SPAZI VETTORIALI $\mathbf{R}^n$

Fissato un intero positivo n, sia $\mathbf{R}^n$ l'insieme delle n-uple ordinate di numeri reali : un elemento $\mathbf{v}$ di $\mathbf{R}^n$ è costituito da n numeri reali $(x_1, \cdots x_n)$, che chiameremo componenti del vettore $\mathbf{v}$. A seconda dei casi identificheremo $\mathbf{v}$ come vettore riga o come vettore colonna, ossia identificheremo $\mathbf{R}^n$ con $\mathbf{R}^{1,n}$ e con $\mathbf{R}^{n,1}$.

Definiamo un'operazione di somma tra due elementi di $\mathbf{R}^n$:

$$(x_1, \cdots x_n) + (y_1, \cdots y_n) = (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n)$$

e un'operazione di prodotto per un numero reale k:

$$k(x_1, \cdots x_n) = (kx_1, \cdots kx_n)$$

È facile verificare, utilizzando le proprietà di calcolo dei numeri reali, che in $\mathbf{R}^n$, dotato di queste operazioni, valgono le seguenti

Proprietà

1) $\mathbf{u} + \mathbf{v}$=$\mathbf{v} + \mathbf{u}$

2) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$=$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$

3) esiste un elemento $\mathbf{0} \in \mathbf{R}^n$ tale che $\mathbf{v} + \mathbf{0}$=$\mathbf{v}$, per ogni vettore $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$

4) per ogni $\mathbf{v}$ diverso dal vettore $\mathbf{0}$, esiste il vettore $-\mathbf{v}$ tale che $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$

1) $a(b\mathbf{v}) = (ab)\mathbf{v}$ per ogni a, b reali

2) $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$

3) $(a + b)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v}$

4) $a(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = a\mathbf{v} + a\mathbf{w}$

Definizione. Diciamo che $\mathbf{R}^n$ è dotato di una struttura di **spazio vettoriale** su $\mathbf{R}$, in quanto abbiamo definito in $\mathbf{R}^n$ le operazioni di somma e di prodotto per un numero reale che godono delle proprietà sopra elencate.

Sottospazi vettoriali

Definizione. Un sottoinsieme V di $\mathbf{R}^n$ si dice **sottospazio vettoriale** se non è vuoto ed è chiuso rispetto alle operazioni di somma e di prodotto per un numero reale, ossia:

1 - $V \neq \Phi$

2 - per ogni coppia di vettori $\mathbf{u} \in V$ e $\mathbf{v} \in V$, risulta $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$

3 - per ogni vettore $\mathbf{u} \in V$ e ogni numero $k \in \mathbf{R}$, risulta $k\mathbf{u} \in V$

Osservazione. Dalla definizione segue che

(a) ogni sottospazio vettoriale acquisisce da $\mathbf{R}^n$ una struttura di spazio vettoriale;

(b) ogni sottospazio vettoriale contiene il vettore nullo, infatti se $\mathbf{v} \in V$, anche $(-1)\mathbf{v} \in V$ e $\mathbf{0} = \mathbf{v} + (-1)\mathbf{v} \in V$; osserviamo però che, se un insieme contiene il vettore nullo, non è necessariamente un sottospazio, come mostra il seguente esempio 2).

Esempi.

1) Sono sottospazi vettoriali di $\mathbf{R}^n$ il sottospazio costituito dal solo vettore nullo : $V = \{\mathbf{0}\}$, che si dice sottospazio nullo e lo spazio $\mathbf{R}^n$. Questi due sottospazi sono detti impropri, mentre tutti gli altri si dicono sottospazi propri.

2) I seguenti insiemi: $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | x \geq 0, y \geq 0\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | xy = 0\}$ non sono sottospazi di $\mathbf{R}^2$.

3) I sottospazi di $\mathbf{R}^2$ sono: $\mathbf{R}^2$, il sottospazio nullo (cioè l'origine) e tutte le rette passanti per l'origine; i sottospazi di $\mathbf{R}^3$ sono: $\mathbf{R}^3$, l'origine, tutte le rette passanti per l'origine e tutti i piani passanti per l'origine.

