Esercizi sulla Dinamica del punto materiale

(assegnati il 29/03/2018)

Esercizio 1

Una molla AB con costante elastica K_1 e lunghezza a riposo l_1 è appesa a una estremità A al soffitto, mentre un punto con massa m_1 è appeso all'altra estremità B in posizione verticale. Un'altra molla CD con costante elastica K_2 e lunghezza a riposo l_2 è appesa ad una estremità C alla massa m_1, mentre all'altra estremità D in posizione verticale è appesa la massa m_2. Una terza molla EF con costante elastica K_3 lunghezza a riposo l_3 è appesa alla massa m_2 in corrispondenza dell'estremità E, mentre all'altra estremità F è appesa la massa m_3 in posizione verticale. Il sistema riportato in Fig.1 è in equilibrio con la forza di gravità. Trovare gli allungamenti Δl_1, Δl_2, Δl_3 delle molle.

Dati: $m_1 = 1$[kg]; $K_1=100$ *[N/m]*; $m_2 = 2$[kg]; $K_2=200$ *[N/m]*; $m_3 = 3$[kg];
$K_3=300$ *[N/m]*;

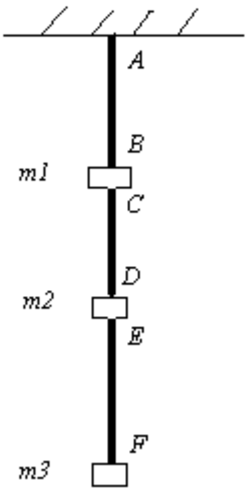


Fig.1

Soluzione es.1:

Assumendo un sistema di riferimento con l'asse verticale y (positivo verso alto), scriviamo la II e la III legge della dinamica per tutte le masse tenendo conto che sono a riposo:

$$0 = m\ddot{y}_1 = K_1\Delta l_1 - K_2\Delta l_2 - m_1 g$$
$$0 = m\ddot{y}_2 = K_2\Delta l_2 - K_3\Delta l_3 - m_2 g$$
$$0 = m\ddot{y}_3 = K_3\Delta l_3 - m_3 g$$

$$\Delta l_3 = \frac{m_3 g}{K_3} = 0.098m$$

$$\Rightarrow \quad \Delta l_2 = \frac{K_3 \Delta l_3 + m_2 g}{K_2} = \frac{(300 \cdot 0.098) + (2 \cdot 9.8)}{200} m = 0.245m$$

$$\Delta l_1 = \frac{K_2 \Delta l_2 + m_1 g}{K_1} = \frac{(200 \cdot 0.245) + (1 \cdot 9.8)}{100} m = 0.588m$$

Esercizio 2

Un cilindro cavo, il cui diametro interno è d, può ruotare attorno al suo asse verticale. Un uomo di massa M ha la schiena a contatto con la superficie interna (chiamiamola parete) del cilindro e si erge su una piattaforma orizzontale attaccato alla parete nella posizione A (vedi figura 2). Il coefficiente di attrito statico tra la schiena dell'uomo e la parete è μ_s. Al tempo t = 0 il cilindro inizia a ruotare attorno al proprio asse con una accelerazione angolare α. Dopo un tempo $t = t_1$ un dispositivo meccanico sposta la piattaforma nella posizione B, 20 cm sotto i piedi dell'uomo e l'accelerazione angolare diventa uguale a 0. Trovare il valore di t_1 tale che l'uomo non scivoli verso il basso lungo la parete .

