数值计算模块二

拉格朗日插值、牛顿插值

插值概念

许多实际问题都用函数 $y=f(x)$ 来表示某种内在规律的数量关系，其中相当一部分函数是通过实验或计算得到的,并且只是$[a,b]$上一系列点x_i 的函数值

$$y_i = f(x_i)(i=0,1,\cdots,n)$$

这只是一张函数表。为了研究函数的变化规律，往往需要求不在表上的函数值。因此，我们希望根据给定的函数表做一个既能反映函数的特性，又便于计算的简单函数 $p(x)$，用 $p(x)$近似 $f(x)$。

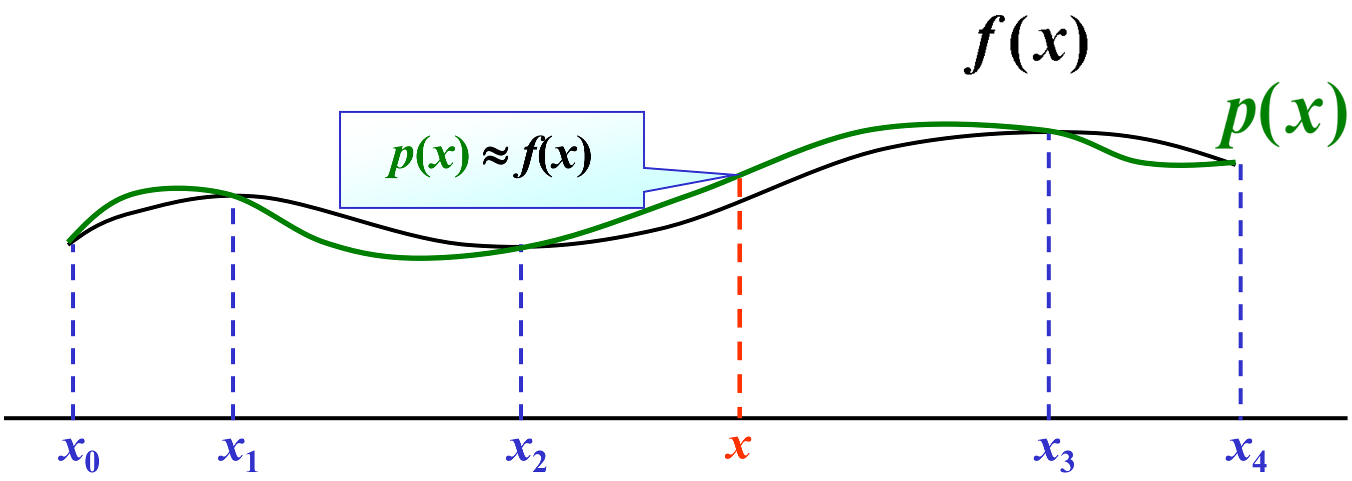
插值就是一种 "猜函数值" 的方法。它的核心思想是：

(1) 根据已知的函数表，构造一个简单的函数 $p(x)$，让它尽量接近真实的函数 $f(x)$。

(2) 然后用 $p(x)$ 来近似计算不在表上的函数值。

插值概念

如：通常用代数多项式或分段代数多项式作为 $p(x)$，并使 $p(x_i)=f(x_i)$ 对 $i=0,1,\cdots,n$ 成立。这样确定的 $p(x)$ 就是我们希望得到的插值函数。



