Esercitazione del 9/4/2018

Dinamica

Esercizio 1

Un'auto percorre una curva su una traiettoria circolare di raggio $r = 100\,m$.
a) Se l'attrito radente tra asfalto e pneumatici vale $\mu_s = 0.3$ determinare la massima velocità con la quale può essere percorsa la curva senza slittare.
b) Se la curva è inclinata rispetto all'orizzontale di un angolo $\theta = \pi/6$, determinare la massima velocità con la quale può essere percorsa la curva senza slittare nell'ipotesi di attrito trascurabile.
c) Come cambia l'impostazione del problema nel caso in cui l'attrito tra pneumatici e asfalto non sia più trascurabile?

Soluzione

a) Le forze applicate all'auto sono: la forza peso, diretta lungo la verticale verso il basso; la reazione normale, diretta lungo la verticale verso l'alto; la forza di attrito, diretta verso il centro della traiettoria. Usando coordinate intrinseche nel piano, la seconda legge di Newton si scompone nelle componenti tangenziale e normale

$$F_t = m\,a_t$$
$$F_c = m\,a_c = m\,\frac{v_t^2}{r}$$

La prima equazione descrive la dinamica lungo la tangente alla traiettoria.
Assumendo $v_t = costante \quad \Rightarrow \quad a_t = 0 \quad \Rightarrow \quad F_t = 0$.
La seconda equazione descrive le condizioni sulla stabilità della traiettoria. In questo caso, la forza centripeta si identifica con la forza di attrito statico tra pneumatici e asfalto, diretta verso il centro della curva. Pertanto

$$F_c \equiv F_a \leq \mu_s\,|\vec{N}| \equiv \mu_s\,m\,g$$

ovvero

$$\mu_s\,m\,g \geq m\,\frac{v_t^2}{r} \qquad \Rightarrow \qquad v_t \leq \sqrt{\mu_s\,g\,r} = 17.14\,m/s$$

b) Le forze applicate all'auto sono: la forza peso, diretta lungo la verticale verso il basso; la reazione normale, perpendicolare alla superficie inclinata e diretta verso l'alto. Assumendo un sistema di riferimento con il versore $\hat{i}$ parallelo alla superficie inclinata (come nel caso di un piano inclinato) possiamo scomporre la forza peso nei due componenti parallelo e ortogonale al piano stradale

$$P_{\parallel} = m\,g\,\sin\theta$$
$$P_{\perp} = m\,g\,\cos\theta$$

Stessa scomposizione si applica alla forza centripeta, orizzontale e diretta verso il centro della curva

$$F_{c\parallel} = m\,\frac{v^2}{r}\,\cos\theta$$
$$F_{c\perp} = m\,\frac{v^2}{r}\,\sin\theta$$

Identificando la componente parallela al piano stradale della forza peso $P_{\parallel}$ con l'omologa della forza centripeta $F_{c\parallel}$ si ottiene

$$m\,\frac{v^2}{r}\,\cos\theta = m\,g\,\sin\theta \qquad \Rightarrow \qquad v_t = \sqrt{g\,r\,\tan\theta} = 23.78\,m/s$$

c) Le forze applicate all'auto sono: la forza peso, diretta lungo la verticale verso il basso; la reazione normale, perpendicolare alla superficie inclinata e diretta verso l'alto; la forza di attrito, diretta lungo la superficie inclinata del piano stradale, il cui verso non può essere fissato a priori poichè dipende dalla velocità dell'auto. Assumendo come in precedenza un sistema di riferimento con il versore $\hat{\imath}$ parallelo alla superficie inclinata, scomponiamo la forza peso nei due componenti parallelo e ortogonale al piano stradale

$$P_{\|} = m\, g\, \sin\theta$$
$$P_{\perp} = m\, g\, \cos\theta$$

Stessa scomposizione si applica alla forza centripeta, orizzontale e diretta verso il centro della curva

$$F_{c\|} = m\, \frac{v^2}{r}\, \cos\theta$$
$$F_{c\perp} = m\, \frac{v^2}{r}\, \sin\theta$$

