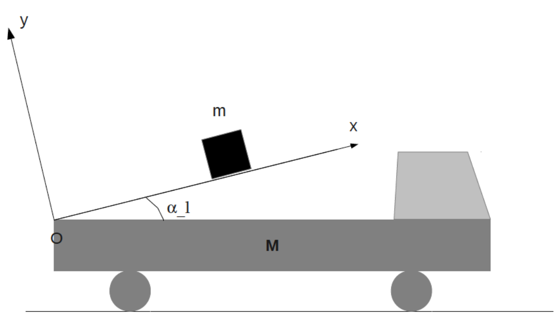
Esercizi assegnato in aula + esercizi per casa (27/04/2018)
Dinamica dei sistemi - Urti

Esercizio assegnato in aula in data 27/04

Un blocco di pietra di massa m=150 kg si trova su una piattaforma mobile di un camion di massa M= 1500 kg. La piattaforma è ruvida e i coefficienti di attrito statico e dinamico valgono μ_S=0.6 e μ_d=0.45.
La piattaforma viene progressivamente inclinata di un angolo che chiamiamo α.
Determinare:
1) il valore limite dell'angolo α_l in corrispondenza del quale il blocco inizia a scivolare lungo la piattaforma;
2) Il valore del coefficiente di attrito tra le ruote del camion e il terreno affinché il camion rimanga fermo.

Soluzione:

1)Consideriamo il seguente sistema di riferimento:



Fino a quando il blocco di massa m rimane ferma sulla piattaforma la seconda legge di Newton lungo le due componenti x e y si può scrivere come:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -mg\ sin(\alpha) + F_s = 0 \\ m\ddot{y} = N - mg\ cos(\alpha) = 0 \end{cases}$$

e quindi:

$$\begin{cases} mg\ sin(\alpha) = F_s \\ N = mg\ cos(\alpha) \end{cases}$$

Per definizione di attrito statico, applicata in assenza di moto, possiamo scrivere:

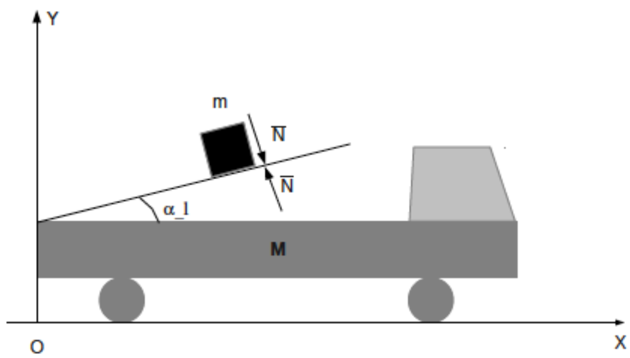
$$|F_s| \leq \mu_{sp} N = \mu_{sp} mg\ cos(\alpha)$$

che utilizzando la relazione che abbiamo trovato $F_s = mg\ sin(\alpha)$ diventa:

$$mg\ sin(\alpha) \leq \mu_{sp} mg\ cos(\alpha) \Rightarrow sin(\alpha) \leq \mu_{sp}\ cos(\alpha) \Rightarrow tg(\alpha) \leq \mu_{sp}$$

Da cui si ricava che il valore dell'angolo limite è $\alpha_l = 31^0$

2) Per risolvere questo secondo punto può risultare utile sceglie il sistema di riferimento come riportato di seguito:



Noi sappiamo che la forza normale $\vec{N}$ è applicata sul blocco m dalla piattaforma e che una forza normale uguale a $\vec{N}$ in modulo ma con verso opposto è applicato dal camion al terreno. Questa forza normale che non è bilanciata lungo l'asse x dall'attrito delle ruote sul terreno sarebbe responsabile del moto del camion.
Nel sistema di riferimento scelto e indicato sopra la forza normale applicata dal blocco m sul camion può essere decomposta lungo le due direzioni X e Y nel seguente modo:

$$\begin{cases} N_x = N sin(\alpha) = mg\ cos(\alpha) * sin(\alpha) \\ N_y = -N cos(\alpha) = -mg\ cos(\alpha) * cos(\alpha) = -mgcos(\alpha)^2 \end{cases}$$

La seconda legge di Newton riferita alle sorse che agiscono sul camion si può scrivere come:

$$\begin{cases} M\ddot{X} = N_x + F_s \\ M\ddot{Y} = R_T - Mg + N_y \end{cases}$$

dove R_T è la reazione (normale) applicata dal terreno sulle ruote del camion. Si noti che nella prima equazione stiamo considerando la generica espressione di N_x e F_s senza tenere conto del segno.

