工 程 数 学

Engineering Mathematics

李小飞

光电科学与工程学院

第二章 三大偏微分方程（6 学时）

Definition

偏微分方程 (PDE) 指未知函数是多元函数的微分方程，方程的函数（物理量）多以时间和空间为变量，这些方程的来源和应用通常具有物理学背景。又称为数学物理方程。

三大偏微分方程:

- 波动方程

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

- 热传导方程

$$u_t = a^2 \nabla^2 u$$

- 拉普拉斯方程

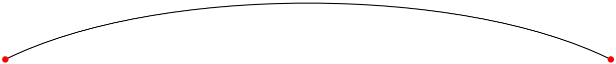
$$\nabla^2 u = 0$$

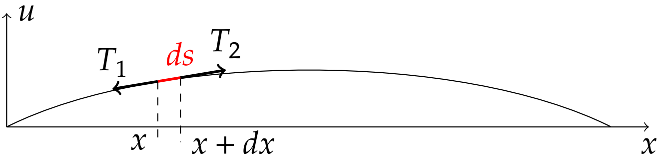
方程的建立

自然界普遍存在各种振动，振动的传播形成波，服从统一的方程。

例 1、求弦振动方程

考虑均匀柔软的细弦线，二端固定，受到扰动后在平衡位置作微小运动。分析位移函数 u(x，t) 满足的方程。





解: 建立坐标系, 取任意微元 ds, 临近拉力 T_1, T_2:

水平: $T_2 \cos\alpha_2 = T_1 \cos\alpha_1 = T_0$

竖直: $T_2 \sin\alpha_2 - T_1 \sin\alpha_1 = ma = \rho ds\ u_{tt}$

有 : $T_0(\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1) = \rho ds\ u_{tt}$

$$T_0[u_x(x+dx,t) - u_x(x,t)] = \rho dx\ u_{tt}$$

$$\frac{T_0}{\rho} \times \frac{u_x(x+dx,t) - u_x(x,t)}{dx} = u_{tt}$$

得波动方程：

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

定解条件:

(1) 初始条件 $u(x,t)|_{t=0} = \psi(x),\ u_t(x,t)|_{t=0} = \Psi(x)$

(2) 边界条件 $u(x,t)|_{x=0} = 0,\ u(x,t)|_{x=l} = 0$

若质点受外力作用，有：

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t)$$

Remark

波动方程描述了围绕平衡态小幅震荡的规律，它不仅可描述琴弦、鼓膜、耳机的震动，也描述着光波、声波、地震波、引力波，甚至弦论中弦的运动。

方程的求解

例 2、求一维波动方程

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} \\ u(x,t)|_{t=0} = \psi(x), \quad u_t(x,t)|_{t=0} = \Psi(x) \\ u(x,t)|_{x=0} = 0, \quad u(x,t)|_{x=l} = 0 \end{cases}$$

解: (傅里叶)　设 $u(x,t) = T(t)X(x)$，代回方程, 得:

$$T''(t)X(x) = a^2 T(t)X''(x)$$

可分离变量

$$\frac{T''}{a^2T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

转化为两常微分方程

方程（I）: $\begin{cases} X'' + \lambda X = 0\ , \quad 0 < x < l \\ X(0) = 0\ ,\ X(l) = 0 \end{cases}$

方程（II）: $\begin{cases} T'' + \lambda a^2 T = 0 \\ \cdots\cdots \end{cases}$

Remark

偏微分方程与常微分方程的分离变量法有何不同?

解方程（I)：有特征（辅助）方程，

$$\mu^2 + \lambda = 0$$

根为: $\begin{cases} \mu_1 = +\sqrt{-\lambda} \\ \mu_2 = -\sqrt{-\lambda} \end{cases}$

分情况讨论：

(1) 相异实根（$\lambda < 0$）有通解：$X = Aexp^{\sqrt{-\lambda}x} + Bexp^{-\sqrt{-\lambda}x}$

分别取 $x = 0, x = l$, 得定解方程组：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ exp^{\sqrt{-\lambda}\, l} & exp^{-\sqrt{-\lambda}\, l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

有解条件为：$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ exp\left(\sqrt{-\lambda}\, l\right) & exp\left(-\sqrt{-\lambda}\, l\right) \end{vmatrix} = 0$

