大规模运动平均化中的鲁棒性问题

Robustness in Large-Scale Motion Averaging

高 翔

中国海洋大学工程学院

电子邮箱：xgao@ouc.edu.cn

个人主页：https://ouc-xgao.github.io/

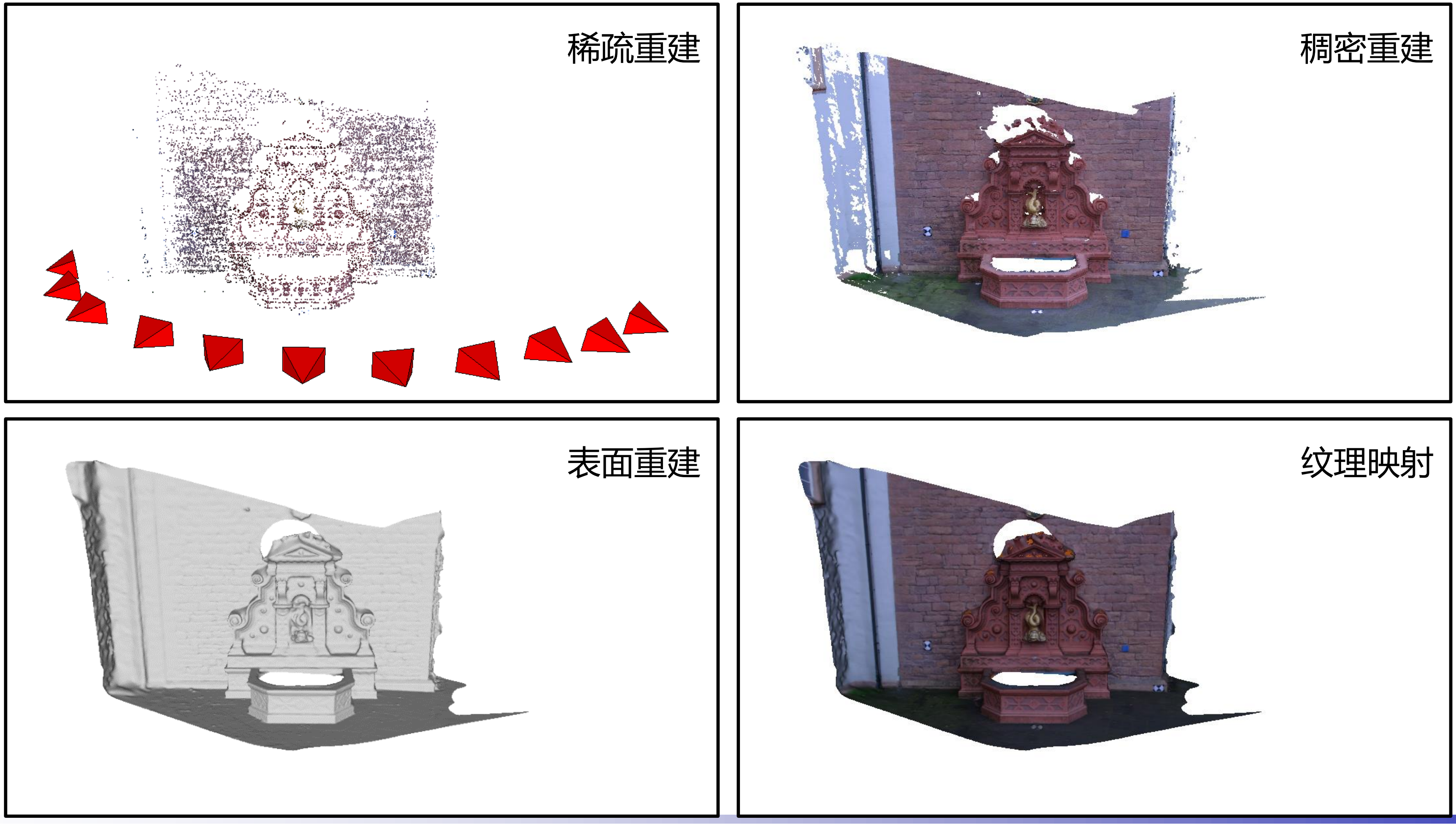
研究背景

- 从运动恢复结构（Structure from Motion, SfM）
  - SfM：输入图像集合，输出**相机绝对位姿与场景稀疏表达**

Snavely et al. PIEEE 2010

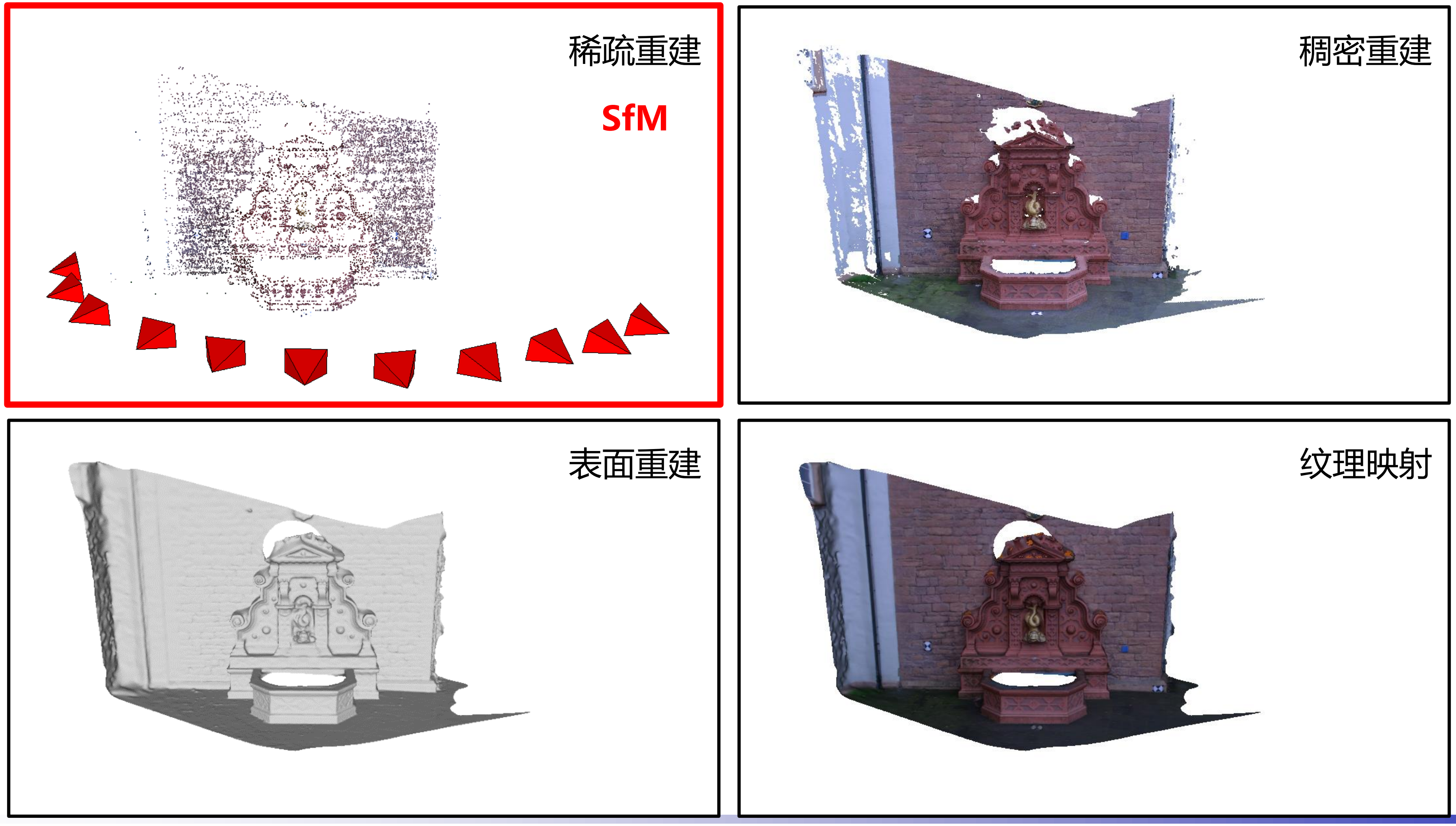
研究背景

- 从运动恢复结构（Structure from Motion, SfM）
  - SfM是基于图像的建模（Image-Based Modeling）流程中的核心步骤



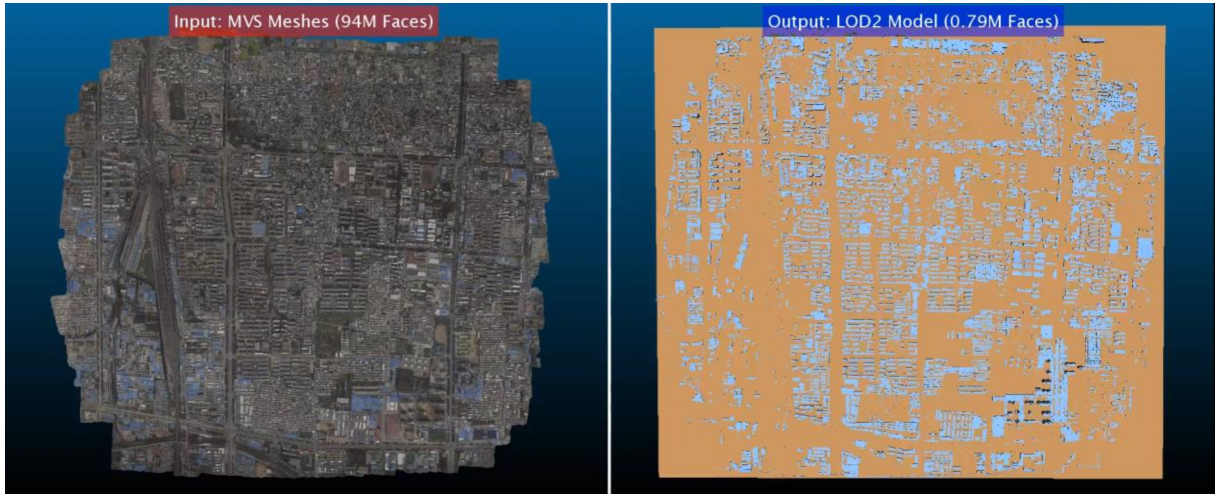
研究背景

- 从运动恢复结构（Structure from Motion, SfM）
  - SfM是基于图像的建模（Image-Based Modeling）流程中的核心步骤



研究背景

- 从运动恢复结构（Structure from Motion, SfM）
  - SfM在遥感测绘、室内建模、增强现实、古建保护等领域有着重要的应用



Zhu et al. In Proc. ECCV 2018

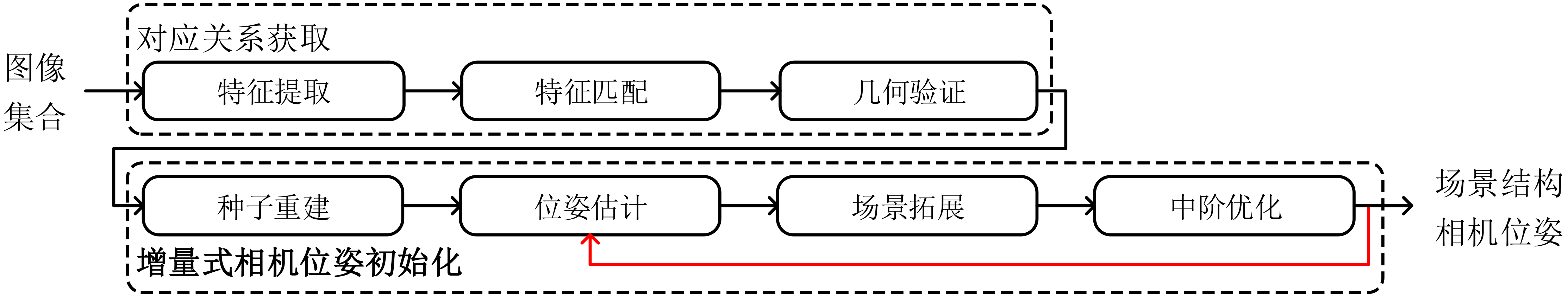
Han et al. ISPRS P&RS 2021

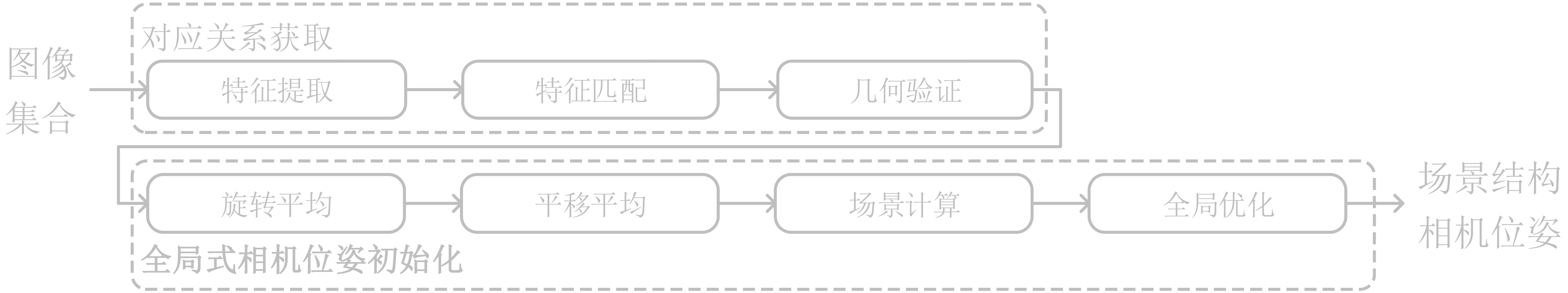
Sun et al. In Proc. CVPR 2021

Gao et al. ISPRS P&RS 2018

研究背景

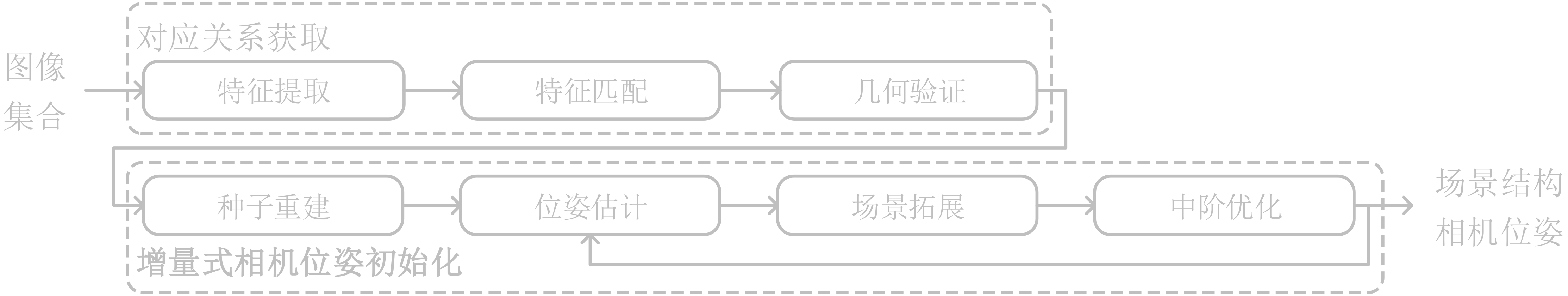
- 从运动恢复结构（Structure from Motion, SfM）
  - 根据相机位姿初始化方式，SfM可分为**增量式SfM**与全局式SfM两类