Lungo l'asse Y per avere equilibrio avremo quindi $M\ddot{Y} = R_T - Mg + N_y = 0 \Rightarrow R_T = Mg - N_y$ e pioché $N_y = -mgcos(\alpha)^2$

si può scrivere

$$R_T = Mg - N_y = Mg + mgcos(\alpha)^2$$

Per avere equilibro lungo l'asse X deve essere

$$M\ddot{X} = N_x + F_s = 0 \Rightarrow F_s = -N_x = -mg\ cos(\alpha) * sin(\alpha)$$

Utilizzando la definizione di attrito statico, se non vogliamo che ci siamo moto per il camion si ha:

$$|F_s| \leq \mu_{st} R_T = \mu_{st}(Mg + mg\ cos(\alpha)^2)$$

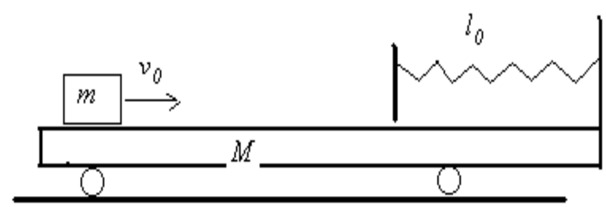
$$\Rightarrow \mu_{st} \geq \frac{|F_s|}{Mg + mg\ cos(\alpha)^2}$$

$F_s = -mg\ cos(\alpha) * sin(\alpha)$, therefore $|F_s| = mg\ cos(\alpha) * sin(\alpha)$; so:

$$\mu_{st} \geq \frac{mg\ cos(\alpha) * sin(\alpha)}{Mg + mg\ cos(\alpha)^2} \Rightarrow \mu_{st} \geq \frac{m\ cos(\alpha) * sin(\alpha)}{M + m\ cos(\alpha)^2} = 0.040$$

Esercizio per casa n.1

Una molla di costante elastica *K=1000 [N/m]* e lunghezza a riposo l_0 *= 0.5[m]* ha un'estremità collegata ad una parete B fissata su una piattaforma mobile che giace su una strada orizzontale. L'altra estremità A si trova ad una distanza l_0 da B sulla piattaforma. La massa totale del sistema è *M=20 [kg]*. Un cubetto di massa *m=0.5[kg]* giace sulla piattaforma nel punto C ad una distanza *L = 0.6[m]* da *A*. Non vi è attrito tra la massa e la piattaforma nè tra la piattaforma e la strada (che è equivalente a dire che la piattaforma e il cubetto hanno ruote molto piccole di massa trascurabile). Inizialmente *m* e *M* sono in quiete: *m* viene colpita e acquisisce una velocità $\vec{v}_0$ verso *A*, sulla piattaforma, andando a colpire la molla dopo un tempo t_0 = 0.3 s.



Trovare le velocità $\vec{v}$ e $\vec{V}$ di *m* e *M*

a) dopo la collisione con la molla

b) quando la molla raggiunge la minima lunghezza e trovare la massima compressione della molla.

Soluzione es. n.1

Si prenda l'asse x orizzontale con verso concorde a $\vec{v}_0$.

Non agiscono forze esterne lungo l'asse x, quindi si conserva la componente orizzontale della quantità di moto del sistema formato da m + M; inoltre, tutte le forze che compiono lavoro sono conservative quindi si conserva l'energia meccanica:

$$mv_0 = mv + MV$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}K(l-l_0)^2$$

con v_0 dato dal moto rettilineo uniforme compiuto nel tratto L dal cubetto, cioè $v_0 = L/t = 2$ m/s.

a) Un istante dopo l'urto, essendo $l = l_0$, abbiamo

$$mv_0 = mv + MV$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2$$

Ricavando dalla prima equazione l'espressione di v e sostituendola nella seconda, otteniamo

$$v = v_0 - \frac{M}{m}V$$

$$\frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}\frac{M^2}{m}V^2 - Mv_0V$$

e infine risolvendo l'equazione di secondo grado per V, troviamo le due soluzioni

$$V = 0, v = v_0$$

$$V = 2v_0\frac{m}{m+M}, v = \frac{m-M}{m+M}v_0$$

La prima corrisponde all'istante appena dopo la collisione con la molla, la seconda corrisponde al momento in cui il cubetto passa nuovamente per la posizione di riposo della molla dopo la compressione e l'inversione del moto.

