Esercitazione del 16/4/2018

Esercizio n.1

Un blocco di massa M è collegato ad una fune pendente da una puleggia priva di massa. Una persona di massa m < M, posta sul pavimento, comincia a risalire l'altro capo della fune. É possibile che la persona faccia sollevare il blocco? In tale caso, trovare l'accelerazione del blocco e la tensione della fune.
DATI: M=100 kg; m=60 kg (si assuma $g = 10\ m/s^2$).

Soluzione n.1

Per la persona è possibile sollevare il blocco se essa risale la fune con un'accelerazione sufficientemente grande, in modo da fornire alla fune stessa una grande accelerazione. Consideriamo la seguente Figura, che rappresenta il moto in questione

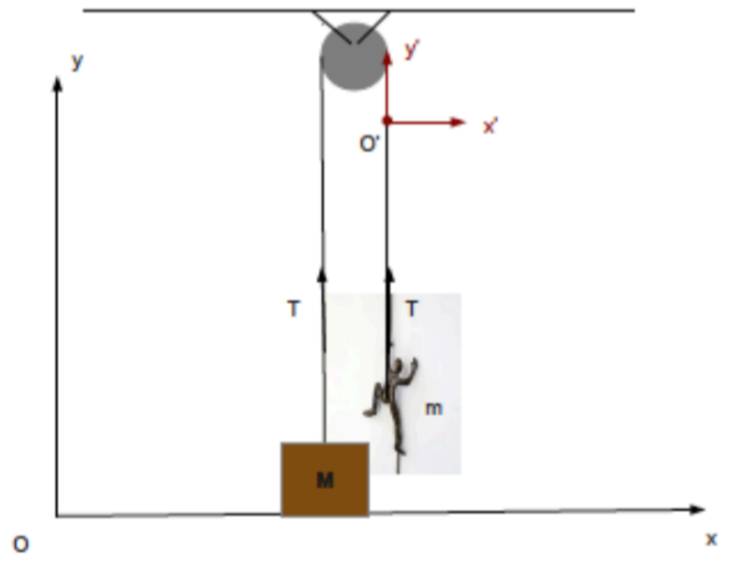


Figure 1.

Per rispondere alla domanda di questo problema è necessario introdurre due sistemi di riferimento. Il primo sistema di riferimento (x,y) ha l'asse x lungo lo spigolo inferiore del blocco quando questo si trova in quiete al suolo e l'asse y verticale, perpendicolare ad x. Il secondo sistema di riferimento (x',y') si muove con la fune. Ha origine O' fissata in un punto della fune e gli assi x',y' paralleli a x,y. Nel sistema di riferimento mobile (x',y') solidale alla fune, l'accelerazione della persona vale

$\ddot{y}' = a$, il cui valore è da determinare. Sia invece $\ddot{y}$ quella nel sistema di riferimento (x,y). Per quanto riguarda il blocco, sia $\ddot{Y}$ l'accelerazione nel sistema di riferimento (x,y), mentre il punto della fune coincidente con O' ha, nello stesso sistema di riferimento, accelerazione $\ddot{y}_{O'} = -\ddot{Y}$. Dobbiamo trovare il minimo valore di *a* necessario a far salire il blocco.

Sappiamo che l'accelerazione nel sistema di riferimento fisso può essere calcolata dall'accelerazione nel sistema mobile come

$$\ddot{y} = \ddot{y}' + \ddot{y}_{O'}$$

tralasciando i termini coinvolti nella rotazione del sistema di riferimento in moto.
Unendo le quantità note, troviamo $\ddot{y} = \ddot{y}' + \ddot{y}_{O'} = a - \ddot{Y}$.

Ora è necessario considerare le forze agenti sulla persona e sul blocco. Sulla persona abbiamo

$$m\ddot{y} = m\left(a - \ddot{Y}\right) = -mg + T$$

in cui T è la tensione della fune e *mg* il modulo della forza peso. Sul blocco invece $M\ddot{Y} = -Mg + T$.

Se sottraiamo la seconda equazione dalla prima otteniamo:

$$ma - mY - MY = -mg + T + Mg - T,$$

che diventa

$$ma - m\ddot{Y} - M\ddot{Y} = -mg + Mg = g(M - m),$$

e

$$ma - (m + M)\ddot{Y} = g(M - m)$$

da cui

$$\ddot{Y} = \frac{ma - g(M - m)}{m + M} = \frac{ma + g(m - M)}{m + M}$$

Per sollevare il blocco deve essere $\ddot{Y} \geq 0$ per cui dalla precedente troviamo la condizione $a \geq \frac{g(M-m)}{m}$=6.67 m/s^2 .

