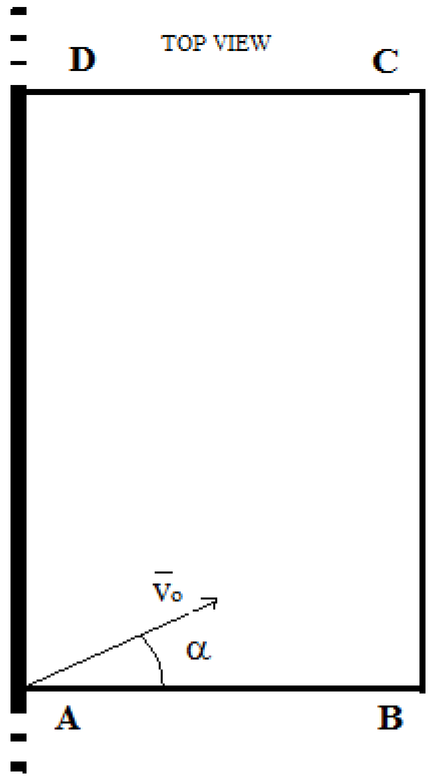
ESERCITAZIONE DEL 23 APRILE 2018

Esercizio 1

Su un tavolo orizzontale liscio ABCD una massa puntiforme *m,* con carica elettrica *q,* si trova nell'angolo A al tempo $t = 0$, con velocità in modulo v_0 e inclinata di un angolo α rispetto al lato AB. Una grande parete verticale di area *S* è posta lungo il lato AD del tavolo e contiene una carica *Q* uniformemente distribuita (vedi Figura). Usando un sistema di riferimento cartesiano con origine in A, asse *x* lungo AB, positivo da A a B e asse *y* lungo AD, positivo da A a D, trovare:

a) Il valore e la direzione del campo elettrostatico generato dalla carica *Q*;
b) Il valore e la direzione della forza elettrostatica $\vec{F}$ applicata sulla carica *q*;
c) La minima distanza d_{min} dal lato BC raggiunta dalla massa *m*;
d) L'istante t_1 in cui la massa *m* tocca ancora il muro AD.

DATI:
m =2 [Kg]; q= -2x10^{-5} [C]; Q =5x10^{-5} [C]; α = 60°; 1/4$\pi\varepsilon_0$=9x10^9 [N m^2/C^2]; S = 25 [m^2]; AB = 2 [m]; $v_0 = 4[m/s]$; *g=9.8[m/s^2].*



Soluzione esercizio 1

Con il sistema di riferimento suggerito dal testo:

a) $\sigma = \dfrac{Q}{S} \approx 2 \cdot 10^{-6} [C/m^2] \Rightarrow$

$$\vec{E} = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S}\vec{i} \equiv E \cdot \vec{i} \approx 1.13 \cdot 10^5 \cdot \vec{i} [N/C]$$

b) $\vec{F} = qE \cdot \vec{i} \approx -2.26 \cdot \vec{i} [N]$

c) Il moto di m avviene sul piano orizzontale, sotto l'azione della forza $\vec{F}$ *. Le equazioni del moto sono:*

$$m \cdot \ddot{x}(t) = F$$
$$m \cdot \ddot{y}(t) = 0 \; ,$$

con C.I.:

$$\dot{x}(0) = v_0 \cos\alpha \qquad x(0) = 0$$
$$\dot{y}(0) = v_0 \sin\alpha \quad e \quad y(0) = 0$$

la cui soluzione è:

$$\dot{x}(t) = \frac{F}{m} t + v_0 \cos\alpha \qquad x(t) = \frac{F}{2 \cdot m} t^2 + v_0 \cos\alpha \cdot t$$
$$\dot{y}(t) = v_0 \sin\alpha \quad e \;\; infine: \quad y(t) = v_0 \sin\alpha \cdot t$$

La minima distanza da BC corrisponde al massimo valore di $x(t_0)$, che viene raggiunto quando la componente x della velocità si annulla al tempo t_0 dato da:

$$\dot{x}(t_0) = \frac{F}{m} t_0 + v_0 \cos\alpha = 0 \Rightarrow t_0 = -\frac{m}{F} \cdot v_0 \cos\alpha \approx 0.884[s] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t_0) = \frac{F}{2 \cdot m} t_0^2 + v_0 \cos\alpha \cdot t_0 \approx 1.77[m] \Rightarrow d_{\min} \approx 0.232[m]$$

d) *La massa m incontra nuovamente il lato AD (dopo il passaggio iniziale da A al tempo t=0) quando* $x(t_1) = 0$ *:*

$$x(t_1) = \frac{F}{2 \cdot m} t_1^2 + v_0 \cos\alpha \cdot t_1 = 0 \Rightarrow t_1 = -\frac{2m}{F} \cdot v_0 \cos\alpha = 2 \cdot t_0 \approx 3.54[s]$$

