传导方程初边值问题 $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} &, \quad 0 < x < l, t > 0 \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = x(l-x) \end{cases}$ $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} &, \quad 0 < x < l, t > 0 \\ u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0 \\ u(x,0) = x(l-x/2) \end{cases}$

$$2$$
、求第三类边界条件固有值问题,并求固有函数的正交性
$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X = 0 \ , \ 0 < x < L \\ X'(0) = 0, X(L) = 0 \end{cases}$$

 $\begin{cases} X''(x) + \lambda X = 0 , & 0 < x < L \\ X(0) = 0, X'(L) = 0 \end{cases}$

- 3. 什么是固有值? 有何用处?
- 4. 什么是固有函数? 与固有值有何关系?
- 5. 分离变量法的数学思想是什么?
- 6. 什么是叠加原理? 与分离变量法有何关系
- 7. 正交性是什么意思? 有何用处?
- 8. 较复杂的分部积分法怎么用?





- 1. 波动方程
- 2. 热传导方程

3. 拉普拉斯方程

方程的建立 方程的求解 区域边界条件



3. 拉普拉斯方程

方程的建立

方程的求解

区域边界条件

43/64

1. 波动方程

2. 热传导方程

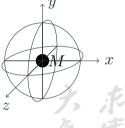
万程的建立

倒 1、建立拉普拉斯方程 对于位于原点的质量为 M 的质点,试建立其引力势函数 u(x,y,z,t) 所满足的方程.

解: 建立如图坐标系, 在空间任一点(x,y,z)放置试验质点 m m 感受的力为:

$$\overrightarrow{F}=-G\frac{Mm}{r^3}\overrightarrow{r}$$
 , $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

M 激发的引力场强为 $\overrightarrow{A} = \frac{GM}{r^3} \overrightarrow{r}$



取无穷远处场强为零,则引力势为 $u = -\int_{-\infty}^{\infty} \vec{A} \cdot d\vec{r} = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{GM}{r^2} dr = -\frac{GM}{r}$ 即有: $\overrightarrow{A} = -\nabla u$ 封闭球面S内的质量通量为 $\oint \vec{A} \cdot d\vec{S} = \frac{GM}{r^2} 4\pi r^2 = \int 4\pi G \rho d\tau$

由高斯定理可知:

 $\oint_{S} \overrightarrow{A} \cdot d\overrightarrow{S} = \int \nabla \cdot \overrightarrow{A} d\tau$

因此:

$$\nabla \cdot \overrightarrow{A} = 4\pi G \rho$$

由于 $\nabla \cdot \overrightarrow{A} = \nabla \cdot (-\nabla u) = -\nabla^2 u$ 得泊松方程:

$$\nabla^2 u = -4\pi G \rho$$



对于无源区域, 得拉普拉斯方程

$$\nabla^2 u = 0$$

定义拉普拉斯算子:

$$\triangle = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

拉普拉斯方程为:

$$\triangle u = 0$$

■Remark 拉普拉斯方程和泊松方程是描述各种势场的基本方程。



3. 拉普拉斯方程

方程的建立

方程的求解

区域边界条件

六氣六五

46/64

1. 波动方程

2. 热传导方程

□ 方程的求解

№ 例 2、求解矩形区域拉普拉斯方程

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & (0 < x < a, 0 < y < b) \\ u(x, 0) = f_1(x), u(x, b) = f_2(x) \\ u(0, y) = g_1(y), u(a, y) = g_2(y) \end{cases}$$

解: 这是第一类边界条件, 但不是零边界条件, 可转化为

$$(A) \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & (0 < x < a, 0 < y < b) \\ u(x,0) = 0, u(x,b) = 0 \\ u(0,y) = g_1(y), u(a,y) = g_2(y) \end{cases}$$

$$(B) \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & (0 < x < a, 0 < y < b) \\ u(x,0) = f_1(x), u(x,b) = f_2(x) \\ u(0,y) = 0, u(a,y) = 0 \end{cases}$$



当然,还可以进一步分解成四个边值问题! $(I) \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & (0 < x < a, 0 < y < b) \\ u(x,0) = 0, u(x,b) = 0 \\ u(0,y) = g_1(y), u(a,y) = 0 \end{cases}$ $(II) \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & (0 < x < a, 0 < y < b) \\ u(x,0) = 0, u(x,b) = 0 \\ u(0,y) = 0, u(a,y) = g_2(y) \end{cases}$ $(III) \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & (0 < x < a, 0 < y < b) \\ u(x, 0) = f_1(x), u(x, b) = 0 \\ u(0, y) = 0, u(a, y) = 0 \end{cases}$ $(IV) \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & (0 < x < a, 0 < y < b) \\ u(x,0) = 0, u(x,b) = f_2(x) \\ u(0,y) = 0, u(a,y) = 0 \end{cases}$ 48/64

