量子信息与量子通信

Quantum information and quantum communication

李小飞
光电科学与工程学院

2022 年 2 月 21 日

第 2 讲： 量子力学基础

Contents

量子态用希尔伯特空间中矢量描述

1、定义加法 $\xi = \psi + \varphi$

$$\psi + \varphi = \varphi + \psi \qquad \text{（交换律）}$$

$$(\psi + \varphi) + \xi = \psi + (\varphi + \xi) \qquad \text{（结合律）}$$

$$\psi + 0 = \psi \qquad \text{（零元）}$$

$$\psi + \varphi = 0 \qquad \text{（逆元）}$$

2、定义数乘　$\varphi = \psi a$

$\psi 1 = \psi$ 　(1 元)

$(\psi a)b = \psi(ab)$ 　(结合律)

$\psi(a+b) = \psi a + \psi b$ 　(第一分配律)

$(\psi + \varphi)a = \psi a + \varphi a$ 　(第二分配律)

大气大为 求实求真

3、定义内积　$c = (\psi, \varphi)$

$$(\psi, \varphi) = (\varphi, \psi)^*$$

$$(\psi, \varphi + \xi) = (\psi, \varphi) + (\psi, \xi) \qquad \text{(分配律)}$$

$$(\psi, \varphi a) = (\psi, \varphi) a$$

$$\Rightarrow (\psi a, \varphi) = (\psi, \varphi) a^*$$

$$(\psi, \psi) = c \geq 0$$

求實求真
大氣大局

例-1. 有定义在 C^n 空间的列矩阵，求内积:

$$\psi = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \qquad \varphi = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

解:

$$(\psi, \varphi) = \begin{pmatrix} a_1^* & a_2^* & a_3^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1^* b_1 + a_2^* b_2 + a_3^* b_3 = c$$

$$(\varphi, \psi) = \begin{pmatrix} b_1^* & b_2^* & b_3^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = b_1^* a_1 + b_2^* a_2 + b_3^* a_3 = c^*$$

大氣大爲 求實求真

例-2. 求定义在 x 空间的函数的内积:

解:

$$(\psi, \varphi) = \int_a^b \psi^*(x)\varphi(x)dx = c$$

$$(\psi, \varphi) = \int_a^b \varphi^*(x)\psi(x)dx = (\int_a^b \varphi(x)\psi^*(x)dx)^* = c^*$$

求實求真 大氣大為

4、定义空间

- 矢量空间：满足加法和数乘两种运算的集合
- 内积空间：满足加法、数乘和内积三种运算的集合
- 希尔伯特空间: 完全的内积空间

* 完全性：对给定任意小的实数 ε，总有数 N 存在，当 m, n>N 时，有

$$(\psi_m - \psi_n, \psi_m - \psi_n) < \varepsilon$$

Tips: 量子体系的状态用希尔伯特空间的矢量描述

5、几个概念

- 模（方）：$|\psi|^2 = (\psi, \psi) = c$
- 归一化：$|\psi|^2 = (\psi, \psi) = c = 1$
- 正交（线性无关）性: $(\psi, \varphi) = 0$
- 完全集: 有一组线性无关集，如果空间的任意矢量都可以在其上展开，则称它为一个完全集，记为 $\{\phi_i\}$

$$\psi = \sum_i a_i \phi_i = \sum_i (\phi_i, \psi) \phi_i$$

- 维度：最小完全集所包含矢量的数目相同，称这个数目为空间的维度
- 正交归一完全集：对于一个 n 维的完全集，有：

$$(\phi_i, \phi_j) = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, 2, 3, \cdots, n$$

- 基与基矢：称一个正交归一完全集为空间的一个基，它所含的矢量称不计算基矢（态）

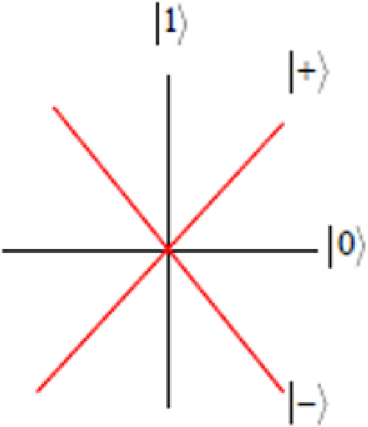
Tips: 同一空间可以有不同的基,

C^2 空间的一个基:

$$|0\rangle \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \qquad |1\rangle \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