很明显，这个行列式不等于 0，所以只有零解（A=0, B=0）

(2) 相同实根（$\lambda = 0$），

则通解为： $X = Ax + B$

分别取 $x = 0, x = l$, 得定解方程组：

$$\begin{cases} B = 0 \\ Al + B = 0 \end{cases}$$

也只有零解

(3) 虚根（$\lambda > 0$），即：$\mu_1 = i\sqrt{\lambda}$ ，$\mu_2 = -i\sqrt{\lambda}$

通解为：$X = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x$

分别取 $x = 0, x = l$，得定解方程组：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos(\sqrt{\lambda}\, l) & \sin(\sqrt{\lambda}\, l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

系数行列式要为零

$$\sin(\sqrt{\lambda}\, l) = 0$$

$$\sqrt{\lambda}\, l = n\pi (n = 1, 2, 3, \dots)$$

固有值：$\lambda_n = \dfrac{n^2\pi^2}{l^2}$

固有解：$X_n = B_n \sin\dfrac{n\pi}{l}x = B_n \sin\omega_n x$

求解方程 II：$T'' + \lambda a^2 T = 0$

代入 λ_n，得：$T'' + \lambda_n a^2 T = 0$

变形成：$T'' + \omega_n^2 a^2 T = 0$

特征方程有虚根，通解：

$$T_n = C_n \cos\omega_n a t + D_n \sin\omega_n a t$$

原方程的基本解：

$$\begin{aligned} u_n(x,t) &= T_n(t)X_n(x) \\ &= (a_n \cos\omega_n at + b_n \sin\omega_n at)\sin\omega_n x \\ &= (a_n \cos\frac{n\pi at}{l} + b_n \sin\frac{n\pi at}{l})\sin\frac{n\pi x}{l} \end{aligned}$$

叠加解（解函数）：

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos\frac{n\pi at}{l} + b_n \sin\frac{n\pi at}{l})\sin\frac{n\pi x}{l} \end{aligned}$$

Remark

叠加解的思考与讨论:

- **数学理解**: 线性方程解的线性组合，依然是方程的解
- **物理理解**: It is not complicated. It is just a lot of it.
- **核心成果**: 傅里叶级数与傅里叶变换

确定解的系数，

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi at}{l}+b_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

代入定解条件：

(1) $u(x,0)=\varphi(x)\quad =>\quad \varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi x}{l}$

(2) $u_t(x,0)=\Psi(x)\quad =>\quad \Psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}$

由傅里叶变换公式（非对称）， 写出系数：

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

$$b_n=\frac{l}{n\pi a}\frac{2}{l}\int_0^l\Psi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{2}{n\pi a}\int_0^l\Psi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

固有函数正交性

例 3、试证明固有函数的正交性

$$X_n = \sin \frac{n\pi}{l} x$$

解: 固有函数是固有方程的解:

$$X_n'' + \lambda_n X_n = 0$$
$$X_m'' + \lambda_m X_m = 0$$

用 X_m 乘第一式, X_n 乘第二式,

$$X_m X_n'' + \lambda_n X_m X_n = 0$$
$$X_n X_m'' + \lambda_m X_n X_m = 0$$

两式相减:

$$(\lambda_n - \lambda_m) X_n X_m = X_n X_m'' - X_m X_n''$$

积分:

$$(\lambda_n - \lambda_m)\int_0^l X_n X_m dx = \int_0^l [X_n X_m'' - X_m X_n'']dx$$

$$= [X_n X_m' - X_m X_n']_0^l - \int_0^l [X_n' X_m' - X_m' X_n']dx$$

等式右边的两项分别为零，有

$$(\lambda_n - \lambda_m)\int_0^l X_n X_m dx = 0$$

$$\int_0^l X_n X_m dx = 0 \quad , \qquad (n \neq m)$$

当 $n = m \neq 0$ 时，

$$
\begin{aligned}
\int_0^l X_n X_m dx &= \int_0^l X_n X_n dx \\
&= \int_0^l \sin^2 \frac{n\pi}{l} x dx \\
&= \frac{l}{2}
\end{aligned}
$$

归一化系数：

$$A = \sqrt{\frac{l}{2}}$$

求解实例

例 4、求解零初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} \quad , \quad 0 < x < 1, t > 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \\ u(x,0) = \sin \pi x, u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

