

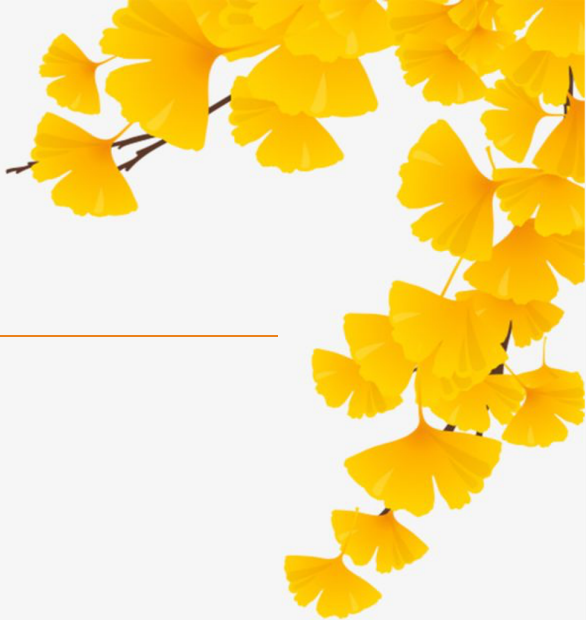
工程数学

Engineering Mathematics

李小飞

光电科学与工程学院

2022 年 4 月 2 日





电子科技大学

University of Electronic Science and Technology of China

第五章 贝塞尔函数 (8 学时)



1. 贝塞尔方程

2. 贝塞尔函数与 Gamma 函数

3. 贝塞尔函数的性质

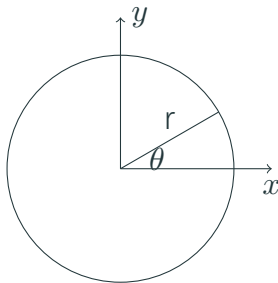
4. 贝塞尔函数的应用

5. Dirac 函数

求實求真
大氣大為

例 1、建立贝塞尔方程

对于半径为 r_0 的侧面绝缘的薄均匀圆盘，边界温度始终保持为 0 度，当盘的初始温度已知时 ($\Psi(x, y)$)，求体系的温度分布函数。



求實求真
大氣大為

解: 这是一个温度场, 是非稳恒场, 服从热传导方程:

$$\begin{cases} u_t = a^2[u_{xx} + u_{yy}] & (0 < x^2 + y^2 < r_0^2, t > 0) \\ u(x, y, t)|_{x^2+y^2=r_0^2} = 0 \\ u(x, y, t)|_{t=0} = \Psi(x, y) \end{cases}$$

考虑到圆域边界条件, 得使用极坐标描述

大氣大為
求實求真

试证明极坐标拉普拉斯算子为:

$$[u_{xx} + u_{yy}] = \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right]$$

证明: 基本变换关系为

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

对于函数 $u(x, y) = u(r \cos \theta, r \sin \theta)$ 计算导数:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \cos \theta \frac{\partial u}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial \theta} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = -r \sin \theta \frac{\partial u}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned}$$

大氣大為
求實求真

改写成矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial u}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -r \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial u}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial u}{\partial \theta} \end{bmatrix}$$

大氣大為
求實求真

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \end{bmatrix}$$

$$\nabla = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$$

$$= \left(\vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \cdot \left(\vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right)$$

大氣大為
求實求真

$$\begin{aligned}
\nabla^2 &= \vec{e}_r \cdot \frac{\partial}{\partial r} (\vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}) + \vec{e}_\theta \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}) \\
&= \vec{e}_r \cdot \left(\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_r \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_\theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right) \\
&\quad + \vec{e}_\theta \cdot \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right) \\
&= \vec{e}_r \cdot \left(0 \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_r \frac{\partial^2}{\partial r^2} + 0 \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_\theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right) \\
&\quad + \vec{e}_\theta \cdot \left(\vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} (-\vec{e}_r) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}
\end{aligned}$$

Tips: $\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = -\vec{e}_r$; $\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial r} = 0$; $\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r} = 0$; $\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} = \vec{e}_\theta$

大氣大為
求實求真

$$\begin{cases} u_t = a^2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right], & (0 < r < r_0, t > 0) \\ u(r_0, \theta) = 0, & 0 < \theta < 2\pi \\ u(r, \theta, t = 0) = \Psi(r, \theta), & 0 < \theta < 2\pi \end{cases}$$

令: $u(r, \theta, t) = R(r)\Theta(\theta)T(t)$, 代回原方程, 得:

$$R\Theta T' = a^2 \left[R''\Theta T + \frac{1}{r} R'\Theta T + \frac{1}{r^2} R\Theta''T(t) \right]$$

整理:

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2} \frac{\Theta''}{\Theta} = -\lambda$$

转化为两个方程:

$$T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0 \quad \dots\dots (1)$$

方程 1 是衰减模型, 已求解!

