17 - Funzioni derivabili - 2

Algebra delle derivate:

Se f e g sono derivabili in x_0 allora

- $f+g$ è derivabile in x_0 e

$$\boxed{(f+g)'(x_0) = f'(x_0)+g'(x_0)}$$

DERIVATA DELLA SOMMA

- c costante in $\mathbb{R}$, f derivabile in x_0

$\Rightarrow cf$ è derivabile in x_0 e

$$\boxed{(cf)'(x_0) = c f'(x_0)}$$

DERIVATA di COSTANTE PER FUNZIONE

- f, g derivabili in x_0 allora $f \cdot g$ è derivabile in x_0

e $$\boxed{(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)}$$

DERIVATA DEL PRODOTTO

- se f è derivabile in x_0 e $f(x_0) \neq 0$ allora

$\frac{1}{f}$ è derivabile in x_0 e

$$\boxed{\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f(x_0)^2}}$$

DERIVATA DEL RECIPROCO

- se f e g sono derivabili in x_0 e $g(x_0) \neq 0$

allora $\frac{f}{g}$ è derivabile in x_0 e

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}}$$

DERIVATA QUOZIENTE

Dim:

- derivata della somma: per $x \neq x_0$

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} =$$

$$= \frac{f(x)+g(x)-(f(x_0)+g(x_0))}{x-x_0} = \underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\substack{\downarrow\, x\to x_0 \\ f'(x_0)}} + \underbrace{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}_{\substack{\downarrow\, x\to x_0 \\ g'(x_0)}}$$

per ipotesi

$$\Rightarrow (f+g)'(x_0) = f'(x_0)+g'(x_0)$$

- derivata di costante per funzione:

$$\frac{(cf)(x)-(cf)(x_0)}{x-x_0} = c\,\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \longrightarrow c f'(x_0)$$

- derivata del prodotto:

$$\frac{(fg)(x)-(fg)(x_0)}{x-x_0} =$$

STRATEGIA

$$= \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0) \pm f(x_0)g(x)}{x-x_0}$$

$$= \frac{g(x)(f(x)-f(x_0)) + f(x_0)(g(x)-g(x_0))}{x-x_0}$$

$$= g(x)\,\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \underbrace{f(x_0)}_{\text{COSTANTE}}\,\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

g è CONTINUA in x_0 perché è derivabile per ipotesi

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \xrightarrow{x \to x_0} f'(x_0) \qquad f(x_0) \longrightarrow f(x_0) \qquad \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \xrightarrow{x \to x_0} g'(x_0)$$

quindi $g(x) \longrightarrow g(x_0)$ per $x \to x_0$

in conclusione abbiamo ottenuto

$$(fg)'(x_0) = g(x_0)\,f'(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0)$$

• derivata del reciproco:

$$\frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)}}{x-x_0} = \frac{f(x_0)-f(x)}{f(x)\,f(x_0)\,(x-x_0)} =$$

$$= -\underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\downarrow \; f'(x_0)}\;\frac{1}{f(x)\underbrace{f(x_0)}_{\text{costante}}}$$

$f(x) \longrightarrow f(x_0)$ — f continua in x_0 perché derivabile in x_0

quindi $$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{(f(x_0))^2}$$

- derivata del quoziente:

STRATEGIA $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$

usiamo la formula della derivata del prodotto e della derivata del reciproco:

$$\left(f \cdot \frac{1}{g}\right)' = f' \frac{1}{g} + f\left(\frac{1}{g}\right)' =$$

$$= \frac{f'}{g} + f\left(-\frac{g'}{g^2}\right) = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$\square$

<u>Conseguenza</u>: derivata della combinazione lineare di due funzioni derivabili:

f, g sono derivabili in x_0

e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ allora $\underbrace{\alpha f + \beta g}_{\text{combinazione lineare di } f \text{ e } g}$ è derivabile

in x_0 e $(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$

<u>esempio</u>: derivata di $f(x) = \tan(x)$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos^2(x)}$$

$$= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} \quad \begin{cases} 1 + \tan^2(x) \\ \\ \dfrac{1}{\cos^2(x)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{(\tan(x))' = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}}$$

