11 - Successioni

Teoremi sui limiti di successioni:

valgono i risultati visti per i limiti di funzioni:

- unicità del limite
- algebra limiti
- limitatezza
- confronto

es.: (limitatezza): provare che

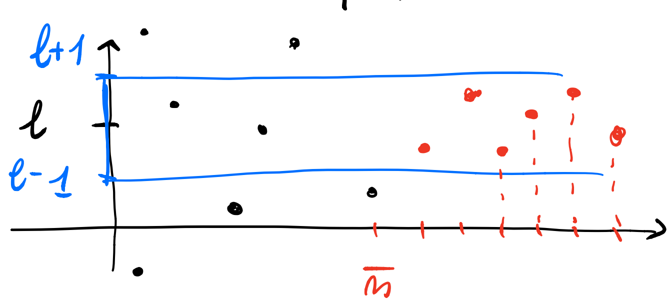
se a_n è una successione convergente allora è limitata:

se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$

allora $\exists\, M > 0 : \quad |a_n| < M \quad \forall n$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell \overset{def}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \bar{n} \in \mathbb{N}:$$

$$n > \bar{n} \implies |a_n - \ell| < \varepsilon$$



fisso $\varepsilon = 1 \Rightarrow \exists\ \bar{n} : \quad |a_n - \ell| < 1 \quad \forall n > \bar{n}$

$\Leftrightarrow -1 < a_n - \ell < 1$

$\Rightarrow a_n < 1 + \ell$

$\Rightarrow |a_n| < 1 + |\ell| \qquad \forall n > \bar{n}$

$$M \overset{def}{=} \max\{1 + |\ell|, |a_{\overset{n_0}{\downarrow}0}|, |a_1|, \dots, |a_{\bar{n}}|\}$$

$\Rightarrow |a_n| \leq M \quad \forall n$

$\boxed{\text{NOTA}}$: se f continua in x_0

$a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x_0$

Allora $\lim\limits_{n \to +\infty} f(a_n) = f\left(\lim\limits_{n \to +\infty} a_n\right) =$

$= f(x_0)$

---

es: $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sin \frac{1}{n}\right)$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \sin x \\ a_n = \frac{1}{n} \end{array}\right\} f(a_n) = \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

$\frac{1}{n} \to 0$, $\sin(x)$ funzione continua in 0

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = \sin\left(\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n}\right) = \sin 0 = 0$

---

es: calcolare $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3^n}{n^2}$

$$3^n = (1+2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \overbrace{1^{n-k}}^{=1} 2^k$$

formula del binomio

se $n>3$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k > \binom{n}{3} 2^3 =$$

scelgo solo il termine $k=3$

$$= \frac{n!}{3!(n-3)!} 2^3 = \frac{n(n-1)(n-2)\cancel{(n-3)!}}{3!\cancel{(n-3)!}} 2^3$$

$$\Rightarrow \quad 3^n > \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} 2^3$$

$$\boxed{\frac{3^n}{n^2}} > \frac{\cancel{n}(n-1)(n-2)}{3!\, n^{\cancel{2}}} 2^3 = \underbrace{\overbrace{\left(\frac{n-1}{n}\right)}^{\to 1} \overbrace{(n-2)}^{\to+\infty} \frac{2^3}{3!}}_{\xrightarrow{n\to+\infty} +\infty}$$

$$\frac{n-1}{n} = \frac{n}{n} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$$

per il teorema del confronto

$$\frac{3^n}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

---

es: calcolare $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{2^n}$

$$\frac{n!}{2^n} = \frac{1\cdot 2\cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)\, n}{\underbrace{2\cdot 2\cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 2}_{n \text{ volte}}}$$

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \underbrace{\underset{>3}{4} \cdot \ldots \cdot \underset{>3}{(n-1)}\cdot \underset{>3}{n}}_{} > 3^{n-3}$$

$n-3$ termini di $n!$ sono > 3

$$\frac{n!}{2^n} > \frac{3^{n-3}}{2^n} = \frac{3^n}{2^n}\,\frac{1}{27} = \underbrace{\left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{1}{27}}_{} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

$$3^{n-3} = 3^n\, 3^{-3} = 3^n \frac{1}{3^3}$$

per il confronto

$$\frac{n!}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

--- o ---

es: verificare che $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty$:

infatti: $$\frac{n^n}{n!} = \frac{\overbrace{n\cdot n\cdot \ldots \cdot n}^{n \text{ fattori}}}{\underbrace{1 \quad 2 \quad \ldots \quad n}_{n \text{ fattori}}} = \overbrace{\frac{n}{1}}^{=n}\ \underbrace{\frac{n}{2}}_{\geq 1}\ \underbrace{\frac{n}{3}}_{\geq 1} \cdots \overbrace{\frac{n}{n}}^{=1}$$

$$\Rightarrow \frac{n^n}{n!} \geq n \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 = n \to +\infty$$

per il confronto

$$\frac{n^n}{n!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$$

———— o ————

esercizi:

① $$\lim_{n \to +\infty} \underbrace{\sin(n!\pi)}_{=0 \ \forall n} = 0$$

② $$\lim_{n \to +\infty} \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{3}} =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{n!}{2!(n-2)!} \cdot \frac{1}{\frac{n!}{3!(n-3)!}} =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{\cancel{n!}}{\cancel{2!}(n-2)!} \cdot \frac{\overbrace{3!}^{\cancel{2!}\,3}(n-3)!}{\cancel{n!}} =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} 3 \frac{\cancel{(n-3)!}}{(n-2)\cancel{(n-3)!}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{3}{n-2} = 0$$

———— o ————

NOTA: se la successione a_n "viene da una funzione" $f(x)$ $x \in I \subseteq \mathbb{R}$

$\overset{\shortparallel}{f(n)}$

$a_n = f(n)$

allora $\boxed{\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{x \to +\infty} f(x)}$

Successioni monotone

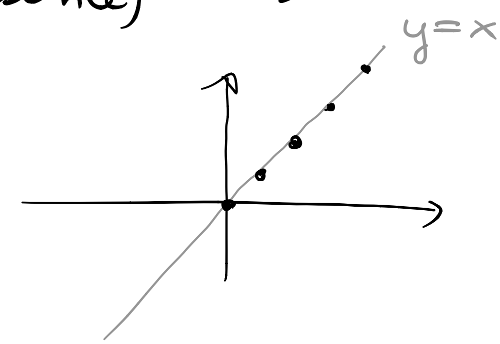
- a_n è crescente se $a_n \leq a_{n+1}$ $\forall n$
  (strett. crescente) $a_n < a_{n+1}$

- a_n è decrescente se $a_n \geq a_{n+1}$ $\forall n$
  (strett. decrescente) $>$

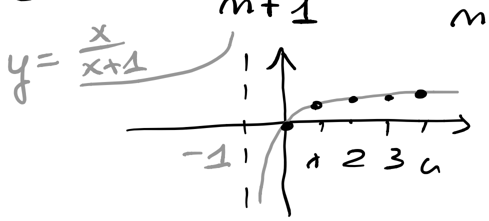
es:

① $a_n = n$

strett. crescente



② $a_n = \frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = \frac{n+1}{n+1} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$



strett. crescente

$\boxed{\text{Teorema : limite di successioni monotone}}$

- se a_n è una successione crescente (strett. crescente) allora a_n ammette limite

$$\text{e} \quad \lim_{n \to +\infty} a_n = \sup_n \{a_n\}$$

- se a_n è successione decrescente (strett.) allora a_n ammette limite e

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \inf_n \{a_n\}$$

Dim: caso a_n successione crescente

distinguiamo due casi: 1] $\sup_n \{a_n\} = \ell \in \mathbb{R}$

2] $\sup_n \{a_n\} = +\infty$

1] $\sup_n \{a_n\} = \ell \in \mathbb{R}$

per definizione di sup, ℓ è il più piccolo dei maggioranti: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N}$:

$$a_{\bar{n}} > \underbrace{\ell - \varepsilon}_{\text{non può essere maggiorante}}$$

$\forall n > \bar{n} \qquad a_n \geq a_{\bar{n}}$

$\Rightarrow \quad a_n > \ell - \varepsilon \quad \forall n > \bar{n}$

Abbiamo ottenuto che: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N}$:
$n > \bar{n} \quad a_n > \ell - \varepsilon$

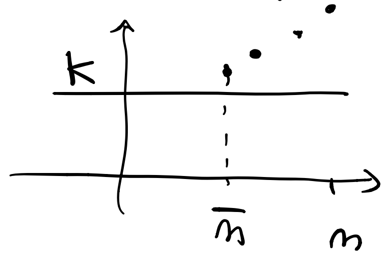
$a_n < \ell + \varepsilon$: sempre vero perché
$\ell = \sup\{a_n\}$ e quindi
$a_n \leq \ell \quad \forall n$
$a_n \leq \ell < \ell + \varepsilon$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} a_n = \ell$$

