19 - Teorema di Lagrange e sue conseguenze.
Teorema di L'Hôpital

Teorema di Lagrange

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

f continua in $[a,b] \leftarrow$ CHIUSO
f derivabile in (a,b)
Allora $\exists\, c \in (a,b)$:

$$\boxed{f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$

NOTA 1 le soluzioni dell'equazione

$$f'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

si chiamano PUNTI DI LAGRANGE

NOTA 2: ~~se~~ aggiungiamo l'ipotesi $f(b)=f(a)$ allora la formula del teorema di Lagrange diventa

$f'(c) = 0$ cioè il teorema di Rolle.

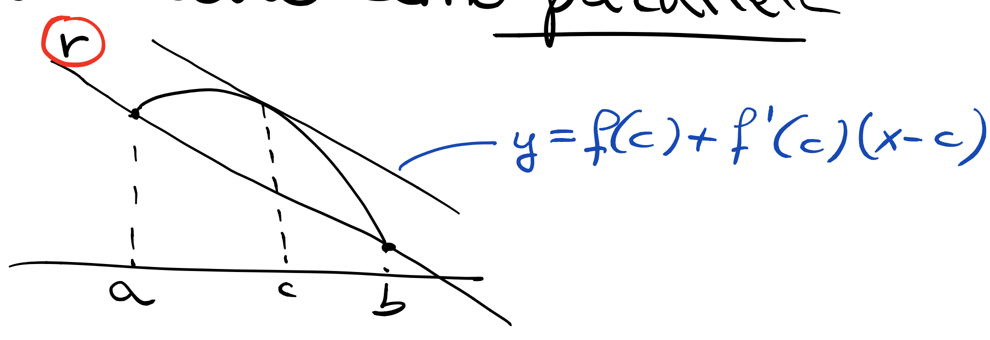
NOTA 3: interpretazione geometrica di

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

coefficiente angolare della retta tangente al grafico di f in $(c, f(c))$

coefficiente angolare della retta per i punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$

quindi la formula dice che queste due rette sono parallele



conclusione: il teorema di Lagrange si può interpretare come segue: dato il grafico di f, si consideri la retta r per i punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, allora esiste almeno un punto $c \in (a,b)$ tale che la retta tangente al grafico di f in $(c, f(c))$ è parallela alla retta r.

Dim. del teorema di Lagrange:

TESI: $\exists\, c \in (a,b)$: $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$$\Longleftrightarrow \underbrace{f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}_{\text{l'idea è considerare questa parte come derivata di una funzione } g \text{ e applicare il teorema di Rolle a } g:} = 0$$

definiamo

$$g(x) \overset{\text{def}}{=} f(x) - \overbrace{\left(f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right)}^{\text{retta r}}$$

Verifichiamo che g soddisfa le ipotesi del <u>Teorema di Rolle</u>:

$\text{dom}\, g = \text{dom} f$

- $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

- g è continua perché $g = f - \text{retta}$

continua per ipotesi in $[a,b]$

continua in $\mathbb{R}$

quindi g è continua in $[a,b]$

- $g = f - \text{retta}$

per ipotesi è derivabile in (a,b)

è un polinomio di grado 1, quindi è derivabile in $\mathbb{R}$

$\Longrightarrow$ g è derivabile in (a,b) perché differenza di funzioni derivabili

$$\bullet\ g(a) = f(a) - \Big(f(a) + \underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a)}_{=0}\Big)$$

$$= f(a) - f(a) = 0$$

$$g(b) = f(b) - \left(f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{\cancel{b-a}}(\cancel{b-a})\right)$$

$$= f(b) - f(a) - (f(b) - f(a)) = 0$$

$$\Rightarrow \quad g(a) = 0 = g(b)$$

Possiamo quindi applicare il teorema di Rolle: $\exists\ c \in (a,b)$: $g'(c) = 0$

$$g(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right)$$

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

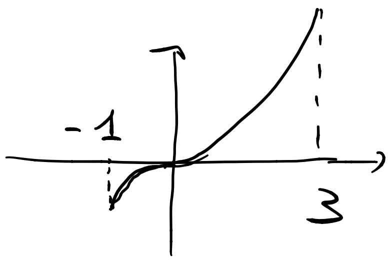
$$g'(c) = 0 \iff f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$$

$\square$

<u>Es</u>: $f(x) = x|x|$ in $[-1,3]$

si può applicare il teor. di Lagrange?