大氣大學
求實求真

$$r^2 \frac{R''(r)}{R(r)} + r \frac{R'(r)}{R(r)} + \lambda r^2 + \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = 0 \quad \dots (2)$$

方程 2 是固有值问题，可继续分离变量：

$$r^2 \frac{R''(r)}{R(r)} + r \frac{R'(r)}{R(r)} + \lambda r^2 = -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = \mu$$

角向固有值问题：

$$\begin{cases} \Theta''(\theta) + \mu\Theta(\theta) = 0 \\ \Theta(\theta) = \Theta(\theta + 2\pi) \\ \Theta'(\theta) = \Theta'(\theta + 2\pi) \end{cases}$$

径向固有值问题：

$$\begin{cases} r^2 R''(r) + rR'(r) + (\lambda r^2 - \mu)R(r) = 0 \\ R(r_0) = 0 \end{cases}$$

大氣大為
求實求真

角向固有值问题有解,
固有值:

$$\mu = n^2, \quad (n = 0, 1, 2, 3\ldots)$$

固有函数:

$$\Theta_n(\theta) = a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta), \quad (n = 0, 1, 2, 3\ldots)$$

$$\Theta_n(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-in\theta}, \quad (n = 0, 1, 2, 3\ldots)$$

把 $\mu = n^2$, 代回径向方程, 得径向固有值问题:

$$\begin{cases} r^2 R''(r) + rR'(r) + (\lambda r^2 - n^2)R(r) = 0 \\ R(r_0) = 0 \end{cases}$$

称为贝塞尔方程

大氣大為
求實求真

例 2、试证明圆域波动方程的径向固有值问题也是贝塞尔方程：

证明：圆域波动方程如下：

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2[u_{xx} + u_{yy}] & (0 < x^2 + y^2 < r_0^2, t > 0) \\ u(x, y, t)|_{x^2+y^2=r_0^2} = 0 \\ u(x, y, t)|_{t=0} = \Psi(x, y) \\ u_t(x, y, t)|_{t=0} = \varphi(x, y) \end{cases}$$

考察方程，发现当使用极坐标拉普拉斯算子后，整个的分离变量过得与热传导方程高度一致>(*P115)

其固有值问题也是贝塞尔方程！

$$\begin{cases} r^2 R''(r) + r R'(r) + (\lambda r^2 - n^2) R(r) = 0 \\ R(r_0) = 0 \end{cases}$$

求實求真
氣大為

贝塞尔方程是圆域极坐标条件下的一个普适的径向本征方程!

$$\begin{cases} r^2 R''(r) + rR'(r) + (\lambda r^2 - n^2)R(r) = 0 \\ R(r_0) = 0 \end{cases}$$

大氣大為
求實求真

在正式求解之前, 先预处理一下
令:

$$x = \sqrt{\lambda}r, \quad y(x) = R(r) = R\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

有:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dR}{dr} \frac{dr}{dx} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{dR}{dr} \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{1}{\lambda} \frac{d^2R}{dr^2}\end{aligned}$$

代回原方程,

大氣大學
求實求真

得:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)y = 0$$

称为 n 整数阶贝塞尔方程.

● 与欧拉方程比较:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + n^2 y = 0$$

欧拉方程是一个变系数微分方程, 可通过变量代换 (令 $t = \ln x$) 转化为常系数微分方程

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - n^2 y = 0$$

大氣大為
求實求真

若同样令 $t = \ln x$, 贝塞尔方程转化为

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + (x^2 - n^2)y = 0$$

依然是变系数微分方程, 无法进一步进行求解.

因此, 贝塞尔方程没有通常意义的初等函数表达式解!

大氣大為
求實求真

例 2、求解贝塞尔方程

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)y = 0$$

解: 没有通常意义的初等函数表达式解, 即没有通常意义的级数解, 尝试, 设方程有如下非一般意义的级数解:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{s+k}, \quad (a_0 \neq 0)$$

大氣大為
求實求真

求导:

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} (s+k)a_k x^{s+k-1}$$

$$y'' = \sum_{k=0}^{\infty} (s+k)(s+k-1)a_k x^{s+k-2}$$

代回原方程 (注意脚标的变化), 得:

$$\sum_{k=0}^{\infty} [(s+k)^2 - n^2] a_k x^{s+k} + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} x^{s+k} = 0$$

第一项 ($k=0$) 系数应为零:

$$(s+k)^2 - n^2 = 0, \quad \rightarrow s_1 = -n, \quad s_2 = n.$$

大氣大學
求實求真

第二项 ($k=1$) 系数应为零:

$$[(s+k)^2 - n^2]a_1 = 0, \quad \rightarrow a_1 = 0.$$

后面各项系数都为零:

$$[(s+k)^2 - n^2]a_k + a_{k-2} = 0, \quad (k = 2, 3, 4, \dots)$$

存在递推关系:

$$a_k = -\frac{1}{(s+k)^2 - n^2} a_{k-2}$$

由 $a_1 = 0$, 可推出奇数项为零

$$a_{2m+1} = 0$$

现取 $s = n$, ($-n$ 不影响解题过程), 得:

$$a_{2m} = \frac{-1}{(n+2m)^2 - n^2} a_{2m-2} = \frac{-1}{2m(2n+2m)} a_{2m-2}, \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

大氣求實
大氣求真

归纳，得：

$$a_{2m} = (-1)^m \frac{1}{2^{2m} m! (n+m)(n+m-1)\dots(n+1)} a_0$$

取： $a_0 = 1/2^n n!$ ，得：

$$a_{2m} = (-1)^m \frac{1}{2^{2m+n} m! (n+m)!}$$

贝塞尔方程有级数特解：

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m} x^{n+2m}$$

分析收敛性，发现：

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{2m+2}}{a_{2m}} \right| = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{4(m+1)(n+m+1)} = 0$$

说明此级数必为某函数的展开式，称之为贝塞尔函数。

大氣大學
求實求真

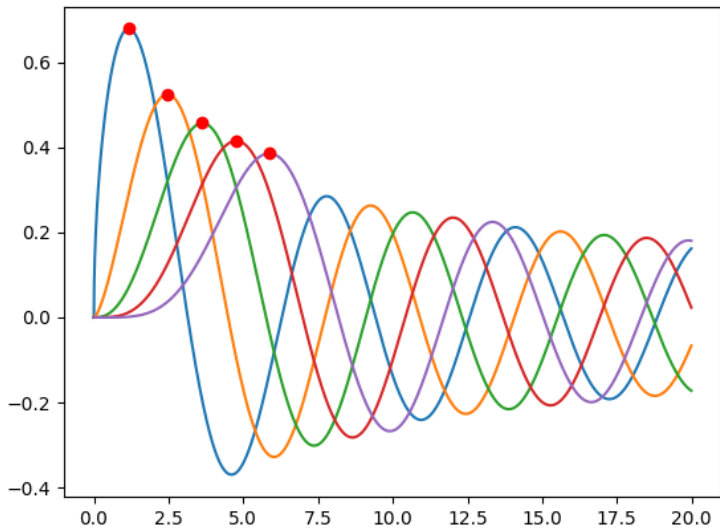
记为:

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m} x^{n+2m}$$

称为 n 整数阶贝塞尔函数!