Dati: *M=80[kg]; μ_s= 0.8; α= 0.07[rad/s²]; g=9.81[m/s²] d= 32[m];*

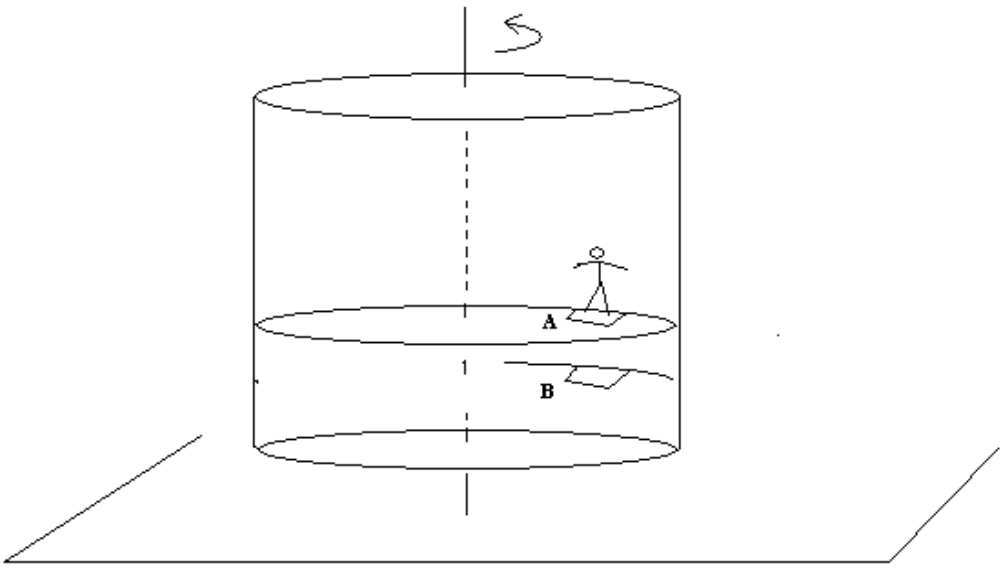


Fig.2

Soluzione es.2

Utilizzando un sistema di coordinate cilindriche la forza normale tra la schiena dell'uomo e la parete può essere ottenuta dalla componente radiale della seconda legge della dinamica:

$$M\frac{v^2}{R} = MR\omega^2 = N$$

l'attrito statico è $F_s = \mu_s N$ e agisce sul piano tangente alla parete, sulla schiena dell'uomo. Dopo un tempo t_1 le 3 componenti della II legge della dinamica si scrivono come:

$$M \cdot \ddot{s} \cdot \vec{\tau} = 0 = \vec{F}_s \cdot \vec{\tau}$$

$$M\frac{v^2(t)}{R} = MR\omega^2(t) = N$$

$$0 = Mg - F_s \Rightarrow F_s = Mg$$

in cui vediamo che la forza di attrito sulla parete laterale deve avere solo componente verticale, mentre è nulla la componente nella direzione tangente perchè la velocità angolare dopo il tempo t_1 è costante. Deve inoltre essere soddisfatta la relazione $F_s \leq \mu_s \cdot N$ e all'istante t_1 abbiamo $\omega^2(t_1) = \alpha t_1$, quindi:

$$F_s = Mg \leq \mu_s M \cdot R\omega^2(t_1)$$

$$t_1 \geq \frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{g}{\mu_s R}} \approx 12.5[s]$$

Ne segue che $t_1 = 12.5$ è il tempo dopo il quale l'uomo non cade a terra scivolando lungo la parete nel caso di abbassamento della piattaforma rispetto alla posizione in A.

Esercizio n.3

Un cavo di lunghezza l ha un'estremità fissata al punto O su un piano orizzontale ruvido. Una massa m avente un coefficiente di attrito viscoso β, è collegata all'altra estremità del cavo. I coefficienti di attrito statico e dinamico tra m ed il piano sono rispettivamente μ_s e μ_d. La massa viene colpita e acquista una velocità iniziale v_0 perpendicolare al cavo.

Trovare

1) in quale istante t_0 e a quale distanza s dal punto di partenza m si ferma

2) la tensione della corda quando m è nel punto di mezzo della traiettoria.

Dati: m=1[Kg]; μ_d =0.4; μ_s=0.5; =10 [m/s]; l=1 [m]; $\beta = 2 \cdot 10^{-3}[Kg/s]$

Soluzione es. 3

Assumiamo di lavorare in un sistema di riferimento con coordinate intrinseche nel piano orizzontale (quello del piano ruvido) e un asse z verticale positivo dal basso verso l'alto.

Sappiamo che le forze presenti agenti sul sistema sono: attrito dinamico e viscoso che agiscono con velocità opposta alla direzione del moto, la tensione T della corda e la normale N che è verticale lungo l'asse z.