Procedimenti per costruire sottospazi vettoriali di $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$

Dati i vettori $\mathbf{v}_1, \cdots \mathbf{v}_k \in \mathbf{R}^n$, denotiamo con $\mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \cdots \mathbf{v}_k)$ l'insieme di tutte le combinazioni lineari $a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_k\mathbf{v}_k$ al variare dei coefficienti $a_1, \cdots a_k \in \mathbf{R}$.

Proposizione. Dati i vettori $\mathbf{v}_1, \cdots \mathbf{v}_k \in \mathbf{R}^n$, $\mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \cdots \mathbf{v}_k)$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^n$.

Dimostrazione. Ovviamente $\mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \cdots \mathbf{v}_k)$ non è vuoto; inoltre due elementi qualsiasi di $\mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \cdots \mathbf{v}_k)$ sono del tipo: $\mathbf{w}_1 = a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_k\mathbf{v}_k$, $\mathbf{w}_2 = b_1\mathbf{v}_1 + \cdots + b_k\mathbf{v}_k$. La loro somma è $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_k\mathbf{v}_k + b_1\mathbf{v}_1 + \cdots + b_k\mathbf{v}_k$; per le proprietà dello spazio vettoriale $\mathbf{R}^n$ si può scrivere $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = (a_1 + b_1)\mathbf{v}_1 + \cdots + (a_k + b_k)\mathbf{v}_k$ che per definizione appartiene a $\mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \cdots \mathbf{v}_k)$. Analogamente si dimostra che, per ogni $m \in \mathbf{R}$ e per ogni $\mathbf{w} \in \mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \cdots \mathbf{v}_k)$, anche $m\mathbf{w} \in \mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \cdots \mathbf{v}_k)$.

Definizione. I vettori $\mathbf{v}_1, \cdots \mathbf{v}_k \in \mathbf{R}^n$ si dicono i **generatori** di $\mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \cdots \mathbf{v}_k)$.

Esempio. Verificare che in $\mathbf{R}^3$ i sottospazi $\mathcal{L}((0, 2, 0), (0, 0, 1))$ e $\mathcal{L}((0, 2, 0), (0, 4, 0), (0, 0, 0), (0, 2, 1))$ coincidono.

Un altro modo per assegnare sottospazi vettoriali di $\mathbf{R}^n$ segue dalla:

Proposizione. Data $M \in \mathbf{R}^{m,n}$, l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $MX = \mathbf{0}$ è sottospazio di $\mathbf{R}^{n,1}$.

Dimostrazione.

1 - l'insieme non è vuoto, perchè c'è almeno la soluzione banale $\mathbf{0}$.

2 - se $Y, Z \in \mathbf{R}^{n,1}$ sono soluzioni del sistema, per proprietà del prodotto tra matrici si ha: $M(Y + Z) = MY + MZ = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

3 - se $Y \in \mathbf{R}^{n,1}$ è soluzione del sistema, per ogni $m \in \mathbf{R}$ per proprietà del prodotto tra matrici: $M(mY) = m(MY) = m\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Osservazione. Un analogo enunciato NON vale per le soluzioni di un sistema lineare non omogeneo. Consideriamo per esempio l'insieme $W = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 | x+y+z = 0\}$;è un sottospazio di $\mathbf{R}^3$, perchè è costituito dalle soluzioni di un sistema lineare omogeneo, (l'equazione $x+y+z = 0$), mentre $U = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 | x+y+z = 1\}$ non è un sottospazio, infatti basta osservare che non contiene il vettore nullo.

Indipendenza lineare, base e dimensione

Ricordiamo le:

Definizioni. (a)) I vettori $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k$ di $\mathbf{R}^n$ si dicono **linearmente indipendenti** se l'equazione:

$$x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

ha solo la soluzione $x_1 = \cdots = x_k = 0$.

(b) I vettori $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k$ si dicono **linearmente dipendenti** se non sono linearmente indipendenti, ossia se uno di essi si può esprimere come combinazione lineare degli altri, cioè se l'equazione

$$x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

non ha solo la soluzione $x_1 = \cdots = x_k = 0$.

Definizioni. Data una matrice $M \in \mathbf{R}^{m,n}$, diremo **spazio delle righe** di M (denotato con $R(M)$) il sottospazio vettoriale $\mathcal{L}(R_1, \cdots, R_m)$ di $\mathbf{R}^{1,n}$ generato dalle righe di M e diremo **spazio delle colonne** di M (denotato con $C(M)$) il sottospazio vettoriale $\mathcal{L}(C_1, \cdots, C_n)$ di $\mathbf{R}^{m,1}$ generato dalle colonne di M.

