Problemas 4

1. $\nu = \frac{c}{\lambda}$

$$E = h\nu = h\frac{c}{\lambda} = \frac{(6{,}626\times10^{-34})(3\times10^{8})}{6{,}338\times10^{-7}} = 3{,}14\times10^{-19}\ J$$

2. $P = 100\ W$, $\Delta t = 60\ s$, $\nu = 5\times10^{14}\ Hz$

Energia: $E = P.\Delta t = 100\times60 = 6000\ J$

Energia de 1 fotão: $h\nu = (6{,}626\times10^{-34})(5\times10^{14})$
$= 3{,}31\times10^{-19}\ J$

N.º de fotões: $N = \frac{6000}{3{,}31\times10^{-19}} = 1{,}81\times10^{22}$

3. a) $\lambda = 4{,}5\times10^{-7}\ m$
$W = 2\times10^{-19}\ J$

$\Rightarrow E = h\nu = h\frac{c}{\lambda} = \frac{(6{,}626\times10^{-34})(3\times10^{8})}{4{,}5\times10^{-7}}$
$= 4{,}42\times10^{-19}\ J$
energia de 1 fotão

b) $E = h\nu - W$
$= 4{,}42\times10^{-19} - 2\times10^{-19}$
$= 2{,}42\times10^{-19}\ J$

Problema 4

4. $m = 2\,kg$, $v = 33\ m/s$

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = \frac{6{,}63\times10^{-34}}{2\times 33} = 1{,}00\times10^{-35}\,m$$

5. Tabela 1.1 (Griffiths)

Amarelo: $\lambda = 5{,}9\times10^{-7}\,m$

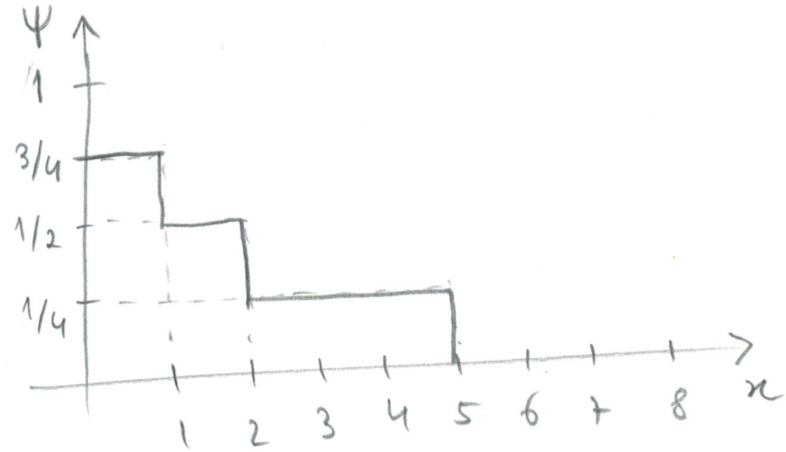
$$\lambda = \frac{h}{mv} \Rightarrow v = \frac{h}{m\lambda} = \frac{6{,}63\times10^{-34}}{(9{,}11\times10^{-31})(5{,}9\times10^{-7})}$$

