数学物理方程

NORTHWEST UNIVERSITY

教材资料

使用教材：《高等数学（第四册）（第四版）》

编著作者：四川大学数学学院高等数学微分方程教研室

出版社: 高等教育出版社

出版时间: 2020-11

供高等学校物理学类、电子信息科学类、电气信息类等对数学要求较高的专业使用。

	作者、译者	书名	出版社	出版时间
参考书目 Bibliography	钟玉泉	复变函数论（第四版）	高等教育出版社	2013年
	顾樵	数学物理方法	高等教育出版社	2012年
	姚端正、周国全、贾俊基	数学物理方法（第四版）	科学出版社	2020年

目 录

CONTENTS

00 绪论

绪论

知之者，不如好之者，

好之者，不如乐之者。

做一个快乐的求知者——与大家共勉

新征程，新起点，新的起跑线。

绪论

常微分方程（ODE)

只能描述质点唯一随时间的变化而发生改变的规律。

偏微分方程（PDE)

是指含有某未知多元函数的偏导数的方程。

数学物理方程

表示物理量在空间或时间中变化规律的偏微分方程。

绪论

数学物理方程/偏微分方程(PDE)

☆ 数学和物理的关系

数学和物理从来是没有分开过的

☆ 数学物理方程定义

用数学方程来描述一定的物理现象。

☆ 课程的内容

三个方程、四种方法、二个特殊函数

波动方程、热传导、拉普拉斯方程

分离变量法、行波法、积分变换法、格林函数法

贝赛尔函数、勒让德函数

数学物理方程的三个类型

二阶线性偏微分方程的一般形式

$$\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{i}^{m} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x)u=f(x)$$

波动方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\Delta u+f(x,y,z,t)$ 双曲型

热传导方程 $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\Delta u+f(x,y,z,t)$ 抛物型

拉普拉斯方程 $-a^2\Delta u=f(x,y,z)$ 椭圆型

绪论

- **数学物理方程的基本任务：**
-         数学物理方程是以物理学、力学及工程技术中的具体问题为研究对象的，其基本任务有以下两个方面：
- （1）建立描绘某类物理现象的数学模型，并提供这些问题的求解方法；
- （2）通过理论分析，研究客观问题变化发展的一般规律。

绪论

本节课的课程目标：

- 少谈理论，多讲求解。

- 将具体的自然科学问题转化为数学物理方程（统称 泛定方程）；

- 列出相应的定解条件，即把一个特定的物理现象本身所具有的具体条件用数学形式表达出来;

- 求解（重点）

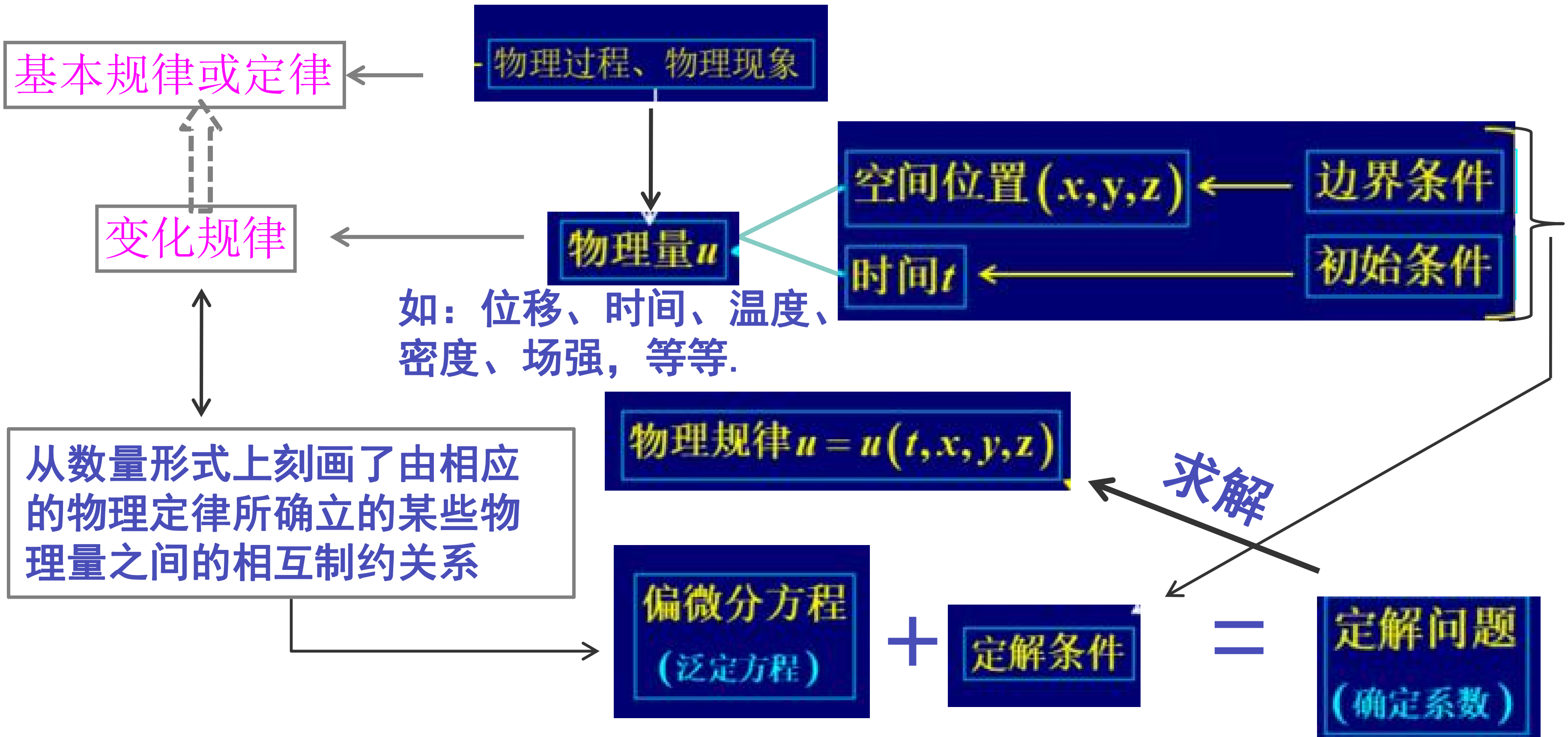
绪论

- **数学物理方程的定解问题：**
- **泛定方程**：表达某类物理现象共同规律的数学表达式——偏微分方程。
- **定解条件**：伴随一个完整的物理过程发生的具体条件，一般包括**初始条件**与**边界条件**。
- **泛定方程+定解条件=数学物理方程的定解问题**

