07 - Composizione di funzioni e monotonia
Limiti di funzioni. Continuità

Composizione di due funzioni:

$f: X \longrightarrow Y$

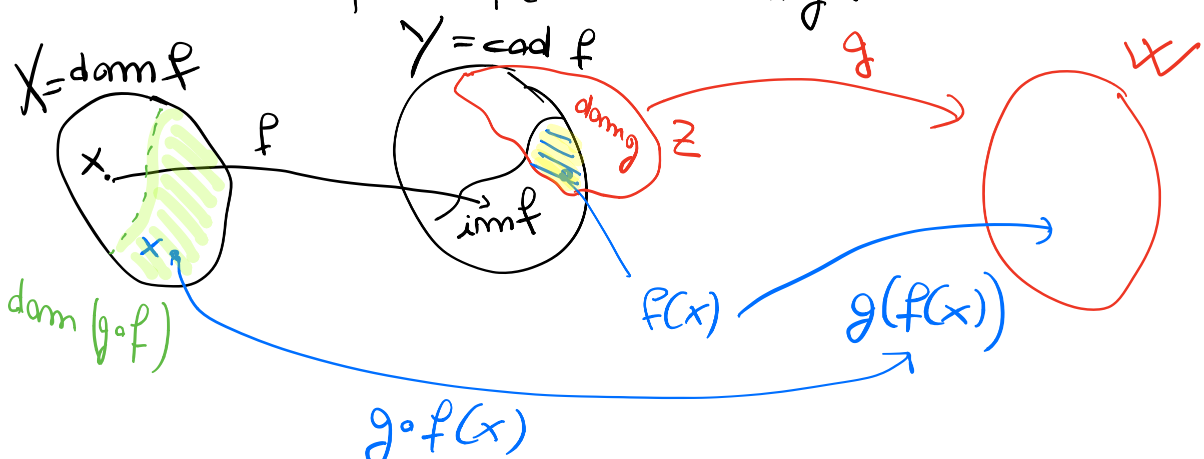
$g: Z \longrightarrow W$

$\boxed{g \circ f(x) \overset{def}{=} g(f(x))}$ quando si può definire?

per quali x è definita la funzione composta?

$x \in \text{dom}\, g \cap \text{dom} f$?

$x \in \text{dom} f \;:\; f(x) \in \text{dom}\, g$?



la composizione $g \circ f$ ha per dominio

$\text{dom}\, g \circ f = \{ x \in \text{dom} f \;:\; f(x) \in \text{dom}\, g \}$

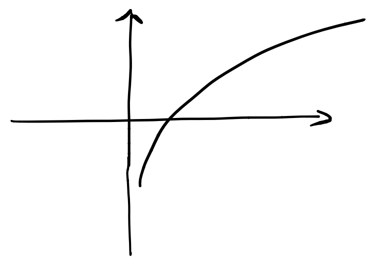
$\Rightarrow$ perché sia definita $g \circ f$ serve che

$$\boxed{\operatorname{im} f \cap \operatorname{dom} g \neq \emptyset}$$

esempio:

$f(x) = \log x$

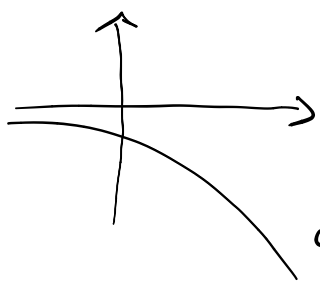
$g(x) = -e^x$



$f: (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

$\operatorname{dom} f = (0, +\infty)$

$\operatorname{im} f = \mathbb{R}$



$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$\operatorname{im} g = (-\infty, 0)$

Per definire $g \circ f$, verifichiamo che

$\operatorname{im} f \cap \operatorname{dom} g \neq \emptyset$

$\mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R} \neq \emptyset$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(\log x) = -e^{\log x} = -x$$

$$\operatorname{dom} g \circ f = \{x \in \operatorname{dom} f : f(x) \in \operatorname{dom} g\}$$
$$= \{x \in (0, +\infty) : f(x) \in \mathbb{R}\} = (0, +\infty)$$

$g \circ f\,(x) = -x$ ha dominio $(0,+\infty)$

Calcoliamo $f \circ g\,(x) = f(g(x))$

$$\mathrm{dom}\,(f \circ g) = \{x \in \mathrm{dom}\,g : g(x) \in \mathrm{dom}\,f\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} : \underbrace{-e^x}_{<0} \in (0,+\infty)\}$$
$$= \emptyset$$

$\Rightarrow$ $f \circ g(x)$ in questo caso NON è definita!