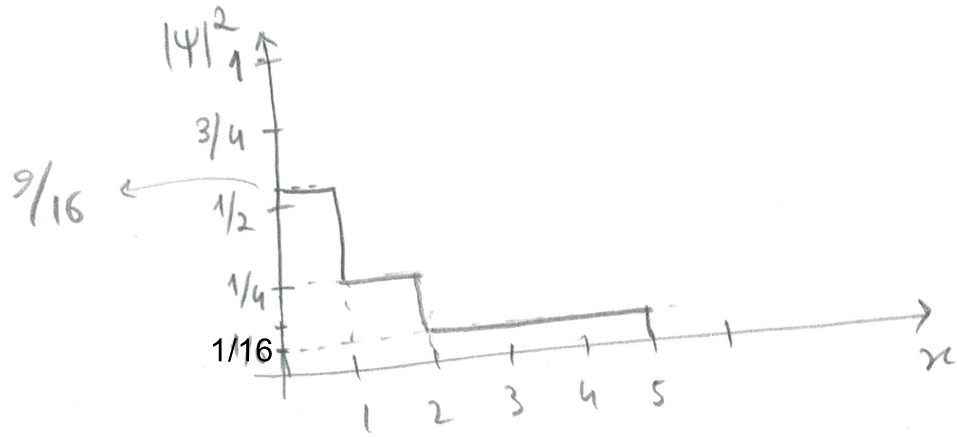
$$= 1230\ m/s$$

usa-se o momento linear não relativista porque se antecipa que $v \ll c$

Problemas 4

6. (Griffiths, cap. 3, P. 11)





a) $P_{[1,2]} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 1 = \frac{1}{4}$

b) $P_{[0,5]} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 (1) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 (1) + \left(\frac{1}{4}\right)^2 (3)$

$= \frac{9}{16} + \frac{1}{4} + \frac{3}{16} = \frac{9}{16} + \frac{4}{16} + \frac{3}{16}$

$= 1$

Problemas 4

7. Função de onda
$$\begin{cases} \psi(x) = \dfrac{1}{\pi}, & \text{se } x=0 \\[2ex] \psi(x) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{\sin x}{x}, & \text{se } x\neq 0 \end{cases}$$

$|\psi(x)|^2 = \underbrace{\psi^*(x)}_{\text{complexo conjugado}}\psi(x)$ densidade de probabilidade

a) Em $x=0$: $\psi(0) = \dfrac{1}{\pi}$

$$|\psi(0)|^2 = \left(\frac{1}{\pi}\right)^2$$

b) Em $x=5$: $\psi(5) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{\sin(5)}{5}$

radianos

$$|\psi(5)|^2 = \frac{1}{\pi^2}\frac{\sin^2(5)}{5^2}$$

$$= 0{,}003727$$

Problemas 4

8. $\Psi(x) = A\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

a) condições fronteiras: $\Psi(0) = 0$
$\Psi(a) = 0$

(porque é zero onde a energia potencial é infinita e tem que ser contínua)

Substituindo $x = 0$ e $x = a$ na função de onda:

$$\Psi(0) = A\sin(0) = 0$$

$$\Psi(a) = A\sin\left(\frac{n\pi}{a}a\right) = 0 \qquad (n \text{ é inteiro})$$

b) A constante de normalização tem que ser tal que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi|^2 dx = 1$$

Temos que calcular $\int_{-\infty}^{+\infty} A^2 \sin^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx = 1$

como $\int \sin^2(kx)\,dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4k}\sin(2kx)$, vem

$$A^2\left[\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\frac{a}{n\pi}\sin\frac{2n\pi}{a}x\right]_0^a = 1$$

Nota: $\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi|^2 dx = \int_0^a |\Psi|^2 dx$, por $\Psi(x)$ é nula fora do intervalo $[0, a]$

$$A^2\left[\frac{a}{2} - \frac{a}{4n\pi}\underbrace{\sin\frac{2n\pi}{a}a}_{0} - 0 + \frac{a}{4n\pi}\underbrace{\sin(0)}_{0}\right]$$

$$A^2\frac{a}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad A = \sqrt{\frac{2}{a}}$$

c) $$|\Psi(x=a/2)|^2 = \left[\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi}{a}\frac{a}{2}\right]^2$$

$$= \frac{2}{a}\sin^2\frac{n\pi}{2}$$

d) Relação de de Broglie: $p = \frac{h}{\lambda}$

usando $K = \frac{2\pi}{\lambda}$ e $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, vem

$$p = K\hbar$$

Note-se que a função de onda pode ser expressa na forma $\Psi(x) = A\sin(Kx)$, $K = \frac{2\pi}{\lambda}$. Comparando com $\Psi(x) = A\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$, vemos que $K = \frac{n\pi}{a}$.