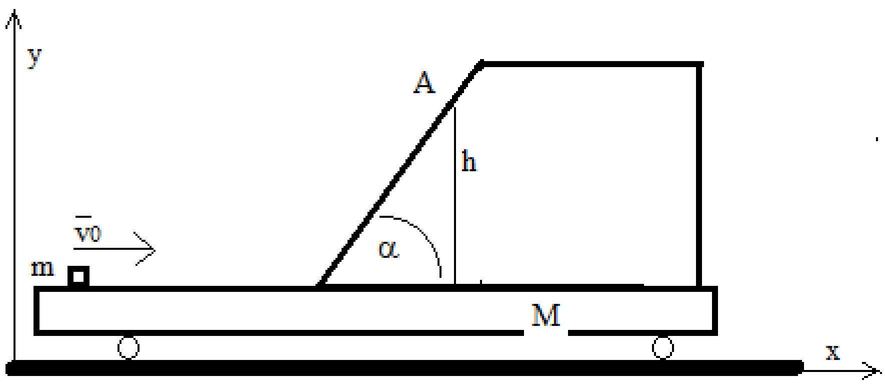
Esercizio 2

Un carrello di massa *M* è inizialmente in quiete su un piano orizzontale: le ruote sono prive di massa e tutte le superfici (del terreno e del carrello) sono prive di attrito (perfettamente lisce) e la viscosità dell'aria è trascurabile. La superficie superiore del carrello ha la forma di un trapezio con angolo di base pari ad α (vedi Fig. 2). Inizialmente, una massa puntiforme *m* si trova sulla regione piatta del carrello con velocità orizzontale $\vec{v}_0$, diretta verso il trapezio. Trovare:

a) quali quantità del sistema (*m+M*) sono conservate durante il moto;
b) l'energia cinetica E_k del sistema (*m+M*) quando *m* raggiunge il punto A del trapezio posto ad altezza *h;*
c) le componenti v_x e v_y (**nel sistema di riferimento del terreno**) della velocità di *m* quando raggiunge il punto A;
d) la velocità *V* del carrello quando *m* raggiunge il punto A.

Per le domande c), d) è sufficiente scrivere il sistema di equazioni corretto, che descrive le componenti della velocità, e **spiegare perchè**.

DATI:
M =4 [Kg]; m=4 [Kg];
a = 30°; h = 0.6 [m];
v_0 = 5 [m/s].



Soluzione esercizio 2

Assumiamo un sistema di riferimento con assi orizzontale e verticale con verso positivo, rispettivamente, verso destra e verso l'alto, come in Figura.

a) Siccome non ci sono attriti, l'energia meccanica totale del sistema (M+m) è conservata. Inoltre, non agiscono forze esterne nella direzione orizzontale, perciò la componente x della quantità di moto si conserva.

b) Nel punto A, la massa m del sistema (M+m) si trova ad una quota maggiore che all'istante iniziale: la sua energia potenziale (e quindi l'energia potenziale dell'intero sistema) è aumentata di mgh. Usando la conservazione dell'energia meccanica totale, e chiamando U(m) e U(M) l'energia potenziale iniziale delle masse m e M, abbiamo:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + U(m) + U(M) = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) + U(m) + mgh + \frac{1}{2}MV^2 + U(M) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_k \equiv \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) + \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 - mgh \approx 26.456[J]$$

c) + d) Quando m raggiunge il punto A, possiamo usare le leggi di conservazione citate in precedenza, tenendo presente che la direzione della velocità di m in un sistema di riferimendo del carrello ha componenti x e y proporzionali attraverso tg(α). Richiamando la relazione tra le velocità in due sistemi di riferimento non in rotazione tra loro possiamo scrivere:

$$(i) \qquad \begin{aligned} & mv_0 = mv_x + MV \\ & \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) + mgh + \frac{1}{2}MV^2 \\ & \frac{v_y^{'}}{v_x^{'}} = tg(\alpha) \\ & v_y = v_y^{'} \\ & v_x = v_x^{'} + V \end{aligned}$$

Questo sistema di equazioni è la risposta alle domande c) + d) del problema.

Per completezza, riportiamo di seguito la soluzione del sistema.
Ricavando la relazione tra le componenti della velocità dalle 3 equazioni finali del sistema (i) e sostituendola nelle prime due, otteniamo:

$$(ii) \qquad \begin{aligned} & \frac{mv_0 - mv_x}{M} = V \\ & mv_0^2 - mgh = m(v_x^2 + (v_x - V)^2 tg^2\alpha) + MV^2 \end{aligned}$$

