知识点Z4.17

奇偶性

主要内容：

傅里叶变换的奇偶性

基本要求：

了解时间函数与其频谱的奇、偶、虚、实关系

4.5傅里叶变换的性质

Z4.17奇偶性

若 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$ 则 $f(-t) \leftrightarrow F(-j\omega)$

证明：$\mathcal{F}\left[f(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t = F(j\omega)$

$$\mathcal{F}\left[f(-t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} f(-t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t \overset{-t\to x}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-j(-\omega)x}\mathrm{d}x = F(-j\omega)$$

下面具体研究时间函数与其频谱的奇偶虚实关系

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t = |F(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)} = R(\omega) + jX(\omega)$$

显然：
$$\begin{cases} |F(j\omega)| = \sqrt{R^2(\omega) + X^2(\omega)} \\ \varphi(\omega) = \arctan\left[\dfrac{X(\omega)}{R(\omega)}\right] \end{cases}$$

(1) $f(t)$为实函数

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t \quad =\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)\mathrm{d}t}_{R(\omega)}-j\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\omega t)\mathrm{d}t}_{X(\omega)}$$

显然：
$$\begin{cases} R(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)\mathrm{d}t \\ X(\omega)=-\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\omega t)\mathrm{d}t \end{cases}$$

结论：

$\boldsymbol{R(\omega)= R(-\omega)}$ 偶函数

$\boldsymbol{X(\omega) = - X(-\omega)}$ 奇函数

$\boldsymbol{|F(j\omega)| = |F(-j\omega)|}$ 偶函数

$\boldsymbol{\varphi(\omega) = - \varphi(-\omega)}$ 奇函数

$\boldsymbol{F(-j\omega)=F^*(j\omega)}$

4.5傅里叶变换的性质

➢ 若$f(t)$为实偶函数, $F(j\omega)$为实偶函数

$$X(\omega)=-\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\omega t)\,\mathrm{d}t=0$$

$$F(j\omega)=R(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)\,\mathrm{d}t$$

$$=2\int_{0}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)\,\mathrm{d}t$$

$$\boxed{\mathrm{e}^{-\alpha|t|}\leftrightarrow\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}}$$

$$\boxed{g_\tau(t)\leftrightarrow\tau\,\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}$$

$$\boxed{1\leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)}$$

$$\boxed{\delta(t)\leftrightarrow 1}$$

➢ 若$f(t)$为实奇函数, $F(j\omega)$为虚奇函数

$$R(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)\,\mathrm{d}t=0$$

$$F(j\omega)=jX(\omega)=-j\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\omega t)\,\mathrm{d}t$$

$$=-2j\int_{0}^{\infty} f(t)\sin(\omega t)\,\mathrm{d}t$$

$$\boxed{\mathrm{sgn}(t)\longleftrightarrow\frac{2}{j\omega}}$$

$$\boxed{\delta'(t)\leftrightarrow j\omega}$$

4.5傅里叶变换的性质

(2) *f*(*t*)为虚函数*f*(*t*)=j*g*(*t*)

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t \quad = j\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\cos(\omega t)\mathrm{d}t}_{X(\omega)}+\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\sin(\omega t)\mathrm{d}t}_{R(\omega)}$$

显然：
$$\begin{cases} R(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\sin(\omega t)\mathrm{d}t \\ X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)\mathrm{d}t \end{cases}$$

* 请同学们自己参照实函数进行分析。