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 3 \\ -x^2 & \text{se } -1 \leq x < 0 \end{cases}$$



f è continua perché prodotto di funzioni continue

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } 0 < x < 3 \\ -2x & \text{se } -1 < x < 0 \end{cases}$$

<u>per $x=0$</u>: $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{x|x|-0}{x} = |x| \xrightarrow{x \to 0} 0$

$\Rightarrow$ f è derivabile anche in 0 e $f'(0) = 0$

$\Rightarrow$ f è continua in $[-1,3]$ e derivabile in $(-1,3)$

quindi si può applicare il teor. di Lagrange: $\exists\ c \in (-1, 3)$:

$$f'(c) = \frac{f(3) - f(-1)}{3-(-1)}$$

Punti di Lagrange?

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } 0<x<3 \\ -2x & \text{se } -1<x<0 \\ 0 & \text{se } x=0 \end{cases}$$

$$= 2|x| \quad \text{se } x \in (-1, 3)$$

$f(x) = x|x|$

$$\frac{f(3) - f(-1)}{3-(-1)} = \frac{9+1}{4} = \frac{5}{2}$$

Dobbiamo risolvere $f'(x) = \frac{5}{2}$

cioè $2|x| = \frac{5}{2} \Rightarrow |x| = \frac{5}{4}$

$\Rightarrow x = \pm \frac{5}{4}$

$\frac{5}{4} \in (-1, 3)$

$-\frac{5}{4} < -1 \Rightarrow -\frac{5}{4} \notin (-1, 3)$

unico punto di Lagrange per f

in $(-1, 3)$ è $\frac{5}{4}$

Esercizio:

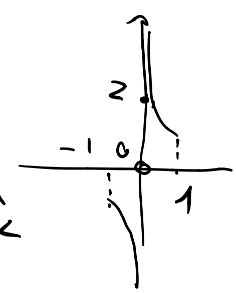
dare un esempio di f che NON soddisfa nè ipotesi nè tesi del teorema di Lagrange

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \neq f'(c)$$

es 1

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0, x \in [-1,0) \cup (0,1] \\ 2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

NON SODDISFA LE IPOTESI DEL TEOR.

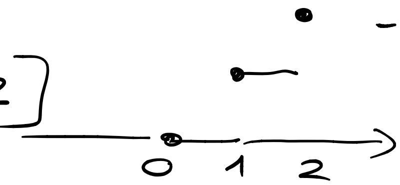


$$\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)} = 1 \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} \neq 1 \quad \forall x$$

$\Rightarrow$ NON SODDISFA LA TESI

es2

$f(x) = \lfloor x \rfloor \quad x \in [0,2]$



$$\frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{\lfloor 2 \rfloor - \lfloor 0 \rfloor}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

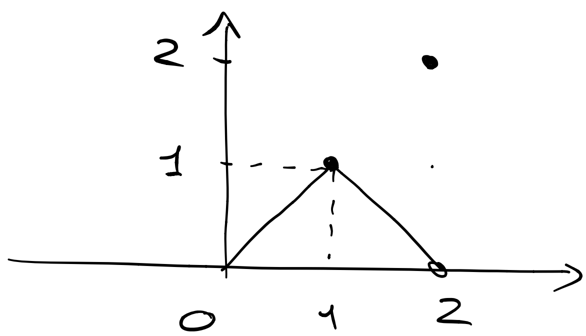
$f'(x) = 1$ NON ha soluzioni

f non è continua in $[0,2]$
(e nemmeno derivabile in $(0,2)$)
e quindi non soddisfa le ipotesi