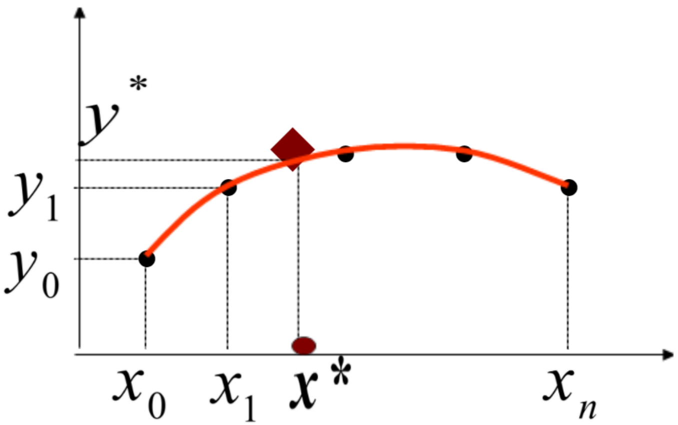
插值概念

- 插值法是使用插值多项式来逼近未知或复杂函数
- 它要求插值函数与被插函数在插值节点上函数值相同，而在其他点上没有要求。

插值基本思路

已知 n+1个节点(x_i, y_i) $(i=0,1,\cdots n)$，其中 x_i 互不相同，不妨设$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b)$，

求任一插值点 $x^*(\neq x_i)$处的插值 y^*.



