08 – Funzioni continue

Richiamo: $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad \mathrm{dom} f = X$, $x_0 \in X$

DEF funzione continua in un punto (del dominio)

f è continua in x_0

$\overset{def}{\iff}$ $\forall$ intorno V di $f(x_0)$

$\exists$ intorno U di x_0 tale che

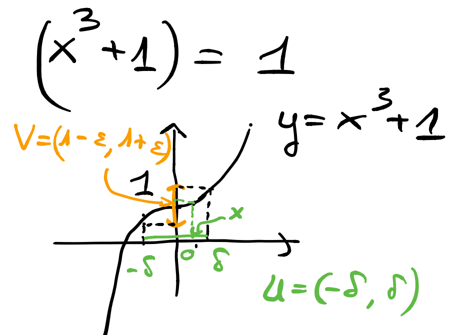
$$x \in U \cap X \Rightarrow f(x) \in V$$

NOTA: se $x_0 \in X$ è di accumulazione e f è continua in x_0 allora $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

es: verificare che $\lim_{x \to 0} (x^3+1) = 1$

$f(x) = x^3 + 1$ continua

$f(0) = 1$



verifichiamo, usando la definizione, che $f(x) = x^3+1$ è continua in $x_0 = 0$:

fissiamo $\varepsilon > 0$, dobbiamo trovare $\delta > 0$ tale che

se $|x - 0| < \delta$ allora $|f(x) - f(0)| < \varepsilon$:

per determinare δ, partiamo da

$$|f(x) - f(0)| < \varepsilon$$

$$|x^3 + 1 - 1| < \varepsilon \iff |x^3| < \varepsilon$$

$$\iff |x| < \sqrt[3]{\varepsilon}$$

$$\iff \underbrace{-\sqrt[3]{\varepsilon}}_{-\delta} < x < \underbrace{\sqrt[3]{\varepsilon}}_{+\delta}$$ è un intorno di $x_0 = 0$

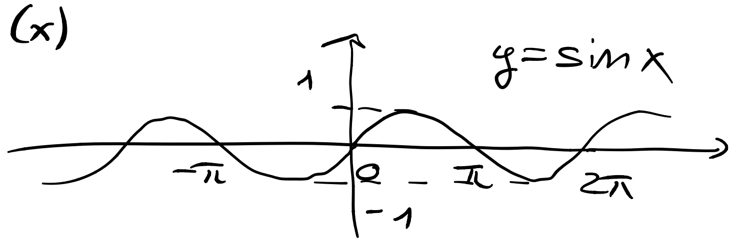
$\Rightarrow$ si può prendere $\delta = \sqrt[3]{\varepsilon}$ (o anche $0 < \delta < \sqrt[3]{\varepsilon}$)

così abbiamo ottenuto che

se $|x| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(0)| < \varepsilon$.

——— o ———

es: studiamo la continuità della funzione $f(x) = \sin(x)$



$$\sin : \underset{\text{dominio}}{\underset{\uparrow}{\mathbb{R}}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$\sin(x)$ continua, vuol dire che è continua in tutti i punti del suo dominio che è $\mathbb{R}$

fissiamo $x_0 \in \mathbb{R} = \operatorname{dom} f$ e studiamo la continuità in x_0:

fissiamo $\varepsilon > 0$ e dobbiamo determinare $\delta > 0$: se $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |\sin(x) - \sin(x_0)| < \varepsilon$

$|\sin(x) - \sin(x_0)| < \varepsilon$: invece di risolvere questa disequazione, facciamo i passaggi qui sotto :

$$|\sin(x) - \sin(x_0)| =$$

$$= \left| 2 \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right) \sin\left(\frac{x + x_0}{2}\right) \right|$$

questo termine contiene $|x - x_0|$ che è la quantità da stimare

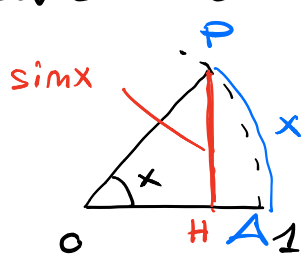
$$= 2 \left| \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right) \right| \underbrace{\left| \sin\left(\frac{x + x_0}{2}\right) \right|}_{\leq 1}$$

$$\leq 2 \left| \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right) \right| \cdot 1 \leq 2 \, \frac{|x - x_0|}{2}$$

