工 程 数 学

Engineering Mathematics

李小飞

光电科学与工程学院

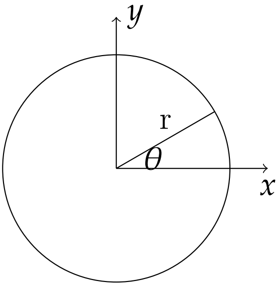
1 贝塞尔函数
- 贝塞尔方程
- 贝塞尔函数与 Gamma 函数
- 贝塞尔函数的性质

1. 贝塞尔函数
   - 贝塞尔方程
   - 贝塞尔函数与 Gamma 函数
   - 贝塞尔函数的性质

方程的建立

例 1、建立贝塞尔方程

对于半径为 r_0 的侧面绝缘的薄均匀圆盘，边界温度始终保持为 0 度，当盘的初始温度已知时 $(\Psi(x,y))$，求体系的温度分布。



解: 这是一个温度场，是非稳恒场，服从传导方程:

$$\begin{cases} u_t = a^2[u_{xx} + u_{yy}] \quad (0 < x^2 + y^2 < r_0^2, t > 0) \\ u(x,y,t)|_{x^2+y^2=r_0^2} = 0 \\ u(x,y,t)|_{t=0} = \Psi(x,y) \end{cases}$$

考虑到圆域边界条件，改用极坐标描述

$$\begin{cases} u_t = a^2[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}], \quad (0 < r < r_0, t > 0) \\ u(r_0,\theta) = 0, \quad 0 < \theta < 2\pi \\ u(r,\theta,t) = \Psi(r,\theta), \quad 0 < \theta < 2\pi \end{cases}$$

令：$u(r,\theta,t)=R(r)\Theta(\theta)T(t)$, 代回原方程，得：

$$R\Theta T' = a^2[R''\Theta T + \frac{1}{r}R'\Theta T + \frac{1}{r^2}R'\Theta''T(t)]$$

整理：

$$-\frac{T'}{a^2T} = \frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2}\frac{\Theta''}{\Theta} = -\lambda$$

转化为两个方程：

$$T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0 \qquad \ldots\ldots. \qquad (1)$$

$$r^2\frac{R''(r)}{R(r)} + r\frac{R'(r)}{R(r)} + \lambda r^2 + \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = 0 \qquad \ldots\ldots \quad (2)$$

方程 1 是衰减模型，已求解！
方程 2 是固有值问题，可继续分离变量：

$$r^2\frac{R''(r)}{R(r)} + r\frac{R'(r)}{R(r)} + \lambda r^2 = -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = \mu$$

得角向固有值问题：$\begin{cases} \Theta''(\theta) + \mu\Theta(\theta) = 0 \\ \Theta(\theta) = \Theta(\theta + 2\pi) \\ \Theta'(\theta) = \Theta'(\theta + 2\pi) \end{cases}$

和径向固有值问题：$\begin{cases} r^2R''(r) + rR'(r) + (\lambda r^2 - \mu)R(r) = 0 \\ R(r_0) = 0 \end{cases}$

角向固有值问题有解,
固有值:

$$\mu = n^2, \qquad (n = 0,1,2,3...)$$

固有函数:

$$\Theta_n(\theta) = a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta), \qquad (n = 0,1,2,3...)$$

$$\Theta_n(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-in\theta}, \qquad (n = 0,1,2,3...)$$

把 $\mu = n^2$, 代回径向方程，得一类特殊固有值问题:

$$\begin{cases} r^2R''(r) + rR'(r) + (\lambda r^2 - n^2)R(r) = 0 \\ R(r_0) = 0 \end{cases}$$

考虑对圆域的波动方程：

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2[u_{xx} + u_{yy}] \quad (0 < x^2 + y^2 < r_0^2, t > 0) \\ u(x,y,t)|_{x^2+y^2=r_0^2} = 0 \\ u(x,y,t)|_{t=0} = \Psi(x,y) \\ u_t(x,y,t)|_{t=0} = \varphi(x,y) \end{cases}$$

如果进行变量分离，也得到特殊固有值问题！

$$\begin{cases} r^2R''(r) + rR'(r) + (\lambda r^2 - n^2)R(r) = 0 \\ R(r_0) = 0 \end{cases}$$

处理一下…，令:

$$x = \sqrt{\lambda} r, \qquad y(x) = R(r) = R(\frac{x}{\sqrt{\lambda}})$$

有:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dR}{dr}\frac{dr}{dx} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\frac{dR}{dr}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\lambda}\frac{dR^2}{dr^2}$$