C^2 空间的另一个基:

$$|+\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \qquad |-\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$



大氣大為 求實求真

6、左矢与右矢

考察内积：$(\psi,\psi)=\int\psi^*\psi d\tau$

同一波函数放在左边还是右边，意义有所不同：

右边是线性的：$(\psi,a\psi)=a(\psi,\psi)$

左边是反线性的：$(a\psi,\psi)=a^*(\psi,\psi)$

为了清楚地描述这种线性反线性特点，定义左矢和右矢

$$\langle\psi|,\qquad|\psi\rangle$$

内积：

$$(\psi,\varphi)\equiv\langle\psi|\varphi\rangle$$

有性质：

$$\langle a\psi|=\langle\psi|a^*$$

$$|a\psi\rangle=a|\psi\rangle$$

7、外积

考察展开式：

$$\psi = \sum_i a_i \phi_i = \sum_i (\phi_i, \psi)\phi_i$$

$$|\psi\rangle = \sum_i a_i |\phi_i\rangle = \sum_i \langle\phi_i|\psi\rangle|\phi_i\rangle = \sum_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i||\psi\rangle$$

令 $p_i = |\phi_i\rangle\langle\phi_i|$, 完备性：

$$\sum_i p_i = \sum_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i| = 1$$

称 $p_i = |\phi_i\rangle\langle\phi_i|$ 外积

例-3. 有定义在 C^n 空间的列矩阵，求内积和外积:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \qquad |\varphi\rangle = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

解:

$$\langle\psi|\varphi\rangle = \begin{pmatrix} a_1^* & a_2^* & a_3^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1^* b_1 + a_2^* b_2 + a_3^* b_3 = c$$

$$|\psi\rangle\langle\varphi| = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1^* & b_2^* & b_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1^* & a_1 b_2^* & a_1 b_3^* \\ a_2 b_1^* & a_2 b_2^* & a_2 b_3^* \\ a_3 b_1^* & a_3 b_2^* & a_3 b_3^* \end{pmatrix}$$

Tips: 内积是一个数，外积是一个矩阵！

大气大为 求实求真

Contents

算符

物理量用希尔伯特空间的线性厄密算符描述

1. 定义：

- 算符：描述态矢量之间的映射关系，即算符作用于一个态矢量，映射到另一个态矢量。

$$F|\Psi\rangle = |\psi\rangle$$

- 逆算符

$$F^{-1}|\psi\rangle = |\Psi\rangle$$

- 线性算符

$$F(a|\Psi\rangle + b|\psi\rangle) = aF|\Psi\rangle + bF|\psi\rangle$$

- 伴算符

$$\langle\psi| = \langle\Psi|F^{\dagger}$$

- 自伴 (厄密) 算符

$$F = F^\dagger$$

性质： $\langle \Psi F|\psi\rangle = \langle \Psi|F\psi\rangle = \langle \Psi|F|\psi\rangle$

- 幺正 (酉) 算符

$$F^{-1} = F^\dagger$$

性质： $FF^\dagger = F^\dagger F = I$, 通常写成 $UU^\dagger = U^\dagger U = I$
Tips:把一个空间所有矢量都用同一幺正算符作用，得到一个新的空间，即幺正 (酉) 变换是一种空间变换，

$$U|\Psi\rangle = |\Psi'\rangle$$

*Tips:*推导新旧空间算符之间的关系:

旧空间的算符:

$$F|\Psi\rangle = |\varphi\rangle$$

新空间的算符:

$$F'|\Psi'\rangle = |\varphi'\rangle$$

它们之间的关系:

$$F'U|\Psi\rangle = U|\varphi\rangle$$

$$F'U|\Psi\rangle = UF|\Psi\rangle$$

$$U^\dagger F'U|\Psi\rangle = U^\dagger UF|\Psi\rangle$$

$$U^\dagger F'U|\Psi\rangle = IF|\Psi\rangle$$

$$U^\dagger F'U = F$$

- 投影算符: 基矢的外积是一种投影算符,

对于展开式:

$$|\psi\rangle = \sum_i a_i|\phi_i\rangle = \sum_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i||\psi\rangle = \sum_i p_i|\psi\rangle = \sum_i |\psi_i\rangle$$

有:

$$p_i|\psi\rangle = \sum_i |\psi_i\rangle$$

即, 外积 $|\phi_i\rangle\langle\phi_i|$ 作用于 $|\psi\rangle$, 得到其在第 i 个基矢态上的投影分量!