Então, a relação de de Broglie vem

$$p = K\hbar = \frac{n\pi}{a}\hbar$$

Mas $p = mv$ e $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$ (energia cinética), o que permite escrever

$$p^2 = \frac{n^2\pi^2}{a^2}\hbar^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{p^2}{2m} = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

$$T = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

Problemas 4

19. $P = e^{-2\alpha L}$, $\alpha = \sqrt{\frac{2m(U-E)}{\hbar^2}}$ $L = 1mm = 1\times10^{-3}$

$E = 0,5 \text{ eV}$
$= 0,5 \times 1,6\times10^{-19} \text{ J}$
$= 8 \times 10^{-20} \text{ J}$

$U = 3 \text{ eV}$
$= 3 \times 1,6\times10^{-19} \text{ J}$
$= 4,8\times10^{-19} \text{ J}$

$m=$

$m = 9,1\times10^{-31} \text{ Kg}$

$h = 6,626\times10^{-34} \text{ Js} \Rightarrow \hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05\times10^{-34} \text{ Js}$

$$\alpha = \sqrt{\frac{2\times9,1\times10^{-31}(4,8-0,8)\times10^{-19}}{(1,05\times10^{-34})^2}} = 8,126\times10^{9}$$

$$P = e^{-2\times8,126\times10^{9}\times1\times10^{-9}} = 8,7\times10^{-8}$$

Problemas 4

10. (Griffiths, cap. 3, P 12)

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = \frac{6,63\times10^{-34}}{2\pi}$$
$$= 1,055\times10^{-34}$$

$\Delta x = 1\times10^{-3}\,m$

$\Delta p = m \cdot \Delta v$

$\Delta x \cdot \Delta p = \frac{\hbar}{2} \Rightarrow \Delta x \cdot m \Delta v = \frac{\hbar}{2}$

$$\Delta v = \frac{\hbar}{2 \cdot \Delta x \cdot m} = \frac{1,055\times10^{-34}}{2\times1\times10^{-3}\cdot 9,11\times10^{-31}} = 0,0579\ m/s$$

Problemas 4

11. (Griffiths, cap. 3, P. 13)

$m = 0{,}5\ \text{kg}$ $\qquad$ $\Delta x = 0{,}30\ \text{m}$

a) $\Delta p = \dfrac{\hbar}{2\Delta x} = \dfrac{1{,}055\times10^{-34}}{2\times 0{,}30} = 1{,}76\times10^{-34}\ \text{kg m/s}$

b) $\Delta v = \dfrac{\Delta p}{m} = \dfrac{1{,}76\times10^{-34}}{0{,}5} = 3{,}52\times10^{-34}\ \text{m/s}$

c) $d = vt \Rightarrow t = \dfrac{d}{v} = \dfrac{0{,}30}{3{,}52\times10^{-34}} = 8{,}53\times10^{32}\ \text{s}$

$= 2{,}704\times10^{25}$ anos

$1\ \text{ano} = 24\times3600\times365$
$= 3{,}1536\times10^{7}\ \text{s}$

d) Idade do universo $\sim 10^{10}$ anos

Tempo calculado na alínea anterior é muito maior que a idade do universo!

É completamente irrelevante considerar o princípio de incerteza neste caso.

Problemas 4

12. $$(\Delta\lambda)(\Delta x) = \frac{\lambda^2}{4\pi} \qquad \Delta x = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}\frac{1}{4\pi} = \lambda\frac{\lambda}{\Delta\lambda}\frac{1}{4\pi}$$

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 10^{-7} \qquad \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = 10^{7}$$

a) $\lambda = 5\times10^{-4}$ Å

$$\Delta x = 5\times10^{-4}\times10^{7}\frac{1}{4\pi} = 397{,}9 \text{ Å}$$

b) $\lambda = 5{,}0$ Å

$$\Delta x = 5\times10^{7}\frac{1}{4\pi} = 3{,}979 \text{ Å}$$

c) $\lambda = 5\times10^{3}$ Å

$$\Delta x = 5\times10^{3}\times10^{7}\frac{1}{4\pi} = 3{,}977\times10^{9} \text{ Å}$$