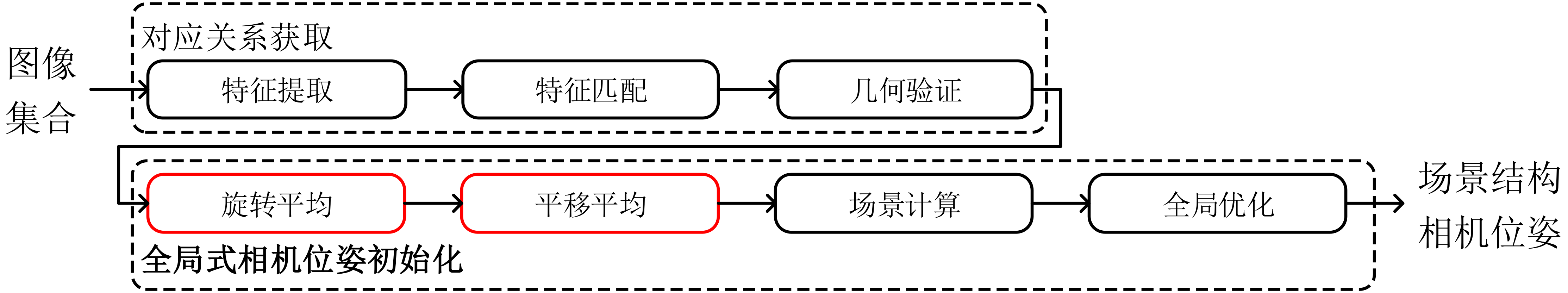




研究背景

- 从运动恢复结构（Structure from Motion, SfM）
  - 根据相机位姿初始化方式，SfM可分为增量式SfM与**全局式SfM**两类





研究背景

- 增量式SfM vs. 全局式SfM
  - 增量式SfM
    - 😀精度更高、鲁棒性更强、……
    - 😟效率较低、场景漂移、……
  - 全局式SfM
    - 😀效率更高、一致性更好、……
    - 😟精度较差、场景缺失、……

研究背景

- 运动平均化（Motion Averaging）
  - 运动平均化包括旋转平均化（Rotation Averaging, RA）与平移平均化（Translation Averaging, TA），是**全局式**SfM中的核心步骤
  - RA：给定相机之间的相对旋转$\{\boldsymbol{R}_{i,j} | e_{i,j} \in \mathcal{E}\}$，求解在同一基准下所有相机的绝对旋转$\{\boldsymbol{R}_i | v_i \in \mathcal{V}\}$

$$\{\boldsymbol{R}_i^*\} = \arg\min \sum_{\substack{e_{i,j} \in \mathcal{E} \\ v_i, v_j \in \mathcal{V}}} \rho\left(d_{\boldsymbol{R}}\left(\boldsymbol{R}_{i,j}, \boldsymbol{R}_j \boldsymbol{R}_i^{\mathrm{T}}\right)\right)$$

研究背景

• 运动平均化（Motion Averaging）

- 运动平均化包括旋转平均化（Rotation Averaging, RA）与平移平均化（Translation Averaging, TA），是**全局式**SfM中的核心步骤
- RA：给定相机之间的相对旋转$\{\boldsymbol{R}_{i,j}|e_{i,j}\in\mathcal{E}\}$，求解在同一基准下所有相机的绝对旋转$\{\boldsymbol{R}_i|v_i\in\mathcal{V}\}$

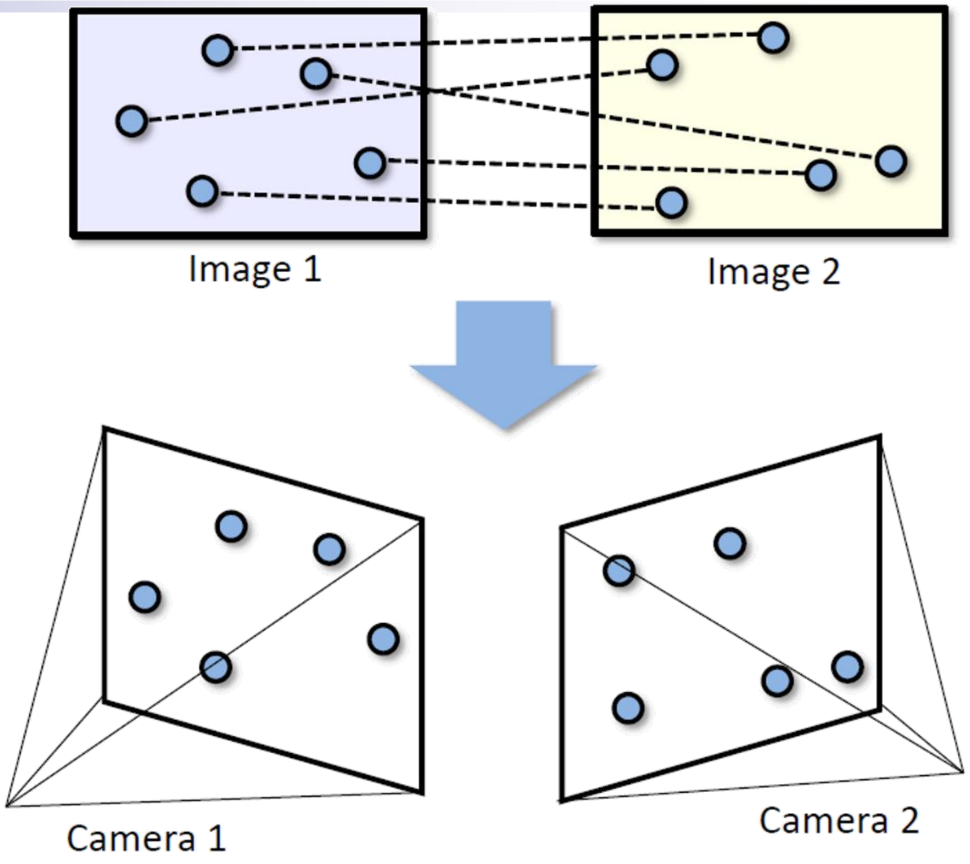
$$\{\boldsymbol{R}_i^*\}=\arg\min\sum_{\substack{e_{i,j}\in\mathcal{E}\\ v_i,v_j\in\mathcal{V}}}\rho\left(d_{\boldsymbol{R}}\left(\boldsymbol{R}_{i,j},\boldsymbol{R}_j\boldsymbol{R}_i^{\mathrm{T}}\right)\right)$$

- TA：给定相机之间的相对平移$\{\boldsymbol{t}_{i,j}|e_{i,j}\in\mathcal{E}\}$，求解在同一基准下所有相机的绝对位置$\{\boldsymbol{c}_i|v_i\in\mathcal{V}\}$

$$\{\boldsymbol{c}_i^*\}=\arg\min\sum_{\substack{e_{i,j}\in\mathcal{E}\\ v_i,v_j\in\mathcal{V}}}\rho\left(d_{\boldsymbol{t}}\left(\boldsymbol{t}_{i,j},\boldsymbol{R}_j\frac{\boldsymbol{c}_i-\boldsymbol{c}_j}{\|\boldsymbol{c}_i-\boldsymbol{c}_j\|_2}\right)\right)$$

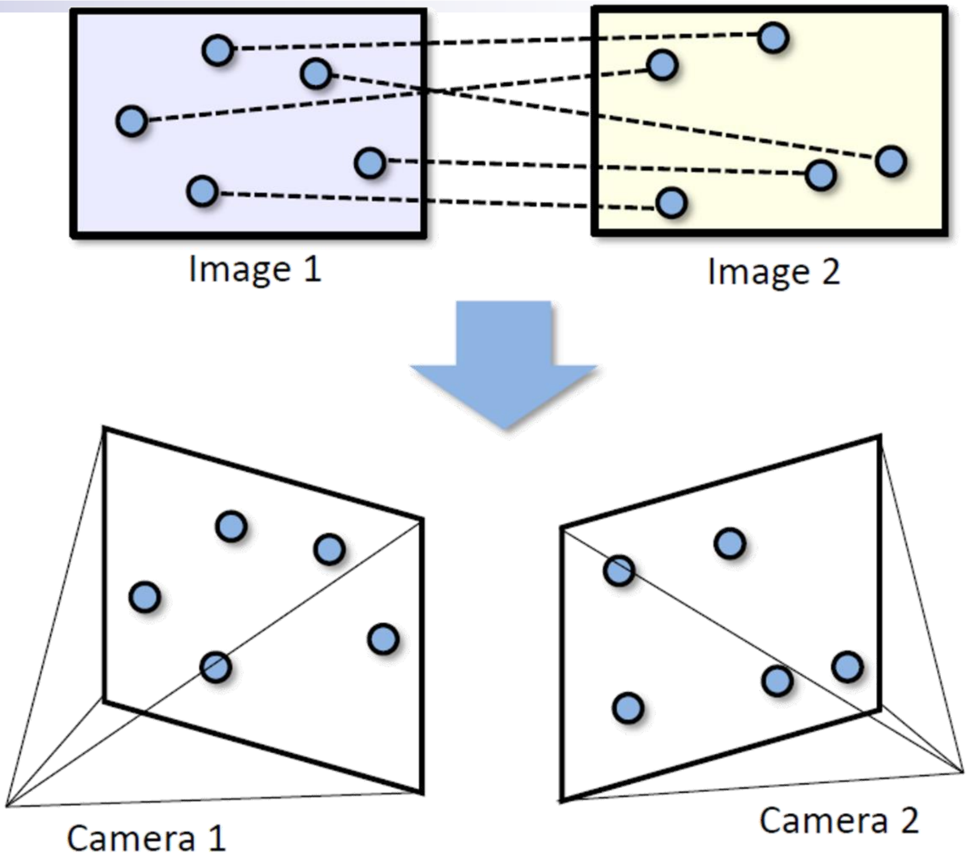
研究背景

- 运动平均化（Motion Averaging, MA）
  - 相对运动（旋转、平移）$\{\boldsymbol{R}_{i,j}, \boldsymbol{t}_{i,j} | e_{i,j} \in \mathcal{E}\}$的获取方式：
    - 局部特征的**提取**与**匹配**
    - 本质矩阵的**估计**与**分解**



研究背景

- 运动平均化（Motion Averaging, MA）
  - 相对运动（旋转、平移）$\{\boldsymbol{R}_{i,j}, \boldsymbol{t}_{i,j} | e_{i,j} \in \mathcal{E}\}$的获取方式：
    - 局部特征的**提取与匹配**
    - 本质矩阵的**估计与分解**
  - 相对于RA，TA问题更加困难，主要体现在
    - 通过本质矩阵分解得到的相对平移具有**尺度不确定性**[1]
    - 相对平移估计精度比旋转更容易受到**特征误匹配**影响[1]
    - 平移平均化**问题可解性**对外极几何图有着更高的要求[2]



[1] D. Nister. An Efficient Solution to the Five-Point Relative Pose Problem [J]. IEEE T-PAMI, 2004.
[2] O. Ozyesil and A. Singer. Robust Camera Location Estimation by Convex[C]. In Proc. CVPR, 2015.

研究背景

- 运动平均化（Motion Averaging）
  - 运动平均化问题的**主要难点**在于如何利用存在测量外值的相对运动精确估计相机的绝对位姿
  - 现有的运动平均化方法主要包括两类：
    - 鲁棒优化方法：RA[1-2]、TA[3-4]，优化复杂、效率较低
    - 外值滤除方法：RA[5-6]、TA[7-8]，chicken-and-egg problem

[1] A. Chatterjee and V. M. Govindu. *Robust Relative Rotation Averaging*[J]. IEEE T-PAMI, 2018.
[2] Y. Shi and G. Lerman. *Message Passing Least Squares Framework and its Application to Rotation Synchronization*[C]. In Proc. ICML, 2020.
[3] T. Goldstein, P. Hand, C. Lee, V. Voroninski, and S. Soatto. *ShapeFit and ShapeKick for Robust, Scalable Structure from Motion*[C]. In Proc. ECCV, 2016.
[4] B. Zhuang, L. Cheong, and G. H. Lee. *Baseline Desensitizing in Translation Averaging*[C]. In Proc. CVPR, 2018.
[5] X. Gao, J. Luo, K. Li, and Z. Xie. *Hierarchical RANSAC-Based Rotation Averaging*[J]. IEEE SPL, 2020.
[6] S. H. Lee and J. Civera. *HARA: A Hierarchical Approach for Robust Rotation Averaging*[C]. In Proc. CVPR, 2022.
[7] K. Wilson and N. Snavely. *Robust Global Translations with 1DSfM*[C]. In Proc. ECCV, 2014.
[8] C. Sweeney, T. Sattler, T. Höllerer T, M. Turk, and M. Pollefeys. *Optimizing the Viewing Graph for Structure-from-Motion*[C]. In Proc. ICCV, 2015.