(*) $\boxed{\text{è vero che } |\sin(x)| \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R} \, ?}$:

è vera, infatti : procediamo per passi

•) caso $0 < x < \frac{\pi}{2}$: $\sin(x) \overset{?}{<} x$



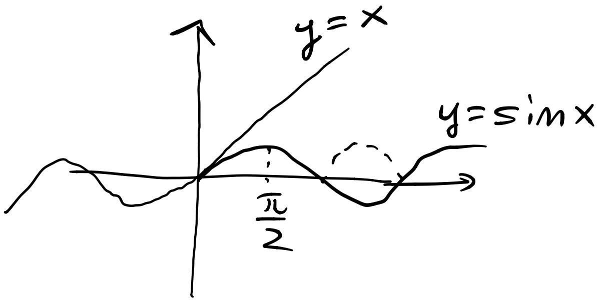
lunghezza arco $\overset{\frown}{AP} = x$

$\sin x$ = segmento $\overline{PH}$

$\Rightarrow \quad \sin(x) < x$

$\overline{PH} < \overset{\frown}{AP}$

•) caso $x \geq \frac{\pi}{2}$: $\quad |\sin(x)| \overset{?}{\leq} x$



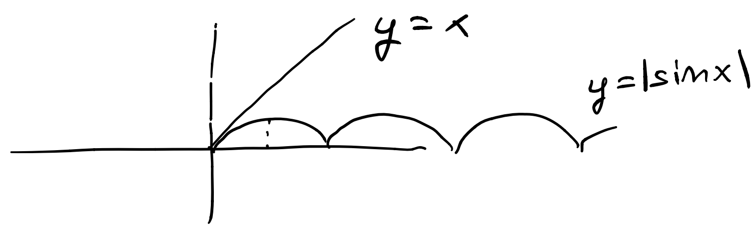
$|\sin(x)| \leq 1 < \frac{\pi}{2} \leq x$

$\Downarrow$

$|\sin(x)| \leq x \underset{\substack{\uparrow \\ x > \frac{\pi}{2}}}{=} |x|$

•) se $x = 0$: $\quad \sin 0 = 0 \leq 0 \quad \checkmark$

$$\boxed{\forall\ x \geq 0 \quad \text{vale} \quad |\sin(x)| \leq x}$$

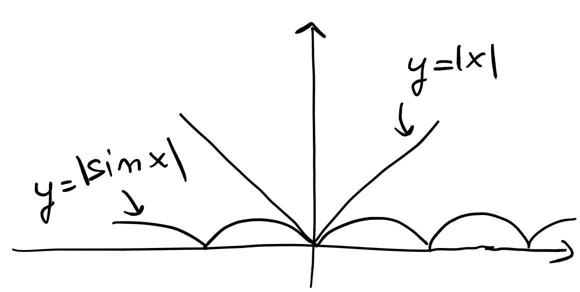


•) caso $x < 0$: $\sin(x)$ è DISPARI $\qquad -x > 0$

$|\sin(x)| = |-\sin(-x)| = |\sin(-x)|$

$\leq |-x| = |x|$

$\Rightarrow \quad |\sin(x)| \leq |x|$



Torniamo allo studio della continuità:

$$|\sin(x) - \sin(x_0)| \le 2\left|\sin\frac{(x-x_0)}{2}\right|$$

DISUG. (*) APPENA PROVATA

$$\le 2\left|\frac{x-x_0}{2}\right| = |x-x_0|$$

abbiamo ottenuto

$$|\sin(x) - \sin(x_0)| \le |x-x_0| \overset{!}{<} \varepsilon$$

basta $\delta = \varepsilon$ (o $0<\delta<\varepsilon$)

e allora se $|x-x_0| < \varepsilon = \delta$

$$\Rightarrow |\sin(x) - \sin(x_0)| \le |x-x_0| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |\sin(x) - \sin(x_0)| < \varepsilon$$

abbiamo verificato la continuità in x_0.

