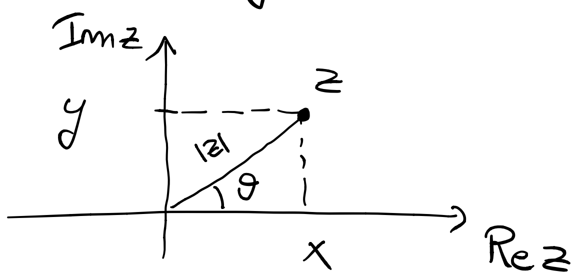
# 05 - NUMERI COMPLESSI - seconda parte

$z \in \mathbb{C}$ $\qquad z = (x, y)$

rappr. cartesiana $\qquad z = x + iy$

## forma trigonometrica




$z = x + iy$

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$x = |z| \cos\vartheta$

$y = |z| \sin\vartheta$

$\vartheta$ = argomento di $z$ = $\arg(z)$

è determinato a meno di multipli di $2\pi$

argomento principale $\mathrm{Arg}(z)$ è l'unico argomento di $z$ compreso tra $-\pi$ e $\pi$

$z = x + iy$ $\qquad$ forma cartesiana

$$\boxed{z = |z| (\cos\vartheta + i \sin\vartheta)}$$ forma trigonometrica

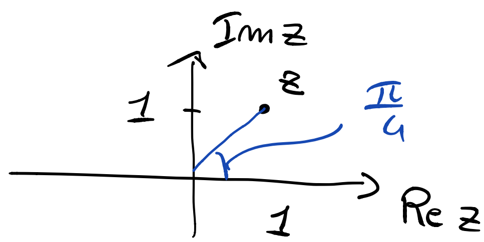
**D**: dato $z = x + iy$ come trovo la sua rappresentazione trigonometrica?

$|z| = ?$ $\qquad$ $\arg z = ?$

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\qquad$ $\frac{y}{x} = \tan\vartheta$ se $x \neq 0$

---

es: $z = 1 + i$




$|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\arg z = \frac{\pi}{4} \implies z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right)$

$z = 1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$|z|$ $\qquad$ $\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\vartheta$ $\qquad$ $\sin\vartheta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

---

Prodotto di due numeri complessi in forma trigonometrica:

$z_1 = |z_1|\left(\cos\vartheta_1 + i \sin\vartheta_1\right)$

$z_2 = |z_2|\left(\cos\vartheta_2 + i \sin\vartheta_2\right)$

$$z_1 z_2 = |z_1|(\cos\vartheta_1 + i\sin\vartheta_1)\cdot|z_2|(\cos\vartheta_2 + i\sin\vartheta_2)$$

$$= |z_1||z_2|\Big(\underbrace{\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2}\ + i\sin\vartheta_1\cos\vartheta_2 + i\sin\vartheta_2\cos\vartheta_1$$

$$+\underbrace{\overset{=-1}{i^2}\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2}\Big)$$

$$= |z_1 z_2|\Big(\overbrace{\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2 - \sin\vartheta_1\sin\vartheta_2}^{=\cos(\vartheta_1+\vartheta_2)}$$

$$+ i\underbrace{(\sin\vartheta_1\cos\vartheta_2 + \sin\vartheta_2\cos\vartheta_1)}_{=\sin(\vartheta_1+\vartheta_2)}\Big)$$

$$\Rightarrow \boxed{z_1 z_2 = |z_1 z_2|\big(\cos(\vartheta_1+\vartheta_2) + i\sin(\vartheta_1+\vartheta_2)\big)}$$

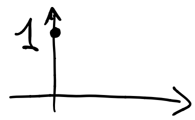
nel prodotto di due nr complessi $z_1$ e $z_2$
in forma trigonometrica

