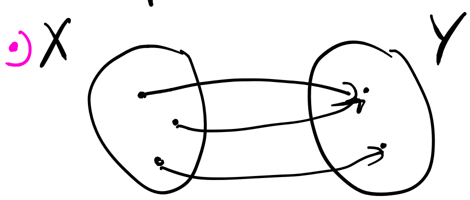
06 - FUNZIONI

X, Y insiemi

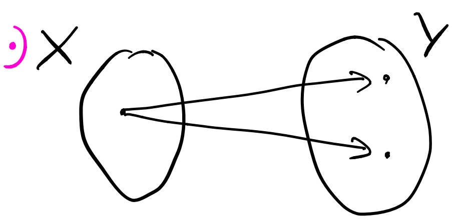
$$\begin{array}{c} f: X \longrightarrow Y \\ \, \cup\!\!\!\!\! \shortmid \\ \, x \end{array}$$

dato $x \in X$, se f associa a x un unico elemento $y \in Y$ allora f si dice funzione

esempi:

- 

  è una funzione

- 

  non è una funzione

---

dominio di f: $\quad f: X \longrightarrow Y$

$\operatorname{dom} f = X$ $\quad$ DOMINIO $\quad$ CODOMINIO

es:

$f(x) = \dfrac{1}{x+1} \qquad \operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

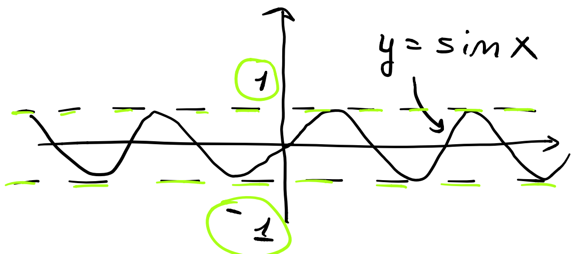
INSIEME IMMAGINE $\quad \operatorname{im} f = \{ f(x) : x \in X \}$

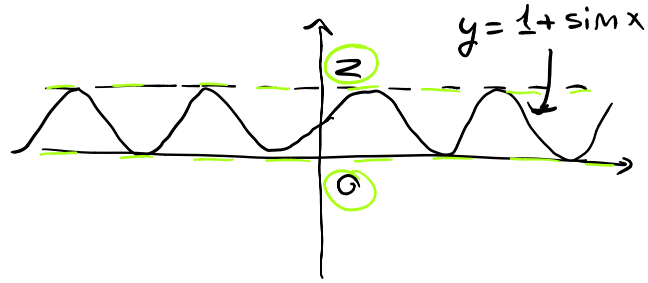
$= f(X) \subseteq Y$

es: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad f(x) = 1+\sin x$

$\mathrm{dom} f = \mathbb{R}$ $\qquad -1 \le \sin x \le 1$

$\mathrm{im} f = [0,2]$ $\qquad 0 \le 1+\sin x \le 2$





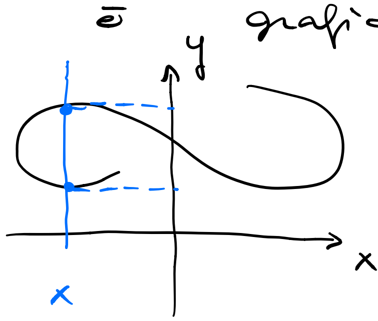
---

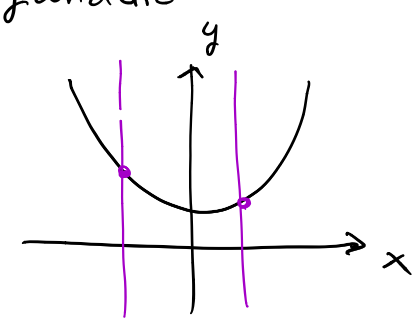
grafico di $f \subseteq \mathbb{R}^2$

$$\boxed{\Gamma_f} \overset{def}{=} \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in \mathrm{dom} f,\ y=f(x)\}$$

$$= \{(x,f(x)) : x \in \mathrm{dom} f\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

