26 - Integrali impropri

RICHIAMO:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \qquad f \text{ continua su } (a,+\infty)$$

l'idea è studiare il limite

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

- $\exists$ finito $= l \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ l'integrale CONVERGE
- $\exists$ ∞ $\Rightarrow$ l'integrale DIVERGE
- se $\nexists$, $\Rightarrow$ l'integrale è OSCILLANTE

NOTA: $F(b) = \int_a^b f(x)\,dx$, $F(b)$ = funzione integrale

studiare il comportamento dell'integrale improprio $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$

vuol dire studiare il comportamento a $+\infty$ della funzione integrale $F(b)$

p.es. la funzione $F(b)$ ha un asintoto orizzontale se $F(b) \xrightarrow[b \to +\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$

cioè se l'integrale improprio $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

<u>Esempio importante:</u>

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$$

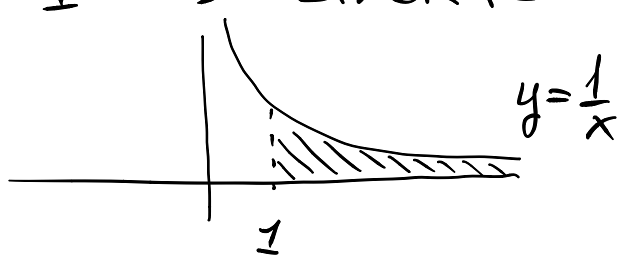
CONVERGE a $\frac{1}{\alpha-1}$ se $\alpha > 1$

DIVERGE se $\alpha \leq 1$

<u>p.es.</u>

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$$

$\alpha = 1 \Rightarrow$ DIVERGE

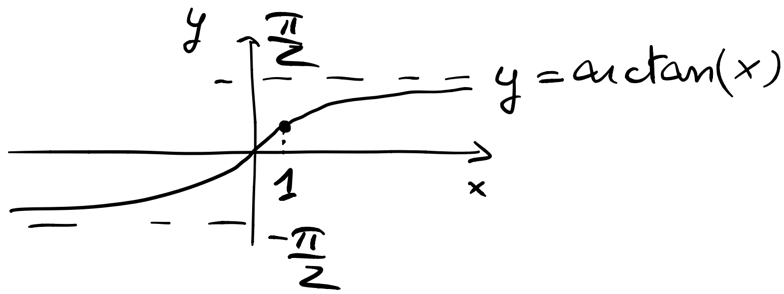


$\int \frac{1}{x^2}\,dx$ $\alpha = 2$, $2 > 1 \Rightarrow$ CONVERGE

Esempio

$$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^2}\, dx$$

studiare il carattere dell'integrale



$$\frac{\arctan(x)}{x^2} \leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{x^2} \quad \forall x \geq 1$$

passiamo agli integrali:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\pi}{2} \frac{1}{x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx \quad \text{CONVERGE}$$

$2 > 1$

per il criterio del confronto

$$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^2}\, dx \quad \text{CONVERGE}$$

es $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x}\,dx$

$$\frac{\arctan(x)}{x} \le \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{x}$$

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}$ DIVERGE

NON AIUTA!

usiamo il fatto che $x \mapsto \arctan(x)$ è crescente: $\arctan(x) \ge \arctan(1)$ $\forall x \ge 1$

$$\Rightarrow \frac{\arctan(x)}{x} \ge \frac{\arctan(1)}{x} \quad \forall x \ge 1$$

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(1)}{x}\,dx$ DIV.

$\Rightarrow$ criterio del confronto

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x}\,dx$ DIVERGE

Conseguenza del criterio del confronto:

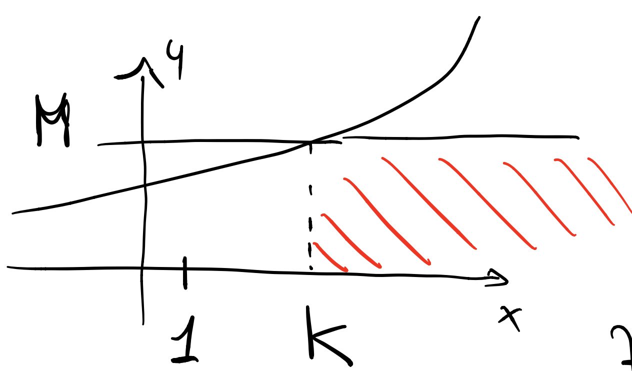
Se $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell \begin{cases} \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \pm\infty \end{cases}$

cioè se f ha limite a $+\infty$ e tale limite è $\neq 0$

allora l'integrale improprio <u>diverge</u>

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx \quad \text{DIVERGE}$$

infatti: caso $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$:



$f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$

per def.

