

1. 求下列矩阵的特征值与特征向量.

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & -4 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix};$$

2. 判定下列矩阵是否相似于对角矩阵, 若相似, 则求出可逆矩阵 P , 使 $P^{-1}AP$ 是对角矩阵.

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

课后作业

$$(2) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix};$$

课后作业

3. 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & y \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 相似于对角矩阵,

求 x 与 y 应满足的条件.

课后作业

4. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$ 与矩阵

$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 相似.

(1) 求 x 与 y ;

(2) 求正交矩阵 P , 使 $P^{-1}AP = B$.

课后作业

5. 设三阶方阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$, 对应的特征向量依次为

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, p_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, p_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix},$$

又向量 $b = (1, 1, 3)^T$. (1) 求 A ; (2) 将 b 用 p_1, p_2, p_3 线性表示; (3) 求 $A^n b$; (4) 求 A^{100} .

7. 设四阶方阵 A 满足

$$|3E + A| = 0, AA^T = 2E, |A| < 0,$$

求 A^{-1} 及 A^* 的一个特征值.

8. 设 A 是正交矩阵, 且 $|A| < 0$,

求 $|A|$, $|A+E|$.

课后作业

9. 已知 $A = \begin{pmatrix} 13 & 14 & 4 \\ 14 & 24 & 18 \\ 4 & 18 & 29 \end{pmatrix}$, 求满足关系式

$$X^2 = A$$

的实对称矩阵 X .

提示: 化 $A = P \Lambda P^{-1} = P \Lambda_1^2 P^{-1} = (P \Lambda_1 P^{-1}) (P \Lambda_1 P^{-1})$

取 $X = P \Lambda_1 P^{-1}$ 即可. 所以本题的关键是求正交矩阵 P .

10. 用正交变换法化下列二次型为标准形:

(1) $2x_1x_3 + x_2^2$;

(2) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$;

(3) $2x_1x_2 - 6x_1x_3 - 6x_2x_4 + 2x_3x_4$.

11. 用配方法将下列二次型化为标准形, 并写出标准形及所用的线性变换.

$$(1) \quad x_1^2 + 4x_1x_2 - 3x_2x_3 ;$$

$$(2) \quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 .$$

课后作业

12. 用初等变换法化下列二次型为标准形,
并写出其标准形及所用的线性变换.

$$(1) \quad x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 ;$$

$$(2) \quad x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1 ;$$

$$(3) \quad -12x_1^2 - 3x_2^2 - 12x_3^2 + \\ 12x_1x_2 - 24x_1x_3 + 8x_2x_3 .$$

13. 判断下列二次型是否正定.

(1) $3x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3$;

请用特征值法

(2) $-5x_1^2 - 6x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3$

请用惯性指数法

(3) $x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$.

请用顺序主子式法

14. 求参数 t 的值, 使二次型

$$2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2tx_1x_2 + 2x_1x_3$$

为正定二次型.

15. 已知实对称矩阵 A 满足

$$A^3 - 4A^2 + 5A - 2E = 0,$$

判断 A 的正定性.