求實求真
大氣大為

Different Bessel functions and their local maxima



求實求真



贝塞尔 (Bessel, Friedrich Wilhelm, 1784~1846) 德国天文学家, 数学家, 天体测量学的奠基人. 提出贝塞尔函数, 讨论该函数的一系列性质及其求值方法, 为解决物理学、天文学和信息学有关问题提供了重要工具。

大氣
求實
求真

1、由圆域波动方程导出贝塞尔方程

2、求衰减模型

$$T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0$$

3、求角向固有值及归一化的固有函数:

$$\begin{cases} \Theta''(\theta) + \mu\Theta(\theta) = 0 \\ \Theta(\theta) = \Theta(\theta + 2\pi) \\ \Theta'(\theta) = \Theta'(\theta + 2\pi) \end{cases}$$

4、求欧拉方程

大氣大學
求實求真

1. 贝塞尔方程

2. 贝塞尔函数与 Gamma 函数

3. 贝塞尔函数的性质

4. 贝塞尔函数的应用

5. Dirac 函数

大氣大為
求實求真

零阶贝塞尔函数:

$$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m!m!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}$$

n 阶贝塞尔函数:

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m!(n+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m}$$

第二类塞尔函数:

$$Y_{\alpha}(x) = \frac{J_{\alpha}(x) \cos(\alpha\pi) - J_{-\alpha}(x)}{\sin(\alpha\pi)}$$

贝塞尔函数在除 $x = 0$ 点外的整个实数轴上收敛。

大氣大學
求實求真

为进一步讨论贝塞尔函数的性质，先讨论 Gamma 函数.

- 1728 年，哥德巴赫在考虑数列插值的问题，比如我们可以计算 $2!, 3!$ ，是否可以计算 $2.5!$ 呢？
- 他写信请教尼古拉斯·伯努利和他的弟弟丹尼尔·伯努利，欧拉当时正好与丹尼尔·伯努利在一块，他因此得知了这个问题
- 1729 年欧拉解决了这个问题！



大氣大為
求實求真

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad (x > 0)$$

Euler 创造的 Γ 函数, 将积分和阶乘联系起来

 例-1. 试证明:

$$\Gamma(1) = 1$$

证明:

$$\begin{aligned}\Gamma(1) &= \int_0^{\infty} t^{1-1} e^{-t} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1\end{aligned}$$

大氣大學
求實求真

性质 1: 试证明 Gamma 函数有如下递推式:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad (x > 0)$$

证明:

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^{\infty} t^{x+1-1} e^{-t} dt \\&= -t^x e^{-t} \Big|_0^{\infty} + x \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \\&= x \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \\&= x\Gamma(x)\end{aligned}$$

大氣大學
求實求真

推论:

$$\Gamma(x+n) = (x+n-1)(x+n-2)\cdots(x+1)x\Gamma(x)$$

求實求真
大氣大為

性质 2: 试证明自变量为正整数的 Gamma 函数与阶乘有如下关系:

$$\Gamma(n+1) = n!$$

证明 1: 由递推公式

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$$

$$= n(n-1) \cdots 1\Gamma(1)$$

$$= n! \int_0^{\infty} e^{-t} dt$$

$$= n!$$

大氣大學
求實求真

证明 2: 在推论中: 取 $x = 1$

$$\Gamma(x+n) = (x+n-1)(x+n-2)\cdots(x+1)x\Gamma(x)$$

$$\Gamma(1+n) = (1+n-1)(1+n-2)\cdots(1+1)1\Gamma(1)$$

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Tips: 阶乘只是 $\Gamma(x)$ 函数的特例! ($x = 1, 2, 3, \dots$) 对应 $(0!, 1!, 2!, \dots)$

大氣大為
求實求真

性质 3: 试证明半正整数 Γ 函数有如下性质

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$
$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi}$$

证明: (1) 由 Gamma 函数定义

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad (x > 0)$$
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} t^{\frac{1}{2}-1} e^{-t} dt$$
$$= \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t} dt$$

大氣大學
求實求真

令 $x = \sqrt{t}$

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \\&= 2 \sqrt{\iint_0^{\infty} e^{-x^2} e^{-y^2} dx dy} \\&= 2 \sqrt{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\theta} \\&= 2 \sqrt{\frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr} \\&= 2 \sqrt{\frac{\pi}{2} \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2}\right]_0^{\infty}} \\&= \sqrt{\pi}\end{aligned}$$

* x, y 皆取正数, 是第一象限!

大氣大學
求實求真

(2) 由递推公式 $\Gamma(1+x) = x\Gamma(x)$, $(x > 0)$

$$\Gamma(1 + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(2 + \frac{1}{2}) = \Gamma(1 + \frac{3}{2}) = \frac{3}{2}\Gamma(1 + \frac{1}{2}) = \frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(3 + \frac{1}{2}) = \frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$\begin{aligned}\Gamma(n + \frac{1}{2}) &= \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi} \\ &= \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}\end{aligned}$$

证毕!

