量 子 光 学 讲 义

李小飞

2022 年 6 月 14 日

第一章 绪论（4 学时）

- 主要内容:
- 重点和难点:
- 掌握:
- 理解:
- 了解:

光学（optics）是一门有悠久历史的学科，它的发展史可追溯到 2000 多年前。如今, 光学已是物理学最重要的一个分支. 主要经历以了下发展阶段.

- 17 世纪以前光学知识和光学现象记录时代.
- 17 世纪 W. 斯涅耳和 R. 笛卡尔总结出光的反射定律和折射定律. 奠定了几何光学的基础, 光学真正形成一门学科.
- 19 世纪初，以杨氏干涉实验, 惠更斯−菲涅耳原理和麦克斯韦方程为代表的波动光学建立
- 1900 年，以普朗克能量子, 爱因斯坦光量子, 开启了量子光学的大门. 光学走向了量子时代
- 1960 年, 激光的发现和发展, 产生了一系列新的现化光学分支.

1.1 光场的量子化

1.1.1 谐振子量子化

1900 年，普朗克在解释黑体辐射时, 提出黑体由大量电谐振子构成, 电谐振子辐射量子化能量 (光子), 形成光场.

经典解法

谐振子在平衡位置附近的振动, 在牛顿力学条件满足波动方程:

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz})$$

零边界条件下的解 (一维)

- 固有值：$\lambda_n = \dfrac{n^2\pi^2}{l^2}$
- 固有解：$X_n(x) = \sin\dfrac{n\pi}{l}x = \sin\omega_n x$
- 基本解:

$$u_n(x,t) = (a_n\cos\frac{n\pi at}{l} + b_n\sin\frac{n\pi at}{l})\sin\frac{n\pi x}{l}$$

- 叠加解:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi at}{l} + b_n\sin\frac{n\pi at}{l})\sin\frac{n\pi x}{l}$$

量子解法-1

谐振子在平衡位置附近的振动, 写出其哈密顿量:

$$H = T + V = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

x, p 是正则变量, 有如下哈密顿正则方程

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\omega^2 x$$
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$$

由基本对易关系

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$$

得算符 $\hat{p} = -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial x}$ 代回得量子化的哈密顿量

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

代入薛定谔方程并求解

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t) = H\Psi(x,t)$$

得:

- 固有值: $E_n = (n+\dfrac{1}{2})\hbar\omega$
- 固有函数: $X\ _n(x) = H(\alpha x)e^{-(\alpha x)^2/2}$
- 基本解:

$$\Psi_n(x,t) = N_n e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t} X\ _n(x)$$

评论. 正则量子化标准程序

- 写出经典哈密顿

$$E = H(x, p_x)$$

- 改写哈密顿为共轭变量形式 $H(q,p)$, 并给出正则方程

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$
$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

- 共轭变量算符满足量子力学基本对易关系, 得算符化哈密顿

$$[q,p] = i\hbar$$

- 把哈密顿算符代入薛定谔方程, 得量子解.

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi\rangle = H|\Psi\rangle$$

量子解法-2

谐振子哈密顿量:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

算符化哈密顿量

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}(\hat{p}^2 + m^2\omega^2\hat{x}^2) \qquad \text{with} \quad [\hat{x},\hat{p}] = i\hbar$$

薛定谔方程太难解! 有第二种解法.

令:

$$\hat{X} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\hat{x}, \hat{P} = \sqrt{\frac{1}{m\hbar\omega}}\hat{p}$$

重写哈密顿量

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2}(\hat{X}^2 + \hat{P}^2) \qquad \text{with} \quad [\hat{X}, \hat{P}] = i$$

再令:

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} + i\hat{P}), \qquad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} - i\hat{P})$$

重写哈密顿量

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right) \qquad \text{with} \quad [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$$