<u>esercizio</u>: calcolare la derivata di

$$f(x) = 3\,\frac{e^x}{x^2+1} - \frac{1}{5}(\tan(x))\,x^3$$

$$f'(x) = 3\,\frac{e^x(x^2+1) - e^x(2x)}{(x^2+1)^2} - \frac{1}{5}\Big((1+\tan^2(x))\,x^3 +$$

$$+ (\tan(x))\,3x^2\Big)$$

———— o ————

Derivata della funzione composta

f derivabile in x_0

g derivabile in $f(x_0)$

Allora la funzione composta $(g \circ f)$ è derivabile in x_0 e

$$\boxed{\left(\left(g \circ f\right)(x_0)\right)' = g'(f(x_0))\, f'(x_0)}$$

NOTAZIONE DI LEIBNIZ $\qquad f'(x) = \dfrac{df}{dx}$

$$y \stackrel{def}{=} f(x) \Rightarrow g(f(x)) = g(y)$$

$$w \stackrel{def}{=} g(y)$$

allora la formula della derivata di $g \circ f$ si riscrive

$$\left(\left(g \circ f\right)(x_0)\right)' = \underbrace{g'(f(x_0))}_{} \; \underbrace{f'(x_0)}_{}$$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{dw}{dy} \; \frac{dy}{dx}$$

REGOLA DELLA CATENA

esempio: derivata di $h(x) = \sqrt{1-x^2}$:

$h(x)$ è la funzione composta $g(f(x))$

dove $f(x) = 1 - x^2 \longrightarrow f'(x) = -2x$

$g(y) = \sqrt{y} = y^{1/2} \longrightarrow g'(y) = \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}}$

$$(h'(x)) = (g(f(x)))' = g'(f(x))\, f'(x) =$$

$$= \frac{1}{2} (f(x))^{-\frac{1}{2}} (-2x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} (-2x)$$

$$= -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

---

esempio: $h(x) = e^{\sin(x)}$, $h'(x) = ?$

$h(x)$ è la composizione di due funzioni $g \circ f$:

$f(x) = \sin(x)$, $g(y) = e^y$

$f'(x) = \cos(x)$, $g'(y) = e^y$

$$\Rightarrow h'(x) = (g(f(x)))' = \underbrace{e^{f(x)}}_{g'(f(x))} f'(x)$$

$$= e^{\sin(x)} \cos(x)$$

---

esempio: $h(x) = \sin\left(2^{\cos(x^3)}\right)$, $h'(x) = ?$

$$h'(x) = \cos\left(2^{\cos(x^3)}\right)\left((\log 2)\, 2^{\cos(x^3)}\right).$$

$\cdot\left(-\sin(x^3)\right) 3x^2$

———— o ————

Derivata della funzione inversa

f invertibile in un intorno di x_0

f derivabile in x_0

$f'(x_0) \neq 0$

Allora la funzione inversa f^{-1} è derivabile in $y_0 \stackrel{def}{=} f(x_0)$ e vale

$$\boxed{\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}}$$

$f(x_0) = y_0$

dato y_0, risolvo l'equazione $f(x) = y_0$

questa equazione ha un'unica soluzione x_0

$\boxed{f(x_0) = y_0}$ e allora

$\Longleftrightarrow \boxed{x_0 = f^{-1}(y_0)}$

devo verificare che $f'(x_0) \neq 0$ e a questo punto posso scrivere la derivata dell'inversa in y_0: $\quad \left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$

Dim: STRATEGIA: $\underbrace{f^{-1}(f(x)) = x}$

derivo questa formula:

a sinistra, devo applicare la formula della derivata della funzione composta:

$$\left(f^{-1}(f(x))\right)' = \left(\left(f^{-1}\right)'(f(x))\right) f'(x)$$

a destra, $x' = 1$

quindi abbiamo ottenuto: da $f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x$

derivo e trovo: $$\left(f^{-1}\right)'(f(x))\, f'(x) = 1$$

in particolare per $x = x_0$:

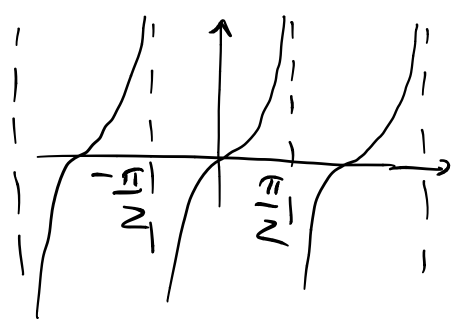
$$\left(f^{-1}\right)'(\underbrace{f(x_0)}_{y_0})\; f'(x_0) = 1$$

$$\Rightarrow \left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

$\square$

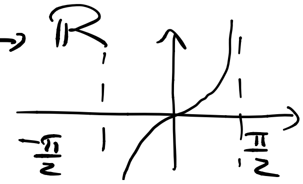
Derivata di $\arctan(x)$:

considerando $\tan(x)$:

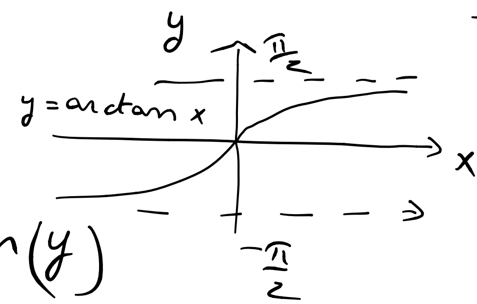


$\tan: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$

è invertibile



$\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$



$$y = \tan(x) \iff x = \arctan(y)$$

$$D\left[\arctan y\right] = \frac{1}{\left(\tan(x)\right)'} = \frac{1}{1+\tan^2(x)} =$$

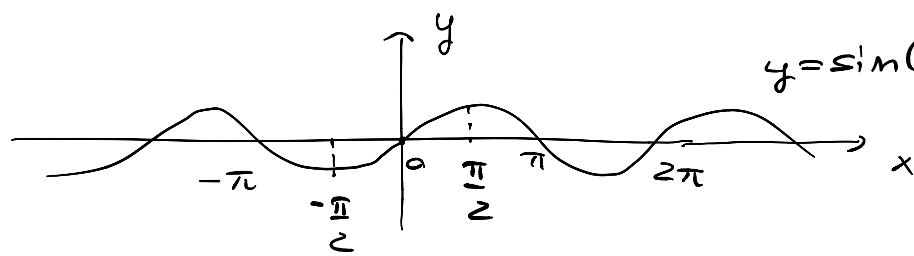
teor. derivata dell'inversa

$$= \frac{1}{1+y^2}$$

$y = \tan(x)$

$$\boxed{D \arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}}$$

Derivata di $\arcsin(x)$



il più grande intervallo contenente $x = 0$ in cui $\sin(x)$ è invertibile è $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1]$ è invertibile

$\arcsin : [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\boxed{y = \underbrace{\sin(x)}_{f(x)}} \iff \underbrace{\arcsin(y)}_{f^{-1}(y)} = x$$

$$D\left(\arcsin(y)\right) \overset{\nearrow}{=} \frac{1}{D\left(\sin(x)\right)} = \frac{1}{\cos(x)} =$$

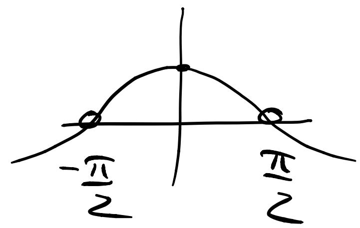
teor. derivata dell'inversa

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$|\cos x| = \sqrt{1-\sin^2 x}$$

$x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ $\cos x$



$\cos(x) > 0$ per $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\frac{1}{\cos(x)} \overset{\nearrow}{=} \frac{1}{\sqrt{1-\underbrace{\sin^2(x)}}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ $y = \sin(x)$