解: 固有值: $\lambda_n = \dfrac{n^2\pi^2}{l^2} = n^2\pi^2$

固有函数: $X_n = B_n \sin \dfrac{n\pi}{l} x = B_n \sin n\pi x$

解函数:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi a t}{l} + b_n \sin \frac{n\pi a t}{l}\right) \sin \frac{n\pi x}{l} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\pi t + b_n \sin n\pi t) \sin n\pi x \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \\
&= 2\int_0^1 \sin(\pi x)\sin n\pi x dx \\
&= 2\int_0^1 \sin(\pi x)\sin \pi x dx \\
&= 1 \quad (n=1) \\
b_n &= \frac{2}{n\pi a}\int_0^l \Psi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \\
&= \frac{2}{n\pi}\int_0^1 0\sin n\pi x dx = 0
\end{aligned}
$$

解函数: $u(x,t) = \cos(\pi t)\sin(\pi x)$

作业:

求解波动方程初边值问题

1. $$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad , \quad 0 < x < l, t > 0 \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = sin\dfrac{\pi x}{l}, u_t(x,0) = \sin \pi x \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad , \quad 0 < x < l, t > 0 \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = 3sin\dfrac{3\pi x}{2l} + 6\sin(\dfrac{5\pi x}{2l}), u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} \quad , \quad 0 < x < 1, t > 0 \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = \sin 2\pi x, u_t(x,0) = x(1-x) \end{cases}$$

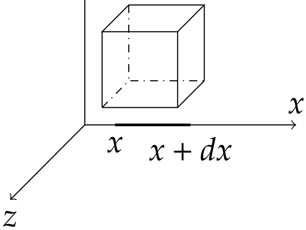
1. 波动方程
   - 方程的建立
   - 方程的求解
   - 固有函数正交
2. 热传导方程
   - 方程的建立
   - 方程的求解
   - 三类边界条件
3. 拉普拉斯方程
   - 方程的建立
   - 方程的求解
   - 区域边界条件

例 1、建立热传导方程

实验发现，热量总是从温度高的地方传向温度低的地方，服从傅里叶热传导定律：

$$q = -k\nabla u$$

式中，q 是热流强度（定义为单位时间通过单位横截面积的热量）；k 是材料的导热系数；∇ 是梯度算子 $(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z})$。对于介质中任意小体积（$d\tau$），试建立温度函数 u(x,y,z,t) 所满足的方程。



解: 傅里叶热传导定律有分量形式

$$q_{x_i} = -k\frac{\partial}{\partial x_i}u$$

考虑单位时间 x 方向的净流入:

$$-(q_x|_{x+dx} - q_x|_x)dydz$$

$$= -\frac{\partial q_x}{\partial x}dxdydz$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(k\frac{\partial u}{\partial x})dxdydz$$

总的净流入为:

$$[\frac{\partial}{\partial x}(k_x\frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(k_y\frac{\partial u}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(k_z\frac{\partial u}{\partial z})]dxdydz$$

流入的热量导致介质温度发生变化（热量守恒定律）

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t}dxdydz = [\frac{\partial}{\partial x}(k_x\frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(k_y\frac{\partial u}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(k_z\frac{\partial u}{\partial z})]dxdydz$$

其中 c 是比热，ρ 是质量密度。对于各向同性介质：

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = k[\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial u}{\partial z})]$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{c\rho}[\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial u}{\partial z})]$$

$$u_t = a^2[u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}]$$

$$u_t = a^2\nabla^2 u = a^2\Delta u$$

对于一维导线： $u_t = a^2 u_{xx}$

如果有热源 F(x,y,z,t)，令 $f = \dfrac{F}{c\rho}$： $u_t = a^2 u_{xx} + f$

如果时间足够长，温度应不再随时间变化 $(u_t = 0)$，

得无源 Laplace 方程： $\nabla^2 u = 0$

和有源 Poisson 方程： $\nabla^2 u = -f$

Remark

传导方程描述了热、电、声、磁、光等传输的基本规律，也称输运方程

方程的求解

例 2、求解热传导方程

对于有限长导线，求解一维热传导方程初边值问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \quad (0 < x < l, t > 0) \\ u(x,t)|_{t=0} = \psi(x) \\ u(x,t)|_{x=0} = 0, \quad u(x,t)|_{x=l} = 0 \end{cases}$$

解: 方程可分离变量，设 $u(x,t) = T(t)X(x)$，代回方程

$$T'(t)X(x) = a^2 T(t)X''(x)$$

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

即偏微分方程转化为两常微分方程

方程（I）:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \ , \quad 0 < x < l \\ X(0) = 0 \ , \ X(l) = 0 \end{cases}$$