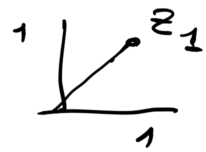
il modulo $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

l'argomento $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$

es: $z_1 = 1 + i$

$z_2 = i$



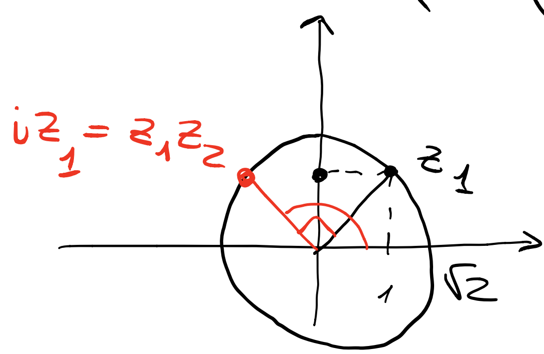

$|z_1| = \sqrt{2}$

$\arg z_1 = \frac{\pi}{4}$

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$z_2 = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$z_1 z_2 = \sqrt{2}\cdot 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)\right)$$




es: $z_1 = 1 + \sqrt{3}\, i$

$z_2 = 3i$

$z_1 z_2 = ?$ in forma trigonometrica

$$z_1 = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)$$

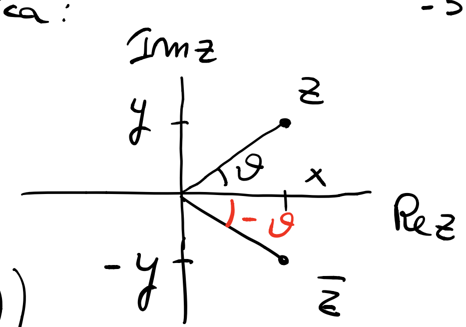
$$= 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$z_2 = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \underline{z_1 z_2 = 6\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)\right)}$$

- coniugato di $z$ in forma trigonometrica:

$$z = |z|\left(\cos\vartheta + i\sin\vartheta\right)$$




$$\bar{z} = |z|\left(\cos\vartheta - i\sin\vartheta\right)$$

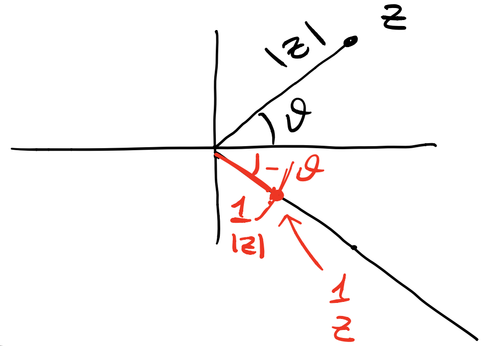
$$= |z|\left(\cos(-\vartheta) + i\sin(-\vartheta)\right)$$

- $|\bar{z}| = |z|$
- $\arg\bar{z} = -\arg z$

- Reciproco di $z$ in forma trigonometrica:

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{|z|}{|z|^2}\left(\cos(-\vartheta) + i\sin(-\vartheta)\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} \\ \arg\frac{1}{z} = -\arg z \end{cases}$$




---

## Potenze di $z$

$$z = |z|\left(\cos\vartheta + i\sin\vartheta\right)$$

$$z^2 = z\,z = |z|^2\left(\cos 2\vartheta + i\sin 2\vartheta\right)$$

$$z^3 = z^2 z = |z|^3\left(\cos 3\vartheta + i\sin 3\vartheta\right)$$

$\vdots$

$$\boxed{z^n = |z|^n\left(\cos(n\vartheta) + i\sin(n\vartheta)\right)}$$

FORMULA DI DE MOIVRE

es: $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6}\right)$

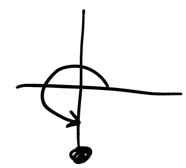
$z^{33} = ?$

$$z^{33} = 2^{33}\left(\cos\left(33\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(33\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

**D** $z^{33}$ sta sull'asse reale? Ha sia parte reale sia parte immaginaria $\neq 0$?

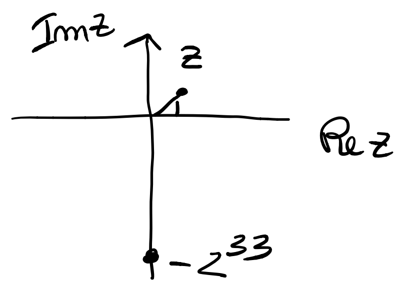
$$33\frac{\pi}{6} = 5\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi + 4\pi$$

$$\cos\left(33\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 0$$



$$\sin\left(33\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -1$$

$z^{33} = -2^{33}\, i$ è un numero immaginario puro




———— o ————

# Forma esponenziale di un numero complesso

$e^x$, estendiamo al caso di

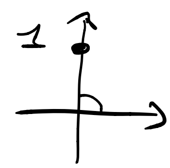
esponente = numero immaginario puro

$$\boxed{\vartheta \in \mathbb{R}, \quad e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i\sin\vartheta}$$