Possiamo quindi scrivere la seconda legge di Newton tenendo in cosiderazione le suddette forze nel seguente modo:

$$\begin{aligned} m\cdot\ddot{s} &= -\beta\cdot\dot{s} - \mu_d N \\ \frac{m\cdot\dot{s}^2}{l} &= T \\ 0 = m\cdot\ddot{z} &= -m\cdot g + N \end{aligned} \quad ,$$

che definendo un cambio di variabile come segue:

$y = \dot{s} \Rightarrow \dot{y} = \ddot{s}$,

risulta darci l'equazione $\dot{y} = -\frac{\beta}{m}\cdot y - \mu_d g$

$$\dot{y} = -\frac{\beta}{m}\cdot y - \mu_d g \qquad \Rightarrow \qquad \dot{y} = -\frac{\beta}{m}\cdot(y + \frac{\mu_d m\cdot g}{\beta}) \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}(y + \frac{\mu_d m\cdot g}{\beta}) = -\frac{\beta}{m}\cdot(y + \frac{\mu_d m\cdot g}{\beta}) \Rightarrow \ln(y - \frac{\mu_d m\cdot g}{\beta}) = -\frac{\beta}{m}\cdot t + \ln C \Rightarrow$$

$$\dot{s} = y = -\frac{\mu_d m\cdot g}{\beta} + Ce^{-\frac{\beta}{m}\cdot t}$$

Le condizioni iniziali sono: $\dot{s}(0) = v_0$ e $s(0) = 0$, che poste nelle espressioni precedenti danno il valore della costante di integrazione C:

$$\dot{s}(t) = -\frac{\mu_d m\cdot g}{\beta} + (v_0 + \frac{\mu_d m\cdot g}{\beta})\cdot e^{-\frac{\beta}{m}\cdot t},$$

e

$$s(t) = -\frac{\mu_d m\cdot g}{\beta}t + (v_0 + \frac{\mu_d m\cdot g}{\beta})\cdot\frac{m}{\beta}(1 - \cdot e^{-\frac{\beta}{m}\cdot t}) \qquad (1)$$

Nota:

Guardando l'eq. (1), per elevati valori di t, s(t) diventa negativa: questo ovviamente non avviene perchè al tempo t_0, la velocità che è sempre decresente diventa 0.

Per determinare il valore di t_0 poniamo:

$$0 = -\frac{\mu_d m \cdot g}{\beta} + (v_0 + \frac{\mu_d m \cdot g}{\beta}) \cdot e^{-\frac{\beta}{m} \cdot t_0}$$

$$\Rightarrow \frac{\mu_d m \cdot g}{\beta} = (v_0 + \frac{\mu_d m \cdot g}{\beta}) \cdot e^{-\frac{\beta}{m} \cdot t_0}$$

$$\Rightarrow t_0 = \frac{m}{\beta} \cdot \ln(1 + \frac{\beta \cdot v_0}{\mu_d m \cdot g}).$$

Nell'istante t_0 la velocità è nulla, quindi l'attrito viscoso per sua definizione (dipende lineramente dalla velocità) è 0 e l'attrito dinamico diventa statico: la II legge della dinamica diventa dunque

$$m \cdot \ddot{s} = F$$

e il valore di F_s che soddisfa tale legge anche all'istante t_0 è $F_s = 0$. Quindi al tempo t_0 la massa m si ferma.

Esercizio n.4

Tre masse m_A= 10 *kg*, m_B=15 *kg*, m_C= 10 *kg* sono posizionate come riportato in figura 4 con angolo θ = 30° e sono connesse attraverso una fune ideale. Si suppone che le puleggie attraverso cui le masse sono connesse siano anch'esse ideali (senza massa e senza attrito).

Assumiamo inoltre che l'attrito con il piano orizzontale e inclinato sia del tutto trascurabile.

Calcolare le tensioni delle funi e stabilire qual'è la direzione del moto delle tre masse.

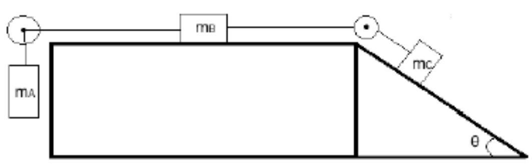


Fig. 4

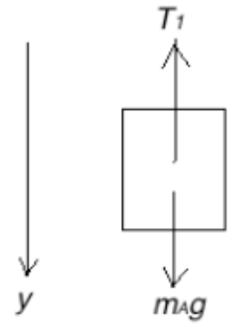
Soluzione es. 4

Per stabilire la direzione del moto possiamo semplicemente osservare la disposizione delle masse come riportato in fig. 4. A e C hanno la stessa massa ma mentre l'intera massa di A è applicata a B attraverso la fune della puleggia di sinistra, solo una frazione del peso (componente parallela al piano inclinato) di C è applicata a B attraverso la fune della puleggia di destra.