大氣大爲 求實求真

- 测量算子: 量子信息学中常称投影算符为测量算子, 定义为

$$M_0 = |0\rangle\langle 0|, \qquad M_1 = |1\rangle\langle 1|$$

具有 2×2 的矩阵形式, 可以证明:

- 测量算子是自伴 (厄密) 算符:

$$M_m = M_m^{\dagger}$$

- 平方不变性:

$$M_m^2 = M_m$$

- 完备性:

$$M_0 + M_1 = M_0^2 + M_1^2 = M_0 M_0^{\dagger} + M_1 M_0^{\dagger} = I$$

- 测量后的态函数

$$
\begin{aligned}
M_0|\Psi\rangle &= |0\rangle\langle 0|(a_0|0\rangle + a_1|1\rangle) \\
&= |0\rangle\langle 0|a_0|0\rangle \\
&= a_0|0\rangle \\
&= \frac{a_0}{|a_0|}|0\rangle \qquad \textbf{(归一化)}
\end{aligned}
$$

- 测得的概率(密度)

$$
\begin{aligned}
\langle\Psi|M_0^\dagger M_0|\Psi\rangle &= \langle 0|a_0 a_0|0\rangle \\
&= \langle 0|0\rangle a_0^* a_0 \\
&= |a_0|^2 = p(0)
\end{aligned}
$$

重写测量后的状态

$$
M_m|\Psi\rangle = \frac{a_m|m\rangle}{\sqrt{\langle\Psi|M_m^\dagger M_m|\Psi\rangle}} = \frac{M_m|\Psi\rangle}{\sqrt{\langle\Psi|M_m^\dagger M_m|\Psi\rangle}}
$$

- 密度算符：任意态的外积是一种求概率密度的算符，简称密度算符，

任意态的展开式：

$$|\psi\rangle = \sum_i a_i|\phi_i\rangle$$

任意态的外积：

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$$

求其在基矢态上的平均值：

$$\langle\phi_i|\rho|\phi_i\rangle = \langle\phi_i||\psi\rangle\langle\psi||\phi_i\rangle = \langle\phi_i|\psi\rangle\langle\psi|\phi_i\rangle = a_i^* a_i = |a_i|^2 = \omega_i$$

密度算符的应用，平均值公式-3

$$\overline{F} = tr(A\rho)$$

2. 算符的矩阵表示

$$|\psi\rangle = F|\Psi\rangle$$

$$\langle i|\psi\rangle = \langle i|F|\Psi\rangle$$

$$\langle i|\psi\rangle = \sum_j \langle i|F|j\rangle\langle j|\Psi\rangle$$

$$\langle \psi_i| = \sum_j F_{ij}|\Psi_j\rangle$$

定义了算符矩阵元公式:

$$F_{ij} = \langle i|F|j\rangle$$

伴算符的矩阵等于原算符的厄密共轭:

$$F^\dagger = (F^*_{ij})^T$$

大氣大為 求實求真

例-4. 证明平均值公式-3：

$$\overline{F} = tr(A\rho)$$

证明: 由矩阵的迹的定义式

$$\begin{aligned} tr(A\rho) &= \sum_i \langle i|A\rho|i\rangle \\ &= \sum_i \langle i|A|\psi\rangle\langle\psi|i\rangle \\ &= \sum_i \langle\psi|i\rangle\langle i|A|\psi\rangle \\ &= \langle\psi|A|\psi\rangle \end{aligned}$$