es: "rette verticali" per stabilire se una curva è grafico di una funzione





la curva NON è il grafico di una funzione

la curva è il grafico di una funzione

$f: X \longrightarrow Y$

$A \subseteq X$

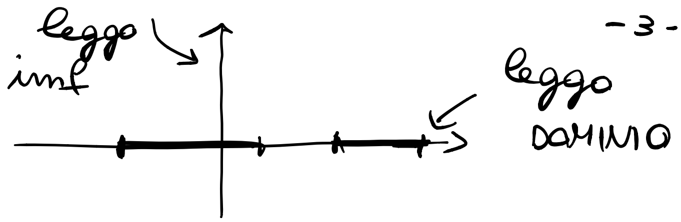
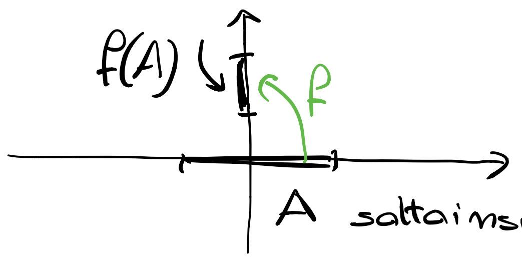


immagine di A

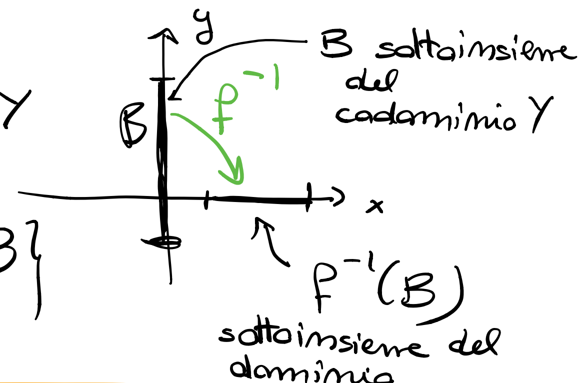
$$f(A) = \{ f(x) : x \in A \}$$

sottoinsieme del codominio Y



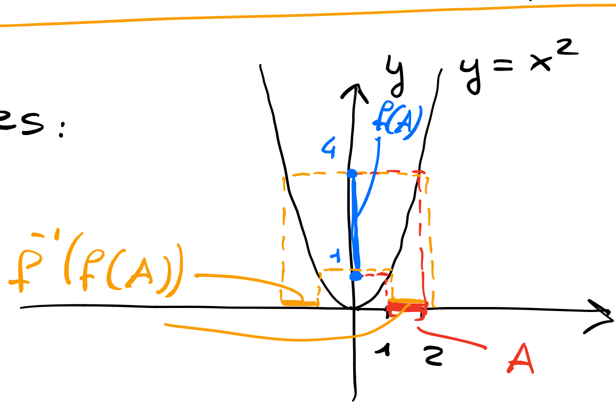
controimmagine di $B \subseteq Y$

$$f^{-1}(B) = \{ x \in \operatorname{dom} f : f(x) \in B \}$$



$$\boxed{A \subseteq f^{-1}(f(A)) \qquad A \subseteq \operatorname{dom} f}$$

es:



$f(x) = x^2$

$A = [1,2]$

$$f(A) = \{ f(x) : x \in A \} = \{ x^2 : x \in [1,2] \}$$

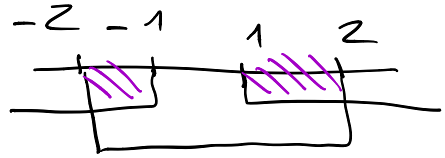
$$= [1, 4]$$

$1 \leq x \leq 2$

$1 \leq x^2 \leq 4$

$$f^{-1}([1,4]) = \{x\in\mathbb{R} : 1\le x^2\le 4\}$$

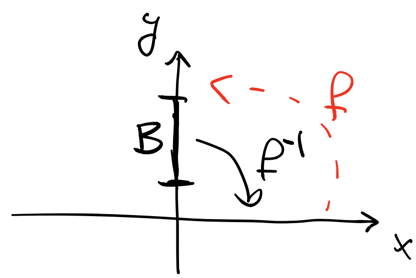
$$\begin{cases} x^2\ge 1\\ x^2\le 4\end{cases}\qquad \begin{cases}|x|\ge 1\\ |x|\le 2\end{cases}$$



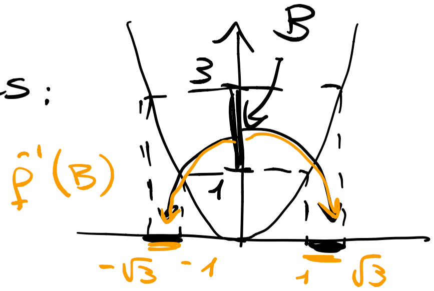
$$f^{-1}([1,4]) = [-2,-1]\cup[1,2]$$

A

$$\boxed{\begin{array}{l} B\subseteq Y = \text{cod}\, f \\ f(f^{-1}(B)) \subseteq B \end{array}}$$



es:



$f(x)=x^2$

$$f(f^{-1}(B)) \overset{?}{\neq} B$$

$$B\subset\mathbb{R}$$

$B=[1,3]$ $\qquad f^{-1}(B)=\{x : 1\le x^2\le 3\}$

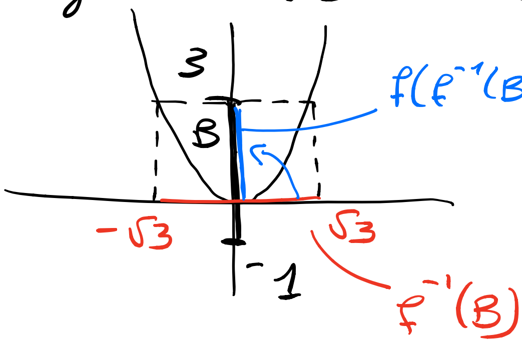
$$f^{-1}(B) = [-\sqrt{3},-1]\cup[1,\sqrt{3}]$$

$$f(f^{-1}(B)) = \{\underbrace{f(x)}_{x^2} : x\in[-\sqrt{3},-1]\cup[1,\sqrt{3}]\}$$

$$= [1,3] = B$$

in questo esempio, è venuto $f(f^{-1}(B))=B$, perché abbiamo preso $B\subseteq \text{im}\, f$

scegliamo ora B in modo diversa:



$$B = [-1, 3]$$

$$f(x) = x^2$$

$$f^{-1}(B) = \{x : -1 \le x^2 \le 3\}$$

$$f(f^{-1}(B)) = f([-\sqrt{3}, \sqrt{3}]) = \{\underbrace{f(x)}_{x^2} : x \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]\}$$

$$= [0, 3] \subsetneq [-1, 3] = B$$

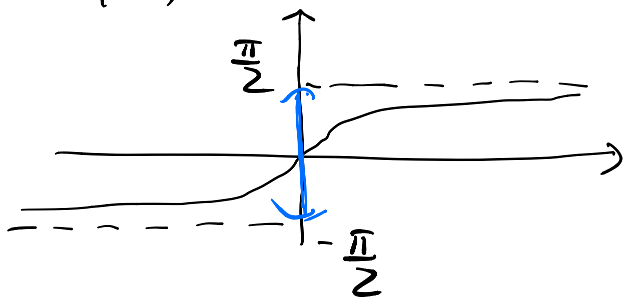
$f : X \to Y$

- $\sup\limits_{x \in X} f(x) \overset{\text{def}}{=} \sup f(X) = \sup \{f(x) : x \in X\}$
- $\inf\limits_{x \in X} f(x) \overset{\text{def}}{=} \inf f(X)$ estremo superiore e inferiore di f
- $\max\limits_{x \in X} f(x) \overset{\text{def}}{=} \max f(X)$ valore massimo e minimo di f
- $\min\limits_{x \in X} f(x) \overset{\text{def}}{=} \min f(X)$

f si dice limitata se esistono in $\mathbb{R}$

$$\sup_{x \in X} f(x) \text{ e } \inf_{x \in X} f(x)$$

es: $f(x) = \arctan x$



$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \arctan(x)$

$\operatorname{im} f = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

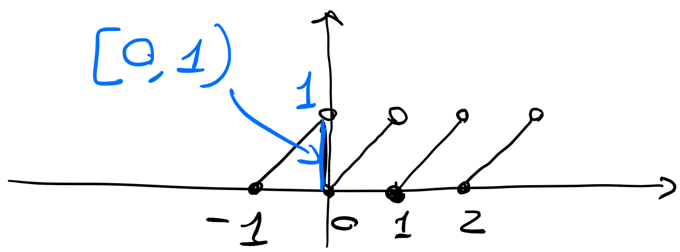
$\inf\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = -\frac{\pi}{2}$ $\quad\quad \nexists \min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)$

NOTA: se sup f e inf f esistono finiti, f si dice LIMITATA e

il grafico di una funzione limitata è tutto contenuto tra le due rette orizzontali $y = \sup f(x)$ e $y = \inf f(x)$

---

es: $f(x) =$ mantissa di x $= x - \lfloor x \rfloor = M(x)$



$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto M(x)$

funzione 1-periodica

$\operatorname{im} M = [0, 1)$ $\quad\quad 0 = \inf f = \min f$

$1 = \sup f$ $\quad\quad$ $\nexists \max f(x)$

$M(x)$ è una funzione LIMITATA

———— o ————

Problema: $f: X \longrightarrow Y$, $y \in Y$

$f(x) = y$

esistenza di soluzioni? unicità?