$f'(x) = \frac{f(2)-f(0)}{2-0} \iff f'(x) = 1$ NON ha soluzioni

$\Rightarrow$ non vale la tesi

Esercizio: dare un esempio di f che NON soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange ma soddisfa la tesi



$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x = 2 \\ 1 - |x-1| & \text{se } 0 \leq x < 2 \end{cases}$$

f non è continua in $[0,2]$ quindi NON soddisfa le ipotesi del teor. di Lagrange

$$\frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{2-0}{2-0} = 1$$

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x = 2 \\ 1-(x-1) & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ 1+(x-1) & \text{se } 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

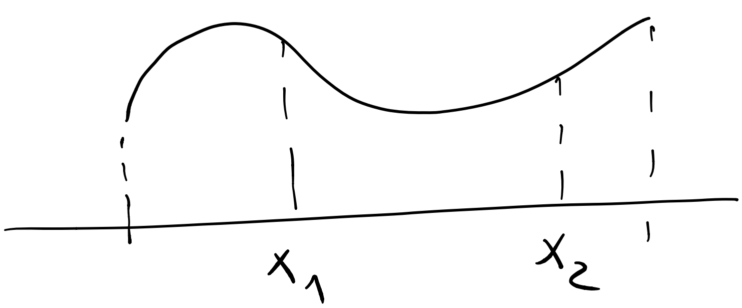
$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x = 2 \\ 2-x & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ x & \text{se } 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } 1 < x < 2 \\ 1 & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ l'equazione $f'(x) = 1$ ha infinite soluzioni, tutti i punti dell' intervallo $(0,1)$, p.es. $f'\left(\frac{1}{3}\right) = 1$

$\Rightarrow$ soddisfa la tesi

NOTA: sia f derivabile in un intervallo aperto I (non vuoto)



siano $x_1, x_2 \in I$

$x_1 < x_2$

allora possiamo applicare il teorema di Lagrange a $f|_{[x_1,x_2]}$:

ipotesi da verificare: $f:[x_1,x_2] \longrightarrow \mathbb{R}$

·) f definita su intervallo chiuso e limitato ✓

·) f continua su tutto l'intervallo ✓

·) f derivabile (almeno) nei punti interni dell'intervallo ✓

f è continua in $[x_1,x_2]$
perché f è derivabile in $I \supset [x_1,x_2]$
e derivabile $\Rightarrow$ continua

$\Longrightarrow$ $\exists\ c \in (x_1,x_2)$:

teor. Lagrange

$$f'(c) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

$\Longleftrightarrow$

$$f(x_2)-f(x_1) = f'(c)(x_2-x_1)$$

Abbiamo ottenuto:

f derivabile in un intervallo I

$x_1 < x_2 \in I$

$\Rightarrow \exists\ c \in (x_1, x_2)$:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

Seconda formula dell'incremento finito:

$$\boxed{f(x) - f(x_0) = f'(\underset{\text{tra } x \text{ e } x_0}{c})(x - x_0)}$$

nelle ipotesi:

f derivabile in un intervallo I

e $x, x_0 \in I$

Confronto con la prima formula dell'incremento finito:

$$f(x) - f(x_0) = \boxed{f'(x_0)}(x - x_0) + o((x - x_0))$$

per $x \to x_0$

- la I formula vale solo in un intorno di x_0

$$\underbrace{f(x)} = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)} + o((x-x_0))$$

approssimo f con la retta tangente al grafico in $(x_0, f(x_0))$

commetto un errore che è $o((x-x_0))$

- la II formula

$$f(x) = f(x_0) + f'(c)(x-x_0)$$

formula esatta

non serve che x stia in un intorno di x_0

c non è esplicito, $f'(c)$ in

generale non è noto.