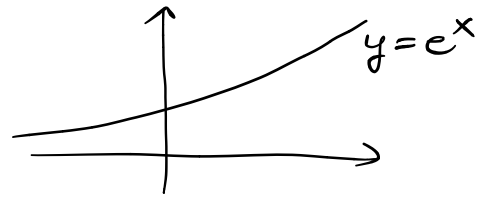
abbiamo ottenuto $D\left(\arcsin y\right) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ $y \in (-1, 1)$

$$\boxed{D\left(\arcsin(x)\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{per } x \in (-1, 1)}$$

$$\boxed{D \arccos(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{per } x \in (-1, 1)}$$

Derivata del logaritmo:

$f(x) = e^x$



$f: \mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty)$

è invertibile e la sua inversa è $\log(x)$:

$\log : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

calcoliamo la derivata del logaritmo usando il teorema della derivata della funzione inversa:

$$y = e^x \iff x = \log y$$

$$D(\log y) = \frac{1}{D(e^x)} = \frac{1}{e^x} \underset{y=e^x}{=} \frac{1}{y}$$

$$\Rightarrow \boxed{D(\log x) = \frac{1}{x}}$$

$$\boxed{D \log_a x = \frac{1}{x \log a} \qquad \begin{array}{l} a \neq 1 \\ a > 0 \end{array}}$$

<u>funzioni iperboliche</u>

$$\sinh(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

ESERCITAZIONE

$$\cosh(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

$$D\left(\sinh(x)\right) = \cosh(x)$$

$$D\left(\cosh(x)\right) = \sinh(x)$$

---

f derivabile, f funzione pari

cosa si può dire di $f'(x)$? pari / dispari...

f pari vuol dire $f(-x) = f(x) \quad \forall x$

deriviamo a destra e sinistra:

$$\left(f(-x)\right)' = f'(x) \qquad \forall x$$

$$f'(-x)(-1) = f'(x)$$

$$-f'(-x) = f'(x) \iff \boxed{f'(-x) = -f'(x)}$$

per $x \neq 0$

$\iff f'$ DISPARI

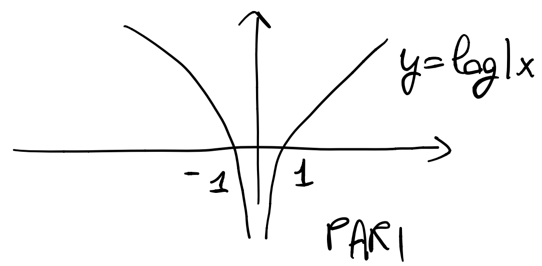
f pari e derivabile $\Downarrow$ f' dispari

f PARI $\Rightarrow$ grafico è simmetrico rispetto all'asse y

f' dispari

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pari e derivabile $\Rightarrow f'(-x) = -f'(x)$
in particolare per $x = 0$: $f'(0) = -f'(0) \Rightarrow f'(0) = 0$
se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, pari e derivabile per $x \neq 0$:
cosa può succedere in $x = 0$? Se $f'_+(0) \neq 0$ allora
$f'_-(0) = -f'_+(0) \neq f'_+(0)$
$\Rightarrow$ 0 è punto angoloso

<u>es</u>: $D\left(\log \underbrace{|x|}\right) = ?$



$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

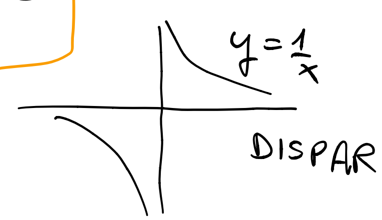
$$\log|x| = \begin{cases} \log x & \text{se } x > 0 \\ \log(-x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

dominio: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

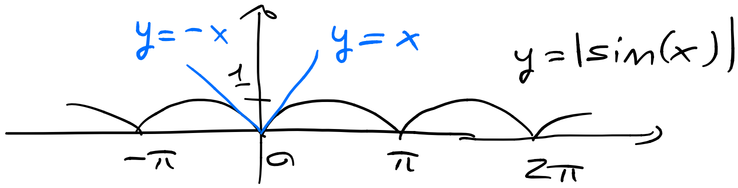
se $x > 0$: $\left(\log x\right)' = \dfrac{1}{x}$