绪论

- **数学物理方程的显著特点**：
- （1）它广泛地运用数学诸多领域的成果。自然现象是复杂的、多样的，数学物理方程中所研究的问题也是复杂的、多样的，所以要应用不同的数学工具来解决性质不同的问题。
- （2）数学物理方程源于工程实际问题，自然现象本身所蕴含的内在规律，对人们寻求解决问题的思路有着重要的启迪。数学物理方程中的许多重要求解方法，都可以在自然现象中找到它们的来源。

绪论



※　泛定方程反映的是同一类物理现象的共性，和具体条件无关。

☛ 在数学中，我们发现真理的主要工具是归纳和模拟。　　—— 拉普拉斯

☛ 想要探索自然界的奥秘就得解微分方程　　—— 牛顿

绪论

数学物理方程 定义：

主要指从物理学以及其他自然科学、工程技术中所产生的偏微分方程。

例如：

(1) 描绘振动和波(振动波，电磁波)动特征的 波动方程:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f.$$

双曲型

(2) 反映输运过程的热传导(或扩散)方程:

$u_t = a^2 \Delta u + f$, 其中Δ是Laplace算子.

抛物型

(3) 描述稳定过程或状态,(如: 引力势和 静电势满足)的Poisson方程;

$0 = a^2 \Delta u + h$, 其中Δ是Laplace算子.

椭圆型

若$h = 0$, 则退化为Laplace方程: $\Delta u = 0$.

典型方程

绪论

数学物理方程的发展 简述

偏微分方程理论的起源可追溯到18世纪微积分产生之后。人们将力学中的一些问题归结为偏微分方程进行研究。例如1715年泰勒（1746年，达朗贝尔）研究了弦线振动规律，归结为一维弦振动方程。

欧拉1756年和丹·贝努利1762年将该方程推广的二维三维。这样就对弦振动的研究开创了数理方程这门课程。

随后人们陆续的了解了流体的运动弹性体的平衡与震动热传的电磁相互作用，原子和电子的相互作用，化学反应过程等等自然现象的基本规律，把它们写成了偏微分的形式，并且求出了典型问题的解。例如：1780年，拉普拉斯在研究引力学的工作中提出了拉普拉斯方程。Legendre和Laplace在天体力学工作中研究了调和方程，所有的这些都丰富了这门学科的内容。

数学物理问题的研究繁荣起来是在**19世纪**，许多数学家都对数学问题他数学，物理问题的解决做出了贡献，例如傅里叶1811年在研究热传播，提出了三维空间的热传导方程。他的研究对偏微分方程的发生产生重大影响。给出第一个关于解的存在性的定理，开创了PDE现代理论。到19世纪末2阶线性PDE的一般理论已经基本形成，PDE这本学科开始形成。

从20世纪开始，随着现代科学和技术的进步，数学物理也有了新的面貌不断涌现。新的数学物理方法、理论（广义函数论和索伯列夫空间方法），比如爱因斯坦方程（引力场），Yang-Mills方程（规范场）

07 第七章　一维波动方程的傅里叶解

（One dimension wave equation and its Fourier solution）

第一节 弦振动方程的建立

物理、力学中有一类所谓振动和波的现象，如弹性波、光波、电 磁波，等等，虽然各有其特殊规律，但有一个共性——波动.所以,在数学上均能用波动方程来描述其运动规律。最简单的一维波动 方程的例子是著名的弦振动方程。本章针对有界弦振动，将引入数 学物理方程的一个重要解法——傅里叶解法（也称为分离变量法）

7.1.1、弦振动方程的建立

1　　实例：用运动方程描述吉它、杨琴等弹奏弦乐器的运动规律。







基本方程的建立。

导出步骤：

Step 1. 确定所要研究的物理量u;