La tensione della fune può essere ottenuta sommando membro a membro le due equazioni precedenti, da cui: $ma - m\ddot{Y} + M\ddot{Y} = -mg + T - Mg + T$ che diventa

$$ma - m\ddot{Y} + M\ddot{Y} = 2T - (m + M)g$$

e

$$T = \frac{ma + \ddot{Y}(-m + M) + (m + M)g}{2}$$

Caso 1:

E' possibile applicare al blocco, per un istante, un'accelerazione $a > \frac{g(M-m)}{m}$ e poi continuare con un'accelerazione costante $a = \frac{g(M-m)}{m}$. In questo caso, l'accelerazione del blocco nel sistema di riferimento fisso sarà $\ddot{Y} > 0$ for un istante e poi diventerà $\ddot{Y} = 0$ ed il blocco continuerà a salire con velocità costante. Allora, in questo caso con $a = \frac{g(M-m)}{m}$ avremo, $\ddot{Y} = 0$ e tensione della fune

$$T = \frac{ma+\ddot{Y}(M-m)+(m+M)g}{2} = Mg \simeq 1000N$$

maggiore che nel caso più semplice in cui la velocità di risalita è costante, i.e. *a = 0.*

Caso 2:

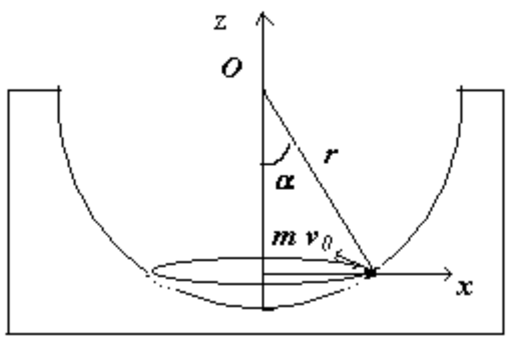
Consideriamo il caso in cui sia sempre $a > \frac{g(M-m)}{m}$. Prendiamo un valore per a maggiore di 6.67 m/s^2: per esempio $a = 8m/s^2$. In questo caso abbiamo per l'accelerazione:$\ddot{Y} = \frac{ma+g(m-M)}{m+M} = 0.5\ m/s^2$ mentre per la tensione T:

$$T = \frac{ma + \ddot{Y}(-m + M) + (m + M)g}{2}$$
$$= \frac{ma + \frac{ma + g(m - M)}{m + M}(-m + M) + (m + M)g}{2}$$

che sviluppando tutti i calcoli diventa $T = \frac{mM(a+2g)}{m+M} = 1050N.$

Esercizio n.2

Sulla superficie interna di una tazza semisferica di raggio R si trova una pallina di massa m, inizialmente in quiete, posta in un punto il cui raggio forma un angolo α rispetto alla verticale. La pallina viene colpita e riceve una velocità iniziale orizzontale $\vec{v}_0$, tangente alla superficie. Trovare il modulo v_0 della velocità iniziale sapendo che la massima altezza raggiunta dalla pallina è il bordo superiore della tazza (non sono presenti attriti).



DATI: *m=0.2[kg]; R= 15 [cm]* $\alpha = 30°$

Soluzione es.2

Forze agenti sulla pallina: forza normale e forza di gravità.

Proprietà della forza normale: a) radiale rispetto al centro O della sfera, b) non compie lavoro.

Proprietà della forza di gravità: conservativa.

Si può dedurre che:

a) *l'energia meccanica totale è conservata*
b) *se O è scelto come polo (fisso), la normale non contribuisce al momento delle forze esterne* $\vec{\tau}_O$
c) *la gravità non è centrale e contribuisce a* $\vec{\tau}_O$
d) *Se scegliamo un sistema di riferimento cilindrico con asse verticale z e origine e polo nel centro O della sfera, il vettore spostamento* $\vec{r}$ *, la velocità* $\vec{v}$ *, il momento angolare* $\vec{L}_o$ *e l'energia meccanica* E *possono essere scritti come:*

$$\vec{r} = r \cdot \vec{\lambda} + z \cdot \vec{k};$$

$$\vec{v} = \dot{r} \cdot \vec{\lambda} + r\dot{\vartheta} \cdot \vec{\mu} + \dot{z} \cdot \vec{k}$$