构造平面曲线

$$y = G(x)$$

使其通过所有节点，即：

$$y_i = G(x_i)$$

$$(i = 0,1,\ldots,n)$$

插值基本思路

目标

求点 $x^*(\neq x_i)$处的插值

$$y^* = G(x^*)$$

思路

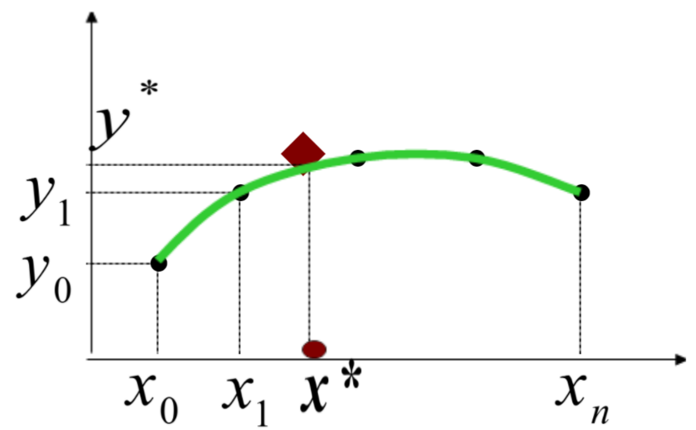
构造一个（相对简单的）函数

$$y = G(x)$$

使其通过所有节点，即：

$$y_i = G(x_i)$$

$$(i = 0, 1, \ldots, n)$$



插值法分类

- 若$P(x)$ 是次数不超过n的代数多项式，即

$$P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n,$$

- 若$P(x)$为分段多项式，就称为分段插值。
- 若$P(x)$为三角多项式，就称为三角插值。

插值法原理

一般插值多项式原理：

定理

设有 $n+1$ 个互不相同的节点(x_i, y_i) $(i=0, 1, 2 \ldots n)$

则存在唯一的n阶多项式：

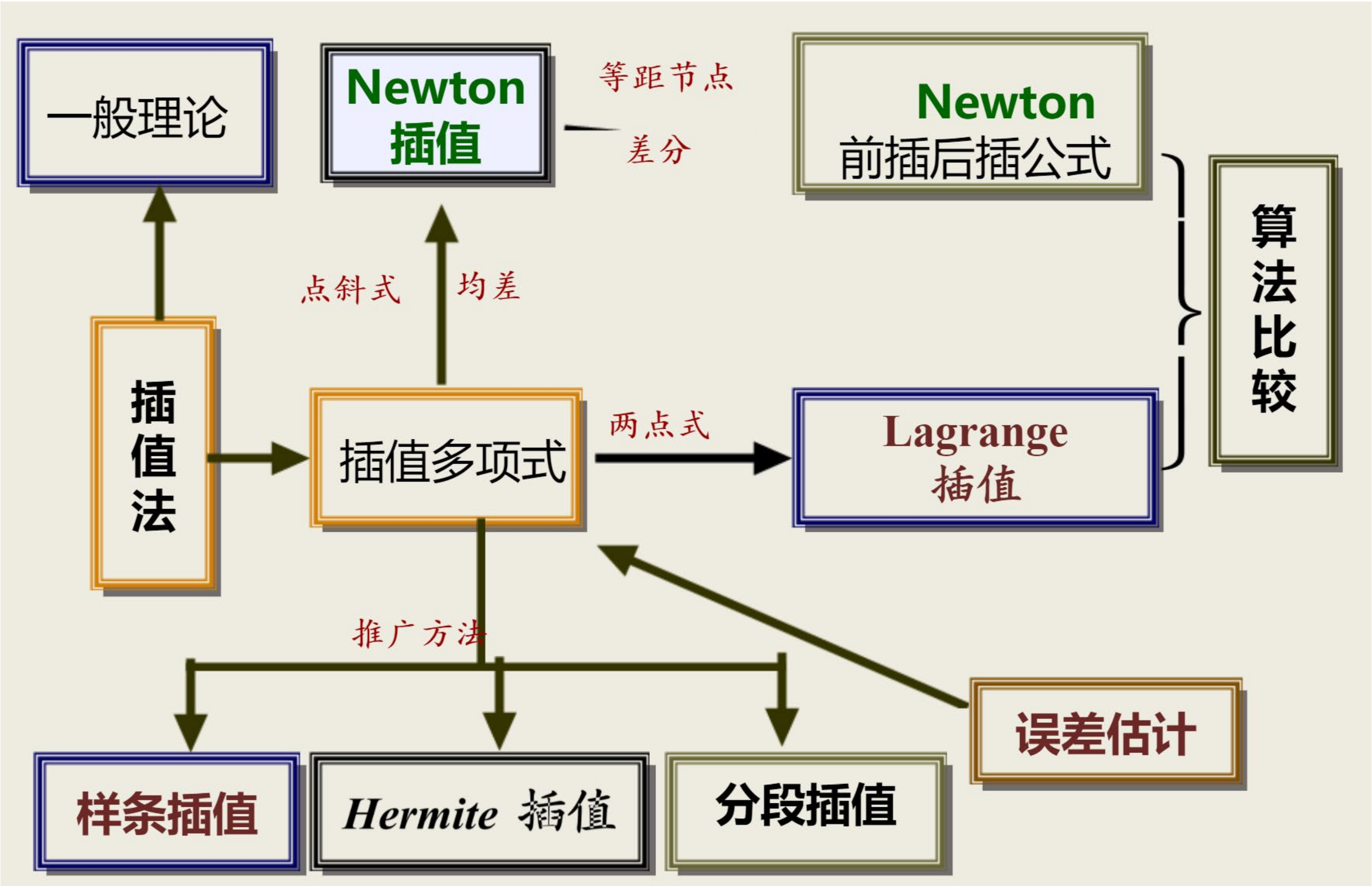
$$L_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

使得 $L_n(x_j) = y_j$ $(i = 0, 1, 2 \ldots n)$

[注1] 只要$n+1$个节点互异，满足上述插值条件的多项式是唯一存在的。

[注2] 如果不限制多项式的次数，插值多项式并不唯一。

插值概念



一般理论
Newton
插值
等距节点
差分
Newton
前插后插公式
算法比较
点斜式
均差
插值法
插值多项式
两点式
Lagrange
插值
推广方法
误差估计
样条插值
Hermite 插值
分段插值

插值多项式的基函数

已知 n+1个节点 (x_j, y_j) $(j=0,1,\cdots n$，其中 x_j 互不相同，不妨设 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b)$，

要求形如 $P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 的插值多项式

例如：多项式族的构成

$1, x, x^2, x^3, \ldots x^n$ n 次多项式的基（函数）

$a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ n 个系数

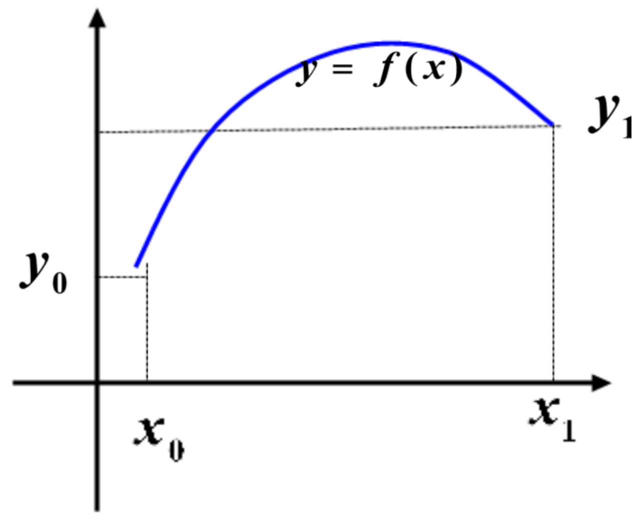
$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n$