FORMULA DI EULERO

es: (1) $e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 + i0 = -1$

(2) $e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$




---

$z = |z|(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$ forma trigonometrica di $z$

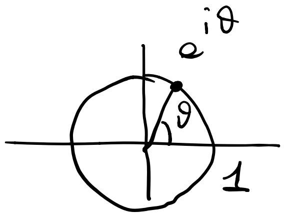
$$\boxed{z = |z|\, e^{i\vartheta}}$$

Forma esponenziale di un numero complesso $z$

NOTA: $\vartheta \mapsto e^{i\vartheta}$ è periodica di periodo $2\pi$

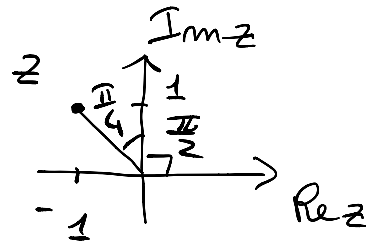
$$\underbrace{e^{i(\vartheta+2\pi)}} = \cos(\vartheta+2\pi) + i\sin(\vartheta+2\pi)$$

$$= \cos\vartheta + i\sin\vartheta = \underbrace{e^{i\vartheta}}$$




$\vartheta \in \mathbb{R}$, $e^{i\vartheta} \in \mathbb{C}$

es: $z = -1 + i$




z in forma esponenziale?

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\vartheta = \frac{3}{4}\pi$$

$$\Rightarrow \quad z = \sqrt{2}\, e^{\frac{3}{4}\pi i}$$

---

$$e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i\sin\vartheta$$

$$e^{i\vartheta_1} e^{i\vartheta_2} \overset{?}{=} e^{i\vartheta_1 + i\vartheta_2} = e^{i(\vartheta_1+\vartheta_2)} \; :$$

$$e^{i\vartheta_1} e^{i\vartheta_2} = \left(\cos\vartheta_1 + i\sin\vartheta_1\right)\left(\cos\vartheta_2 + i\sin\vartheta_2\right)$$

$$= \left(\cos(\vartheta_1+\vartheta_2) + i\sin(\vartheta_1+\vartheta_2)\right) = e^{i(\vartheta_1+\vartheta_2)}$$

$\Rightarrow$ si applicano le solite regole note per $e^x$ con $x \in \mathbb{R}$ ||

$$e^{-i\vartheta} = \cos(-\vartheta) + i\sin(-\vartheta)$$
$$= \cos(\vartheta) - i\sin\vartheta$$

$$e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i\sin\vartheta$$

$$\cos\vartheta = \frac{e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}}{2}, \quad \sin\vartheta = \frac{e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}}{2i}$$

---

## Radici n-esime di un numero complesso

def: $w \in \mathbb{C}$ si dice radice n-esima di $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ se risolve

dato

$$\boxed{w^n = z}$$

incognita dato

w. sol si dice radice n-esima di z

$$z = |z| e^{i\vartheta}$$ $|z|$ e $\arg z = \vartheta$ sono dati

$$w = \rho\, e^{i\varphi}$$ $\left.\begin{array}{l}\rho = ?\\ \varphi = ?\end{array}\right\}$ incognite

$$w^n = z \iff (\rho e^{i\varphi})^n = |z| e^{i\vartheta}$$

$$\rho^n (e^{i\varphi})^n = \boxed{\rho^n e^{in\varphi} = |z| e^{i\vartheta}}$$

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi) = e^{in\varphi}$$

formula di De Moivre

uguaglianza tra due numeri complessi in forma esponenziale:

- modulo uguale $\boxed{\rho^n = |z|}$
- argomento uguale a meno di multipli di $2\pi$ $\boxed{n\varphi = \vartheta + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}}$

$$\Rightarrow \quad \rho = \sqrt[n]{|z|}$$

$$\varphi = \frac{\vartheta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\; e^{i\left(\frac{\vartheta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$k = 0 \qquad w_0 = \sqrt[n]{|z|}\; e^{i\frac{\vartheta}{n}}$$

$$k = 1 \qquad w_1 = \sqrt[n]{|z|}\; e^{i\left(\frac{\vartheta}{n} + \frac{2\pi}{n}\right)}$$