大氣大為
求實求真

性质 4: 试证明半正整数的阶乘为

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}\right)! &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\ \left(m - \frac{1}{2}\right)! &= \frac{(2m)!}{2^{2m}m!} \sqrt{\pi}\end{aligned}$$

证明: 把如下公式从正整数向正实数延拓!

$$\Gamma(n+1) = n! \quad \rightarrow \quad \Gamma(x+1) = x!, \quad (x > 0)$$

(1) 取 $x = m - \frac{1}{2}$, $(m = 1, 2, 3, \dots)$

$$\begin{aligned}\left(m - \frac{1}{2}\right)! &= \Gamma\left(m - \frac{1}{2} + 1\right) \\ &= \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{(2m)!}{2^{2m}m!} \sqrt{\pi}\end{aligned}$$

大氣大為
求實求真

(2) 在上式中取 $m = 1$

$$\left(\frac{1}{2}\right)! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

* 一般分数的阶乘如何求?(余元公式, 自己证明!)

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin x\pi}, \quad 0 < x < 1$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + x\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - x\right) = \frac{\pi}{\cos x\pi}, \quad 0 < x < \frac{1}{2}$$

大氣大為
求實求真

性质 5: 试求半负整数 Γ 函数的值

$$\Gamma(-\frac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(-\frac{3}{2}) = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}$$

解: (1) 把递推公式 $\Gamma(1+x) = x\Gamma(x)$ 从正实数向实数延拓!

并令 $x = -\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\Gamma(-\frac{1}{2}) &= -2\Gamma(1 - \frac{1}{2}) \\ &= -2\Gamma(\frac{1}{2}) \\ &= -2\sqrt{\pi}\end{aligned}$$

大氣大學
求實求真

(2) 在遞推公式 $\Gamma(1+x) = x\Gamma(x)$ 中, 令 $x = -\frac{3}{2}$

$$\begin{aligned}\Gamma(-\frac{3}{2}) &= -\frac{2}{3}\Gamma(1-\frac{3}{2}) \\ &= -\frac{2}{3}\Gamma(-\frac{1}{2}) \\ &= (-\frac{2}{3})(-2\sqrt{\pi}) \\ &= \frac{4}{3}\sqrt{\pi}\end{aligned}$$

大氣大學
求實求真

* 从正实数 $x > 0$ 向实数延拓 $x \in \mathbb{R}$, 导致严重的问题, 比如:

$$n! = (n-1)(n-2)(n-3) \cdots 1$$

$$-1! = (-1)(-2)(-3) \cdots -\infty?$$

$$\Gamma(0) = (-1)! \quad ?, \quad \Gamma(-1) = ?, \dots$$

性质 6: 试证明 Gamma 函数在非正整数点的极限为无穷大

$$\lim_{x \rightarrow -n} \Gamma(x) = \infty, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\frac{1}{\Gamma(-n)} = 0, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

大氣大為
求實求真

证明: 由递推公式

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \Gamma(x+1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \Gamma(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \Gamma(x+1) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \Gamma(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x} \Gamma(x+1) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x-1} \Gamma(x) = \infty$$

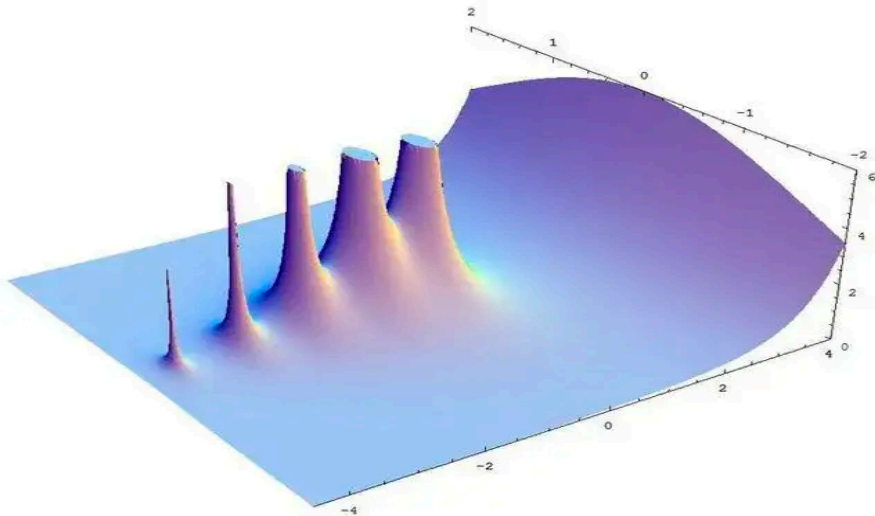
.....

$$\lim_{x \rightarrow -n} \Gamma(x) = \lim_{x \rightarrow -n} \frac{1}{x} \Gamma(x+1) = \lim_{x \rightarrow -(n-1)} \frac{1}{x-1} \Gamma(x) = \infty$$

证毕!

Tips:

延拓到实数域后, Γ 函数存在奇点 $x = 0, -1, -2, \dots$, 如果进一步延拓到复数域, 这些奇点依然存在. 它们是 Γ 函数的一阶极点!