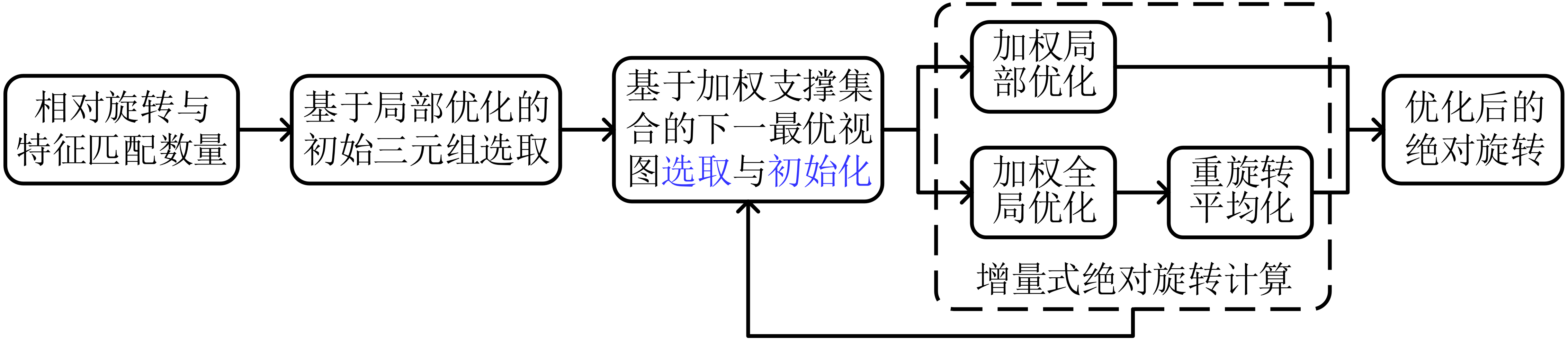
研究背景

- 运动平均化（Motion Averaging）
  - 运动平均化问题的**主要难点**在于如何利用存在测量外值的相对运动精确估计相机的绝对位姿
  - 现有的运动平均化方法主要包括两类：
    - 鲁棒优化方法：RA[1-2]、TA[3-4]，优化复杂、效率较低
    - 外值滤除方法：RA[5-6]、TA[7-8]，chicken-and-egg problem
  - 针对上述问题，我们在大规模运动平均化的鲁棒性问题研究方面开展了一些初步探索：
    - 可在滤除相对运动测量外值的**同时**估计相机的绝对位姿
    - 以期实现简单、高效、精确、鲁棒的**大规模**运动平均化

[1] A. Chatterjee and V. M. Govindu. *Robust Relative Rotation Averaging*[J]. IEEE T-PAMI, 2018.
[2] Y. Shi and G. Lerman. *Message Passing Least Squares Framework and its Application to Rotation Synchronization*[C]. In Proc. ICML, 2020.
[3] T. Goldstein, P. Hand, C. Lee, V. Voroninski, and S. Soatto. *ShapeFit and ShapeKick for Robust, Scalable Structure from Motion*[C]. In Proc. ECCV, 2016.
[4] B. Zhuang, L. Cheong, and G. H. Lee. *Baseline Desensitizing in Translation Averaging*[C]. In Proc. CVPR, 2018.
[5] X. Gao, J. Luo, K. Li, and Z. Xie. *Hierarchical RANSAC-Based Rotation Averaging*[J]. IEEE SPL, 2020.
[6] S. H. Lee and J. Civera. *HARA: A Hierarchical Approach for Robust Rotation Averaging*[C]. In Proc. CVPR, 2022.
[7] K. Wilson and N. Snavely. *Robust Global Translations with 1DSfM*[C]. In Proc. ECCV, 2014.
[8] C. Sweeney, T. Sattler, T. Höllerer T, M. Turk, and M. Pollefeys. *Optimizing the Viewing Graph for Structure-from-Motion*[C]. In Proc. ICCV, 2015.

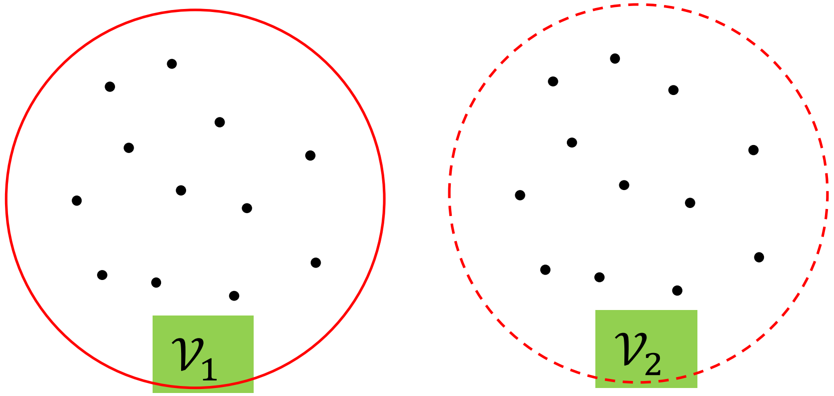
旋转平均化（Rotation Averaging, RA）

- 增量式旋转平均化（Incremental Rotation Averaging, IRA）
  - IRA采用与增量式SfM类似的**增量式**参数估计流程
    - 更加精确、鲁棒
  - 旋转平均化问题相对于SfM问题待估计**参数量**更少
    - 更加简单、高效



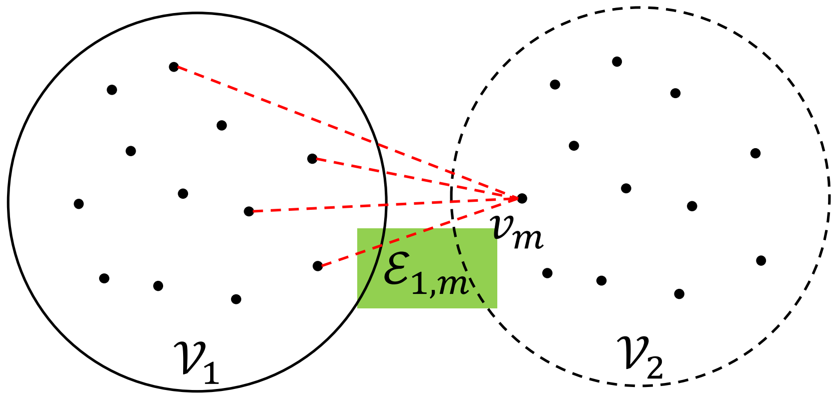
旋转平均化（Rotation Averaging, RA）

- IRA下一最优视图（Next Best View, NBV）选取与初始化
  - $\mathcal{V}_1$与$\mathcal{V}_2$：当前已估计与未估计绝对旋转的顶点集合，可知$\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2 = \mathcal{V}$



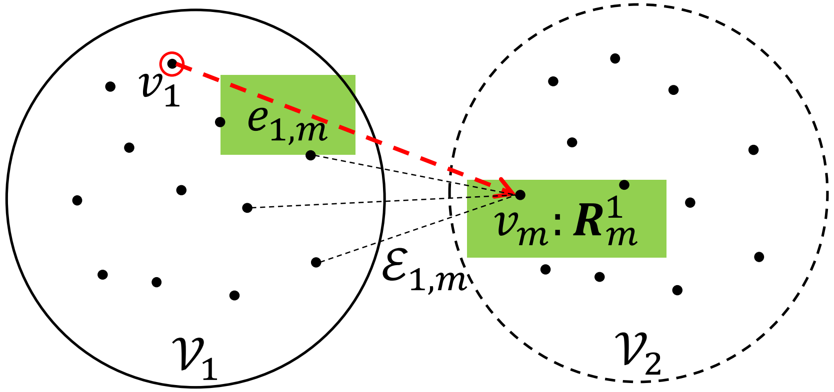
旋转平均化（Rotation Averaging, RA）

- IRA下一最优视图（Next Best View, NBV）选取与初始化
  - $\mathcal{V}_1$与$\mathcal{V}_2$：当前已估计与未估计绝对旋转的顶点集合，可知$\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2 = \mathcal{V}$
  - $\mathcal{E}_{1,m}$：$\mathcal{V}_2$中一顶点v_m与$\mathcal{V}_1$中所有顶点之间的边集



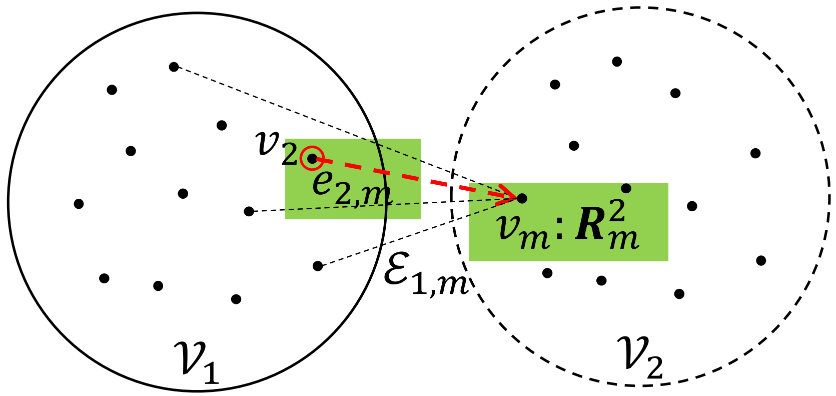
旋转平均化（Rotation Averaging, RA）

- IRA下一最优视图（Next Best View, NBV）选取与初始化
  - $\mathcal{V}_1$与$\mathcal{V}_2$：当前已估计与未估计绝对旋转的顶点集合，可知$\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2 = \mathcal{V}$
  - $\mathcal{E}_{1,m}$：$\mathcal{V}_2$中一顶点v_m与$\mathcal{V}_1$中所有顶点之间的边集
  - 对$\mathcal{E}_{1,m}$中的每一条边$e_{i,m}$通过$\boldsymbol{R}_m^i = \boldsymbol{R}_{i,m}\boldsymbol{R}_i$预计算顶点$v_m$的绝对旋转



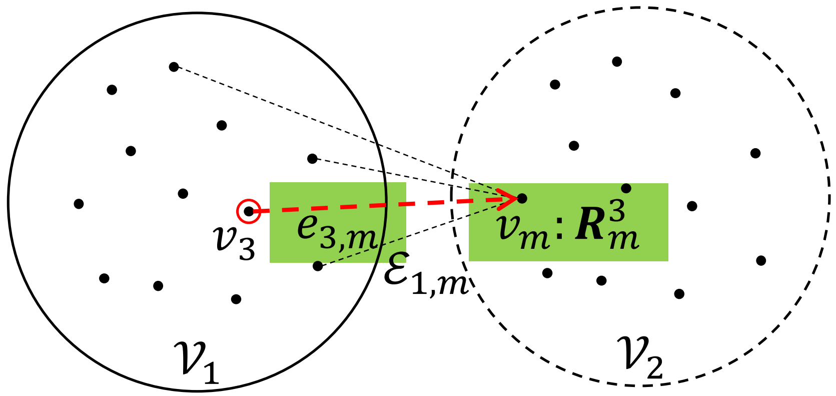
旋转平均化（Rotation Averaging, RA）

- IRA下一最优视图（Next Best View, NBV）选取与初始化
  - $\mathcal{V}_1$与$\mathcal{V}_2$：当前已估计与未估计绝对旋转的顶点集合，可知$\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2 = \mathcal{V}$
  - $\mathcal{E}_{1,m}$：$\mathcal{V}_2$中一顶点v_m与$\mathcal{V}_1$中所有顶点之间的边集
  - 对$\mathcal{E}_{1,m}$中的每一条边$e_{i,m}$通过$\boldsymbol{R}_m^i = \boldsymbol{R}_{i,m}\boldsymbol{R}_i$预计算顶点$v_m$的绝对旋转



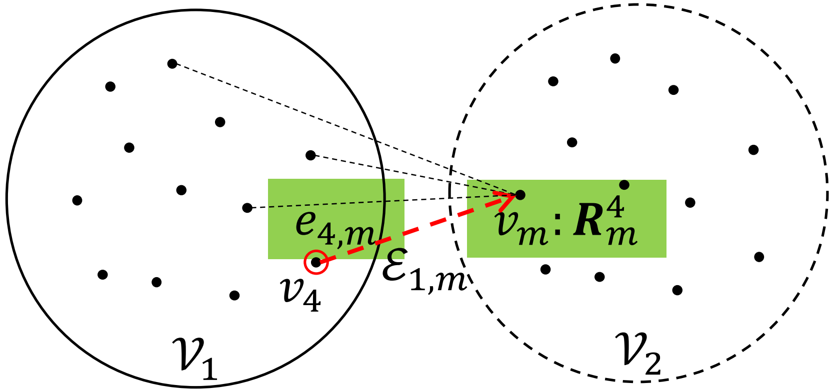
旋转平均化（Rotation Averaging, RA）

- IRA下一最优视图（Next Best View, NBV）选取与初始化
  - $\mathcal{V}_1$与$\mathcal{V}_2$：当前已估计与未估计绝对旋转的顶点集合，可知$\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2 = \mathcal{V}$
  - $\mathcal{E}_{1,m}$：$\mathcal{V}_2$中一顶点v_m与$\mathcal{V}_1$中所有顶点之间的边集
  - 对$\mathcal{E}_{1,m}$中的每一条边$e_{i,m}$通过$\boldsymbol{R}_m^i = \boldsymbol{R}_{i,m}\boldsymbol{R}_i$预计算顶点$v_m$的绝对旋转



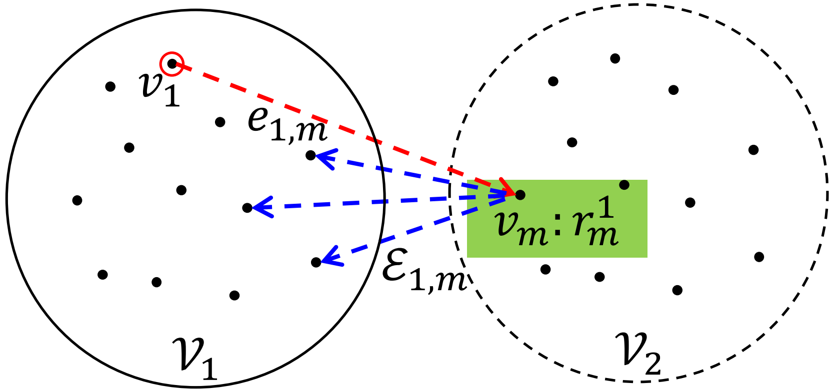
旋转平均化（Rotation Averaging, RA）

- IRA下一最优视图（Next Best View, NBV）选取与初始化
  - $\mathcal{V}_1$与$\mathcal{V}_2$：当前已估计与未估计绝对旋转的顶点集合，可知$\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2 = \mathcal{V}$
  - $\mathcal{E}_{1,m}$：$\mathcal{V}_2$中一顶点v_m与$\mathcal{V}_1$中所有顶点之间的边集
  - 对$\mathcal{E}_{1,m}$中的每一条边$e_{i,m}$通过$\boldsymbol{R}_m^i = \boldsymbol{R}_{i,m}\boldsymbol{R}_i$预计算顶点$v_m$的绝对旋转



