Esercitazione 3

Argomento: sistemi lineari

1. Selezionare il formato di output `format long e` e risolvere i sistemi lineari $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{A}$ matrice di Hilbert di ordine $n = 5, 10, 15$ e $\mathbf{b}$ definito in modo tale che il corrispondente vettore soluzione $\mathbf{x}$ coincida con il vettore unitario.

   Per ciascun valore di n, calcolare l'errore relativo della soluzione e il numero di condizionamento in norma ∞. Commentare i risultati.

2. Implementare in una *function* denominata `elleu`, il calcolo dei fattori $\mathbf{L}$ e $\mathbf{U}$ della fattorizzazione $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ della matrice $\mathbf{A}$.

   Successivamente, generare la matrice $\mathbf{A}$ di ordine $n = 100$, i cui elementi sono $a_{ij} = \max(i, j)$ e il vettore $\mathbf{b}$ definito in modo tale che la soluzione $\mathbf{x}$ del sistema lineare $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ coincida con il vettore unitario.

   Infine, risolvere il sistema lineare $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, utilizzando dapprima la fattorizzazione $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ della matrice $\mathbf{A}$ ottenuta mediante la *function* `elleu`, e successivamente la fattorizzazione $\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$ ottenuta mediante la *function* `lu` di MATLAB.

   In entrambi casi calcolare l'errore relativo associato alla soluzione in norma ∞ e, in base ai risultati ottenuti e dandone una giustificazione, dedurre quale delle due soluzioni sia più accurata.

3. Generare la matrice $\mathbf{A}$ di ordine $n = 100$, i cui elementi sono $a_{ij} = i \max(i, j)$.

   Determinare le matrici $\mathbf{P}$, $\mathbf{L}$ e $\mathbf{U}$ della fattorizzazione $\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$ della matrice $\mathbf{A}$ mediante la *function* `lu` di MATLAB.

   Successivamente, utilizzare i suddetti fattori per invertire la matrice $\mathbf{A}$. Utilizzare la *function* `inv` di MATLAB per verificare la correttezza del risultato.

4. Generare una matrice $\mathbf{A}$ di ordine $n = 100$ di numeri pseudo-casuali.

   Risolvere in modo efficiente, minimizzando il numero di operazioni aritmetiche, i seguenti sistemi lineari

   $$\begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{A}\mathbf{x}_3 = \mathbf{b}_3 \\ \quad \ldots\ldots \\ \mathbf{A}\mathbf{x}_{30} = \mathbf{b}_{30} \end{cases}$$

   aventi tutti la stessa matrice dei coefficienti $\mathbf{A}$; il termine noto $\mathbf{b}_1$ sia definito in modo tale che la corrispondente soluzione $\mathbf{x}_1$ coincida con il vettore unitario e $\mathbf{b}_i = \mathbf{x}_{i-1}$, $i = 2, \ldots, 30$.

   Successivamente, risolvere ciascuno dei suddetti sistemi mediante il comando \ di Matlab. Utilizzando i comandi `tic` e `toc`, confrontare i tempi di calcolo delle due procedure e commentare i risultati.

5. Generare la matrice tridiagonale $\mathbf{B}$ di ordine $n = 100$, i cui elementi della diagonale principale sono tutti uguali a 10 e quelli delle codiagonali inferiore e superiore sono rispettivamente uguali a -5 e a 5.

   Tenendo conto che $\mathbf{B}$ è non singolare e, quindi, $\mathbf{A} = \mathbf{B}^T\mathbf{B}$ è simmetrica e definita positiva, utilizzare la *function* `chol` di MATLAB per determinare la decomposizione di Choleski $\mathbf{A} = \mathbf{R}^T\mathbf{R}$.

Successivamente, utilizzare la suddetta decomposizione per calcolare la matrice inversa di $\mathbf{A}$ e per risolvere il sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b}$ definito in modo tale che la corrispondente soluzione $\mathbf{x}$ coincida con il vettore unitario.

Verificare infine la correttezza dei risultati ottenuti mediante i comandi `inv` e \ di MATLAB.

6. Generare una matrice pseudo-casuale $\mathbf{A}$ di ordine n e calcolare la fattorizzazione QR della matrice $\mathbf{A}$.

   Successivamente usare i fattori $\mathbf{Q}$ ed $\mathbf{R}$ per risolvere un sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{b}$ definito in modo tale che la corrispondente soluzione $\mathbf{x}$ coincida con il vettore unitario.

   Facendo variare l'ordine della matrice, per esempio $n = 100, 200, \ldots, 500$ e $n = 1000, 2000, \ldots, 5000$, calcolare il rapporto tra il costo computazionale della risoluzione del sistema lineare mediante la fattorizzazione $\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$ di $\mathbf{A}$ e quello mediante la fattorizzazione QR. Commentare i risultati.

7. Si consideri il seguente sistema lineare sovradeterminato

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 1 \\
-x_1 + 4x_3 + x_4 &= 2 \\
3x_1 + 5x_2 + x_3 &= 3 \\
2x_1 - x_2 + x_4 &= 4 \\
x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 5 \\
2x_1 - x_2 + 3x_4 &= 6
\end{aligned}
$$

   Calcolare il rango della matrice dei coefficienti del sistema e, successivamente, calcolare la soluzione del sistema assegnato nel senso dei minimi quadrati. Verificare la correttezza del risultato utilizzando il comando \ di Matlab.

8. Implementare il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt e utilizzarlo per generare una base ortonormale di $\mathbb{R}^5$, a partire dai seguenti vettori linearmente indipendenti

$$
v_1 = (4, 2, 1, 5, -1)^T, \quad v_2 = (1, 5, 2, 4, 0)^T, \quad v_3 = (3, 10, 6, 2, 1)^T
$$

$$
v_4 = (3, 1, 6, 2, -1)^T, \quad v_5 = (2, -1, 2, 0, 1)^T
$$

   Denotata con $\mathbf{Q}$ la matrice le cui colonne coincidono con i vettori generati, verificare la correttezza dei risultati ottenuti mediante l'ortogonalità di $\mathbf{Q}$.