se $x < 0$: $\left(\log(-x)\right)' = \dfrac{1}{-x}(-1) = \dfrac{1}{x}$

$$\Rightarrow \boxed{D\left(\log|x|\right) = \frac{1}{x} \qquad x \neq 0}$$



esempio: $f(x) = |\sin(x)|$

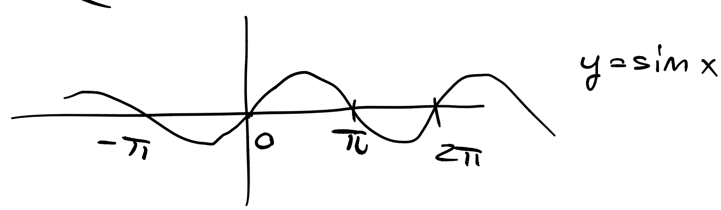


PARI

↪ i punti $x = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ sono punti angolosi

↪ se $x \neq k\pi$ calcoliamo la derivata:

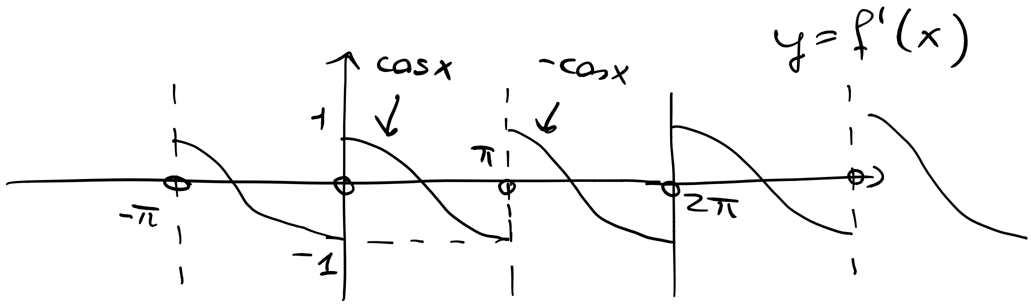
$$f(x) = |\sin(x)| = \begin{cases} \sin(x) & \text{se } \overbrace{\sin(x) \geq 0}^{\overset{2k\pi}{0} < x < \overset{\pi+2k\pi}{\pi}} \\ -\sin(x) & \text{se } \sin(x) < 0 \end{cases}$$



se $\sin(x) > 0$:

$f'(x) = \cos(x)$

se $\sin(x) < 0$ $\quad f'(x) = -\cos(x)$



esercizio: $f(x) = \sin^3(\sqrt{x}) = (\sin(\sqrt{x}))^3$

studiare la derivabilità nei punti del dominio e calcolare la derivata

$\text{dom} f = [0, +\infty)$, f continua in $[0, +\infty)$

osserviamo che $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ è definita per $x > 0$

- per $x \neq 0$:

$$f'(x) = 3\,(\sin(\sqrt{x}))^2 \cos(\sqrt{x})\,\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

quindi f è derivabile per $x > 0$

- Studiamo la derivabilità in $x = 0$:

scriviamo il rapporto incrementale di f in 0

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{(\sin(\sqrt{x}))^3 - 0}{x}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{(\sin(\sqrt{x}))^3}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{(\sqrt{x} + o(\sqrt{x}))^3}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{(\sqrt{x})^3 + o((\sqrt{x})^3)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x\sqrt{x} + o(x\sqrt{x})}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0 = f'_+(0)$$

CONCLUSIONE: f è derivabile in $[0,+\infty)$

$f'_+(0)=0$

$x>0 \quad f'(x)=\dfrac{3}{2\sqrt{x}}\sin^2(\sqrt{x})\cos(\sqrt{x})$

———— o ————

Teorema: monotonia di f e segno della derivata

Sia f derivabile in (a,b). Allora

i) f crescente in $(a,b) \Rightarrow f'(x)\geq 0 \quad \forall x\in(a,b)$

ii) f decrescente in $(a,b) \Rightarrow f'(x)\leq 0 \quad \forall x\in(a,b)$

Dim: caso i): funzione crescente in (a,b)

