知识点K1.11

拉普拉斯反变换

主要内容：

1.拉普拉斯反变换

2.拉普拉斯反变换求解方法

基本要求：

1. 掌握拉普拉斯反变换

2. 掌握求拉普拉斯反变换方法即查表法、利用性质、部分分式法等

3. 掌握部分分式分解法的极点特点

K1.11 拉普拉斯反变换

直接利用定义式求反变换---复变函数积分，比较困难。

通常的方法： （1）查表；

（2）利用性质；（3） 部分分式展开 ----- 结合

若象函数 $F(s)$ 是 s 的有理分式，可写为

$$F(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

若 $m \geq n$ （假分式），可用多项式除法将象函数 $F(s)$ 分解为 有理多项式 $P(s)$+有理真分式

$$F(s) = P(s) + \frac{B_0(s)}{A(s)}$$

$$F(s) = \frac{s^4 + 8s^3 + 25s^2 + 31s + 15}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} = s + 2 + \frac{2s^2 + 3s + 3}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

$P(s)$的拉普拉斯逆变换由冲激函数及其各阶导数构成。下面主要讨论有理真分式。

部分分式展开法

若**$F(s)$**是*s*的实系数<u>有理真分式</u>（*m<n*），则可写为

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \ldots + a_1 s + a_0}{s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \ldots + b_1 s + b_0}$$

式中**$A(s)$**称为**$F(s)$**的**特征多项式**，方程**$A(s)=0$**称为**特征方程**，它的根称为**特征根**，也称为**$F(s)$**的**固有频率**（或自然频率）。*n*个特征根 p_i 称为**$F(s)$**的**极点**。

（1）$F(s)$为单极点（单根）

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{K_1}{s - p_1} + \frac{K_2}{s - p_2} + ... + \frac{K_i}{s - p_i} + ... + \frac{K_n}{s - p_n}$$

$$K_i = (s - p_i)F(s)\Big|_{s=p_i} \qquad \mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s - p_i}] = e^{p_i t}\,\varepsilon(t)$$

特例：$F(s)$包含共轭复根时($p_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$)

$$F(s) = \frac{B(s)}{D(s)[(s + \alpha)^2 + \beta^2]} = \frac{B(s)}{D(s)(s + \alpha - j\beta)(s + \alpha + j\beta)}$$

$$= \frac{K_1}{s + \alpha - j\beta} + \frac{K_2}{s + \alpha + j\beta} + F_2(s) \qquad K_2 = K_1^*$$

$$K_1 = [(s + \alpha - j\beta)F(s)]_{|s=-\alpha+j\beta} = |K_1| e^{j\theta} = A + jB$$

$$F_1(s) = \frac{K_1}{s+\alpha-\mathrm{j}\beta} + \frac{K_2}{s+\alpha+\mathrm{j}\beta} = \frac{|K_1|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}}{s+\alpha-\mathrm{j}\beta} + \frac{|K_1|\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}}{s+\alpha+\mathrm{j}\beta}$$

$f_1(t) = 2|K_1|\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\cos(\beta t+\theta)\,\varepsilon(t)$

若 $K_{1,2} = A \pm \mathrm{j}B$，$f_1(t) = 2\mathrm{e}^{-\alpha t}[A\cos(\beta t) - B\sin(\beta t)]\,\varepsilon(t)$

例1 已知 $F(s) = \dfrac{10(s+2)(s+5)}{s(s+1)(s+3)}$，求其逆变换

解：部分分解法 $F(s) = \dfrac{k_1}{s} + \dfrac{k_2}{s+1} + \dfrac{k_3}{s+3}$ （$m<n$）

其中 $k_1 = sF(s)\big|_{s=0}$

$$= \frac{10(s+2)(s+5)}{(s+1)(s+3)}\bigg|_{s=0} = \frac{100}{3}$$

$$k_2 = (s+1)F(s)\Big|_{s=-1}$$

$$= \frac{10(s+2)(s+5)}{s(s+3)}\Bigg|_{s=-1} = -20$$

$$k_3 = (s+3)F(s)\Big|_{s=-3}$$

$$= \frac{10(s+2)(s+5)}{s(s+1)}\Bigg|_{s=-3} = -\frac{10}{3}$$

$$F(s) = \frac{100}{3s} - \frac{20}{s+1} - \frac{10}{3(s+3)}$$

$$f(t) = \left(\frac{100}{3} - 20\,\mathrm{e}^{-t} - \frac{10}{3}\,\mathrm{e}^{-3t}\right)\varepsilon(t)$$

例2 已知 $F(s) = \dfrac{s^3 + 5s^2 + 9s + 7}{(s+1)(s+2)}$,

求其逆变换

解： 长除法

$$\because s^2 + 3s + 2 \overline{)\begin{array}{c} s + 2 \\ s^3 + 5s^2 + 9s + 7 \end{array}}$$

$$\underline{s^3 + 3s^2 + 2s}$$

$$2s^2 + 7s + 7$$

$$\underline{2s^2 + 6s + 4}$$

$$s + 3$$

$$F(s) = s + 2 + \frac{k_1}{s+1} + \frac{k_2}{s+2}$$

$$其中 \; k_1 = (s+1) \cdot \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \bigg|_{s=-1} = 2$$

$$k_2 = \frac{s+3}{s+1} \bigg|_{s=-2} = -1$$

$$\therefore F(s) = s + 2 + \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

$$\therefore f(t) = \delta'(t) + 2\delta(t) + (2e^{-t} - e^{-2t})\varepsilon(t)$$