$$\vec{L}_0 = \vec{r} \times m\vec{v} = m(r \cdot \vec{\lambda} + z \cdot \vec{k}) \times (\dot{r} \cdot \vec{\lambda} + r\dot{\vartheta} \cdot \vec{\mu} + \dot{z} \cdot \vec{k}) = -mrz\dot{\vartheta} \cdot \vec{\lambda} + m \cdot (\dot{r}z - r\dot{z})\vec{\mu} + mr^2\dot{\vartheta} \cdot \vec{k}$$

$$E = \frac{1}{2} m \cdot (\dot{r}^2 + (r\dot{\vartheta})^2 + \dot{z}^2)$$

Osserviamo che ci sono due forze agenti su m: la normale, che è sempre parallela al vettore spostamento e non contribuisce al momento delle forze rispetto ad O e la forza di gravità, il cui momento è:

$$\vec{\tau}_0 = \vec{r} \times mg \cdot \vec{k} = (r \cdot \vec{\lambda} + z \cdot \vec{k}) \times mg \cdot \vec{k} = mrg \cdot \vec{\mu}$$

Siccome il momento totale delle forze non ha componente lungo l'asse z, $L_{0z} = mr^2\dot{\vartheta} = const$.

Siccome la normale non compie lavoro e la forza di gravità è conservativa, l'energia meccanica è costante. Siano L_{0z}^i, E_i *e* L_{0z}^f, E_f *i valori iniziali e finali della componente lungo z del momento angolare e della energia meccanica.*

Nella posizione iniziale:

$r_i = R\sin\alpha; r_i\dot{\vartheta}_i = v_0; L_{0z}^i = mR\sin\alpha \cdot v_0; E_i = \frac{1}{2}mv_0^2 - mgR\cos\alpha$ *, perchè la velocità è solo parallela a* $\vec{\mu}$.

Anche nella posizione finale la velocità è parallela a $\vec{\mu}$ *, perciò:*

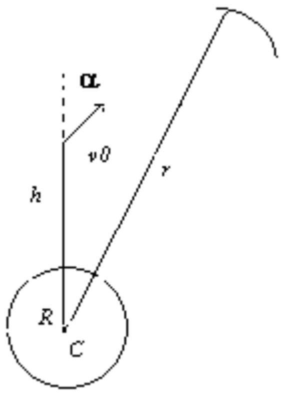
$$r_f = R; r_f\dot{\vartheta}_f = v_f; L_{0z}^f = mR \cdot v_f; E_f = \frac{1}{2}mv_f^2 .$$

Uguagliando l'energia iniziale e finale e il momento angolare otteniamo il sistema:

$$mR\sin\alpha \cdot v_0 = mR \cdot v_f \qquad\qquad v_0 \sin\alpha = v_f$$
$$\frac{1}{2}mv_0^2 - mgR\cos\alpha = \frac{1}{2}mv_f^2 \qquad \Rightarrow \qquad v_0^2 = \frac{2gR}{\cos\alpha}$$

Esercizio n.3

Un razzo sta salendo verso lo spazio lungo una traiettoria radiale dalla superficie terrestre. Ad altezza *h* (fuori dall'atmosfera) un satellite è lanciato dal razzo a velocità v_0 inclinata di un angolo α rispetto alla traiettoria radiale. Trovare l'angolo α tale che il satellite finisca in una orbita circolare attorno alla Terra e trovare il raggio dell'orbita.



Soluzione es. 3

Dopo il lancio l'unica forza agente sul satellite è la forza gravitazionale, che è una forza centrale. Pertanto il momento rispetto al polo C, considerato in quiete, è nullo e per questo il momento angolare è costante. Inoltre l'accelerazione del satellite è sempre solo radiale.