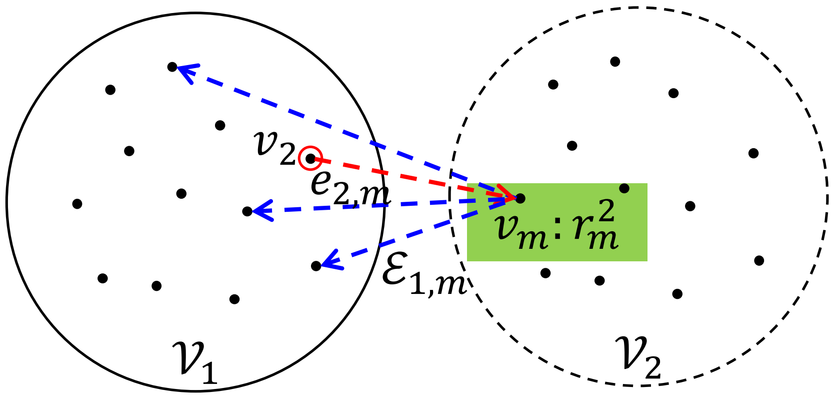
旋转平均化（Rotation Averaging, RA）

- IRA下一最优视图（Next Best View, NBV）选取与初始化
  - $\mathcal{V}_1$与$\mathcal{V}_2$：当前已估计与未估计绝对旋转的顶点集合，可知$\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2 = \mathcal{V}$
  - $\mathcal{E}_{1,m}$：$\mathcal{V}_2$中一顶点v_m与$\mathcal{V}_1$中所有顶点之间的边集
  - 对$\mathcal{E}_{1,m}$中的每一条边$e_{i,m}$通过$\boldsymbol{R}_m^i = \boldsymbol{R}_{i,m}\boldsymbol{R}_i$预计算顶点$v_m$的绝对旋转
  - 通过$r_m^i = \sum_{e_{j,m} \in \mathcal{E}_{1,m}} \cos\left(d_\theta^R\left(\boldsymbol{R}_{j,m}, \boldsymbol{R}_m^i \boldsymbol{R}_j{}^{\mathrm{T}}\right)\right)$计算$\mathcal{E}_{1,m}$中各边的选边奖励



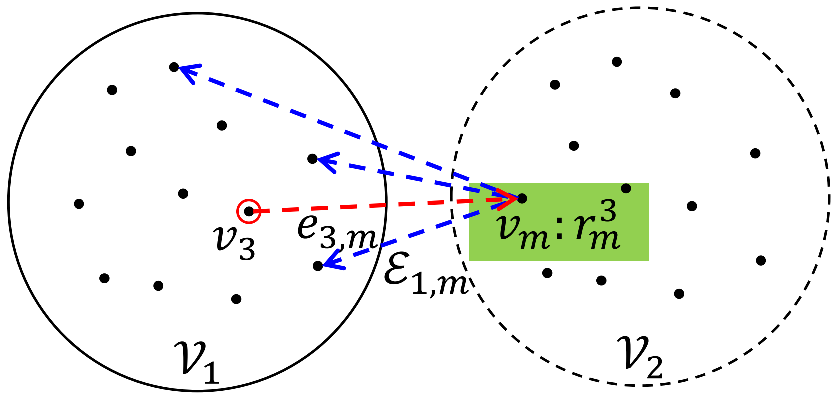
旋转平均化（Rotation Averaging, RA）

- IRA下一最优视图（Next Best View, NBV）选取与初始化
  - $\mathcal{V}_1$与$\mathcal{V}_2$：当前已估计与未估计绝对旋转的顶点集合，可知$\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2 = \mathcal{V}$
  - $\mathcal{E}_{1,m}$：$\mathcal{V}_2$中一顶点v_m与$\mathcal{V}_1$中所有顶点之间的边集
  - 对$\mathcal{E}_{1,m}$中的每一条边$e_{i,m}$通过$\boldsymbol{R}_m^i = \boldsymbol{R}_{i,m}\boldsymbol{R}_i$预计算顶点$v_m$的绝对旋转
  - 通过$r_m^i = \sum_{e_{j,m} \in \mathcal{E}_{1,m}} \cos\left(d_\theta^R\left(\boldsymbol{R}_{j,m}, \boldsymbol{R}_m^i \boldsymbol{R}_j{}^{\mathrm{T}}\right)\right)$计算$\mathcal{E}_{1,m}$中各边的选边奖励



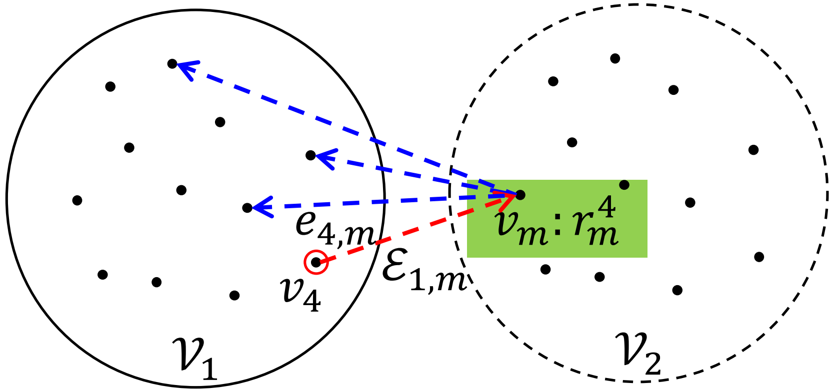
旋转平均化（Rotation Averaging, RA）

- IRA下一最优视图（Next Best View, NBV）选取与初始化
  - $\mathcal{V}_1$与$\mathcal{V}_2$：当前已估计与未估计绝对旋转的顶点集合，可知$\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2 = \mathcal{V}$
  - $\mathcal{E}_{1,m}$：$\mathcal{V}_2$中一顶点v_m与$\mathcal{V}_1$中所有顶点之间的边集
  - 对$\mathcal{E}_{1,m}$中的每一条边$e_{i,m}$通过$\boldsymbol{R}_m^i = \boldsymbol{R}_{i,m}\boldsymbol{R}_i$预计算顶点$v_m$的绝对旋转
  - 通过$r_m^i = \sum_{e_{j,m} \in \mathcal{E}_{1,m}} \cos\left(d_\theta^R\left(\boldsymbol{R}_{j,m}, \boldsymbol{R}_m^i \boldsymbol{R}_j{}^{\mathrm{T}}\right)\right)$计算$\mathcal{E}_{1,m}$中各边的选边奖励



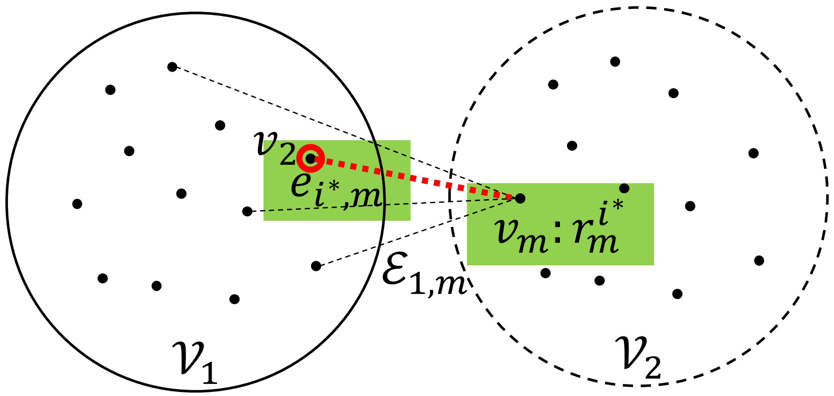
旋转平均化（Rotation Averaging, RA）

- IRA下一最优视图（Next Best View, NBV）选取与初始化
  - $\mathcal{V}_1$与$\mathcal{V}_2$：当前已估计与未估计绝对旋转的顶点集合，可知$\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2 = \mathcal{V}$
  - $\mathcal{E}_{1,m}$：$\mathcal{V}_2$中一顶点v_m与$\mathcal{V}_1$中所有顶点之间的边集
  - 对$\mathcal{E}_{1,m}$中的每一条边$e_{i,m}$通过$\boldsymbol{R}_m^i = \boldsymbol{R}_{i,m}\boldsymbol{R}_i$预计算顶点$v_m$的绝对旋转
  - 通过$r_m^i = \sum_{e_{j,m} \in \mathcal{E}_{1,m}} \cos\left(d_\theta^R\left(\boldsymbol{R}_{j,m}, \boldsymbol{R}_m^i \boldsymbol{R}_j{}^{\mathrm{T}}\right)\right)$计算$\mathcal{E}_{1,m}$中各边的选边奖励



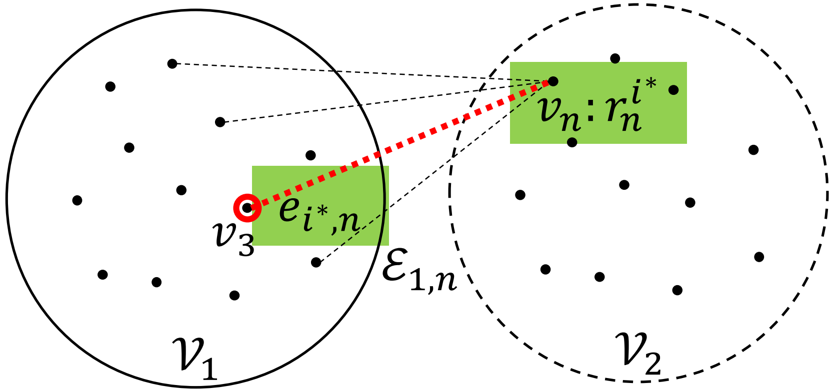
旋转平均化（Rotation Averaging, RA）

- IRA下一最优视图（Next Best View, NBV）选取与初始化
  - $\mathcal{V}_1$与$\mathcal{V}_2$：当前已估计与未估计绝对旋转的顶点集合，可知$\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2 = \mathcal{V}$
  - $\mathcal{E}_{1,m}$：$\mathcal{V}_2$中一顶点v_m与$\mathcal{V}_1$中所有顶点之间的边集
  - 对$\mathcal{E}_{1,m}$中的每一条边$e_{i,m}$通过$\boldsymbol{R}_m^i = \boldsymbol{R}_{i,m}\boldsymbol{R}_i$预计算顶点$v_m$的绝对旋转
  - 通过$r_m^i = \sum_{e_{j,m}\in\mathcal{E}_{1,m}} \cos\left(d_\theta^R\left(\boldsymbol{R}_{j,m}, \boldsymbol{R}_m^i\boldsymbol{R}_j^{\mathrm{T}}\right)\right)$计算$\mathcal{E}_{1,m}$中各边的选边奖励
  - 通过$e_{i^*,m} = \arg\max\left\{r_m^i \middle| e_{i,m} \in \mathcal{E}_{1m}\right\}$获取$v_m$的主导边与对应的选边奖励$r_m^{i^*}$



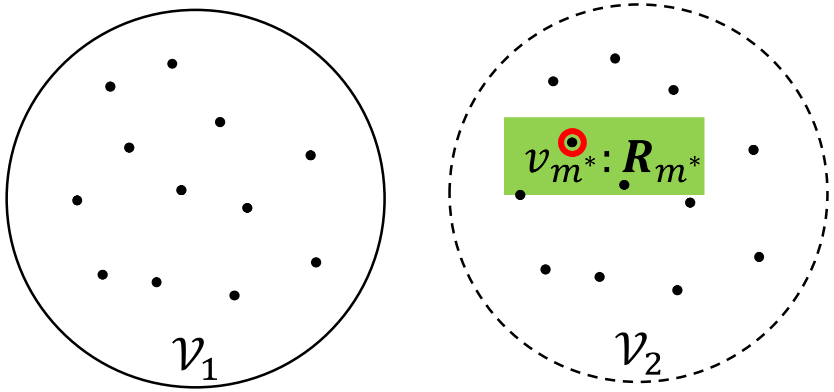
旋转平均化（Rotation Averaging, RA）

- IRA下一最优视图（Next Best View, NBV）选取与初始化
  - $\mathcal{V}_1$与$\mathcal{V}_2$：当前已估计与未估计绝对旋转的顶点集合，可知$\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2 = \mathcal{V}$
  - $\mathcal{E}_{1,m}$：$\mathcal{V}_2$中一顶点v_m与$\mathcal{V}_1$中所有顶点之间的边集
  - 对$\mathcal{E}_{1,m}$中的每一条边$e_{i,m}$通过$\boldsymbol{R}_m^i = \boldsymbol{R}_{i,m}\boldsymbol{R}_i$预计算顶点$v_m$的绝对旋转
  - 通过$r_m^i = \sum_{e_{j,m} \in \mathcal{E}_{1,m}} \cos\left(d_\theta^R\left(\boldsymbol{R}_{j,m}, \boldsymbol{R}_m^i \boldsymbol{R}_j^{\mathrm{T}}\right)\right)$计算$\mathcal{E}_{1,m}$中各边的选边奖励
  - 通过$e_{i^*,m} = \arg\max\{r_m^i | e_{i,m} \in \mathcal{E}_{1m}\}$获取$v_m$的主导边与对应的选边奖励$r_m^{i^*}$
  - 通过$v_{m^*} = \arg\max\{r_m^{i^*} | v_m \in \mathcal{V}_2\}$与$\boldsymbol{R}_{m^*} = \boldsymbol{R}_{i^*,m^*}\boldsymbol{R}_{i^*}$**选取与初始化**下一最优视图