Problemas 4

13. $\lambda = 800 \pm 5 \text{ nm} \quad \Rightarrow \Delta\lambda = 5\times10^{-9}\text{ m}$

$$(\Delta\lambda)(\Delta t) = \frac{\lambda^2}{4\pi c}$$

$$\Delta t = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}\,\frac{1}{4\pi c} = \frac{(8\times10^{-7})^2}{5\times10^{-9}}\,\frac{1}{4\pi\times3\times10^{8}}$$

$$= \frac{6{,}4\times10^{-13}}{18{,}85} = 3{,}39\times10^{-14}\text{ s} = 33{,}9\text{ fs}$$

fento-segundo

Problemas 4

14. (Griffiths, cap. 3, P8)

$n=4 \rightarrow n=1$

a) $$E_n = -\left(\frac{2\pi^2 k^2 m e^4}{h^2}\right)\frac{1}{n^2} = \frac{E_1}{n^2}$$

$$E_1 = -\frac{2\pi^2 k^2 m e^4}{h^2} = -13{,}61 \text{ eV}$$

$$E_4 = \frac{E_1}{4^2} = -\frac{13{,}61}{16} = -0{,}851 \text{ eV}$$

b) $E_1 = -13{,}61$ eV

c) $-0{,}851 - (-13{,}61) = 12{,}76$ eV

d) $$E = h\nu \Rightarrow \nu = \frac{E}{h} = \frac{12{,}76 \times 1{,}602 \times 10^{-19}}{6{,}626 \times 10^{-34}}$$

$$= 3{,}09 \times 10^{15} \text{ Hz}$$

e) Consultando uma tabela com as regiões do espectro electromagnético, verifica-se que a frequência encontrada não pertence à região visível, mas pertence à região ultra-violeta (UV)

Problemas 4

15. (Griffiths, cap. 3, P.9)

$n=4 \longrightarrow n=2$

a) $E_4 = \frac{E_1}{4^2} = -0,851$ eV

$E_2 = \frac{E_1}{2^2} = \frac{-13,61}{4} = -3,402$

$E_{fotão} = E_4 - E_2 = -0,851 - (-3,402)$
$= 2,55$ eV

b) $E = h\nu \Rightarrow \nu = \frac{E}{h} = \frac{2,55 \times 1,602 \times 10^{-19}}{6,626 \times 10^{14}}$

$= 6,16 \times 10^{14}$ Hz

c) $c = \frac{\lambda}{T} = \lambda \nu \Rightarrow \lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \times 10^{8}}{6,16 \times 10^{14}}$

$= 4,87 \times 10^{-7}$ m

(azul)

Problemas 4

16. $$E_n = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$$, $m = 9{,}1094 \times 10^{-31}$ Kg

$\hbar = 1{,}055 \times 10^{-34}$ Js

$a = 1\,nm = 1 \times 10^{-9}$ m

$n=4 \longrightarrow n=3$

$$E = E_4 - E_3$$
$$= (4^2 - 3^2)\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2} = (16-9)\frac{\pi^2(1{,}05\times10^{-34})^2}{2\times9{,}1\times10^{-31}\times(1\times10^{-9})^2}$$

$$= 7 \times 6{,}036 \times 10^{-20}$$
$$= 4{,}22 \times 10^{-19}\ J$$

$$E = h\nu \Rightarrow \nu = \frac{E}{h} = \frac{4{,}22\times10^{-19}}{6{,}626\times10^{-34}} = 6{,}38\times10^{14}\ Hz$$

$n=4 \longrightarrow n=2$

$$E = E_4 - E_2 = (4^2 - 2^2)\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

$$= 12 \times 6{,}036 \times 10^{-20}$$
$$= 7{,}24 \times 10^{-19}\ J$$

$$E = h\nu \Rightarrow \nu = \frac{E}{h} = \frac{7{,}24\times10^{-19}}{6{,}626\times10^{-34}} = 1{,}09\times10^{15}\ Hz$$

Problemas 4

17. $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar \omega_c \quad , \; n = 0, 1, 2, \dots$

a) Para $n = 0$, vem $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega_c$

b) $\Delta E = E_{n+1} - E_n$

$$= \left[\left(n+1+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c\right] - \left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c\right]$$

$$= \hbar\omega_c$$

c) $\omega_c = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad , \quad \omega'_c = \sqrt{\frac{K}{m'}}$