Identificando la componente parallela al piano stradale della forza centripeta $F_{c\|}$ con la componente parallela al piano stradale della forza pose $P_{\|}$, $\pm$ la forza di attrito F_a, dove il segno $\pm$ tiene conto del fatto che il verso della forza di attrito non è determinabile a priori, si ottinene

$$m\, \frac{v^2}{r}\, \cos\theta = m\, g\, \sin\theta \pm F_a$$

Ricordando che la forza di attristo statico al distacco vale $F_a = \mu_s\, |\vec{N}|$ dove

$$|\vec{N}| = m\, \frac{v^2}{r}\, \sin\theta + m\, g\, \cos\theta$$

si ha

$$m\, \frac{v^2}{r}\, \cos\theta = m\, g\, \sin\theta \pm \mu_s\, m\, \left(\frac{v^2}{r}\, \sin\theta + m\, g\, \cos\theta\right)$$

che risolta in v_t dà

$$v_t = \sqrt{r\, g}\, \sqrt{\frac{\sin\theta \pm \mu_s\, \cos\theta}{\cos\theta \mp \mu_s\, \sin\theta}}$$

In questo modo si ottengono le due velocità limite $v_- = 15.22\, m/s$ e $v_+ = 32.25\, m/s$. All'interno di questo intervallo di velocità l'auto potrà percorrere la curva con un raggio di 100 metri senza sbandare.

Esercizio 2

Un punto materiale di massa *m = 1 [Kg]* è legato ad un filo di lunghezza *l = 1 [m],* la cui altra estremità è fissata nel punto *P*. Sotto il punto P, ad una distanza *d=0.6[m],* lungo la verticale, si trova un chiodo fissato al muro nel punto *O*. All'inizio la massa *m* è nel punto A e il filo è orizzontale. La massa viene lasciata cadere (assumendo che non vi sia attrito con l'aria) come un pendolo di lunghezza *l* fino a che raggiunge la posizione verticale *B*: dopo questo punto la lunghezza del pendolo diviene *(l-d)*. Trovare la tensione *T* del filo quando la massa forma un angolo $\alpha = 45^0$ rispetto alla verticale (vedere Figura 1).

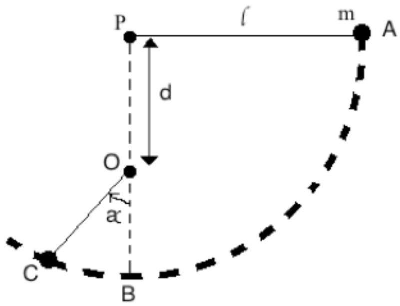


Figura 1

Soluzione es. 2

Tutte le forze in gioco sono conservative (forza di gravità), oppure non compiono lavoro (tensione). Pertanto l'energia meccanica totale si conserva. Scegliendo un sistema di riferimento con asse y verticale, positivo verso l'alto e con origine in B, abbiamo:

$$mgl = \frac{1}{2}mv^2(\alpha) + mg \cdot (l-d) \cdot (1-\cos\alpha)$$
$$v^2(\alpha) = 2g \cdot (d + (l-d) \cdot \cos\alpha) \approx 17.32[m^2/s^2]$$

Inoltre, la seconda legge di Newton deve essere applicata lungo il vettore unitario intrinseco $\vec{n}$ e quindi la tensione T è calcolata come segue:

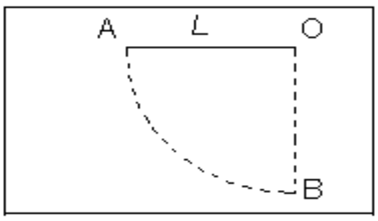
$$\frac{mv^2(\alpha)}{l-d} = T - mg \cdot \cos(\alpha)$$
$$T = \frac{mv^2(\alpha)}{l-d} + mg \cdot \cos(\alpha) \approx 50.4[N]$$