$x_0\in(a,b)$ TESI: $f'(x_0)\geq 0$:

$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ che segno ha?

se $x<x_0$: $f(x)\leq f(x_0)$ perché f è crescente

e $x-x_0<0$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0$$

se $x>x_0$: $f(x)\geq f(x_0)$ perché f è crescente

e $x-x_0>0 \Rightarrow \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0$

Quindi: $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x} \geq 0 \quad \forall x \neq x_0$

Teor. permanenza del segno

$$\Longrightarrow \underbrace{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{f'(x_0)} \geq 0$$

$$f'(x_0) \geq 0$$

Caso (ii): analogo

$\square$

Massimo e minimo relativo o locale di f:

richiamo:

__massimo assoluto di__ f, $\max\limits_{x \in X} f(x) = \max f(X) = M$ (insieme immagine)

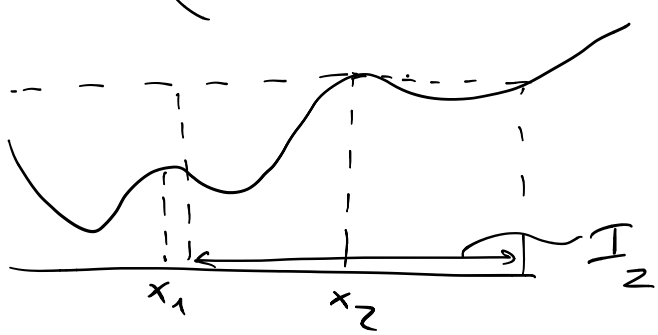
cioè $\exists\, x_M \in X : \underbrace{f(x_M)}_{M} \geq f(x) \quad \forall x \in X$

$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$

- x_0 è punto di __massimo relativo o locale__ per f se $\exists$ intorno $I_r(x_0)$ tale che

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in I_r(x_0) \cap X$$

__es:__



$x \in I_2$

$f(x) \leq f(x_2)$

x_2 è punto di massimo relativo o locale per f perchè $\exists$ intorno I_2 : $f(x) \leq f(x_2)$ $\forall x \in I_2$

- x_0 è punto di minimo relativo o locale per f

se $\exists$ intorno $I_r(x_0)$ tale che

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in I_r(x_0) \cap X$$

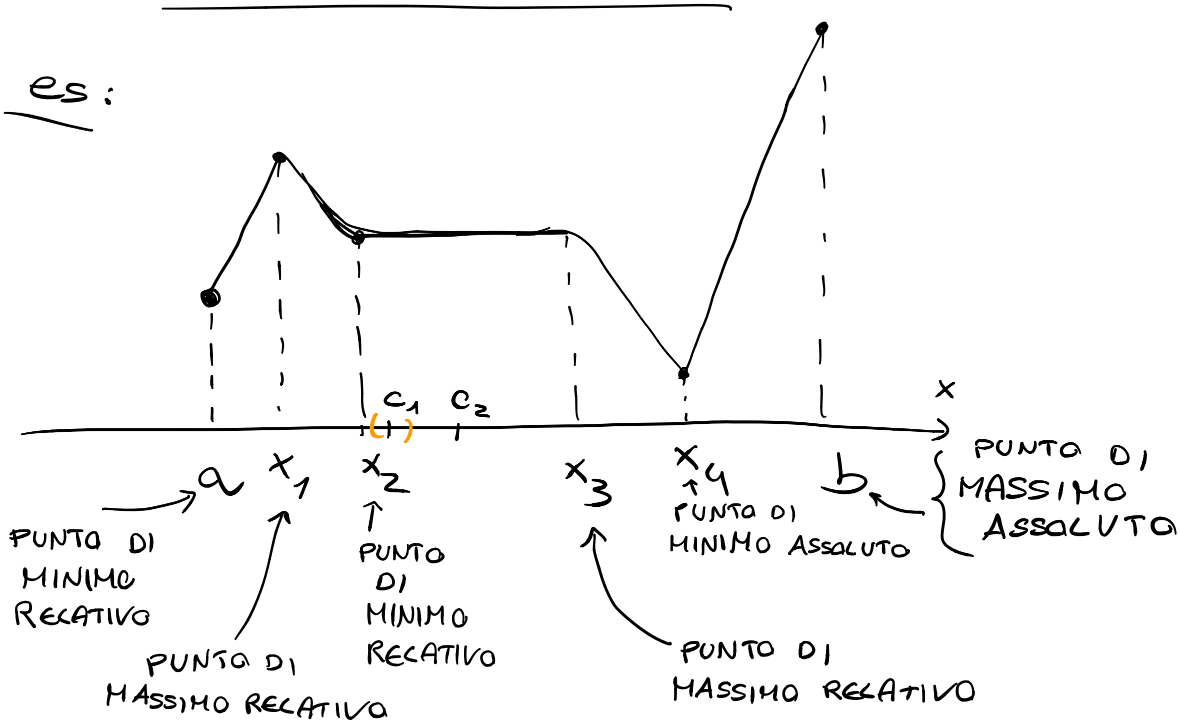
- punto di estremo relativo o locale = punto di massimo o punto di minimo relativo