Step 2. 利用“微元法”结合物理规律进行分析（抓主要矛盾，忽略次要因素）；

Step 3. 化简整理得方程。

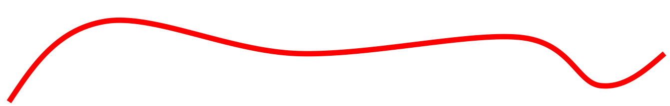
2　数学物理模型的建立

1.　问题描述

假设有一根均匀柔软的细弦，平衡时沿直线方向拉紧，只受不随时间变化的张力作用和本身的重力影响。研究弦作微小横向振动时各点的运动规律。

（1）紧拉弦：

静止的弦是一维的，弦上任意一点可用一维坐标来描写。



松驰弦

紧拉弦

（2）柔软弦：

弦在其横向可发生位置移动（振动）。

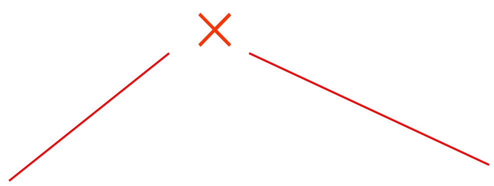
弦不抵抗弯曲，即张力方向总是沿着弦在该点的切线方向；

弦：柔软的

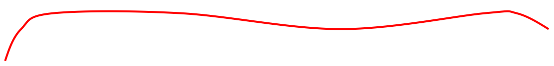
杆：刚性的

（3）弹性弦：

弦有完全恢复形变的能力。



不折断



不变形

（4）均匀轻弦：

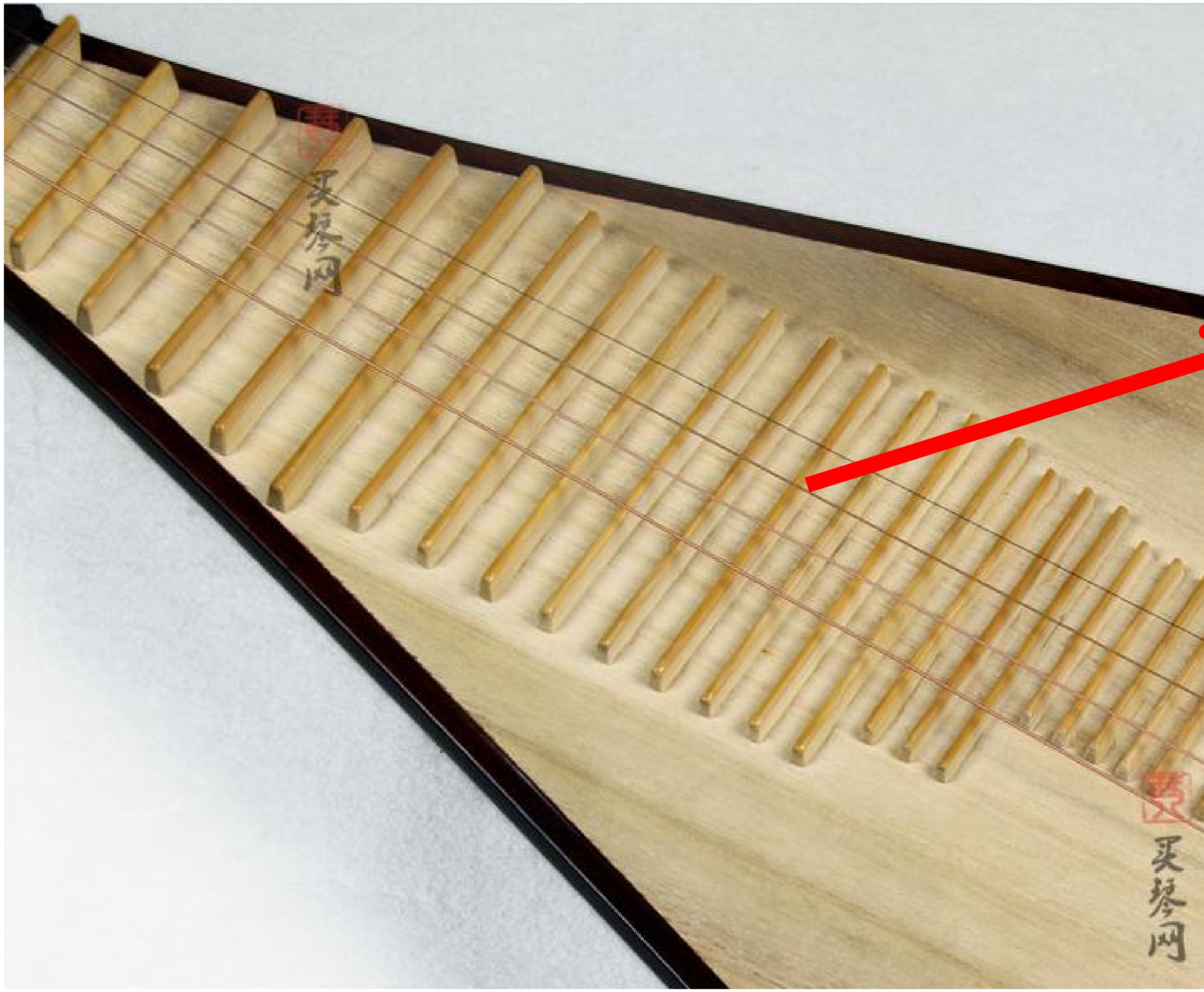
质量分布均匀介质密度相同。弦的质量与弦长成正比，比例常数为线质量密度。