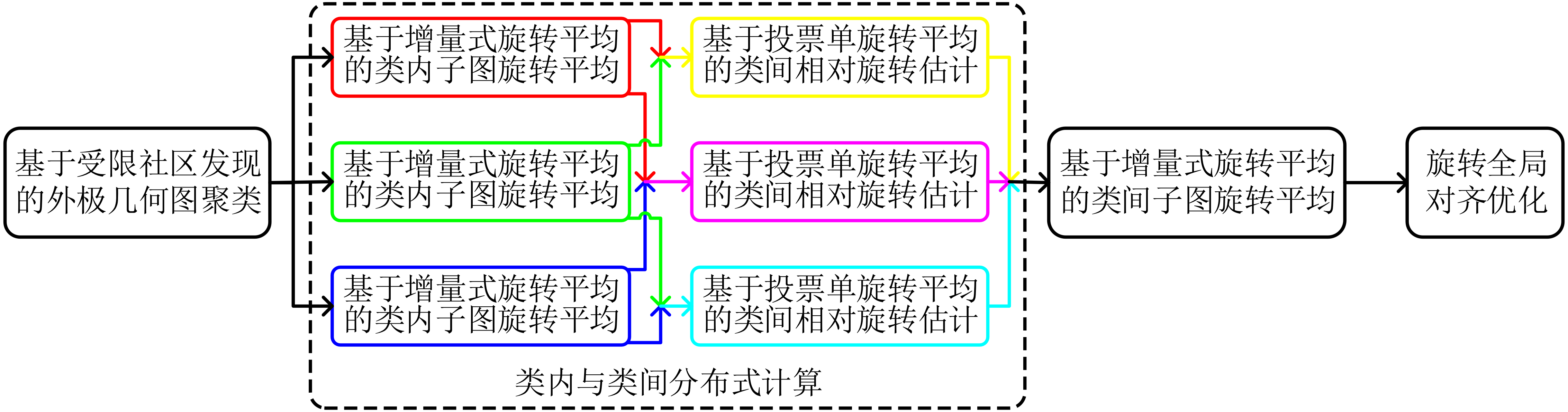
旋转平均化（Rotation Averaging, RA）

- IRA下一最优视图（Next Best View, NBV）选取与初始化
  - $\mathcal{V}_1$与$\mathcal{V}_2$：当前已估计与未估计绝对旋转的顶点集合，可知$\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2 = \mathcal{V}$
  - $\mathcal{E}_{1,m}$：$\mathcal{V}_2$中一顶点v_m与$\mathcal{V}_1$中所有顶点之间的边集
  - 对$\mathcal{E}_{1,m}$中的每一条边$e_{i,m}$通过$\boldsymbol{R}_m^i = \boldsymbol{R}_{i,m}\boldsymbol{R}_i$预计算顶点$v_m$的绝对旋转
  - 通过$r_m^i = \sum_{e_{j,m} \in \mathcal{E}_{1,m}} \cos\left(d_\theta^R\left(\boldsymbol{R}_{j,m}, \boldsymbol{R}_m^i \boldsymbol{R}_j^{\mathrm{T}}\right)\right)$计算$\mathcal{E}_{1,m}$中各边的选边奖励
  - 通过$e_{i^*,m} = \arg\max\{r_m^i | e_{i,m} \in \mathcal{E}_{1m}\}$获取$v_m$的主导边与对应的选边奖励$r_m^{i^*}$
  - 通过$v_{m^*} = \arg\max\{r_m^{i^*} | v_m \in \mathcal{V}_2\}$与$\boldsymbol{R}_{m^*} = \boldsymbol{R}_{i^*,m^*}\boldsymbol{R}_{i^*}$**选取与初始化**下一最优视图



旋转平均化（Rotation Averaging, RA）

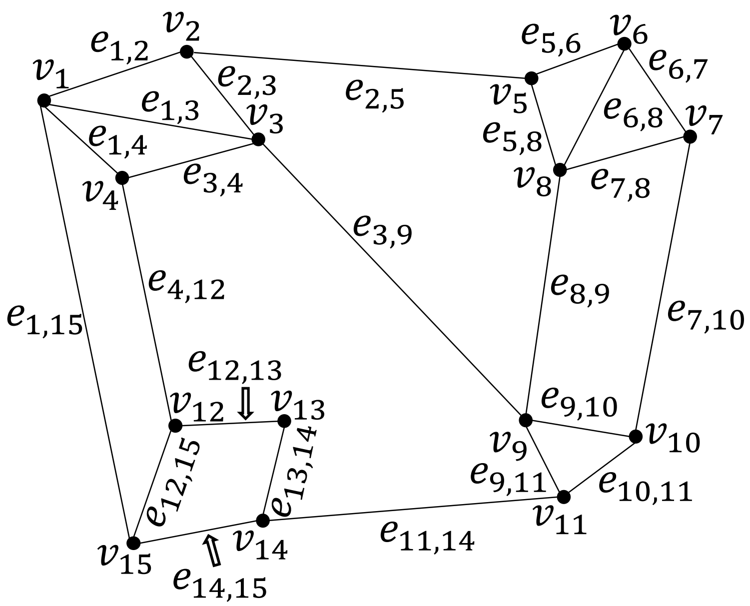
- 分布增量式旋转平均化（Distributed Incremental Rotation Averaging, IRA++）
  - 解决IRA因其固有的增量式参数估计流程在面向大规模旋转平均化时的**累积误差**与**计算效率**问题



By X. Gao

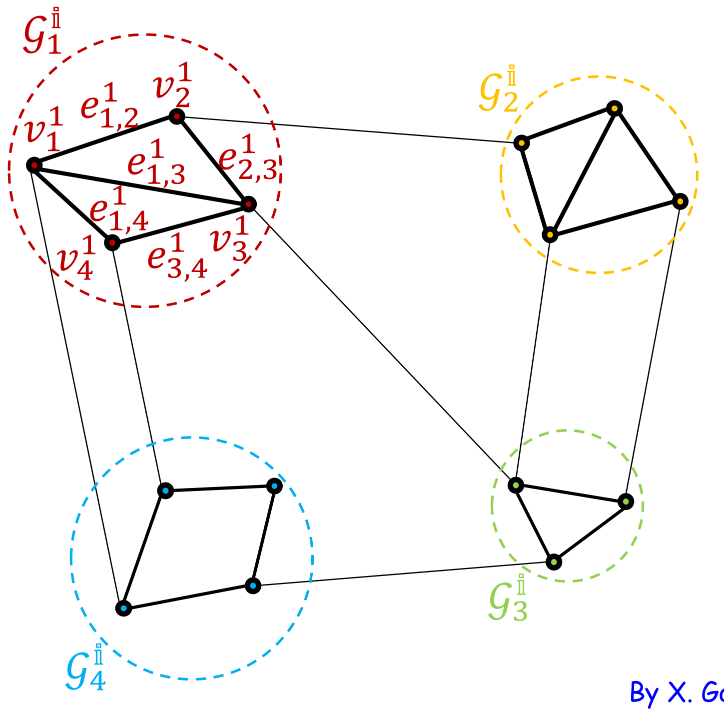
旋转平均化（Rotation Averaging, RA）

- 分布增量式旋转平均化（Distributed Incremental Rotation Averaging, IRA++）
  - 原始外极几何图：
    - $\mathcal{G}=\{\mathcal{V},\mathcal{E}\},\mathcal{V}=\{v_i\},\mathcal{E}=\{e_{i,j}\}$



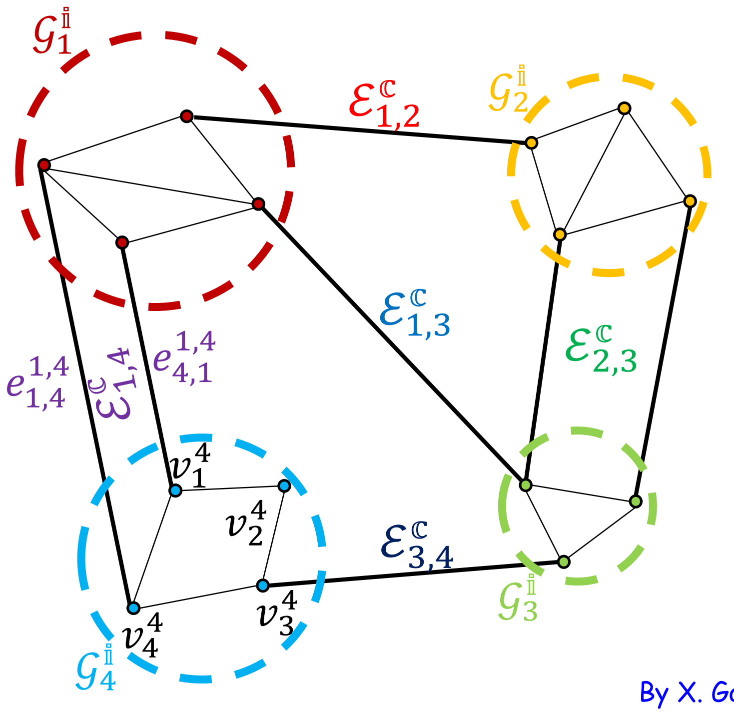
旋转平均化（Rotation Averaging, RA）

- 分布增量式旋转平均化（Distributed Incremental Rotation Averaging, IRA++）
  - 原始外极几何图
  - 基于社区发现的外极几何图聚类：
    - 类内子图：$\left\{\mathcal{G}_p^{\mathbb{i}} = \{\mathcal{V}_p^{\mathbb{i}}, \mathcal{E}_p^{\mathbb{i}}\}\right\}, \mathcal{V}_p^{\mathbb{i}} = \{v_m^p\}, \mathcal{E}_p^{\mathbb{i}} = \{e_{m,n}^p\}$



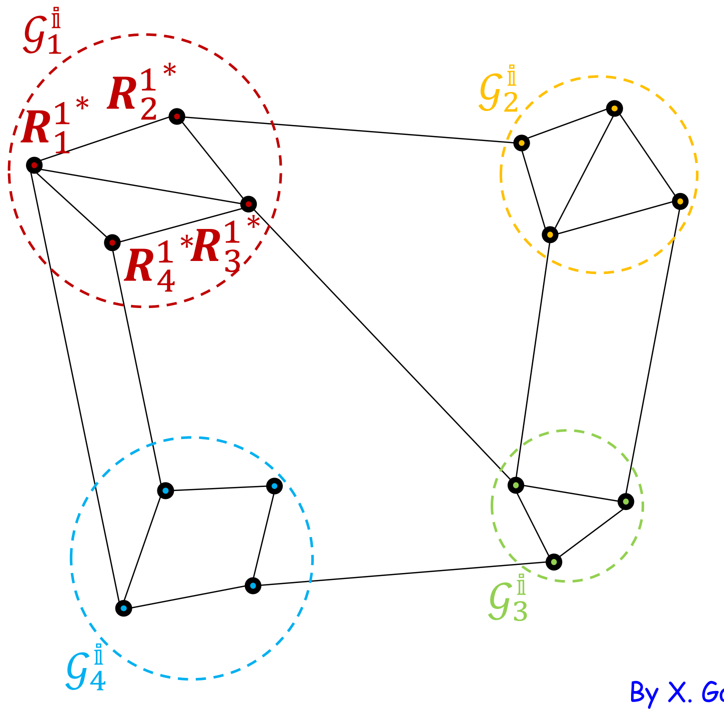
旋转平均化（Rotation Averaging, RA）

- 分布增量式旋转平均化（Distributed Incremental Rotation Averaging, IRA++）
  - 原始外极几何图
  - 基于社区发现的外极几何图聚类：
    - 类内子图：$\left\{\mathcal{G}_p^{\mathbb{i}} = \{\mathcal{V}_p^{\mathbb{i}}, \mathcal{E}_p^{\mathbb{i}}\}\right\}, \mathcal{V}_p^{\mathbb{i}} = \{v_m^p\}, \mathcal{E}_p^{\mathbb{i}} = \{e_{m,n}^p\}$
    - 类间子图：$\mathcal{G}^{\mathbb{C}} = \{\mathcal{V}^{\mathbb{C}}, \mathcal{E}^{\mathbb{C}}\}, \mathcal{V}^{\mathbb{C}} = \{\mathcal{G}_p^{\mathbb{i}}\}, \mathcal{E}^{\mathbb{C}} = \{\mathcal{E}_{p,q}^{\mathbb{C}}\} = \left\{\{e_{m,n}^{p,q}\}\right\}$



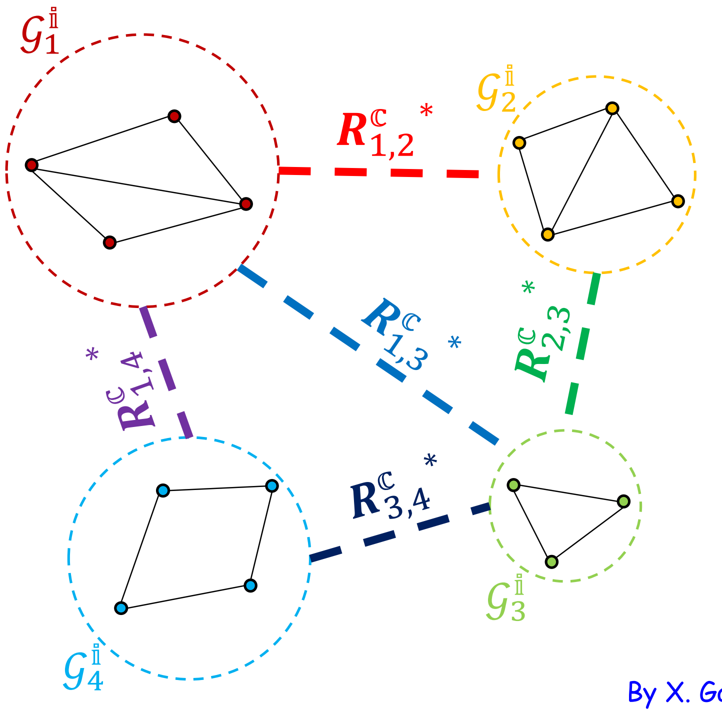
旋转平均化（Rotation Averaging, RA）

- 分布增量式旋转平均化（Distributed Incremental Rotation Averaging, IRA++）
  - 原始外极几何图
  - 基于社区发现的外极几何图聚类
  - 基于IRA的类内旋转平均化：
    - $\left\{\boldsymbol{R}_{m,n}^{p} \middle| e_{m,n}^{p} \in \mathcal{E}_{p}^{\mathbb{i}}\right\} \Rightarrow \left\{\boldsymbol{R}_{m}^{p\,*} \middle| v_{m}^{p} \in \mathcal{V}_{p}^{\mathbb{i}}\right\}$



