14 - Simboli di Landau

RICHIAMO: i simboli di Landau si usano per il confronto LOCALE (cioè in un intorno di un punto x_0) di due funzioni f e g: il confronto si ottiene studiando il limite del rapporto tra f e g:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} 1 & \longleftrightarrow \quad \boxed{f \sim g \quad \text{per } x \to x_0} \\ 0 & \longleftrightarrow \quad \boxed{f = o(g) \quad \text{per } x \to x_0} \\ \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\} & \longleftrightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l} f \simeq g \quad \text{per } x \to x_0 \\ f \sim \ell g \quad \text{per } x \to x_0 \end{array}} \end{cases}$$

Limiti notevoli e simboli di Landau

Riscriviamo i limiti notevoli con il linguaggio dei simboli di Landau:

- $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ $\qquad$ $\sin(x) \sim x$ per $x \to 0$

$$\boxed{\sin(x) = x + o(x) \quad \text{per } x \to 0}$$

- $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ per $x \to 0$

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)} \quad \text{per } x \to 0$$

- $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$ $\qquad$ $\boxed{\log(1+x) = x + o(x)}$

- $$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x} = \alpha \qquad \alpha \neq 0$$

$$(1+x)^{\alpha} - 1 = \alpha x + o(x)$$

$$\boxed{(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + o(x) \quad \text{per } x \to 0}$$

- $$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x}-1}{x} = 1 \qquad e^{x} - 1 = x + o(x)$$

$$\boxed{e^{x} = 1 + x + o(x) \quad \text{per } x \to 0}$$

Esempi:

- $\sin(x^2)$

passo <u>sostituzione</u> $u = x^2 \to 0$ per $x \to 0$

$$\sin(u) = u + o(u) \quad \text{per } u \to 0$$
$$= x^2 + o(x^2)$$

$$\sin(x^2) = x^2 + o(x^2) \quad \text{per } x \to 0$$

- $$x \sin(x^2) = x\left(x^2 + o(x^2)\right) = x^3 + x\, o(x^2)$$
$$= x^3 + o(x^3) \quad \text{per } x \to 0$$

- $$\underset{\substack{\sin x \to 0 \\ \text{per } x \to 0}}{\cos(\sin x)} = 1 - \frac{(\sin x)^2}{2} + o\left((\sin x)^2\right)$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \quad \text{per } t \to 0, \quad t = \sin x$$

$$= 1 - \frac{(x+o(x))^2}{2} + o\left((x+o(x))^2\right) \quad \text{per } x \to 0$$

$\sin x = x + o(x)$ per $x \to 0$

$$= 1 - \frac{x^2 + 2x\,o(x) + (o(x))^2}{2} + o\left((x+o(x))^2\right)$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} - \underbrace{\frac{\overbrace{2x\,o(x) + (o(x))^2}^{=o(x^2)+o(x^2)=o(x^2)}}{2} + o\left((x+o(x))^2\right)}_{=o(x^2)}$$

$x\,o(x) = o(x^2)$ $\quad (o(x))^2 = o(x)o(x) = o(x^2)$ $\quad \circledast = o(x^2)$

$\circledast$ $o\left((x+o(x))^2\right) = o(x^2)$:

sia $f = o\left((x+o(x))^2\right)$ vogliamo

provare che $f = o(x^2)$ cioè che $\frac{f}{x^2} \xrightarrow[\text{per } x \to 0]{} 0$:

$$\frac{f}{x^2} = \frac{f}{(x+o(x))^2} \underbrace{\frac{(x+o(x))^2}{x^2}}_{\to 1}$$

$\frac{f}{(x+o(x))^2} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ perché per ipotesi $f = o\left((x+o(x))^2\right)$ per $x \to 0$

$$\frac{(x+o(x))^2}{x^2} = \left(\frac{x+o(x)}{x}\right)^2 = \left(1 + \frac{o(x)}{x}\right)^2 \xrightarrow[x \to 0]{} 1$$