Assumendo un sistema di riferimento cilindrico con origine nel centro della Terra, asse z perpendicolare all'orbita, possiamo scrivere l'accelerazione radiale, il momento angolare $\vec{L}(r)$ *e l'energia meccanica totale* $E(r)$ *come funzione della distanza r :*

$$-\frac{mv_\vartheta^2}{r} = -\gamma\frac{mM}{r^2}$$
$$U_G(r) = -\gamma\frac{mM}{r}$$
$$\vec{L}(r) = r\vec{\lambda} \times m \cdot (v_r(r)\vec{\lambda} + v_\vartheta(r)\vec{\mu}) = m \cdot r \cdot v_\vartheta \cdot \vec{k}$$
$$E(r) = E_c + U_G = \frac{1}{2}m \cdot (v_r^2(r) + v_\vartheta^2(r)) - \gamma\frac{mM}{r}$$

Inserendo $r = r_0$ *(essendo* $r_0 = R+h$*) per la posizione iniziale subito dopo il lancio ed r per l'orbita circolare finale, dai teoremi di conservazione abbiamo:*

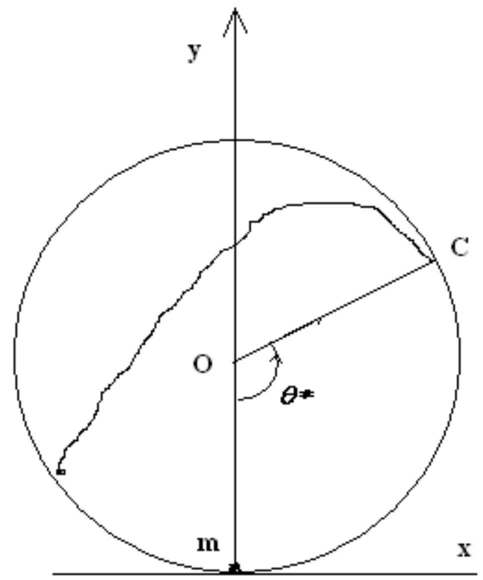
$$mr_0 v_0 \cdot \sin\alpha = mrv_\vartheta$$
$$\frac{1}{2}m \cdot v_0^2 - \gamma\frac{mM}{r_0} = \frac{1}{2}m\cdot(v_r^2(r) + v_\vartheta^2(r)) - \gamma\frac{mM}{r} \qquad (2)$$

Affinchè l'orbita finale sia circolare deve essere $v_r(r_{MAX}) = 0$*, e da (2) si ha:*

$$\begin{aligned} & r_0 \cdot (v_0 sen\alpha) = rv_\vartheta \\ & \frac{1}{2}v_0^2 - \gamma\frac{M}{r_0} = \frac{1}{2}v_\vartheta^2 - \gamma\frac{M}{r} \\ & v_\vartheta^2 = \gamma\frac{M}{r} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} & v_\vartheta^2 = 2\gamma\frac{M}{r_0} - v_0^2 \\ & r = \gamma\frac{M}{v_\vartheta^2} \\ & sen\alpha = \frac{rv_\vartheta}{r_0 v_0} \end{aligned}$$

Esercizio n.4

Un pendolo di lunghezza *l* ha la massa *m* inizialmente lungo la verticale, sotto il punto fisso *O*. Viene colpito ricevendo una velocità iniziale orizzontale $v_0 = 0.2 \cdot \sqrt{2gl}$. Trovare la posizione del punto C dove *m* lascia l'orbita circolare.



Soluzione es. 4

Per prima cosa notiamo che le forze agenti su m sono la tensione della corda che non è conservativa ma non compie lavoro e la forza di gravità che è conservativa. Possiamo applicare la conservazione dell'energia meccanica *totale e scrivere la formula dell'accelerazione centripeta delle orbite circolari.*

Scegliendo un sistema di riferimento come in figura, l'energia totale e la componente centripeta (in coordinate intrinseche) della Seconda Legge di Newton per un angolo θ *sono:*

$$E(\theta) = \frac{1}{2}mv^2(\theta) + mgy = \frac{1}{2}mv^2(\theta) + mgl(1-\cos\theta)$$
$$\frac{mv^2(\theta)}{l} = T - mg\cos\theta$$

L'energia è la stessa nel punto più basso così come nel punto finale preso in considerazione. Perciò:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2(\theta) + mgl(1-\cos\theta) \Rightarrow$$
$$mv^2(\theta) = lT - mgl\cos\theta$$
$$mv_0^2 = lT - mgl\cos\theta + 2mgl(1-\cos\theta) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow mv_0^2 - 2mgl + 3mgl\cos\theta = lT \geq 0$$

Imponendo $T = 0$ *per* $\theta = \theta^*$ *:*

$$v_0^2 - 2gl + 3gl\cos\theta^* = 0 \quad e: \quad \cos\theta^* = \frac{2}{3} - \frac{v_0^2}{3gl}$$