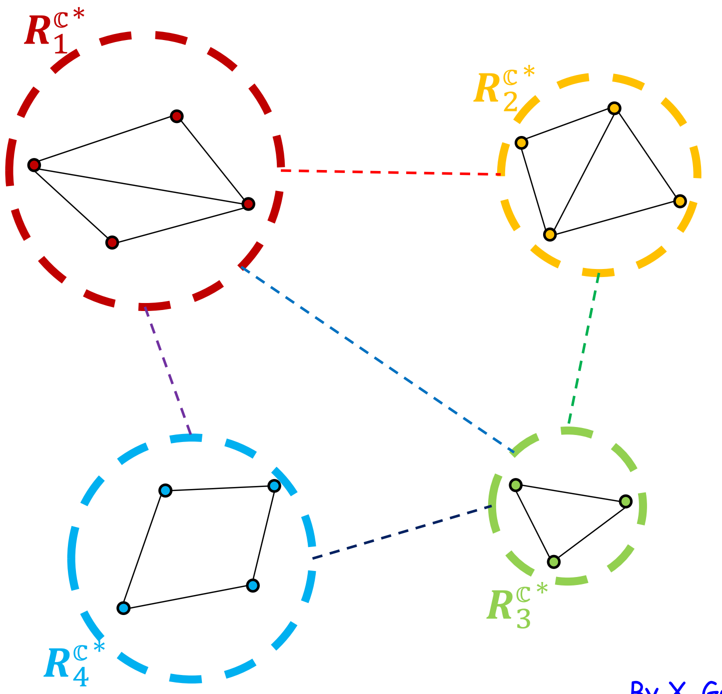
旋转平均化（Rotation Averaging, RA）

- 分布增量式旋转平均化（Distributed Incremental Rotation Averaging, IRA++）
  - 原始外极几何图
  - 基于社区发现的外极几何图聚类
  - 基于IRA的类内旋转平均化
  - 基于单旋转平均化的类间相对旋转估计：
    - $\{\boldsymbol{R}_{m,n}^{p,q} | e_{m,n}^{p,q} \in \mathcal{E}_{p,q}\} \Rightarrow \{\boldsymbol{R}_{p,q}^{\mathbb{C}}{}^{*} | \mathcal{E}_{p,q}^{\mathbb{C}} \in \mathcal{E}^{\mathbb{C}}\}$



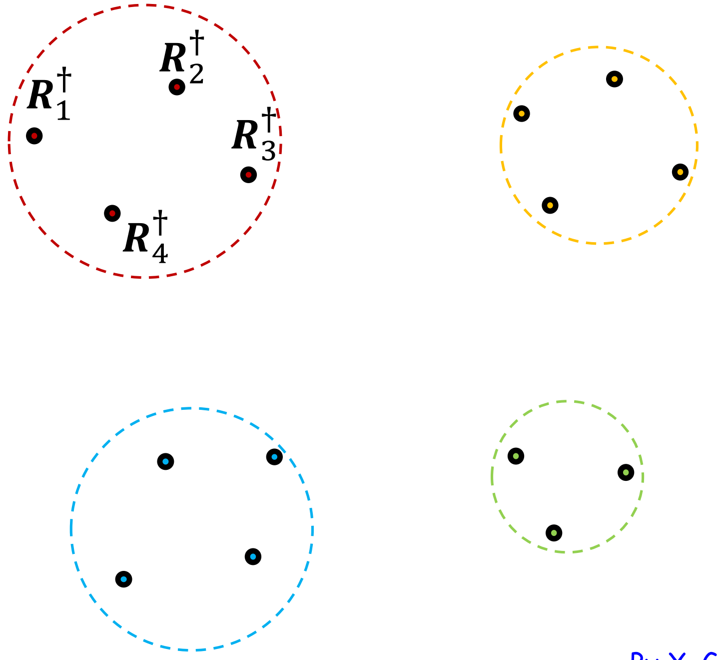
旋转平均化（Rotation Averaging, RA）

- 分布增量式旋转平均化（Distributed Incremental Rotation Averaging, IRA++）
  - 原始外极几何图
  - 基于社区发现的外极几何图聚类
  - 基于IRA的类内旋转平均化
  - 基于单旋转平均化的类间相对旋转估计
  - 基于IRA的类间旋转平均化：
    - $\left\{ \boldsymbol{R}_{p,q}^{\mathbb{C}}{}^{*} \middle| \mathcal{E}_{p,q}^{\mathbb{C}} \in \mathcal{E}^{\mathbb{C}} \right\} \Rightarrow \left\{ \boldsymbol{R}_{p}^{\mathbb{C}}{}^{*} \middle| \mathcal{G}_{p}^{\mathbb{i}} \in \mathcal{V}^{\mathbb{C}} \right\}$



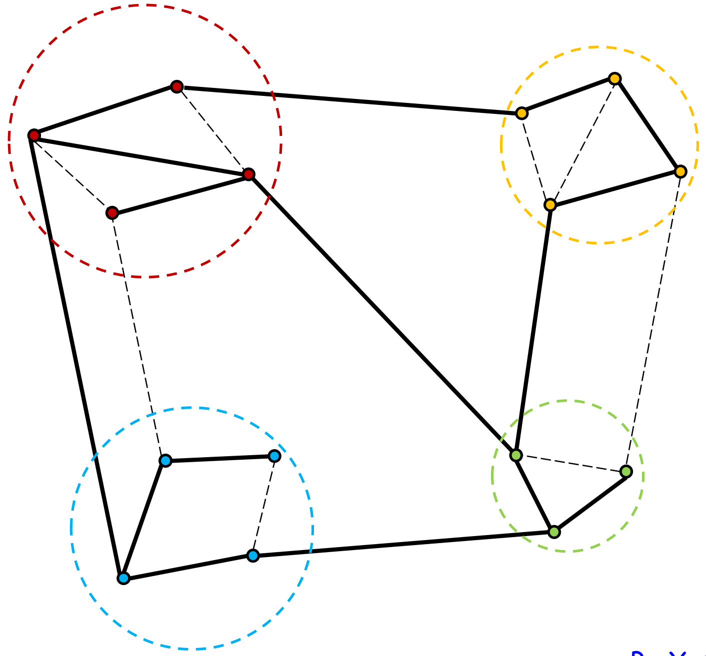
旋转平均化（Rotation Averaging, RA）

- 分布增量式旋转平均化（Distributed Incremental Rotation Averaging, IRA++）
  - 原始外极几何图
  - 基于社区发现的外极几何图聚类
  - 基于IRA的类内旋转平均化
  - 基于单旋转平均化的类间相对旋转估计
  - 基于IRA的类间旋转平均化
  - 绝对旋转全局对齐与优化：
    - 全局对齐：$\boldsymbol{R}_i^{\dagger} = \boldsymbol{R}_m^{p\,*} \boldsymbol{R}_p^{\mathbb{C}\,*}$



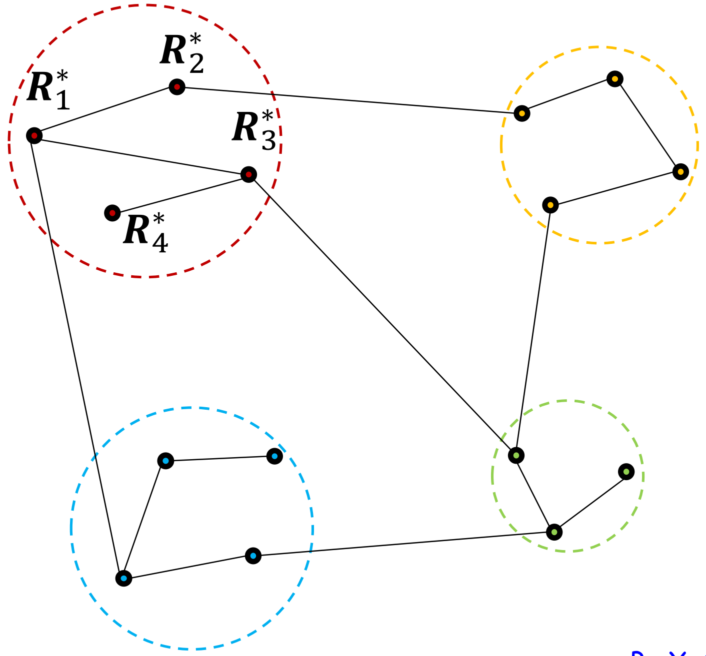
旋转平均化（Rotation Averaging, RA）

- 分布增量式旋转平均化（Distributed Incremental Rotation Averaging, IRA++）
  - 原始外极几何图
  - 基于社区发现的外极几何图聚类
  - 基于IRA的类内旋转平均化
  - 基于单旋转平均化的类间相对旋转估计
  - 基于IRA的类间旋转平均化
  - 绝对旋转全局对齐与优化：
    - 全局对齐：$\boldsymbol{R}_i^{\dagger} = \boldsymbol{R}_m^{p\,*} \boldsymbol{R}_p^{\mathbb{C}\,*}$
    - 内值计算：$\mathcal{E}^{\mathbb{I}} = \left\{ d_\theta^{\boldsymbol{R}} \left(\boldsymbol{R}_{i,j}, \boldsymbol{R}_j^{\dagger} \boldsymbol{R}_i^{\dagger\,\mathrm{T}} \right) < \theta_{th}^{\boldsymbol{R}} \right\}$ for $v_i, v_j \in \mathcal{V}, e_{i,j} \in \mathcal{E}$



旋转平均化（Rotation Averaging, RA）

- 分布增量式旋转平均化（Distributed Incremental Rotation Averaging, IRA++）
  - 原始外极几何图
  - 基于社区发现的外极几何图聚类
  - 基于IRA的类内旋转平均化
  - 基于单旋转平均化的类间相对旋转估计
  - 基于IRA的类间旋转平均化
  - 绝对旋转全局对齐与优化：
    - 全局对齐：$\boldsymbol{R}_i^{\dagger} = \boldsymbol{R}_m^{p\ *} \boldsymbol{R}_p^{\mathbb{C}\ *}$
    - 内值计算：$\mathcal{E}^{\mathbb{I}} = \left\{ d_\theta^{\boldsymbol{R}} \left(\boldsymbol{R}_{i,j}, \boldsymbol{R}_j^{\dagger} \boldsymbol{R}_i^{\dagger\,\mathrm{T}} \right) < \theta_{th}^{\boldsymbol{R}} \right\}$ for $v_i, v_j \in \mathcal{V}, e_{i,j} \in \mathcal{E}$
    - 全局优化：$\{\boldsymbol{R}_i^*\} = \arg\min \sum_{\substack{v_i, v_j \in \mathcal{V} \\ e_{i,j}^{\mathbb{I}} \in \mathcal{E}^{\mathbb{I}}}} d_\theta^{\boldsymbol{R}} \left(\boldsymbol{R}_{i,j}^{\mathbb{I}}, \boldsymbol{R}_j \boldsymbol{R}_i^{\mathrm{T}} \right)^2$



旋转平均化（Rotation Averaging, RA）

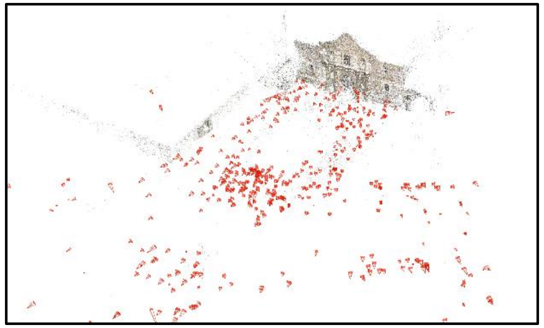
- 实验数据：1DSfM

	$\|\mathcal{V}\|$	$\|\mathcal{V}_{\mathrm{GT}}\|$	$\|\mathcal{E}\|$	$\tilde{n}_{i,j}$	$\bar{n}_{i,j}$	$\tilde{r}^{\boldsymbol{R}}_{i,j}$	$\bar{r}^{\boldsymbol{R}}_{i,j}$	$\tilde{r}^{\boldsymbol{t}}_{i,j}$	$\bar{r}^{\boldsymbol{t}}_{i,j}$
ALM	627	577	97206	105	192	2.78°	9.09°	4.65°	18.80°
ELS	247	227	20297	106	160	2.89°	12.50°	8.75°	36.66°
GDM	742	677	48144	73	144	12.30°	33.33°	26.87°	52.65°
MDR	394	341	23784	61	128	9.34°	29.30°	13.46°	36.30°
MND	474	450	52424	180	310	1.67°	7.51°	3.33°	18.61°
NYC	376	332	20680	80	167	4.22°	14.14°	7.18°	28.86°
PDP	354	338	24710	87	128	1.81°	8.38°	3.07°	21.75°
PIC	2508	2152	319257	56	97	4.93°	19.09°	2.92°	7.71°
ROF	1134	1084	70187	65	188	2.97°	13.83°	4.01°	30.19°
TOL	508	472	23863	81	220	2.60°	11.58°	2.63°	19.92°
TFG	5433	5058	680012	71	109	3.01°	8.62°	6.56°	23.67°
USQ	930	789	25561	87	150	3.61°	9.02°	20.32°	43.22°
VNC	918	836	103550	229	408	2.59°	11.26°	4.24°	24.47°
YKM	458	437	27729	112	245	2.68°	11.16°	3.40°	21.20°