网络教学资源, [点这里](#)

求實求真
八為

1. 求 $0! = ?$
2. 试证明 $\frac{1}{\Gamma(-n)} = 0, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$
3. 试证明半正整数 Γ 函数值的一般性公式

$$\left(m - \frac{1}{2}\right)! = \frac{(2m)!}{2^{2m}m!} \sqrt{\pi} \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

4. 试求出半负整数 Γ 函数值的一般性公式

$$\Gamma\left(m - \frac{1}{2}\right) = ?, \quad (m = 0, -1, -2, -3, \dots)$$

大氣大學
求實求真

1. 贝塞尔方程

2. 贝塞尔函数与 Gamma 函数

3. 贝塞尔函数的性质

4. 贝塞尔函数的应用

5. Dirac 函数

大氣大為
求實求真

现在讨论贝塞尔函数的性质:

性质 1: 负数阶贝塞尔函数与正数阶贝塞尔函数有如下关系

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

证明: 用 Γ 函数重写出贝塞尔函数:

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m!(n+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m}$$

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m!\Gamma(n+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m}$$

负数阶贝塞尔函数可写成

$$J_{(-n)}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m!\Gamma(-n+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2m}$$

大氣大學
求實求真

对于 $m < n$ 的项, 分母中的 Gamma 函数为无穷大, 因此都为零, 要去除:

$$J_{(-n)}(x) = \sum_{m=n}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m! \Gamma(-n + m + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2m}$$

令 $m - n = k$, 有 $m = n + k$,

$$J_{(-n)}(x) = (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(n+k)! \Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}$$

$$J_{-n}(x) = (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(n+k)! k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k} = (-1)^n J_n(x)$$

证毕!

大氣大為
求實求真

性质 2: 半整数阶贝塞尔函数与三角函数有如下关系

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x, \quad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$$

证明: 基于 Gamma 函数, 可以写出半整数阶贝塞尔函数

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m! \Gamma(n+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m}$$

$$J_{1/2}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m! \Gamma(1/2+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{1/2+2m}$$

大氣大為
求實求真

其中,

$$\begin{aligned}\Gamma(1/2 + m + 1) &= \left(\frac{2m+1}{2}\right)\Gamma(1/2 + m) \\ &= \left(\frac{2m+1}{2} \frac{2m-1}{2}\right)\Gamma(1/2 + m - 1) \\ &\dots\dots \\ &= \frac{(2m+1)!!}{2^{m+1}}\Gamma(1/2) \\ &= \frac{(2m+1)!!}{2^{m+1}}\sqrt{\pi}\end{aligned}$$

大氣大為
求實求真

代回，有：

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$$

同理，有

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$$

证毕！

大氣大為
求實求真

1. 求

$$\Gamma(-\frac{1}{2}), (-\frac{1}{2})!$$

2. 证明:

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$$

大氣大學
求實求真

性质 3: 贝塞尔函数的导数与递推式

$$\frac{d}{dx} [x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x), \quad \cdots (1)$$

$$\frac{d}{dx} [x^{-n} J_n(x)] = -x^{-n} J_{n+1}(x), \quad \cdots (2)$$

$$2nJ_n(x) = xJ_{n-1}(x) + xJ_{n+1}(x), \quad \cdots (3)$$

$$2J'_n(x) = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x), \quad \cdots (4)$$

由贝塞尔函数的 Γ 函数形式

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m! \Gamma(n+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m}$$

证明 (1) 式: 上等式两端同乘 x^n 再求导:

$$\frac{d}{dx} [x^n J_n(x)] = \frac{d}{dx} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m! \Gamma(n+m+1)} \left(\frac{x^{2n+2m}}{2^{n+2m}}\right)$$

大氣大學
求實求真

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[x^n J_n(x)] &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m! \Gamma(n+m+1)} \left(\frac{(2n+2m)x^{2n-1+2m}}{2^{n+2m}} \right) \\
&= x^n \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m! \Gamma(n-1+m+1)} \left(\frac{x^{n-1+2m}}{2^{n-1+2m}} \right) \\
&= x^n J_{n-1}(x), \quad \dots (1)
\end{aligned}$$

证明 (2) 式: 同理, 得:

$$\frac{d}{dx}[x^{-n} J_n(x)] = -x^{-n} J_{n+1}(x), \quad \dots (2)$$

大氣大為
求實求真

证明 (3) 和 (4) 式: 把 (1)(2) 二式左端求导

$$\frac{d}{dx}[x^n J_n(x)] = nx^{n-1}J_n(x) + x^n J'_n(x) = x^n J_{n-1}(x)$$

$$\frac{d}{dx}[x^{-n} J_n(x)] = -nx^{-n-1}J_n(x) + x^{-n} J'_n(x) = -x^{-n} J_{n+1}(x)$$

两式消去 $J'_n(x)$ 得:

$$2nJ_n(x) = xJ_{n-1}(x) + xJ_{n+1}(x), \quad \cdots (3)$$

两式消去 $J_n(x)$ 得:

$$2J'_n(x) = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x), \quad \cdots (4)$$

证毕!

大氣大學
求實求真

性质 4: 证明 n 阶贝塞尔函数有如下零点近似公式

$$\mu_m^n \approx m\pi + \frac{n\pi}{2} + \frac{3\pi}{4}$$

解: 对 n (整数) 阶贝塞尔方程

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)y = 0$$

做变量代换

$$y = \frac{u}{\sqrt{x}}$$

得到 $u(x)$ 的方程:

$$u'' + \left[1 + \frac{\frac{1}{4} - n^2}{x^2}\right]u = 0$$

当 $x \rightarrow \infty$ 有方程:

$$u'' + u = 0$$

大氣大為
求實求真

通解为:

$$u = A \cos(x + \theta)$$

确定 A 和 θ (不证), 得 n 阶贝塞尔函数的渐近公式

$$J_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

令 $J_n(x) = 0$, 由上式可得 n 阶贝塞尔函数的零点近似公式:

$$\mu_m^n \approx m\pi + \frac{n\pi}{2} + \frac{3\pi}{4}$$

大氣大學
求實求真

对于圆域热传导方程或波动方程，其径向方程为

$$\begin{cases} r^2 R''(r) + r R'(r) + (\lambda r^2 - n^2) R(r) = 0 \\ R(r_0) = 0 \end{cases}$$