插值多项式的基函数

先讨论 $n=1$ 简单情形， 假定给定区间 $[x_0,x_1]$ 及端点函数值，

$$y_0=f(x_0),\ \ y_1=f(x_1),$$

如图所示：



插值多项式的基函数

先讨论 $n=1$ 简单情形， 假定给定区间 $[x_0, x_1]$ 及端点函数值，

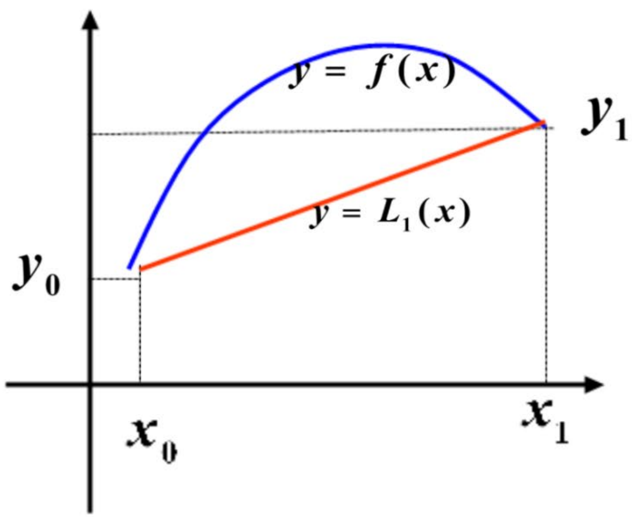
$$y_0 = f(x_0),\quad y_1 = f(x_1),$$

如图所示：

要求线性插值多项式 $L_1(x)$，

使它满足

$$L_1(x_0) = y_0,\quad L_1(x_1) = y_1.$$



插值多项式的构造（n=1）

$$L_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) \Rightarrow L_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1$$

系数

点斜式　　　　**两点式**

若令

线性插值基函数

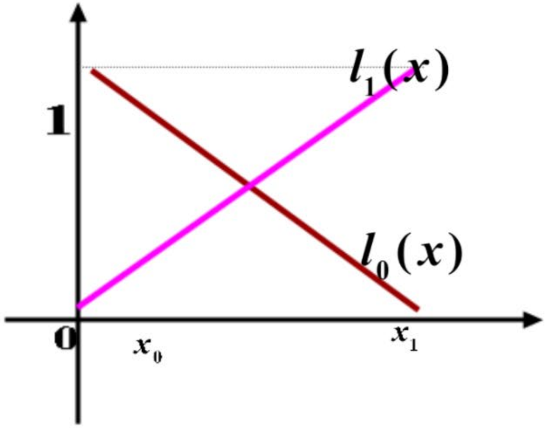
$$l_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, \quad l_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

在节点 x_0 和 x_1 上满足：

$$l_0(x_0) = 1, \quad l_0(x_1) = 0;$$

$$l_1(x_0) = 0, \quad l_1(x_1) = 1.$$

$$L_1(x_0) = y_0, \quad L_1(x_1) = y_1.$$



$L_1(x) = y_0\, l_0(x) + y_1\, l_1(x)$ 线性插值多项式

拉格朗日插值多项式

$$l_0(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1},\qquad l_1(x)=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

$$l_k(x)=\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}},\qquad l_{k+1}(x)=\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}$$

观察与思考

$$L_1(x)=y_k l_k(x)+y_{k+1}l_{k+1}(x)$$

?

