量子信息与量子通信

Quantum information and quantum communication

李小飞

光电科学与工程学院

2022 年 3 月 10 日

第 6 讲：量子算法 (2)

Contents

傅里叶变换

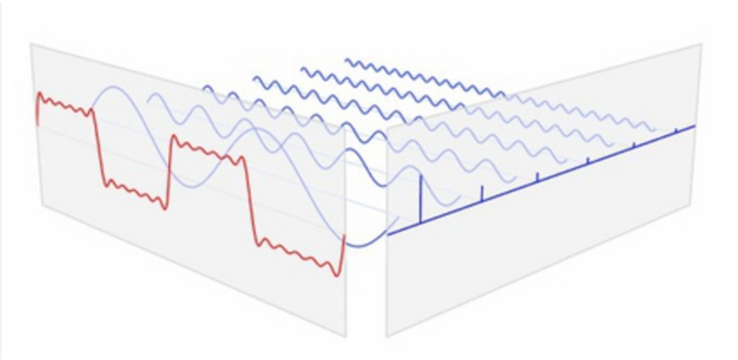
- 傅里叶变换是科学研究中非常有用的一种数学工具
- 数理机理：找到一组正交完全集，比如 $\{e^{ia\omega x}\}$，则任意函数 $f(x)$ 可以在这个集上展开

$$f(x) = (\frac{a}{2\pi})^{1/2} \sum_{\omega} F(\omega) e^{ia\omega x} = (\frac{a}{2\pi})^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{ia\omega x} d\omega$$

$F(\omega)$ 为展开（投影）系数：

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{ia\omega x})^* f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ia\omega x} f(x) dx$$

- 核心应用：把一个非常难解的问题，变换到另一个空间从而成为容易求解，求解后再变换回现有空间，问题得解



- 式中，a 是伸缩系数，　通常取 $a=1$

量子力学中，取 $a=\frac{1}{\hbar}$，有

$$\Psi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{+\infty}c(p_x)e^{\frac{i}{\hbar}p_x x}dp_x$$

基矢变换时，取 $a=\frac{2\pi}{N}$

$$|j\rangle=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N-1}e^{i\frac{2\pi}{N}jk}|k\rangle$$

不失一般性，可写成

$$\boxed{\hat{F}|j\rangle=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N-1}e^{i\frac{2\pi}{N}jk}|k\rangle}$$

Contents

对于一般的态函数，分别在基 $\{|j\rangle\}$ 和 $\{|k\rangle\}$ 上展开

$$|\Psi\rangle = \sum_{j=0}^{N-1} x_j |j\rangle; \qquad |\Psi\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} y_k |k\rangle$$

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= \sum_{j=0}^{N-1} x_j |j\rangle \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} x_j \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi}{N}jk} |k\rangle \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{j=0}^{N-1} x_j \frac{1}{\sqrt{N}} e^{i\frac{2\pi}{N}jk} \right] |k\rangle \end{aligned}$$

$$\rightarrow \qquad y_k = \sum_{j=0}^{N-1} x_j \frac{1}{\sqrt{N}} e^{i\frac{2\pi}{N}jk}$$

振幅变换公式

$$\boxed{y_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} x_j e^{i\frac{2\pi}{N}jk}}$$

x_j, y_k 分别是 $|\Psi\rangle$ 在基 $\{|j\rangle\}$，$\{|k\rangle\}$ 上的展开系数，也称为振幅。

例-已知双量子比特有如下展开式，请展开系数的傅里叶变换形式:

$$|\Psi\rangle = a_{00}\,|00\rangle + a_{01}\,|01\rangle + a_{10}\,|10\rangle + a_{11}\,|11\rangle$$