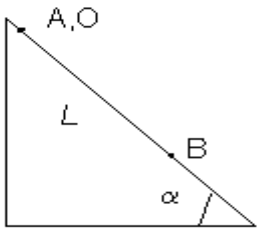
Esercizio 3

Su un piano inclinato di un angolo α rispetto ad un piano orizzontale, si trova una corda di lunghezza *L* con un'estremità fissata nel punto *O*. Una massa puntiforme *m* è collegata all'altro capo della corda. Tra la massa *m* e la superficie del piano inclinato c'è attrito con coefficienti di attrito statico e dinamico rispettivamente μ_s e μ_d. Inizialmente la massa si trova sul piano in un punto A tale che il segmento OA sia orizzontale e di lunghezza pari ad *L*. Al tempo $t = 0$ la massa viene lasciata andare.

a) Indicare la lista delle forze che agiscono su *m*.
b) Tra queste indicare quelle conservative e quelle non conservative.
c) Calcolare il lavoro svolto da ogni forza su *m* dal punto *A* al punto *B* dove *m* raggiunge la minima altezza.
d) Trovare la velocità v_B di *m* in *B*.

Dati: $m = 1$ [kg] ; $L = 1$ [m]; $\mu_d = 0.6$; $\mu_s = 0.65$; $\alpha = 60°$;





Soluzione es.3

Assumendo un sistema di coordinate intrinseche sulla superficie del piano inclinato, con O come centro di curvatura e A come origine, l'asse z perpendicolare al piano e definendo θ come l'angolo formato sul piano inclinato dalla corda rispetto alla direzione OA, possiamo scrivere:

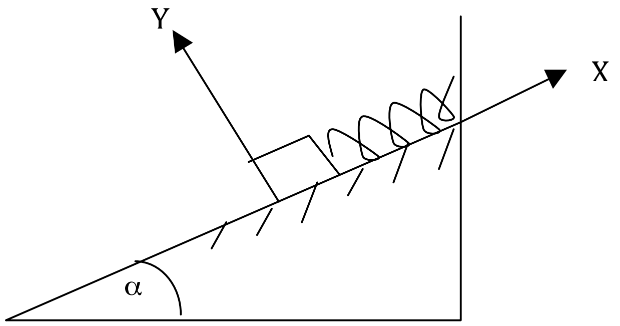
a) N = normale al piano, T = tensione della corda, forza di gravità e attrito dinamico.
b) Conservative: forza di gravità; Non conservative: attrito; (N e T non compiono lavoro).
c) $W_N = 0$; $W_T = 0$; $W_g = m \cdot g \cdot L \cdot \sin\alpha = 8{,}487\,J$;
$W_d = -\mu_d m \cdot g \cdot L \cdot \cos\alpha\ \pi L/2 = -4{,}618\,J$;
d)

$$\frac{m}{2}v_B^2 - m \cdot g \cdot L \cdot \sin\alpha = -\mu_d m \cdot g \cdot \cos\alpha \cdot \frac{\pi}{2}L \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_B^2 = 2 \cdot g \cdot L \cdot (\sin\alpha - \mu_d \cdot \cos\alpha \cdot \frac{\pi}{2}) \Rightarrow v_B = 2.78 m/s$$

Esercizio 4

Un cubo di massa *m* giace su un piano inclinato di un angolo α. La superficie del piano è scabra e i coefficienti di attrito statico e dinamico sono, rispettivamente, μ_d e μ_s . Sulla faccia laterale superiore del cubo è collegata una molla di costante elastica *K*; mentre l'altra estremità della stessa è fissata ad una parete verticale sulla somità del piano inclinato. Al tempo *t=0* il cubo è in quiete, la lunghezza della molla è quella di riposo e un impulso molto piccolo $\vec{I}$ è impresso alla massa verso il basso lungo il piano inclinato, per un intervallo di tempo Δt molto breve. Δt è così breve che alla sua fine la molla è ancora in quiete, mentre $\vec{I}$ è così piccolo che l'energia cinetica iniziale del cubo è trascurabile. Trascurando la viscosità dell'aria, trovare:



a) La massima elongazione *l* della molla
b) La distanza *d* (dalla posizione iniziale) a cui il cubo si arresta definitivamente.