我们有下列关于质量 与重力的表达式。

$$\begin{cases} M = \rho x \\ G \approx 0 \end{cases}$$

（5）小振动弦：

弦的振幅与弦长相比很小。振动幅度及弦在任一点的切线倾角很小，可忽略高次项；



紧拉弦

柔软弦

弹性弦

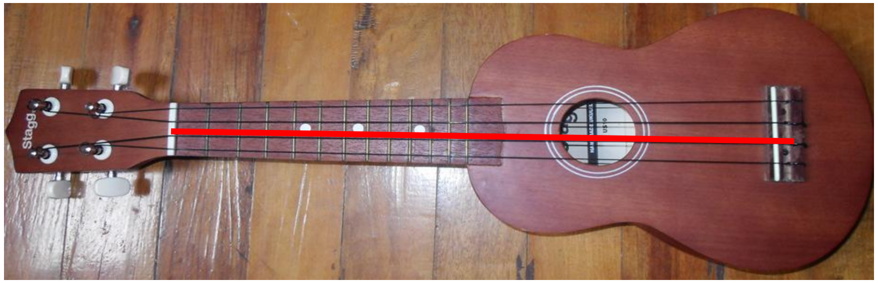
均匀轻弦

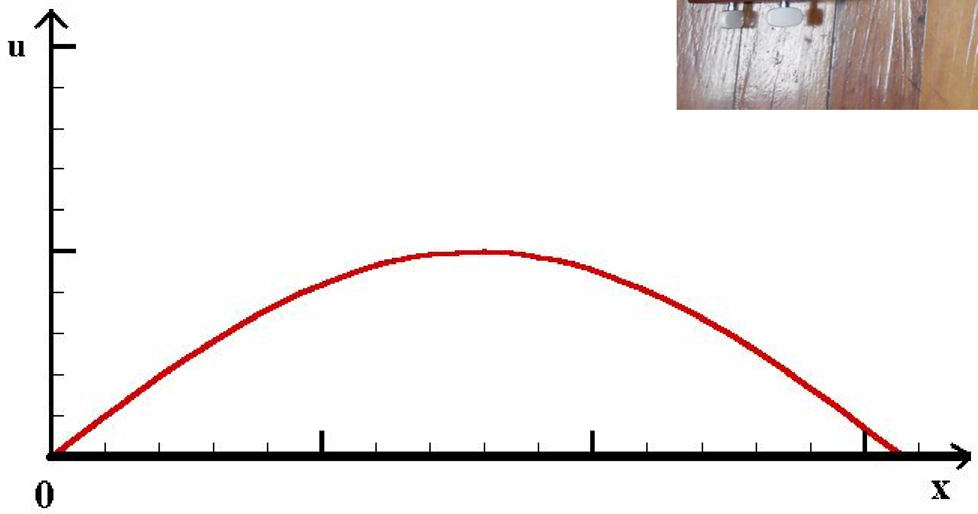
小振动弦

3　振动方程的建立

（1）建立坐标系，确定所要研究的物理量：

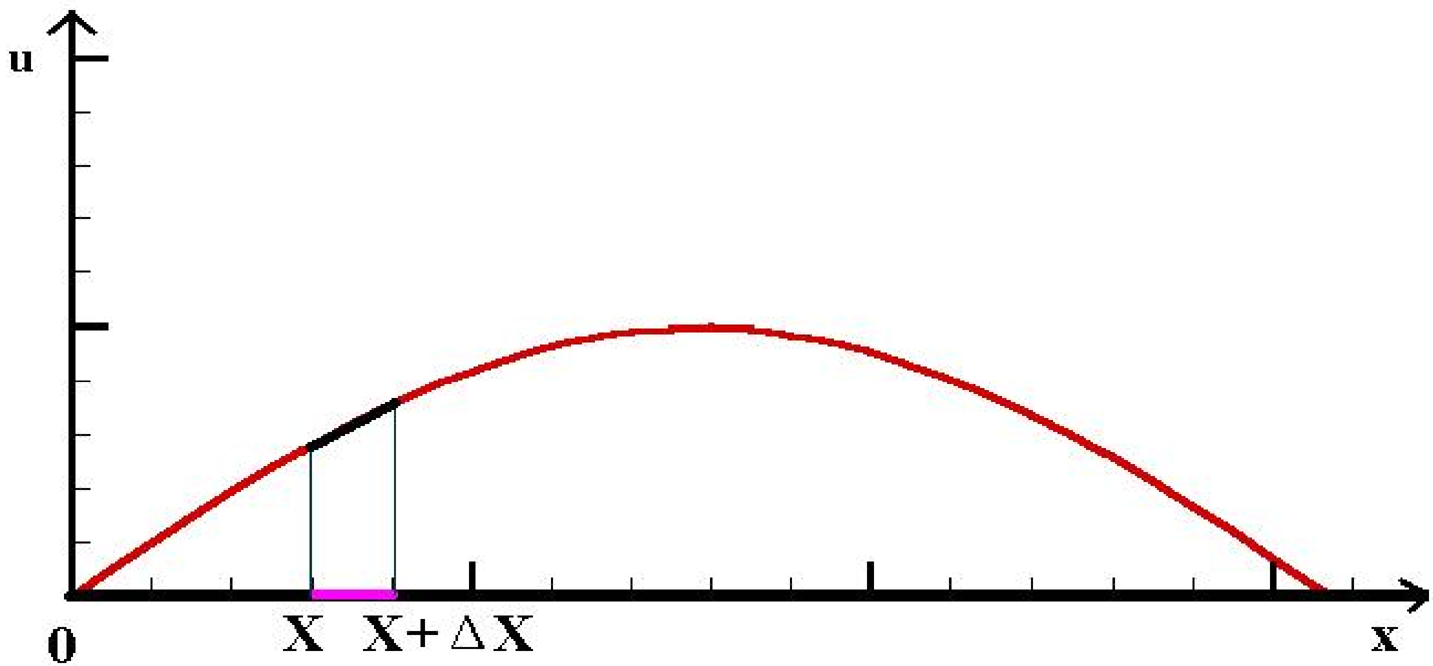
设x点 t 时刻的位移　$u = u(x,t)$;





（2）确定分析对象：

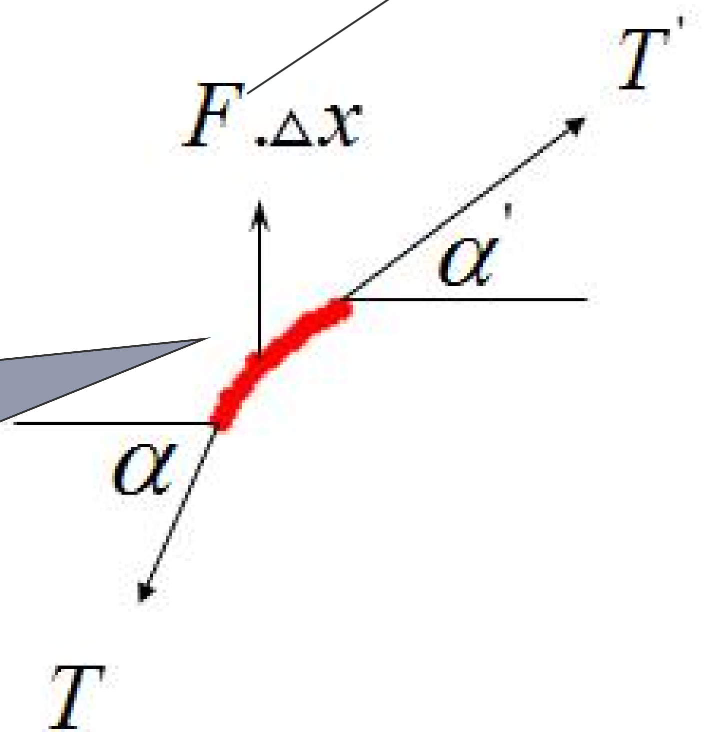
“微元法”在区间(x， x+△ x)所对应的微小段弦。



（3）微小段弦的受力分析：（牛顿第二运动定律）

设其长度**Δ**s，线密度弧两端所受张力分别为T和T’

