20- Derivate successive
Sviluppi di Taylor

derivate di ordine superiore:

p. es. $f''(x_0) \overset{def}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$

DERIVATA SECONDA di f in x_0

limite del rapporto incrementale di f' in x_0, se esiste finito, allora f è derivabile 2 volte in x_0 e la derivata seconda si denota con $f''(x_0)$, $D^2 f(x_0)$, $\frac{d^2 f(x_0)}{dx^2}$

Notazioni per derivate successive:

$$f''' \ , \quad f^{(4)} \ , \quad f^{(5)} = D^5 f$$

... si può definire la derivata di ordine n di f

Def: • f si dice di classe C^0 su un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ se è continua su A

si scrive anche $f \in C^0(A)$

- f si dice di classe C^n su A, o $f \in C^n(A)$ se f è derivabile n volte sull'insieme A e la derivata n-esima $f^{(n)}$ è continua su A

- f è di classe C^∞ su A se ammette derivate di qualunque ordine

es: funzioni di classe C^∞ su $\mathbb{R}$:

$f(x)=e^x \qquad f^{(n)}(x)=e^x \quad \forall n$

e^x è di classe C^∞ su $\mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\sin(x) \\ f(x)=\cos(x) \end{array}\right\} \text{di classe } C^\infty \text{ su } \mathbb{R}$$

$$f(x) = x^5 + 3x^2 - x$$

$f'(x) = 5x^4 + 6x - 1 \qquad f^{(5)}(x) = 120$

$f''(x) = 20x^3 + 6 \qquad f^{(6)}(x) = 0$

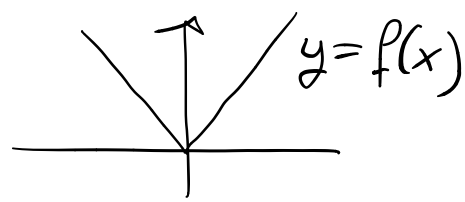
$f'''(x) = 60x^2 \qquad f^{(7)}(x) = 0$

$f^{(4)}(x) = 120x \qquad$ se $n>5 \ldots$ $f^{(n)}(x)=0$

$\Rightarrow$ i polinomi sono un altro esempio di funzioni di classe C^∞ su $\mathbb{R}$

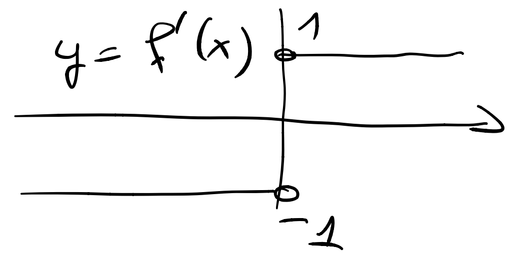
es: funzione di classe C^0 ma non C^1 su $\mathbb{R}$:

$f(x) = |x|$



$f \in C^0(\mathbb{R})$

$f \notin C^1(\mathbb{R})$



es: funzione di classe $C^1(\mathbb{R})$ ma non $C^2(\mathbb{R})$

$f(x) = x\sqrt[3]{x} = x^{4/3}$ f continua in $\mathbb{R}$

$f'(x) = \frac{4}{3} x^{1/3}$ f' continua su $\mathbb{R}$

$f''(x) = \frac{4}{3}\frac{1}{3} x^{-2/3}$ NON è def. in 0

$\Rightarrow$ $\underline{f(x) = x^{4/3}}$ è $\underline{\text{di classe}}$ C^1 su $\mathbb{R}$

esercizio

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x) - \tan(x)}{x^3}$$

$$\sin(x) \overset{\text{LANDAU}}{=} x + o(x) \quad \text{per } x \to 0$$

$$\tan(x) = x + o(x) \quad \text{per } x \to 0$$

$$\frac{\sin(x) - \tan(x)}{x^3} = \frac{x + o(x) - x + o(x)}{x^3} = \frac{o(x)}{x^3}$$

$$\frac{o(x)}{x^3} \xrightarrow[x \to 0]{?} \begin{cases} \nexists & \leftarrow \text{se } o(x) = x^2 \\ 1 & \leftarrow \text{se } o(x) = x^3 \\ 0 & \leftarrow \text{se } o(x) = x^4 \end{cases}$$