Questo esempio mostra anche che la composizione NON è commutativa

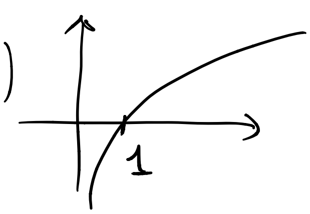
$$g \circ f \neq f \circ g$$

---

esercizio: $f(x) = \sqrt{\underbrace{\log_2(\cos x)}_{\geq 0}}$

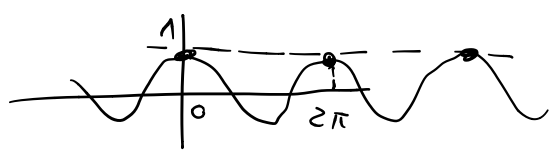
$\mathrm{dom}\,f = ?$ $\quad \{0\}$

$\log_2(x)$



$$\log_2(\cos x) \geq 0 = \log_2 1$$
$$\Leftrightarrow \quad \cos x \geq 1$$

$\mathrm{dom}\,\cos x = \mathbb{R}$



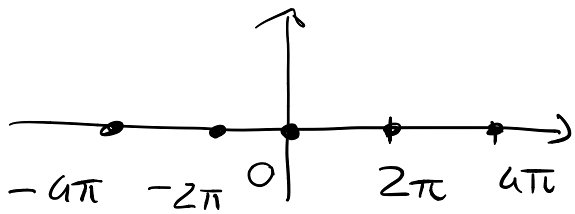
$\cos x \geq 1 \iff \cos x = 1$

$\iff x = 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$\mathrm{dom} f = \{ x = 2k\pi : k \in \mathbb{Z} \}$ insieme illimitato

$f(x) = \underbrace{\sqrt{\log_2 \underbrace{\cos(2k\pi)}_{=1}}}_{=0} = 0$

$\mathrm{im} f = \{0\}$



Funzioni monotone:

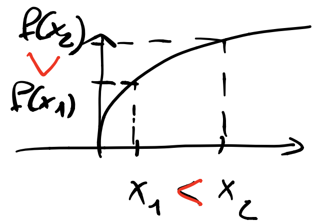
$X \subseteq \mathbb{R}$

$f : X \to \mathbb{R}$

- f si dice crescente (decrescente) se
  $\forall x_1, x_2 \in X, \; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ ($\geq$)
- f si dice strettamente crescente (strett. decrescente) se
  $\forall x_1, x_2 \in X \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ ($>$)
- f si dice monotona in X se è sempre crescente / strett. crescente / decrescente / strett. decrescente in X

es:

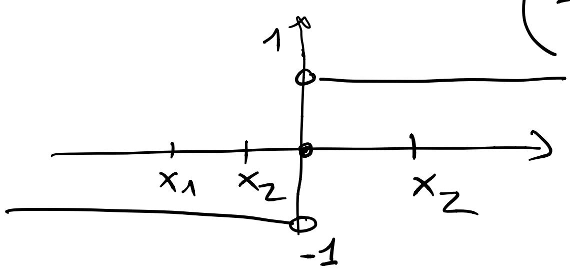
(1) $f(x) = \sqrt{x}$



strett. crescente

---

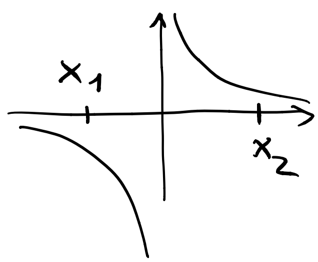
(2) $f(x) = \mathrm{sgn}(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$



f è crescente, non strettamente

---

(3) $f(x) = \dfrac{1}{x}$



NON è monotona nel suo dominio

NON è decrescente

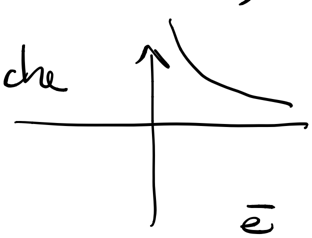
$\neg\left(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)\right)$

devo trovare un esempio per x_1 e x_2:

$x_1 < x_2$ ma $f(x_1) < f(x_2)$

es: $x_1 = -2$, $x_2 = 1$

osservo che

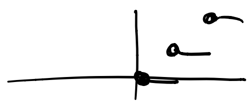


$$f: (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{1}{x}$$

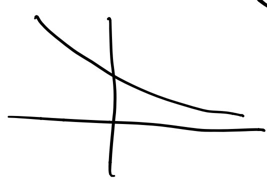
è strett. decrescente

---

(4) $f(x) = \lfloor x \rfloor$ è una funzione crescente (non strettamente)



(5) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ è strett. decrescente



$\boxed{\text{NOTA: } f \text{ strettam. monotona} \Downarrow f \text{ iniettiva}}$

infatti:

Tesi: $x_1 \neq x_2 \overset{?}{\Rightarrow} f(x_1) \neq f(x_2)$

se $x_1 \neq x_2$ allora $x_1 < x_2$ oppure $x_1 > x_2$

facciamo il caso $x_1 < x_2$

se è str. crescente

f strett. monotona $\Rightarrow$ $f(x_1) \underset{>}{<} f(x_2)$

se è strett decrescente

ma comunque $f(x_1) \neq f(x_2)$

Richiamo: f iniettiva $\Rightarrow$ f invertibile

Quindi $\boxed{f \text{ strett. monotona} \Rightarrow f \text{ invertibile}}$

Proprietà:

- somma di funzioni (strett.) crescenti è strett. crescente

infatti: siano f, g strett. crescenti

$f+g$ è definita in $\operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g$

$x_1 < x_2 \qquad x_1, x_2 \in \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g$

$$(f+g)(x_1) = f(x_1) + g(x_1) \underset{\nearrow}{<} f(x_2) + g(x_2)$$

f, g strett. crescenti

$$= (f+g)(x_2)$$

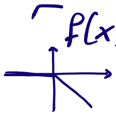
Abbiamo ottenuto: $x_1 < x_2 \Rightarrow (f+g)(x_1) < (f+g)(x_2)$

es: $h(x) = x + x^5$ è strett. crescente perché somma di due funzioni $f(x) = x$ e $g(x) = x^5$ strett. crescenti

ATTENZIONE: non vale che somma di funzioni (strett.) monotone è (strett.) monotona

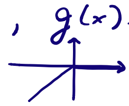
esercizio: dare un esempio

$f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$



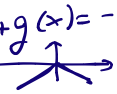
MONOTONA

, $g(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 0 \\ 0 & \text{se } x > 0 \end{cases}$



MONOTONA

$\Rightarrow f+g\,(x) = -|x|$ NON è MONOTONA



- se f è invertibile e monotona allora l'inversa f^{-1} ha la stessa monotonia di f

---

ATTENZIONE: f iniettiva

$$\not\Downarrow \; \Uparrow$$

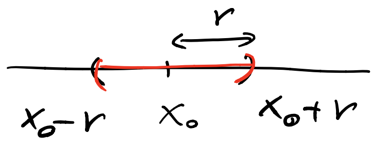
f strett. monotona

es: $f(x) = \frac{1}{x}$

Funzioni elementari:
conoscere il grafico e saper dedurre dom, im, proprietà di monotonia e invertibilità

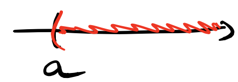
LIMITI DI FUNZIONI

- Intorno simmetrico di $x_0 \in \mathbb{R}$ di raggio $r > 0$



$$I_r(x_0) = (x_0 - r, x_0 + r)$$

- intorno di $+\infty$: è una semiretta illimitata superiormente $(a, +\infty)$



- intorno di $-\infty$: è una semiretta illimitata inferiormente $(-\infty, b)$

- retta reale estesa $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

sia $A \subseteq \mathbb{R}$ (sottoinsieme), $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ (retta estesa), x_0 si dice punto di accumulazione per l'insieme A

