作业一: 叙述并证明带皮亚诺余项的泰勒定理

嵇敏君
信息与计算科学 3200103322

2022 年 6 月 27 日

1 问题描述

问题叙述如下: 若函数 f 在点 x_0 存在直至 n 阶导数, 则有

$$f(x) = T_n(x) + o((x - x_0)^n) \tag{1}$$

, 即

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}x_0)}{n!}(x - x_0)^n \tag{2}$$

2 证明

设

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x), Q(x) = (x - x_0)^n,$$

现在只要证

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{Q_n(x)} = 0 \tag{3}$$

有关系式

$$f^{(k)}(x_0) = T_n^{(k)}(x_0), k = 0, 1, 2, ..., n. \tag{4}$$

可知,

$$R_n(x_0) = R_n'(x_0) = ... = R_n^{(n)}(x_0) = 0, \tag{5}$$

并易知

$$Q_n(x_0) = Q'_n(x_0) = ... = Q_n^{(n-1)}(x_0) = 0, Q_n^{(n)} = n!. \tag{6}$$

因为 $f^{(n)}(x_0)$ 存在, 所以在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 上 f 存在 n-1 阶导函数. 于是, 当 $x \in U^o(x_0)$ 且 $x \to x_0$ 时, 允许接连你使用洛必达法则 n-1 次，得到

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{Q_n(x)} &= \lim_{x\to x_0}\frac{R'_n(x)}{Q'_n(x)} = ... = \lim_{x\to x_0}\frac{R_n^{(n-1)}(x)}{Q_n^{(n-1)}(x)} \\
&= \lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)(x-x_0)}{n(n-1)...2(x-x_0)} \\
&= \frac{1}{n!}\lim_{x\to x_0}[\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0} - f^{(n)}(x_0)] \\
&= 0
\end{aligned}$$