Dati: $m=0.2[kg]; K=200[N/m]; \mu_d= 0.1; \mu_s= 0.3; \alpha= 30°; g=9.81[m/s^2]$

Soluzione es. 4

Assumendo l'asse x lungo il piano inclinato, positivo verso l'alto, come sistema di riferimento con origine nella posizione iniziale del cubo, possiamo scrivere:

a) $-\mu_d mgl\cos\alpha = -mgl\sin\alpha + \frac{1}{2}Kl^2 \Rightarrow l = \frac{2mg}{K}(\sin\alpha - \mu_d\cos\alpha)$

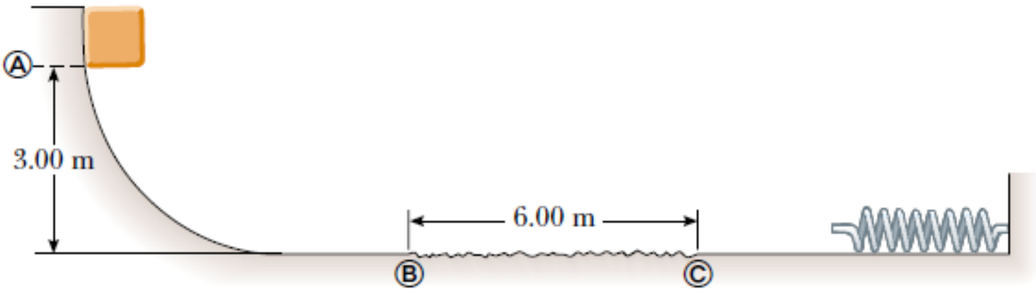
b) Controllo della condizione sull'attrito statico:

$$0 = -mg\sin\alpha + Kl + F_s \Rightarrow F_s = mg\sin\alpha - Kl =< 0$$
$$|F_s| > \mu_s mg\cos\alpha$$

La forza esercitata dalla molla è più grande di quella di gravità, inoltre la condizione sulla forza di attrito statico non è soddisfatta, quindi $\vec{F}_s$ *non può mantenere il cubo fermo nella posizione x=-l e questo torna a salire verso la sommità. Esso si fermerà ad una distanza d dall'origine e possiamo applicare ancora il teorema del lavoro:*

$$-\mu_d mg(l-d)\cos\alpha = -mg(d-l)\sin\alpha + \frac{1}{2}K(d^2-l^2) \Rightarrow d = \frac{2mg}{K}(\sin\alpha + \mu_d\cos\alpha) - l$$

Esercizio 5



Un blocco di massa m=10.0 kg viene lasciato andare da un punto A come indicato in figura. Il percorso è privo di attrito, eccetto per il segmento tra B e C , che ha lunghezza L= 6.00 m. Il blocco scende lungo il percorso, colpisce una molla con costante elastica k= 2250 N/m, e comprime la molla di x=0.30 m rispetto alla sua posizione di equilibrio prima di arrestarsi momentaneamente.

a) Determinare la velocità del blocco quando si trova in B

b) Determinare la velocità del blocco quando si trova in C

c) Determinare il coefficiente di attrito dinamico tra il blocco e la superficie scabra presente nel tratto BC.

Soluzione es. 5

a) la velocità del blocco in B è determinata usando la conservazione dell'energia meccanica tra A e B:

$E_A = E_B \rightarrow mgh = ½\, mv_B^{\,2}$ $\qquad v_B = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 10\text{m/s}^2 \cdot 3\text{m}} \cong 7.75 \text{ m/s}$

b) la velocità del blocco in C è determinata usando la conservazione dell'energia meccanica tra C e la posizione finale del moto (quando la molla è compressa e il blocco momentaneamente fermo)

$E_C = E_f \rightarrow ½\, mv_C^{\,2} = ½\, k\, x^2$

$$v_C = \sqrt{\frac{k}{m}}x = \sqrt{\frac{2250 \text{ N/m}}{10.0 \text{ kg}}}0.300\text{m} = 4.50 \text{ m/s}$$

c) il coefficiente d'attrito dinamico può essere calcolato sfruttando il fatto che, tra B e C, il lavoro fatto dalla forza d'attrito (che è una forza non-conservativa) è uguale alla variazione di energia meccanica del sistema:

E_C-E_B=W_{nc} → $\frac{1}{2}mv_C^2 - \frac{1}{2}mv_B^2 = -\mu_k mgL$ e quindi $\frac{v_B^2 - v_C^2}{2gL} = \mu_k = 0.33$