解: 在振幅变换公式中，取 N=4，$y_k = \frac{1}{\sqrt{4}}\sum_{j=0}^{3} x_j e^{i\frac{2\pi}{4}jk}$

$$y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4}}\sum_{j=0}^{3} x_j e^{i\frac{2\pi}{4}j\times 0} = \frac{1}{2}(a_{00} + a_{01} + a_{10} + a_{11})$$

$$y_{01} = \frac{1}{\sqrt{4}}\sum_{j=0}^{3} x_j e^{i\frac{2\pi}{4}j\times 1} = \frac{1}{2}(a_{00} + e^{i\frac{\pi}{2}}a_{01} + e^{i\frac{2\pi}{2}}a_{10} + e^{i\frac{3\pi}{2}}a_{11})$$

$$y_{10} = \frac{1}{\sqrt{4}}\sum_{j=0}^{3} x_j e^{i\frac{2\pi}{4}j\times 2} = \frac{1}{2}(a_{00} + e^{i\pi}a_{01} + e^{i2\pi}a_{10} + e^{i3\pi}a_{11})$$

$$y_{11} = \frac{1}{\sqrt{4}}\sum_{j=0}^{3} x_j e^{i\frac{2\pi}{4}j\times 3} = \frac{1}{2}(a_{00} + e^{i\frac{3\pi}{2}}a_{01} + e^{i\frac{6\pi}{2}}a_{10} + e^{i\frac{9\pi}{2}}a_{11})$$

小结

- 变换后的振幅，差别体现在相位上！
- 量子傅里叶变换可用来做相位估算
- 相位估算是许多量子算法的基础

Contents

二进制表示

考虑傅里叶变换公式的求和形式，可以改写成为：

$$\hat{F}\left|j\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi}{N}jk}\left|k\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi i\frac{j}{N}k}\left|k\right\rangle$$

- 注意到 $N = 2^n, j \leq N$， 式中的 $\left|j\right\rangle, \dfrac{j}{N}$ 可以写成二进制形式：

  设 $j = \sum_{l=1}^{n} j_l 2^{n-l};\quad \dfrac{j}{N} \approx \sum_{i=1}^{m} j_i \dfrac{1}{2^i}$, (m 为精度， 通常用 m=n)

  - $\left|j\right\rangle = \left|j_1 j_2 \cdots j_l \cdots j_n\right\rangle$
  - $\dfrac{j}{N} \approx 0.j_1 j_2 \cdots j_i \cdots j_m$

例- 令 j=9,N=16,m=3 (精度为小数点后三位), 写出 $|j\rangle$ 和 $\frac{j}{N}$ 的二进制形式:

解: $N = 16 = 2^4$, 有 n=4

$$j = \sum_{l=1}^{n} j_l 2^{n-l} = \sum_{l=1}^{4} j_l 2^{4-l} = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$

- $|j\rangle = |9\rangle = |8+1\rangle = |1001\rangle$

$$\frac{j}{N} = \frac{9}{16} = \frac{8}{16} + \frac{1}{16} = 1 \times \frac{1}{2^1} + 0 \times \frac{1}{2^2} + 0 \times \frac{1}{2^3} + 0 \times \frac{1}{2^4} = 0.1001$$

- $\frac{j}{N} \approx \sum_{i=1}^{m} j_i \frac{1}{2^i} = \sum_{i=1}^{3} j_i \frac{1}{2^i} = 1 \times \frac{1}{2^1} + 0 \times \frac{1}{2^2} + 0 \times \frac{1}{2^3} = 0.100$

乘积式

傅里叶变换公式的二进制求和形式:

$$\hat{F}\left|j\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi i \frac{j}{N}k}\left|k\right\rangle$$

$$\hat{F}\left|j_1 j_2 \cdots j_n\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi i 0.j_1 j_2 \cdots j_n k}\left|k\right\rangle$$

可以写成如下乘积形式:

$$\boxed{\hat{F}\left|j_1 j_2 \cdots j_n\right\rangle = \frac{\left[\left|0\right\rangle + e^{2\pi i 0.j_n}\left|1\right\rangle\right]\left[\left|0\right\rangle + e^{2\pi i 0.j_{n-1}j_n}\left|1\right\rangle\right]\cdots\left[\left|0\right\rangle + e^{2\pi i 0.j_1 j_2 \cdots j_n}\left|1\right\rangle\right]}{\sqrt{2}^n}}$$

把 $|j\rangle = |j_1 j_2 \cdots j_n\rangle = |00\cdots 0\rangle$ 代入验证:

求和式

$$\hat{F}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi i \frac{0}{N} k} |k\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}^n} \sum_{k=0}^{N-1} |k\rangle$$