Quindi accade che: A va verso il basso, B si muove verso sinistra e C risale lungo il piano inclinato.

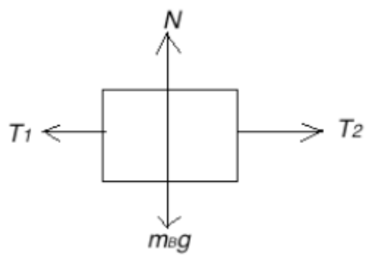
Per risolvere il problema applichiamo ordinatamente la II lagge di Newton alle tre masse studiandone il diagramma delle forze.

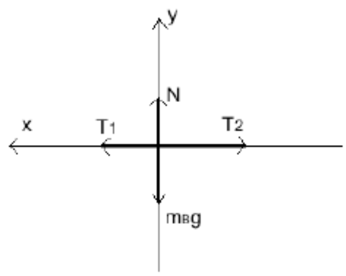
a) Iniziamo con la massa m_A e scegliamo un sistema di riferimento come quello della figura riportata a destra, tenendo conto che il moto in questo caso avverrà solo lungo la direzione dell'asse y.



$$m_A\vec{g} + \vec{T}_1 = m_A\vec{a}$$
$$\Rightarrow m_A g - T_1 = m_A a$$

b) Consideriamo ora la massa B e scegliamo il sistema di riferimento per scrivere le forze agenti su m_B come nella figura riportata sotto:



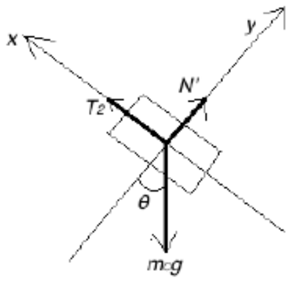


Scegliamo quindi l'asse delle x lungo la direzione in cui avviene il moto e con verso delle x crescenti da destra verso sinistra: stesso verso in cui abbiamo stabilito che avviene il moto delle 3 masse. Asse delle y perpendicolare all'asse delle x con verso positivo dal basso verso l'alto. Scriviamo dunque le forze agenti lungo i due assi per la massa B:

-lungo x $(T_1 - T_2) = m_B a$ dove l'accelerazione *a* è la stessa per le 3 masse essendo sia le funi che le puleggie ideali (nessuna attrito e con masse trascurabili);

-lungo y $N - m_B g = 0$

c) Infine occupiamoci della massa C scegliendo il sistema di riferimento riportato a destra scegliendo il verso degli assi in modo che seguano il verso del moto.



-lungo x $T_2 - m_C\, g \text{ sen } \theta = m_C a$

-lungo y $N' - m_C\, g \cos\theta = 0$

Il sistema da risolvere è quello delle tre equazioni lungo l'asse delle x che influenzano il moto (non abbiamo moto lungo y):

$$\begin{aligned} &m_A g - T_1 = m_A a \\ &T_1 - T_2 = m_B a \qquad \text{(II)} \\ &T_2 - m_c g \cdot sen\theta = m_C a \end{aligned}$$

Dalla prima equazione otteniamo $a = g - \frac{T_1}{m_A}$ che se sostiuita nella seconda e terza equazione del nostro sistema ha come risultato:

$$T_1 = m_B a + T_2 = m_B\left(g - \frac{T_1}{m_A}\right) + T_2$$

$$T_2 = m_c(g \cdot sen\theta + a) = m_c\left(g - \frac{T_1}{m_A}\right) + m_c g \cdot sen\theta = m_c g(1 + sen\theta) - \frac{m_c}{m_A} T_1$$

e infine:

$$T_1 = \frac{m_A g[m_c(1 + sen\theta) + m_B]}{m_A + m_B + m_C} = 85.7N$$

$$T_2 = m_c g(1 + sen\theta) - \frac{m_c}{m_A} T_1 = 64.3N$$

$$\Rightarrow a = \frac{m_A g - m_c g sen\theta}{m_A + m_B + m_C} = 1.42 m/s^2$$

Note:

- l'accelerazione positiva, in base a come abbiamo scelto i sistemi di riferimento, ci conferma che il moto avviene nella direzione e verso stabiliti prima;

- Avremmo potuto ottenere l'accelerazione anche con considerazioni semplici considerando che $m_A g$ è la forza che spinge il sistema verso sinistra; $m_C\, g$ sen θ è invece la forza che tende a portare verso destra le 3 masse $(m_A+m_B+m_C)$.