Per l'arbitrarietà di $x_0 \in \mathbb{R}$, segue che $\sin(x)$ è continua in tutti i punti del dominio, cioè è continua

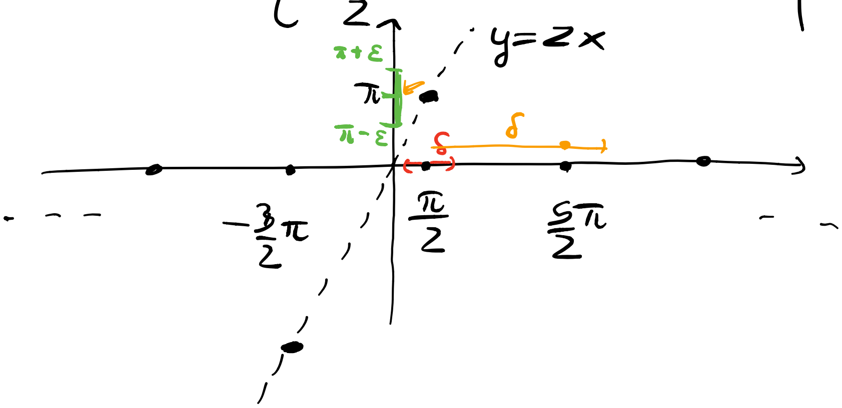
———— o ————

Cosa succede se $x_0 \in \text{dom} f$ è un punto isolato?

es: $f(x) = \sqrt{\underbrace{\sin(x) - 1}_{\geq 1}} + 2x$

$\text{dom} f = \{x \in \mathbb{R} : \sin(x) = 1\}$

$= \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ tutti punti isolati!



f è continua?

studiamo la continuità di f in $x_0 = \frac{\pi}{2}$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$

dato $\varepsilon > 0$ dobbiamo determinare $\delta > 0$:

$$\left.\begin{array}{l} |x - \frac{\pi}{2}| < \delta \\ x \in \text{dom} f \end{array}\right\} \Rightarrow |f(x) - \pi| < \varepsilon$$

basta prendere $0 < \delta < 2\pi$

perché in quel caso l'unica $x \in \text{dom} f$

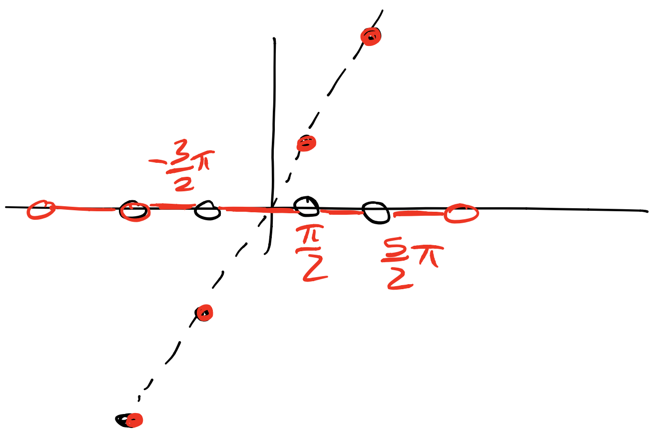
che realizza $\left|x-\frac{\pi}{2}\right|<\delta$ è $x=\frac{\pi}{2}$

e soddisfa $\left|\underbrace{f(x)}_{\pi=f\left(\frac{\pi}{2}\right)}-\pi\right|=0<\varepsilon$

——— o ———

NOTA: se x_0 è un punto isolato di f allora f è continua in x_0

es:



$$g(x)=\begin{cases} 0 & \text{se } x\neq \frac{\pi}{2}+2k\pi \\ \sqrt{\sin x-1}+2x & \text{se } x=\underbrace{\frac{\pi}{2}+2k\pi}_{\text{sono punti di accumulazione}} \end{cases}$$

$g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} g(x)=0$$

g NON è continua in $\mathbb{R}$

perché non è continua nei punti $\frac{\pi}{2}+2k\pi$

Tipi di discontinuità:

$f: X \longrightarrow \mathbb{R}$, x_0 di accumulazione per X

x_0 è un punto di discontinuità per f

↪ se f NON è continua in x_0

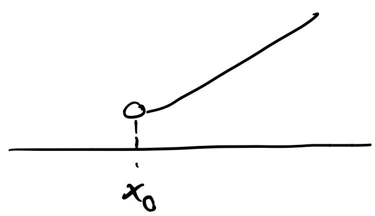
↪ oppure $x_0 \notin X$

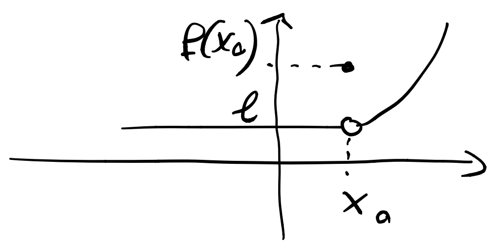
CLASSIFICO I TIPI DI DISCONTINUITÀ

- **discontinuità eliminabile**:

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$$

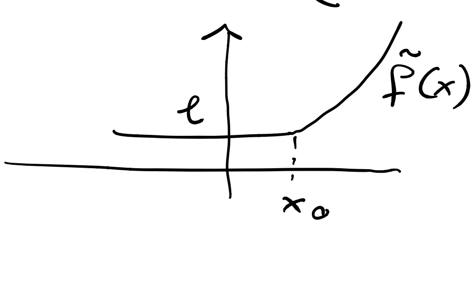
MA $\ell \neq f(x_0)$ oppure $x_0 \notin X$





NOTA: in questo caso si definisce un prolungamento per continuità di f

$$\tilde{f}(x) \stackrel{def}{=} \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in X \setminus \{x_0\} \\ \ell & \text{se } x = x_0 \end{cases}$$

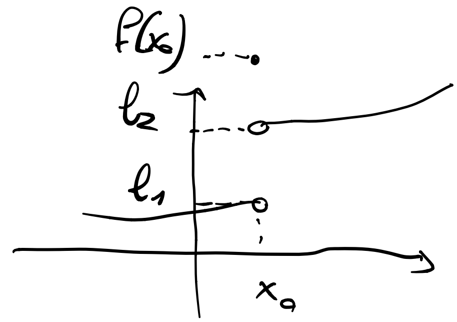


discontinuità di tipo salto (o **prima specie**)

se il limite destro e il limite sinistro esistono (in $\mathbb{R}$) ma sono diversi:

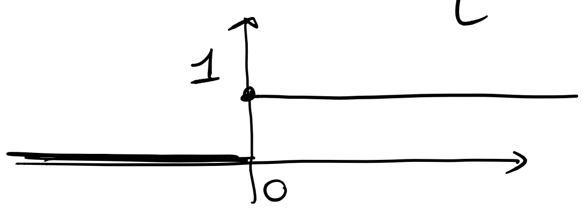
$$\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell_1$$

$$\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell_2$$



MA $\ell_1 \neq \ell_2$

es: $$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



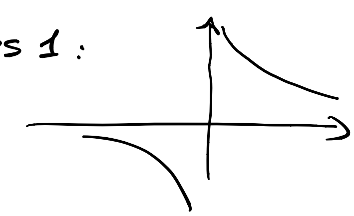
$H(x)$ ha una discontinuità di tipo salto in $x_0 = 0$

---

discontinuità di seconda specie:

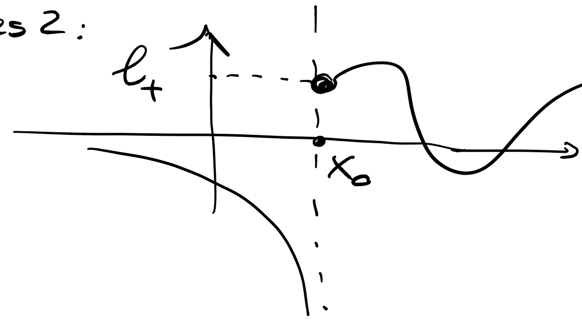
se almeno uno dei limiti destro o sinistro non esiste oppure vale $+\infty$, $-\infty$

es 1:



$f(x) = \frac{1}{x}$ $\qquad x_0 = 0 \notin \operatorname{dom} f$

ma è un punto di discontinuità di 2^a specie es 2:

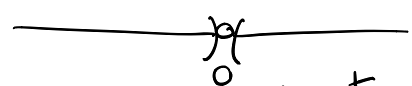


$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$$

$\Rightarrow$ x_0 punto di discont. di 2ª specie

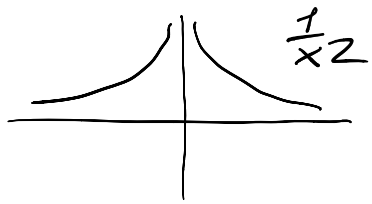
es 3: $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$

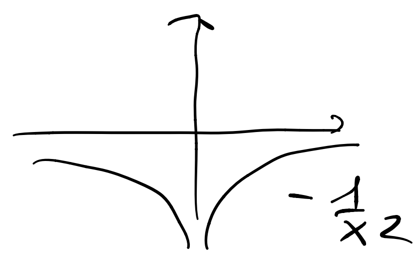
$\text{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