乘积式

$$\begin{aligned}
\hat{F}|00\cdots 0\rangle &= \frac{\left[|0\rangle + e^{2\pi i 0.j_n}|1\rangle\right]\left[|0\rangle + e^{2\pi i 0.j_{n-1}j_n}|1\rangle\right]\cdots\left[|0\rangle + e^{2\pi i 0.j_1 j_2 \cdots j_n}|1\rangle\right]}{\sqrt{2}^n} \\
&= \frac{\left[|0\rangle + e^{2\pi i 0.0}|1\rangle\right]\left[|0\rangle + e^{2\pi i 0.00}|1\rangle\right]\cdots\left[|0\rangle + e^{2\pi i 0.00\cdots 0}|1\rangle\right]}{\sqrt{2}^n} \\
&= \frac{\left[|0\rangle + |1\rangle\right]\left[|0\rangle + |1\rangle\right]\cdots\left[|0\rangle + |1\rangle\right]}{\sqrt{2}^n} \\
&= \frac{\left[|00\cdots 0\rangle + |00\cdots 1\rangle + \cdots + |11\cdots 1\rangle\right]}{\sqrt{2}^n} = \frac{1}{\sqrt{2}^n} \sum_{k=0}^{N-1} |k\rangle
\end{aligned}$$

等价性证明

- $k = k_1 2^{n-1} + k_2 2^{n-2} + \cdots + k_n 2^0 = \sum_{l=1}^{n} k_l 2^{n-l}$

$$
\begin{aligned}
|j\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{k=0}^{2^n-1} e^{2\pi i j \frac{k}{N}} |k\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{k_1=0}^{1} \cdots \sum_{k_n=0}^{1} \exp(2\pi i \frac{j}{2^n} \sum_{l=1}^{n} k_l 2^{n-l}) |k_1 k_2 \cdots k_n\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{k_1=0}^{1} \cdots \sum_{k_n=0}^{1} \exp(2\pi i j \sum_{l=1}^{n} k_l 2^{-l}) |k_1 k_2 \cdots k_n\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{k_l=0}^{1} \otimes_{l=1}^{n} e^{2\pi i j k_l 2^{-l}} |k_l\rangle
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2^n}} \otimes_{l=1}^{n} \sum_{k_l=0}^{1} e^{2\pi i j k_l 2^{-l}} |k_l\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2^n}} \otimes_{l=1}^{n} \left[|0\rangle + e^{2\pi i j 2^{-l}} |1\rangle\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2^n}} \otimes_{l=1}^{n} \left[|0\rangle + e^{2\pi i \frac{j}{2^l}} |1\rangle\right]$$

$$= \frac{\left[|0\rangle + e^{2\pi i 0.j_n} |1\rangle\right]\left[|0\rangle + e^{2\pi i 0.j_{n-1}j_n} |1\rangle\right] \cdots \left[|0\rangle + e^{2\pi i 0.j_1 j_2 \cdots j_n} |1\rangle\right]}{\sqrt{2^n}}$$

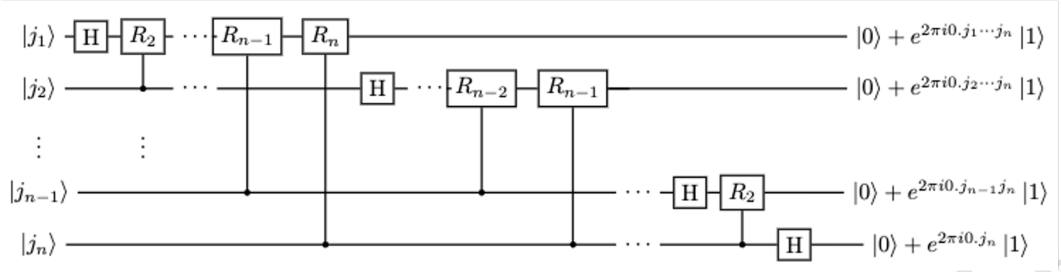
证毕!

