

# 量子力学与统计物理

Quantum mechanics and statistical physics

李小飞

光电科学与工程学院

December 8, 2021

# 目录

- 1 前情回顾
- 2 厄密算符运算性质
- 3 厄密算符本征性质



# 第七讲、厄密算符的性质



## 前情回顾

- 波函数描述体系的状态
- 算符给出体系的物理量
- 力学量算符是线性厄密算符



## 运算性质

- ① 两厄米算符之和仍为厄米算符
- ② 当且仅当两厄米算符对易时，它们之积才是厄米算符。
- ③ 无论两厄米算符是否对易，算符  $\frac{1}{2}(AB + BA)$  及  $\frac{1}{2i}(AB - BA)$  都是厄米算符。
- ④ 任意算符总可以分解成  $A = A_+ + iA_-$ ，且  $A_+$  和  $A_-$ ，都是厄米算符

## 1、试证明两厄米算符之和仍为厄米算符

**证明:**  $A, B$  为厄米算符, 则对于任意态, 有

$$(\psi, A\psi) = (A\psi, \psi), \quad (\psi, B\psi) = (B\psi, \psi)$$

对于它们的和, 有:

$$\begin{aligned}(\psi, (A+B)\psi) &= (\psi, A\psi) + (\psi, B\psi) \\&= (A\psi, \psi) + (B\psi, \psi) \\&= ((A+B)\psi, \psi)\end{aligned}$$

证毕!

2、当且仅当两厄米算符对易时，它们之积才是厄米算符。

**证明:**  $A, B$  为厄米算符，则对于任意态，

$$\begin{aligned}(\psi, (AB)\psi) &= (\psi, A(B\psi)) \\&= ((A\psi), (B\psi)) \\&= (B(A\psi), \psi) \\&= ((BA)\psi, \psi) \\&= ((AB)\psi, \psi)\end{aligned}$$

证毕!

3、无论两厄米算符是否对易，算符  $\frac{1}{2}(AB + BA)$  及  $\frac{1}{2i}(AB - BA)$  都是厄米算符

**证明:** A, B 为厄米算符，则对于任意态，

$$\begin{aligned}(\psi, \frac{1}{2}(AB + BA)\psi) &= \frac{1}{2}(\psi, AB\psi) + \frac{1}{2}(\psi, BA\psi) \\&= \frac{1}{2}(A\psi, B\psi) + \frac{1}{2}(B\psi, A\psi) \\&= \frac{1}{2}(BA\psi, \psi) + \frac{1}{2}(AB\psi, \psi) \\&= \frac{1}{2}((BA + AB)\psi, \psi) \\&= (\frac{1}{2}(BA + AB)\psi, \psi) \\&= (\frac{1}{2}(AB + BA)\psi, \psi)\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}(\psi, \frac{1}{2i}(AB - BA)\psi) &= (\psi, \frac{1}{2i}AB\psi) - (\psi, \frac{1}{2i}BA\psi) \\&= \frac{1}{2i}(\psi, AB\psi) - \frac{1}{2i}(\psi, BA\psi) \\&= \frac{1}{2i}(A\psi, B\psi) - \frac{1}{2i}(B\psi, A\psi) \\&= \frac{1}{2i}(BA\psi, \psi) - \frac{1}{2i}(AB\psi, \psi) \\&= -(\frac{1}{2i}BA\psi, \psi) + (\frac{1}{2i}AB\psi, \psi) \\&= (\frac{1}{2i}(AB - BA)\psi, \psi)\end{aligned}$$

证毕!

4、任意算符总可以分解成  $A = A_+ + iA_-$ , 且  $A_+$  和  $A_-$ , 都是厄米算符

证明:令:

$$A_+ = \frac{1}{2}(A + A^+), \quad A_- = \frac{1}{2i}(A - A^+)$$

有  $A = A_+ + iA_-$ , 问题转化为证  $\frac{1}{2}(A + A^+)$ ,  $\frac{1}{2i}(A - A^+)$  是厄米算符

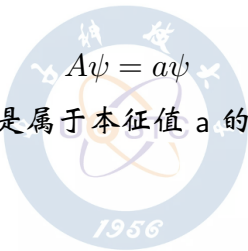
$$\begin{aligned} (\psi, \frac{1}{2}(A + A^+)\psi) &= \frac{1}{2}(\psi, (A)\psi) + \frac{1}{2}(\psi, (A^+)\psi) \\ &= \frac{1}{2}((A^+)\psi, \psi) + \frac{1}{2}((A^+)^+\psi, \psi) \\ &= \frac{1}{2}((A^+)\psi, \psi) + \frac{1}{2}(A\psi, \psi) \\ &= \frac{1}{2}((A^+ + A)\psi, \psi) = (\frac{1}{2}(A + A^+)\psi, \psi) \end{aligned}$$

## 本征方程

厄密算符  $A$  的本征方程为

$$A\psi = a\psi$$

称  $a$  是算符  $A$  的本征值,  $\psi$  是属于本征值  $a$  的本征函数



## 本征性质

- ① 厄米算符的本征值为实数
- ② 任意态下平均值为实数的算符必为厄米算符
- ③ 厄米算符属于不同本征值的本征函数正交
- ④ 简并的本征函数可重组成正交
- ⑤ 厄米算符的本征函数系具有完备性
- ⑥ 厄米算符的本征函数系具有封闭性

## **Temporary page!**

$\text{\LaTeX}$  was unable to guess the total number of pages correctly. As there was some unprocessed data that should have been added to the final page this extra page has been added to receive it.

If you rerun the document (without altering it) this surplus page will go away, because  $\text{\LaTeX}$  now knows how many pages to expect for this document.