- 两个插值点对应一次基函数，n+1个插值点对应 n 次基函数
- n 次基函数应当怎样构造？

拉格朗日插值多项式

观察与思考

$$l_k(x)=\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}},\qquad l_{k+1}(x)=\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}$$

假定插值节点为

x_{k-1},x_k,x_{k+1},要求二次插值多项式$L_2(x)$,使它满足

通过三点 $(x_{k-1},y_{k-1}),(x_k,y_k),(x_{k+1},y_{k+1})$

猜想：$l_k(x)=\dfrac{(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})}{(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})}$,

于是 $$l_{k-1}(x)=\frac{(x-x_k)(x-x_{k+1})}{(x_{k-1}-x_k)(x_{k-1}-x_{k+1})},$$

$$l_{k+1}(x)=\frac{(x-x_{k-1})(x-x_k)}{(x_{k+1}-x_{k-1})(x_{k+1}-x_k)}.$$

拉格朗日插值多项式

用基函数法构造：

$$l_i(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)},\quad i=0,1\cdots n$$

使满足： $\because\ l_i(x_j)=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$ $\therefore\ L_n(x_j)=y_j$

$$\boxed{L_1(x)=y_k l_k(x)+y_{k+1}l_{k+1}(x)}$$

则 $$\boxed{L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x)}$$ 即为

拉格朗日(Lagrange) 插值多项式

拉格朗日插值多项式

拉格朗日 插值多项式

特别函数

$$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$$

$$\omega'_{n+1}(x_k) = (x_k - x_0)\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_n).$$

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)}$$

$$= \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_{i-1})\boxed{(x - x_i)}(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n)}{\boxed{(x - x_i)}(x_i - x_0)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)}$$

$$= \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_i)\omega'_{n+1}(x_i)}$$

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x)$$

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \frac{\omega_{k+1}(x)}{(x - x_k)\omega'_{k+1}(x_k)}.$$

拉格朗日插值多项式

拉格朗日插值多项式

$$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n} y_k \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_k)\omega'_{n+1}(x_k)}.$$

拉格朗日插值多项式

优 点

结构紧凑

理论分析方便

缺 点

改变一个节点则全部的插值基函数都改变,基函数没有承袭性

拉格朗日插值

➢ 拉格朗日

double Lagrange(float s,double x[],double y[],int n)

形参与函数类型	参数意义
float s	拉格朗日的插值点
double x[]	给定点的x值
double y[]	给定点的y值
int n	给定点的个数

拉格朗日插值

➢ 函数实现

```
double Lagrange(float s,double x[],double y[],int n)
{

    double f,L=0;
    int i,j;

    for (i=0;i<n;i++)
    {
            f=1;
            for (j=0;j<n;j++)
                if(j!=i)
                    f=(s-x[j])/(x[i]-x[j])*f;
            L+=f*y[i];
     }

    return L;
}
```

$$l_i(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)},\quad i=0,1\cdots n$$

使满足： $l_i(x_j)=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}\quad \therefore L_n(x_j)=y_j$

则 $\boxed{L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x)}$ 即为

拉格朗日(Lagrange) 插值多项式

拉格朗日插值

➢ 具体计算例子

例： 已知 $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2},\ \sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

利用 $\sin x$ 的2次 Lagrange 插值计算 $\sin 50°$

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x)$$

$$l_i(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)},\quad i=0,1\cdots n$$

$n=2$

$$L_2(x)=\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)}\times\frac{1}{2}+\frac{\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)}\times\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 50^0 \approx L_2\left(\frac{5\pi}{18}\right)\approx 0.76543$$

牛顿插值

我们知道,Lagrange插值多项式的插值基函数为

$$l_j(x)=\prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n}\frac{(x-x_i)}{(x_j-x_i)}\qquad j=0,1,2,\cdots,n$$

形式上太复杂,计算量很大,并且重复计算也很多

由线性代数的知识可知,任何一个n次多项式都可以表示成

$$1,\ x-x_0,\ (x-x_0)(x-x_1),\ \cdots,\ (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

共n+1个多项式的线性组合

那么,是否可以将这n+1个多项式作为插值基函数呢?