F—单位x坐标长度所受的力

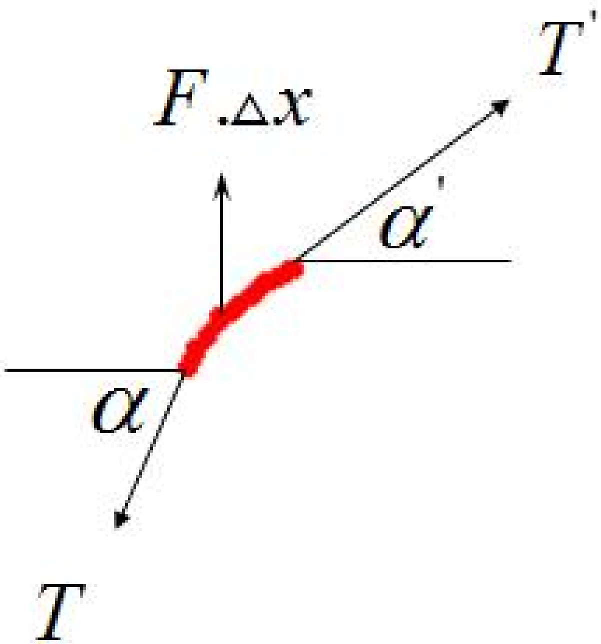


1、外力；

2、左边弦施加的张力；

3、右边弦施加的张力。

（4）根据运动定律建立运动方程：



$$\begin{cases} x: T'\cos\alpha' - T\cos\alpha = 0 \\ u: T'\sin\alpha' - T\sin\alpha + F\cdot\Delta x = \rho\Delta x\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} \end{cases}$$

（5）一级近似处理：

微小振动，倾角很小

小振动 $\longrightarrow \alpha \to 0 \longrightarrow \begin{cases} \cos\alpha \approx 1 \\ \cos\alpha' \approx 1 \end{cases}$ $T = T'$

$$\cos\alpha = 1 - \frac{1}{2!}\alpha^2 + \frac{1}{4!}\alpha^4 + \cdots$$

$$\sin\alpha = \alpha - \frac{1}{3!}\alpha^3 + \cdots \longrightarrow \sin\alpha \approx \alpha$$

$$\tan\alpha = \alpha + \frac{2}{3!}\alpha^3 + \cdots \longrightarrow \tan\alpha \approx \alpha$$

$$\sin\alpha = \tan\alpha$$

$$\sin\alpha = \tan\alpha$$

$$\tan\alpha = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\longrightarrow \sin\alpha = \frac{\partial u}{\partial x} \longrightarrow \begin{cases} \tan\alpha \approx \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x,t} = u_x(x,t) \\ \tan\alpha' \approx \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x,t} = u_x(x+\Delta x,t) \end{cases}$$

$$u_x(x+\Delta x,t) - u_x(x,t) = \Delta u_x \approx \frac{\partial u_x}{\partial x}\Delta x = u_{xx}\Delta x$$

$$T'\sin\alpha' - T\sin\alpha + F\cdot\Delta x = \rho\Delta x\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\boxed{T\cdot u_{xx}\cdot\Delta x + F\cdot\Delta x = \rho\cdot\Delta x\cdot u_{tt}}$$

$$Tu_{xx} + F = \rho u_{tt}$$

通过调弦的松紧调节T

令：

$$a^2 = \frac{T}{\rho}, f = \frac{F}{\rho}$$

不同的弦ρ值不同。大弦ρ大，小弦ρ小。

a是反映弦特征的物理量；f是反映弹奏强弱的物理量。

则得到弦振动方程：

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f$$

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f$$

若 $f=0$，则有自由弦振动方程：

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

7.1.2、定解条件的提出

对于弦振动问题来说，一般弦的特定振动状态还依赖于初始时刻弦的状态和通过弦两端所受的外界影响。

- （1）表征某过程初始时刻状态的条件称为**初始条件**。
- （2）表征某过程的物理量在系统的边界上所满足的物理条件称为**边界条件**。

- **第一类边界条件：**只与函数在空间特定位置的值有关，与其导数无关。在边界上直接给出了未知函数u的数值，即

$$u|_{\Gamma} = f_1(t)$$

- **第二类边界条件：**速度确定。在边界上给出了未知函数u沿的外法线方向的方向导数，即

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma} = f_2(t)$$

- **第三类边界条件：**位移和速度的组合。在边界上给出了未知函数u与u沿的外法线方向的方向导数的线性组合的值，即

$$(u+\sigma\frac{\partial u}{\partial n})|_{\Gamma} = f_3(t)$$

这里的 $f_i(t)(i=1,2,3)$ 都是定义在边界上的已知函数，
若 $f_i(t)=0(i=1,2,3)$，则称相应的边界条件为**齐次边界条件**，
否则就称为**非齐次边界条件。**

偏微分方程中所含有的未知函数的最高阶偏导数的阶数，称为**偏微分方程的阶。**

如果一个偏微分方程中的每一项关于未知函数及其所有偏导数（包括高阶偏导数）都为0次或1次的，则称该方程为**线性偏微分方程**，否则就称之为**非线性偏微分方程。**

- 初始条件与边界条件称为**定解条件**。由泛定方程与相应的定解条件构成的问题就称为数学物理中的**定解问题**。
- （1）由泛定方程和初始条件构成的问题称为**初值问题或柯西（Cauchy）问题**。（没有边界条件）。
- （2）由泛定方程和边界条件构成的问题称为**边值问题**。（没有初始条件）
- （3）既有初始条件、又有边界条件的定解问题称为**混合问题**。

