esercizi di AlgLinGeo 2016/17

2 - RETTE E PIANI

1. Determinare un'equazione cartesiana per la retta r del piano (xy) che passa per i punti $P = (1, 2)$ e $Q(1, 5)$.

2. Determinare un'equazione cartesiana per la retta r del piano (xy) di equazioni parametriche $x = 2t-1, y = t+5$; determinare equazioni parametriche per la retta s del piano (xy) di equazione cartesiana $2x-y+3 = 0$.

3. Determinare equazioni parametriche per la retta r del piano (xy) che passa per il punto $P = (1, 3)$ ed è parallela alla retta s di equazioni parametriche $x = 2t - 1, y = \sqrt{2}t + 5$.

4. Determinare un'equazione cartesiana per la retta r del piano (xy) che passa per il punto $P = (2, 3)$ ed è ortogonale alla retta $s : x = -t - 1, y = \sqrt{5}t + 5$; stesso problema per la retta p del piano (xy) che passa per il punto $P = (2, 3)$ ed è ortogonale alla retta di equazione $3x + 2y - 5 = 0$.

5. Sia P il punto di intersezione delle rette $r : 3x - y = 0, s : x + 2y - 1 = 0$; determinare la retta p del fascio di centro P che passa per $Q(3, -1)$.

6. Determinare h reale tali che i punti $P_1(0, 1, 1), P_2(1, 1, 0)$ e $P_3(h, 1, -1)$ siano allineati.

7. Scrivere l'equazione cartesiana del piano che passa per il punto $P(2, -1, 3)$ ed è parallelo al piano di equazione $x - 2y + z = 0$.

8. Dare una rappresentazione parametrica e una rappresentazione cartesiana della retta che passa per i punti $A(1, 2, 1)$ e $B(3, 2, 3)$.

9. Dare una rappresentazione parametrica della retta che passa per il punto $A(1, 2, 1)$ ed è parallela alla retta $r : (x, y, z) = (1 + t, 3, 2t)$.

10. Dire se i punti $P_1(0, 1, 1), P_2(1, 1, 0), P_3(2, 0, 1), P_4(1, 2, 0)$ sono complanari.

11. Dare una rappresentazione parametrica e una rappresentazione cartesiana della retta che passa per il punto $A(1, 2, 1)$ ed è perpendicolare al piano di equazione $x + 2z = 0$.

12. Dire se le rette $r : (x, y, z) = (1 + t, 2 + 3t, 4t)$ ed $s : (x, y, z) = (2u, 2 - u, -3u)$ hanno punti in comune.

13. Verificare se le due rette $r : x + 2y - z = 0, y - z - 3 = 0$ ed $s : x = 3 - t, y = t, z = 1 + t$ sono parallele e in caso affermativo determinare l'equazione del piano che le contiene.

14. Precisare la posizione della retta $r : x + 2y - z = 0, y - z - 3 = 0$ rispetto all'asse delle z.

15. Dati i punti $P_1(1, 0, 0)$, $P_2(0, 1, 0)$, $P_3(1, 2, 1)$, determinare l'equazione del piano da essi individuato e dire per quali valori del parametro reale h la retta $r : x - y = 1, x - z = -h$ appartiene a tale piano.

16. Scrivere l'equazione del piano passante per il punto $P(1, 2, 3)$ e perpendicolare alla retta $r : (x, y, z) = (1 + t, 2 - t, t)$.

17. Dire se la retta $(x, y, z) = (1 + t, 2, 4 + t)$ e il piano $3x + 2y - z + 1 = 0$ hanno punti in comune. Trovare le equazioni di due piani che hanno come intersezione la retta $(x, y, z) = (1 + t, 2, 4 + t)$.

18.Trovare la proiezione ortogonale del punto $P(0, 1, -1)$ sul piano $x + 2y + z = 0$.

19. Determinare i piani paralleli simultaneamente alla retta $r: x - y - z = 0, x + 2z - 1 = 0$ e alla retta $s: x = t, y = -t, z = -2$.

20. Verificare che i piani passanti per $P(3, -1, 2)$ e ortogonali al piano di equazione $x - y + 4z - 1 = 0$ appartengono a un fascio. Determinare l'asse di tale fascio.

21. Nello spazio sia r la retta passante per il punto $(1, 1, 2)$ e parallela al vettore $\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. Quale delle seguenti risposte è corretta?