3. 算符的本征方程

- 定义式:

$$F|\Psi\rangle = f|\Psi\rangle$$

- 相关定理:
  - 厄密算符的本征值是实数
  - 厄密算符的所有本征矢构成正交归一完全集
  - 当且仅当两厄密算符互相对易时才具有共同的本征矢完全集
  - 完全确定一个量子态所需要的彼此对易的一组力学量算符的最小集称为力学量完全集，所含力学量数目与体系的自由度数目相同

大气大为 求实求真

Contents

求實求真 大氣大為

** 以上讲的是单粒子体系的量子态及物理量的描述问题

张量积

- 对于多粒子体系，比如多量子比特系统，其所处的空间是子系统希尔伯特空间的张量积。也称直积空间。

1. 张量空间的计算基矢

子系统 A 是 n 维的，计算基（某厄密算符的本征函数系）为

$$\{|\phi_i\rangle\},\quad (i=1,2,3,\cdots,n)$$

子系统 B 是 m 维的，计算基为

$$\{|\varphi_j\rangle\},\quad (j=1,2,3,\cdots,m)$$

总系统是 n 张 m 维的张量空间，计算基为：

$$\{|\phi_i\rangle\otimes|\varphi_j\rangle\},\quad (i=1,2,3,\cdots,n;\quad j=1,2,3,\cdots,m)$$

可简写为：

$$\{|\phi_i\rangle\otimes|\varphi_j\rangle\}=\{|\phi_i\rangle|\varphi_j\rangle\}=\{|\phi_i\varphi_j\rangle\}=\{|ij\rangle\}$$

总体系的任意态是计算基矢的叠加态:

$$|\Psi\rangle = \sum_{i,j} a_{ij}|ij\rangle$$

例-写出双量子比特的计算基:

解: 双量子比特的基由四个计算基矢构成

$$\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$$

它们的矩阵形式为:

$$|00\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |01\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |10\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. 张量空间的算符

子系统 A 有算符 F_A, 子系统 B 有算符 F_B，总系统可定义它们的张量积

$$F_{AB} = F_A \otimes F_B$$

作用于总体系的任意态时，算法为:

$$F_A \otimes F_B |\Psi\rangle = F_A \otimes F_B \sum_{i,j} a_{ij} |ij\rangle = \sum_{i,j} a_{ij} F_A|i\rangle \otimes F_B|j\rangle$$

求實求真 大氣大為

3. 子系统的测量与约化密度矩阵

总体系任意态的密度矩阵

$$\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi| = \sum_{i,i',j,j'} a_{i'j'} a_{ij} |i'j'\rangle\langle ij|$$

定义子体系 A 的约化密度矩阵(把子系统 B 积分丢！)

$$\rho(A) = \sum_j \langle j|\rho|j\rangle = tr_B(\rho)$$

测量子体系 A 的物理量 F_A 的平均值为:

$$\bar{F}_A = tr_A(F_A \rho(A))$$

大氣大為 求實求真

Contents

1. 状态假设

量子体系的状态用希尔伯特空间的态矢量完全描述。

例-量子比特用 2 维希尔伯特空间的态矢量:

$$|\psi\rangle = a_0|0\rangle + a_1|1\rangle$$

完全描述了体系所有可能的状态!

求實求真 大氣大為

2. 演化假设

一个封闭量子体系的演化用幺正（酉）变换描述。

$$|\Psi'\rangle = U|\Psi\rangle$$

状态函数随时间的演化用薛定谔方程描述

$$i\hbar\frac{d|\Psi\rangle}{dt} = H|\Psi\rangle$$

例-量子比特:

一套普适量子逻辑门可实现任意幺正（酉）变换

3. 量子测量假设

量子测量由一组测量算子 $\{M_m\}$ 描述，测得测量值 m 的概率（密度）为

$$p(m) = \langle \Psi | M_m^\dagger M_m | \Psi \rangle$$

测量后的状态

$$\frac{M_m|\Psi\rangle}{\sqrt{\langle \Psi | M_m^\dagger M_m | \Psi \rangle}}$$

4. 复合系统假设

复合系统的状态空间是子系统的状态空间的张量积

基于以上 4 个假定，可以从数学上在 Hilbert 空间导出整个量子力学体系，那么基于假定导出的量子力学可靠吗？

学术讨论

Thanks for your attention!

A & Q

求實求真
大氣大為