esercizi di AlgLinGeo 2017/18

7 - CAMBIAMENTI DI BASE E AUTOVETTORI

1. Nello spazio vettoriale $\mathbf{R}^2$ si consideri la base $\mathcal{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j})$ e i vettori $\mathbf{i}' = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathbf{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathbf{j}, \mathbf{j}' = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathbf{j}$. Provare che $(\mathbf{i}', \mathbf{j}')$ sono una base $\mathcal{B}'$ e determinare le formule che esprimono i cambiamenti di base. Determinare le componenti del vettore $\mathbf{v} = 3\mathbf{i}' - \mathbf{j}'$ nella base $\mathcal{B}$ e quelle di $\mathbf{w} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ nella base $\mathcal{B}'$.

2. Sia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ l'endomorfismo associato rispetto alla base canonica alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

determinare la matrice di f rispetto alla base formata dai vettori $(1, 1)$ e $(1, -1)$.

3. E' dato l'endomorfismo $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definito da $f(x, y, z) = (x - 3z, 2y, -x + 3z)$. Stabilire se il vettore $(0, 3, 0)$ è autovettore per f e in caso affermativo trovare il corrispondente autovalore.

4. Verificare che l'endomorfismo f di $\mathbf{R}^2$ definito da $f(x, y) = (-y, x)$ non ha autovettori e dare una spiegazione geometrica di questo fatto.

5. Verificare (per via geometrica) che l'endomorfismo che associa ad ogni punto P di $\mathbf{R}^3$ il simmetrico rispetto al piano $2x - y + 3z = 0$ è diagonalizzabile; determinare inoltre una base di $\mathbf{R}^3$ tale che rispetto ad essa l'endomorfismo sia rappresentato da una matrice diagonale.

6. Dato l'endomorfismo f di $\mathbf{R}^3$ definito da $f(\mathbf{e_1}) = 2\mathbf{e_1}, f(\mathbf{e_2}) = \mathbf{e_3}, f(\mathbf{e_3}) = \mathbf{0}$ dove $(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3})$ è la base canonica di $\mathbf{R}^3$, verificare che gli autospazi di f sono $V_0 = \{(0, 0, z)\}$, al variare di $z \in \mathbf{R}$ e $V_2 = \{(x, 0, 0)\}$ al variare di $x \in \mathbf{R}$.

7. Si consideri l'endomorfismo f di $\mathbf{R}^3$ definito da $f(\mathbf{e_1}) = 2\mathbf{e_1}, f(\mathbf{e_2}) = \mathbf{e_3}, f(\mathbf{e_3}) = \mathbf{0}$ dove $(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3})$ è la base canonica di $\mathbf{R}^3$; si trovino autovettori e autovalori di f.

8. Stabilire se la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile e in caso affermativo diagonalizzarla.

9. E' dato l'endomorfismo f di $\mathbf{R}^3$ definito da $f(x, y, z) = (x, 3x + y, x + 2y + z)$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(i) $(0, 0, 1)$ appartiene a $Im(f)$;

(ii) 0 è autovalore per f;

(iii) $(1, 0, 0)$ è autovettore per f ;

(iv) $(1, 0, 0)$ appartiene a $Ker(f)$.

10. Una matrice $M \in \mathbf{R}^{3,3}$ ha autovalori $0, 1, -1$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(i) M è invertibile;

(ii) M ha polinomio caratteristico $p(T) = 1 - T^3$;

(iii) M non è diagonalizzabile;

(iv) gli autospazi di M hanno dimensione 1.

11. Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(i) A ha tre autovalori distinti;

(ii) A è invertibile;

(iii) un autospazio di A ha dimensione 2;

(iv) i è autovalore di A.

12. La matrice

$$N = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) ha rango 1;

(ii) ha tutti gli autovalori di molteplicità 1 ;

(iii) è diagonalizzabile;

(iv) ha due autospazi distinti di dimensione 1.

9 - SOLUZIONI

1.

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 3\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

7. La matrice di f rispetto alla base canonica è

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

il polinomio caratteristico è perciò $T^2(2-T)$ e gli autovalori sono $0, 2$. L'autospazio V_0 si ottiene risolvendo il sistema omogeneo associato alla matrice di f, perciò $V_0 = (0,0,z)$, al variare di $z \in \mathbf{R}$; l'autospazio V_2 si ottiene risolvendo il sistema omogeneo associato alla matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

quindi $V_2 = (x,0,0)$ al variare di $x \in \mathbf{R}$.

8. La matrice M assegnata ha polinomio caratteristico $T^2(-T+3)$, quindi gli autovalori sono 0 (con molteplicità 2) e 3 (con molteplicità 1); le dimensioni degli autospazi sono $dim(V_0) = 3 - rg(M)$ e $dim(V_3) = rg(M - 3I)$ e quindi coincidono con le molteplicità dei rispettivi autovalori, perciò M è diagonalizzabile. Gli autospazi sono $V_0 = (x, y, -x-y)$, $V_3 = (x,x,x)$; una base di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori è per esempio $\mathcal{B} = ((1,0,-1),(0,1,-1),(1,1,1))$; rispetto a tale base si ottiene per f la matrice diagonale:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

9. (i)

10. (iv)

11. (i)

12. (iv)