27 - Integrali impropri
Equazioni differenziali

~ ∘ ~

Es: studiare la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{x + \cos(x) - \sqrt[3]{x}}{e^{-x} + x^{3/2}}\, dx$$

per $x \longrightarrow +\infty$:

$$\frac{x + \cos(x) - \sqrt[3]{x}}{e^{-x} + x^{3/2}} \sim \underbrace{\frac{x}{x^{3/2}}}_{\frac{1}{x^{1/2}}} \quad \text{per } x \to +\infty$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{1/2}}\, dx \qquad \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \text{l'integrale improprio DIVERGE}$$

confronto asintotico

$$\Longrightarrow \int_1^{+\infty} \frac{x+\cos(x)-\sqrt[3]{x}}{e^{-x}+x^{3/2}}\,dx \quad \text{DIVERGE}$$

<u>NOTA</u>: la funzione integranda $\longrightarrow 0$ per $x \to +\infty$

<u>es</u>: $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin(x^2)\,dx$ INTEGRALE DI FRESNEL

$\sin(x^2)$ non ha limite per $x \to +\infty$

quindi non si può capire, a priori, il comportamento dell'integrale:

l'idea è usare la sostituzione

$$t = x^2, \quad x = \sqrt{t}, \quad dx = \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt$$

$$\int \sin(x^2)\,dx \overset{\substack{\text{SOSTITUZIONE}\\ t=x^2}}{=} \int \sin(t)\,\frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\,dt$$

$$\left|\frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{t}}, \text{ ma } \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$$

$\frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ DIV.

$\Rightarrow$ NON AIUTA!

$$\frac{1}{2}\int \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\,dt \overset{\text{PER PARTI}}{=} -\frac{\cos(t)}{2\sqrt{t}} + \int \frac{1}{2}\,\frac{-\cos(t)}{2\,t^{3/2}}$$

$$= -\frac{\cos(t)}{2\sqrt{t}} - \frac{1}{4}\int \frac{\cos(t)}{t^{3/2}}\,dt$$

$$\left|\frac{\cos(t)}{t^{3/2}}\right| \leq \frac{1}{t^{3/2}} \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}}\,dt \text{ CONV.}$$

$\alpha = \frac{3}{2} > 1$

$$\underset{\uparrow \atop \text{confronto}}{\Longrightarrow} \quad \int_1^{+\infty} \left| \frac{\cos(t)}{t^{3/2}} \right| dt \text{ converge}$$

$$\underset{\uparrow \atop \text{conv. assoluta}}{\Longrightarrow} \quad \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^{3/2}}\, dt \quad \text{converge}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{2\sqrt{t}}\, dt = \lim_{b \to +\infty} \left[\frac{-\cos(t)}{2\sqrt{t}} \right]_{t=1}^{t=b} -$$

$$- \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{4\, t^{3/2}}\, dt}_{\text{converge}}$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \left(\frac{-\cos(b)}{2\sqrt{b}} + \frac{\cos(1)}{2} \right) - \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{4t^{3/2}}$$

$$= \frac{\cos(1)}{2} - \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{4t^{3/2}}\,dt$$

$\Rightarrow$ converge

<u>conclusione</u>: $\int_1^{+\infty} \sin(x^2)\,dx$ CONVERGE

$\sin(x^2)$ NON ha limite a $+\infty$

Finora abbiamo studiato il caso:

$f: [a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ continua

$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ integrale improprio

analogam: $f: (-\infty, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ cont.

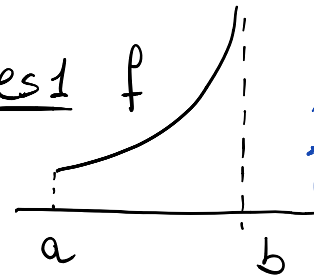
$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$

Ora facciamo il caso:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

ILLIMITATA su (a,b)

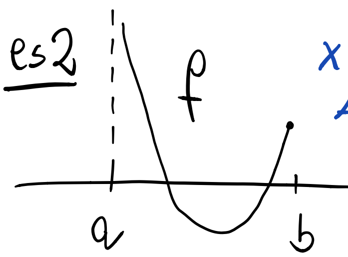
es1



$x=b$ ASINTOTO VERTICALE

OPPURE

es2



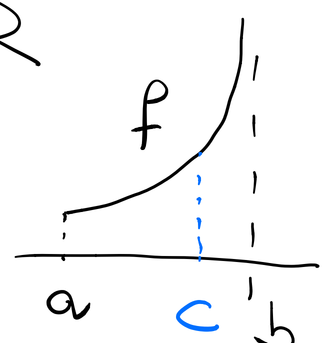
$x=a$ ASINTOTO VERTICALE

perché ha un asintoto verticale in uno dei due estremi dell'intervallo (a,b)

integrale improprio:

caso $f: [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ continua

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = +\infty$$



$$\int_a^b f(x)\,dx \overset{\text{DEF}}{=} \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\,dx$$

$$\lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\,dx$$

- se $\exists$ finito, l'integrale improprio $\int_a^b f(x)\,dx$ CONVERGE
- se $\exists\ \infty$, l'integrale improprio $\int_a^b f(x)\,dx$ DIVERGE
- se $\nexists$, l'integrale improprio $\int_a^b f(x)\,dx$ è indeterminato, oscillante

IMPORTANTE: valgono risultati analoghi al caso di integrali impropri su intervalli illimitati:

- $f \geq 0$ su $[a,b) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ è convergente o divergente

- **confronto**: $0 \leq f \leq g$ su $[a,b)$

1) ~~se~~ $\int_a^b g(x)dx$ CONV. $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ CONV.

2) se $\int_a^b f(x)dx$ DIV. $\Rightarrow \int_a^b g(x)dx$ div.

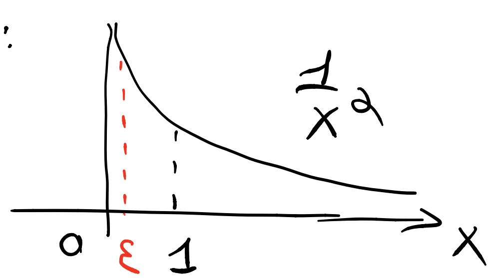
- **converg. assoluta**:

$$\int_a^b |f(x)|\, dx \text{ conv.} \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \text{ CONV.}$$

- **confronto asintotico**

Esempio importante:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\, dx :$$



se $\alpha = 1$:

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + c$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\,dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\log 1 - \log \varepsilon \right) = +\infty$$

$$\Longrightarrow \int_0^1 \frac{1}{x}\,dx \quad \text{DIVERGE}$$

$\alpha \neq 1$:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{1-\alpha} \left[x^{1-\alpha} \right]_{\varepsilon}^{1} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{1-\alpha} \left(1 - \varepsilon^{1-\alpha} \right)$$

se $\underline{1-\alpha > 0}$ il limite fa $\frac{1}{1-\alpha}$

$\Leftrightarrow \alpha < 1$

se $\underline{1-\alpha < 0}$ il limite viene $+\infty$

$\Leftrightarrow \alpha > 1$

<u>CONCLUSIONE</u>:

$$\boxed{\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\, dx \quad \begin{cases} \text{CONVERGE a } \frac{1}{1-\alpha} \text{ se } \alpha < 1 \\ \text{DIVERGE a } +\infty \text{ se } \alpha \geq 1 \end{cases}}$$

NOTA: si può anche traslare:

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha}\,dx \quad \begin{cases} \text{DIV. se } \alpha \geq 1 \\ \text{CONV. se } \alpha < 1 \end{cases}$$

$$\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha}\,dx \quad \begin{cases} \text{DIV. se } \alpha \geq 1 \\ \text{CONV. se } \alpha < 1 \end{cases}$$

---

es: $$\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x\sqrt{x}}\,dx$$

integrale improprio perché $\frac{\sin(x)}{x\sqrt{x}}$ non è definita in $x=0$

Studiamo il comportamento

dell' integrale:

per $x \longrightarrow 0$

$$\frac{\sin(x)}{x\sqrt{x}} \sim \frac{x}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{per } x \to 0$$

$\frac{1}{2} < 1$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \quad \text{CONV.}$$

$$\Longrightarrow \quad \int_0^1 \frac{\sin(x)}{x\sqrt{x}}\,dx \quad \text{CONVERGE}$$

CONFRONTO ASINTOTICO

---

es: $$\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x^3}\,dx$$

---

per $x \longrightarrow 0$ $$\frac{\sin(x)}{x^3} \sim \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2}$$

$$2>1 \Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx \quad \text{DIV.}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{\sin(x)}{x^3}\,dx \quad \text{DIVERGE}$$

confronto asintotico

$\circ$

$$\int_0^1 \frac{\cos(x)}{\log(x)}\,dx$$

$\log(1)=0$ a denominatore

$0 \notin dom(\log)$

$f(x) \overset{def}{=} \dfrac{\cos(x)}{\log(x)}$ è definita in $(0,1)$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 \Rightarrow$ prolunghiamo per continuità f in $x=0$ ponendo $f(0)=0$

studiamo per $x \to 1$:

$$\log(x) = \log(1 + \underbrace{(x-1)}_{\to 0})$$

$$\Rightarrow \log(1+(x-1)) \sim (x-1) \quad \text{per } x \to 1$$

$$\Rightarrow \frac{\cos(x)}{\log(x)} \sim \frac{\cos(1)}{x-1} \quad \text{per } x \to 1$$

$$\int_0^1 \frac{1}{(x-1)^1}\,dx \qquad a = 1 \qquad \text{diverge}$$

$$\Rightarrow \qquad \int_0^1 \frac{\cos(x)}{\log(x)}\,dx \ \text{diverge}$$

CONFRONTO ASINTOTICO

— o —

es: $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x-1)}\,dx$

$f(x) = \dfrac{1}{x(x-1)}$ è def. in $(1, +\infty)$

bisogna studiare sia $x \to 1$

$x \to +\infty$

separiamo i due studi:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x-1)} = \underbrace{\int_1^{2} \frac{1}{x(x-1)}\,dx}_{\text{integrale improprio su intervallo limitato, ma funzione illimitata}} + \underbrace{\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(x-1)}\,dx}_{\text{integrale improprio su semiretta}}$$

va bene qualunque numero maggiore di 1

•) studiamo $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x(x-1)}\,dx$:

per $x \to 1^+$: $\dfrac{1}{x(x-1)} \sim \dfrac{1}{(x-1)}$

e $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{(x-1)}\,dx$ DIVERGE

$\alpha = 1$

$\Longrightarrow$ $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x(x-1)}\,dx$ DIVERGE

confronto asintotico

•) studiamo $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(x-1)}\,dx$:

per $x \to +\infty$ $\dfrac{1}{x(x-1)} \sim \dfrac{1}{x^2}$

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx \qquad \alpha = 2 \quad \text{CONVERGE}$$

$\Longrightarrow$ (con limite asintotico)

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(x-1)}\,dx \quad \text{converge}$$

CONCLUSIONE:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x-1)}\,dx = \underbrace{\int_1^{2} \frac{1}{x(x-1)}}_{\text{DIV.}} + \underbrace{\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(x-1)}}_{\text{CONV.}}$$

$\Longrightarrow$ DIVERGE

Equazioni differenziali

Sono equazioni in cui l'incognita è una funzione e nell'equazione compare almeno una derivata della funzione incognita

Notazione: la funzione incognita si denota con $y(x)$, $y(t)$ o $x(t)$

In generale, le equazioni differenziali sono di 2 tipi:

- ORDINARIE: la funzione incognita dipende da una sola variabile p.es. $y(x)$
- ALLE DERIVATE PARZIALI: la funzione incognita dipende da più variabili, p.es. $y(t,x)$

es: $y'' + y = 0$

equazione differenziale ordinaria

es: $\Delta y = 0$ equazione di Laplace

LAPLACIANO

$y(t, x)$

$$\Delta y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

---

interesse: le leggi che governano molti fenomeni fisici, economici, atmosferici, biologici sono descritte da equazioni differenziali

In questo corso studiamo alcune classi di equazioni differenziali ordinarie

ORDINE di un' eq. differenziale (ORDINARIA) è il massimo ordine della derivata della funzione incognita:

es: $y' + \sqrt{y} = 0$ ORDINE 1

$y^{(3)} - y^{(4)} + y'' = t$: ORDINE 4

EQ. IN FORMA NORMALE : si esplicita la derivata di ordine massimo rispetto alle altre

es: $y' = -\sqrt{y}$

$y^{(4)} = y^{(3)} + y'' - t$

sono in FORMA NORMALE

EQ. AUTONOMA se non compare esplicitamente la variabile t

es: $y' = -\sqrt{y}$ è eq. autonoma

$y^{(4)} = y^{(3)} + y'' - t$ NON è autonoma

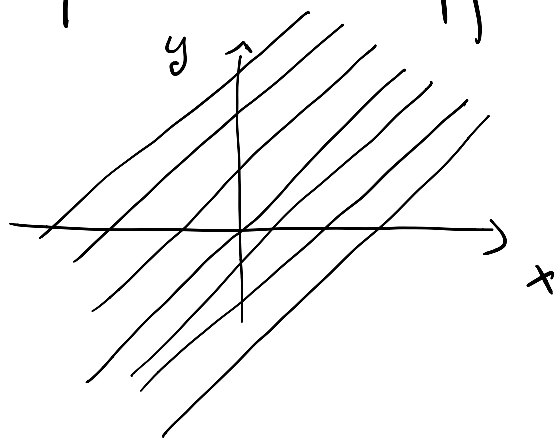
SOLUZIONE di un'eq. diff. (di ordine n) è una funzione $y(x)$ definita e derivabile n volte su un intervallo I (non degenere) e che soddisfi l'eq. diff.

es: $y' - 1 = 0$

$y' = 1 \Rightarrow y(x) = x$ risolve l'eq. diff.

$(x)' = 1$.

$y(x) = x + c$: al variare di c in $\mathbb{R}$ ci sono infinite soluzioni dell'equazione differenziale $y' - 1 = 0$



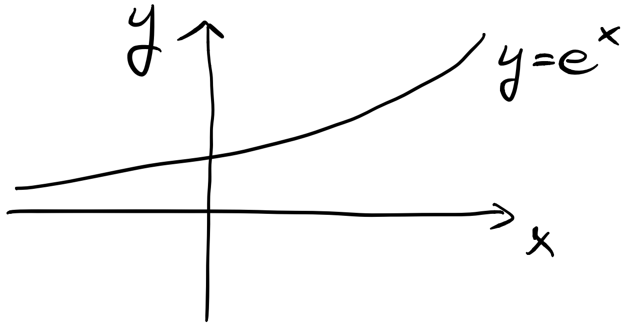
$y = x + c$
sono tutte rette parallele a $y = x$

---

es: $y' = y$

$$y(x) = e^x \; : \; y' = (e^x)' = e^x = y$$

risolve l'eq. in $I = \mathbb{R}$



Altre soluzioni? Proviamo con $y(x) = e^x + 1$

$$y' = (e^x+1)' = e^x = y$$

$$\iff e^x = e^x + 1 \quad \text{FALSO}$$

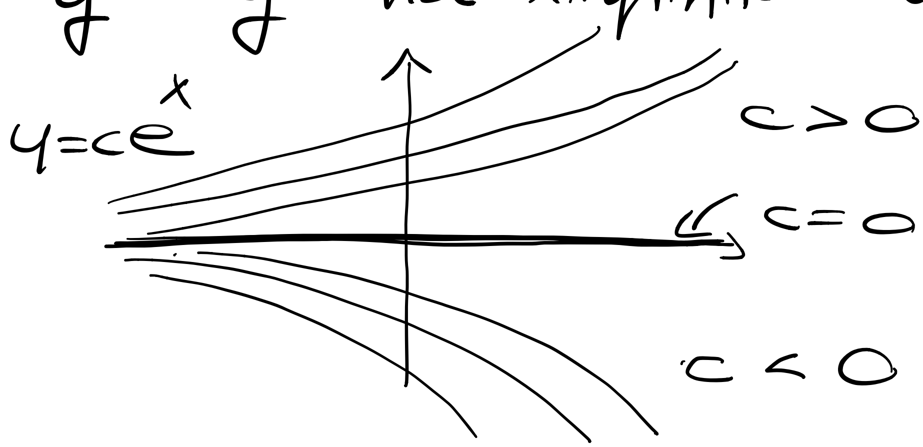
in questo esempio $e^x + c$ non è soluzione (per $c \neq 0$).

Proviamo a cercare altre soluzioni:

$$y(x) \overset{\text{def}}{=} ce^x$$

$$y' = ce^x = y \quad \text{è soluzione}$$

al variare di c in $\mathbb{R}$ l'equazione $y' = y$ ha infinite soluzioni



$y(x) = x^2$ è soluzione?

$$y' = 2x \stackrel{!}{=} x^2 = y$$

$$2x = x^2 \qquad x(x-2) = 0$$

$$x = 0 \quad \vee \quad x = 2$$

l'eq. è soddisfatta in 2 punti

<u>non</u> è soluzione perché l'equazione deve valere su tutto un intervallo non degenere.

<u>Domanda</u>: le soluzioni di $y' = y$ sono tutte della forma $y = ce^x$?

Si può provare che sono tutte di questa forma

——— ∘ ———

Come selezionare una soluzione?

Problema di Cauchy o ai valori iniziali per un'eq. diff. del 1° ordine:

$$\boxed{\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}}$$

← eq. del 1° ordine

← condizione iniziale

in questo modo, selezioniamo la soluzione che al "tempo" x_0 si trova in y_0.

Una soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy è una soluzione dell'equazione differenziale su un intervallo I contenente x_0 e che soddisfi la condizione iniziale $y(x_0) = y_0$

<u>es</u>: Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 2 \end{cases} \qquad x_0 = 0, \; y_0 = 2$$

<u>Strategia</u>:

- risolvo l'eq. differenziale e trovo una soluzione che dipende da una costante $c \in \mathbb{R}$
- determino la costante imponendo la condizione iniziale

$$y' = y^2$$

$y(x) \equiv 0$ è una soluzione dell'equazione

ma non soddisfa $y(0)=2$
e quindi non è una soluzione
del problema di Cauchy.
Cerchiamo un'altra soluzione dell'equazione:

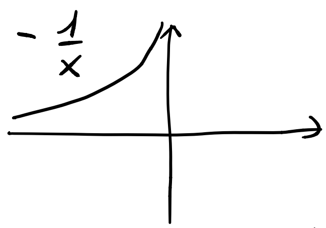
$$y' = \left(-\frac{1}{x}\right)' = +\frac{1}{x^2} = \left(-\frac{1}{x}\right)^2 = y^2$$

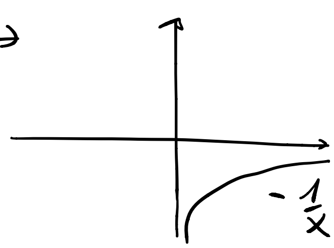
$\Rightarrow y(x) = -\frac{1}{x}$ risolve l'equazione

$y(x)$ risolve l'eq. su $(-\infty, 0)$
e su $(0, +\infty)$

LA SOLUZIONE DI UN'EQ. DIFF. E' DEFINITA SU UN INTERVALLO

ma non è definita in $x=0$
$\Rightarrow$ non risolve il problema di Cauchy
associato all'equazione





IDEA: traslo questa soluzione, cioè considero $-\frac{1}{x+c}$

$y(x) \stackrel{\text{def}}{=} -\dfrac{1}{x+c}$ risolve

l'equazione differenziale:

$y' = \dfrac{1}{(x+c)^2} = y^2$ su $(-\infty, -c)$

e su $(-c, +\infty)$

al variare di $c \in \mathbb{R}$

Condizione iniziale $y(0) = 2$

$y(x) = -\dfrac{1}{x+c} \Rightarrow \underbrace{y(0) = -\dfrac{1}{c} \stackrel{!}{=} 2}$

$-\dfrac{1}{c} = 2 \Leftrightarrow c = -\dfrac{1}{2}$

$y(x) = -\dfrac{1}{x-\frac{1}{2}}$ soluzione del problema di Cauchy

$\overbrace{\text{su } \left(-\infty, \tfrac{1}{2}\right)}^{0 \in}$ $\cancel{\left(\tfrac{1}{2}, +\infty\right)}$

Eq. diff. del 1° ordine

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Pb. di Cauchy associato all'eq. diff. del 1° ordine

NON $\exists$ algoritmo generale di soluzione

Vediamo alcune classi di equazioni che si sanno risolvere:

$$\boxed{y' = g(x)} \Rightarrow y(x) = \int g(x)\,dx$$

<u>es</u>: $y' = 1 + x^2$ eq. diff. del 1° ordine

$$y(x) = \int (1+x^2)\,dx = x + \frac{x^3}{3} + c$$

es:

$$y'' = \cos(x) + \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow y' = \int \cos(x) + \frac{1}{x^2} \, dx = \sin(x) - \frac{1}{x} + c$$

$$\Rightarrow y(x) = \int \left(\sin(x) - \frac{1}{x} + c\right) dx = -\cos(x) - \log|x| + cx + K$$

partendo da un'equazione del 2° ordine otteniamo una famiglia di soluzioni che dipende da 2 costanti

Equazioni a variabili separabili

$$\boxed{y' = g(x)\, h(y)}$$

ipotesi su g e h:

$g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continua

$h : J \longrightarrow \mathbb{R}$ — continua (per $\exists$)
— C^1 (perchè sia garantita esistenza e <u>unicità</u> della soluzione del problema di Cauchy associato)

EQUAZIONE A VARIABILI SEPARABILI

<u>Algoritmo di soluzione</u> $\boxed{y' = g(x)\,h(y)}$

1) Si studia $h(y) = 0$

le soluzioni di $h(y) = 0$ sono le <u>soluzioni costanti</u> dell'eq. diff.:

se $\tilde{y}$ è uno zero di h, cioè $h(\tilde{y}) = 0$ allora la funzione costante $y(x) = \tilde{y}$ risolve l'equazione:

$$y' = 0 = g(x)\underbrace{h(\tilde{y})}_{=0} = 0$$

quindi $y(x) = \tilde{y}$ risolve l'equazione

es: $y' = \underbrace{x^2}_{g(x)} \overbrace{(y^2 + y - 6)}^{h(y)}$

eq. diff. del 1° ordine, in forma normale, a variabili separabili

soluzioni costanti dell'equazione:

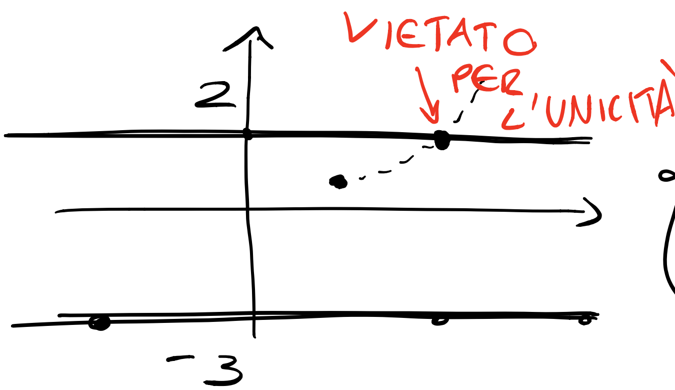
$$y^2 + y - 6 = 0$$

$$(y+3)(y-2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad y = -3 \ \vee \ y = 2$$

$\Rightarrow$ $y(x) \equiv -3$ e $y(x) \equiv 2$ sono le soluzioni costanti dell'eq. diff.

Osserviamo che in questo caso $g(x) = x^2$ e $h(y)$ sono di classe $C^\infty \Rightarrow$ è garantita l'UNICITÀ per il problema di Cauchy associato all'equazione.



$$\begin{cases} y' = x^2(y^2+y-6) \\ y(5) = 2 \end{cases}$$

$\Downarrow$

l'unica sol. è $y(x) = 2$

se il dato iniziale $y_0 \in (-3, 2)$ la soluzione del problema di Cauchy con dato iniziale y_0 è

<u>limitata</u>

---

2) $y' = g(x)\, h(y)$

soluzioni NON costanti

(per l'unicità $h(y) \neq 0$)

si scrive $y' = \frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = g(x)\,h(y)$$

separo le variabili:

$$\frac{dy}{h(y)} = g(x)\,dx$$

integra: $\underbrace{\int \frac{dy}{h(y)}}_{H(y)} = \underbrace{\int g(x)\,dx}_{G(x)}$

primitive $H(y)$ $G(x)$

$$\boxed{H(y) = G(x) + c}$$

$y' = g(x)\,h(y)$

vogliamo ricavare y: osserviamo

che H è invertibile perché

$$H'(y) = \frac{1}{h(y)} \quad \text{e } h(y) \text{ ha segno costante}$$

$$\Longrightarrow \quad y(x) = H^{-1}\big(G(x) + c\big)$$

——— o ———

<u>esempio</u>: $y' = \overbrace{\sin(x)}^{g(x)} \; \overbrace{y^2}^{h(y)}$

eq. diff. a variabili separabili

—

<u>soluzioni costanti</u>:

$$y^2 = 0 \iff y = 0$$

$\Longrightarrow$ $y(x) \equiv 0$ è l'unica soluzione costante dell'eq. diff.