$\sin(x) = 3$ $\quad\quad$ $\sin: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ni 3$

$\nexists$ soluzioni

NOTA:

se $y \in f(X)$ (insieme immagine di f)

allora $f(x) = y$ ha sempre almeno una soluzione

f si dice SURIETTIVA se $\boxed{f(X) = Y}$

MESSAGGIO: per rendere la funzione suriettiva, basta cambiare "l'insieme di arrivo"

$f: X \longrightarrow f(X)$ è sempre suriettiva es: $f(x) = M(x)$ $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ NON è suriettiva

$M: \mathbb{R} \to [0,1)$ è suriettiva

— o —

$f(x) = y$

f si dice INIETTIVA se

$$\forall\, x_1, x_2 \in \operatorname{dom} f,\ \overbrace{x_1 \neq x_2}^{p} \Rightarrow \overbrace{f(x_1) \neq f(x_2)}^{q}$$

$[\,p \Rightarrow q$ equivale a $\neg q \Rightarrow \neg p\,]$

o equivalentemente

$$\boxed{f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2}$$

(definizione operativa)

es: studiare l'iniettività di $f(x) = x^2$ usando la definizione

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1^2 = x_2^2$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 - x_2^2 = 0 \Leftrightarrow |x_1| = |x_2|$$

$\Leftrightarrow x_1 = \pm x_2$ cioè $x_1 = x_2$ oppure $x_1 = -x_2$

$\Rightarrow f$ NON è iniettiva.

$f: X \to Y$

$f(x) = y$

- f suriettiva $\Rightarrow$ $\exists$ ALMENO una soluzione $x \in X$ di $f(x) = y$

- f iniettiva $\Rightarrow$ $\exists$ AL PIÙ una soluzione x di $f(x) = y$

- f biiettiva $\Leftrightarrow$ $\exists !$ soluzione di $f(x) = y$

  cioè f è sia iniettiva sia suriettiva

---

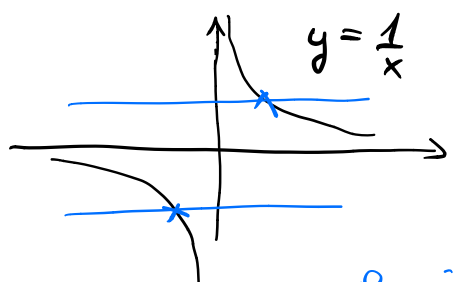
es: $f(x) = \frac{1}{x}$

$f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$

è iniettiva

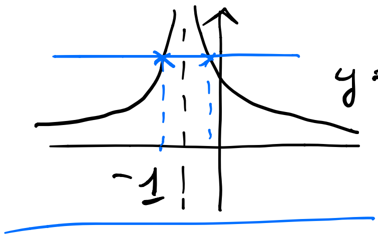
non è suriettiva

$\frac{1}{x} = 0$ NON ha soluzioni



al più 1 intersezione con il grafico

es: $f(x) = \dfrac{1}{|x+1|}$ $\qquad f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$



$y = \dfrac{1}{|x+1|}$

NON è iniettiva
NE' suriettiva

$f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \longrightarrow (0, +\infty)$ è suriettiva

im f

$x \longmapsto \dfrac{1}{|x+1|}$

---

funzione inversa f^{-1}

se $f: X \longrightarrow Y$ iniettiva

$\Rightarrow$ $f: X \longrightarrow f(X)$ è anche suriettiva

e quindi biiettiva

$\forall y \in f(X) \quad \exists!\, x \in X : \ f(x) = y$

è un modo per definire una nuova funzione

FUNZIONE INVERSA

$f^{-1}: f(X) \longrightarrow X$

$y \longmapsto x$ soluzione di $f(x) = y$

graf $f = \{ \boxed{(x, f(x))} : x \in X \}$

$$\text{graf } f^{-1} = \{(y, f^{-1}(y)) : y \in f(X)\}$$
$$= \{\boxed{(f(x), x)} : x \in X\}$$

$\Rightarrow$ i grafici di f e di f^{-1} sono simmetrici rispetto alla bisettrice $y = x$