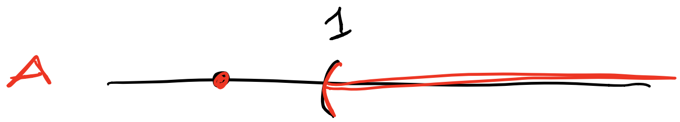
se per ogni intorno I di x_0 si ha

$$A \cap (I \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$$

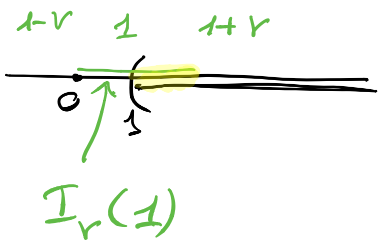
cioè x_0 è di accumulazione per A se ogni intorno di x_0 contiene almeno un punto dell'insieme A distinto da x_0

esempio: $A = \{0\} \cup (1, +\infty)$

indicare i punti di accumulazione dell'insieme A:



- $1 \notin A$ ma è un punto di accumulazione per A

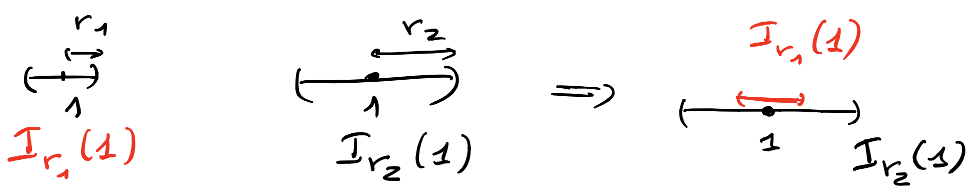


$$\left(I_r(1) \setminus \{1\}\right) \cap A \neq \emptyset$$

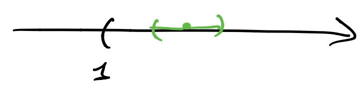
$\forall r > 0$

Vale la seguente proprietà per gli intorni:

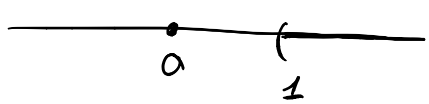
$$r_1 < r_2 \implies I_{r_1}(1) \subseteq I_{r_2}(1)$$



- Tutti i punti $x_0 \in (1, +\infty)$ sono punti di accumulazione per A

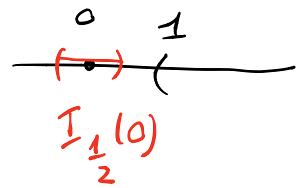


- $0 \in A$ ma non è punto di accumulazione per A

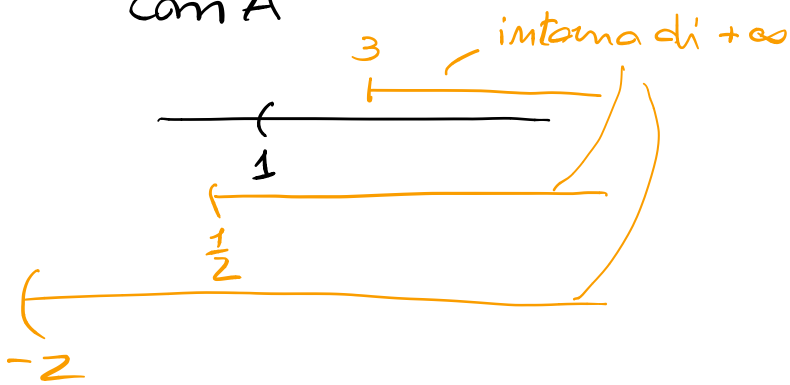


basta mostrare che $\exists$ un intorno di 0 per cui l'intersezione con A è solo $\{0\}$

p. es. $I_{\frac{1}{2}}(0) \cap A = \{0\}$



- $+\infty \notin A$ ma è di accumulazione per A: ogni intorno di $+\infty$ ha intersezione $\neq \emptyset$ con A



Def: $x_0 \in A$ che non sia di accumulazione si dice punto isolato di A

Diamo la definizione di limite di funzione:

$f: X \xrightarrow{} \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, x_0 punto di accumulazione per X