解为 n 阶贝塞尔函数 $R(r) = J_n(x) = J_n(\sqrt{\lambda}r)$

零边界条件 $J_n(\sqrt{\lambda}r_0) = 0$ 下的本征解，正是贝塞尔函数的零点！

大氣大為
求實求真

基此确定:

(1) 固有值:

$$\sqrt{\lambda}r_0 = \mu_m^n \quad \rightarrow \quad \lambda_m^n = \left(\frac{\mu_m^n}{r_0}\right)^2$$

(2) 固有函数:

$$R_m^n(r) = J_n\left(\frac{\mu_m^n}{r_0}r\right)$$

大氣大學
求實求真

性质 5: 试证明 n 阶贝塞尔函数有如下零点递推式

$$J'_n(\mu_m^n) = -J_{n+1}(\mu_m^n)$$

证明: 由微分公式 (2)

$$\frac{d}{dx} [x^{-n} J_n(x)] = -x^{-n} J_{n+1}(x), \quad \cdots (2)$$

$$-nx^{-n-1} J_n(x) + x^{-n} J'_n(x) = -x^{-n} J_{n+1}(x)$$

$$-nJ_n(x) + xJ'_n(x) = -xJ_{n+1}(x)$$

$$-n \cdot 0 + xJ'_n(\mu_m^n) = -xJ_{n+1}(\mu_m^n)$$

$$J'_n(\mu_m^n) = -J_{n+1}(\mu_m^n)$$

大氣大學
求實求真

性质 6: 贝塞尔函数正交归一性

固有函数体现塞耳函数的正交归一性:

$$\int_0^{r_0} r J_n\left(\frac{\mu_m^n}{r_0} r\right) J_n\left(\frac{\mu_k^n}{r_0} r\right) dr = ?$$

证明: 对径向方程做等价变换

$$r^2 R'' + r R' + (\lambda r^2 - n^2) R = 0$$

$$r R'' + R' + \left(\left(\frac{\mu_m^n}{r_0} \right)^2 r - \frac{n^2}{r} \right) R = 0$$

$$(r R')' + \left(\left(\frac{\mu_m^n}{r_0} \right)^2 r - \frac{n^2}{r} \right) R = 0$$

大氣大學
求實求真

令:

$$J_n\left(\frac{\mu_m^n}{r_0}r\right) = R_1, \quad J_n\left(\frac{\mu_k^n}{r_0}r\right) = R_2$$

有

$$(rR_1')' + \left(\left(\frac{\mu_m^n}{r_0}\right)^2 r - \frac{n^2}{r}\right)R_1 = 0 \cdots (1)$$

$$(rR_2')' + \left(\left(\frac{\mu_m^n}{r_0}\right)^2 r - \frac{n^2}{r}\right)R_2 = 0 \cdots (2)$$

(1) $\times R_2$, (2) $\times R_1$, 所得两次相减, 并做积分, 有

$$\int_0^{r_0} \left[\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} \right)^2 - \left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0} \right)^2 \right] r R_1 R_2 dr = \int_0^{r_0} [R_1 (rR_2')' - R_2 (rR_1')'] dr$$

大氣
求實
求真
為

$$\begin{aligned}
&= [rR_1R_2']|_0^{r_0} - [rR_2R_1']|_0^{r_0} + \int_0^{r_0} rR_2'R_1dr - \int_0^{r_0} rR_1'R_2dr \\
&= \int_0^{r_0} rR_2'R_1dr - \int_0^{r_0} rR_1'R_2dr \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\rightarrow \int_0^{r_0} rR_1R_2dr = 0$$

正交性, 证毕!

大氣大為
求實求真

证明归一性:

$$r^2 R'' + rR' + (\lambda r^2 - n^2)R = 0$$

$$2r^2 R' R'' + 2r(R')^2 + (\lambda r^2 - n^2)R' R = 0$$

整理:

$$[r^2 (R')^2 + (\lambda r^2 - n^2)R^2]' = 2\lambda r R^2$$

大氣大學
求實求真

$$\begin{aligned}
\int_0^{r_0} r R^2 dr &= \frac{1}{2\lambda} \int_0^{r_0} [r^2 (R')^2 + (\lambda r^2 - n^2) R^2]' dr \\
&= \frac{1}{2\lambda} |r^2 (R')^2 + (\lambda r^2 - n^2) R^2|_0^{r_0} \\
&= \frac{1}{2\lambda} r_0^2 (R'(r_0))^2 \\
&= \frac{1}{2} r_0^2 [J'_n(\mu_m^n)]^2 \\
&= \frac{r_0^2}{2} [J_{n+1}(\mu_m^n)]^2
\end{aligned}$$

大氣大為
求實求真

1. 试证明

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}, \quad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$$

2. 试证明零点递推公式

$$J'_n(\mu_m^n) = -J_{n+1}(\mu_m^n)$$

3. 设函数 $f(r)$ 的贝塞尔展开式为

$$f(r) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m J_n\left(\frac{\mu_m^n}{r_0} r\right)$$

试证明其展开系数为:

$$c_m = \frac{2}{r_0^2 J_{n+1}^2(\mu_m^n)} \int_0^{r_0} f(r) J_n\left(\frac{\mu_m^n}{r_0} r\right) r dr$$

大氣大學
求實求真

1. 贝塞尔方程

2. 贝塞尔函数与 Gamma 函数

3. 贝塞尔函数的性质

4. 贝塞尔函数的应用

5. Dirac 函数

大氣大為
求實求真

求解圆域热传导问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right), 0 < r < R, 0 < \theta < 2\pi \\ u|_{r=R} = 0, u|_{t=0} = \varphi(r, \theta) \end{cases}$$