$\forall M > 0 \ \exists K > 0:$

se $x > K \Rightarrow f(x) > M$

$f(x) > M$: interpreto come disuglianza tra funzioni

studio l'integrale improprio $\int_{K}^{+\infty} M\,dx =$

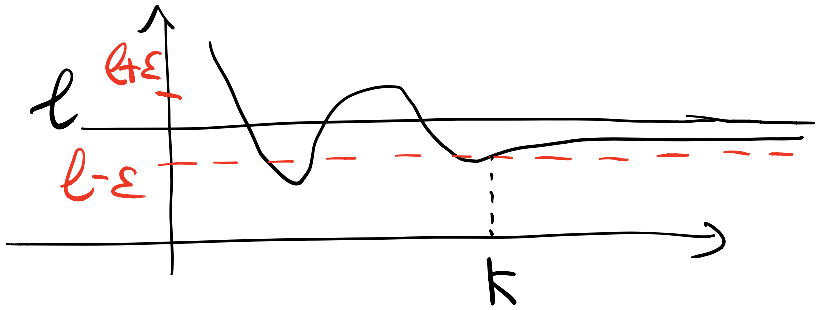
$= M \lim_{b \to +\infty} (b - K) = +\infty$ cioè DIVERGE

$\Rightarrow$ criterio del confronto

$\int_{K}^{+\infty} f(x)\,dx$ DIVERGE

$$\Rightarrow \int_{1}^{+\infty} f(x)\,dx = \underbrace{\int_{1}^{K} f(x)\,dx}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{\int_{K}^{+\infty} f(x)\,dx}_{\text{DIV.}}$$

$\Rightarrow \int_{1}^{+\infty} f(x)\,dx$ DIVERGE caso: $f(x) \longrightarrow \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ per $x \to +\infty$:



$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, K : \quad x > K \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad x > K \Rightarrow f(x) > \ell - \varepsilon > 0$$

$$\int_K^{+\infty} (\ell - \varepsilon)\, dx = +\infty$$

DIV.

per il confronto

$$\int_K^{+\infty} f(x)\, dx \text{ DIVERGE} \Rightarrow \int_1^{+\infty} f(x)\, dx \text{ DIV.}$$

qualunque numero va bene

---

es: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \arctan(x)\, dx$ DIVERGE

perché $\arctan(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \frac{\pi}{2} \neq 0$

$\Rightarrow$ come conseguenza del criterio del confronto l'integrale improprio diverge.

---

es: $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\log x}\,dx$

$$\int \frac{1}{x\log x}\,dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{SOSTITUZIONE} \\ t=\log x \\ dt=\frac{1}{x}dx}}{=} \int \frac{1}{t}\,dt = \log|t|+c$$

$= \log|\log x|+c$ primitive di $\dfrac{1}{x\log x}$

$$\Longrightarrow \int_2^{+\infty} \frac{1}{x\log x}\,dx \overset{def}{=} \lim_{b\to+\infty} \Big[\log|\log(x)|\Big]_{x=2}^{b}$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \log|\log b| - \log|\log 2| = +\infty$$

$\Longrightarrow$ l'integrale diverge

---

es: $$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\log^2 x}\,dx$$

calcoliamo una primitiva:

$$\int \frac{1}{x\log^2 x}\,dx \underset{\uparrow}{=} \int \frac{1}{t^2}\,dt = -\frac{1}{t} + c$$

SOSTITUZIONE

$t = \log x$

$$= -\frac{1}{\log x} + c$$

$$\Rightarrow \int_2^{+\infty} \frac{1}{x \log^2 x}\, dx = \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{1}{\log b} + \frac{1}{\log 2} \right)$$

$$= \frac{1}{\log 2}$$ $\Rightarrow$ l'integrale improprio converge

---

es: $$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x (\log x)^\beta}\, dx$$

$\beta = 1$, $\beta = 2$ visti sopra

nel caso generale si ottiene

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x (\log x)^\beta}\, dx \begin{cases} \text{DIV. se } \beta \leq 1 \\ \text{CONV. se } \beta > 1 \end{cases}$$

---

es: $$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2(2+\cos(x))}\,dx$$

$$2+\cos(x) \geq 2-1 = 1$$

$$\cos(x) \geq -1 \quad \forall x$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2+\cos(x)} \leq 1} \quad \forall x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2(2+\cos(x))} \leq \frac{1}{x^2}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \quad \text{CONV.}$$