Definiamo:

$$C \equiv v_0^2 - 2gh; E \equiv 1 + tg^2\alpha; F \equiv (tg^2\alpha + \frac{M}{m})(\frac{m}{M})^2; G \equiv (tg^2\alpha \cdot \frac{M}{m});$$ *;*

$$a \equiv E + F + 2G; b \equiv v_0(F + G); c \equiv v_0^2 F - C$$

Ricavamo una equazione di secondo grado nell'incognita :

$$V = \frac{m}{M}(v_0 - v_x) \qquad \Rightarrow$$

$$v_0^2 - 2gh = v_x^2(1 + tg^2\alpha) - 2tg^2\alpha \cdot v_x V + (\frac{M}{m} + tg^2\alpha)V^2$$

$$\Rightarrow C = Ev_x^2 - 2tg^2\alpha \cdot \frac{m}{M}(v_0 - v_x)v_x + F(v_0^2 - 2v_0 v_x + v_x^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = (E + F + 2G)v_x^2 - 2v_0(G + F)v_x + F(v_0^2 - 2v_0 v_x + v_x^2) + Fv_0^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow av_x^2 - 2bv_x + c = 0$$

$$v_x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} \approx 2.967[m/s]$$

$$V == \frac{m}{M}(v_0 - v_x) \approx 2.033[m/s]$$

$$v_y = tg\alpha \cdot (v_x - V) \approx 0.54[m/s]$$

Nota: le 2 equazioni (ii) formano un sistema di secondo grado, con 2 soluzioni, corrispondenti al segno + o – prima della radice quadrata del discriminante. Il segno + fornisce una componente y della velocità positiva mentre il segno – porta ad avere un valore negativo. Dal testo del problema si capisce che la soluzione richiesta è quella positiva, perchè la massa sale quando raggiungere il punto A. Se l'altezza del trapezio è sufficiente, la massa m sale fino a $v_y = 0$, con una ulteriore accelerazione del carrello, poi scivola verso il basso e in A avremo $v_y < 0$, che corrisponde alla soluzione con segno negativo.

Esercizio 3

Su una piattaforma, di massa *M=20 [kg]*, posta su una strada orizzontale priva di attrito, si trova una molla con costante elastica *K=1000 [N/m]* e lunghezza a riposo $L_0 = 0.5[m]$, che ha una estremità fissata alla piattaforma e l'altra in contatto con una massa *m = 5[kg]*. Inoltre, il contatto tra *m* e la piattaforma è privo di attrito. Inizialmente la molla è compressa ad una lunghezza *L = 0.2[m]* e viene rilasciata. Trovare la velocità *V* della piattaforma e v di *m* quando la molla raggiunge la lunghezza L_0.

Soluzione esercizio 3:

$$0 = mv + MV$$

$$\frac{K}{2}(L_0 - L)^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2$$

che danno:

$$K(L_0 - L)^2 = mv^2(1 + \frac{m}{M})$$

$$V = -\frac{m}{M}v$$

Esercizio 4

Su una piattaforma di massa *M=20 [kg]*, posta su una strada orizzontale priva di attrito, si trova una molla con costante elastica *K=1000 [N/m]* e lunghezza di riposo L_0 *= 0.5[m]*, che ha una estremità fissata alla piattaforma e l'altra in contatto con una massa *m = 5[kg]*. Tra *m* e la piattaforma c'è attrito e il coefficiente di attrito dinamico è $\mu_d = 0.5$. Inizialmente la lunghezza della molla è *L = 0.2[m]* e viene rilasciata. Trovare:

a) le velocità *V* della piattaforma e *v* di *m* quando la molla raggiunge la lunghezza L_0;
b) le velocità di *m* e *M* quando *m* si ferma sul carrello;
c) la distanza *d* dal punto dove *m* si ferma e la posizione di arresto della molla.

Soluzione esercizio 4:

a)

$$0 = mv + MV$$
$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 = \frac{K}{2}(L_0 - L)^2 - \mu_d mg(L_0 - L) \qquad (1)$$

che chiamando a^2 *il secondo membro della seconda equazione di (1) da:*

$$V = -\frac{m}{M}v \qquad v^2 = \frac{2a^2}{m(1 + m/M)}$$
$$mv^2 + MV^2 = 2a^2 \qquad V = -\frac{m}{M}v \qquad (2)$$

b) *quando m si ferma sul carrello (cioè rispetto al sistema solidale al carrello), sia m che M hanno la stessa velocità* V_f*; la quantità di moto lungo la direzione orizzontale si conserva e pertanto:*

$$mv + MV = mV_f + MV_f;$$

da (1):

$$0 = mv + MV = mV_f + MV_f \Rightarrow V_f = 0 \qquad (3)$$

c) *Per trovare d, applichiamo il teorema del lavoro da* L_0 *al punto di arresto. Lungo tale tragitto la forza di attrito compie un lavoro* $W^{(NC)} = -\mu_d \cdot mg \cdot d$*:*

$$\frac{1}{2}(m+M)\cdot V_f^2 - (\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2) = -\mu_d \cdot mg \cdot d \Rightarrow d = \frac{mv^2 + MV^2}{2\mu_d \cdot mg}$$

Nota: Il valore $2a^2 \equiv (K(L_0 - L) - 2\mu_d mg)(L_0 - L)$ *è dato positivo nell'esercizio. Tuttavia questa condizione è necessaria se la molla si allunga fino alla posizione di* *riposo. Infatti, il minimo valore dell'energia cinetica finale in (1) è zero: se* $(K(L_0 - L) - 2\mu_d mg)(L_0 - L) < 0$*, la posizione di riposo non può essere raggiunta da m.*