$\vdots$

$$k = n-1 \qquad w_{n-1} = \sqrt[n]{|z|}\; e^{i\left(\frac{\vartheta}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right)}$$

$$k = n \qquad w_n = \sqrt[n]{|z|}\; e^{i\left(\frac{\vartheta}{n} + \underbrace{\left(\frac{2n}{n}\pi\right)}_{=\,2\pi}\right)} = w_0$$

$$e^{i\left(\frac{\vartheta}{n} + 2\pi\right)} = e^{i\frac{\vartheta}{n}}$$

## Radici $n$-esime di $z$

$\Longleftrightarrow$ sol di $w^n = z$ $\qquad \vartheta = \arg z$

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\; e^{i\left(\frac{\vartheta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$$

$k = 0, 1, \dots, n-1$

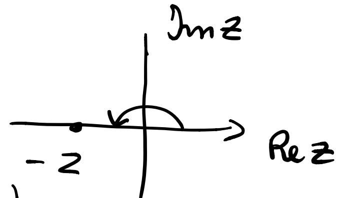
sono $n$ soluzioni distinte

---

es: radici quarte di $-2$

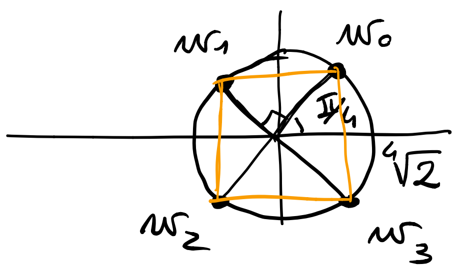
$$w^4 = -2$$

$$z = -2 = 2\, e^{\pi i}$$




$$w_k = \sqrt[4]{2}\; e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4}\right)} \qquad k = 0, 1, 2, 3$$

$$w_0 = \sqrt[4]{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$$




$$w_1 = \sqrt[4]{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$w_2 = \sqrt[4]{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right)}$$

$$w_3 = \sqrt[4]{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}\pi\right)}$$

le radici quarte di $-2$ occupano i vertici di un quadrato

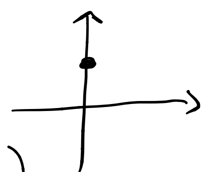
$\boxed{\text{Nota:}}$ le radici $n$-esime di un numero $z$ occupano i vertici di un poligono regolare di $n$ lati

---

es: radice quadrata di $i$

$$z = i, \quad n = 2 \qquad w^2 = i$$

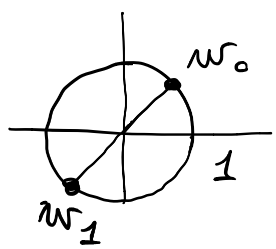
$$i = 1\, e^{i\frac{\pi}{2}}, \quad \vartheta = \frac{\pi}{2}$$



$$w_k = \sqrt{1}\; e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\cancel{2}k\pi}{\cancel{2}}\right)} \qquad k = 0, 1$$

$$w_0 = 1\, e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$w_1 = 1\, e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right)}$$




$$w_1 = e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right)} = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right)$$

$$= -\cos\frac{\pi}{4} - i \sin\frac{\pi}{4} = -e^{i\frac{\pi}{4}} = -w_0$$

$\Rightarrow$ le due soluzioni sono una opposta dell'altra

---

# esponenziale di un numero complesso

$$z = x + iy$$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \underbrace{e^{iy}}_{\cos y + i \sin y}$$

$$\boxed{e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)}$$

Proprietà:

- se $z = x + i0$

$$e^z = e^{x+i0} = e^x(\overbrace{\cos 0}^{=1} + i\overbrace{\sin 0}^{=0}) = e^x$$

esponenziale reale

$\Rightarrow$ $e^z$ con $z \in \mathbb{C}$ estende la definizione di esponenziale in $\mathbb{R}$