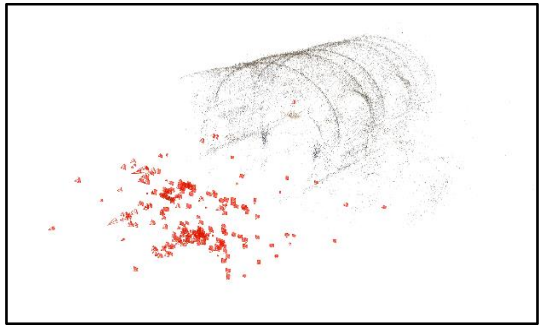
- $|\mathcal{V}|$，$|\mathcal{E}|$，$|\mathcal{V}_{\mathrm{GT}}|$：外极几何图顶点数与边数以及带有真值的顶点数
- $\tilde{n}_{i,j}$，$\bar{n}_{i,j}$：匹配图像对之间的图像局部特征匹配对数的中值与均值
- $\tilde{r}^{\boldsymbol{R}}_{i,j}$，$\bar{r}^{\boldsymbol{R}}_{i,j}$：匹配图像对之间的相对旋转测量值的角度误差中值与均值
- $\tilde{r}^{\boldsymbol{t}}_{i,j}$，$\bar{r}^{\boldsymbol{t}}_{i,j}$：匹配图像对之间的相对平移测量值的角度误差中值与均值

旋转平均化（Rotation Averaging, RA）

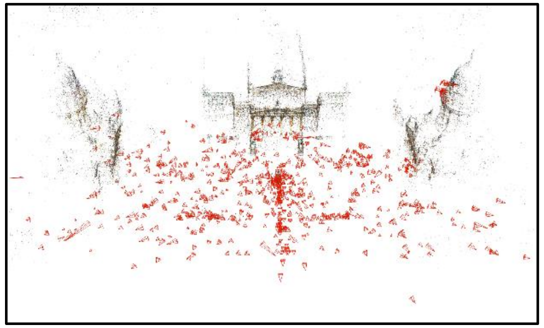
- 实验数据：1DSfM



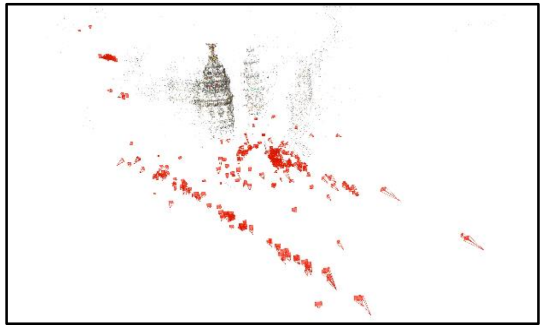
ALM



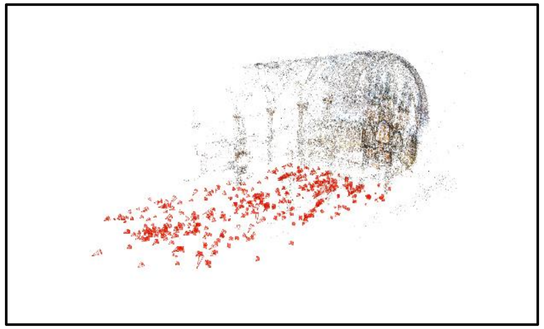
ELS



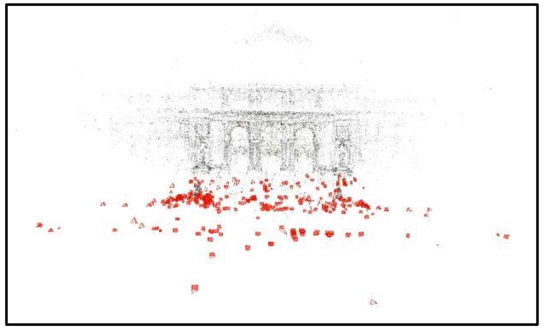
GDM



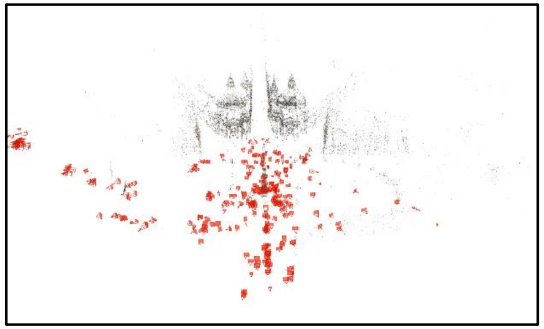
MDR



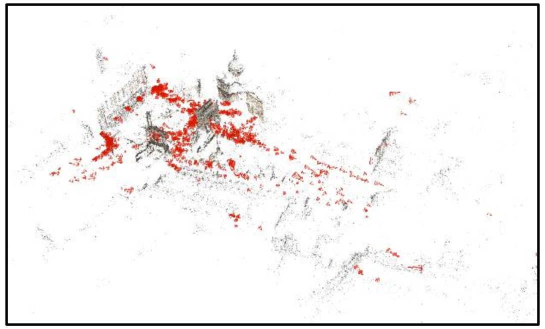
MND



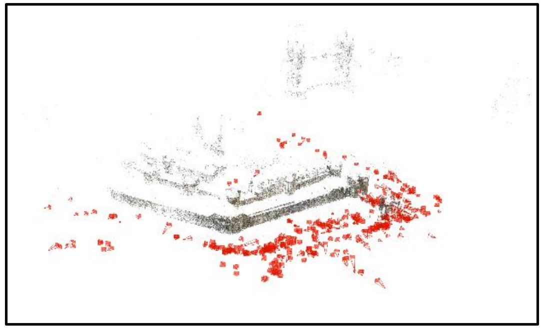
NYC



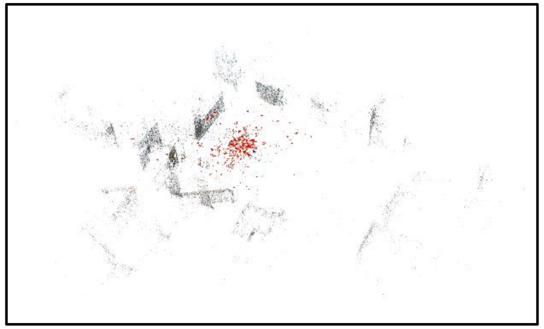
PDP



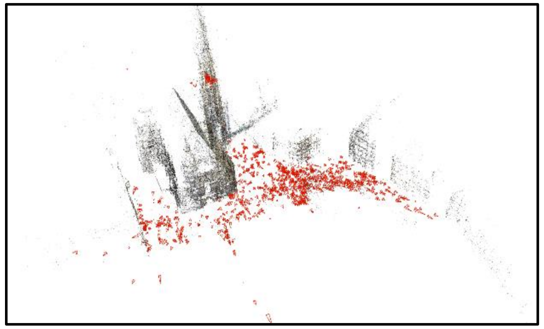
ROF



TOL



USQ

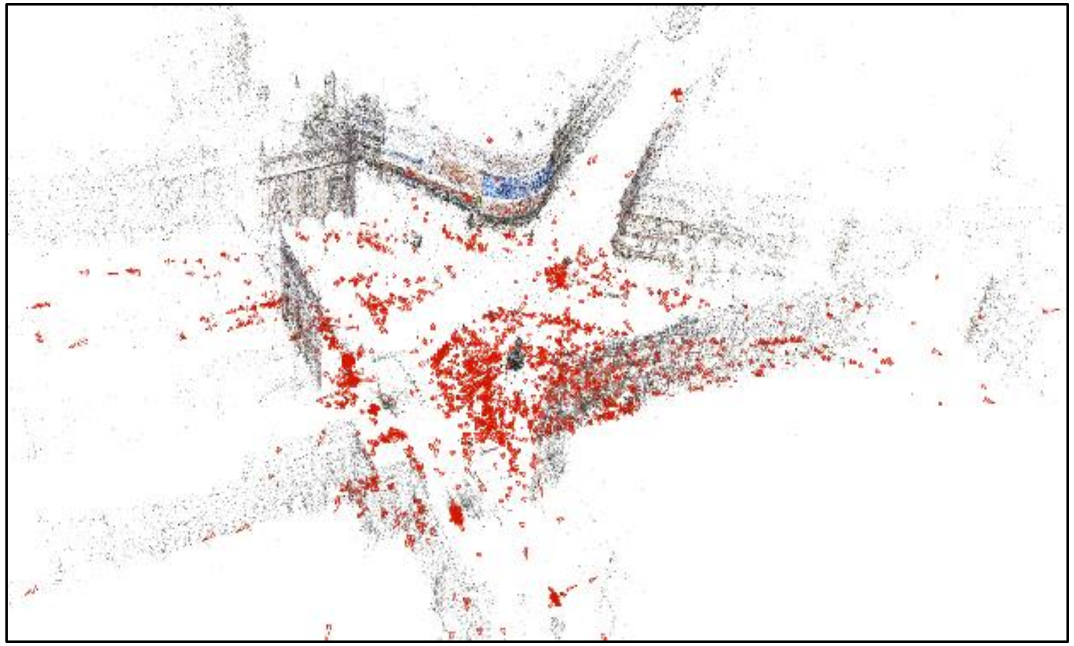


PDP

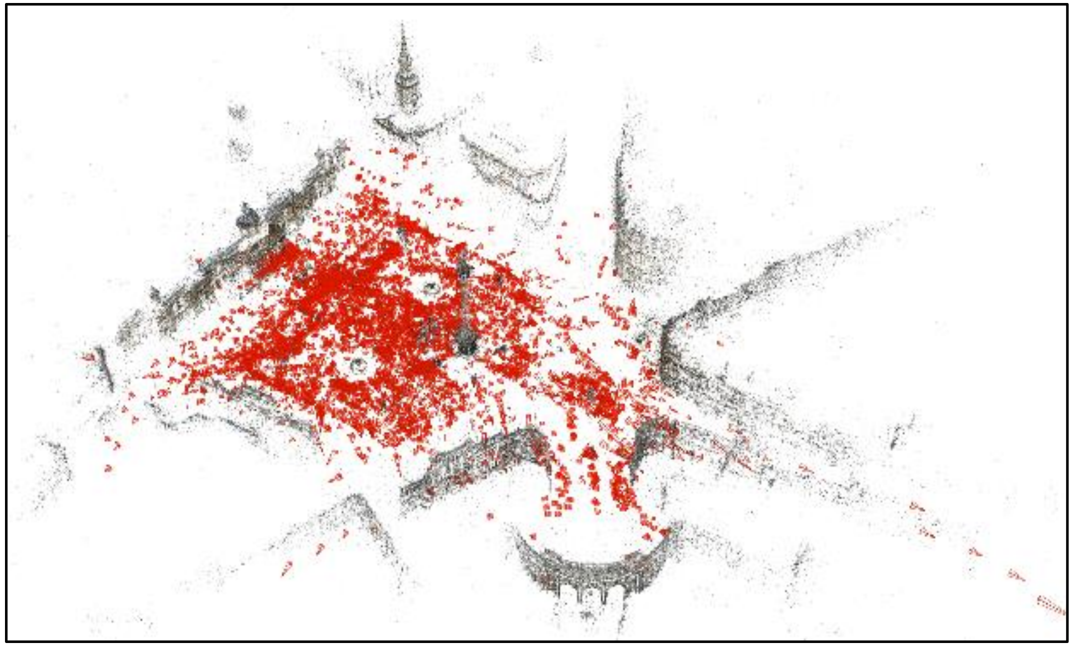
ROF

旋转平均化（Rotation Averaging, RA）

- 实验数据：1DSfM



PIC



TFG

旋转平均化（Rotation Averaging, RA）

- 实验结果

Data	IRLS-GM[1]	IRLS-$\ell_{\frac{1}{2}}$[2]	MPLS[3]	HIRLS-$\ell_{\frac{1}{2}}$	OMSTs[4]	HRRA[5]	IRA[6]	NeuRoRA[7]	MSPRA[8]	IRA++[9]
ALM	2.12°	2.14°	1.16°	1.10°	1.26°	1.03°	0.83°	1.16°	1.07°	0.80°
ELS	1.08°	1.15°	0.88°	0.98°	0.75°	0.59°	0.51°	0.64°	0.83°	0.46°
GDM	35.83°	28.20°	9.87°	3.36°	45.15°	4.04°	5.32°	2.94°	3.69°	2.88°
MDR	4.52°	3.08°	1.26°	1.21°	1.12°	2.54°	0.85°	1.13°	1.09°	0.83°
MND	0.77°	0.71°	0.51°	0.66°	0.68°	0.62°	0.51°	0.60°	0.50°	0.50°
NYC	1.43°	1.40°	1.24°	1.21°	1.30°	1.24°	1.00°	1.18°	1.12°	0.95°
PDP	2.16°	2.62°	1.93°	1.10°	1.73°	0.92°	0.90°	0.79°	0.76°	0.75°
PIC	4.14°	3.12°	1.81°	2.86°	1.41°	4.87°	1.67°	1.91°	1.80°	1.70°
ROF	1.62°	1.70°	1.37°	1.40°	1.85°	2.48°	1.51°	1.31°	1.19°	1.24°
TOL	2.59°	2.45°	2.20°	2.22°	2.10°	2.05°	2.45°	1.46°	1.25°	1.33°
TFG	1.94°	2.03°	—	1.81°	2.63°	4.88°	3.30°	2.25°	—	1.74°
USQ	4.93°	4.97°	3.48°	3.64°	3.83°	3.77°	4.40°	2.01°	1.85°	3.70°
VNC	4.87°	4.64°	2.83°	1.68°	3.30°	1.84°	1.02°	1.50°	1.10°	0.94°
YKM	1.70°	1.62°	1.45°	1.55°	1.55°	1.57°	1.57°	0.99°	0.91°	1.38°

[1] A. Chatterjee and V. M. Govindu. *Efficient and Robust Large-Scale Rotation Averaging*[C]. In Proc. ICCV, 2013.

[2] A. Chatterjee and V. M. Govindu. *Robust Relative Rotation Averaging*[J]. IEEE T-PAMI, 2018.

[3] Y. Shi and G. Lerman. *Message Passing Least Squares Framework and its Application to Rotation Synchronization*[C]. In Proc. ICML, 2020.

[4] H. Cui, et al. *Efficient and Robust Large-Scale Structure-from-Motion via Track Selection and Camera Prioritization*[J]. ISPRS P&RS, 2019.