La seconda formula dell'incremento finito si usa per dedurre alcune proprietà importanti:

Teorema:

f continua in un intervallo I

f derivabile nei punti interni di I

Allora

$$\boxed{\begin{array}{c} f'(x) = 0 \quad \forall x \in \overset{\circ}{I} \ \text{punti interni} \\ \Updownarrow \\ f(x) = \text{costante in } I \end{array}}$$

$\boxed{\Uparrow}$: supp. $f = \text{costante} = k$

rapporto incrementale

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{k-k}{h} = \frac{0}{h} = 0$$

$\Rightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in \mathring{I}$

$\Downarrow$ supp. $f'(x)=0 \quad \forall x \in \mathring{I}$

TESI: f è costante cioè

$\forall$ coppia di punti distinti $x_1, x_2 \in I$

si ha $f(x_1)=f(x_2)$.

supponiamo $x_1 < x_2$

per la 2ª formula dell'incremento finito $\exists\, c \in (x_1, x_2)$:

$$f(x_2)-f(x_1) = \underbrace{f'(c)}_{=0}(x_2-x_1) = 0$$

per ipotesi $f'(x)=0 \ \forall x \in \mathring{I}$

$\Rightarrow f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow f$ costante

$\square$

Conseguenza:

se f e g sono definite in uno stesso intervallo e sono derivabili in (a,b) e se

$$f'(x) = g'(x) \quad \forall x \in (a,b)$$

allora f e g differiscono per una costante nell'intervallo (a,b)

INFATTI:

basta applicare il risultato precedente alla funzione $h(x) \stackrel{def}{=} f(x) - g(x)$

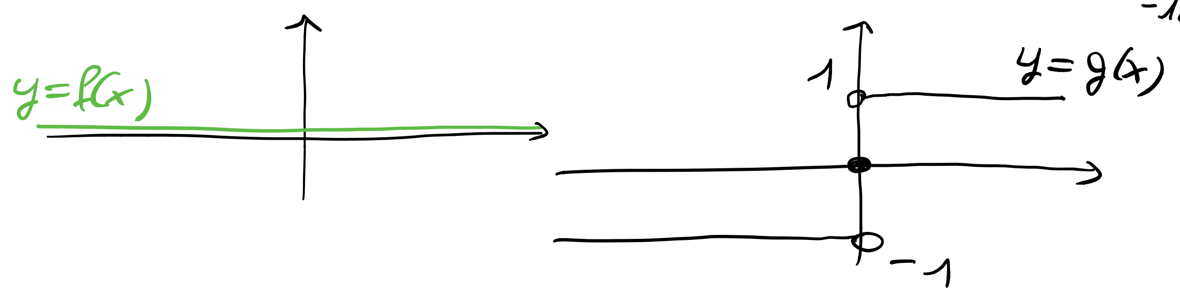
$$h'(x) = 0 \quad \forall x \implies h(x) = \text{costante } k$$

$\forall x \in$ INTERVALLO

ATTENZIONE: il risultato vale su un intervallo

es: $f(x) = 0 \qquad\qquad f'(x) = 0$

$g(x) = \operatorname{sgn}(x) \qquad g'(x) = 0 \quad \forall x \neq 0$



ma f e g non differiscono per una costante su $\mathbb{R}$

o

$$\boxed{f(x) \overset{\text{def}}{=} \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{\cancel{x^2}}{x^2+1}\,\frac{1}{\cancel{x^2}} = 0$$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in \operatorname{dom} f$$

$$\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

$\Rightarrow$ f è costante in $(-\infty, 0)$

ed è costante in $(0,+\infty)$

$$f(x) = f(1) = \arctan 1 + \arctan 1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} \quad \text{in } (0,+\infty)}$$

tipico utilizzo:

$$\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

per $x \longrightarrow +\infty$

sapendo che $\arctan(t) = t + o(t)$ per $t \to 0$

in $(-\infty, 0)$: $f(x) = \text{costante} = f(-1)$

$$\Rightarrow \boxed{\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{in } (-\infty,0)}$$

Teorema: $\boxed{\text{MONOTONIA DELLA FUNZIONE } f \text{ e SEGNO DELLA SUA DERIVATA } f'}$

f definita in un intervallo I

f continua in I

f derivabile nei punti interni di I $(\mathring{I})$

Allora

1) f crescente in $I \iff f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathring{I}$

2) f decrescente in $I \iff f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathring{I}$