例3 已知 $F(s) = \dfrac{s^2 + 3}{(s^2 + 2s + 5)(s + 2)}$, 求其逆变换

解：$F(s) = \dfrac{s^2 + 3}{(s + 1 - \mathrm{j}2)(s + 1 + \mathrm{j}2)(s + 2)}$

$$= \frac{k_1}{s + 1 - \mathrm{j}2} + \frac{k_2}{s + 1 + \mathrm{j}2} + \frac{k_0}{s + 2}$$

$$p_{1,2} = -\alpha \pm \mathrm{j}\beta, \quad (\alpha = 1, \beta = 2)$$

其中 $k_1 = \dfrac{s^2 + 3}{(s + 1 + \mathrm{j}2)(s + 2)}\bigg|_{s = -1 + \mathrm{j}2} = \dfrac{-1 + \mathrm{j}2}{5}$

即 $k_{1,2} = A \pm \text{j}B$，$(A = -\dfrac{1}{5}, \quad B = \dfrac{2}{5})$

$$k_0 = \left.\frac{s^2 + 3}{(s + 1 - \text{j}2)(s + 1 + \text{j}2)}\right|_{s = -2} = \frac{7}{5}$$

$$\therefore F(s) = \frac{-\dfrac{1}{5} + \text{j}\dfrac{2}{5}}{s + 1 - \text{j}2} + \frac{-\dfrac{1}{5} - \text{j}\dfrac{2}{5}}{s + 1 + \text{j}2} + \frac{7}{5(s + 2)}$$

$$\because \alpha = 1, \beta = 2 \qquad A = -\frac{1}{5}, \quad B = \frac{2}{5}$$

$$\therefore f(t) = \left\{ 2\text{e}^{-t}\left[-\frac{1}{5}\cos(2t) - \frac{2}{5}\sin(2t) \right] + \frac{7}{5}\text{e}^{-2t} \right\}\varepsilon(t)$$

例4 求象函数$F(s)$的原函数$f(t)$。

$$F(s) = \frac{s^3 + s^2 + 2s + 4}{s(s+1)(s^2+1)(s^2+2s+2)}$$

解： 极点是$s_1 = 0$，$s_2 = -1$，$s_{3,4} = \pm j1$，$s_{5,6} = -1 \pm j1$，故

$$F(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+1} + \frac{K_3}{s-j} + \frac{K_4}{s+j} + \frac{K_5}{s+1-j} + \frac{K_6}{s+1+j}$$

$$K_1 = sF(s)|_{s=0} = 2, \quad K_2 = (s+1)F(s)|_{s=-1} = -1$$

$$K_3 = (s-j)F(s)|_{s=j} = j/2 = (1/2)e^{j(\pi/2)}, \quad K_4 = K_3^* = (1/2)e^{-j(\pi/2)}$$

$$K_5 = (s+1-j)F(s)|_{s=-1+j} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{j\frac{3}{4}\pi}, \quad K_6 = K_5^*$$

$$f(t) = [2 - e^{-t} + \cos(t + \frac{\pi}{2}) + \sqrt{2}\,e^{-t}\cos(t + \frac{3\pi}{4})]\varepsilon(t)$$

（2）$F(s)$有重极点（重根）

若$A(s) = 0$在$s = p_1$处有r重根，

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{K_{11}}{(s-p_1)^r} + \frac{K_{12}}{(s-p_1)^{r-1}} + \ldots + \frac{K_{1r}}{(s-p_1)}$$

$$K_{11} = [(s-p_1)^r F(s)]|_{s=p1}$$

$$K_{12} = d[(s-p_1)^r F(s)]|_{s=p1}/ds$$

$$K_{1i} = \frac{1}{(i-1)!} \frac{d^{i-1}}{ds^{i-1}} \left[(s-p_1)^r F(s) \right] \Big|_{s=p_1}$$

$$\mathscr{L}[t^n \varepsilon(t)] = \frac{n!}{s^{n+1}} \qquad \mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{(s-p_1)^{n+1}}] = \frac{1}{n!} t^n e^{p_1 t} \varepsilon(t)$$

例5 已 知 $F(s) = \dfrac{s-2}{s(s+1)^3}$， 求 其 逆 变 换

解： $F(s) = \dfrac{k_{11}}{(s+1)^3} + \dfrac{k_{12}}{(s+1)^2} + \dfrac{k_{13}}{(s+1)} + \dfrac{k_2}{s}$

令 $F_1(s) = (s+1)^3 F(s) = \dfrac{s-2}{s}$

其 中 $k_{11} = F_1(s)\Big|_{s=p_1}$

$$= \dfrac{s-2}{s}\Bigg|_{s=-1} = 3$$

$$k_{12} = \dfrac{d}{ds}F_1(s)\Bigg|_{s=p_1}$$

$$= \dfrac{s-(s-2)\cdot 1}{s^2}\Bigg|_{s=-1} = 2$$

$$k_{13} = \frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}F_1(s)\bigg|_{s=p_1}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{-4s}{s^4}\bigg|_{s=-1} = 2$$

$$k_2 = sF(s)\bigg|_{s=0}$$

$$= \frac{s-2}{(s+1)^3}\bigg|_{s=0} = -2$$

$$\therefore F(s) = \frac{3}{(s+1)^3} + \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{2}{(s+1)} - \frac{2}{s}$$

$$\therefore f(t) = (\frac{3}{2}t^2\,\mathrm{e}^{-t} + 2t\,\mathrm{e}^{-t} + 2\,\mathrm{e}^{-t} - 2)\varepsilon(t)$$