方程（II）:

$$\begin{cases} T' + \lambda a^2 T = 0 \\ \ldots\ldots \end{cases}$$

方程（I）是固有值问题，有解:

固有值: $\lambda_n = \dfrac{n^2\pi^2}{l^2}$

固有函数: $X_n = \sin\dfrac{n\pi}{l}x$

解方程 II : $T' + \lambda a^2 T = 0$
代入 λ_n, 得: $T' + \lambda_n a^2 T = 0$
变形成: $T' + rT = 0$
这是衰减数学模型，有公式:

$$T = Bexp(-rt)$$

通解: $T_n = B_n \exp(-(\frac{n\pi a}{l})^2 t)$
原方程的基本解为:

$$\begin{aligned} u_n(x,t) &= T_n(t)X_n(x) \\ &= B_n \exp(-(\frac{n\pi a}{l})^2 t) \sin \frac{n\pi}{l} x \end{aligned}$$

代入定解条件:

$u(x,0)=\psi(x) \quad =>$

$$\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi}{l}x$$

由傅里叶变换公式（非对称），得系数:

$$B_n=\frac{2}{l}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x dx, \quad (n=1,2,3,\ldots)$$

例 3、求解热传导方程

对于有限长的导线，求解如下一维热传导方程

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = x(L-x) \end{cases}$$

解: 零边界条件确定的固有值和固有函数:

固有值: $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2} = (\frac{n\pi}{L})^2$

固有函数: $X_n = \sin\frac{n\pi}{l}x = \sin\frac{n\pi}{L}x$

解函数:

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \exp(-(\frac{n\pi a}{l})^2 t) \sin\frac{n\pi}{l}x \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \exp(-(\frac{n\pi a}{L})^2 t) \sin\frac{n\pi}{L}x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B_n &= \frac{2}{l}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx \\
&= \frac{2}{L}\int_0^L x(L-x)\sin\frac{n\pi}{L}xdx \\
&= \frac{2}{L}\times 2\times(\frac{L2}{n\pi})^3[1-\cos n\pi] \\
&= 4\frac{L^2}{(n\pi)^3}[1-(-1)^n]
\end{aligned}
$$

解函数:

$$
u(x,t) = (\frac{4L^2}{\pi^3})\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}[1-(-1)^n]\exp(-(\frac{n\pi a}{L})^2 t)\sin\frac{n\pi}{L}x
$$

固有值问题 II

例 4、求解第二类边界条件热传导方程

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \quad , \quad 0 < x < l, t > 0 \\ u_x(0,t) = 0, u_x(l,t) = 0 \\ u(x,0) = \psi(x) \end{cases}$$

解: 分离变量后，偏微分方程可转化为

方程（I）:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \quad , \quad 0 < x < l \\ X'(0) = 0 \, , \; X'(l) = 0 \end{cases}$$

方程（II）:

$$\begin{cases} T' + \lambda a^2 T = 0 \\ \ldots\ldots \end{cases}$$

注意到方程（I）是导数边界条件（二类边界条件），不是原固值问题。

先求方程（I）：根据以前的讨论，只有在 $\lambda > 0$ 即特征方程有虚根时，方程才有非零解。

通解为：

$$X = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x$$

求导：

$$X'(x) = \sqrt{\lambda}[-A\sin\sqrt{\lambda}x + B\cos\sqrt{\lambda}x]$$

代入导数边界条件（分别取 $x = 0, x = l$），得方程组

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\sin(\sqrt{\lambda}\,l) & \cos(\sqrt{\lambda}\,l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

系数行列式为零，得 $\sin\sqrt{\lambda}\, l = 0$

固有值：

$$\lambda_n = (\frac{n\pi}{l})^2 \quad , \quad (n = 0, 1, 2, ...)$$

代回方程组，得待定系数：$[A, B]^T = [1, 0]^T$

固有函数：

$$X_n = \cos\frac{n\pi}{l}x \ , \quad (n = 0, 1, 2, ...)$$

级数解：

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \exp(-(\frac{n\pi a}{l})^2 t) \cos\frac{n\pi}{l}x$$

系数：
$$\begin{cases} B_0 & = \frac{1}{l}\int_0^l \psi(x)dx \\ B_n & = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx, \quad (n = 1, 2, ...) \end{cases}$$

级数解:

$$u(x,t)=\frac{B_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\exp(-(\frac{n\pi a}{l})^2t)\cos\frac{n\pi}{l}x$$