[5] X. Gao, J. Luo, K. Li, and Z. Xie. *Hierarchical RANSAC-Based Rotation Averaging*[J]. IEEE SPL, 2020.

[6] X. Gao, L. Zhu, Z. Xie, H. Liu, and S. Shen. *Incremental Rotation Averaging*[J]. IJCV, 2021. IRA

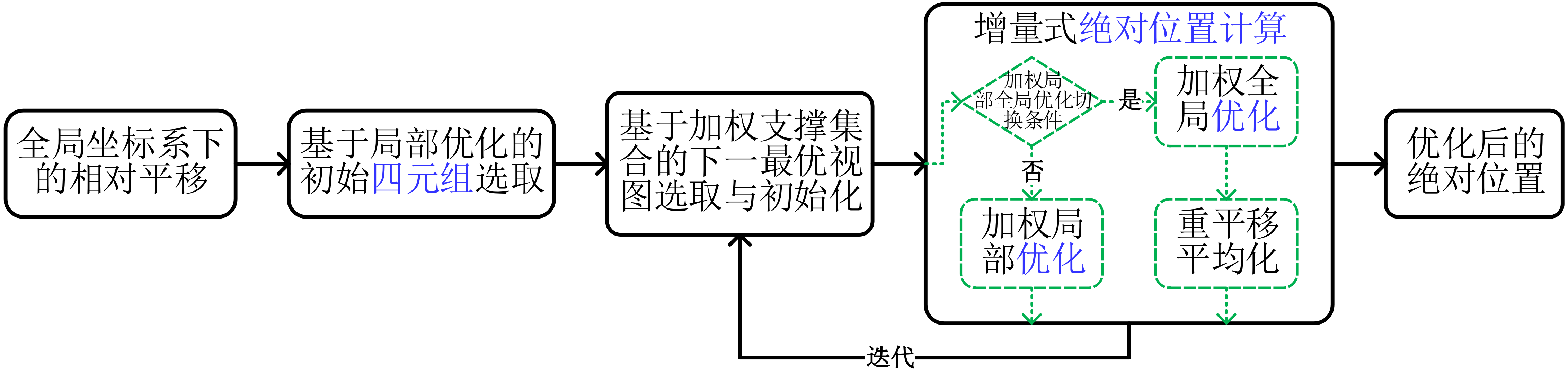
[7] P. Purkait, T. J. Chin, and I. Reid. *NeuRoRA: Neural Robust Rotation Averaging*[C]. In Proc. ECCV, 2020.

[8] L. Yang, H. Li, J. A. Rahim, Z. Cui, and P. Tan. *End-to-End Rotation Averaging with Multi-Source Propagation*[C]. In Proc. CVPR, 2021.

[9] X. Gao, L. Zhu, H. Cui, Z. Xie, and S. Shen. *IRA++: Distributed Incremental Rotation Averaging*[J]. IEEE T-CSVT, 2022. IRA++

平移平均化（Translation Averaging, TA）

- 增量式平移平均化（Incremental Translation Averaging, ITA）
  - IRA ⇒ ITA
    - 相机位置算子
    - 流程关键技术
    - 优化目标函数



平移平均化（Translation Averaging, TA）

- 增量式平移平均化（Incremental Translation Averaging, ITA）
  - IRA ⇒ ITA
    - 相机位置算子

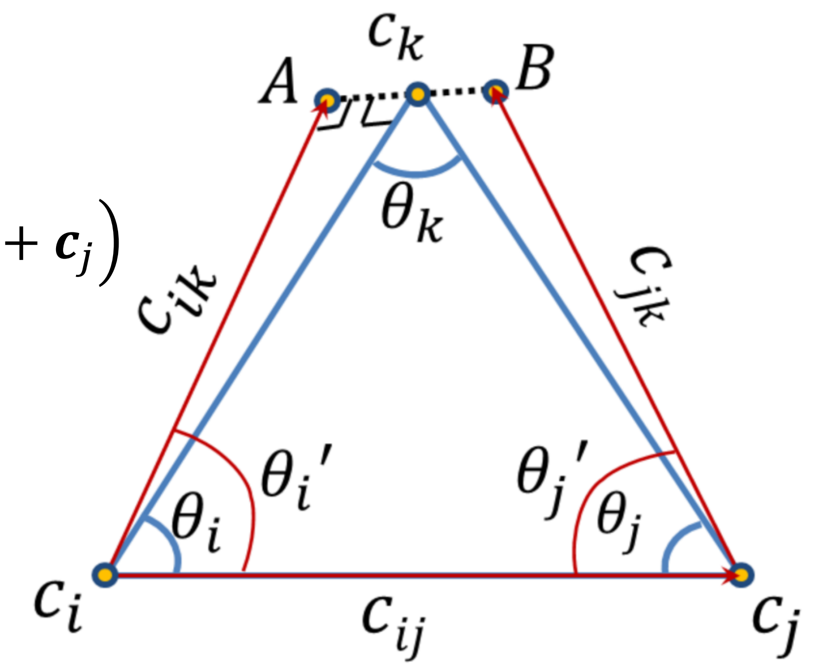
      IRA，已知$\boldsymbol{R}_i$、$\boldsymbol{R}_{i,j}$，求$\boldsymbol{R}_j$：

$$\boldsymbol{R}_j = \boldsymbol{R}_{i,j}\boldsymbol{R}_i$$

      ITA，已知$\boldsymbol{c}_i$、$\boldsymbol{c}_j$、$\boldsymbol{c}_{i,j}$、$\boldsymbol{c}_{i,k}$、$\boldsymbol{c}_{j,k}$，求$\boldsymbol{c}_k$：

$$\boldsymbol{c}_k = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{R}_i(\theta_i')s_{i,j}^{i,k}(\boldsymbol{c}_j - \boldsymbol{c}_i) + \boldsymbol{R}_j(-\theta_j')s_{i,j}^{j,k}(\boldsymbol{c}_i - \boldsymbol{c}_j) + \boldsymbol{c}_i + \boldsymbol{c}_j\right)$$

    - 流程关键技术
    - 优化目标函数



Jiang et al. In Proc. ICCV 2013

平移平均化（Translation Averaging, TA）

- 增量式平移平均化（Incremental Translation Averaging, ITA）
  - IRA ⇒ ITA
    - 相机位置算子
    - 流程关键技术

IRA，基于局部优化的初始三元组选取：

$$i^*, j^*, k^* = \arg\max \left\{ \sum_{\substack{v_i, v_j \in \mathcal{V}_{t_{i,j,k}} \\ e_{i,j} \in \mathcal{E}_{t_{i,j,k}}}} n_{i,j} \cos\left(d_\theta^{\boldsymbol{R}}\left(\boldsymbol{R}_{i,j}, \boldsymbol{R}_j^* \boldsymbol{R}_i^{*\mathrm{T}} \right) \right) \middle| t_{i,j,k} \in \mathcal{T}^* \right\}$$

ITA，基于局部优化的初始四元组选取：

$$i^*, j^*, k^*, l^* = \arg\max \left\{ \sum_{\substack{v_i, v_j \in \mathcal{V}_{q_{i,j,k,l}} \\ e_{i,j} \in \mathcal{E}_{q_{i,j,k,l}}}} \boldsymbol{c}_{i,j} \cdot \frac{\boldsymbol{c}_j^* - \boldsymbol{c}_i^*}{\left\| \boldsymbol{c}_j^* - \boldsymbol{c}_i^* \right\|_2} \middle| q_{i,j,k,l} \in \mathcal{Q}^* \right\}$$

- 优化目标函数

平移平均化（Translation Averaging, TA）

- 增量式平移平均化（Incremental Translation Averaging, ITA）
  - IRA ⇒ ITA
    - 相机位置算子
    - 流程关键技术
    - 优化目标函数

IRA，旋转矩阵角距离最小化：$\{\boldsymbol{R}_i^*\} = \arg\min \sum_{\substack{v_i,v_j\in\mathcal{V} \\ e_{i,j}\in\mathcal{E}}} d_\theta^{\boldsymbol{R}}\left(\boldsymbol{R}_{i,j}, \boldsymbol{R}_j\boldsymbol{R}_i^{\mathrm{T}}\right)^2$

ITA，位置向量弦距离最小化：$\{\boldsymbol{c}_i^*\} = \arg\min \sum_{\substack{v_i,v_j\in\mathcal{V} \\ e_{i,j}\in\mathcal{E}}} d_{ch}^{\boldsymbol{t}}\left(\boldsymbol{c}_{i,j}, \frac{\boldsymbol{c}_j-\boldsymbol{c}_i}{\|\boldsymbol{c}_j-\boldsymbol{c}_i\|_2}\right)^2$

平移平均化（Translation Averaging, TA）

- 增量式平移平均化（Incremental Translation Averaging, ITA）
  - 实验结果

Data	# reconstructed cameras|estimation error/m|elapsed time/s on different translation averaging methods							
	SATA[1]	VGO[2]	SFSK[3]	BATA[4]	ACEM[5]	Our ITA[6]	ITA w/ IRA	ITA w/ IRA*
ALM	574|0.5|78	533|1.4|69	–|0.9|27	–|0.6|24	482|1.2|172	575|0.5|17	577|0.5|17	523|0.4|10
ELS	223|2.5|37	203|3.7|19	–|1.9|4	–|1.5|2	211|6.1|87	230|1.3|2	227|1.1|2	224|1.0|2
MDR	317|2.7|31	272|8.7|67	–|6.0|9	–|1.8|4	168|6.9|23	339|7.0|3	336|6.5|4	294|1.5|2
MND	452|0.4|62	416|2.0|133	–|0.8|19	–|0.3|10	416|1.0|224	446|0.4|10	452|0.4|10	429|0.4|9
NYC	338|0.8|38	294|2.8|71	–|1.4|11	–|0.6|4	277|2.2|67	327|0.6|3	328|0.7|4	304|0.4|3
PDP	340|2.0|43	302|2.9|23	–|3.6|7	–|4.2|4	275|3.5|60	326|0.6|5	322|0.6|4	299|0.5|5
PIC	2276|1.3|328	1928|5.2|544	–|1.2|464	–|1.0|114	–|– |–	2199|1.8|381	2231|1.5|402	1929|0.7|268
ROF	1077|2.9|131	966|6.8|385	–|4.3|62	–|1.6|29	–|– |–	1062|2.3|28	1053|2.6|27	997|2.2|22
TOL	465|1.9|52	409|9.3|145	–|2.3|18	–|2.2|7	414|5.0|121	453|1.8|7	452|2.0|7	422|1.9|5
USQ	570|5.5|41	701|4.5|141	–|8.9|28	–|4.3|10	–|– |–	703|5.6|8	697|5.3|9	588|3.0|6
VNC	842|2.7|117	771|6.7|185	–|1.9|74	–|1.9|30	674|4.2|273	783|1.0|27	778|1.2|26	720|0.8|17
YKM	417|2.3|46	409|3.9|31	–|– |–	–|0.9|9	341|2.7|91	414|0.8|5	411|0.8|6	385|0.7|6

[1] Z. Cui and P. Tan. *Global Structure-from-Motion by Similarity Averaging*[C]. In Proc. ICCV, 2015.

[2] C. Sweeney, T. Sattler, T. Höllerer, M. Turk, and M. Pollefeys. *Optimizing the Viewing Graph for Structure-from-Motion*[C]. In Proc. ICCV, 2015.

[3] T. Goldstein, P. Hand, C. Lee, V. Voroninski, and S. Soatto. *ShapeFit and ShapeKick for Robust, Scalable Structure from Motion*[C]. In Proc. ECCV, 2016.

[4] B. Zhuang, L. Cheong, and G. H. Lee. *Baseline Desensitizing in Translation Averaging*[C]. In Proc. CVPR, 2018.

[5] Y. Kasten, A. Geifman, M. Galun, and R. Basri. *Algebraic Characterization of Essential Matrices and Their Averaging in Multiview Settings*[C]. In Proc. ICCV, 2019.

[6] X. Gao, L. Zhu, B. Fan, H. Liu, and S. Shen. *Incremental Translation Averaging*[J]. IEEE T-CSVT, 2022. ITA

总结展望

- 总结
  - 增量式旋转平均化：IRA
  - 分布增量式旋转平均化：IRA++
  - 增量式平移平均化：ITA
- 展望
  - 分布增量式旋转平均化 ⇒ **动态**分布增量式旋转平均化
  - 增量式平移平均化 ⇒ **分布**增量式平移平均化
  - 增量式平移平均化 ⇒ 增量式**尺度**平均化 + **尺度已知**的增量式平移平均化

相关成果

[1] **X. Gao**, L. Zhu, Z. Xie, H. Liu, and S. Shen. *Incremental Rotation Averaging*[J]. IJCV, 2021.

[2] **X. Gao**, L. Zhu, H. Cui, Z. Xie, and S. Shen. *IRA++: Distributed Incremental Rotation Averaging*[J]. IEEE T-CSVT, 2022.

[3] **X. Gao**, L. Zhu, B. Fan, H. Liu, and S. Shen. *Incremental Translation Aver*aging[J]. IEEE T-CSVT, 2022.

[4] **X. Gao**, et al. *Ancient Chinese Architecture 3D Preservation by Merging Ground and Aerial Point Clouds*[J]. ISPRS P&RS, 2018.

[5] **X. Gao**, et al. *Complete Scene Reconstruction by Merging Images and Laser Scans*[J]. IEEE T-CSVT, 2020.

[6] **X. Gao**, L. Hu, H. Cui, S. Shen, and Z. Hu. *Accurate and Efficient Ground-to-Aerial Model Alignment*[J]. PR, 2018.

[7] **X. Gao**, J. Luo, K. Li, and Z. Xie. *Hierarchical RANSAC-Based Rotation Averagi*ng[J]. IEEE SPL, 2020.

[8] H. Cui, **X, Gao**, S. Shen, and Z. Hu. *HSfM: Hybrid Structure-from-Motion*[C]. In Proc. CVPR, 2017.

[9] Q. Dong, **X. Gao**, H. Cui, and Z. Hu. *Robust Camera Translation Estimation via Rank Enforcement*[J]. IEEE T-CYB, 2022

谢 谢

高 翔

中国海洋大学工程学院

电子邮箱：xgao@ouc.edu.cn

个人主页：https://ouc-xgao.github.io/