Se $m' = 2m$, vem $\omega'_c = \sqrt{\frac{K}{2m}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\omega_c$$

$\Delta E = \hbar\omega_c$

$\Delta E' = \hbar\omega'_c$

$$= \hbar \frac{1}{\sqrt{2}}\omega_c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\Delta E$$

Problemas 4

18. $|\alpha\rangle = \cos\alpha|H\rangle + \sin\alpha|V\rangle$

$|\alpha^\perp\rangle = \sin\alpha|H\rangle - \cos\alpha|V\rangle$

a) $\{|\alpha\rangle, |\alpha^\perp\rangle\}$ constitui uma base se

$\langle\alpha|\alpha\rangle = 1$

$\langle\alpha^\perp|\alpha^\perp\rangle = 1$

$\langle\alpha|\alpha^\perp\rangle = 0$

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = \cos\alpha.\cos\alpha\langle H|H\rangle + \cos\alpha.\sin\alpha\langle H|V\rangle + $$
$$+ \sin\alpha.\cos\alpha\langle V|H\rangle + \sin\alpha.\sin\alpha\langle V|V\rangle$$
$$= \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

Analogamente

$$\langle\alpha^\perp|\alpha^\perp\rangle = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

$$\langle\alpha|\alpha^\perp\rangle = \cos\alpha.\sin\alpha\langle H|H\rangle - \cos\alpha\sin\alpha\langle V|V\rangle$$
$$= 0$$

b) $|\beta\rangle = \cos\beta|H\rangle + \sin\beta|V\rangle$

$$P(\alpha|\beta) = |\langle\alpha|\beta\rangle|^2 = |\cos\alpha.\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta|^2$$
$$= \cos^2(\alpha-\beta)$$

$$P(\alpha^\perp|\beta) = |\langle\alpha^\perp|\beta\rangle|^2 = |\sin\alpha.\cos\beta - \cos\alpha.\sin\beta|^2$$
$$= \sin^2(\alpha-\beta)$$

Problemas 4

19. $|\psi\rangle = 0{,}1|\rightarrow\rangle + 0{,}3i|\uparrow\rangle + 0{,}5|\rightarrow\rangle - 0{,}4|\downarrow\rangle + a|\leftrightarrow\rangle$

$P(\leftrightarrow|\psi) = |a|^2$

A condição de normalização impõe que

$$|0{,}1|^2 + \underbrace{|0{,}3i|^2}_{(0{,}3i)^*(0{,}3i) = (-0{,}3i)(0{,}3i) = (0{,}3)^2} + |0{,}5|^2 + |-0{,}4|^2 + |a|^2 = 1$$

$$|a|^2 = 1 - (0{,}1)^2 - (0{,}3)^2 - (0{,}5)^2 - (0{,}4)^2$$

$$= 1 - 0{,}01 - 0{,}09 - 0{,}25 - 0{,}16$$

$$= 0{,}49$$

Problemas 4

20. $|\psi\rangle = 0{,}5\,|\uparrow\rangle + 0{,}86\,|\downarrow\rangle$

$$P_{\uparrow} = 0{,}5^2 = 0{,}25$$

$$P_{\downarrow} = 0{,}866^2 = 0{,}75$$

Problemas 4

21. Part. 1 $\begin{cases} |A\rangle \\ |B\rangle \end{cases}$

Part. 2 $\begin{cases} |\uparrow\rangle \\ |\downarrow\rangle \\ |\leftarrow\rangle \\ |\rightarrow\rangle \end{cases}$

Estados possíveis das duas partículas:

$|A\uparrow\rangle$, $|A\downarrow\rangle$, $|A\leftarrow\rangle$, $|A\rightarrow\rangle$

$|B\uparrow\rangle$, $|B\downarrow\rangle$, $|B\leftarrow\rangle$, $|B\rightarrow\rangle$