Nel secondo caso $V = 9.7\ 10^{-2}\ m/s$, e $v = -1.9\ m/s$.

b) Quando la molla raggiunge la minima lunghezza, inverte il moto rispetto alla piattaforma e pertanto è istantaneamente ferma rispetto ad essa, quindi $v = V$.

Ne segue che

$$mv_0 = (m+M)V \Rightarrow V = v = \frac{m}{m+M}v_0 = 4.8\cdot 10^{-2}\, m/s$$

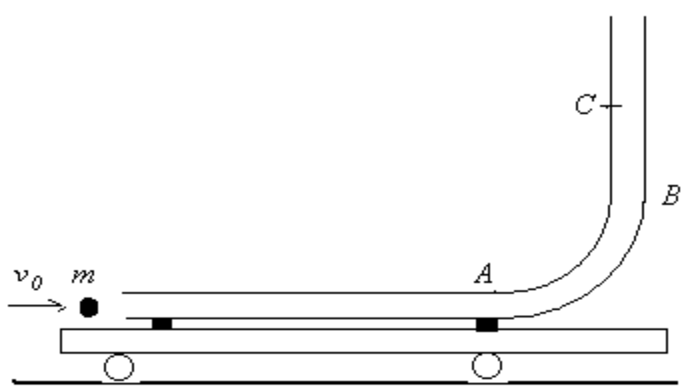
Dalla conservazione dell'energia

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}(m+M)V^2 + \frac{k}{2}(l_0 - l)^2$$
$$\Rightarrow l_0 - l = \sqrt{\frac{mM}{m+M}}v_0 = 0.044m$$

Esercizio per casa n.2

Un tubo ha la forma mostrata in figura: due sezioni perpendicolari una all'altra sono collegate da un quarto di cerchio AB. Il tubo è fissato sul carrello che è inizialmente in quiete su delle rotaie orizzontali. Il raggio di curvatura della sezione curva è *R=10 [cm].* Le pareti del tubo sono lisce. La massa totale del tubo e del carrello è *M = 2 [kg].* Una pallina di massa *m =0.01 [kg]* è lanciata orizzontalmente dentro il tubo con una velocità v_0*=50[m/s]*.

Trovare:
1. la massima altezza *h* raggiunta dalla pallina (punto C).
2. le velocità, rispettivamente *v* e *V*, della pallina e del carrello quando la pallina esce dal tubo.



Soluzione es. n.2:

1) Assumiamo asse x orizzontale con verso positivo concorde alla velocità $\vec{v}_0$.

Le forze esterne agenti lungo l'asse x sono nulle, quindi si conserva la componente orizzontale della quantità di moto. Inoltre lungo la direzione verticale la pallina è soggetta alla forza di gravità che è conservativa. Abbiamo quindi le due equazioni:

$$mv_0 = (m+M)V$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}(m+M)V^2 + mgh \qquad \Rightarrow$$

$$V = \frac{m}{(m+M)}v_0 = 0.25m/s$$

$$h = \frac{m(v_0^2 - V^2) - MV^2}{2mg} = 127m$$

NOTA: Si noti che la pallina e il sistema formato da tubo e carrello hanno la stessa velocità nel punto C. Questo è solitamente caratteristica di un urto anelastico, anche se in questo caso la dinamica successiva evolve in modo differente.

2)

Assumiamo asse x orizzontale con verso positivo concorde alla velocità $\vec{v}_0$.

Come nel punto precedente, le forze esterne sono nulle lungo l'asse x, mentre lungo l'asse y agisce la forza di gravità, che è conservativa. Le forze interne non sono dissipative perchè non vi sono attriti. Perciò, la componente orizzontale della quantità di moto del sistema e l'energia meccanica totale del sistema si conservano. Le equazioni sono:

$$mv_0 = mv + MV$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2$$

NOTA: la pallina e il sistema formato da tubo e carrello hanno velocità finali differenti, che corrispondono al caso di urto elastico.

Svolgendo I calcoli troviamo:

$$v = \frac{M-m}{M+m} \cdot v_0 = -49.5m/s$$

perchè la pallina torna indietro rispetto alla velocità iniziale, e

$$V = \frac{m(v_0 - v)}{M} = \frac{2m}{M+m} \cdot v_0 = 0.5m/s$$

La situazione è la stessa nel caso in cui la pallina sia rimasta all'interno del tratto verticale di tubo oppure ne sia uscita durante il moto. Infatti, anche se fosse uscita dal tubo, essendo la sua velocità orizzontale costante in questo tratto e uguale a quella del *carrello, ad un certo istante successivo farà ritorno all’interno dello stesso.*