Remark

导致边界条件导致:

- 固有函数: $X\ _n=\sin\frac{n\pi}{l}x\rightarrow X_n=\cos\frac{n\pi}{l}x$
- 存在 n=0 项: $\cos\frac{n\pi}{l}=\cos\frac{0\pi}{l}=1$

例 5、求解如下初边值问题

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \quad , \quad 0 < x < \pi, t > 0 \\ u_x(0,t) = 0, u_x(l,t) = 0 \\ u(x,0) = x^2(\pi - x)^2 \end{cases}$$

解: 这是导数边界条件，确定的固有值和固有函数为:

固有值：$\lambda_n = \dfrac{n^2\pi^2}{l^2} = (\dfrac{n\pi}{\pi})^2 = n^2$

固有函数：$X_n = \cos\dfrac{n\pi}{l}x = \cos nx$

解函数:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \exp(-(\frac{n\pi a}{l})^2 t)\cos\frac{n\pi}{l}x$$

$$
\begin{aligned}
B_0 &= \frac{2}{l}\int_0^l \psi(x)dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2(\pi - x)^2 dx \\
&= \frac{\pi^4}{15} \\
B_n &= \frac{2}{l}\int_0^l \psi(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2(\pi - x)^2 \cos nxdx \\
&= \frac{2}{\pi}\times(-\frac{12\pi}{n^4})[\cos n\pi + 1] \\
&= -\frac{24}{n^4}[(-1)^n + 1]
\end{aligned}
$$

解函数: $u(x,t) = \dfrac{\pi^4}{30} - 24\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n + 1}{n^4}\exp(-(na)^2 t)\cos nx$

直接计算 n_0 项

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \exp(-(\frac{n\pi a}{l})^2 t) \cos\frac{n\pi}{l}x$$

代入初值条件：$x^2(\pi - x)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos\frac{n\pi}{l}x$

取出第 0 项：$x^2(\pi - x)^2 = B_0 \cos\frac{0\pi}{l}x$

积分：$\int_0^{\pi} x^2(\pi - x)^2 dx = \int_0^{\pi} B_0 dx$

$$\frac{1}{6}\int_0^{\pi}(\pi - x)^4 dx = B_0\pi$$

$$B_0 = \frac{1}{6\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)^4 dx = \frac{\pi^4}{30}$$

定积分计算细节

令 $\psi(x) = x^2(\pi - x)^2$ ， 求导：

$$\begin{aligned}
\psi'(x) &= 2x(2x-\pi)(x-\pi) \\
\psi''(x) &= 2\pi^2 - 12\pi x + 12x^2 \\
\psi'''(x) &= 24x - 12\pi \\
\psi^{(4)}(x) &= 24
\end{aligned}$$

令 $v^{(4)}(x) = \cos nx$ ，则：

$$\begin{aligned}
v'''(x) &= \frac{1}{n}\sin nx \\
v''(x) &= -\frac{1}{n^2}\cos nx \\
v'(x) &= -\frac{1}{n^3}\sin nx \\
v(x) &= \frac{1}{n^4}\cos nx
\end{aligned}$$

得:

$$\int_0^\pi \psi^{(4)}(x)v(x)dx = \frac{24}{n^4}\int_0^\pi \cos nxdx = 0$$

应用分部积分公式，有

$$\int_0^\pi \psi(x)v^{(4)}(x)dx$$

$$= [\psi v''' - \psi' v'' + \psi'' v' - \psi''' v]|_0^\pi + \int_0^\pi \psi^{(4)}(x)v(x)dx$$

$$= [\psi v''' - \psi' v'' + \psi'' v' - \psi''' v]|_0^\pi$$

所以:

$$\int_0^\pi \psi(x)v^{(4)}(x)dx = [-\psi''' v]|_0^\pi = -\frac{12\pi}{n^4}[\cos n\pi + 1]$$

第三类边界条件

求第三类边界条件的固有值问题

$$III \quad \begin{cases} X''(x) + \lambda X = 0 \quad , \quad 0 < x < L \\ X'(0) = 0, X(L) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_n = \dfrac{(2n+1)^2\pi^2}{4l^2} \\ X_n(x) = \cos\sqrt{\lambda}x \end{cases}$$

$$IV \quad \begin{cases} X''(x) + \lambda X = 0 \quad , \quad 0 < x < L \\ X(0) = 0, X'(L) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_n = \dfrac{(2n+1)^2\pi^2}{4l^2} \\ X_n(x) = \sin\sqrt{\lambda}x \end{cases}$$