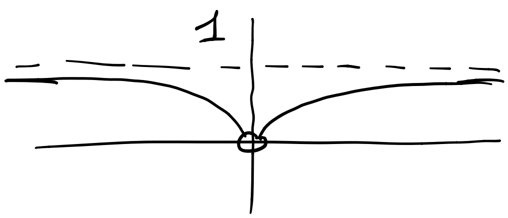


punto di accumulazione per dom f

$$\lim_{x \to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$$





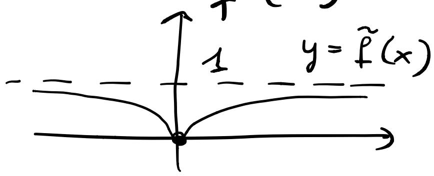


$y = e^{-\frac{1}{x^2}}$

$\Rightarrow$ $x_0 = 0$ è un punto di discontinuità eliminabile

$\Rightarrow$ è definito il prolungamento per continuità

$$\tilde{f}(x) \overset{def}{=} \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$



Teorema dell'unicità del limite

"Se il limite esiste, allora è unico"

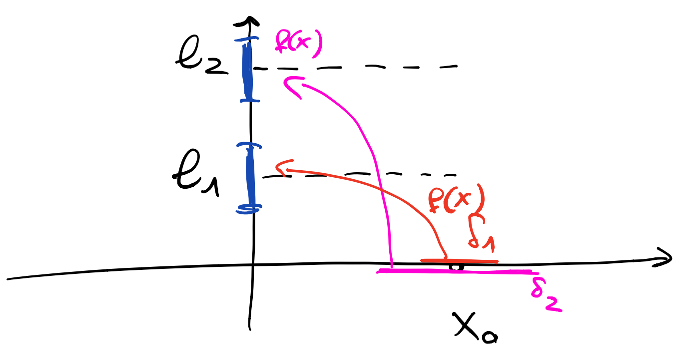
Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_1$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_2$

allora $\ell_1 = \ell_2$

Dim: per assurdo

supponiamo $\ell_1 \neq \ell_2$



$\ell_1 \neq \ell_2 \Rightarrow$ possiamo trovare due intorni DISGIUNTI di ℓ_1 e ℓ_2

per esempio $\varepsilon = \dfrac{|\ell_2 - \ell_1|}{3} = \frac{1}{3}$ distanza tra ℓ_1 e ℓ_2

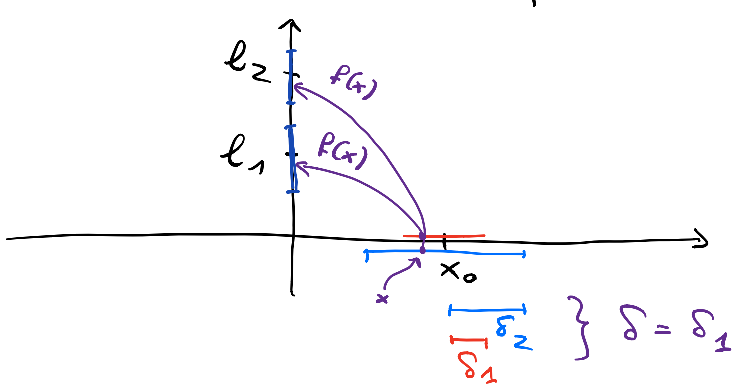
$f(x) \longrightarrow \ell_1$

$V_1 = (\ell_1 - \varepsilon, \ell_1 + \varepsilon)$

$\Rightarrow \exists\ \delta_1 > 0 : \left.\begin{array}{l} |x - x_0| < \delta_1 \\ x \in X \end{array}\right\} \Rightarrow |f(x) - \ell_1| < \varepsilon$

stesso discorso con $f(x) \longrightarrow \ell_2 : \exists\ \delta_2 > 0 :$
$|x - x_0| < \delta_2,\ x \in X \Rightarrow |f(x) - \ell_2| < \varepsilon$

se $\delta \stackrel{\text{def}}{=} \min\{\delta_1, \delta_2\}$



allora $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell_1| < \varepsilon$

$|f(x) - \ell_2| < \varepsilon$

ASSURDO

$\square$

o