代回原方程，得：

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-n^2)y=0$$

称为 n(整数) 阶贝塞尔方程.
比较与欧拉方程的关系：

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(n^2)y=0$$

可以发现贝塞尔方程没有初等函数的表达式解！

方程的求解

例 2、求解贝塞尔方程

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-n^2)y=0$$

解:设方程有级数解:

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{s+k}$$

求导:

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty}(s+k)a_k x^{s+k-1}$$

$$y'' = \sum_{k=0}^{\infty}(s+k)(s+k+1)a_k x^{s+k-2}$$

代回原方程，得:

$$\sum_{k=0}^{\infty}[(s+k)^2 - n^2]a_k x^{s+k} + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} x^{s+k} = 0$$

第一项 (k=0) 系数应为零:

$$(s+k)^2 - n^2 = 0, \quad \rightarrow s_1 = -n, \qquad s_2 = n.$$

第二项 (k=1) 系数应为零:

$$[(s+k)^2-n^2]a_1=0, \qquad \rightarrow a_1=0.$$

后面各项 (k>1) 系数都应为零:

$$[(s+k)^2-n^2]a_k+a_{k-2}=0, \quad (k=2,3,4,\ldots)$$

存在递推关系:

$$a_k=-\frac{1}{(s+k)^2-n^2}a_{k-2}$$

由 $a_1=0, \qquad \rightarrow \qquad a_{2m+1}=0$。
取 $s=n$, 得:

$$a_{2m}=\frac{-1}{(n+2m)^2-n^2}a_{2m-2}=\frac{-1}{2m(2n+2m)}a_{2m-2}, \qquad (m=1,2,3,\ldots$$

归纳，得:

$$a_{2m} = (-1)^m \frac{1}{2^{2m} m!(n+m)(n+m-1)...(n+1)} a_0$$

取：$a_0 = 1/2^n n!$，得:

$$a_{2m} = (-1)^m \frac{1}{2^{2m+n} m!(n+m)!}$$

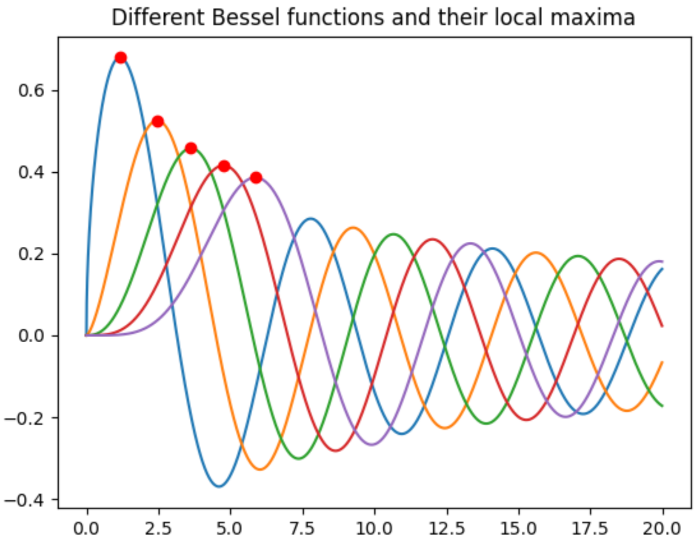
贝塞尔方级数特解:

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m} x^{n+2m}$$

分析收敛性，发现:

$$\lim_{m\to\infty} \left|\frac{a_{2m+2}}{a_{2m}}\right| = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{4(m+1)(n+m+1)} = 0$$

说明此级数必为某函数的展开式，称之为贝塞尔函数。


Different Bessel functions and their local maxima
0.6
0.4
0.2
0.0
−0.2
−0.4
0.0
2.5
5.0
7.5
10.0
12.5
15.0
17.5
20.0

贝塞尔（Bessel，Friedrich Wilhelm，1784～1846）德国天文学家，数学家，天体测量学的奠基人. 提出贝塞尔函数，讨论该函数的一系列性质及其求值方法，为解决物理学、天文学信息学有关问题提供了重要工具。

作业

1、由圆域波动方程导出贝塞尔方程

2、求衰减模型

$$T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0 \qquad \ldots\ldots. \qquad (1)$$

3、求角向固有值及归一化的固有函数:

$$\begin{cases} \Theta''(\theta) + \mu\Theta(\theta) = 0 \\ \Theta(\theta) = \Theta(\theta + 2\pi) \\ \Theta'(\theta) = \Theta'(\theta + 2\pi) \end{cases}$$

贝塞尔函数

零阶贝塞尔函数:

$$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{1}{m!m!}(\frac{x}{2})^{2m}$$

n 阶贝塞尔函数:

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{1}{m!(n+m)!}(\frac{x}{2})^{n+2m}$$

第二类塞尔函数:

$$Y_\alpha(x) = \frac{J_\alpha(x)\cos(\alpha\pi) - J_{-\alpha}(x)}{\sin(\alpha\pi)}$$

贝塞尔函数在除 $x = 0$ 点外的整个实数轴上收敛。

Γ 函数及其性质

为讨论贝塞尔函数的性质，先定义 Gamma 函数

$$\Gamma(x)=\int_0^{\infty} t^{x-1}e^{(}-t)dt, \qquad (x>0)$$

性质 1: Gamma 函数有递推式:

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$$

证明:

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^{\infty} t^{x}e^{-t}dt \\ &= -t^{x}e^{-t}|_0^{\infty}+x\int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt \\ &= x\int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt = x\Gamma(x)\end{aligned}$$

性质 2:自变量为正整数的 Gamma 函数有如下形式:

$$\Gamma(n+1)=n!$$

证明: 由递推公式

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1)&=x\Gamma(x)\\ \Gamma(n+1)&=n\Gamma(n)\\ &=n(n-1)\cdots 1\Gamma(1)\\ &=n!\int_0^{\infty}e^{-t}dt\\ &=n!\end{aligned}$$

性质 3: 非正整数点极限为无穷大

$$\lim_{x \to -n} \Gamma(x) = \infty, \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

证明: 由递推公式

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\Gamma(x+1)$$

$$\lim_{x \to 0} \Gamma(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x}\Gamma(x+1) = \infty$$

$$\lim_{x \to -1} \Gamma(x) = \lim_{x \to -1} \frac{1}{x}\Gamma(x+1) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x-1}\Gamma(x) = \infty$$

$$\cdots\cdots$$

$$\lim_{x \to -n} \Gamma(x) = \lim_{x \to -n} \frac{1}{x}\Gamma(x+1) = \lim_{x \to -(n-1)} \frac{1}{x-1}\Gamma(x) = \infty$$

推论:

$$\frac{1}{\Gamma(-n)} = 0, \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

性质 4: 半正整数 Γ 函数

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(m+\frac{1}{2}) = \frac{(2m-1)!!}{2^m}\sqrt{\pi}$$

现在讨论贝塞尔函数的性质:

性质 1: 负数阶贝塞尔函数与正数阶贝塞尔函数有如下关系

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

证明: 用 Γ 函数写出贝塞尔函数:

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m!(n+m)!} (\frac{x}{2})^{n+2m}$$

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m!\Gamma(n+m+1)} (\frac{x}{2})^{n+2m}$$

负数阶塞尔函数可写成

$$J_{(-n)}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m!\Gamma(-n+m+1)} (\frac{x}{2})^{-n+2m}$$

对于 $m < n$ 的项，由于分母中的 Gamma 函数为无穷大，所以都为零：

$$J_{(-n)}(x) = \sum_{m=n}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m!\Gamma(-n+m+1)} (\frac{x}{2})^{-n+2m}$$

令 $m - n = k$, 有 $m = n + k$,

$$J_{(-n)}(x) = (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(n+k)!\Gamma(k+1)} (\frac{x}{2})^{n+2k}$$

$$J_{-n}(x) = (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(n+k)!k!} (\frac{x}{2})^{n+2k} = (-1)^n J_n(x)$$

性质 2: 半整数阶贝塞尔函数与三角函数有如下关系

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x, \qquad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$$

证明: 基于 Gamma 函数，可以写出半整数阶贝塞尔函数

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m!\Gamma(n+m+1)} (\frac{x}{2})^{n+2m}$$

$$J_{1/2}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m!\Gamma(1/2+m+1)} (\frac{x}{2})^{1/2+2m}$$

其中,

$$
\begin{aligned}
\Gamma(1/2+m+1) &= (\frac{2m+1}{2})\Gamma(1/2+m) \\
&= (\frac{2m+1}{2}\frac{2m-1}{2})\Gamma(1/2+m-1) \\
&\cdots\cdots \\
&= \frac{(2m+1)!!}{2^{m+1}}\Gamma(1/2) \\
&= \frac{(2m+1)!!}{2^{m+1}}\sqrt{\pi}
\end{aligned}
$$

代回，有：

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$$

同理，有

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$$

证毕！

作业

1、证明 $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$ 2、证明

$$J_{-1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$$

性质 3: 贝塞尔函数的导数与递推式

$$\frac{d}{dx}[x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x)$$
$$\frac{d}{dx}[x^{-n} J_n(x)] = -x^{-n} J_{n+1}(x)$$
$$2nJ_n(x) = xJ_{n-1}(x) + xJ_{n+1}(x)$$
$$2J_n'(x) = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)$$