$\frac{o(x)}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

quindi $\frac{f}{x^2} = \frac{f}{(x+o(x))^2} \frac{(x+o(x))^2}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \cdot 1 = 0$

cioè $f = o(x^2)$ ✓

abbiamo ottenuto che

$$\cos(\sin x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \text{per } x \to 0$$

———— o ————

Teorema : PRINCIPIO DI ELIMINAZIONE DEI TERMINI TRASCURABILI

Siano $f_2 = o(f_1)$ e $g_2 = o(g_1)$ per $x \to x_0$ con $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$

Allora valgono le due formule:

- $$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x) + \overbrace{f_2(x)}^{=o(f_1)}}{g_1(x) + \underbrace{g_2(x)}_{=o(g_1)}} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

- $$\lim_{x \to x_0} \Big(f_1(x) + \underbrace{f_2(x)}_{o(f_1)}\Big)\Big(g_1(x) + \underbrace{g_2(x)}_{=o(g_1)}\Big) = \lim_{x \to x_0} f_1(x) g_1(x)$$

Dim:

$$\frac{f_1+o(f_1)}{g_1+o(g_1)} = \frac{f_1\left(1+\frac{o(f_1)}{f_1}\right)}{g_1\left(1+\frac{o(g_1)}{g_1}\right)} =$$

$$= \frac{f_1}{g_1}\underbrace{\left(\frac{1+\frac{o(f_1)}{f_1}}{1+\frac{o(g_1)}{g_1}}\right)}_{\xrightarrow[x\to x_0]{} 1}$$

$$\frac{o(f_1)}{f_1} \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$$

$$\frac{o(g_1)}{g_1} \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$$

$$\underbrace{\lim_{x\to x_0}\frac{f_1+o(f_1)}{g_1+o(g_1)}} = \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f_1}{g_1}\cdot\left(\frac{1+\frac{o(f_1)}{f_1}}{1+\frac{o(g_1)}{g_1}}\right)\right) =$$

$$=\left(\lim_{x\to x_0}\frac{f_1}{g_1}\right)\underbrace{\left(\lim_{x\to x_0}\left(\frac{1+\frac{o(f_1)}{f_1}}{1+\frac{o(g_1)}{g_1}}\right)\right)}_{=1} = \underbrace{\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}}$$

La seconda formula si dimostra in modo analogo.

$\square$

es: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{\log\left(1+\frac{x}{2}\right)} =$

$\frac{\sin(3x)}{3x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$

$\boxed{\sin(3x) = 3x + o(x)}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{3x+o(x)}{\frac{x}{2}+o(x)}$

$\log\left(1+\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2} + o(x)$

$\boxed{\log(1+t) = t + o(t) \quad \text{per } x\to 0}$

RIPETIAMO:

vogliamo usare i simboli di Landau:

$\log\left(1+\frac{x}{2}\right) = ?$ usa il limite notevole

$\frac{\log\left(1+\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$

$\Leftrightarrow \boxed{\log\left(1+\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2} + o(x) \quad \text{per } x\to 0}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{3x}{\frac{x}{2}} = 6$

---

es: $\lim_{x\to 0} \left(1-\cos(5x)\right)\cdot\left(\frac{3}{\sin(x^2)}\right)$

$$\frac{1-\cos(5x)}{(5x)^2} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2} \iff 1-\cos(5x) = \frac{(5x)^2}{2} + o(x^2) \quad x\to 0$$

$$\frac{\sin(x^2)}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 1 \iff \sin(x^2) = x^2 + o(x^2) \text{ per } x\to 0$$

$$\lim_{x\to 0} \left(1-\cos(5x)\right)\left(\frac{3}{\sin(x^2)}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{25}{2}x^2 + o(x^2)\right) \frac{3}{x^2+o(x^2)} =$$

$$= 3\lim_{x\to 0} \frac{\frac{25}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2+o(x^2)} = 3\lim_{x\to 0} \frac{\frac{25}{2}x^2}{x^2} = \frac{75}{2}$$

es: $$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 - \cos^3(x)}{3x^2 - \sqrt[5]{x^3} + e^{-x}}$$

NUMERATORE

$$\boxed{x^2 - \cos^3(x) = x^2 + o(x^2)} \quad \boxed{\text{per } x\to +\infty};$$

