量子信息与量子通信

Quantum information and quantum communication

李小飞

光电科学与工程学院

2022 年 3 月 8 日

第 5 讲：量子算法 (1)

Contents

量子并行性

- 量子算法的根本特点是量子并行性
- 与经典并行性的根本区别:
  - 经典计算每条线路计算一个分支任务，多条线路共同完成并行任务
    量子计算一条线路完成所有分支的计算任务
  - 经典计算各分支计算所需时间不同时，大量线路出现等待情况。
    量子并行各分支同时完成计算

杨子见歧道而哭之

Contents

Deutsch 算法

- 分析：二进制函数 $f(x)$ 的特点

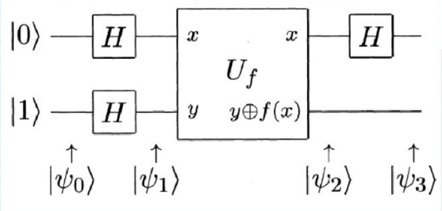
	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
x=0	0	0	1	1
x=1	0	1	0	1

称 f_1 和 f_4 为常函数（输出的结果同为“0”或同为“1”）

称 f_2 和 f_3 为平衡函数（输出“0”和“1”的概率均等）

- 任务：现在有一个函数黑盒子 U_f，要通过几次试算，才能知道封闭 $f(x)$ 的是常函数还是平衡函数
- 经典算法需要两次
  - (1) 输入 x=0，算到一个 f(x)，设为 0
  - (2) 输入 x=1，算到又一个 f(x)，若为 0，则 $f(x)$ 为常函数，否则为平衡函数
- 量子算法只需一次！

算法线路如下图



测量！

算法推导:

- $|\psi_0\rangle = |0\rangle\,|1\rangle$
- $|\psi_1\rangle = H\,|0\rangle\,H\,|1\rangle = \dfrac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}\,\dfrac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$

令： $|\psi_1\rangle = |x\rangle \dfrac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$

有： $U_f |\psi_1\rangle = |x\rangle \dfrac{|0 \oplus f(x)\rangle - |1 \oplus f(x)\rangle}{\sqrt{2}} = |x\rangle (-1)^{f(x)} \dfrac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$

if $f(x) = 0$, $\quad \dfrac{|0 \oplus f(x)\rangle - |1 \oplus f(x)\rangle}{\sqrt{2}} = \dfrac{|0 \oplus 0\rangle - |1 \oplus 0\rangle}{\sqrt{2}} = (-1)^{f(x)=0} \dfrac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$

if $f(x) = 1$, $\quad \dfrac{|0 \oplus f(x)\rangle - |1 \oplus f(x)\rangle}{\sqrt{2}} = \dfrac{|0 \oplus 1\rangle - |1 \oplus 1\rangle}{\sqrt{2}} = (-1)^{f(x)=1} \dfrac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$

$$|\psi_2\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \frac{|0 \oplus f(x)\rangle - |1 \oplus f(x)\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{|0\rangle (-1)^{f(0)} + |1\rangle (-1)^{f(1)}}{\sqrt{2}} \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$\text{if } f(0) = f(1), \quad |\psi_2\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |\psi_3\rangle = H|\psi_2\rangle = |0\rangle \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$\text{if } f(0) \neq f(1), \quad |\psi_2\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |\psi_3\rangle = H|\psi_2\rangle = |1\rangle \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

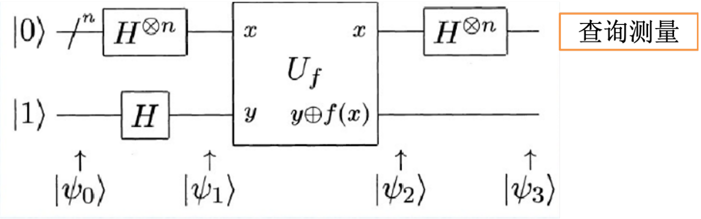
测量第一个位，如果是“0”，$f(x)$ 是常函数，否则是平衡函数。

Contents

- 任务：Alice 从 0 到 $(2^n - 1)$ 中选取一个整数 x 送给 Bob. Bob 应用某个常函数（对所有的 x，都有相同的 f(x)）或者平衡函数（对所有的 x，f(x) 有一半概率取“0”，另一半概率取“1”）进行计算，并把函数结果 $f(x)$ 发回给 Alice. Alice 猜 Bob 使用的函数是常函数还是平衡函数。请 Alice 猜几次才能成功。

- 经典算法最少两次，最多 $2^n/2+1$ 次
  - (1) 第一次返回 $f(x_1)$，第二次返回 $f(x_2)$，若 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 平衡函数!
  - (2) 若 $f(x_1) = f(x_2)$，并不能说明是常函数，因为平衡函数有一半概率函数值相同，游戏继续!
  - (3) 最差的情况是，$2^n/2$ 次的结果都相同，则依然不能判定!
  - (4) $2^n/2+1$ 次的结果与前面的还相同，则说明是常函数，否则是平衡函数。

- 量子算法只需一次！算法线路如下图



- 算法推导:

  - $|\psi_0\rangle = |0\rangle|0\rangle\cdots|0\rangle|1\rangle = |0\rangle^{\otimes n}|1\rangle$
  - $|\psi_1\rangle = H^{\otimes n}|0\rangle^{\otimes n}H|1\rangle = [\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}]^{\otimes n}\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}} = \sum_x \frac{|x\rangle}{\sqrt{2^n}}\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}$