Quindi la seconda legge di Newton si poteva scrivere nel complesso come $\sum \vec{F} = (m_A + m_B + m_C)a = m_A g - m_C g \cdot sen\theta$ da cui si ricava l'accelerazione da sostituire poi nella prima e terza equazione del sistema (II) per trovare i valori delle due tensioni T_1 e T_2.

Esercizio n.5

Su un piano inclinato (riportato in Fig. 5) ruvido di lunghezza *l=2 m,* inclinato di $\alpha=10^0$ rispetto alla superficie orizzontale, è posta una massa *m=1 kg.*

I coefficienti di attrito statico e dinamico tra m ed il piano sono rispettivamente μ_s =0.5 e μ_d= 0.4. La massa viene spinta e acquista una velocità iniziale di modulo v_0= *2 m/s.* Trovare l'istante t_0 in cui la massa giunge al fondo del piano inclinato Fig.5 e la posizione dove la massa si arresta.

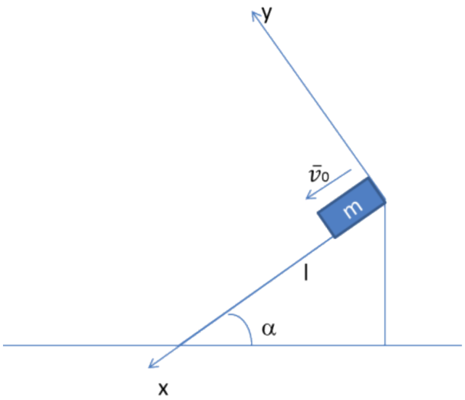


Fig.5

Soluzione es. 5

Poichè la massa si muove lungo il piano avremo attrito dinamico durante il moto. Per la prima parte del moto lungo il piano inclinato scegliamo il sistema di riferimento riportato in figura 5. In questo sistema di rifermento avremo:

$$m\ddot{x} = mgsen\alpha + F_d$$
$$m\ddot{y} = N - mg\cos\alpha = 0 \rightarrow N = mg\cos\alpha$$
$$m\ddot{z} = 0$$

Sappiamo che l'attrito per definizione ha la stessa direzione della velocità e verso opposto (decrescente delle x in questo caso), quindi:

$$\vec{F}_d = -\mu_d N\hat{i} = -\mu_d mg\cos\alpha\hat{i}$$

Possiamo dunque scrivere dalla prima equazione del sistema precedente:

$$m\ddot{x} = mgsen\alpha + m\ddot{x} = mgsen\alpha + F_d = mgsen\alpha - \mu_d mg\cos\alpha$$
$$\ddot{x} = gsen\alpha - \mu_d g\cos\alpha$$

La velocità del corpo si calcola integrando sul tempo l'espressione dell'accelerazione che abbiamo appena ricavato e otteniamo

$$\dot{x} = \int \ddot{x} dt = \int (gsen\alpha - \mu_d g\cos\alpha) dt = (gsen\alpha - \mu_d g\cos\alpha)t + C_1$$

Imponendo la condizione iniziale che all'istante t=0 il corpo ha velocità iniziale di modulo v_0 ricaviamo la costante di integrazione C_1

$$\dot{x}(t=0) = (gsen\alpha - \mu_d g\cos\alpha) * 0 + C_1 = v_0$$

$$\Rightarrow \dot{x} = (gsen\alpha - \mu_d g\cos\alpha)t + v_0$$

In modo del tutto analogo possiamo calcolare la posizione lungo x del corpo durante il moto integrando l'espressione della velocità:

$$x = \int \dot{x} dt = \int [(gsen\alpha - \mu_d g\cos\alpha)t + v_0] dt = \frac{1}{2}(gsen\alpha - \mu_d g\cos\alpha)t^2 + v_0 t + C_2$$

e sapendo che a t=0 la posizione x del corpo era 0 si ottiene C_2=0 e quindi

$$x = \frac{1}{2}(gsen\alpha - \mu_d g\cos\alpha)t^2 + v_0 t$$

Per trovare il tempo t_0 in cui la massa raggiunge la parte inferiore del piano dobbiamo imporre $x(t_0)$=l:

$$x(t_0) = \frac{1}{2}(gsen\alpha - \mu_d g\cos\alpha){t_0}^2 + v_0 t_0 = l$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}(gsen\alpha - \mu_d g\cos\alpha){t_0}^2 + v_0 t_0 - l = 0$$

$$\Rightarrow t_0 = \frac{-v_0 \pm \sqrt{{v_0}^2 + 2(gsen\alpha - \mu_d g\cos\alpha)l}}{gsen\alpha - \mu_d g\cos\alpha} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4.8}}{-2.2}$$

La soluzione dunque non esiste e vuol dire che la massa non raggiunge mai il fondo del piano inclinato ma si ferma prima.