è vera che $\cos^3(x) = o(x^2)$? per $x\to +\infty$

cioè è vera che $\frac{\cos^3(x)}{x^2} \xrightarrow[x\to +\infty]{} 0$? vero:

$-1 \le \cos^3(x) \le 1$ e $\frac{1}{x^2} \xrightarrow[x\to +\infty]{} 0$

$$\boxed{3x^2 - \sqrt[5]{x^3} + e^{-x} = 3x^2 + o(x^2)}$$ DENOMINATORE $\boxed{\text{per } x \to +\infty}$

$-\sqrt[5]{x^3} + e^{-x} = o(x^2)$ per $x \to +\infty$:

infatti: $\dfrac{-\sqrt[5]{x^3} + e^{-x}}{x^2} = -\dfrac{x^{3/5}}{x^2} + \dfrac{1}{x^2 e^x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

quindi possiamo riscrivere il limite come

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + o(x^2)}{3x^2 + o(x^2)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}$$

ATTENZIONE:

$f_1 \sim f_2$ per $x \to x_0$ se ho due funzioni equivalenti per $x \to x_0$

allora nel limite posso sostituire f_1 con f_2

p.es. posso sostituire $\sin(x)$ con x se sto facendo il limite per $x \to 0$

se abbiamo anche $g_1 \sim g_2$ per $x \to x_0$

possiamo dire che

$(f_1 + g_1) \sim (f_2 + g_2)$? per $x \to x_0$

Riassumendo, vogliamo capire se

$$\boxed{f_1 \sim f_2,\ g_1 \sim g_2 \text{ per } x \to x_0 \overset{???}{\Longrightarrow} f_1 + g_1 \sim f_2 + g_2 \text{ per } x \to x_0}$$

Per ipotesi sappiamo $\frac{f_1}{f_2} \xrightarrow[x \to x_0]{} 1$

e $\frac{g_1}{g_2} \xrightarrow[x \to x_0]{} 1$

la tesi chiede: $\frac{f_1+g_1}{f_2+g_2} \xrightarrow[x \to x_0]{} 1$? FALSO

come controesempio possiamo prendere:

$f_1(x) = x$

$f_2(x) = x+1$ $\qquad x_0 = +\infty$

$\frac{f_1}{f_2} = \frac{x}{x+1} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$ quindi $\boxed{f_1 \sim f_2 \text{ per } x \to +\infty}$

$g_1(x) = g_2(x) = -x \qquad \frac{g_1(x)}{g_2(x)} = \frac{-x}{-x} = 1 \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$

quindi $\boxed{g_1 \sim g_2 \text{ per } x \to +\infty}$ le ipotesi sono soddisfatte

$f_1+g_1 = x+(-x) = 0$

$f_2+g_2 = x+1+(-x) = 1$

$\frac{f_1+g_1}{f_2+g_2} = \frac{0}{1} = 0 \longrightarrow 0$ per $x \to +\infty$

quindi f_1+g_1 non è equivalente a f_2+g_2

per cui la proprietà è FALSA.

— ∘ —

es: $f \sim g \overset{?}{\Longrightarrow} e^f \sim e^g$

per $x \to x_0$ per $x \to x_0$

l'ipotesi equivale a dire $\boxed{\dfrac{f}{g} \xrightarrow[x \to x_0]{} 1}$

la tesi richiede $\dfrac{e^f}{e^g} \xrightarrow[x \to x_0]{} 1$

cioè $e^{f-g} \xrightarrow[x \to x_0]{} 1$

cioè $\boxed{f-g \xrightarrow[x \to x_0]{} 0}$

?