Problemas 4

22. $|\psi\rangle = 0{,}1|000\rangle + 0{,}3535(1+i)|001\rangle + 0{,}2|010\rangle$
$-0{,}1|100\rangle + 0{,}5|011\rangle - 0{,}361|101\rangle + 0{,}55|111\rangle$

a) A probabilidade de, ao realizar uma medida, obter cada um dos estados é:

$P_{000} = 0{,}1^2 = 0{,}01$
$P_{001} = |0{,}3535 + 0{,}3535i|^2 = 0{,}3535^2 + 0{,}3535^2 \simeq 0{,}25$
$P_{010} = 0{,}2^2 = 0{,}04$
$P_{100} = 0{,}1^2 = 0{,}01$
$P_{011} = 0{,}5^2 = 0{,}25$
$P_{101} = 0{,}361^2 = 0{,}13$
$P_{111} = 0{,}55^2 = 0{,}3$

o estado mais provável é $|111\rangle$

b) $P_{010} = 0{,}04$
Em 200 medidas de 200 sistemas idênticos espera-se obter $0{,}04 \times 200 = 8$ vezes o estado $|010\rangle$

c) Q^do^ se faz a medida a 1ª vez obtem-se o estado $|010\rangle$ ou não.
Repetindo a medida nas 19 vezes seguintes o sistema vai sempre encontrar-se no estado detectado a 1ª vez. Por isso a solução é 20 ou 0

d) A 1ª das 3 partículas está no estado $|0\rangle$ nos seguintes casos:

$|000\rangle$
$|001\rangle$
$|010\rangle$
$|011\rangle$

Somando as correspondentes probabilidades obtem-se

$$P_{000} + P_{001} + P_{010} + P_{011} =$$

$$= 0{,}01 + 0{,}25 + 0{,}04 + 0{,}25$$

$$= 0{,}55$$

e) A única combinação de medidas que nunca acontece é a correspondente ao estado $|110\rangle$, uma vez que este estado não aparece na sobreposição de estados que constituem $|\psi\rangle$ $(P_{110} = 0)$

Problemas 4

23. $|\psi_1\rangle = \frac{1}{2}\left(|HH\rangle + |HV\rangle + |VH\rangle + |VV\rangle\right)$

$|\psi_2\rangle = \frac{1}{2}\left(|HH\rangle + |HV\rangle + |VH\rangle - |VV\rangle\right)$

$|\psi_3\rangle = \frac{1}{2}|HH\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\left(|VH\rangle + |VV\rangle\right)$

$|\psi_4\rangle = \cos\theta\,|HH\rangle + \sin\theta\,|VV\rangle$

Verificação de que os estados estão normalizados

$|\psi_1\rangle: \quad \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$

$|\psi_2\rangle: \quad \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left|\frac{1}{2}\right|^2 = 1$

$|\psi_3\rangle: \quad \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4\times 2} + \frac{3}{4\times 2}$

$= \frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8}$

$= 8/8 = 1$

$|\psi_4\rangle: \quad \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

Identificação dos estados entrelaçados e não entrelaçados

$|\psi_1\rangle = \frac{1}{2}|H\rangle(|H\rangle + |V\rangle) + \frac{1}{2}|V\rangle(|H\rangle + |V\rangle)$

$= \frac{1}{2}(|H\rangle + |V\rangle) \otimes (|H\rangle + |V\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + |V\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + |V\rangle)$

Trata-se de um estado não entrelaçado, porque pode ser expresso como o produto tensorial de estados com um só fotão.