Tips: 最后一步，不断地除以 2 取余，依次得到 $j_n, j_{n-1}, \cdots, j_1$,

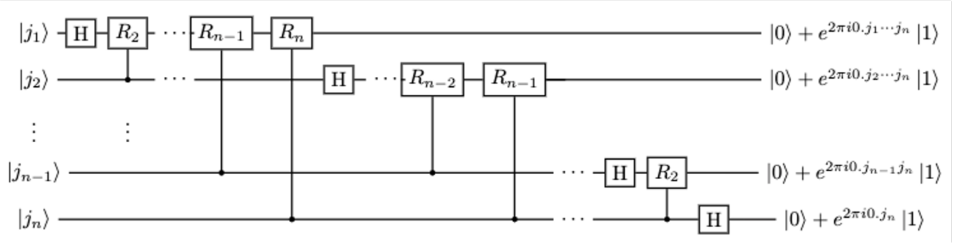
比如 9/2 余 1(j_4), 4/2 余 0(j_3), 2/2 余 0(j_2), 1/2 余 1(j_1), $9/16 = 0.1001$

又如 8/2 余 0(j_4), 4/2 余 0(j_3), 2/2 余 0(j_2), 1/2 余 1(j_1), $8/16 = 0.1000$

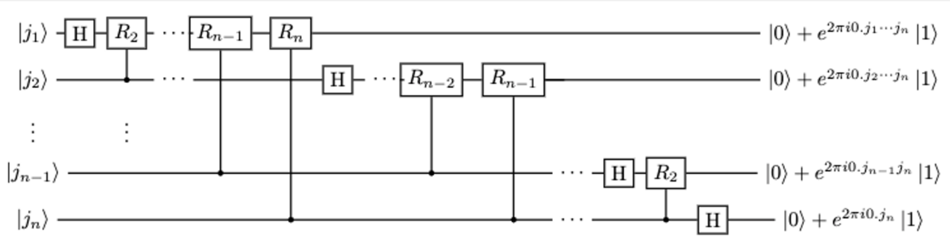
Contents



- **注意:**
  - 基于乘积式，可设计出如上量子线路
  - 图中末尾没有给出交换门。
  - 图中没有给出归一化因子 $1/\sqrt{2}$

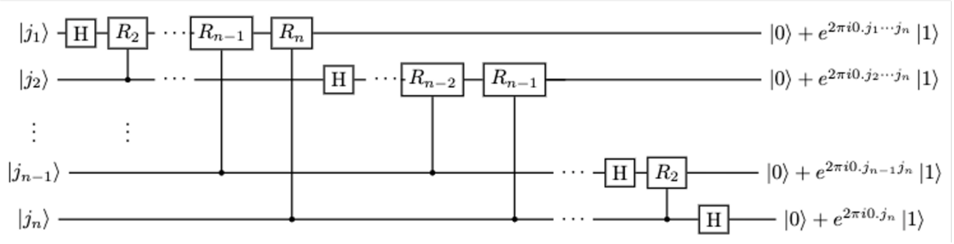


- 第一个量子位过 H 门:
  - $H|0\rangle|j_2 \cdots j_n\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}|j_2 \cdots j_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{2\pi i 0.j_1}|1\rangle)|j_2 \cdots j_n\rangle$
  - $H|1\rangle|j_2 \cdots j_n\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}|j_2 \cdots j_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{2\pi i 0.j_1}|1\rangle)|j_2 \cdots j_n\rangle$



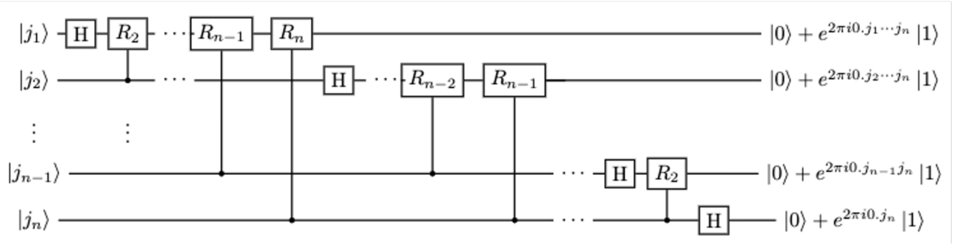
第一个量子位过受控 R_2 门, $(R_2 \equiv e^{i\pi/2} = e^{2\pi i/2^2})$

- $j_2 = 0, \quad R_2 \dfrac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{2\pi i 0.j_1 j_2}|1\rangle)|j_2 \cdots j_n\rangle$
- $j_2 = 1, \quad R_2 \dfrac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{2\pi i 0.j_1 j_2}|1\rangle)|j_2 \cdots j_n\rangle$

