18 - Strategia per il calcolo di massimi e minimi
Teorema di Rolle

RICHIAMO:

Teorema di Fermat:

x_0 punto di massimo o di minimo per f

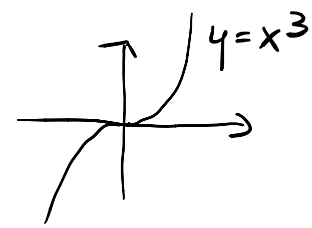
x_0 punto di derivabilità per f

$\Downarrow$ $\Uparrow$? NO

$$f'(x_0) = 0$$

controesempio: $f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2$ $\quad$ $f'(0) = 0$



ma $x=0$ NON è né massimo né minimo.

Esercizio: $f(x) = |x|$ $\quad$ $x \in [-2, \frac{1}{2}]$

determinare, se esistono, punti di massimo/minimo assoluto di f:

Teor. Weierstrass si applica perché $f(x) = |x|$ è CONTINUA e si considera un intervallo chiuso e limitato

$\Rightarrow$ sicuramente f ammette massimo e minimo assoluto in $[-2, \frac{1}{2}]$

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x & \text{se } 0\leq x\leq \frac{1}{2} \\ -x & \text{se } -2\leq x\leq 0 \end{cases}$$

Calcoliamo i punti critici di f:

$$f'(x)=\begin{cases} 1 & \text{se } 0<x<\frac{1}{2} \\ -1 & \text{se } -2<x<0 \end{cases}$$

$$f'(x)\neq 0 \quad \forall x\in\left[-2,\frac{1}{2}\right],\ x\neq 0$$

$\Rightarrow$ NON ci sono punti critici

Allora cerchiamo i punti di max/min negli estremi dell'intervallo e in $x=0$ che è punto di NON DERIVABILITÀ:

$$-2\ ,\ 0\ ,\ \frac{1}{2}$$

$$f(-2)=|-2|=2$$

$$f(0)=0$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left|\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$$

confronto i 3 valori

il più grande è il massimo:

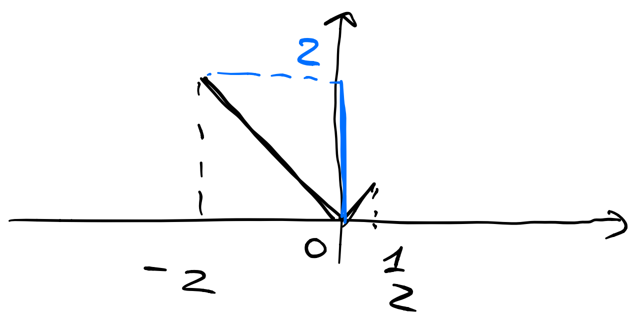
2 è il valore massimo

punto di massimo assoluto è $x=-2$

il più piccolo è il minimo:

0 è il valore minimo

punto di minimo assoluto è $x=0$



$f([-2,\tfrac{1}{2}])=[0,2]$

MIN MAX

$\boxed{\text{MESSAGGIO}}$: i punti di max/min di una funzione f si cercano tra:

- i punti critici di f, cioè le soluzioni di $f'(x)=0$
- i punti di non derivabilità
- gli eventuali estremi dell'intervallo

Esercizio: $f(x) = \dfrac{3 - |x^3 - 1|}{2} \quad -1 \leq x \leq 2$

determinare MAX e MIN assoluti

usando la definizione di valore assoluto:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4 - x^3}{2} & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \\ \dfrac{2 + x^3}{2} & \text{se } -1 \leq x < 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{3x^2}{2} & \text{se } 1 < x < 2 \\ \dfrac{3x^2}{2} & \text{se } -1 < x < 1 \end{cases}$$

$$f'_+(1) = -\frac{3}{2} \qquad f'_-(1) = \frac{3}{2}$$

$x = 1$ PUNTO ANGOLOSO

$f'(x) = 0 \iff x = 0$ PUNTO CRITICO

$\Rightarrow$ punti di max/min assoluto sono tra:

$x = 0, \quad x = 1, \quad x = -1, \quad x = 2$

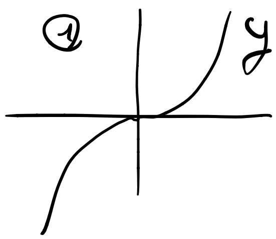
$f(0) = 1, \quad f(1) = \frac{3}{2}, \quad f(-1) = \frac{1}{2}, \quad f(2) = -2$

$\Rightarrow \begin{cases} \text{valore massimo assoluto } \frac{3}{2} \\ \text{valore minimo assoluto } -2 \end{cases}$

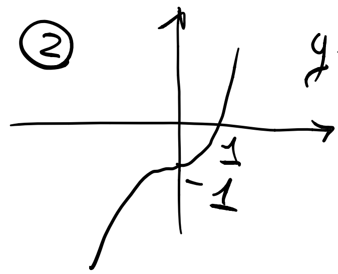
$\begin{cases} \text{punto di max assoluto } x=1 \\ \text{punto di min assoluto } x=2 \end{cases}$