$2 > 1$

CRITERIO DEL CONFRONTO

$\Rightarrow$ l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2(2+\cos(x))}\,dx \quad \text{CONVERGE}$$

CRITERIO DELLA CONVERGENZA ASSOLUTA:

$f: [a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ continua

se $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx$ converge

allora $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ converge

e in questo caso si dice che l'integrale improprio $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge assolutamente

CAMBIA SEGNO

es: $$\int_{2\pi}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{1+x^2}\, dx$$

non possiamo applicare direttamente

il criterio del confronto (che vale per funzioni ≥ 0)

studiamo il valore assoluto:

$$0 \leq \left| \frac{\sin(x)}{1+x^2} \right| = \frac{|\sin(x)|}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}$$

l'integrale improprio $\displaystyle\int_{2\pi}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx \left(= \frac{\pi}{2} - \arctan(2\pi)\right)$

CONVERGE

confronto

$$\overset{\downarrow}{\Longrightarrow} \int_{2\pi}^{+\infty} \left| \frac{\sin(x)}{1+x^2} \right| dx \quad \text{CONVERGE}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{CRITERIO} \\ \text{CONVERG. ASSOLUTA}}}{\Longrightarrow} \int_{2\pi}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{1+x^2}\, dx \quad \text{converge}$$

———— o ————

CAMBIA SEGNO

es: $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x\sqrt{x}}\,dx$

studiamo il valore assoluto:

$$\left|\frac{\cos(x)}{x\sqrt{x}}\right| \leq \frac{1}{x\sqrt{x}} \quad e \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}}$$

$\frac{3}{2} > 1$

$\Rightarrow$ CONVERGE

confronto

$$\Longrightarrow \int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos(x)}{x\sqrt{x}}\right| dx \quad \text{converge}$$

$$\Longrightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x\sqrt{x}}\,dx \quad \text{converge}$$

CRITERIO

CONVERG. ASSOLUTA

——— o ———

es: $$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\, dx$$

CAMBIA SEGNO

passo al valore assoluto:

$$\left| \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \int \frac{1}{x^{1/2}}$$

$\frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ DIVERGE

NON AIUTA!

altra strategia: usiamo l'integrazione per parti per aumentare l'esponente di x al denominatore:

$$\int \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} = \int \underbrace{\sin(x)}_{g'} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}}}_{f} dx$$

per parti

$$\overset{\downarrow}{=} -\frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} - \int \frac{(-\cos x)}{x\sqrt{x}}\left(-\frac{1}{2}\right) dx$$

$$= -\frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\int \frac{\cos(x)}{x\sqrt{x}}\, dx$$

Abbiamo ottenuto:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} = \lim_{b\to+\infty}\left(\underbrace{-\frac{\cos(b)}{\sqrt{b}}}_{\to 0} + \frac{\cos(1)}{\sqrt{1}}\right)$$

$$- \underbrace{\frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x\sqrt{x}}\, dx}_{\text{CONVERGE}}$$

(visto sopra)

$$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\,dx = \cos(1) - \frac{1}{2}\underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x\sqrt{x}}}_{\text{conv.}}$$

$\Rightarrow$ converge.

——— o ———

CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO

$f, g : [a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x) \geq 0 \quad \forall x, \quad g(x) > 0 \quad \forall x \in [a, +\infty)$

Supponiamo anche che esista il limite $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$

Allora:

1) se $\ell > 0$, $\ell \in \mathbb{R}$: $\quad f \sim \ell g$ per $x \to +\infty$

allora i due integrali impropri $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ e $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ hanno lo STESSO comportamento

2) se $\ell = 0$: $\quad f = o(g)$ per $x \to +\infty$

se $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ CONVERGE

allora anche $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ CONVERGE

3) se $\ell = +\infty$: $\quad g = o(f)$ per $x \to +\infty$

se $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ DIVERGE

allora $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ DIVERGE

l'idea è che voglio studiare $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ confrontando f "asintoticam." con g

Caso particolare:

se $f \sim \frac{\ell}{x^\alpha}$ $\ell \neq 0$ per $x \to +\infty$

Allora

- se $\alpha > 1 \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge

- se $\alpha \leq 1 \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge

---

es: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$

per $x \to +\infty$ $\frac{1}{\sqrt{x^2+4}} \sim \frac{1}{x}$

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ diverge $\Rightarrow$ $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$ diverge

CONFRONTO
ASINTOTICO