证明: 为不失一般性, 我们从正则变量进行证明, (在不影起混乱的条件, 帽子可略去).
正则变量描述的密顿量

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2)$$

重复上面的过程 (取 m=1), 有:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega q + ip)$$
$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega q - ip)$$

$$\begin{aligned}
[a, a^\dagger] &= aa^\dagger - a^\dagger a \\
&= (\frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}})^2[(\omega q + ip)(\omega q - ip) - (\omega q - ip)(\omega q + ip)] \\
&= (\frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}})^2 2i\omega(pq - qp) \\
&= -(\frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}})^2 2i\omega[q, p] \\
&= -(\frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}})^2 2i\omega(i\hbar) \\
&= 1
\end{aligned}$$

反向求得正则共轭变量算符的新形式

$$q = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}(a + a^\dagger)$$
$$p = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}}(a^\dagger - a)$$

代入 $H=\frac{1}{2}(p^2+\omega^2q^2)$

$$\begin{aligned}H&=\frac{1}{2}[(i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}}(a^\dagger-a))^2+\omega^2(\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}(a+a^\dagger))^2]\\&=\frac{1}{2}[(i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}}(a^\dagger-a))^2+(\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}}(a+a^\dagger))^2]\\&=\frac{1}{4}\hbar\omega[(a+a^\dagger)^2-(a^\dagger-a)^2]\\&=\frac{1}{4}\hbar\omega[2aa^\dagger-2a^\dagger a+4a^\dagger a]\\&=\hbar\omega(a^\dagger a+\frac{1}{2})\end{aligned}$$

以上过程, 同样适用于谐振子.

很明显, $a\neq a^\dagger$, 它不是自伴算符, 不具厄密性. 有必要研究其具体性质.
对于能量第 n 个本征态,

$$H\left|n\right\rangle=E_n\left|n\right\rangle,\quad aH\left|n\right\rangle=E_na\left|n\right\rangle$$

$$\begin{aligned}Ha\left|n\right\rangle&=(\hbar\omega a^\dagger a+\frac{1}{2}\hbar\omega)a\left|n\right\rangle\\&=(\hbar\omega a^\dagger aa+\frac{1}{2}\hbar\omega a)\left|n\right\rangle\\&=(\hbar\omega(-1+aa^\dagger)a+\frac{1}{2}\hbar\omega a)\left|n\right\rangle\\&=(\hbar\omega aa^\dagger a-a\frac{1}{2}\hbar\omega)\left|n\right\rangle\\&=a(\hbar\omega a^\dagger a-\frac{1}{2}\hbar\omega)\left|n\right\rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Ha\left|n\right\rangle&=a(\hbar\omega a^\dagger a+\frac{1}{2}\hbar\omega-\hbar\omega)\left|n\right\rangle\\&=(aH-a\hbar\omega)\left|n\right\rangle\\&=(E_n-\hbar\omega)a\left|n\right\rangle\end{aligned}$$

也就是说 $a\left|n\right\rangle$ 也是能量本征态, 本征值为 $E_n-\hbar\omega=E_{n-1}$ 即有一份能量 $\hbar\omega$ 被湮灭, 故称 a 为湮灭算符, 有:

$$\boxed{a\left|n\right\rangle=D_n\left|n-1\right\rangle}$$

同理可得:

$$Ha^\dagger\left|n\right\rangle=(E_n+\hbar\omega)a^\dagger\left|n\right\rangle$$

也就是说 $a^\dagger\left|n\right\rangle$ 也是能量本性态, 本征值为 $E_n+\hbar\omega=E_{n+1}$ 即产生一份能量 $\hbar\omega$, 故称 $a^\dagger$ 为产生算符, 有:

$$\boxed{a^\dagger\left|n\right\rangle=C_n\left|n+1\right\rangle}$$

本征能量可无限地增加, 但不能被无限湮灭, 设最小的为 E_0, 对应本征态 $|0\rangle$, 有:

$$\boxed{a\,|0\rangle = 0}$$

由

$$H = \hbar\omega a^\dagger a + \frac{1}{2}\hbar\omega$$

有:

$$H - \frac{1}{2}\hbar\omega = \hbar\omega a^\dagger a$$

$$(H - \frac{1}{2}\hbar\omega)\,|0\rangle = \hbar\omega a^\dagger a\,|0\rangle = \hbar\omega a^\dagger 0 = 0$$

$$H\,|0\rangle = \frac{1}{2}\hbar\omega\,|0\rangle = E_0\,|0\rangle$$

即, 谐振子的最低能级为

$$\boxed{E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega}$$

称为真空态.

从真空态出发, 相继使用产生算符, 每次产生一份能量 $\hbar\omega$, 因此谐振子的能量本征值为

$$\boxed{E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots}$$

粒子数态

对于黑体辐射场来说, 能量本征态 $|n\rangle$ 描述的是该模 (ω) 上有 n 个激发的光子, 每个光子的能量都是 $\hbar\omega$ 即:$|n\rangle$ 态描述的是含有 n 个光量子的态. 因此, 能量本征态 $|n\rangle$ 也称为粒子数态.

占有数算符是 $N = a^\dagger a$, 有本征方程:

$$a^\dagger a\,|n\rangle = n\,|n\rangle$$

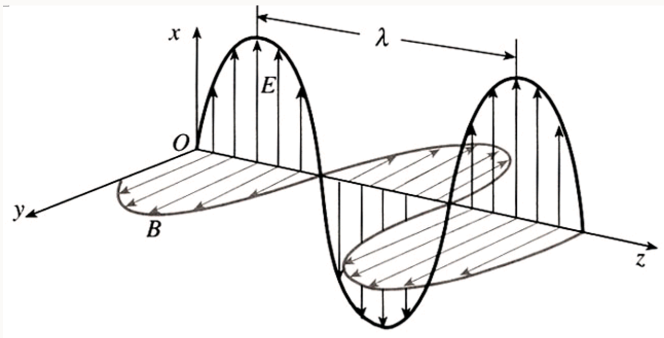
产生湮灭算符分别产生和消灭这个模式的一个光子

$$a\,|n\rangle = D_n\,|n-1\rangle, \qquad a^\dagger\,|n\rangle = C_n\,|n+1\rangle$$

$$
\begin{aligned}
a^\dagger a\,|n\rangle &= a^\dagger D_n\,|n-1\rangle \\
&= D_n C_{n-1}\,|n\rangle = n\,|n\rangle \\
D_n C_{n-1} &= n \qquad \cdots(1) \\
D_n &= \langle n-1|a|n\rangle \\
&= (\langle n|a^\dagger|n-1\rangle)^* \\
&= C_{n-1}^* \qquad \cdots(2)
\end{aligned}
$$

联立 (1)(2), 得 $C_{n-1} = \sqrt{n} = D_n, C_n = \sqrt{n+1}$

1.1.2 单模光场的量子化



考虑一个光学腔, 其电磁场的能量密度

$$
\omega = \frac{1}{2}(\epsilon_0 E_x^2 + \mu_0 H_y^2)
$$

总能量用哈密顿量描述

$$
H = \frac{1}{2}\int_V (\epsilon_0 E_x^2 + \mu_0 H_y^2) dV
$$

经典解法

介质中, 定义电位移矢量 $\mathbf{D}$ 和磁场强度 $\mathbf{H}$

$$
\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon_0\epsilon_r\mathbf{E}, \qquad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B} - \mathbf{M} = \frac{1}{\mu_0\mu_r}\mathbf{B}
$$

麦克斯韦方程:

$$
\begin{aligned}
&\nabla\cdot\mathbf{D} = \rho_f \\
&\nabla\cdot\mathbf{B} = 0 \\
&\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \\
&\nabla\times\mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}
\end{aligned}
$$

对于真空 $(\rho_f = 0, \mathbf{J}_f = 0)$, 把

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}, \qquad \mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}$$

代入如下麦克斯韦方程

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

得:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) &= -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ &= -\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} \\ &= -\nabla^2 \mathbf{E} \end{aligned}$$

得:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

改写成

$$\boxed{E_{tt} = c^2 \nabla^2 \mathbf{E}}$$

这是波动方程的标准型 (见数理方程)

当电磁波在 z 方向传波时, 有 $E_y = E_z = 0, B_x = B_z = 0$.
考虑一个光学腔 $0 \leq z \leq L$, 其解为:

- 固有值: $\lambda_n = \dfrac{n^2 \pi^2}{L^2} = k_n^2$
- 固有解: $E_n(z) = \sin(k_n z)$
- 基本解: $E_{x,n}(z,t) = a_n q_n(t) \sin(k_n z)$
- 叠加解: $E_x(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q_n(t) \sin(k_n z)$

把解代入下式

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

得磁场的解:

- 叠加解: $H_y(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \dfrac{\epsilon_0}{k_n} q_n'(t) \cos(k_n z)$

经典结论: 电磁场的运动可分解为一系列基本模式的振动, 在自由场条件下, 振动是自由的, 若有电荷或电流, 变成受迫振动.