Oppure graficamente:

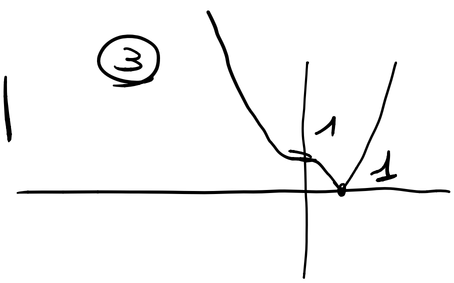
1 $y=x^3$



2 $y=x^3-1$

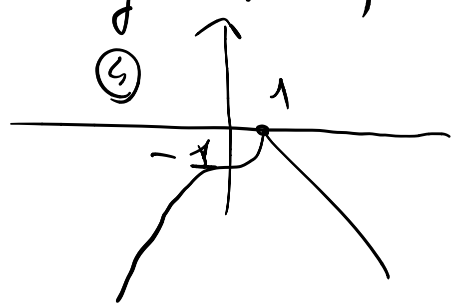


$y=|x^3-1|$ 3



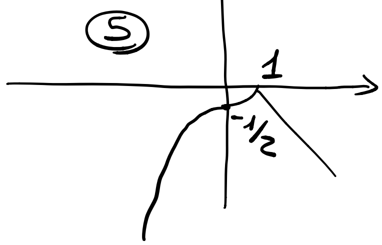
$y=-|x^3-1|$

4

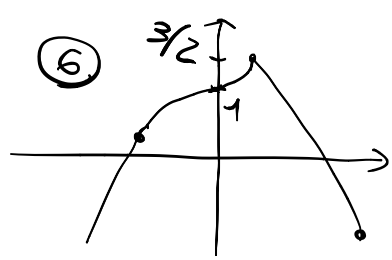


$y=-\dfrac{|x^3-1|}{2}$

5



6



$y=\dfrac{3}{2}-\dfrac{|x^3-1|}{2}$

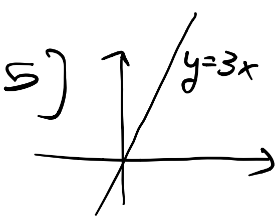
Teorema di Rolle

questo teorema rientra tra le proprietà di funzioni f definite su un intervallo $[a,b]$ chiuso e limitato continue su $[a,b]$ e derivabili su (a,b)

<u>NOTAZIONE</u>: se scrivo f derivabile su $[a,b]$ chiuso intendo:

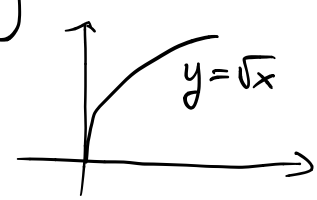
- $f'(x)$ esiste $\forall x \in (a,b)$ APERTO
- $f'_+(a)$, $f'_-(b)$ esistono

es: $f(x) = 3x$ su $[-1,5]$



f è derivabile su $[-1,5]$

es: $f(x) = \sqrt{x}$ $x \in [0,2]$

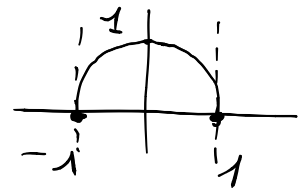


f è derivabile in $(0,2]$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

si può vedere che la funzione

$f(x) = \sqrt{1-x^2}$



$\operatorname{dom} f = \{ x \in \mathbb{R} : \; 1 - x^2 \geq 0 \}$

$1 \geq x^2 \iff |x| \leq 1$

f è definita nell'intervallo chiuso e limitato $[-1,1]$

f è continua in $[-1,1]$ CHIUSO

e derivabile in $(-1,1)$ APERTO

Teorema di ROLLE

f definita su un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$

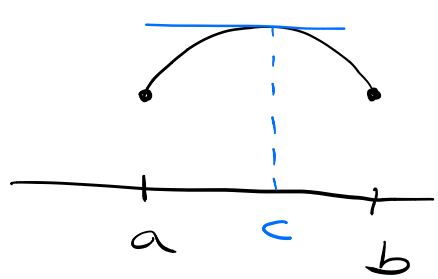
f continua in $[a,b]$ CHIUSO

f derivabile in (a,b) APERTO

$f(a) = f(b)$

Allora $\exists\, c \in (a,b)$ tale che

$$\boxed{f'(c) = 0}$$



cioè f ammette almeno un punto critico

Dim:

Per il teorema di Weierstrass f ammette massimo e minimo assoluti

siano $M \overset{def}{=} \max_{x\in[a,b]} f(x)$ $\quad m \overset{def}{=} \min_{x\in[a,b]} f(x)$

abbiamo due possibilità:
$m = M$ oppure $m < M$;

nel caso $m = M$: si tratta di una funzione costante $\Rightarrow f'(x) = 0 \ \forall x \in (a,b)$

nel caso $m < M$: poiché $f(a) = f(b)$ possiamo dedurre che almeno uno tra m e M viene raggiunto in un punto interno all'intervallo:

p. es. supponiamo $M = f(x_M)$ $x_M \in (a,b)$

f derivabile in $(a,b) \Rightarrow f$ derivabile in x_M

$\underset{\text{teor. FERMAT}}{\Longrightarrow}$ $f'(x_M) = 0$

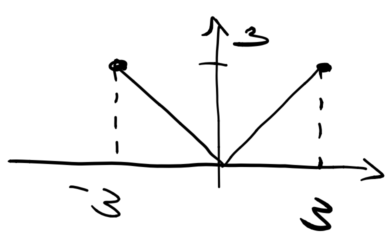
$\square$

Esercizio: mostrare con degli esempi che tutte le ipotesi del teor. di ROLLE sono essenziali

- togliamo f derivabile in (a,b):

dobbiamo fornire un esempio di funzione definita su un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$ continua su $[a,b]$, tale che $f(a)=f(b)$

e tale che $f'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a,b)$



$f(x)=|x|$ soddisfa le condizioni scritte sopra

- per esercizio: discutere gli altri casi

Domanda: f NON SODDISFA le ipotesi del teorema di Rolle

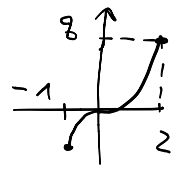
$\Downarrow$? FALSO

f NON SODDISFA la tesi?

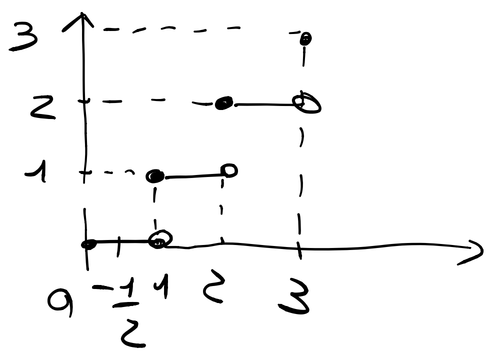
Dare un esempio di funzione che

soddisfa la tesi ma non le ipotesi del teorema di Rolle:

es: ① $f(x) = x^3$ su $[-1, 2]$



② $f(x) = \lfloor x \rfloor$ su $\left[\frac{1}{2}, 3\right]$

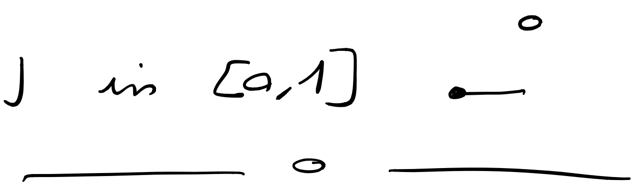


f NON ~~SODDISFA~~ le ipotesi ma

$f'(x) = 0$

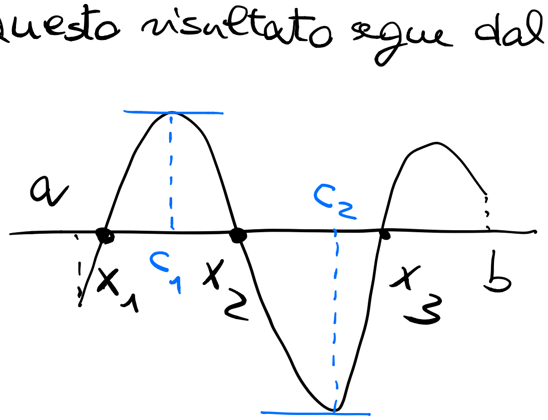
p.es. $\forall x \in (1, 2)$

③ $\lfloor x \rfloor$ in $[0, 1]$



NOTA: ~~se~~ se f è derivabile in (a, b) allora tra due zeri (consecutivi) di f si trova almeno uno zero della derivata f', cioè almeno un punto critico di f:

Questo risultato segue dal teorema di Rolle:



- $f(x_1) = f(x_2) = 0$
- f è continua su $[x_1, x_2]$
- f è derivabile su (x_1, x_2)

⇒ si applica il teor di Rolle a $[x_1, x_2]$

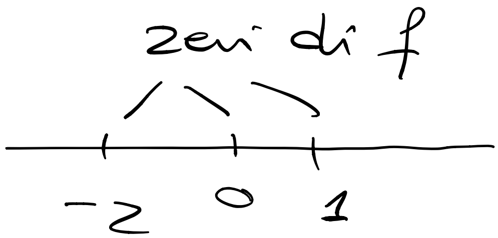
e si ottiene che $\exists$ almeno un punto

critico $c_1 \in (x_1, x_2)$

---

es: $f(x) = x^3(x-1)(x+2)$

ha almeno quanti punti critici?



f si annulla in $x = 0,\ 1$ e -2

⇒ f' ha almeno 2 zeri

conseguenza teor. Rolle

infatti, disegnando il grafico di f, si trova conferma: