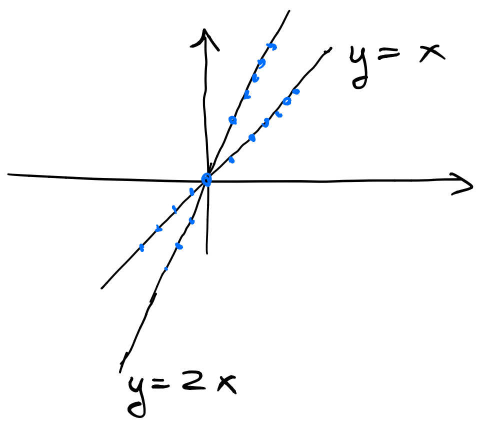
10 - Limiti e Successioni

esercizio

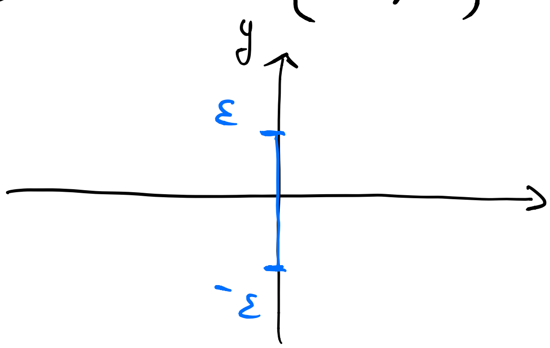
$$f(x) \overset{def}{=} \begin{cases} x & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 2x & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$



$f(0) = 0$

$\boxed{\text{verificare che } f \text{ è continua in } x_0 = 0}$

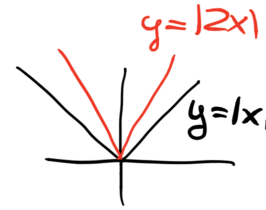
Usiamo la definizione di f continua in un punto. Fissiamo un intorno V di $f(0)=0$ questo equivale a dire fissiamo $\varepsilon > 0$ cioè $V = (-\varepsilon, \varepsilon)$ sull'asse y



dobbiamo trovare $\delta > 0$ tale che se $|x| < \delta$ allora $|f(x) - \overbrace{f(0)}^{=0}| < \varepsilon$:

per determinare δ, osserviamo che

$$|f(x) - \underbrace{f(0)}_{=0}| = |f(x)| \le |2x|$$



$$\begin{cases} |x| \le |2x| \\ |2x| \le |2x| \end{cases}$$

pongo $|2x| \overset{!}{<} \varepsilon \iff |x| < \frac{\varepsilon}{2}$

quindi se $|x| < \frac{\varepsilon}{2}$ si ha $|f(x)| < \varepsilon$

$$|f(x)| \le |2x| < \varepsilon$$

per cui si può prendere $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$

quindi f è continua in $x_0 = 0$

Limiti di funzioni composte:

$$\lim_{x \to x_0} g \circ f(x) = \lim_{x \to x_0} g(f(x))$$

es:

$$\lim_{x \to 2} (\underbrace{x-2}_{=y})^5 = \lim_{\boxed{y \to 0}} y^5 = 0$$

$y \overset{\text{def}}{=} x-2$

$x \to 2$

$\Downarrow$

$y \to 0$ per $x \to 2$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x-2 \\ g(y) = y^5 \end{array}\right\} g \circ f(x) = (x-2)^5$$

Teorema di sostituzione
(o teorema del cambio di variabile)

Supponiamo $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$

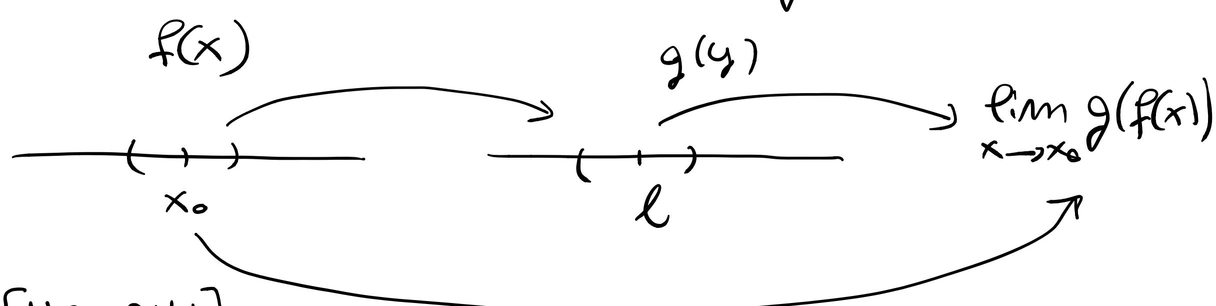
g sia definita in un intorno (bucato) di ℓ e supponiamo che valga una delle seguenti condizioni:

i) $\ell \in \mathbb{R}$, g sia continua in ℓ

ii) $\ell = +\infty$ o $\ell = -\infty$, $\exists \lim_{y \to \ell} g(y)$

Allora $\exists \lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim_{y \to \ell} g(y)$

si può fare il cambio di variabile $y = f(x)$



[NO DIM]

esempi:

1) $\lim_{x \to 0} \arctan\left(\frac{\sin x}{x}\right)$

$f(x) = \frac{\sin x}{x}$ $\qquad$ $g(y) = \arctan y$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = \ell \qquad f \text{ ha limite finito}$$

$g(y) = \arctan(y)$ è continua in $\ell = 1$

il punto i) del teorema è verificato

e quindi si può fare la sostituzione:

$$\lim_{x\to 0} \arctan\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \lim_{y\to 1} \arctan y =$$

$$y = \frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$

$$= \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

$$f(x) \xrightarrow[x\to +\infty]{} 0 = \ell$$

F HA LIMITE FINITO

$$2) \lim_{x\to +\infty} \arctan\left(\frac{\sin x}{x}\right) =$$

$$= \lim_{y\to 0} \arctan(y) = \arctan(0) = 0$$

$\arctan(y)$ è continua in $y=0$

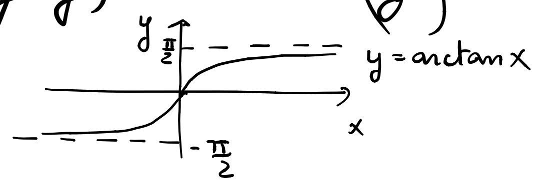
possiamo fare la sostituzione

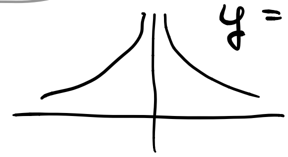
$$y = \frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x\to +\infty]{} 0$$

3) $\lim\limits_{x \to 0} \arctan\left(\frac{1}{|x|}\right)$

$f(x) = \frac{1}{|x|}$

$g(y) = \arctan(y)$





$y = \frac{1}{|x|}$

$\frac{1}{|x|} = f(x) \xrightarrow[x \to 0]{} +\infty = \ell$

f ha limite infinito

verifichiamo se $\exists \lim\limits_{y \to +\infty} \arctan(y) = \frac{\pi}{2}$

vale il punto (ii) del teorema

$\Rightarrow$ si può fare la sostituzione:

$$\lim_{x \to 0} \arctan\left(\frac{1}{|x|}\right) = \lim_{y \to +\infty} \arctan y = \frac{\pi}{2}$$

$$y = \frac{1}{|x|} \xrightarrow[x \to 0]{} +\infty$$

4) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2 (1 + \cos x)} = \frac{\overbrace{1 - \cos^2 x}^{= \sin^2 x}}{x^2 (1 + \cos x)}$$

$$= \frac{\sin^2 x}{x^2} \frac{1}{1 + \cos x} = \underbrace{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}_{} \underbrace{\frac{1}{1 + \cos x}}_{}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \underset{\nearrow}{=} \lim_{y\to 1} y^2 = 1$$

$$y=\frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \Bigg(\underbrace{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}_{\xrightarrow[x\to 0]{} 1} \; \underbrace{\frac{1}{1+\cos x}}_{\longrightarrow \frac{1}{1+\cos 0}=\frac{1}{2}}\Bigg) \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}}$$

———— o ————

NOTA 1 dal teorema di sostituzione segue anche composizione di funzioni continue è continua:

f continua in x_0

g continua in $y_0 \overset{def}{=} f(x_0)$

$\Rightarrow$ $g\circ f$ è continua in x_0.

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) \overset{\text{se } g \text{ è continua}}{=} g\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)$$

es: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = \left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)^2$

NOTA 2

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} :$$

$$f(x)^{g(x)} = e^{\log\left(f(x)^{g(x)}\right)} = e^{g(x)\log(f(x))}$$

quindi

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{g(x)\log(f(x))} =$$

$$= e^{\lim_{x\to x_0} g(x)(\log f(x))}$$

quindi si può calcolare a parte

$\lim_{x\to x_0} g(x)\log(f(x))$ e, se esiste, $= L$

allora $f(x)^{g(x)} \xrightarrow[x\to x_0]{} e^L$

es: $\lim_{x\to +\infty} (x+5\sin x)^{(\cos x-2)}$:

$$(x+5\sin x)^{(\cos x-2)} = e^{(\cos x-2)\log(x+5\sin x)}$$

$\Rightarrow$ studio prima il limite a $+\infty$ dell'esponente:

$$\underbrace{\left(\cos(x)-2\right)}_{<0}\ \underbrace{\log\left(x+5\sin x\right)}_{\longrightarrow +\infty}$$

$$x+5\sin x \geq \overbrace{x-5}^{\longrightarrow +\infty}$$
$$\uparrow$$
$$-5 \leq 5\sin x \leq 5$$

$\Downarrow$ teor. confronto

$$x+5\sin x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

$\Big[\ -1 \leq \cos x \leq 1$

$$-1-2 \leq \cos(x)-2 \leq 1-2$$
$$-3 \leq \cos(x)-2 \leq -1 < 0$$

teor sostituzione - caso ii - $\Rightarrow \log(x+5\sin x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

$\Rightarrow \underbrace{(\cos(x)-2)}_{\leq -1}\log(x+5\sin(x)) \leq -\log(x+5\sin(x)) \longrightarrow -\infty$ $\Big]$

$\Rightarrow$ l'esponente tende a $-\infty$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(x+5\sin x\right)^{\cos(x)-2} = 0$$

—————— o ——————

NOTA 3: nel teorema del cambio di variabile la condizione (i) si può sostituire con

(i') $\begin{cases} \ell \in \mathbb{R} \longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) \text{ ha limite finito} \\ \ell\in\mathbb{R} \text{ per } x\to x_0 \end{array}\right] \\ f(x) \neq \ell \quad \forall x \text{ in un intorno bucato di } x_0 \quad I_r(x_0)\setminus\{x_0\} \\ \text{e } \exists \lim_{y\to \ell} g(y) \end{cases}$

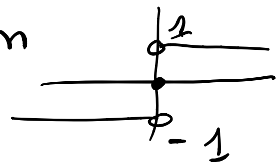
—————— o ——————

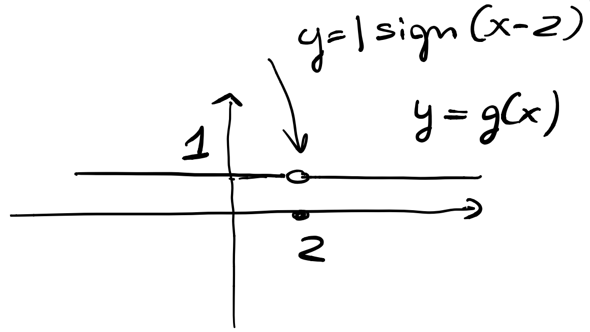
es: $f(x) = |x+1| + |x-1|$

$g(x) = |\operatorname{sign}(x-2)|$

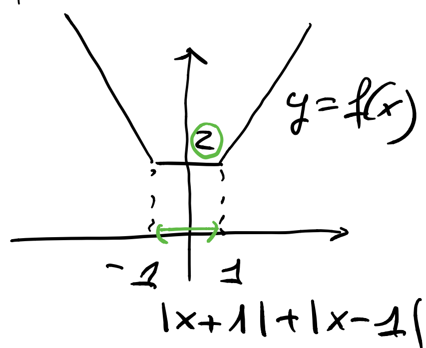
$$\lim_{x\to 0} g(f(x)) = ?$$

sign





$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x > 1 \\ 2 & \text{se } -1 \le x \le 1 \\ -2x & \text{se } x < -1 \end{cases}$$



$f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 2 \Rightarrow \ell = 2$

$$\lim_{x\to 0} g(f(x)) = 0 = \lim_{x\to 0} \overbrace{g(2)}^{=0} = \underline{0}$$

$f(x) = 2$
$\forall x \in (-1,1)$

$$\lim_{y\to 2} |\operatorname{sign}(y-2)| = 1$$

qui NON si applica il teorema di sostituzione:

$$\lim_{x\to 0} g(f(x)) \underset{y=f(x)}{=} \lim_{y\to 2} g(y) = 1$$

se applico la sostituzione ottengo un risultato sbagliato il teor. non vale perché in questo esempio $f(x) = 2 = \ell$ in tutto un intorno di $x_0 = 0$

LIMITI DI SUCCESSIONI

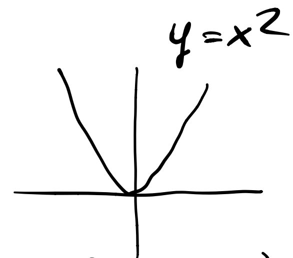
Def: successione = funzione f che ha per dominio $\mathbb{N}$ o $\{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}$

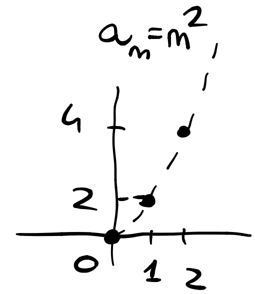
$$n \longmapsto \cancel{f(n)} \quad a_n$$

per le successioni si usa la notazione a_n

esempi:

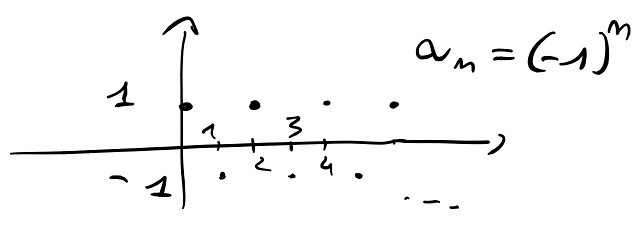
1) $a_n = n^2$





(successioni che vengono da funzioni)

2) $a_n = (-1)^n$



3) $a_n = n!$

4) successione di Fibonacci: $\begin{cases} a_1 = 1, \ a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \end{cases}$

$$a_3 = a_{3-1} + a_{3-2} = a_2 + a_1 = 2$$

$$a_4 = a_3 + a_2 = 3+1 = 4$$

...

5) a_n = le prime n cifre decimali di π

— o —

Def: limite di successioni

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$$

per le successioni, ha senso studiare il limite solo a $+\infty$

se $\forall$ intorno V di ℓ
$\exists$ M : $n > M \Rightarrow a_n \in V$

esercizio:

Verificare che $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$

a_n successione convergente: se a_n ha limite FINITO

a_n successione divergente: se a_n ha limite INFINITO

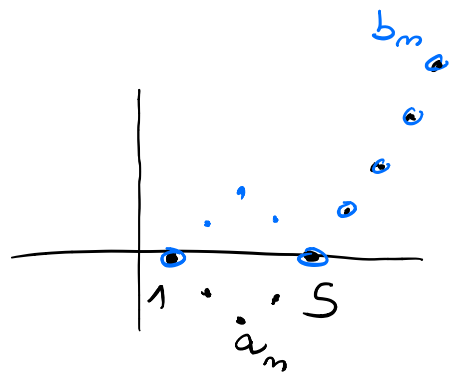
a_n oscillante se $\lim a_n$ non esiste es: $\lim_{n \to +\infty} \cos(n\pi)$ NON esiste

$\Rightarrow$ la successione $\cos(n\pi)$ è oscillante

<u>NOTA:</u> il carattere della successione non cambia se si alterano un numero finito di termini:

es: $a_n = n^2 - 6n + 5$

$b_n = |n^2 - 6n + 5|$



le successioni a_n e b_n vengono da

$f(x) = x^2 - 6x + 5 = (x-5)(x-1)$

$a_n \neq b_n$: per es: $a_2 = -3$, $b_2 = 3$

ma $a_n = b_n$ per $n \geq 5$. In questo caso si dice che a_n e b_n sono definitivamente uguali, cioè sono uguali da un certo valore di n in poi.

NOTA: due successioni definitivamente uguali hanno lo stesso comportamento