证明:

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m!\Gamma(n+m+1)} (\frac{x}{2})^{n+2m}$$

等于两端乘以 x^n 再求导:

$$\frac{d}{dx}[x^n J_n(x)] = \frac{d}{dx} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m!\Gamma(n+m+1)} (\frac{x^{2n+2m}}{2^{n+2m}})$$

$$\frac{d}{dx}[x^n J_n(x)] = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{1}{m!\Gamma(n+m+1)}(\frac{(2n+2m)x^{2n-1+2m}}{2^{n+2m}})$$

$$= x^n \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{1}{m!\Gamma(n-1+m+1)}(\frac{x^{n-1+2m}}{2^{n-1+2m}})$$

$$= x^n J_{n-1}(x)$$

同理，得:

$$\frac{d}{dx}[x^{-n}J_n(x)] = -x^{-n}J_{n+1}(x)$$

把上二式左端求导，然后相加相减，得

$$2nJ_n(x) = xJ_{n-1}(x) + xJ_{n+1}(x)$$

$$2J_n'(x) = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)$$

性质 4: 贝塞尔函数的零点及其正交归一性

解:对 n(整数) 阶贝塞尔方程

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-n^2)y=0$$

做变量代换

$$y=\frac{u}{\sqrt{x}}$$

得到 u(x) 的方程:

$$u''+[1+\frac{\frac{1}{4}-n^2}{x^2}]u=0$$

当 $x\to\infty$ 有方程:

$$u''+u=0$$

通解为

$$u = A\cos(x+\theta)$$

确定 A 和 θ, 得 n 阶贝塞尔函数的渐近公式

$$J_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

得零点近似公式:

$$\mu_m^n \approx m\pi + \frac{n\pi}{2} + \frac{3\pi}{4}$$

对于热传导方程和波动方程，其解为 n 阶贝塞尔函数 $J_n(x)$，对于零边界条件，有 $J_n(\sqrt{\lambda}R) = 0$, 基此可确定:
(1) 固有值:

$$\sqrt{\lambda}R = \mu_m^n \qquad \rightarrow \qquad \lambda_m^n = \left(\frac{\mu_m^n}{R}\right)^2$$

(2) 固有函数:

$$F_m^n(r) = J_n(\frac{\mu_m^n}{R}r)$$

固有函数体现塞尔函数的正交归一性:

$$\int_0^R rJ_n(\frac{\mu_m^n}{R}r)J_n(\frac{\mu_k^n}{R}r)dr = ?$$

证明:对径向方程做等价变换

$$r^2F'' + rF' + (\lambda r^2 - n^2)F = 0$$

$$rF'' + F' + ((\frac{\mu_m^n}{R})^2 r - \frac{n^2}{r})F = 0$$

$$(rF')' + ((\frac{\mu_m^n}{R})^2 r - \frac{n^2}{r})F = 0$$

令:

$$J_n(\frac{\mu_m^n}{R}r) = F_1, \qquad J_n(\frac{\mu_k^n}{R}r) = F_2$$

有

$$(rF_1')' + ((\frac{\mu_m^n}{R})^2 r - \frac{n^2}{r})F_1 = 0 \cdots (1)$$

$$(rF_2')' + ((\frac{\mu_m^n}{R})^2 r - \frac{n^2}{r})F_2 = 0 \cdots (2)$$

$(1) \times F_2, (2) \times F_1$, 所得两次相减，并做积分，有

$$\int_0^R \left[\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{R}\right)^2 - \left(\frac{\mu_k^{(n)}}{R}\right)^2\right] rF_1F_2 dr = \int_0^R [F_1\left(rF_2'\right)' - F_2\left(rF_1'\right)']dr$$

$$=[rF_1F_2']|_0^R-[rF_2F_1']|_0^R+\int_0^R rF_2'F_1dr-\int_0^R rF_1'F_2dr$$

$$=\int_0^R rF_2'F_1dr-\int_0^R rF_1'F_2dr$$

$$=0$$

$$\rightarrow \qquad \int_0^R rF_1F_2dr=0$$

正交性，证毕！

下面证明归一性:

$$r^2F'' + rF' + (\lambda r^2 - n^2)F = 0$$

$$2r^2F'F'' + 2r(F')^2 + (\lambda r^2 - n^2)F'F = 0$$

整理:

$$[r^2(F')^2 + (\lambda r^2 - n^2)F^2]' = 2\lambda rF^2$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^R rF^{\,2}dr =& \frac{1}{2\lambda}\int_0^R [r^2(F')^2+(\lambda r^2-n^2)F^2]'dr \\
=& \frac{1}{2\lambda}|[r^2(F')^2+(\lambda r^2-n^2)F^2|_0^R \\
=& \frac{1}{2\lambda}R^2(F'(R))^2 \\
=& \frac{1}{2}R^2[J_n'(\mu_m^n)]^2 \\
=& \frac{R^2}{2}[J_{n+1}(\mu_m^n)]^2
\end{aligned}
$$