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{2}\left(|HH\rangle + |HV\rangle + |VH\rangle - |VV\rangle\right)$$

se não for entrelaçado pode ser escrito como

$$|\psi_2\rangle \overset{?}{=} (a|H\rangle + b|V\rangle) \otimes (c|H\rangle + d|V\rangle)$$

$$= ac|HH\rangle + ad|HV\rangle + bc|VH\rangle + bd|VV\rangle$$

A igualdade só se verifica se

$$ac = \frac{1}{2}, \quad ad = \frac{1}{2}, \quad bc = \frac{1}{2}, \quad bd = -\frac{1}{2}$$

$$a = \frac{1}{2c}$$

$$\frac{1}{2c} d = \frac{1}{2} \Rightarrow c = d$$

$$\left.\begin{aligned} b &= \frac{1}{2c} \\ b &= -\frac{1}{2d} \end{aligned}\right\} \Rightarrow c = -d$$

impossível, a menos que $c = d = 0$

$$\left.\begin{aligned} ac &= \frac{1}{2} \\ bc &= \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow a = b$$

$$\left.\begin{aligned} ad &= \frac{1}{2} \\ bd &= -\frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow a = -b$$

impossível, a menos que $a = b = 0$

$|\psi_2\rangle$ é entrelaçado

$$|\Psi_3\rangle = \frac{1}{2}|HH\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\left(|VH\rangle + |VV\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{2}|HH\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}|VH\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}|VV\rangle$$

se este estado não for entrelaçado pode escrever-se na forma

$$|\Psi_3\rangle = \left(a|H\rangle + b|V\rangle\right) \otimes \left(c|H\rangle + d|V\rangle\right)$$

$$= ac|HH\rangle + ad|HV\rangle + bc|VH\rangle + bd|VV\rangle$$

Esta igualdade só se verifica se

$$\left.\begin{array}{l} ac = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad a \neq 0 \ \wedge \ c \neq 0 \\ ad = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0 \ \vee \ d = 0 \\ \left.\begin{array}{l} bc = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ bd = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \end{array}\right\} \ c = d \end{array}\right\} \text{impossível}$$

$|\Psi_3\rangle$ é entrelaçado

$|\Psi_4\rangle = \cos\theta\,|HH\rangle + \sin\theta\,|VV\rangle$

$|\Psi_4\rangle$ é não é entrelaçado se

$$|\Psi_4\rangle = (a|H\rangle + b|V\rangle) \otimes (c|H\rangle + d|V\rangle)$$
$$= ac|HH\rangle + ad|HV\rangle + bc|VH\rangle + bd|VV\rangle$$

Esta igualdade só se verifica se

$$\left.\begin{aligned} ac &= \cos\theta \\ ad &= 0 \\ bc &= 0 \\ bd &= \sin\theta \end{aligned}\right\}$$

Estas condições só se verificam se $\cos\theta = 0 \quad \vee \quad \sin\theta = 0$

concluímos que $|\Psi_4\rangle$ é, em geral, um estado entrelaçado.
Só nos casos particulares em que $\cos\theta = 0 \quad \vee \quad \sin\theta = 0$ é que $|\Psi_4\rangle$ não é entrelaçado.
Por exemplo, $|\Psi_4\rangle = \cos\theta\,|HH\rangle$
$$= \sqrt{\cos\theta}\,|H\rangle \otimes \sqrt{\cos\theta}\,|H\rangle.$$

não é entrelaçado.

Problemas 5

24. $|\alpha\rangle = \cos\alpha|H\rangle + \sin\alpha|V\rangle$

$|\alpha^\perp\rangle = \sin\alpha|H\rangle - \cos\alpha|V\rangle$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\alpha\rangle|\alpha\rangle + |\alpha^\perp\rangle|\alpha^\perp\rangle\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[(c|H\rangle + s|V\rangle)(c|H\rangle + s|V\rangle) + (s|H\rangle - c|V\rangle)(s|H\rangle - c|V\rangle)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[c^2|HH\rangle + \cancel{cs|HV\rangle} + \cancel{sc|VH\rangle} + s^2|VV\rangle +$$

$$+ s^2|HH\rangle - \cancel{sc|HV\rangle} - \cancel{cs|VH\rangle} + c^2|VV\rangle\Big]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(c^2+s^2)|HH\rangle + (c^2+s^2)|VV\rangle\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|HH\rangle + |VV\rangle\right]$$ estado entrelaçado

Quando se medem as polarizações dos dois fotões obtem-se sempre a mesma polarização para ambos (ou são ambos H, ou são ambos V) — as polarizações estão perfeitamente correlacionadas