- $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$

- $\overline{(e^z)} = e^{\bar z}$

- $|e^{x+iy}| = e^x$

$$e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

$$|e^{iy}| = \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = 1$$

$$|e^{x+iy}| = |e^x \, e^{iy}| = |e^x|\,\underbrace{|e^{iy}|}_{=1} = |e^x| = e^x$$

•) $e^{x+iy} \neq 0 \quad \forall\, x,y$

•) $e^{z+2\pi i} = e^z$ :

$$e^{x+iy+2\pi i} = e^x\left(\cos(y+2\pi)+i\sin(y+2\pi)\right)$$
$$= e^x\left(\cos y + i\sin y\right) = e^{x+iy} = e^z$$

$e^z$ è periodica di periodo $2\pi i$

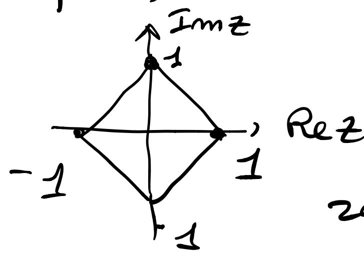
---

## Equazioni algebriche in $\mathbb{C}$

es: $p(z) = z^4 - 1$ polinomio di grado 4

Problema: risolvere $p(z) = 0$

$z^4 - 1 = 0$




zadici quarte di 1

$(z^2-1)(z^2+1) = 0$

$(z-1)(z+1)(z-i)(z+i) = 0$

4 soluzioni $1, -1, i, -i$

conclusione: $p(z)$ polinomio di grado 4, ha 4 radici in $\mathbb{C}$

## Teorema fondamentale dell'algebra:

sia $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$

con $a_n \neq 0$, $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$
$p(z)$ polinomio di grado $n > 1$
a coefficienti complessi

allora l'equazione $p(z) = 0$
ammette almeno una soluzione $z_1 \in \mathbb{C}$

NOTA: in $\mathbb{R}$ non vale
es $x^2+1=0$ non ha soluzioni in $\mathbb{R}$

NOTA: sia $z_1 \in \mathbb{C}$ tale che $p(z_1) = 0$
allora possiamo dividere per $(z-z_1)$ e fattorizzare
$p(z)$:

$$p(z) = (z - z_1) \underbrace{q(z)}_{\substack{\text{polinomio di grado } n-1 \\ \text{in } \mathbb{C}}}$$

applico il teorema al polinomio $q(z)$:
esiste $z_2 \in \mathbb{C}$ tale che $q(z_2) = 0$

$$\underbrace{q(z)}_{\text{grado } n-1} = (z - z_2) \underbrace{q_1(z)}_{\text{polinomio di grado } n-2}$$

$\Rightarrow \quad p(z) = (z-z_1)\,q(z) = (z-z_1)(z-z_2)\underbrace{q_1(z)}$

... itero il procedimento e ottengo

$$p(z) = a_n (z-z_1)(z-z_2) \dots (z-z_n)$$

$$= a_n (z-z_1)^{m_1} (z-z_2)^{m_2} \dots (z-z_{\boxed{k}})^{m_{\boxed{k}}}$$

evidenzio le soluzioni $z_i$ con le loro molteplicità

con $\boxed{k} \leq n$

$$m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$$

le radici non è detto che siano tutte distinte

es: $p(z) = z^4 + z^2$ polinomio di grado 4

$p(z) = 0$

$$z^4 + z^2 = z^2(z^2+1) = z^2(z+i)(z^2-i)$$

$$= (z-0)^2 (z+i)(z-i)$$

3 sol. distinte

| | |
|---|---|
| $z_1 = 0$ | $m_1 = 2$ |
| $z_2 = -i$ | $m_2 = 1$ |
| $z_3 = i$ | $m_3 = 1$ |
| | 4 |

——— o ———

es: $p(z) = i z^3 + (i+1) z^2 + (1-6i) z - 6$

polinomio di grado 3 a coefficienti complessi

•) provare che $z = i$ risolve $p(z) = 0$ :

$$p(i) = i\, i^3 + (i+1)\, i^2 + (1-6i)\, i - 6$$

$$= 1 - i - 1 + i + 6 - 6 = 0 \quad \checkmark$$

•) trovare le altre radici :

