01 - ELEMENTI DI LOGICA MATEMATICA

PROPOSIZIONE LOGICA = è una frase a cui si può sempre associare un valore di verità: VERO (V)
FALSO (F)

es:

- "oggi è una bella giornata"
  NON è una proposizione logica

- "10 è minore di 4"
  è una proposizione logica perché posso assegnare il valore F (= FALSO)

PREDICATO = enunciato matematico che dipende da una o più variabili. Diventa VERO o FALSO una volta fissato il valore della variabile

es: $p(n)$: "$-n$ è un numero naturale"
$n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3 .. \}$

$p(2) =$ "-2 è un numero naturale"
FALSO

$p(0)$ è VERA

— o —

CONNETTIVI LOGICI

Sia p una proposizione

- NEGAZIONE: $\neg p$ "non p"

$\neg p$ è VERA se p è FALSA e viceversa

es: p: "4 è un numero primo" F

$\neg p$: "4 NON è un numero primo" V

— o —

- CONGIUNZIONE: date p e q due proposizioni

$p \wedge q$ "p e q"

è vera solo se sia p sia q sono VERE altrimenti è falsa

es: p: "$x^2 = 1$ ha 2 soluzioni in $\mathbb{N}$" F

q: "3 è un numero dispari" V

$p \wedge q$ è FALSA, $(\neg p) \wedge q$ è VERA

- DISGIUNZIONE : date p e q proposizioni

$p \vee q$ "p o q"
oppure

è vera se almeno una tra p e q è vera

- IMPLICAZIONE : date due proposizioni p e q

$p \Rightarrow q$ "p implica q"
"se p allora q"
"p è condizione sufficiente per q"
"q è condizione necessaria per p"

$p \Rightarrow q$ è FALSA quando p è vera e q è falsa
altrimenti è vera.

es: p: "5 è un numero dispari" V
q: "5 è un numero irrazionale" F

$\neg p$: è FALSA "5 non è un numero dispari"

$\neg q$: VERA "5 non è un numero irrazionale"

$p \wedge q$ è FALSA

$p \vee q$ è vera

$(\neg p) \vee q$ è falsa
$\quad$ F $\quad$ F

$p \Rightarrow q$ è falsa
V $\quad$ F

———— o ————

- DOPPIA IMPLICAZIONE :

date due proposizioni p e q

$p \Leftrightarrow q$ "p se e solo se q"

"p è condizione necessaria e sufficiente per q"

$p \Leftrightarrow q$ è vera se p e q hanno lo stesso valore di verità cioè sono entrambe vere oppure entrambe false

———— o ————

NOTA: $p \Rightarrow q$ ha lo stesso valore di verità di

(a) $(\neg p) \vee q$

(b) $(\neg q) \Rightarrow (\neg p)$ CONTRONOMINALE

(c) $p \wedge (\neg q) \Rightarrow (\neg p)$ DIMOSTRAZIONE PER ASSURDO

Cosa significa: considero le tabelle di verità

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

=

Tabella di verità di $(\neg p) \vee q$:

p	q	$\neg p$	$(\neg p) \vee q$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

——— o ———

QUANTIFICATORI

posso ottenere una proposizione (= VERA o FALSA) usando i quantificatori su un predicato:

- QUANTIFICATORE UNIVERSALE

$\forall$ "per ogni"

$\forall x, p(x)$ "per ogni x vale p(x)"

es: $p(n)$: "$\frac{n}{3}$ è un numero naturale"

$\forall n \in \mathbb{N}, p(n)$ F

- QUANTIFICATORE ESISTENZIALE:

$\exists$ "esiste" (esiste almeno)

$\exists x : p(x)$ "esiste (almeno) un elemento x tale che vale p(x)"

$\exists!$ "esiste unico"
"esiste esattamente uno"

es: $p(n)$: "$\frac{n}{3}$ è un nr naturale"

$\exists n \in \mathbb{N} : p(n)$ V ← per dim. che è vera, basta un esempio: p(3) oppure p(9)

$\exists! n \in \mathbb{N} : p(n)$ F

NOTA:

$\forall x,\ p(x)$ per essere vera, la proprietà $p(x)$ deve valere V per TUTTE le x nell'insieme considerato

Messaggio: un solo esempio non dà la dimostrazione

$$\neg\left(\forall x,\ p(x)\right) = \exists\, x : \neg p(x)$$

in questo caso basta un esempio

$$\neg\left(\exists x : p(x)\right) = \forall x,\ \neg p(x)$$