求和是对所有的计算基矢态（2^n 个，即 $|00\cdots0\rangle, |00\cdots1\rangle, |11\cdots1\rangle$）

$$|\psi_1\rangle = \sum_x \frac{|x\rangle}{\sqrt{2^n}} \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned} U_f |\psi_1\rangle &= \sum_x \frac{|x\rangle}{\sqrt{2^n}} [\frac{|0 \oplus f(x)\rangle}{\sqrt{2}}] - \sum_x \frac{|x\rangle}{\sqrt{2^n}} [\frac{|1 \oplus f(x)\rangle}{\sqrt{2}}] \\ &= \sum_x \frac{|x\rangle}{\sqrt{2^n}} [\frac{|0 \oplus f(x)\rangle}{\sqrt{2}} - \frac{|1 \oplus f(x)\rangle}{\sqrt{2}}] \end{aligned}$$

if $f(x) = 0, \quad \frac{|0 \oplus f(x)\rangle - |1 \oplus f(x)\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{|0 \oplus 0\rangle - |1 \oplus 0\rangle}{\sqrt{2}} = (-1)^{f(x)=0} \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$

if $f(x) = 1, \quad \frac{|0 \oplus f(x)\rangle - |1 \oplus f(x)\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{|0 \oplus 1\rangle - |1 \oplus 1\rangle}{\sqrt{2}} = (-1)^{f(x)=1} \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$

$$|\psi_2\rangle = \sum_x \frac{(-1)^{f(x)} |x\rangle}{\sqrt{2^n}} \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$
\begin{aligned}
|\psi_3\rangle &= H^{\otimes n}\,|\psi_2\rangle \\
&= H^{\otimes n}\sum_x \frac{(-1)^{f(x)}\,|x\rangle}{\sqrt{2^n}}\,\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}} \\
&= \sum_x \frac{(-1)^{f(x)}H^{\otimes n}\,|x\rangle}{\sqrt{2^n}}\,\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}} \\
&= \sum_x \frac{(-1)^{f(x)}}{\sqrt{2^n}}\sum_z \frac{(-1)^{x\cdot z}\,|z\rangle}{\sqrt{2^n}}\,\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}} \\
&= \sum_{x,z} \frac{(-1)^{x\cdot z+f(x)}\,|z\rangle}{2^n}\,\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

$$|\psi_3\rangle = \sum_{x,z} \frac{(-1)^{x\cdot z+f(x)}}{2^n} |z\rangle \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

考察上式中的第一项 $|z\rangle = |00\cdots 0\rangle$ 项

$$\sum_{x,z} \frac{(-1)^{x\cdot z+f(x)}}{2^n} |z\rangle = \sum_{x} \frac{(-1)^{f(x)}}{2^n} |00\cdots 0\rangle$$

分析：当 f(x) 为常函数时，f(x) 都一样（0 或 1)，这一项的振幅必然为 1 或-1，由于 ψ_3 是归一化的，模长是 1，意味着除第一项外的所有其他项的振幅都为 “0”. 因此当 Alice 测一次，如果得的都是“$|00\cdots 0\rangle$”，则 Bob 用的是常函数，否则为平衡函数。

(1) 单位操作

$$H|0\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$H|1\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

- 统一表示为：(x,z 分别取 0 或 1)

$$H|x\rangle = \frac{\sum_z (-1)^{xz}|z\rangle}{\sqrt{2}}$$

(2) 双位操作

$$H^{\otimes 2}|00\rangle = \frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{|00\rangle}{\sqrt{2^2}} + \frac{|01\rangle}{\sqrt{2^2}} + \frac{|10\rangle}{\sqrt{2^2}} + \frac{|11\rangle}{\sqrt{2^2}}$$

$$H^{\otimes 2}|01\rangle = \frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{|00\rangle}{\sqrt{2^2}} - \frac{|01\rangle}{\sqrt{2^2}} + \frac{|10\rangle}{\sqrt{2^2}} - \frac{|11\rangle}{\sqrt{2^2}}$$

$$H^{\otimes 2}|10\rangle = \frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{|00\rangle}{\sqrt{2^2}} + \frac{|01\rangle}{\sqrt{2^2}} - \frac{|10\rangle}{\sqrt{2^2}} - \frac{|11\rangle}{\sqrt{2^2}}$$

$$H^{\otimes 2}|11\rangle = \frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{|00\rangle}{\sqrt{2^2}} - \frac{|01\rangle}{\sqrt{2^2}} - \frac{|10\rangle}{\sqrt{2^2}} + \frac{|11\rangle}{\sqrt{2^2}}$$

- 统一表示为：(x_1, x_2, z_1, z_2 分别取 0 或 1)

$$H^{\otimes 2}|x_1x_2\rangle = \frac{\sum_{z_1z_2}(-1)^{x_1z_1+x_2z_2}|z_1z_2\rangle}{\sqrt{2^2}}$$

$$H^{\otimes 2}|x\rangle = \frac{\sum_z (-1)^{x \cdot z}|z\rangle}{\sqrt{2^2}}$$

(3) 推广到 n 位操作

$$H^{\otimes n}|x\rangle = \frac{\sum_z (-1)^{x \cdot z}|z\rangle}{\sqrt{2^n}}$$

Thanks for your attention!

A & Q

求實求真
大氣大為