Definizione. Sia V un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^n$. Un insieme ordinato di vettori $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k) \in V$ si dice una **base** per V se:

1 - $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k$ sono linearmente indipendenti;

2 - $V = \mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \cdots \mathbf{v}_k)$, cioè i vettori $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k$ sono generatori di V.

Osservazione. Dalla definizione di base segue che nessuna base può contenere il vettore nullo, in quanto $\mathbf{0}$ non appartiene a nessun insieme di vettori linearmente indipendenti.

Esempio.
1) I vettori riga (o colonna) della matrice I_n (matrice identità $n \times n$) sono una base di $\mathbf{R}^n$ che si dice **base canonica** e si indica con $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n)$.
2) In $\mathbf{R}^3$ i vettori $(0,2,0), (0,4,0), (0,0,0), (0,2,1)$ non sono una base di $\mathcal{L}((0,2,0), (0,0,1))$, mentre i vettori $(0,2,0), (0,0,1)$ lo sono.

Proposizione. Data una base $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k)$ del sottospazio V di $\mathbf{R}^n$, per ogni vettore $\mathbf{w} \in V$, i coefficienti che permettono di esprimerlo come combinazione lineare dei vettori della base $\mathcal{B}$ sono unici.

Dimostrazione. Supponiamo che si possa scrivere $\mathbf{w} = a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_k\mathbf{v}_k$, ma anche $\mathbf{w} = b_1\mathbf{v}_1 + \cdots + b_k\mathbf{v}_k$; sottraendo membro a membro si ottiene

$$\mathbf{0} = (a_1 - b_1)\mathbf{v}_1 + \cdots + (a_k - b_k)\mathbf{v}_k$$

per ipotesi i vettori $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k$ sono linearmente indipendenti, quindi deve essere $(a_1 - b_1) = \cdots = (a_k - b_k) = 0$, da cui la tesi.

Osservazione. I coefficienti che permettono di esprimere un qualsiasi vettore di $\mathbf{R}^n$ come combinazione lineare dei vettori della base canonica sono le componenti del vettore stesso. Si ha infatti l'equaglianza $\mathbf{w} = (a_1, a_2, \cdots, a_n) = a_1(1, 0, \cdots, 0) + a_2(0, 1, \cdots, 0) + \cdots + a_n(0, \cdots, 0, 1)$.

Dato un sottospazio $V = \mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \cdots \mathbf{v}_k)$, per trovarne una base si può applicare il metodo di riduzione a scala delle matrici. Infatti:

Proposizione. Le righe non nulle di una matrice $M \in \mathbf{R}^{m,n}$ ridotta a scala formano una base dello spazio $R(M)$ generato dalle righe di M.

Dimostrazione. È noto che le righe non nulle di una matrice ridotta a scala sono linearmente indipendenti. Inoltre le trasformazioni elementari sulle righe di una matrice permettono di passare da un insieme di generatori dello spazio delle righe un altro insieme di generatori dello stesso spazio.

Quindi per trovare una base di $V = \mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \cdots \mathbf{v}_k)$ basta costruire una matrice $M \in \mathbf{R}^{k,n}$ che ha per righe (in un ordine qualsiasi) i generatori di V; riducendola a scala con una opportuna successione di operazioni elementari sulle righe si ottiene una matrice M', le cui righe non nulle formano la base cercata. Si può ovviamente ottenere lo stesso risultato scrivendo i generatori per colonne e operando sulle colonne, in questo modo alla fine le colonne non nulle ottenute sono una base di V.

E se invece V è dato come sottospazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo? Vediamo su un esempio come si può trovare una base:

Esempio. Sia $V = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 | x + y + z = 0\}$; tutte le soluzioni di $x + y + z = 0$ si possono scrivere per esempio come $(-y - z, y, z)$ al variare di y e z in $\mathbf{R}$; in particolare si può scrivere: $(-y - z, y, z) = y(-1,1,0) + z(-1,0,1)$, da cui si conclude che una base di V è $((-1,1,0), (-1,0,1))$.

Teorema. Sia V un sottospazio non nullo di $\mathbf{R}^n$. Allora ogni base di V ha lo stesso numero di elementi.