以方程 (1) 为例求解

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & (0 < x < 1, 0 < y < 1) \\ u(x,0) = 0, u(x,1) = 0 \\ u(0,y) = g_1(y) = \sin \pi y, u(1,y) = 0 \end{cases}$$

解: 设有 u(x,y) = X(x)Y(y) , 代回原方程, 得

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y'' = 0$$

 $-\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} = -\lambda$

得两个常微分方程:

方程 (1):
$$\begin{cases} Y'' + \lambda Y = 0 \ , \ 0 < y < 1 \\ Y(0) = 0 \ , \ Y(1) = 0 \end{cases}$$
 方程 (2):
$$\begin{cases} X' - \lambda X = 0 \ , \ 0 < x < 1 \\ X(0) = \sin \pi y \ , \ X(1) = 0 \end{cases}$$
 方程 (1) 是一类条件零边界固有值问题,公式: 固有值: $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2} = n^2\pi^2$ 固有函数: $Y_n = \sin \frac{n\pi}{l} y = \sin n\pi y$

解方程 ||:代入 λ_n , 得: $X^{''} - n^2\pi^2 X = 0$ 特征方程有两相异实根,通解为:

$$X_n(x) = C_n exp(n\pi x) + D_n exp(-n\pi x)$$

结合 (1) (2), 方程(1)的基本解:

$$\begin{array}{lcl} u_n(x,y) & = & \left[C_n exp(n\pi x) + D_n exp(-n\pi x) \right] \sin(n\pi y) \\ & = & \left[a_n \cosh(n\pi x) + b_n \sinh(n\pi x) \right] \sin(n\pi y) \end{array}$$

叠加解:

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \cosh(n\pi x) + b_n \sinh(n\pi x)] \sin(n\pi y)$$

代入定解条件: u(0,y) = 0, 得

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\pi y) = 0 , \Rightarrow a_n = 0$$

四此:

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sinh(n\pi x) \sin(n\pi y)$$

 $\overline{n=1}$ 代入定解条件: $u(1,y) = \sin \pi y$, 得

$$u(1,y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sinh(n\pi) \sin(n\pi y) = \sin \pi y$$

正交性,得: $b_1 \sinh \pi = 1$, $b_n = 0$, (n > 1) 原方程得解:

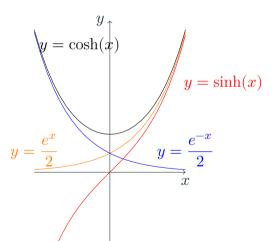
$$u(x,y) = \frac{\sinh \pi x}{\sinh \pi} \sin(\pi y)$$

同理,可以求出其他三个方程的解,最终进行线性叠加,得到矩形区域拉普 拉斯方程的解:

$$u(x,y) = u_I(x,y) + u_{II}(x,y) + u_{III}(x,y) + u_{IV}(x,y)$$



\(\text{ \(\delta}: \) 双曲函数: $\begin{cases} & \sinh(x) = -i\sin(ix) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ & \cosh(x) = \cos(ix) = \frac{e^x + e^{\frac{2}{x}}}{2} \end{cases}$



54/64

3. 拉普拉斯方程

方程的建立

方程的求解

区域边界条件

2. 热传导方程

1. 波动方程



圆域拉普拉斯方程

拉普拉斯算符在不同坐标系中的具体形式

直角坐标
$$(x,y,z)$$
: $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$
球坐标 (r,θ,φ) : $\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$
极坐标 (r,θ) : $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$

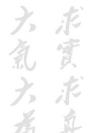
№ 例 3、求圆域拉普拉斯方程

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, & 0 < r < r_0 \\ u(r_0, \theta) = f(\theta), & 0 < \theta < 2\pi \end{cases}$$

解: 方程可分离变量,令 $u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$,代回原方程

$$R''\Theta + \frac{1}{r^2}R\Theta'' + \frac{1}{r}R'\Theta = 0$$
$$\frac{r^2R'' + rR'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \lambda$$

得两常微分方程:



$$\begin{split} & \mathsf{I} \, \mathsf{C} \, \Theta'' + \lambda \theta = 0 \\ & \mathsf{定解条件:} \ \ \Theta(\theta + 2\pi) = \Theta(\theta) \end{split}$$