牛顿插值

$$c_0 \cdot 1 + c_1(x - x_0) + \ldots + c_n(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})) = 0$$

这是一个 n 次多项式，它对所有 x 都为零。因此，所有系数必须为零。这意味着 $c_0, c_1, \ldots, c_n$ 必须都为零，这表明这些多项式是线性无关的。

显然，多项式组

$$1,\ x - x_0,\ (x - x_0)(x - x_1),\ \cdots,\ (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

线性无关，因此，可以作为插值基函数

设插值节点为 x_i， 函数值为 $f_i, i = 0,1,\cdots,n$

插值条件为 $P(x_i) = f_i, i = 0,1,\cdots,n$

设插值多项式$P(x)$具有如下形式

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

牛顿插值

$$P(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+\cdots+a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

$P(x)$应满足插值条件 $P(x_i)=f_i\ ,\ i=0,1,\cdots,n$

有 $$P(x_0)=f_0=a_0$$

$$a_0=f_0$$

$$P(x_1)=f_1=a_0+a_1(x_1-x_0)$$

$$a_1=\frac{f_1-f_0}{x_1-x_0}$$

$$P(x_2)=f_2=a_0+a_1(x_2-x_0)+a_2(x_2-x_0)(x_2-x_1)$$

$$a_2=\frac{\dfrac{f_2-f_0}{x_2-x_0}-\dfrac{f_1-f_0}{x_1-x_0}}{x_2-x_1}$$

牛顿插值

定义 设$f(x)$在互异的节点 x_i 处的函数值为f_i ,$i=0,1,\cdots,n$

称
$$f[x_i,x_j]=\frac{f_i-f_j}{x_i-x_j}\qquad (i\neq j)$$

为$f(x)$关于节点 x_i , x_j 一阶差商(均差)(平均变化率);

称
$$f[x_i,x_j,x_k]=\frac{f[x_i,x_k]-f[x_i,x_j]}{x_k-x_i}\qquad (i\neq j\neq k)$$

为$f(x)$关于x_i,x_j,x_k的二阶差商(均差)， 它是由1阶均差再作一次差商所得;

依此类推 k 阶差商: (x_k , $x_{k\text{-}1}$可以不相邻)

$$\boxed{f[x_0,x_1,\ldots,x_k]=\frac{f[x_1,\ldots,x_{k-1},x_k]-f[x_0,x_1,\ldots,x_{k-1}]}{x_k-x_0}}$$

差商的计算方法(表格法):

差商表

x_k	$f(x_k)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商
x_0	$f(x_0)$				
		$f[x_0,x_1]$			
x_1	$f(x_1)$		$f[x_0,x_1,x_2]$		
		$f[x_1,x_2]$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$	
x_2	$f(x_2)$		$f[x_1,x_2,x_3]$		$f[x_0,x_1,\cdots,x_4]$
		$f[x_2,x_3]$		$f[x_1,x_2,x_3,x_4]$	
x_3	$f(x_3)$		$f[x_2,x_3,x_4]$		
		$f[x_3,x_4]$			
x_4	$f(x_4)$				

规定函数值为零阶差商

差商的计算方法:

x_i	$f(x_i)$	一阶差商		三阶差商
x				
x_1		$f[x_0,x_1]$		
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2]$	
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2,x_3]$	$f[x_1,x_2,x_3]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$
$\cdots$	$\cdots$			$\cdots$

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{}$$

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

$$\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

$$\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{}$$

$$\frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$$

$$\frac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3 - x_0}$$

牛顿插值

$$P(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+\cdots \\ +a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