NON È POSSIBILE RISPONDERE CON I SIMBOLI DI LANDAU

proviamo scrivendo $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$:

$$\frac{\sin(x) - \tan(x)}{x^3} = \frac{\sin(x)}{x^3} \left(1 - \frac{1}{\cos(x)} \right)$$

$$= \underbrace{\frac{\sin(x)}{x}}_{\to 1} \; \underbrace{\frac{\cos(x)-1}{x^2}}_{\to -\frac{1}{2}} \; \underbrace{\frac{1}{\cos(x)}}_{\to 1} \longrightarrow -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-\tan(x)}{x^3} = -\frac{1}{2} \quad \checkmark$$

<u>es</u>: $$\lim_{x\to 0} \frac{x - \log(1+x)}{x^2}$$

$$\frac{x-\log(1+x)}{x^2} \underset{x\to 0}{=} \frac{x - x + o(x)}{x^2} = \frac{o(x)}{x^2} \; ?$$

con i simboli di Landau non si risolve, proviamo con de L'Hôpital:

$$\frac{1 - \frac{1}{1+x}}{2x} = \frac{1+x-1}{(1+x)2x} = \frac{x}{2x(1+x)}$$

$$= \frac{1}{2(1+x)} \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{1}{2}$$

$$\overset{(H)}{\Longrightarrow} \lim_{x \to 0} \frac{x - \log(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

scriviamo il limite usando "o - piccolo":

$$x - \log(1+x) = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

per $x \to 0$

$$\Longleftrightarrow \log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

per $x \to 0$

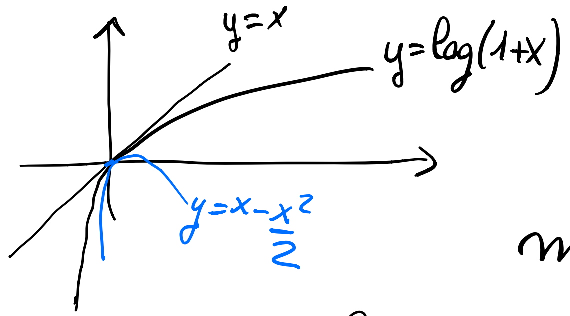
confrontiamo con il limite notevole:

$$\underline{\log(1+x)} = x + o(x) \quad \text{per } x \to 0$$

RETTA

$$\log(1+x) = \underbrace{x \overbrace{- \frac{x^2}{2} + \underline{o(x^2)}}^{o(x)}}$$

approssimo $\log(1+x)$ con una parabola



ho ottenuto un'approssimazione migliore:
la parabola $y = x - \frac{x^2}{2}$ approssima la funzione $y = \log(1+x)$ in un intorno di $x=0$ con un errore $o(x^2)$

SVILUPPI DI TAYLOR

obiettivo: approssimare localmente (= vicino a x_0) una funzione $f(x)$ con un polinomio

il grado del polinomio è legato alla regolarità di f:

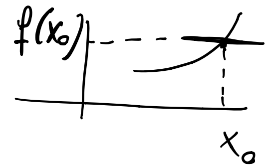
- $f \in C^0(I_r(x_0))$: f continua in x_0:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$f(x)-f(x_0)=o(1) \quad \text{per } x\to x_0$$

$$\boxed{f(x)=f(x_0)+\underline{o(1)}} \quad \text{per } x\to x_0$$

se f è solo continua, approssimo f con la retta orizzontale $y=f(x_0)$ in un intorno di x_0.



$\boxed{f\in C^1(I_r(x_0))}$: f è derivabile con derivata f' continua in $I_r(x_0)$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$$

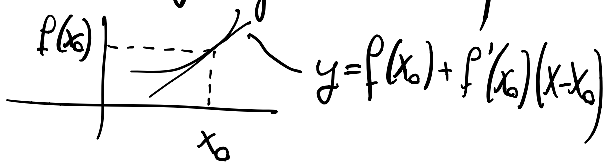
con "o-piccolo":

$$f(x)-f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)$$

I FORMULA DELL'INCREM. FINITO $\quad$ per $x\to x_0$

$$f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)_{\text{per } x\to x_0}$$

posso approssimare $f(x)$ con un polinomio di grado 1 che corrisponde alla retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$



