课后作业

1. 把向量 β 表示成向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性组合，其中

$$\beta=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

课后作业

2. 找出下面的四个向量中哪个向量不能由其余三个向量线性表出?

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\5\\2\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\1\end{pmatrix}.$$

课后作业

3. 求下列向量组的秩及其一个最大无关组，并将其余向量用最大无关组线性表示.

$$(1)\ \alpha_1=\begin{pmatrix}3\\-5\\2\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-5\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\3\\1\\3\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}2\\-4\\-1\\-3\end{pmatrix};$$

课后作业

$$(2)\ \alpha_1=\begin{pmatrix}2\\1\\3\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\2\\-1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}14\\7\\0\\3\end{pmatrix},\quad \alpha_4=\begin{pmatrix}4\\2\\-1\\1\end{pmatrix},\alpha_5=\begin{pmatrix}6\\5\\1\\2\end{pmatrix};$$

4. 用基础解系表示下列方程组的全部解.

$$(1)\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0, \\ x_1 + 17x_2 + 4x_3 = 0; \end{cases}$$

课后作业

$$(2)\ \begin{cases} x_1+2x_2+4x_3-3x_4=1, \\ 3x_1+5x_2+6x_3-4x_4=2, \\ 4x_1+5x_2-2x_3+3x_4=1, \\ 3x_1+8x_2+24x_3-19x_4=5; \end{cases}$$

课后作业

5. 已知矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -11 & 3 & 7 \\ -2 & 16 & -4 & -10 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

的各个列向量都是齐次线性方程组

课后作业

$$\begin{cases} 4x_1+3x_2+2x_3+2x_5=0, \\ x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0, \\ 2x_1+x_2-2x_4=0, \\ 3x_1+2x_2+x_3-x_4+x_5=0 \end{cases}$$

的解向量，问这四个解向量能否构成方程组的基础解系？是多了还是少了？多了如何去掉？少了如何补充？

课后作业

6．k 取何值时, 下列方程组无解? 有唯一解? 或有无穷多解? 在有无穷多解时, 求出其全部解.

$$(1)\quad \begin{cases} kx+y+z=1, \\ x+ky+z=k, \\ x+y+kz=k^2; \end{cases}$$

课后作业

$$(2)\ \begin{cases} 2x - y - z = 2, \\ x - 2y + z = k, \\ x + y - 2z = k^2. \end{cases}$$

7. 已知 $Ax = b$ 的三个特解为

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

且 $R(A) = R(A, b) = 1.$

(1) 求对应的齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的通解;

(2) 求 $Ax = b$ 的通解;

(3) 求满足上述要求的一个非齐次线性方程组.

课后作业

8. 已知三维向量组:

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1+t\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1+2t\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1+3t\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}0\\t\\t^2\end{pmatrix}.$$

问 t 为何值时,

(1) β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示, 且表达式是唯一的, 并求出表达式.

(2) β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示,但表达式不唯一.

(3) β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

9. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵, B 为 $n\times s$ 矩阵, 若 $AB=O$, 试证:

$$R(A)+R(B)\leq n.$$

课后作业

10. 设 A，B 均是 $m\times n$ 矩阵, 证明:

$$R(A+B)\le R(A)+R(B).$$

课后作业

11. 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2 = A$, 试证:

$$R(A) + R(A - E) = n\,.$$

课后作业

12. 设 A 是 $m \times k$ 矩阵, B 是 $k \times n$ 矩阵, 试证:

$$R(AB) \le \min\{R(A), R(B)\}.$$