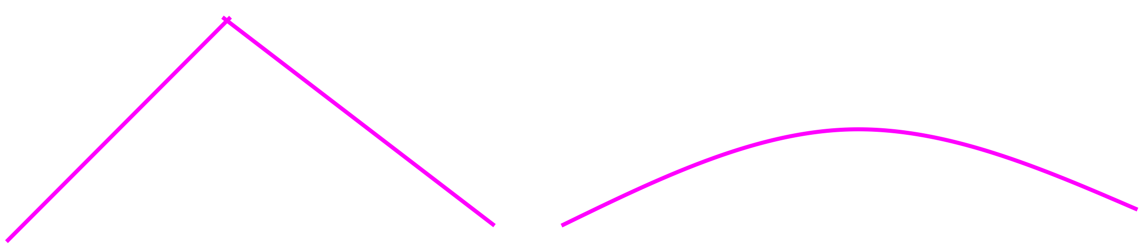
弦振动的边界条件

（1）、边值条件（问题）：

$$u(0,t)=0,u(l,t)=0$$

（齐次）

（2）、初值条件（问题）：



$$u(x,0)=\varphi(x),u_t(x,0)=\psi(x)$$

（3）、混合问题：

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & (0 < x < l, t > 0) \\ u(0,t) = 0, u(l,t) = 0 & (t \geq 0) \\ u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x) & (0 \leq x \leq l) \end{cases}$$

微分方程的解

假设方程的阶数为n，若函数u在所考虑的区域内具有n阶的连续偏导数，且代入方程后能使方程成为恒等式，则称u为方程的解（或古典解）.

若方程解u的表达式中含有n个任意常数（或函数），则称u是方程的通解（或一般解）.

通过定解条件确定了通解中的任一常数（或函数）后所得到的解，称之为定解问题的解。

未经过验证的解，称之为形式解。

偏微分方程定解问题的适定性：

① 解的存在性

② 解的唯一性

③ 解的稳定性

解的稳定性：如果定解条件的微小变化只引起定解问题的解在整个定义域中的微小变化，也就是解对定解条件存在着连续依赖关系，那末称定解问题的解是稳定的。

定解问题的适定性：如果定解问题的解存在与惟一并且关于定解条件是稳定的，就说定解问题的提法是适定的。

第二节、齐次方程混合问题的傅里叶解

问题：研究一根长为l，两端（$x=0, x=l$）固定的弦作微小振动的现象。给定初始位移和初始速度后，在无外力作用的情况下，求弦上任意一点处的位移，即求解下列定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

式中，$\varphi(x), \psi(x)$ 均为已知函数。

这个定解问题的特点是：泛定方程是线性齐次的，边界条件也是齐次的。

求解这样的问题，可以运用叠加原理。如果能够找到泛定方程足够个数的特解，则可以利用它们的线性组合去求定解问题的解。

从物理学可知，乐器发出的声音可以分解成各种不同频率的单音，每个单音在振动时形成的波形是正弦曲线，其振幅依赖于时间t。

也就是说每个单音总可以表示成正弦形式，即：

$$u(x,t) = A(t)\sin \omega x$$

这种形式的特点是：二元函数 $u(x,t)$ 是只含变量x的一元函数与只含变量t的一元函数的乘积，即它具有变量分离的形式。弦的振动也是波，它也应该具有上述的特点。

- 分离变量法的基本思想：

把数学物理方程定解问题中未知的多元函数分解成若干个一元函数的乘积，从而把求解偏微分方程的定解问题转化为求解若干个常微分方程定解问题。

分离变量法就是常用的直接求特解的办法，这是一个非常重要的方法。

令：$$u(x,t)=T(t)X(x)$$

代入泛定方程得：

$$T''X=a^2TX''$$

重新组合变量得：

$$\frac{T''}{a^2T}=\frac{X''}{X}$$

两边相等显然是不可能的，除非两边实际上是同一个常数，把这个常数记作------ $-\lambda$ ，λ为一常数。（分离常数）

$$\frac{T''}{a^2T}=\frac{X''}{X}=-\lambda$$

分离为关于X的常微分方程和关于T的常微分方程，且边界条件也同样进行分离

将边值条件代入 $u(x,t)=T(t)X(x)$ 得:

$$X(0)T(t)=0, X(l)T(t)=0$$

得到: $\begin{cases} X(0)=0 \\ X(l)=0 \end{cases}$

联立坐标泛定方程: $\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X(0)=0 \\ X(l)=0 \end{cases}$

$$T''+\lambda a^2 T=0$$

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases}$$

若对于的某些 λ 值，常微分方程定解问题的非平凡解存在，则称这种 λ 的取值为该问题的**固有值（或特征值）**；同时称相应的非平凡解为该问题的**固有函数（或特征函数）**。这样的问题通常叫做**施图姆-刘维尔（Sturm-Liouville）问题（或固有值问题）**。

讨论求解上述特征值问题，分三种情况讨论：

1. 当$\lambda<0$时，二阶常系数微分方程的解为：

$$X(x)=Ae^{\sqrt{-\lambda}x}+Be^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

代入边值条件得：

$$\begin{cases} A+B=0 \\ Ae^{\sqrt{-\lambda}l}+Be^{-\sqrt{-\lambda}l}=0 \end{cases}$$

解得：

$$\begin{cases} A=0 \\ B=0 \end{cases}$$

你让它自由，它居然不动？！

这时振动方程只有平凡解。

2. 当$\lambda=0$时，二阶常系数微分方程的解为：

$$X(x) = Ax + B$$

代入边值条件得：

$$\begin{cases} A.0 + B = 0 \\ Al + B = 0 \end{cases}$$

它居然还不动？！

解得：

$$\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$$

这时振动方程无非平凡解！

3. 当$\lambda>0$时，二阶常系数微分方程的解为：

$$X(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x$$

代入边值条件得：

$$\begin{cases} A + B\bullet 0 = 0 \\ A\cos\sqrt{\lambda}l + B\sin\sqrt{\lambda}l = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = 0 \\ \sin\sqrt{\lambda}l = 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{\lambda}l = n\pi,\ n = 1, 2, 3, \cdots \Rightarrow$$

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}$$

λ果然只能取

特定的值！

这样我们就求得了方程的特征值！

相应的特征函数为：

$$X_n(x) = B_n \sin\frac{n\pi x}{l}$$

对应每一特征值λ_n，方程

$$T'' + \lambda_n a^2 T = 0$$

的解为：

$$T_n(t) = C_n' \cos\frac{n\pi at}{l} + D_n' \sin\frac{n\pi at}{l}$$

于是我们得到满足方程边界条件的可分离变量的一系列特解：

$$u_n(x,t)=X_n(x)T_n(t)$$
$$=\left(C_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+D_n\sin\frac{n\pi a}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