作业-1

1、求解热传导方程初边值问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} \quad , \quad 0 < x < l, t > 0 \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = x(l-x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} \quad , \quad 0 < x < l, t > 0 \\ u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0 \\ u(x,0) = x(l-x/2) \end{cases}$$

2、求第三类边界条件固有值问题，并求固有函数的正交性

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X = 0 \quad , \quad 0 < x < L \\ X'(0) = 0, X(L) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X = 0 \quad , \quad 0 < x < L \\ X(0) = 0, X'(L) = 0 \end{cases}$$

作业-2

3. 什么是固有值？有何用处？
4. 什么是固有函数？与固有值有何关系？
5. 分离变量法的数学思想是什么？
6. 什么是叠加原理？与分离变量法有何关系
7. 正交性是什么意思？有何用处？
8. 较复杂的分部积分法怎么用？

1 波动方程
方程的建立
方程的求解
固有函数正交

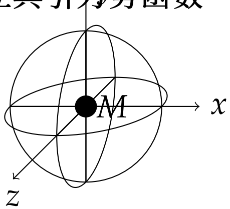
2 热传导方程
方程的建立
方程的求解
三类边界条件

3 拉普拉斯方程
方程的建立
方程的求解
区域边界条件

方程的建立

例 1、建立拉普拉斯方程

对于位于原点的质量为 M 的质点，试建立其引力势函数 u(x,y,z,t) 所满足的方程.



解: 建立如图坐标系,

在空间任一点(x,y,z)放置试验质点 m

m 感受的力为:

$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^3}\vec{r} \quad , \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

M 激发的引力场强为

$$\vec{A} = \frac{GM}{r^3}\vec{r}$$

取无穷远处场强为零，则引力势为

$$u=-\int_r^\infty \vec{A}\cdot d\vec{r}=-\int_r^\infty \frac{GM}{r^2}dr=-\frac{GM}{r}$$

即有：$\vec{A}=-\nabla u$

封闭球面 S 内的质量通量为

$$\oint_S \vec{A}\cdot d\vec{S}=\frac{GM}{r^2}4\pi r^2=\int 4\pi G\rho d\tau$$

由高斯定理可知：

$$\oint_S \vec{A}\cdot d\vec{S}=\int \nabla\cdot\vec{A}d\tau$$

因此：

$$\nabla\cdot\vec{A}=4\pi G\rho$$

由于 $\nabla\cdot\vec{A}=\nabla\cdot(-\nabla u)=-\nabla^2 u$

得泊松方程：

$$\nabla^2 u=-4\pi G\rho$$

对于无源区域，得拉普拉斯方程

$$\nabla^2 u = 0$$

定义拉普拉斯算子：

$$\triangle = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

拉普拉斯方程为：

$$\triangle u = 0$$

Remark

拉普拉斯方程和泊松方程是描述各种势场的基本方程。

例 2、求解矩形区域拉普拉斯方程

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, \quad (0<x<a,0<y<b) \\ u(x,0)=f_1(x),u(x,b)=f_2(x) \\ u(0,y)=g_1(y),u(a,y)=g_2(y) \end{cases}$$

解: 这是第一类边界条件，但不是零边界条件，可转化为

$$(A)\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, \quad (0<x<a,0<y<b) \\ u(x,0)=0,u(x,b)=0 \\ u(0,y)=g_1(y),u(a,y)=g_2(y) \end{cases}$$

$$(B)\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, \quad (0<x<a,0<y<b) \\ u(x,0)=f_1(x),u(x,b)=f_2(x) \\ u(0,y)=0,u(a,y)=0 \end{cases}$$

当然，还可以进一步分解成四个边值问题！

$$(I)\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & (0<x<a,0<y<b) \\ u(x,0)=0,u(x,b)=0 \\ u(0,y)=g_1(y),u(a,y)=0 \end{cases}$$

$$(II)\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & (0<x<a,0<y<b) \\ u(x,0)=0,u(x,b)=0 \\ u(0,y)=0,u(a,y)=g_2(y) \end{cases}$$

$$(III)\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & (0<x<a,0<y<b) \\ u(x,0)=f_1(x),u(x,b)=0 \\ u(0,y)=0,u(a,y)=0 \end{cases}$$

$$(IV)\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & (0<x<a,0<y<b) \\ u(x,0)=0,u(x,b)=f_2(x) \\ u(0,y)=0,u(a,y)=0 \end{cases}$$