FALSO

<u>controesempio:</u>

$f(x) = x^2$

$g(x) = x^2 - x$ $x \to +\infty$

l'ipotesi è soddisfatta

$\dfrac{f}{g} = \dfrac{x^2}{x^2-x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$ cioè $\boxed{f \sim g \text{ per } x \to +\infty}$

$f-g = x^2 - (x^2 - x) = x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$

NON VALE che $f-g \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

ALTRO CONTROESEMPIO:

$f(x) = x$

$x \to +\infty$

$g(x) = x + \sin(x)$

$\frac{f}{g} = \frac{x}{x+\sin x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$ cioè $f \sim g$ per $x \to +\infty$

$f - g = x - (x + \sin x) = -\sin x$ che non ha limite a $+\infty$

Richiamo: per confrontare due funzioni f e g in un intorno di x_0 si studia il limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

il limite è sempre immediato, tranne nel caso di forme indeterminate "$\frac{0}{0}$" o "$\frac{\infty}{\infty}$":

quindi i casi interessanti si hanno nei casi in cui sia f sia g tendono all'∞ oppure tendono entrambe a 0

Si definiscono le funzioni infinite e infinitesime:

- se $f(x) \xrightarrow[\text{per } x \to x_0]{} 0$ si dice che f è INFINITESIMA per $x \to x_0$

- se $f(x) \longrightarrow +\infty$ oppure $f(x) \longrightarrow -\infty$ per $x \to x_0$

si dice che f è INFINITA per $x \to x_0$

Se f, g sono due infiniti per $x \to x_0$

- se $f = o(g)$ per $x \to x_0$ allora si dice che f è un infinito di ordine inferiore rispetto a g
- se $g = o(f)$ per $x \to x_0$ cioè $\frac{g}{f} \longrightarrow 0$ per $x \to x_0$

si dice che f è un infinito di ordine superiore rispetto a g

f e g si dicono infiniti dello stesso ordine

se $f \sim g$ per $x \to x_0$

se non $\exists$ il limite $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ allora

f e g si dicono infiniti NON CONFRONTABILI

Valgono definizioni analoghe nel caso f, g infinitesime, scambiando "inferiore" e "superiore".

es: disporre in ordine di infinito crescente

$$x\log^2 x \qquad \frac{x}{\log x} \qquad x\log x \qquad x \qquad\qquad x\to+\infty$$

$$\frac{x}{\frac{x}{\log x}} = \log x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

$\Rightarrow$ $\dfrac{x}{\log x} = o(x)$ per $x\to+\infty$

$\Rightarrow$ x è un infinito di ordine SUPERIORE rispetto a $\dfrac{x}{\log x}$

FINIRE [Risultato: $\dfrac{x}{\log x} < x < x\log x < x\log^2 x$]

—— o ——

In genere si confronta con "funzione test" $\varphi(x)$ o "funzione campione":

<u>def</u>: sia $\varphi(x)$ un infinito (INFINITESIMO) per $x\to x_0$

si dice che f è un <u>infinito (INFINITESIMO) di ordine α rispetto all'infinito (INFINITESIMO) campione $\varphi(x)$</u> se

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)^\alpha} \text{ esiste finito e non nullo}$$

poniamo $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)^\alpha} = \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\boxed{f(x) \sim \ell \varphi(x)^\alpha \quad \text{per } x \to x_0}$$

- α è l'ORDINE di infinito (INFINITESIMO) di f rispetto al test φ
- $\ell \varphi(x)^\alpha$ si chiama PARTE PRINCIPALE di f rispetto a φ

Tipiche funzioni test:

INFINITI: $x \to x_0$

- $x_0 = +\infty$ $\quad \varphi(x) = x$
- $x_0 = 0$ $\quad \varphi(x) = \frac{1}{x}$ $\quad \frac{1}{|x|}$
- $x_0 = 3$ $\quad \varphi(x) = \frac{1}{x-3}$

INFINITESIMI: $x \to x_0$

- $x_0 = +\infty$ $\quad \varphi(x) = \frac{1}{x}$
- $x_0 = 0$ $\quad \varphi(x) = x$
- $x_0 = 3$ $\quad \varphi(x) = x - 3$

NOTA:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)^{\alpha}} \quad \begin{cases} \exists \text{ finito e non nullo} \\ \text{per} \\ \text{quale esponente } \alpha? \end{cases}$$

per determinare ordine (α) e parte principale (P.P.) conviene, quando possibile, usare i limiti notevoli:

$$\sin(x^2) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

ordine e parte principale rispetto $\varphi(x) = x$

$$\boxed{\frac{\sin(x^2)}{x^2} \xrightarrow[x \to 0]{} 1} \iff \frac{\sin(x^2)}{\varphi(x)^{2}} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$$