式中， $C_n=B_nC'_n, D_n=B_nD'_n$ 是任意常数。

由于初始条件式中的 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 是任意给定的，一般情况下，任何一个特解都不会满足初始条件式。但由于泛定方程是线性齐次的，根据叠加原理，级数

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+D_n\sin\frac{n\pi a}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

仍是泛定方程的解，并且同时满足边界条件。

为了选取 C_n, D_n，使得上式也满足初始条件，在上式及其关于t的导数式中，令 $t=0$，由初始条件得

$$u(x,0)=\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty} D_n \frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

方程右边是傅里叶正弦级数,这就提示我们把左边的展开为傅里叶正弦级数，然后比较傅里叶系数，得

$$\begin{cases} C_n=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx \\ D_n=\dfrac{2}{n\pi a}\displaystyle\int_0^l \psi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx \end{cases}$$

傅里叶级数（补充）

- 傅里叶级数：
- （1）设 $f(x)$是周期为2π 的周期函数，则

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

- 其中

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx,\quad (n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx,\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

- （2）设$f(x)$ 是周期为 $2l$ 的周期函数，则

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x)$$

- 其中

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx,\quad (n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx,\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

（3）当 $f(x)$为奇函数时，

- $f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x$ 为奇函数，$f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x$ 为偶函数。

$$a_n = 0, \quad (n = 0,1,2,\cdots)$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx, \quad (n = 1,2,3,\cdots)$$

- 正弦级数为

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{l}x$$

（4）当 $f(x)$为偶函数时，

- $f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x$ 为偶函数，$f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x$ 为奇函数。

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx;\quad (n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n=0,\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

- 余弦级数为

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{l}x$$

- C_n和$D_n\dfrac{n\pi a}{l}$分别是函数$\varphi(x)$、$\psi(x)$在区间$[0,l]$上的傅里叶正弦级数展开式的系数，即

$$
\begin{cases}
C_n = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l \varphi(x)\sin\dfrac{n\pi}{l}x\,dx \\
D_n = \dfrac{2}{n\pi a}\displaystyle\int_0^l \psi(x)\sin\dfrac{n\pi}{l}x\,dx
\end{cases}
$$

$$\begin{cases} C_n = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx \\ D_n = \dfrac{2}{n\pi a}\displaystyle\int_0^l \psi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx \end{cases}$$

按上述公式计算出系数 A_n和 B_n ，则可得原问题的解：

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(C_n\cos\frac{n\pi at}{l}+D_n\sin\frac{n\pi at}{l})\sin\frac{n\pi x}{l}$$

注：该解称为古典解，在求解中我们假设无穷级数是收敛的。

如上的方法称为分离变量法，是齐次偏微分方程求解的一个有效方法。下面对该方法的步骤进行总结。

分离变量法求解的基本步骤

第一步：分离变量 $u(x,t)=X(x)T(t)$

$X(x)$：
$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ X(0)=X(l)=0 \end{cases}$$

$T(t)$： $$T''(t)+a^2\lambda T(t)=0$$

第二步：求本征值和本征函数 $X(x)$

$$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \qquad X_n(x)=\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right),$$

$$n=1,2,3,\cdots$$

第三步：求 $T(t)$ 的表达式

$$T_n(t)=C_n\cos\left(\frac{an\pi}{l}t\right)+D_n\sin\left(\frac{an\pi}{l}t\right)$$