以方程（I）为例求解

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (0 < x < 1, 0 < y < 1) \\ u(x,0) = 0, u(x,1) = 0 \\ u(0,y) = g_1(y) = \sin \pi y, u(1,y) = 0 \end{cases}$$

解: 设有 $u(x,y) = X(x)Y(y)$ ，代回原方程，得

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y'' = 0$$

$$-\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} = -\lambda$$

得两个常微分方程:

方程（1）：

$$\begin{cases} Y'' + \lambda Y = 0 \ , \quad 0 < y < 1 \\ Y(0) = 0 \ , \quad Y(1) = 0 \end{cases}$$

方程（2）：

$$\begin{cases} X' - \lambda X = 0 \ , \quad 0 < x < 1 \\ X(0) = \sin \pi y \ , \quad X(1) = 0 \end{cases}$$

方程（I）是固有值问题 I，有公式：

固有值：$\lambda_n = \dfrac{n^2\pi^2}{l^2} = n^2\pi^2$

固有函数：$Y_n = \sin \dfrac{n\pi}{l} y = \sin n\pi y$

解方程 II：代入 λ_n，得：$X'' - n^2\pi^2 X = 0$
特征方程有两相异实根，通解为：

$$X_n(x) = C_n exp(n\pi x) + D_n exp(-n\pi x)$$

结合（1）（2），方程 (I) 的基本解：

$$\begin{aligned} u_n(x,y) &= [C_n exp(n\pi x) + D_n exp(-n\pi x)]\sin(n\pi y) \\ &= [a_n \cosh(n\pi x) + b_n \sinh(n\pi x)]\sin(n\pi y) \end{aligned}$$

叠加解：

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cosh(n\pi x) + b_n \sinh(n\pi x)]\sin(n\pi y)$$

代入定解条件：$u(0,y)=0$，得

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\pi y) = 0 \ , \quad => a_n = 0$$

因此：

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sinh(n\pi x)\sin(n\pi y)$$

代入定解条件：$u(1,y)=\sin \pi y$，得

$$u(1,y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sinh(n\pi)\sin(n\pi y) = \sin \pi y$$

正交性，得：$b_1 \sinh \pi = 1$，$b_n = 0 \ , \ (n>1)$

原方程得解：

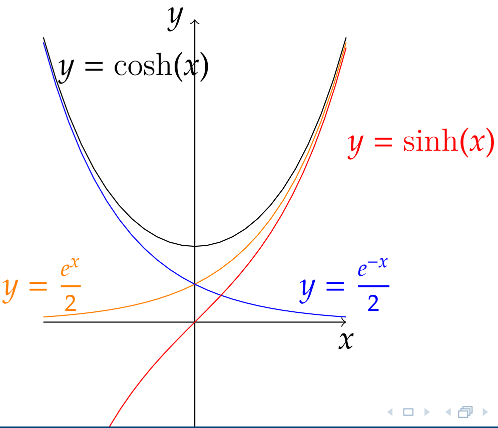
$$u(x,y) = \frac{\sinh \pi x}{\sinh \pi}\sin(\pi y)$$

同理，可以求出其他三个方程的解，最终进行线性叠加，得到矩形区域拉普拉斯方程的解：

$$u(x,y) = u_I(x,y) + u_{II}(x,y) + u_{III}(x,y) + u_{IV}(x,y)$$

注：双曲函数：

$$\begin{cases} \sinh(x) = -i\sin(ix) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \\ \cosh(x) = \cos(ix) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \end{cases}$$



圆域拉普拉斯方程

拉普拉斯算符在不同坐标系中的具体形式

直角坐标 (x,y,z)： $\nabla^2=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$

球坐标 (r,θ,φ)：

$$\nabla^2=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial}{\partial r})+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta})+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

极坐标 (r,θ)： $\nabla^2=\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}$

例 3、求圆域拉普拉斯方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, & 0 < r < r_0 \\ u(r_0, \theta) = f(\theta), & 0 < \theta < 2\pi \end{cases}$$

解: 方程可分离变量，令 $u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$，代回原方程

$$R''\Theta + \frac{1}{r^2}R\Theta'' + \frac{1}{r}R'\Theta = 0$$

$$\frac{r^2R'' + rR'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \lambda$$

得两常微分方程:

I、$\Theta'' + \lambda\theta = 0$

定解条件：$\Theta(\theta + 2\pi) = \Theta(\theta)$

II、$r^2R'' + rR' - \lambda R = 0$

解方程 I：根据以前的分析，在 $\lambda > 0$ 时，有通解

$\Theta(\theta) = A\cos\sqrt{\lambda}\theta + B\sin\sqrt{\lambda}\theta$

由定解条件：$\Theta(2\pi) = \Theta(0)$ ，$\Theta'(2\pi) = \Theta'(0)$ 得方程：

$$\begin{bmatrix} \cos(\sqrt{\lambda}2\pi) - 1 & \sin(\sqrt{\lambda}2\pi) \\ -\sin(\sqrt{\lambda}2\pi) & \cos(\sqrt{\lambda}2\pi) - 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

系数行列式为零，得

$$(\cos(\sqrt{\lambda}2\pi) - 1)^2 + \sin^2(\sqrt{\lambda}2\pi) = 0$$

$\cos(\sqrt{\lambda}2\pi) = 1$

固有值：$\lambda_n = n^2$ ， $(n = 0, 1, 2, \ldots)$

固有函数：$\Theta(\theta) = A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta$

解方程 II：$r^2R'' + rR' - \lambda R = 0$

把 $\lambda_n = n^2$ 代入， 得

$r^2R'' + rR' - n^2R = 0$

这是欧拉方程：令 $r = exp(t)$ ，有 $t = \ln r$，求导

$$\frac{dR}{dr} = \frac{dR}{dt}\frac{dt}{dr} = \frac{1}{r}\frac{dR}{dt}$$

$$\frac{d^2R}{dr^2} = -\frac{1}{r^2}\frac{dR}{dt} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(\frac{dR}{dt})$$

$$\frac{d^2R}{dr^2} = \frac{1}{r^2}(\frac{d^2R}{dt^2} - \frac{dR}{dt})$$

代回方程，得：

$$\frac{d^2R}{dt^2} - n^2R = 0$$

由特征方程有两相异实根，得通解：

$$R = C_n exp(nt) + D_n exp(-nt)$$

把 $t = \ln r$ 代回，得

$$R = C_n r^n + D_n r^{-n}$$

第二项发散，应删除，得

$$R = C_n r^n, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots\ldots)$$

基本解：

$$u_n(r,\theta) = (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) r^n$$

叠加解:

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)r^n$$

代入定解条件: $u(r_0,\theta) = f(\theta)$

$$= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)r_0^n$$

系数公式:

$$a_n = \frac{1}{r_0^n \pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos n\theta d\theta$$

$$b_n = \frac{1}{r_0^n \pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\sin n\theta d\theta$$

例 4、求解如下边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \quad 0 < r < r_0 \\ u(r_0, \theta) = A\cos(\theta), \qquad 0 < \theta < 2\pi \end{cases}$$

解: 求系数:

$$a_1 = \frac{1}{r_0^1 \pi}\int_0^{2\pi} A\cos(\theta)\cos\theta d\theta$$

$$= \frac{A}{r_0\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2(\theta)d\theta = \frac{A}{r_\pi}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2\theta)d\theta = \frac{A}{r_0}$$

$$a_n = \frac{1}{r_0^n \pi}\int_0^{2\pi} A\cos(\theta)\cos n\theta d\theta = 0\ ,\ (n \neq 1)$$

叠加解:

$$
\begin{aligned}
u(r,\theta) &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta)r^n \\
&= \frac{1}{2}a_0 + a_1 r\cos\theta \\
&= \frac{A}{r_0} r\cos\theta
\end{aligned}
$$

Remark

若将边界条件修改为: $A\cos 2\theta$ ，或 $A\sin 2\theta$ ，解会如何变化?

作业：1、求解固有值问题

$$\begin{cases} Y'' + \lambda Y = 0 \ , \quad 0 < y < 2\pi \\ Y(0) = Y(2\pi), \quad Y'(0) = Y'(2\pi) \end{cases}$$

2、求解圆域边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \quad 0 < r < 1 \\ u(1,\theta) = A\cos 2\theta + B\cos 4\theta \end{cases}$$

3、求解矩形域边值问题

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (0 < x, y < 1) \\ u(x,0) = u(0,y) = u(x,1) = 0 \\ u(1,y) = \sin 2\pi y \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (0 < x, y < 1) \\ u(1,y) = u(0,y) = u(x,0) = 0 \\ u(x,1) = \sin n\pi x \end{cases}$$