量子化

- 现代物理学对场与粒子的关系有如下基本认识

1. 场是物质存在的基本形式
2. 所有的粒子都是场的量子, 分为费米子和玻色子两大类
3. 场的量子与量子力学中的粒子并不完全一样, 在非相对论近似下两者可拟合在一起
4. 光子无非相对论近似, 不可能被拟合成量子力学中粒子的的样子
5. 电磁场量子化有着不同于一般意义的效应.

简振模展开

注意光腔电磁波的叠加解 (三维形式)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}(\mathbf{r},t) &= -\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}}\sum_l^\infty q_l(t)\mathbf{E}_l(\mathbf{r}) \\
\mathbf{H}(\mathbf{r},t) &= \frac{1}{\sqrt{\mu_0}}\sum_l^\infty \omega_l p_l(t)\mathbf{H}_l(\mathbf{r})
\end{aligned}
$$

是电磁场按腔模式的展开式, 解代入电磁场的哈密顿量, 利用腔模正交性计算 (细节!)

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2}\int_V(\mu_0\mathbf{H}^2+\epsilon_0\mathbf{E}^2)dV \\
&= \sum_l^\infty \frac{1}{2}(p_l^2+\omega_l^2 q_l^2) \\
&= \sum_l^\infty H_l
\end{aligned}
$$

与谐振子的哈密顿量 $H=\frac{1}{2m}(p^2+m\omega^2x^2)$ 相比较, 说明电磁场可视为一组无耦合离散的谐振子 (质量 $m=1$) 的无穷集.

对单模哈密顿 $H_l=\frac{1}{2}(p_l^2+\omega_l^2q_l^2)$ 求导, 得哈密顿运动方程

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}p_l}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\partial H_l}{\partial q_l} = -\omega_l^2 q_l \\
\frac{\mathrm{d}q_l}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial H_l}{\partial p_l} = p_l
\end{aligned}
$$

说明 p_l 和 q_l 是电磁场的一对正则共轭变量. 量子化条件是它们的算符之间存在如下关系

$$[\hat{q}_l, \hat{p}_l] = i\hbar$$

由它们可以定义出产生湮灭算符 (省略了帽子!)

$$a_l = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_l}}(\omega_l q_l + ip_l)$$
$$a_l^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_l}}(\omega_l q_l - ip_l)$$

反向求得

$$q_l = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_l}}(a_l + a_l^\dagger)$$
$$p_l^\dagger = -\sqrt{\frac{\hbar\omega_l}{2}}(a_l - a_l^\dagger)$$

单模哈密顿算符变为

$$H_l = \frac{1}{2}\hbar\omega_l(a_l a_l^\dagger + a_l^\dagger a_l) = \hbar\omega_l(a_l^\dagger a_l + \frac{1}{2})$$

单模光场的能量本征值为

$$\boxed{E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega_l, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots}$$

行波展开

自由空间电磁场模为平面波 (行波), 解的形式为:

$$\hat{e}_\sigma exp(\pm i(\omega_k t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})), \qquad k^2 = \frac{\omega_k^2}{c^2}$$

式中 $\hat{e}_\sigma$ 为偏振方向上的单位矢量, $\sigma = 1$ or 2 代表两个振动方向, 它们相互正交且都与波矢 $\mathbf{k}$ 正交.