$p(z) = (z-i) \; \overset{?}{\ldots}$ ← polinomio di grado 2

uso divisione $\quad p(z) \;\big|\; z - i$

oppure Ruffini

e ottengo

$$p(z) = (z-i)\left(i z^2 + i z - 6i\right) \; :$$

| | $z^3$ | $z^2$ | $z$ | |
|---|---|---|---|---|
| | $i$ | $i+1$ | $1-6i$ | $-6$ |
| | | $i^2$ | $i^2$ | $6$ |
| $i$ | $i$ | $i$ | $-6i$ | $0$ |

$$p(z) = i (z-i)(z^2 + z - 6) = i (z-i)(z+3)(z-2)$$

$$\left( \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} \quad \dots \right)$$

$\Rightarrow p(z)=0$ ha 3 soluzioni distinte $i, -3, 2$

---

## Polinomi a coefficienti reali

$$p(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$$

$a_n \neq 0 \qquad a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$

polinomio di grado $n$ a coefficienti in $\mathbb{R}$

dal teor. fondamentale dell'algebra
$p(z)=0$ ha $n$ soluzioni in $\mathbb{C}$

se $z_1 \in \mathbb{C}$ risolve $p(z_1)=0$

vale anche per il suo coniugato $\overline{p(z_1)} = 0$, cioè

$$\overline{a_n z_1^n + \dots + a_1 z_1 + a_0} = 0$$

$$\overline{a_n z_1^n} + \dots + \overline{a_1 z_1} + \overline{a_0} = 0$$

$$\overline{a_n}\, \overline{z_1}^n + \dots + \overline{a_1}\, \overline{z_1} + \overline{a_0} = 0$$

$\shortparallel$

$$a_n \left(\bar{z}_1\right)^n + \dots + a_1 \bar{z}_1 + a_0 = 0$$

$$\boxed{p(\bar{z}_1) = 0}$$

Messaggio:
nel caso di polinomio a coeff. reali
se $z_1$ è soluzione in $\mathbb{C}$ di $p(z)=0$
allora $\bar{z}_1$ è anch'essa soluzione di $p(z)=0$

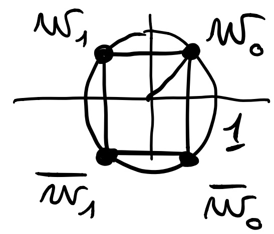
---

es: $p(z) = z^4 + 1$

polinomio di grado 4 a coeff. in $\mathbb{R}$

$$z^4 = -1 = 1\, e^{i\pi}$$

$$w_k = 1\, e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4}\right)}$$




possiamo fattorizzare il polinomio $p(z)$ in $\mathbb{C}$

$$p(z) = (z - w_0)(z - \bar{w}_0)(z - w_1)(z - \bar{w}_1)$$

$$w_0 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$$

$$\bar{w}_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$$

$$(z - w_0)(z - \bar{w}_0) = \left(z - \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right)\left(z - \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right)$$

$$= z^2 - z\left(+\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)+\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right)+\frac{1}{2}\underbrace{(1+i)(1-i)}_{1^2-i^2}$$

$$= z^2 - \sqrt{2}\, z + 1$$

$$\underbrace{(z-w_0)(z-\overline{w}_0)}_{\text{prodotto in } \mathbb{C}} = \overbrace{z^2-\sqrt{2}\,z+1}^{\Delta = 2-4<0}$$

polinomio di grado 2 a coefficienti in $\mathbb{R}$

$$(z-w_1)(z-\overline{w}_1) = \ldots = (z^2+\sqrt{2}\,z+1)$$

fattorizzazione in $\mathbb{C}$

$$p(z) = z^4+1 = (z-w_0)(z-\overline{w}_0)(z-w_1)(z-\overline{w}_1)$$

$$x^4+1 = (x^2+\sqrt{2}\,x+1)(x^2-\sqrt{2}\,x+1)$$

fattorizzazione in $\mathbb{R}$

---

Conclusione: un polinomio a coefficienti in $\mathbb{R}$ si può sempre fattorizzare con prodotti del tipo $(x-x_1)$ oppure $\underbrace{(x^2+ax+b)}_{\Delta<0}$

$x_1$ radice in $\mathbb{R}$

corrisponde a due radici complesse $z_0$ e $\overline{z}_0$