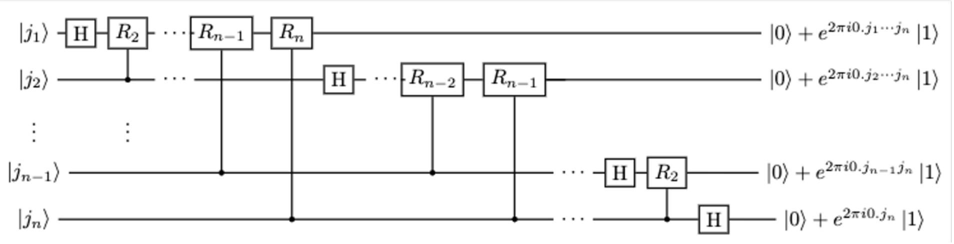


第一个量子位依次过受控 $R_3, R_4, \cdots, R_n$ 门

- $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{2\pi i 0.j_1 j_2\cdots j_n}|1\rangle)|j_2\cdots j_n\rangle$

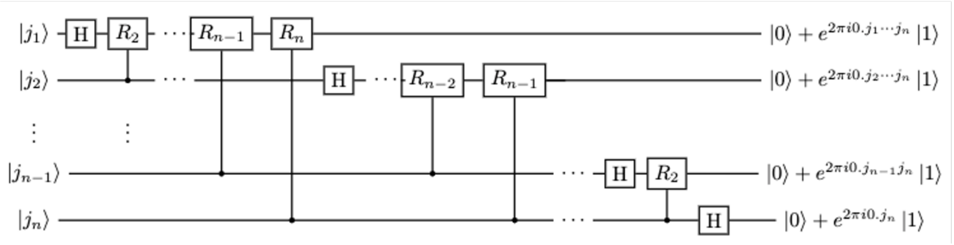


- 第二个量子位依次过 H 门，
  - $$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{2\pi i 0.j_1 j_2\cdots j_n}|1\rangle)\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{2\pi i 0.j_2}|1\rangle)|j_3\cdots j_n\rangle$$



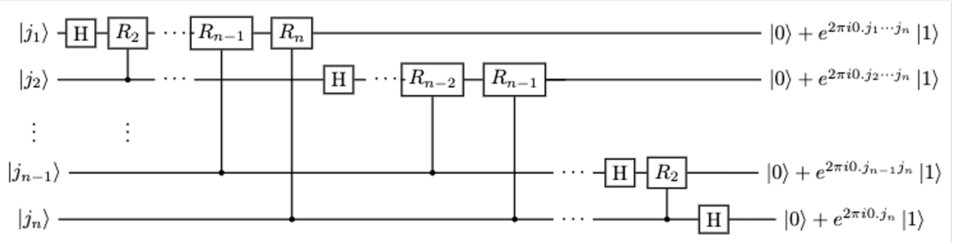
第二个量子位依次过受控 $R_2, R_3, R_4, \cdots, R_{n-1}$ 门

- $$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{2\pi i 0.j_1 j_2 \cdots j_n}|1\rangle)\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{2\pi i 0.j_2 j_3 \cdots j_n}|1\rangle)|j_3 \cdots j_n\rangle$$



- 其余各量子位依次类推，系统的状态变为

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle+e^{2\pi i0.j_1j_2\cdots j_n}|1\rangle)\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle+e^{2\pi i0.j_2j_3\cdots j_n}|1\rangle)\cdots\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle+e^{2\pi i0.j_n}|1\rangle)$$



- 第 1 与第 n 位交换，第 2 与第 n-1 位交换，…依次类推，系统的状态变为

$$\frac{\left[|0\rangle + e^{2\pi i 0.j_n}|1\rangle\right]\left[|0\rangle + e^{2\pi i 0.j_{n-1}j_n}|1\rangle\right]\cdots\left[|0\rangle + e^{2\pi i 0.j_1 j_2\cdots j_n}|1\rangle\right]}{\sqrt{2^n}}$$

完成！

- 量子傅里叶变换：第 1 位使用了 n 个逻辑门，第 2 位使用了 n-1 逻辑门，…, 第 n 位使用了 1 个逻辑门。共 n(n+1)/2 个门。交换门 n/2. 时间复杂度为 $\Theta(n^2)$.
- 经典傅里叶变换：时间复杂度为 $\Theta(n2^n)$.

Thanks for your attention!

A & Q

求實求真
大氣大為