第九章

Laplace 方程的圆的狄利克雷问题的傅里叶解

当我们研究物理中的各类现象，如振动、热传导、扩散等的稳定过程时，由于表达该物理过程的物理量 u 不随时间变化而变化，因此 $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$.

如果我们考虑的是一个稳定的热场，则可以得到不随时间变化而变化的温度 $u(x,y,z,t)$ 所满足的方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad (*)$$

方程(*)称为三维拉普拉斯(Laplace)方程或者调和方程，它通常表示成为$\Delta u = 0$ 或者$\nabla^2 u = 0$的形式。

如果一个函数u在某个区域D 内连续，且满足拉普拉斯方程,则称该函数是D内的调和函数，或者说，函数u在D内调和。

如果我们考虑有源的稳定热场，则可以得到方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-f(x,y,z), \qquad (\Delta)$$

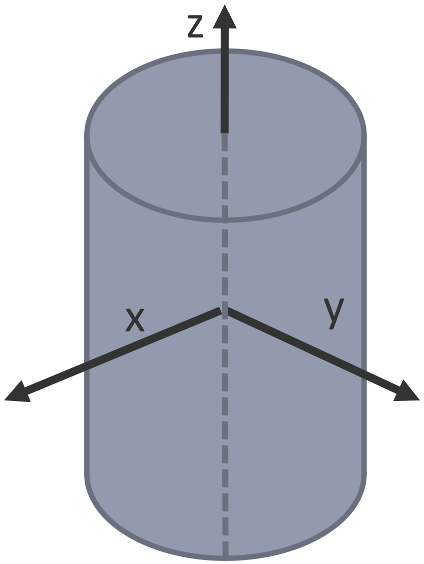
其中 $f(x,y,z)=F(x,y,x)/k.$

非齐次方程 (Δ) 通常叫做泊松(Poisson)方程，记作

$$\Delta u=-f(x,y,z) \quad 或者 \quad \nabla^2 u=-f(x,y,z).$$

拉普拉斯方程和泊松方程不仅描述稳定状态下温度的分布规律，而且也描述稳定的浓度分布及静电场的电位分布等物理现象。

本章主要用傅氏方法解圆内拉普拉斯方程第一边值问题.



设有一个半径为 的无限长圆柱，把它的对称轴取作z 轴. 假设在柱的表面上温度不随时间t 而改变，则过了一段时间以后，在圆柱的每一点处，温度也会稳定下来而与t 无关。再设热的传导与 z 坐标无关，这时圆柱内的温度函数 $u(x, y)$ 就满足二维拉普拉斯方程:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

$$
\begin{cases}
u_{rr} + \dfrac{1}{r} u_r + \dfrac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0. & (1) \\
u(l, \theta) = f(\theta) & (2)
\end{cases}
$$

上述边值问题，习惯上称为圆的狄利克雷问题.

分离变量法来解边值问题:

设方程（1）有角向和径向分离的解：

$$u(r,\theta)=\Theta(\theta)R(r) \qquad (3)$$

代入方程（1）得到：

$$\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}=-\frac{r^2R''(r)+rR'(r)}{R(r)}=-\lambda,$$

分离变量：

$$\Theta''(\theta)+\lambda\Theta(\theta)=0, \qquad \text{（角向方程）} \quad (4)$$

$$r^2R''(r)+rR'(r)-\lambda R(r)=0. \qquad \text{（径向方程）} \quad (5)$$

将非齐次边界条件（2）代入形式解（3）：

$$R(r)\Theta(\theta) = f(\theta) \tag{6}$$

上式无法分离成关于R和Θ的两个独立的边界条件，不能分别构成关于R和Θ的常微分方程的定解问题！

下一步如何进行？

寻找物理上的边界条件：

1. $(r,\theta),(r,\theta+2\pi)$ 在物理上代表同一个点，具有相同的温度：

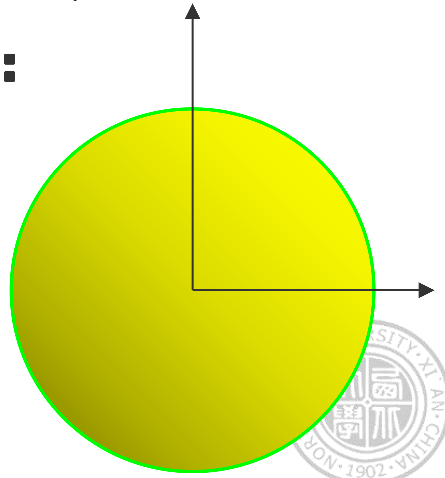
$$u(r,\theta)=u(r,\theta+2\pi)$$

这个条件称为 **“周期性边界条件”**

2. 物理上，圆内各点的温度应该是有界的，特别是圆盘中心的温度应该是有限的：

$$|u(0,\theta)|<+\infty$$

这个条件称为 **“自然边界条件”**



同时，考虑到自变量变化的特点，有

$$r \to [0, r_0] \quad 和 \quad \theta \to [0, 2\pi]$$

即有
$$\begin{cases} |u(0,\theta)| < +\infty \\ u(r,\theta) = u(r,\theta+2\pi) \end{cases}$$