<u>soluzioni non costanti</u>:

supp. $y \neq 0$

riscriviamo l'equazione:

$$\frac{dy}{dx} = \sin(x)\, y^2$$

separiamo le variabili

$$\frac{dy}{y^2} = \sin(x)\,dx$$

integriamo: $\displaystyle\int \frac{dy}{y^2} = \int \sin(x)\,dx$

$$-\frac{1}{y} = -\cos(x) + c$$

$$\frac{1}{y} = \cos(x) + \tilde{c} \qquad \text{definisco } \tilde{c} = -c$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{\cos(x) + \tilde{c}} \qquad \tilde{c} \in \mathbb{R}$$

<u>es</u>: $y' = xy$

a variabili <u>separabili</u>

soluzioni costanti: $y = 0$

$y(x) \equiv 0$ è l'unica sol. costante

soluzioni non costanti: $y \neq 0$

$$\frac{dy}{dx} = xy$$

$$\frac{dy}{y} = x\,dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int x\,dx$$

$$\log|y| = \frac{x^2}{2} + c$$

$$|y(x)| = e^{\frac{x^2}{2}+c} = e^{c}\, e^{\frac{x^2}{2}}$$

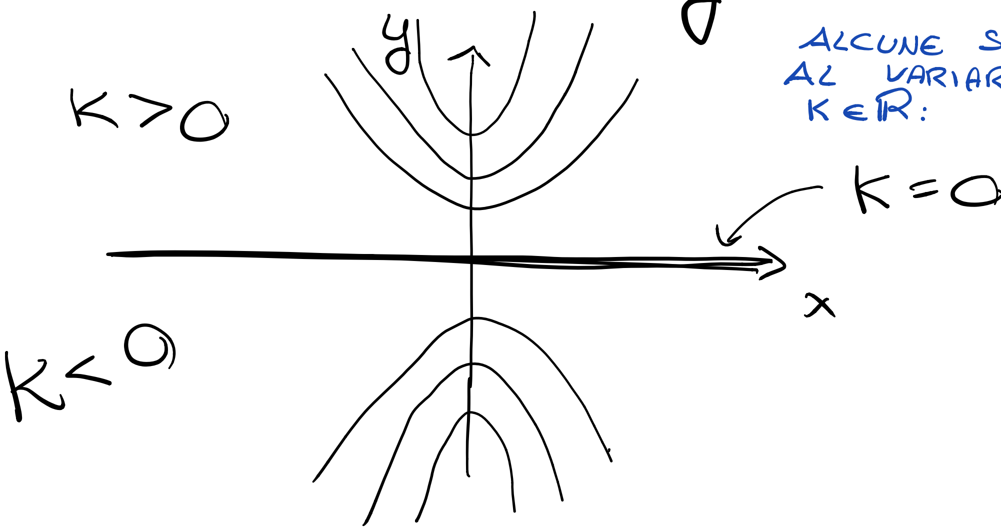
$$\begin{cases} y(x) = \pm e^{c_1} e^{x^2/2} \\ y(x) \equiv 0 \end{cases}$$

segno costante

$K \in \mathbb{R}$

scrittura unica $y(x) = K e^{x^2/2}$

ALCUNE SOLUZIONI AL VARIARE DI $K \in \mathbb{R}$:



selezioniamo la soluzione

$y(1) = 7$

$$\begin{cases} y' = xy \quad \leftarrow \quad y(x) = K e^{x^2/2} \\ y(1) = 7 \end{cases}$$

$y(1) = K e^{1/2} \stackrel{!}{=} 7$

$$K e^{1/2} = 7 \Rightarrow K = 7e^{-1/2}$$

la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = 7e^{-\frac{1}{2}} e^{x^2/2} = 7e^{\frac{x^2-1}{2}}$$

—— o ——