解: 令

$$u(r, \theta, t) = T(t)V(r, \theta)$$

代入方程, 进行第一次分离变量, 得衰减方程:

$$T' + \lambda a^2 T = 0, \quad \dots (1)$$

大氣大為
求實求真

及亥姆霍兹方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \lambda V = 0, 0 < r < R, 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ V|_{r=R} = 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

令

$$V(r, \theta) = F(r)G(\theta)$$

, 代入亥姆霍兹方程, 得两个方程

$$G'' + \mu G = 0, \quad \dots (2)$$

$$r^2 F'' + r F' + (\lambda r^2 - \mu) F = 0, \quad \dots (3)$$

大氣大為
求實求真

方程 (1) 的解为:

$$T(t) = Ae^{-\lambda a^2 t}$$

方程 (2) 的解为:

$$G(\theta) = C_1 \cos \sqrt{\mu}\theta + C_2 \sin \sqrt{\mu}\theta$$

由周期性边界条件, 有 $G(2\pi) = G(0)$, 必有 $\cos \sqrt{\mu}\theta = 1$, 得固有值:

$$\mu = n^2, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

固有函数:

$$G_0(\theta) = \frac{1}{2}a_0, G_n(\theta) = a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

固有函数也可写成 $G_n(\theta) = a_n e^{-in\theta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-in\theta}$

大氣大學
求實求真

将固有值代入方程 (3), 得方程

$$r^2 F'' + r F' + (\lambda r^2 - n^2) F = 0$$

令 $x = \sqrt{\lambda} r, y(x) = F(x/\sqrt{\lambda})$, 方程转化为标准整数贝赛尔方程:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2) y = 0$$

则方程 (3) 的零边界条件解用贝赛尔函数的零点表示:

固有值:

$$\lambda_m^n = \left(\frac{\mu_m^n}{R} \right)^2$$

固有函数:

$$F_m^n(r) = J_n\left(\frac{\mu_m^n}{R} r\right)$$

大氣大為
求實求真

原方程的基本解为:

$$u(r, \theta, t) = F_m^n(r) G_n(\theta) e^{-\lambda_m a^2 t}$$

叠加解为:

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_m^n F_m^n(r) G_n(\theta) e^{-\lambda_m a^2 t}$$

应用初值条件,

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_m^n F_m^n(r) G_n(\theta)$$

利用正交归一性确定系数 A_m^n

大氣大學
求實求真

$$\int_0^{2\pi} G_k^*(\theta) \varphi(r, \theta) d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_m^n F_m^n(r) \int_0^{2\pi} G_n(\theta) G_k(\theta) d\theta$$

$$\int_0^{2\pi} G_n^*(\theta) \varphi(r, \theta) d\theta = \sum_{m=0}^{\infty} A_m^n F_m^n(r)$$

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} G_n^*(\theta) r J_n\left(\frac{\mu_k^n}{R} r\right) \varphi(r, \theta) d\theta dr = \sum_{m=0}^{\infty} A_m^n \int_0^R r J_n\left(\frac{\mu_k^n}{R} r\right) J_n\left(\frac{\mu_m^n}{R} r\right) dr$$

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} G_n^*(\theta) r J_n\left(\frac{\mu_m^n}{R} r\right) \varphi(r, \theta) d\theta dr = A_m^n \frac{R^2}{2} [J_{n+1}(\mu_m^n)]^2$$

$$A_m^n = \frac{2}{R^2 [J_{n+1}(\mu_m^n)]^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} G_n^*(\theta) r J_n\left(\frac{\mu_m^n}{R} r\right) \varphi(r, \theta) d\theta dr$$

大氣大為
求實求真

1、证明

$$J_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\frac{1}{x} \sin x - \cos x \right]$$

2、证明

$$\frac{d}{dx} [x^{-n} J_n(x)] = -x^{-n} J_{n+1}(x)$$

3、用分离变量法求解圆域热传导方程

$$\begin{cases} u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}), & (0 < r < 1) \\ u|_{r=1} = 0 \\ u|_{t=0} = \cos^2 \theta \end{cases}$$

大氣大為
求實求真

1. 贝塞尔方程

2. 贝塞尔函数与 Gamma 函数

3. 贝塞尔函数的性质

4. 贝塞尔函数的应用

5. Dirac 函数

定义

性质

求實求真
大氣大為

4. 贝塞尔函数的应用

5. Dirac 函数

定义

性质

1. 贝塞尔方程

2. 贝塞尔函数与 Gamma 函数

3. 贝塞尔函数的性质

求實求真
大氣大為

- 设有一条质量为 1, 长度为 $2l$ 的均匀直线 (段). 则直线的线密度为 $\rho = 1/2l$ 若将直线的中点放置于坐标轴的原点, 则密度函数为:

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{1}{2l}, & (-l \leq x \leq l) \\ 0, & (x < -l, x > l) \end{cases}$$

积分得质量:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x) dx = 1$$

显然:

$$\int_a^b \rho(x) dx = 1, \quad (-l, l) \subset (a, b)$$

大氣大為
求實求真

δ 函数的定义

- 考虑当 $l \rightarrow 0$ 时, 线段变为质点. 质点的密度函数记为 $\delta(x)$, 有

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & (x = 0) \\ 0, & (x \neq 0) \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$$

量子力学中, 这么定义:

$$\delta(x) = \begin{cases} 1, & (x = 0) \\ 0, & (x \neq 0) \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$$

大氣大為
求實求真

考虑到量子化, 一般写成一个连续实函数的序列:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(x) dx = 1$$

Tips: 在很多问题中, 我们需要用数学语言描述“点”的相关性质, 这就需要推广古典函数概念, 引入广义函数 (a generalized function). Dirac 函数是历史上第一个广义函数, 也是使用最广的.

