# 作业四:《Mandelbrot Set 的生成和探索》

稽敏君
信息与计算科学 3200103322

2022 年 7 月 1 日

**摘要**

本文对于 Mandelbrot 分形进行了实现以及做出了一些尝试

据老师所说,Mandelbrot 分形是“最水的”菲尔兹奖, 于是乎, 便给我们布置了这样一个“很水”的作业. 在我看来, 一方面让我们了解到了数学与编程的结合之美, 一方面包含着老师对我们的高瞻远瞩般的期待, 期待我们能够获得菲尔兹奖. 老师的良苦用心让人感动, 他真的好温柔, 我哭死.

跑远了, 本文主要是参考了 ACheritat 一篇文献 [1] 中的思路, 借用了王何宇老师的代码来实现 Madelbrot 分形, 得出一些结果并进行分析汇总.

## 1 背景介绍

曼德勃罗特集是一个几何图形, 曾被称为“上帝的指纹”. 这个点集均出自公式:$Z_{n+1} = Z_n^2 + C$, 对于非线性迭代公式 $Z_{n+1} = Z_n^2 + C$, 所有使得无限迭代后的结果能保持有限数值的复数 z 的集合 (也称该迭代函数的 Julia 集) 连通的 c, 构成曼德勃罗集. 它是由美国数学家曼□勃罗教授于 1975 年夏天一个夜晚, 在冥思苦想之余翻看儿子的拉丁文字典时想到的, 其拉丁文的原意是“产生无规则的碎片”. 曼德勃罗教授称此为”魔鬼的聚合物”. 为此, 曼德勃罗在 1988 年获得了”科学行为艺术大奖”.

## 2 数学理论

M 指 Mandelbrot Set

### 2.1 定理 1

若 $|c| < \frac{1}{4}$, 则 $c \in M$

### 2.2 定理 2

若 $c \in M$, 则 $|c| < 2$

### 2.3 定理 3

若 $c \in M$, 则 $|z_n| < 2, (n = 1, 2, ...)$

# 3 算法

## 3.1 Mandelbrot 迭代

下面是只有黑白两色的 Mandelbrot Set 的画法

```
Set a maximal iteration number N
For each pixel p of the image:
  Let c be the complex number represented by p
  Let z be a complex variable
  Set z to 0
  Do the following N times:
   If |z|>2 then color the pixel white, ned this loop prematurely, go to the next pixel
    Otherwise replace z by z*z+c
 If the loop above reached its natural end: color the pixel p in black
  Go to the next pixel
```

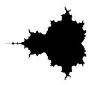
当然, 我们也可以对它进行一些修改, 以达到能够画出彩色的, 甚至三维的 Mandelbrot Set

若我们要画出彩色的 Mandelbrot Set, 可以对于那些`|z|>2` 的点再次进行分类, 分类的标准是它们不收敛时的迭代次数; 若要画出三维图形, 那就要对点进行一些改变了.

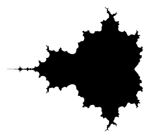
# 4 数值算例

## 4.1 用老师的代码做出来的 Mandelbrot Set

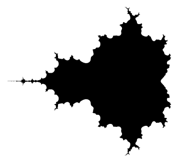
### 4.1.1 改变 dimension 后图像的变化



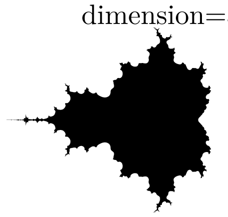
dimension=5.0



dimension=3.0

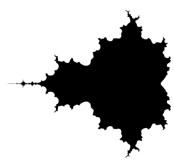


dimension=2.5

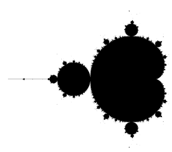


dimension=2.0

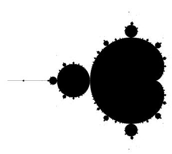
### 4.1.2 改变最大迭代次数后图像的变化（这里取 dimension=2.5）



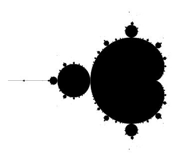
N=10



N=100

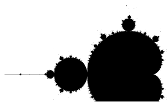


N=1000

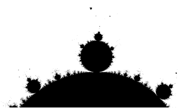


N=10000

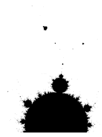
#### 4.1.3 改变原点的坐标后来观察边界情况(这里取 ox=0.0,oy=1.0,N=100)



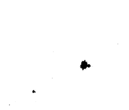
dimension=2.5



dimension=1.0



dimension=0.5



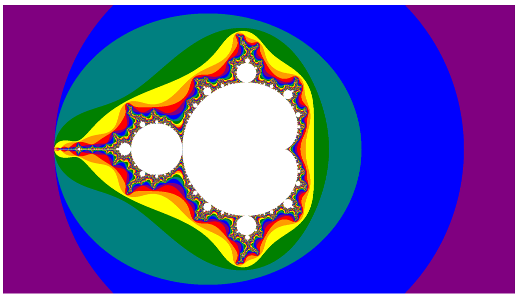
dimension=0.1

### 4.2 稍微更换后的 Mandelbrot Set

#### 4.2.1 改动之处

我将原来的代码中的不收敛的点按经过的迭代次数进行了一个分类, 详情请看 colorfulmandelbrot.cpp, 从而获得了一个“彩虹色”的 Mandelbrot Set

#### 4.2.2 结果



彩虹 Mandelbrot Set

## 5 结论

可以看出,dimension 改变的是生成的 bmp 图片的尺寸大小,dimension 越大, 图片的尺寸也就越大.

当最大迭代次数 N 越来越大时, 展现出的 Mandelbrot Set 更加的光滑, 但其实当 N 大于 100 之后, 图像的变化已经很难用肉眼观察到, 需要进行放大才能看到一些点的变化.

当我们把视线移动到边界上时, 若把图形放大, 会看到边界处也在不断的产生一个又一个的小分形

由彩色的 Mnadelbrot Set 图可以看出, 其实大部分不收敛的点在经过 20 次以内的迭代已经体现出了其不收敛的性质, 故只需要经过较少次的迭代便已经能够得出一个较好的 Mandelbrot Set.

# 参考文献

[1] Arnaud Cheritat. Mandelbrot set. [EB/OL]. `https://www.math.univ-toulouse.fr/~cheritat/wiki-draw/index.php/Mandelbrot_set` Accessed June 29, 2022.