Dimostrazione. Siano $(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k)$ e $(\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_h)$ due diverse basi di V, con $k > h$; per definizione di base i vettori $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k$ si possono esprimere come combinazioni lineari dei vettori $\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_h$:

$$\mathbf{v}_1 = c_{11}\mathbf{w}_1 + \cdots + c_{1h}\mathbf{w}_h$$

$$\mathbf{v}_2 = c_{21}\mathbf{w}_1 + \cdots + c_{2h}\mathbf{w}_h$$

$$\cdots$$

$$\mathbf{v}_k = c_{k1}\mathbf{w}_1 + \cdots + c_{kh}\mathbf{w}_h$$

Cerchiamo coefficienti $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ con i quali si possa scrivere una relazione del tipo

$$(1) \quad \alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

Sostituendo in (1) le precedenti espressioni di $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k$ e facendo i calcoli, si ottiene:

$$(2) \quad (c_{11}\alpha_1 + c_{21}\alpha_2 + \cdots + c_{k1}\alpha_k)\mathbf{w}_1 + \cdots + (c_{1h}\alpha_1 + c_{2h}\alpha_2 + \cdots + c_{kh}\alpha_k)\mathbf{w}_h = \mathbf{0}$$

Osserviamo che i vettori $\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_h$ sono per ipotesi linearmente indipendenti, quindi i coefficienti in (2) devono essere tutti nulli, ossia si può scrivere il seguente sistema lineare omogeneo nelle incognite $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$

$$c_{11}\alpha_1 + c_{21}\alpha_2 + \cdots + c_{k1}\alpha_k = 0$$

$$\cdots$$

$$c_{1h}\alpha_1 + c_{2h}\alpha_2 + \cdots + c_{kh}\alpha_k = 0$$

che è di tipo $h \times k$ e ha rango $rg(C) \leq min(h,k) = h < k$; il sistema ha perciò infinite soluzioni e quindi i vettori $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k$ sono linearmente dipendenti, contro l'ipotesi; ripetendo il ragionamento con $h > k$ si ottiene la tesi.

Corollario. Un sottospazio non nullo V di $\mathbf{R}^n$ ha una base con al più n elementi.

Dimostrazione. Sia $\mathbf{w}_1 \in V$ un vettore non nullo (esiste per ipotesi); allora può succedere che $V = \mathcal{L}(\mathbf{w}_1)$; se non è cosi', allora esiste $\mathbf{w}_2 \in V$ tale che $\mathbf{w}_2$ non appartiene a $\mathcal{L}(\mathbf{w}_1)$; in questo caso può essere $V = \mathcal{L}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$, se non è cosi' esiste $\mathbf{w}_3 \in V$ tale che $\mathbf{w}_3$ non appartiene a $\mathcal{L}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$; in questo ultimo caso i vettori $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ sono linearmente indipendenti per costruzione e il procedimento può continuare.... . Il procedimento deve comunque terminare, in quanto in $\mathbf{R}^n$ esistono al massimo n vettori linearmente indipendenti (basta pensare alla base canonica di $\mathbf{R}^n$).

Definizione. Sia V un sottospazio di $\mathbf{R}^n$; si dice **dimensione** di V (e si indica con $dim(V)$), il numero di elementi di una sua qualunque base. Se $V = \mathbf{0}$, si pone $dim(V) = 0$.

Corollario. Per ogni matrice $M \in \mathbf{R}^{m,n}$ si ha: $rg(M) = dimR(M) = dimC(M)$.

Dimostrazione. Possiamo supporre che M sia ridotta a scala, poichè $R(M)$ non cambia se applichiamo delle operazioni elementari sulle righe. Quindi le righe non nulle di M formano una base di $R(M)$ e si ha la prima eguaglianza. Per la seconda, sappiamo che in M ridotta a scala, le colonne contrassegnate da un indicatore formano una base di $C(M)$ (anche se queste colonne non sono l'unica scelta possibile per avere colonne linearmente indipendenti, il massimo numero di colonne linearmente indipendenti vale sempre $rg(M)$).

Osservazione. Per provare che un insieme di vettori è una base, di solito bisogna controllare sia che siano generatori, sia che siano linearmente indipendenti. Utilizzando la nozione di dimensione, dati m vettori in un sottospazio di dimensione m, basta che controlliamo una delle due proprietà. ATTENZIONE!!! questo vale solo per m vettori in un sottospazio di dimensione m.