氣實
大求
為真

4. 贝塞尔函数的应用

5. Dirac 函数

定义

性质

1. 贝塞尔方程

2. 贝塞尔函数与 Gamma 函数

3. 贝塞尔函数的性质

求實求真
大氣大為

$$\int_a^b \delta(x) dx = 1, \quad 0 \in (a, b)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) \psi(x) dx = \psi(0)$$

$$\int_a^b \delta(x) \psi(x) dx = \psi(0), \quad 0 \in (a, b)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) \psi(x) dx = \psi(x_0)$$

$$\delta(-x) = \delta(x)$$

$$\delta'(-x) = -\delta'(x)$$

$$\delta(\alpha x) = \frac{\delta(x)}{|\alpha|}$$

$$x\delta'(x) = -\delta(x)$$

$$x\delta_\lambda(x) = \lambda\delta_\lambda(x)$$

$$f(x)\delta(x - a) = f(a)\delta(x - a)$$

$$\delta(\sin x) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(x - n\pi)$$

大氣求真
求實求真

例-1. 试证明 δ 函数是偶函数:

$$\delta(-x) = \delta(x)$$

证明:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(-x) \psi(x) dx &= \int_{+\infty}^{-\infty} \delta(x') \psi(-x') d(-x') \\&= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x') \psi(-x') d(x') \\&= \psi(-x')|_{x'=0} \\&= \psi(0) \\&= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) \psi(x) dx\end{aligned}$$

得证!

大氣大為
求實求真

例-2. 试证明 δ 函数的导数是奇函数:

$$\delta'(-x) = -\delta'(x)$$

证明:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(x)\psi(x)dx &= \delta(x)\psi(x)|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\psi'(x)dx \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\psi'(x)dx \\ &= -\psi'(0)\end{aligned}$$

大氣大為
求實求真

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(-x) \psi(x) dx &= \int_{+\infty}^{-\infty} \delta'(x') \psi(-x') d(-x') \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(x') \psi(-x') d(x') \\
 &= \psi'(-x')_{x'=0} \\
 &= \psi'(0)
 \end{aligned}$$

评毕!

推论:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(n)}(-x) \psi(x) dx = (-1)^n \psi^{(n)}(0)$$

大氣大為
求實求真

例-3. 试证明:

$$x\delta(x) = 0$$

证明:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} x\delta(x)\psi(x)dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)[x\psi(x)]dx \\ &= [x\psi(x)]|_{x=0} \\ &= 0\psi(0) \\ &= 0\end{aligned}$$

证毕!

大氣大學
求實求真

例-5. 试证明 δ 函数的傅里叶变换公式:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dx = \delta(k), \quad \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{i}{\hbar} p_x x} dx = \delta(p_x)$$

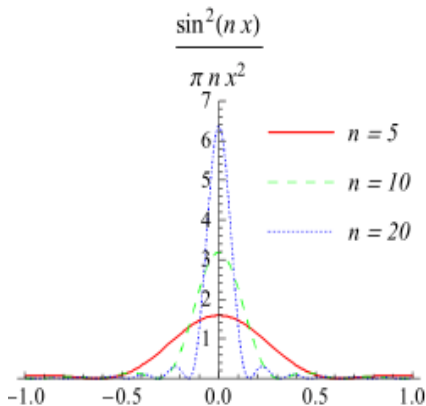
证明:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{i}{\hbar} p_x x} dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i \frac{p_x}{\hbar} x} dx \\ &= 2\pi \delta\left(\frac{p_x}{\hbar}\right) \\ &= 2\pi |\hbar| \delta(p_x) \\ &= 2\pi \hbar \delta(p_x) \end{aligned}$$

大氣大學
求實求真

例-6. 试证明 δ 函数的极限公式:

$$\begin{aligned}\delta(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin^2(nx)}{\pi n x^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 x^2} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{\pi(x^2 + \epsilon^2)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\pi(n^2 x^2 + 1)}\end{aligned}$$



求實求真

例-7. 试证明 δ 函数的微分公式:

$$\delta(x) = \frac{dH(x)}{dx}, \quad H(x) = \begin{cases} 0, & (x < 0) \\ 1, & (x \geq 0) \end{cases}$$

证明:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dH(x)}{dx} \psi(x) dx &= H(x) \psi(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} H(x) \psi'(x) dx \\ &= \psi(+\infty) - \int_0^{+\infty} \psi'(x) dx \\ &= \psi(+\infty) - \psi(+\infty) + \psi(0) \\ &= \psi(0) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) \psi(x) dx \end{aligned}$$

证毕!

大氣大為
求實求真

例-8. 试证明 δ 函数的展开公式:

$$\begin{aligned}\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) &= \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0) \\ &= \frac{1}{r}\delta(r - r_0)\delta(\theta - \theta_0) \\ &= \frac{1}{r^2 \sin \theta}\delta(r - r_0)\delta(\theta - \theta_0)\delta(\varphi - \varphi_0)\end{aligned}$$

大氣大為
求實求真

1. 试证明:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot e^{2\pi i k x} dx = \delta(k)$$

2. 求动表象波函数

已知坐标表象的波函数如下, 现基于 δ 函数求动表象的波函数 $c(p)$

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} c(p) e^{\frac{i}{\hbar} p x} dp$$

3. 证明第一类贝塞尔函数的正交性公式

$$\int_0^{+\infty} J_n(kr) J_n(k'r) r dr = \frac{\delta(k - k')}{k}, \quad (n \geq -1; k, k' > 0)$$



电子科技大学

University of Electronic Science and Technology of China

Thanks for your attention!

A & Q

求實求真
大氣大為