$$n=1,2,3,\cdots$$

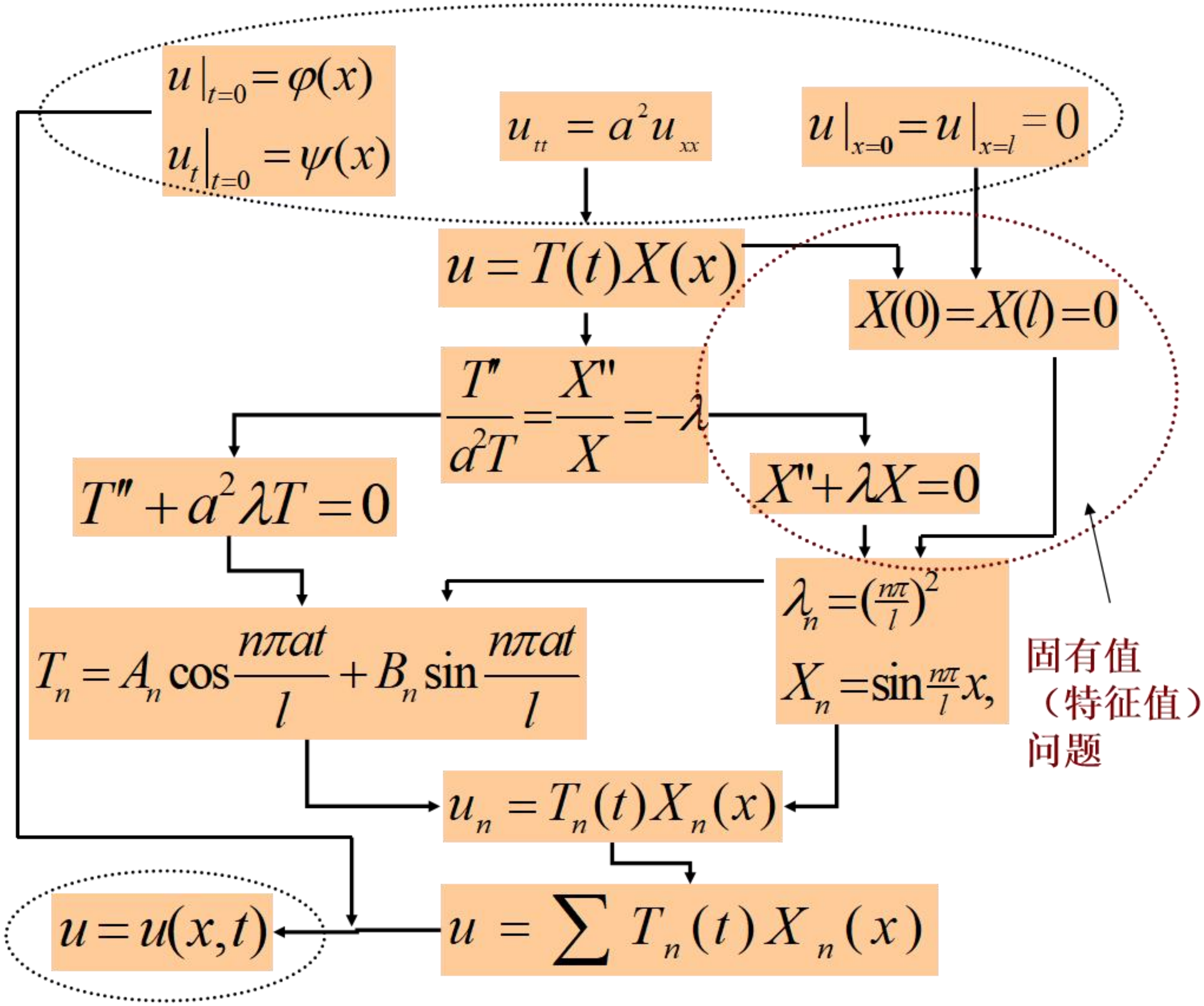
第四步：利用初始条件求得定解问题的解

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n\cos\left(\frac{an\pi}{l}t\right)+C_n\sin\left(\frac{an\pi}{l}t\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

$$C_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx$$

$$D_n=\frac{2}{n\pi a}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx$$

分离变量流程图


$u|_{t=0}=\varphi(x)$
$u_t|_{t=0}=\psi(x)$
$u_{tt}=a^2u_{xx}$
$u|_{x=0}=u|_{x=l}=0$
$u=T(t)X(x)$
$X(0)=X(l)=0$
$\frac{T''}{a^2T}=\frac{X''}{X}=-\lambda$
$T''+a^2\lambda T=0$
$X''+\lambda X=0$
$\lambda_n=(\frac{n\pi}{l})^2$
$X_n=\sin\frac{n\pi}{l}x,$
$T_n=A_n\cos\frac{n\pi at}{l}+B_n\sin\frac{n\pi at}{l}$
固有值
（特征值）
问题
$u_n=T_n(t)X_n(x)$
$u=\sum T_n(t)X_n(x)$
$u=u(x,t)$

二、傅里叶解的物理意义

- 取级数的一般项，并作如下变形：

$$u_n(x,t)=\left(C_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+D_n\sin\frac{n\pi a}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$=N_n\sin(\omega_n t+\theta_n)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

- 式中， 最大振幅 $N_n=\sqrt{C_n^2+D_n^2}$
- 相位 $\theta_n=\arctan\frac{C_n}{D_n}$ 频率 $\omega_n=\frac{n\pi a}{l}$

- $u_n(x,t)$ 表示这样一个振动波，在所考察的弦上各点以同样的频率作简谐振动，各点的初相相同，其振幅与点的位置有关，此振动波在任一时刻的波形都是一条正弦曲线。（初相与最大振幅由初始条件确定，频率与初值无关）。

- 这种振动波还有一个特点，即在$[0,l]$范围内有$n+1$个点在整个过程中始终保持不动，即在 $x=\frac{ml}{n}$ $(m=0,1,2,\cdots,n)$的那些点，这样的点在物理上称为$u_n(x,t)$的**节点**。这说明
- $u_n(x,t)$的振动是在$[0,l]$上的分段振动，人们把这种包含节点的振动波称为**驻波**。另外，驻波还在另外的一些点 $x_k=\frac{(2k-1)l}{2n}$ $(k=1,2,\cdots,n)$ 处振幅达到最大值，这样的点叫做**波腹**。

- $u_1(x,t), u_2(x,t), \cdots, u_n(x,t), \cdots$ 是一系列驻波，它们的频率、相位和振幅都随n而异。因此，可以说原定解问题的级数解是由一系列频率不同（成倍增加）、相位不同、振幅不同的驻波叠加而成的，每一个驻波的波形由固有函数和初值确定，频率则由固有值确定，与初值无关。因此，分离变量法也称为**驻波法**。

四　非齐次方程的解法

问题1：非齐次方程+齐次边界

研究一根长为l，两端（$x=0, x=l$）固定的弦作微小振动的现象。给定初始位移和初始速度后，在外力作用的情况下，求弦上任意一点处的位移，即求解下列定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), & 0<x<l, t>0 \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & t>0 \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x), & 0 \le x \le l \end{cases}$$

式中，$\varphi(x), \psi(x)$ 均为已知函数。

思考

方程是非齐次的，是否可以用分离变量法?

非齐次方程的求解思路

- 用分解原理得出对应的齐次问题
- 解出齐次问题
- 求出任意非齐次特解
- 叠加成非齐次解

解法一：变量变换 （适用于f（x）与t无关的情况）

设 V（x,t） $= u(x,t) + g(x)$

（1）寻找g（x）

（2）解出V（x,t）

（3）求出u（x,t）

解法二：常数变易法（固有函数法、本征函数法）

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

问题2：非齐次方程+非齐次边界

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t) & (0 < x < l, t > 0), \\ u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(l,t) = \mu_2(t), & (t \geqslant 0), \\ u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x) & (0 \leqslant x \leqslant l). \end{cases}$$

则可令

$$v(x,t) = u(x,t) - U(x,t),$$

例子：

$$U(x,t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l}\left(\mu_2(t) - \mu_1(t)\right)$$

得到齐次边界条件，重复前面的做法，立即可以得出 v 和 u

波动方程的解法

分离变量法

有界弦的自由振动（齐次方程） + 齐次边界条件

↑ 变换/常数变易法

有界弦的受迫振动（非齐次方程） + 齐次边界条件

↑ 边界条件齐次化

有界弦的振动（齐次或非齐次方程） + 非齐次边界条件

谢谢，

本章结束。