Per determinare dove la massa si ferma dobbiamo calcolare innanzitutto il tempo t* in cui la massa ha velocità nulla (si arresta) e quindi:

$$\dot{x}(t^*) = (gsen\alpha - \mu_d g\cos\alpha)t^* + v_0 = 0$$

$$\Rightarrow t^* = -\frac{v_0}{gsen\alpha - \mu_d g\cos\alpha} = 0.9s$$

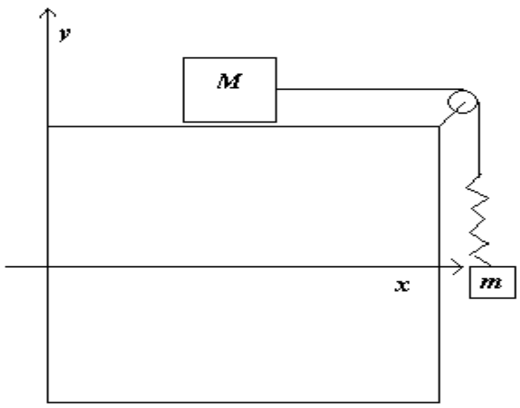
Inserendo a questo punto il valore di t* nell'equzione x(t) possiamo determinare la posizione in cui la massa si ferma:

$$x(t^*) = \frac{1}{2}(gsen\alpha - \mu_d g\cos\alpha) * (0.9)^2 + v_0 * (0.9) = 0.9m$$

Esercizio n.6

Su un piano ruvido con coefficienti di attrito dinamico e statico μ_d*= 0.1* e μ_s*= 0.3* si trova un cubo di massa *M* connesso, come rappresentato in figura, ad una corda che passa attraverso una puleggia priva di massa per poi essere connessa ad una molla verticale con lunghezza a riposo l_0 e costante elastica *k*. Una massa *m* e' a sua volta connessa alla molla come mostrato in figura. All'istante iniziale tutte le masse sono mantenute in quiete con una mano e la lunghezza della molla e' pari ad l_0. Ad un certo istante la massa *m* viene lascita libera di muoversi e cade verso il basso. Trovare il massimo valore della massa m che permette alla massa M di rimanere in quiete.

Dati: *M=0.1[kg]; k=200 [N/m];*



Soluzione es. 6

Scegliamo un sistema di riferimento in coordinate intrinseche, con origine nella posizione iniziale of m, orientato da M verso m. Fino a quando la massa M non si muove abbiamo solo l'azione dell'attrito statico e l'estremo superiore della molla e' in quiete. Le forze che agiscono su m sono la forza elastica e la gravita' e sono entrambe dirette lungo $\vec{\tau}$. La seconda lege di Newtono per la massa m si scrive come:

$$m\ddot{s}(t) = -k \cdot s(t) + mg \Rightarrow \ddot{s}(t) + k \cdot s(t) = mg \qquad (1)$$

con la condizione iniziale: $s(0) = 0; \dot{s}(0) = 0$

La soluzione dell'equazione omogenea (1) puo' essere scritta come: $s_o(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, con $\omega^2 = \frac{k}{m}$. La soluzione particolare si scrive come una costante nel seguente modo: $s_p(t) = \frac{mg}{k}$. La soluzione completa e' dunque:

$$s(t) = s_p(t) + s_p(t) = A\cos(\omega t + \varphi) + \frac{mg}{k},$$

con la velocita' che si ottiene detivando l'espressione di *s(t)*:

$\dot{s}(t) = -\omega A \sin(\omega t + \varphi)$. Applicando le condizioni iniziale descritte prima si ottiene: $s(t) = \frac{mg}{k}(1 - \cos \omega t)$ (2)

L'elongazione massima della molla secondo la (2) e': $s_{MAX} = 2\frac{mg}{k}$ (quando