NOTA: punto di max/min assoluto

$$\Downarrow \quad \not\Uparrow$$

punto di max/min relativo

es:



$$\max_{x\in[a,b]} f = f(b) \quad , \quad \min_{x\in[a,b]} f(x) = f(x_4)$$

a punto di minimo relativo

x_1 punto di max. rel.

x_2 punto di minimo relativo

x_3 punto di massimo relativo

$\forall\, c \in (x_2, x_3)$ c è punto di estremo relativo:

$\exists$ intorno $I_r(c)$ in cui valgono sia $f(x) \leq f(c)$ sia $f(x) \geq f(c)$

———— o ————

Def: x_0 è punto stazionario o punto critico di f se $\boxed{f'(x_0) = 0}$

———— o ————

FERMAT:

numeri di Fermat: $\boxed{2^{(2^n)} + 1}$

$n = 0$ $\quad 2^1 + 1 = 3$ numero primo

$n = 1$ $\quad 2^{(2^1)} + 1 = 5$ numero primo

$n=2$: $2^{(2^2)}+1 = 17$ primo

$n=3$, $n=4$ sono primi

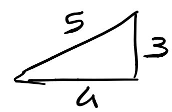
per $n=5$ $\quad 2^{(2^5)}+1 = \underbrace{4.294.967.297}_{\text{NON È PRIMO}}$

è divisibile per $\underbrace{641}$ Eulero

— o —

$x^2+y^2 = z^2$ ha soluzioni in $\mathbb{N}$: $3^2+4^2=5^2$

teor Pitagora



oppure
$5^2+12^2=13^2$

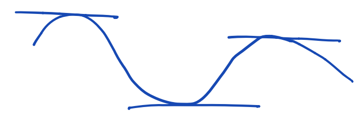
Fermat:

$$\boxed{x^n+y^n = z^n \qquad n\geq 3 \quad \text{non ha soluzioni in } \mathbb{N}}$$

dimostrata da
A. WILES 1997

Teorema di Fermat

i punti di max/min locale in cui f è derivabile hanno tangente orizzontale



sia f derivabile in x_0

con x_0 punto di estremo relativo

Allora $f'(x_0) = 0$

Dim: supponiamo x_0 punto di MASSIMO relativo:

allora $\exists$ intorno $I_r(x_0)$: $f(x) \leq f(x_0)$ $\forall x \in I_r(x_0)$

discutiamo il segno del rapporto incrementale di f in x_0:

se $x > x_0$, $x \in I_r(x_0)$: $f(x) \leq f(x_0)$ e $x - x_0 > 0$

quindi $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$

x_0 x

se $x < x_0$, $x \in I_r(x_0)$: $f(x) \leq f(x_0)$ e $x - x_0 < 0$

quindi $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$

Passando al limite per $x \to x_0$:

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

teor. permanenza del segno

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

poiché per ipotesi f è derivabile in x_0, $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$

e quindi $0 \leq f'(x_0) \leq 0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$ $\square$