定解条件:
$$\Theta(\theta + 2\pi) = \Theta(\theta)$$

II,
$$r^2R'' + rR' - \lambda R = 0$$

解方程 |: 根据以前的分析, 在 $\lambda > 0$ 肘, 有通解

$$\Theta(\theta) = A\cos\sqrt{\lambda}\theta + B\sin\sqrt{\lambda}\theta$$

由定解条件: $\Theta(2\pi) = \Theta(0)$, $\Theta'(2\pi) = \Theta'(0)$ 得方程:

$$\begin{bmatrix} \cos(\sqrt{\lambda}2\pi) - 1 & \sin(\sqrt{\lambda}2\pi) \\ -\sin(\sqrt{\lambda}2\pi) & \cos(\sqrt{\lambda}2\pi) - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

系教行列式为零. 得

$$(\cos(\sqrt{\lambda}2\pi) - 1)^2 + \sin^2(\sqrt{\lambda}2\pi) = 0$$



$$\cos(\sqrt{\lambda}2\pi)=1$$
 固有值: $\lambda_n=n^2$, $(n=0,1,2,...)$ 固有函数: $\Theta(\theta)=A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta$

解方程 ||:
$$r^2R'' + rR' - \lambda R = 0$$

把 $\lambda_n = n^2$ 代入, 得
 $r^2R'' + rR' - n^2R = 0$
这是欧拉方程: 令 $r = exp(t)$, 有 $t = \ln r$,求导

$$\frac{dR}{dr} = \frac{dR}{dt}\frac{dt}{dr} = \frac{1}{r}\frac{dR}{dt}$$

$$\frac{d^2R}{dr^2} = -\frac{1}{r^2}\frac{dR}{dt} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(\frac{dR}{dt})$$

$$\frac{d^2R}{dr^2} = \frac{1}{r^2}(\frac{d^2R}{dt^2} - \frac{dR}{dt})$$

代回方程, 得:

$$\frac{d^2R}{dt^2} - n^2R = 0$$

由特征方程有两相异实根,得通解:

$$R = C_n exp(nt) + D_n exp(-nt)$$

把 $t = \ln r$ 代回,得

$$R = C_n r^n + D_n r^{-n}$$

$$R = C_n r^n$$
, $(n = 0, 1, 2,)$

基本解:

$$u_n(r,\theta) = r^n(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$



叠加解:

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} r^n(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

代入定解条件:
$$u(r_0,\theta)=f(\theta)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)r_0^n$$

系数公式:

$$a_n = \frac{1}{r_0^n \pi} \int_{0}^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta$$

$$b_n = \frac{1}{r_0^n \pi} \int_{-\infty}^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta$$



$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \quad 0 < r < r_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(r_0, \theta) = A\cos(\theta), & 0 < \theta < 2\pi \end{cases}$$

解: 求系数:

$$a_1 = \frac{1}{r_0^1 \pi} \int_{0}^{2\pi} A \cos(\theta) \cos \theta d\theta$$

$$= \frac{A}{r_0 \pi} \int_{0}^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta = \frac{A}{r_0 \pi} \int_{0}^{2\pi} (1 + \cos 2\theta) d\theta = \frac{2A}{r_0}$$

$$a_n = \frac{1}{r_0^n \pi} \int_0^{2\pi} A \cos(\theta) \cos n\theta d\theta = 0 , (n \neq 1)$$

$$b_n = \frac{1}{r_0^n \pi} \int_0^{2\pi} A \cos(\theta) \sin n\theta d\theta = 0$$

叠加解:

$$\begin{array}{rcl} u(r,\theta) & = & \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n r^n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \\ & = & \frac{1}{2}a_0 + a_1 r \cos \theta \\ & = & \frac{A}{r_0}r \cos \theta \end{array}$$

Remark

若将边界条件修改为: $A\cos 2\theta$, 或 $A\sin 2\theta$, 解会如何变化?

が寛水

62/64

作业: 1、求解固有值问题
$$\begin{cases} Y'' + \lambda Y = 0 \ , \ 0 < y < 2\pi \\ Y(0) = Y(2\pi), \ Y'(0) = Y'(2\pi) \end{cases}$$
 2、求解圆域边值问题
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \ 0 < r < 1 \\ u(1,\theta) = A\cos 2\theta + B\cos 4\theta \end{cases}$$
 3、求解矩形域边值问题
$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & (0 < x,y < 1) \\ u(x,0) = u(0,y) = u(x,1) = 0 \\ u(1,y) = \sin 2\pi y \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & (0 < x,y < 1) \\ u(1,y) = u(0,y) = u(x,0) = 0 \\ u(x,1) = \sin n\pi x \end{cases}$$
 63/64

□ 课外读物和思考

了解和学习三大偏微分方程的各种解法:

《Partial Differential Equations》 - 作者: Lawrence C. Evans

《An Introduction to Partial Differential Equations》 - 作者: M. Renardy R. C.

Rogers



Thanks for your attention!

A & Q