(a) r è ortogonale al piano $2x + y + z = 0$.
(b) r appartiene al piano $x - y + 2z = 0$.
(c) r e il piano $x - y + 2z = 0$ sono incidenti.
(d) r è parallela al piano $x - y + 2z = 4$.

22. Nello spazio sono date le rette $r: (x, y, z) = (0, t, 2t)$, $s: (x, y, z) = (1, 2t, t)$. Quale delle seguenti risposte è corretta?

(a) r ed s hanno un punto in comune;
(b) r ed s sono parallele;
(c) r ed s sono parallele al piano $\pi: x = 2$;
(d) r ed s sono contenute nel piano $\alpha: x + y = 0$.

23. Sia π il piano che passa per $(1, 1, 1)$ perpendicolare a $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Quale delle seguenti risposte è corretta?

(a) la retta $(x, y, z) = (t, 0, -t)$ è parallela a π;
(b) la retta $(x, y, z) = (t, 0, -t)$ interseca π;
(c) la retta $(x, y, z) = (t, t, t)$ è parallela a π;
(d) $(1, 0, -1)$ appartiene a π.

24. Considerate le rette $l: z - 1 = 0, x - 1 = 0$ e $r: z - 1 = 0, x = 0$, quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) Le rette l e r sono parallele.
(b) Le distanza tra l e r è 2.
(c) Le rette l e r sono sghembe.
(d) Le rette l e r sono incidenti.

2 - SOLUZIONI

6. Basta imporre per esempio che il vettore $(\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1})$ sia parallelo al vettore $(\overrightarrow{OP_3} - \overrightarrow{OP_1})$; ossia che $(1, 0, -1)$ sia multiplo di $(h, 0, -2)$; si conclude che $h = 2$.

10. È sufficiente osservare che il piano individuato per esempio dai punti P_1, P_2, P_3, cioè il piano di equazione $x + 2y + z - 3 = 0$, non contiene P_4.

13. I parametri direttori della retta r e della retta s sono proporzionali alla terna $(-1, 1, 1)$; le due rette sono quindi parallele, ma non coincidono: infatti un punto scelto a piacere su s (per esempio il punto $(3, 0, 1)$) non sta su r. Il piano che contiene entrambe le rette si può ottenere considerando il fascio di piani di asse la retta r

$$\lambda(x + 2y - z) + \mu(y - z - 3) = 0$$

Imponendo al generico piano del fascio di contenere s, si ha $2\lambda - 4\mu = 0$ e quindi il piano richiesto è: $2x + 5y - 3z - 3 = 0$.

14. I parametri direttori di r sono proporzionali alla terna $(-1, 1, 1)$, quindi r non è parallela all'asse z; inoltre nessun punto $(0, 0, t)$ dell'asse z soddisfa le equazioni di r, ne segue che r è sghemba rispetto all'asse z.

15. Imponendo al generico piano di equazione $ax + by + cz + d = 0$ di passare per P_1, P_2, P_3, si ottengono le condizioni:

$$\begin{cases} a + d = 0 \\ b + d = 0 \\ a + 2b + c + d = 0 \end{cases}$$

dalle quali si ricava l'equazione $x + y - 2z - 1 = 0$. La retta appartiene a tale piano per $h = -1$.

17. L'intersezione tra la retta e il piano è il punto $P(-1, 2, 2)$.

18. La proiezione richiesta è il punto $Q(-1/6, 2/3, -7/6)$.

19. I piani richiesti sono ortogonali al prodotto vettoriale dei vettori direttori delle due rette: $(-2, -3, 1) \wedge (1, -1, 0)$; la loro equazione cartesiana è allora $x + y + 5z + k = 0$, al variare del parametro reale k.

20. Perchè un piano di equazione $ax + by + cz + d = 0$ sia ortogonale al piano $x - y + 4z - 1 = 0$, deve essere $(1, -1, 4) \cdot (a, b, c) = 0$; i piani richiesti hanno allora equazione: $(b - 4c)(x - 3) + b(y + 1) + c(z - 2) = 0$ che si può riscrivere per esempio come $b(x + y - 2) + c(-4x + z + 10) = 0$; si tratta quindi dell'equazione di un fascio, il cui asse si ottiene intersecando due piani qualsiasi del fascio, per esempio

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ -4x + z + 10 = 0 \end{cases}$$