经箱归一化, 可离散化行波, 得

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L}(l_1\mathbf{i} + l_2\mathbf{j} + l_3\mathbf{k}), \qquad l_i = 0, \pm1, \pm2, \cdots$$

行波本征模为

$$\mathbf{u}_{k\sigma}(\mathbf{r}) = \hat{e}_\sigma e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

自由空间电磁场按行波展开

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = i\sum_{k,\sigma}^{\infty}(\frac{\hbar\omega_k}{2\epsilon_0 V})^{1/2}\hat{e}_\sigma[a_{k\sigma}(t)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - a_{k\sigma}^*(t)e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}]$$
$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = i\sum_{k,\sigma}^{\infty}(\frac{\hbar\omega_k}{2\mu_0 V})^{1/2}(\hat{e}_k \times \hat{e}_\sigma)[a_{k\sigma}(t)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - a_{k\sigma}^*(t)e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}]$$

箱内总能量:

$$\begin{aligned}H &= \frac{1}{2}\int_V (\mu_0 \mathbf{H}^2 + \epsilon_0 \mathbf{E}^2) dV \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k,\sigma}^{\infty} \hbar\omega_k (a_{k\sigma}a_{k\sigma}^* + a_{k\sigma}^* a_{k\sigma}) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k,\sigma}^{\infty} (p_{k\sigma}^2 + \omega_k^2 q_{k\sigma}^2) = \sum_{k,\sigma}^{\infty} H_{k\sigma}\end{aligned}$$

哈密顿运动方程

$$\frac{\mathrm{d}p_{k\sigma}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H_{k\sigma}}{\partial q_{k\sigma}} = -\omega_{k\sigma}^2 q_{k\sigma}$$

$$\frac{\mathrm{d}q_{k\sigma}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H_{k\sigma}}{\partial p_{k\sigma}} = p_{k\sigma}$$

因此, 也可以象光腔驻波解一样, 进行量子化.

例 **1.1.1.** 例-1. 试证明 *Fock* 态下电磁场的电场强度平均值为零:

证明: 设电磁场处于 *Fock* 态 $|n\rangle$

$$\begin{aligned}\langle n|\mathbf{E}|n\rangle &= \left\langle n|\imath\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0}}\mathbf{E}(\mathbf{r})(a-a^\dagger)|n\right\rangle \\ &= \left\langle n|\imath\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0}}\mathbf{E}(\mathbf{r})a|n\right\rangle - \left\langle n|\imath\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0}}\mathbf{E}(\mathbf{r})a^\dagger|n\right\rangle \\ &= 0-0=0\end{aligned}$$

*** 相位随机性导致测量平均值为零! Fock 表象一般用于处理小粒子数的情况.**

单模场的量子涨落

例 **1.1.2.** 例-2. 考虑一维单模驻波场, 求电场和磁场强度的量子涨落:

解: 一维单模驻波场的电场和磁场算符为

$$E_x(z,t) = -i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{\epsilon_0 L}}\sin kz(a^\dagger(t)-a(t))$$

$$H_y(z,t) = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\mu_0 L}}\cos kz(a(t)+a^\dagger(t))$$

设光场处于 **FOCK** 态 $|n\rangle$, 有:

$$\langle n|E_x(z,t)|n\rangle = \langle n|H_y(z,t)|n\rangle = 0$$

令 $E_0 = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{\epsilon_0 L}}$

$$\begin{aligned}
\langle n|E_x^2|n\rangle &= \left\langle n| - E_0^2 \sin^2 kz(a^\dagger(t) - a(t))^2|n\right\rangle \\
&= 2E_0^2 \sin^2 kz \,\langle n|a^\dagger a|n\rangle \\
&= 2E_0^2 \sin^2 kz \left\langle n|n + \frac{1}{2}|n\right\rangle \\
&= 2(n + \frac{1}{2})E_0^2 \sin^2 kz
\end{aligned}$$

量子涨落:

$$\begin{aligned}
\langle \Delta E_x\rangle &= \sqrt{\langle(\Delta E_x)^2\rangle} = \langle(E_x^2)\rangle - \langle E_x\rangle^2 \\
&= \sqrt{2}\sqrt{n + \frac{1}{2}} E_0 \left|\sin kz\right|
\end{aligned}$$

即使没有激发 **(n=0)**, 依然存在真空涨落 $E_0 \left|\sin kz\right|$