中心点的温度有限（有界）

坐标系中指同一点温度不变

以下，求满足一个方程和三个边界条件所构成的定解问题的解。

$$\begin{cases} u_{rr} + \dfrac{1}{r}u_r + \dfrac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0. & , r < r_0, 0 \le \theta \le 2\pi \\ u(r_0,\theta) = f(\theta) & , 0 \le \theta \le 2\pi \\ |u(0,\theta)| < +\infty \\ u(r,\theta) = u(r,\theta+2\pi) \end{cases}$$

代入径向方程和角向方程

变成常微分方程的定解问题

$$\begin{cases} \Theta'' + \lambda\Theta = 0 & (7) \\ \Theta(\theta + 2\pi) = \Theta(\theta) & (8) \end{cases}$$

$$\begin{cases} r^2 R'' + rR' - \lambda R = 0 & (9) \\ R(0) < +\infty & (10) \end{cases}$$

至此已经构成了完整的角向和径向的定解问题，而条件(2)将像弦振动问题和热传递问题中的初始条件一样，最后再去考虑。

求解角向定解问题：
$$\begin{cases} \Theta'' + \lambda\Theta = 0 & (7) \\ \Theta(\theta + 2\pi) = \Theta(\theta) & (8) \end{cases}$$

1. $\lambda = 0$ ： (7) 的通解 $\Theta(\theta) = A + B\theta$

由 (8) 得到 $B = 0$ ，有特解：$\Theta_0(\theta) = A$ （常数）

2. $\lambda < 0$： (7) 的通解

$$\Theta(\theta) = A\exp(\sqrt{-\lambda}\theta) + B\exp(-\sqrt{-\lambda}\theta)$$

不能满足周期性边界条件 (8)

求解角向定解问题：

$$\begin{cases} \Theta'' + \lambda\Theta = 0 & (7) \\ \Theta(\theta + 2\pi) = \Theta(\theta) & (8) \end{cases}$$

3. $\lambda > 0$ ：(7) 的通解

$$\Theta(\theta) = A\cos\sqrt{\lambda}\theta + B\sin\sqrt{\lambda}\theta$$

要让它以2π为周期，必须取

$$\sqrt{\lambda} = n \ (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

即： $\Theta(\theta) = A\cos n\theta + B\sin n\theta$ (9)

事实上： $\Theta(\theta + 2\pi) = A\cos n(\theta + 2\pi) + B\sin n(\theta + 2\pi)$

$$= A\cos(n\theta + 2n\pi) + B\sin(n\theta + 2n\pi)$$

$$= A\cos n\theta + B\sin n\theta = \Theta(\theta)$$

求解径向定解问题：
$$\begin{cases} r^2 R'' + rR' - n^2 R = 0 & (10) \\ R(0) < +\infty & (11) \end{cases}$$

(10) 为欧拉方程，其通解为

$$R_0(r) = c_0 + d_0 \ln r \quad (\text{for } n = 0)$$

$$R_n(r) = c_n r^n + d_n r^{-n} \quad (\text{for } n = 1, 2, 3, \cdots)$$

为了保证 $R(0) < +\infty$，必须取 $d_n = 0 \ (n = 0, 1, 2, \cdots)$

$$R_0(r) = c_0 \ (n = 0)$$

$$R_n(r) = c_n r^n \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

可以合并为 $R_n(r) = c_n r^n \ (n = 0, 1, 2, \cdots)$

1、Dilichlet问题。

$$\begin{cases} -(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})=f(x,y,z), & (x,y,z)\in\Omega, \\ u(x,y,z)|_{\partial\Omega}=\varphi(x,y,z), & (x,y,z)\in\Omega. \end{cases}$$

2、Neumann问题。

$$\begin{cases} -\Delta u=f(x,y,z), & (x,y,z)\in\Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}=\varphi(x,y,z), & (x,y,z)\in\Omega. \end{cases}$$

3、 第三边值问题。

$$\begin{cases} -\Delta u=f(x,y,z), & (x,y,z)\in\Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}+\sigma u=\varphi(x,y,z), & (x,y,z)\in\Omega. \end{cases}$$

谢谢，

本章结束。