3) $f'(x) > 0$ $\forall x \in \mathring{I}$ $\implies f$ strettam. crescente

$\not\Longleftarrow$ FALSA: x^3 è strett. crescente ma la derivata si annulla in $x = 0$

4) $f'(x) < 0$ $\forall x \in \mathring{I}$ $\implies f$ strett. decrescente in I

Dim:

(1) f crescente $\iff f' \geq 0$

$\implies$: $\quad \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ + teor permanenza segno

GIÀ VISTA

$\Leftarrow$: supponiamo $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathring{I}$

dobbiamo provare che f è crescente:

$$x_1 < x_2 \in I \overset{\text{TESI}}{\Longrightarrow} f(x_1) \leq f(x_2) :$$

applichiamo il teor. di Lagrange a f nell'intervallo $[x_1, x_2]$

$\Rightarrow \ \exists \ c \in (x_1, x_2)$:

$$f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(c)}_{\geq 0} \underbrace{(x_2 - x_1)}_{> 0} \geq 0$$

$$\Rightarrow \ f(x_2) \geq f(x_1)$$

$>$

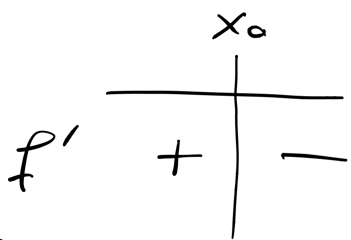
3) $f' > 0 \ \forall x \in \mathring{I} \Rightarrow f$ è strett. crescente

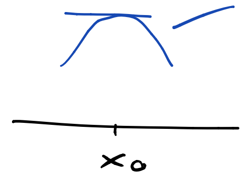
$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) > 0 \qquad f(x_2) > f(x_1) \ \forall x_1 < x_2$

2), 4) : si fanno allo stesso modo

$\square$

Conseguenza : SEGNO DELLA DERIVATA e PUNTI DI MAX/MIN. DELLA FUNZIONE





f in un intorno di x_0

IPOTESI:

se f è derivabile in $I_r(x_0)=(x_0-r,x_0+r)$

$f'(x_0)=0$

$f'(x)\geq 0$ in (x_0-r,x_0)

$f'(x)\leq 0$ in (x_0,x_0+r)

Allora x_0 è punto di massimo relativo per f

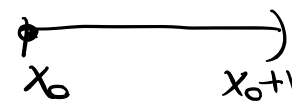
Dim:

• $f'(x)\geq 0 \quad \forall x \in (x_0-r,x_0)$

$\Longrightarrow$ f è crescente in $[x_0-r,x_0]$

$\Longrightarrow$ $f(x)\leq f(x_0) \quad \forall x\in[x_0-r,x_0)$

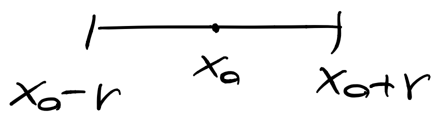
ii) $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (x_0, x_0+r)$



$\Longrightarrow$ f decrescente in $[x_0, x_0+r)$

$\Longrightarrow \quad f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in (x_0, x_0+r)$

quindi

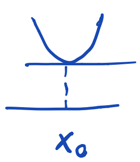


$$\boxed{\begin{gathered} f(x) \leq f(x_0) \\ \forall x \in I_r(x_0) \end{gathered}}$$

$\Longrightarrow$ x_0 è punto di massimo relativo

□

NOTA: vale un risultato simile per i punti di minimo relativo:



	x_0	
f'	$-$	$+$

in $I_r(x_0)$ $\qquad f'(x_0)=0$

$\Longrightarrow$ f è punto di minimo relativo per f.