α

$\Rightarrow$ $\sin(x^2)$ è un infinitesimo di ORDINE 2 rispetto a $\varphi(x) = x$

parte principale: $\ell = 1$, $\varphi(x)^{\alpha} = x^2$

p.p. x^2

$\alpha = 2$ è l'ordine

$$\sin(x^2) = \boxed{x^{2}} + o(x^2) \quad \text{per } x \to 0$$

PARTE PRINCIPALE di $\sin(x^2)$ rispetto a x, per $x \to 0$

es: $f(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + \sqrt[3]{\sin x}$ $\quad x \to 0$

$f(x) \longrightarrow 0$ per $x \to 0$, cioè è infinitesima per $x \to 0$

ordine e parte principale di f rispetto a $\varphi(x) = x$ per $x \to 0$:

cioè vogliamo confrontare $f(x)$ con le potenze di x^α e capire se f si comporta come una di queste potenze:

$$\underbrace{x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{o(x^2)} + \sqrt[3]{\sin x}$$

per $x \to 0$

$\sin(x) = x + o(x)$

$\sqrt[3]{\sin x} = \sqrt[3]{x + o(x)}$

$$\sqrt[3]{\sin x} \overset{\text{per } x \to 0}{=} \sqrt[3]{x + o(x)} = \sqrt[3]{x\left(1 + \frac{o(x)}{x}\right)} = \left(x\left(1 + \frac{o(x)}{x}\right)\right)^{1/3}$$

$$= \sqrt[3]{x} \underbrace{\left(1 + \frac{o(x)}{x}\right)^{\frac{1}{3}}}_{\frac{(1+t)^{1/3} - 1}{t} \xrightarrow[t \to 0]{} \frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x} \left(1 + \underbrace{\frac{1}{3}\boxed{\frac{o(x)}{x}} + o(1)}_{o(1)}\right)$$

$o(1) + o(1) = o(1)$

$$\boxed{(1+t)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}t + o(t) \quad \text{per } t \to 0}$$

$= \sqrt[3]{x} + o(\sqrt[3]{x})$

abbiamo ottenuto $\sqrt[3]{\sin x} = \sqrt[3]{x} + o\left(\sqrt[3]{x}\right)$ per $x \to 0$

$$f(x) = \underbrace{x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{o(x^2)} + \sqrt[3]{\sin x} = \boxed{\sqrt[3]{x} + o\left(\sqrt[3]{x}\right)} \quad \text{per } x \to 0$$

$\Rightarrow$ ordine di infinitesimo $\alpha = \frac{1}{3}$

parte principale $\sqrt[3]{x}$

---

es: $f(x) = \sqrt{1 + 4x^6} - 1 + \sin(2x)$ per $x \to +\infty$

$f(x) \longrightarrow +\infty$ per $x \to +\infty$

ordine di infinito e p.p. rispetto a $\varphi(x) = x$:

$$f(x) = \sqrt{(4x^6)\left(1 + \frac{1}{4x^6}\right)} - 1 + \sin(2x)$$

$$= 2x^3 \sqrt{1 + \frac{1}{4x^6}} - 1 + \sin(2x)$$

$\frac{1}{4x^6} \to 0$, $x \to +\infty$

$$\left(1 + \frac{1}{4x^6}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\,\frac{1}{4x^6} + o\left(\frac{1}{x^6}\right)$$

per $x \to +\infty$

$$= 2x^3\left(1+\frac{1}{8x^6}+o\left(\frac{1}{x^6}\right)\right)-1+\sin(2x)$$

per $x \to +\infty$

$$= 2x^3 + \underbrace{\frac{1}{4x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)-1+\sin(2x)}_{=o(x^3) \text{ per } x\to+\infty}$$

$$f(x) = 2x^3 + o(x^3) \quad \text{per } x \to +\infty$$

$\Rightarrow$ ordine $\alpha = 3$

p.p. $2x^3$

——— o ———