($\cos \omega t^*) = -1$) e in questa posizione il modulo della forza elastica su entrambe le masse M ed m sara' $F_E = ks_{MAX} = 2mg$. Questo valore, poiche' M e' a riposo, deve uguagliare la forza di attrito:

$$F_s = 2mg \leq \mu_s Mg \Rightarrow m_{MAX} = \frac{\mu_s M}{2}$$

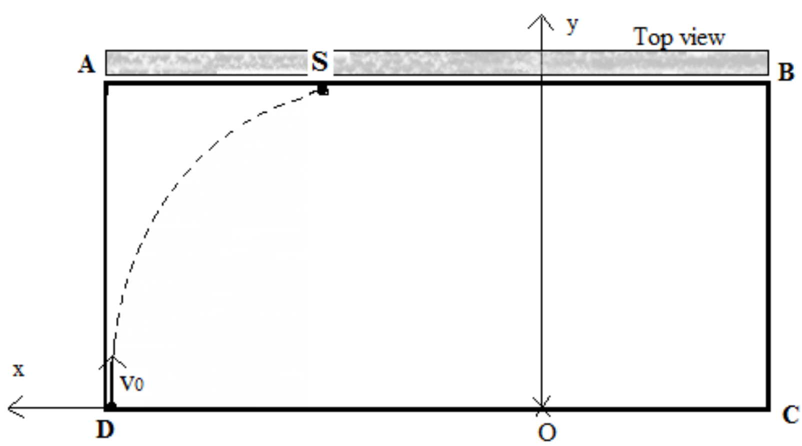
Esercizio n.7

Consideriamo un tavolo privo di attriti ABCD come mostrato nella figura seguente e immerso in un campo magnetico costante uniforme $\vec{B}$, perpendicolare al tavolo ed entrante rispetto al piano, come rappresentato in figura. Una piccola massa sferica *m* carica con carica *q* giunge sul tavolo nel punto D con una velocita' $\vec{v}_0$ parallela a DA.

La sfera tocca nel punto S un piccolo strumento di rivelazione, rappresentato come un rettangolo grigio scuro in figura e che e' allineato ad AB, producendo un segnale che misura la distanza *d*=AS.

Trovare il valore della carica *q* della sfera di massa *m*.

Dati: *m= 0.05 [Kg]*, *B=0.8 [T]*,
$DA \equiv h = 2[m]$,
$AS \equiv d = 1[m]$
$v_0 = 10[m/s]$



Soluzione es. 7

Considerando che il campo magnetico e' costante ed uniforme e la componente della velocita' lungo il campo e' inizialmente nulla, la traiettoria della massa e' una circonferenza. Sappiamo inoltre che la velocita' iniziale e' parallela ad DA, quindi il centro O della circonferenza sara' sulla perpendicolare ad DA, ad esempio lungo DC. Scegliamo ora un sistema di riferimento come quello riportato nella figura della pagina precedente, ricordando che il raggio della traiettoria e' $R = OD = OS$.

In questo sistema di riferimento l'asse z e' entrante nel tavolo (ad esempio B>0) e l'equazione della circonferenza e': $R^2 = x^2 + y^2$. Se chiamiamo x_s, y_s le coordinate del punto S($x_s = R - d, y_s = h$) possiamo determinare il raggio come:

$$R^2 = x_s^2 + y_s^2 = (R-d)^2 + h^2 \Rightarrow R = \frac{d^2 + h^2}{2d} \approx 2.5[m]$$

Tenendo in considerazione l'espressione della forza di Lorentz e della velocita' in un moto circolare avremo:

$$m\frac{v_0^2}{R} \cdot \vec{n} = \vec{F}_L \Rightarrow m\frac{v_0^2}{R} = \left|\vec{F}_L\right| = qv_0B \Rightarrow R = \frac{mv_0}{qB} = const$$

dove il versore $\vec{n}$ e' diretto lungo il raggio della circonferenza. A questo punto troviamo che la carica vale: $q = \dfrac{m \cdot v_0}{R \cdot B} \approx 0.25[C]$. Il segno della carica si determina ricordando che in D la forza di Lorenz si scrive come: $\vec{F}_L = q \cdot v\vec{j} \times B\vec{k} = qvB \cdot \vec{i}$. Pocihe' la massa sferica e' accelerata verso $-\vec{i}$, allora possiamo dire che la carica ha segno negativo: $q \approx -0.25[C]$