STUDI DI FUNZIONE
- piattaforma EXERCISE
- ESERCITAZIONE

Teorema di L' Hôpital

x_0 punto di accumulazione per dom $f \cap$ dom g

f, g derivabili in un intorno (bucato) di x_0 $I_r(x_0) \setminus \{x_0\}$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}$$

se $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in I_r(x_0) \setminus \{x_0\}$

se $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$

Allora $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$

Commento: la dim. fa uso del

teorema di Cauchy:

f, g continue su $[a,b]$

f, g derivabili su (a,b)

$g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,b)$

allora $\exists\, c \in (a,b)$:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

NOTA: valgono opportune versioni per i limiti destro e sinistro

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} \quad , \quad \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)}{g(x)}$$

es: $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{2^x}{x^3} = +\infty$

forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$

$f(x) = 2^x$

$g(x) = x^3$

$$\frac{f'}{g'} = \frac{2^x \log 2}{3x^2} \longrightarrow +\infty$$

(H)

$$\frac{f''}{g''} = \frac{2^x \log^2 2}{6x} \longrightarrow +\infty$$

$$\frac{f'''}{g'''} = \frac{2^x \log^3 2}{6} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$$

(H)

Si può fare il caso della forma indeterminata "$0 \cdot \infty$"

es: $\lim_{x \to 0^+} x \log x$

$$x \log x \quad \text{"}0 \cdot \infty\text{"} \quad \begin{cases} \dfrac{x}{\frac{1}{\log x}} & \dfrac{0}{0} \quad \text{(A)} \\[2ex] \dfrac{\log x}{\frac{1}{x}} & \dfrac{-\infty}{+\infty} \quad \text{(B)} \end{cases}$$

(A) deriviamo: $\dfrac{1}{-\frac{1}{(\log x)^2} \cdot \frac{1}{x}} = -\dfrac{x}{\frac{1}{\log^2 x}}$

più complicata della formula di partenza!

Ⓑ $\dfrac{(\log x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -x \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$

molto meglio!

$\xRightarrow[\text{l'Hôpital}]{} \quad x \log x \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$

———— ∘ ————

Caso forma indeterminata "0^0"

$$\lim_{x \to 0^+} x^{\sqrt{x}}$$

$$x^{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x}\log(x)}$$

$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x}\log(x)$ forma indet. "$0 \cdot \infty$"

$$\sqrt{x}\log x = \begin{cases} \dfrac{\log x}{\frac{1}{\sqrt{x}}} & \text{"}\dfrac{\infty}{\infty}\text{"} \\[2ex] \dfrac{\sqrt{x}}{\frac{1}{\log x}} & \text{"}\dfrac{0}{0}\text{"} \end{cases}$$

← CONVIENE (visto nell'es. precedente)

$$\frac{(\log x)'}{\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'} = \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2x\sqrt{x}}} = -2\sqrt{x} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$$

$$\overset{(H)}{\Longrightarrow} \lim_{x\to 0^+} x^{\sqrt{x}} = e^0 = 1$$

---

es.: $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^4(\sqrt{x})}{\log(1+3x)\sqrt{\arctan(x^2)}}$

è della forma "$\frac{0}{0}$" ma non conviene usare l'Hôpital !

SI FA CON LANDAU

Domanda: se $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ non $\exists$ che si fa?

Non ci dà informazioni su $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$

es: $\lim_{x \to +\infty} \frac{3x+\cos(x)}{2x-\sin(x)}$ $\quad$ "$\frac{+\infty}{+\infty}$"

proviamo con l'Hôpital:

$\lim_{x \to +\infty} \frac{(3x+\cos(x))'}{(2x-\sin(x))'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3-\sin x}{2-\cos x}$ NON ESISTE

quindi l'Hôpital non si applica.

---

es: $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ $\quad$ "$\frac{\infty}{\infty}$"

Proviamo con l'Hôpital:

$$\frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{1} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$ STESSA DIFFICOLTÀ!

anche questo non si risolve con l'Hôpital

Criterio di derivabilità:

Se $\exists$ finito $\lim_{x \to x_0} f'(x) = \ell$

allora f è derivabile in x_0 e
$f'(x_0) = \ell$

Dim:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

è una forma indeterminata "$\frac{0}{0}$"

$$\frac{\left(f(x) - f(x_0)\right)'}{(x - x_0)'} = \frac{f'(x)}{1} \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell$$

per l'Hôpital

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell \Rightarrow f'(x_0) = \ell$$

$\square$