$\boxed{f \in C^2(I_r(x_0))}$:

$$\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{(x-x_0)^2} \xrightarrow[x \to x_0]{} \, ?$$

forma indeterminata $\frac{0}{0}$

applichiamo l'Hôpital:

$$\frac{f'(x)-0-f'(x_0)\cdot 1}{2(x-x_0)} = \frac{1}{2}\,\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}$$

$= \frac{1}{2}$ rapporto incrementale di f' in x_0 $\xrightarrow[x \to x_0]{} \frac{1}{2} f''(x_0)$

f è di classe C^2

$$\overset{(H)}{\Longrightarrow} \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{(x-x_0)^2} = \frac{1}{2} f''(x_0)$$

cioè

$$f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0) = \overbrace{\frac{1}{2} f''(x_0)}^{\in \mathbb{R}}(x-x_0)^2 +$$

$$+ o\left((x-x_0)^2\right)$$

per $x \to x_0$

$$f(x) = \underbrace{f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2}+o\left((x-x_0)^2\right)$$

se f è di classe C^2
posso approssimarla con
questo polinomio di grado 2

e l'errore che commetto è $o\left((x-x_0)^2\right)$

<u>CONCLUSIONE</u>: più f è regolare più aumenta il grado del polinomio e quindi migliora la precisione

dell'approssimazione.

Def: polinomio di Taylor di f centrato in x_0 e di ordine n:

$$T_n(x) \overset{\text{def}}{=} f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k$$

polinomio di Taylor in forma compatta

se f è di classe C^n in un intorno di x_0.

Altre notazioni: $T_n(x)$, Tf_{n,x_0}, $P_n(x)$

<u>es</u>: polinomio di Taylor di $f(x)=e^x$
di ordine $n=5$, centrato in $x_0=0$

$$T_5(x) \overset{def}{=} \sum_{k=0}^{5} \frac{1}{k!} \underbrace{f^{(k)}(0)}_{=e^0=1} (x-0)^k$$

$x_0=0$

$$f^{(k)}(x) = e^x$$

$$T_5(x) = \overbrace{\frac{1}{0!}\,1}^{k=0} + \overbrace{\frac{1}{1!}\,1\,x}^{k=1} + \overbrace{\frac{1}{2!}\,1\,x^2}^{k=2}$$

$$+ \frac{1}{3!}\cdot 1\cdot x^3 + \frac{1}{4!}\cdot 1\cdot x^4 + \frac{1}{5!}\cdot 1\cdot x^5$$

$$T_5(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}$$

per $x \to 0$

polinomio di Taylor di $f(x)=e^x$
$\underline{n=3}$, $x_0=-4$

$$T_3(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{k!} f^{(k)}(-4) \left(x-(-4)\right)^k$$

$x_0=-4$

$$f^{(k)}(x) = e^{x} \Rightarrow f^{(k)}(-4) = e^{-4}$$

$$T_3(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{k!} e^{-4} (x+4)^k$$

$$= e^{-4}\Bigg(\underset{k=0}{\underset{\uparrow}{1}} + \underset{k=1}{1(x+4)} + \underset{k=2}{\frac{1}{2}(x+4)^2} + \underset{k=3}{\frac{1}{6}(x+4)^3} \Bigg)$$

in un intorno di $x_0 = -4$

Formula di Taylor con resto di PEANO

Se f è derivabile $\underline{\underline{n}}$ volte in x_0 e $T_n(x)$ è il polinomio di Taylor di f di ordine $\underline{\underline{n}}$ e centrato in x_0, allora

$$\boxed{f(x) = \underbrace{T_n(x) + o\left((x-x_0)^n\right)}}$$

per $x \to x_0$

- sviluppo di Taylor $= T_n(x) + o((x-x_0)^n)$
- polinomio di Taylor $= T_n(x)$

se $x_0 = 0$ si chiama anche sviluppo di MCLAURIN, polinomio di Mclaurin...

esercizio: $f(x) = \sin(x)$

scrivere lo sviluppo di Taylor di f centrato in $x_0 = \pi$ e di grado $n = 3$