应用实例

求解圆域热传导问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right), 0 < r < R, 0 < \theta < 2\pi \\ u|_{r=R} = 0, u|_{t=0} = \varphi(r,\theta) \end{cases}$$

解: 令

$$u(r,\theta,t) = T(t)V(r,\theta)$$

代入方程，进行第一次分离变量，得衰减方程:

$$T' + \lambda a^2 T = 0, \qquad \cdots (1)$$

及亥姆霍兹方程:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \lambda V = 0, 0 < r < R, 0 \le \theta \le 2\pi \\ V|_{r=R} = 0, 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$

令

$$V(r,\theta) = F(r)G(\theta)$$

, 代入亥姆霍兹方程，得两个方程

$$G'' + \mu G = 0, \qquad \cdots (2)$$

$$r^2F'' + rF' + (\lambda r^2 - \mu)F = 0, \qquad \cdots (3)$$

方程（1）的解为:

$$T(t) = Ae^{-\lambda a^2 t}$$

方程（2）的解为:

$$G(\theta) = C_1 \cos\sqrt{\mu}\theta + C_2 \sin\sqrt{\mu}\theta$$

由周期性边界条件，有 $G(2\pi) = G(0)$, 必有 $\cos\sqrt{\mu}\theta = 1$, 得固有值:

$$\mu = n^2, \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

固有函数:

$$G_0(\theta) = \frac{1}{2}a_0, G_n(\theta) = a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta, \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

固有函数也可写成 $G_n(theta) = a_n e^{-in\theta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-in\theta}$

将固有值代入方程（3），得方程

$$r^2F'' + rF' + (\lambda r^2 - n^2)F = 0$$

令 $x = \sqrt{\lambda}r, y(x) = F(x/\sqrt{\lambda})$, 方程转化为标准整数贝赛尔方程：

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)y = 0$$

则方程（3）的解用贝赛尔函数的零点表示：
固有值：

$$\lambda_m^n = (\frac{\mu_m^n}{R})^2$$

固有函数：

$$F_m^n(r) = J_n(\frac{\mu_m^n}{R}r)$$

原方程的基本解为:

$$u(r,\theta,t) = F_m^n(r)G_n(\theta)e^{-\lambda_m a^2 t}$$

叠加解为:

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} A_m^n F_m^n(r)G_n(\theta)e^{-\lambda_m a^2 t}$$

应用初值条件,

$$\varphi(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} A_m^n F_m^n(r)G_n(\theta)$$

利用正交归一性确定系数 A_m^n

$$\int_0^{2\pi} G_k^*(\theta)\varphi(r,\theta)d\theta = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} A_m^n F_m^n(r)\int_0^{2\pi} G_n(\theta)G_k(\theta)d\theta$$

$$\int_0^{2\pi} G_n^*(\theta)\varphi(r,\theta)d\theta = \sum_{m=0}^{\infty} A_m^n F_m^n(r)$$

$$\int_0^{R}\int_0^{2\pi} G_n^*(\theta)rJ_n(\frac{\mu_k^n}{R}r)\varphi(r,\theta)d\theta dr = \sum_{m=0}^{\infty} A_m^n \int_0^{R} rJ_n(\frac{\mu_k^n}{R}r)J_n(\frac{\mu_m^n}{R}r)dr$$

$$\int_0^{R}\int_0^{2\pi} G_n^*(\theta)rJ_n(\frac{\mu_m^n}{R}r)\varphi(r,\theta)d\theta dr = A_m^n\frac{R^2}{2}[J_{n+1}(\mu_m^n)]^2$$

$$\rightarrow A_m^n = \frac{2}{R^2[J_{n+1}(\mu_m^n)]^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} G_n^*(\theta) r J_n(\frac{\mu_m^n}{R} r) \varphi(r,\theta) d\theta dr$$

作业

1、证明

$$J_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}[\frac{1}{x}\sin x - \cos x]$$

2、证明

$$\frac{d}{dx}[x^{-n}J_n(x)] = -x^{-n}J_{n+1}(x)$$

3、用分离变量法分析球域热传导方程

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}), \qquad (0 < r < R)$$