$P(x)$应满足插值条件 $P(x_i)=f_i\ ,\ i=0,1,\cdots,n$

有 $P(x_0)=f_0=a_0$

$$a_0=f_0$$

零阶差商

$$P(x_1)=f_1=a_0+a_1(x_1-x_0)$$

$$a_1=\frac{f_1-f_0}{x_1-x_0}$$

一阶差商

$$P(x_2)=f_2=a_0+a_1(x_2-x_0)+a_2(x_2-x_0)(x_2-x_1)$$

$$a_2=\frac{\dfrac{f_2-f_0}{x_2-x_0}-\dfrac{f_1-f_0}{x_1-x_0}}{x_2-x_1}$$

二阶差商

牛顿插值

$$N_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

$$= f_0 + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, x_1, \cdots, x_k]\prod_{j=0}^{k-1}(x - x_j)$$

$$= f_0 + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, x_1, \cdots, x_k]\omega_k(x)$$

$\omega_k(x) = \prod_{j=0}^{k-1}(x - x_j)$ 为k次多项式

为$f(x)$关于节点 x_i 的n次$Newton$基本插值多项式.

$P(x_i) = f_i,\ i = 0,1,\cdots,n$

$a_0 = f_0$

每增加一个结点，牛顿插值多项式只增加一项，具有承袭性。

牛顿插值

- 牛顿法

double ND(float s,double x[],double y[],int n)

形参与函数类型	参数意义
float s	牛顿法的插值点
double x[]	给定点的x值
double y[]	给定点的y值
int n	给定点的个数

牛顿插值

➢ 函数实现

```
float Lagrange(float s,double x[],double y[],int n)
{

    double p=0,g,f;
    int i,j,k;

    for (i=0;i<n;i++)
    {
          for (j=n-1;j>i;j--)
                { f=x[j]-x[j-i-1];y[j]=(y[j]-y[j-1])/f;}
          g=y[i+1];
          for (k=0;k<=i;k++)
             g=g*(s-x[k]);
          p=p+g
    }

   return p+y[0];
}
```

$$N_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \cdots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$
$$= f_0 + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, x_1, \cdots, x_k]\prod_{j=0}^{k-1}(x-x_j)$$
$$= f_0 + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, x_1, \cdots, x_k]\omega_k(x)$$

$$\omega_k(x) = \prod_{j=0}^{k-1}(x-x_j)$$

差商的计算方法(表格法):

差商表

x_k	$f(x_k)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商
x_0	$f(x_0)$				
		$f[x_0,x_1]$			
x_1	$f(x_1)$		$f[x_0,x_1,x_2]$		
		$f[x_1,x_2]$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$	
x_2	$f(x_2)$		$f[x_1,x_2,x_3]$		$f[x_0,x_1,\cdots,x_4]$
		$f[x_2,x_3]$		$f[x_1,x_2,x_3,x_4]$	
x_3	$f(x_3)$		$f[x_2,x_3,x_4]$		
		$f[x_3,x_4]$			
x_4	$f(x_4)$				

规定函数值为零阶差商

牛顿插值

$$N_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+\cdots+a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

➢ 具体计算例子

例：已知函数 $f(x)$ 在各节点的值，利用 **Newton**插值计算 $f(0.596)$

x_k	0.40	0.55	0.65	0.80
$f(x_k)$	**0.41075**	**0.57815**	**0.69675**	**0.88811**

解:

x_k	$f(x_k)$	一阶	二阶	三阶
0.40	**0.41075**			
0.55	**0.57815**	**1.11600**		
0.65	**0.69675**	**1.18600**	**0.28000**	
0.80	**0.88811**	**1.27573**	**0.35893**	**0.19733**

$$N_3(x)=0.41075+1.11600(x-0.4)+0.28000(x-0.4)(x-0.55)+0.19733(x-0.4)(x-0.55)(x-0.65)$$

$$f(0.596)\approx 0.62836$$

实验内容

(1) 给定函数e^{-x}在x=1,2,3时的值如下表。请使用编程实现拉格朗日插值法和牛顿插值法分别在x=2.6处的1次和2次插值。

x	1	2	3
e^{-x}	0.367879441	0.135335283	0.049787068

(2) 请查阅文献整理插值的其它方法，并至少编程实现其中的一种算法。结合（1）的结果详细对比分析这几种算法的性能。

作业：提交电子版实验报告，报告中需附上代码运行的真实过程和结果图