2] caso $\sup\{a_n\} = +\infty$

cioè la successione è illimitata superiormente

$\forall K \in \mathbb{R} \ \exists \bar{n} : a_{\bar{n}} > K$



successione crescente
$\Rightarrow \quad a_n > K \quad \forall n > \bar{n}$

abbiamo ottenuto: $\forall K \ \exists \bar{n} : n > \bar{n} \quad a_n > K$

cioè $\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$

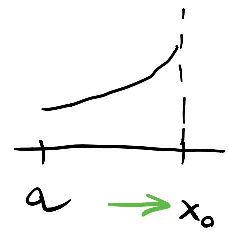
$\square$

<u>NOTA</u>: il teorema vale anche nel caso di successioni <u>definitivamente</u> monotone, cioè

monotona da un certo n in poi.

NOTA: limite di funzioni monotone

•) f crescente in (a, x_0)



$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup_{x \in (a,x_0)} f(x)$$

•) f decrescente $\Rightarrow$ $\lim f(x) = \inf \{ f(x) : x \in (a, x_0) \}$

•) f crescente in (x_0, b)

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \inf_{x \in (x_0,b)} f(x)$$

$\boxed{\text{NOTA}}$ $a_n \overset{\text{def}}{=} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad n \geq 1$

allora si può dimostrare che

•) a_n è crescente, cioè $a_n \leq a_{n+1}$ $\forall n$

•) $a_n \leq 3$ $\forall n$

•) $a_n \geq 2 = a_1$ $\forall n$

e quindi la successione $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ converge a un valore compreso tra 2 e 3.

definiamo il numero di Nepero e come il valore del limite $\boxed{e = \lim_{n \to +\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$

Criterio del rapporto per le successioni

$a_n > 0$ successione positiva

supponiamo che $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$

allora

- se $\ell < 1 \Rightarrow a_n \longrightarrow 0$
- se $\ell > 1 \Rightarrow a_n \longrightarrow +\infty$

questo criterio è una conseguenza del teorema sulle successioni monotone

(se $\ell = 1$ bisogna utilizzare altre strategie)

esempio: $\lim_{n \to +\infty} \frac{3^n}{n^2}$

$$a_n = \frac{3^n}{n^2}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \underbrace{\frac{3^{n+1}}{(n+1)^2}}_{a_{n+1}} \frac{1}{\underbrace{\frac{3^n}{n^2}}_{a_n}} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)^2} \frac{n^2}{3^n}$$

$$= \frac{3^{n+1}}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = 3\underbrace{\left(\frac{n}{n+1}\right)^2}_{\to 1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 3$$

$3 > 1 \Rightarrow$ per il criterio del rapporto $\frac{3^n}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

$\boxed{\text{NOTA:}}$

se $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$

allora ogni sottosuccessione di a_n ha limite ℓ

esempio:

$a_n = \frac{1}{n}$ $\qquad n_k = 2k$

sottosuccessione

a_{n_k} $\qquad$ seleziona i termini

$a_{2k} = \frac{1}{2k}$ della successione

$a_n \quad 1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{7} \dots$

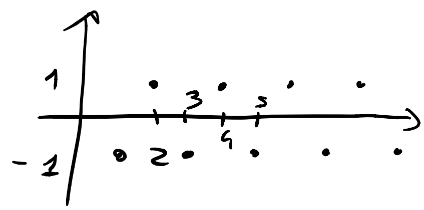
$a_{2k} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{6} \quad \dots$

Il risultato della nota sopra ∇ si utilizza per dimostrare che una successione non ammette limite:

se $\exists$ due sottosuccessioni di a_n che tendono a due limiti diversi allora a_n non ammette limite

segue dalla NOTA a p. 11

es: $a_n = (-1)^n$



a_n non ha limite:

$$a_{2n} = (-1)^{2n} = 1 \longrightarrow 1$$

sottosucc. degli n pari

$$\ne$$

$$a_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1 \longrightarrow -1$$

sottosucc. degli n dispari

$\Rightarrow (-1)^n$ non ha limite

---

es: $a_n = n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ NON ammette limite

$n_k = 2k$: "sottosucc. degli n pari"

$$a_{2k} = 2k \underbrace{\sin\left(\cancel{2}k\frac{\pi}{\cancel{2}}\right)}_{\sin(k\pi)=0} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

$n_k = (4k+1)$: $\quad a_{4k+1} = (4k+1)\sin\left((4k+1)\frac{\pi}{2}\right)$

$$\sin\left((4k+1)\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

$$a_{4k+1} = (4k+1)\cdot 1 \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$$

$\Rightarrow$ a_n non ha limite