$\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ passiamo definire

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell}$$

si scrive anche: $f(x) \longrightarrow \ell$ per $x \to x_0$

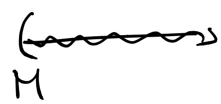
$\overset{def}{\iff}$ $\forall$ intorno V di ℓ, $\exists$ intorno U di x_0 tale che $x \in U \cap X$, $x \neq x_0 \Rightarrow f(x) \in V$

es: Caso $\ell = +\infty$, $x_0 \in \mathbb{R}$

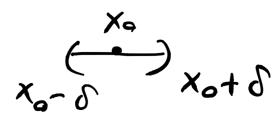
$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty}$$

vuol dire: $V = (M, +\infty)$

$\forall$ intorno V di $+\infty$ $\longleftrightarrow$

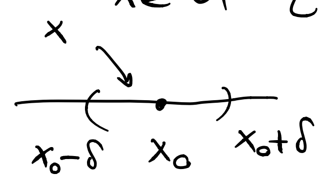


$\exists$ intorno U di x_0 $\longleftrightarrow$



$$U = I_\delta(x_0) = (x_0-\delta, x_0+\delta)$$

tale che $x \in U \cap X$, $x \neq x_0$ $\longleftrightarrow$ $x \in X = \mathrm{dom} f$, $x \in U \setminus \{x_0\}$



$$I_\delta(x_0) = (x_0-\delta, x_0+\delta) = \{x : |x-x_0| < \delta\}$$

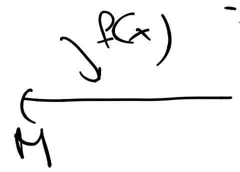
$$|x-x_0| < \delta$$

$$-\delta < x - x_0 < \delta$$

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$$

$\left.\begin{array}{l} x \in U \cap X \\ \underline{\underline{x \neq x_0}} \end{array}\right\}$ si riscrive $\underbrace{0<}_{x \neq x_0}|x-x_0| < \delta$

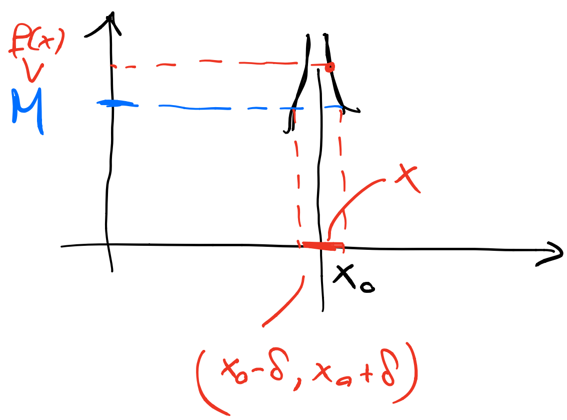
$f(x) \in V \iff f(x) \in (M, +\infty)$



$f(x) > M$

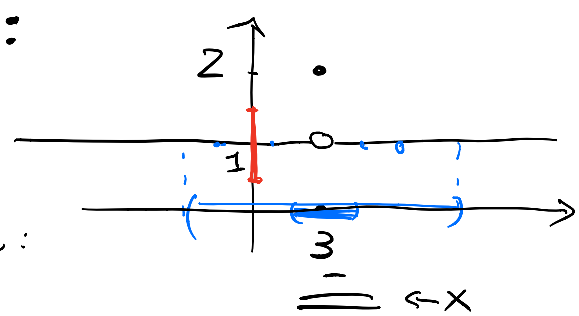
in conclusione, la def. di limite in questo caso diventa

$$\boxed{\forall M \in \mathbb{R} \ \exists \delta > 0 : \overbrace{x \in \text{dom} f,\ 0 < |x - x_0| < \delta}^{X} \Rightarrow f(x) > M}$$



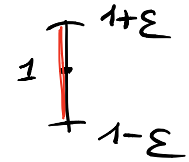
es: $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq 3 \\ 2 & \text{se } x = 3 \end{cases}$

$\lim_{x \to 3} f(x) = 1$:



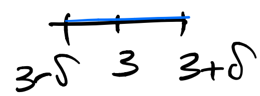
verifica con la definizione di limite:

$\forall$ intorno V di $\ell = 1$ $\Leftrightarrow$



$V = (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$

$\exists$ intorno U di $x_0 = 3$ $\Leftrightarrow$



tale che:

$U = (3-\delta, 3+\delta)$

se $x \in \overset{\text{dom} f}{\overset{\shortparallel}{\mathbb{R}}}$, $x \in U$, $x \neq 3$ $\Leftrightarrow$ $0 < |x-3| < \delta$

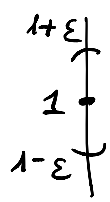
$f(x) \in V$ $\Leftrightarrow$ $|f(x) - 1| < \varepsilon$

in questo caso la def. di limite si riscrive:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \; :$

$0 < |x-3| < \delta \Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$

fissiamo $\varepsilon > 0$

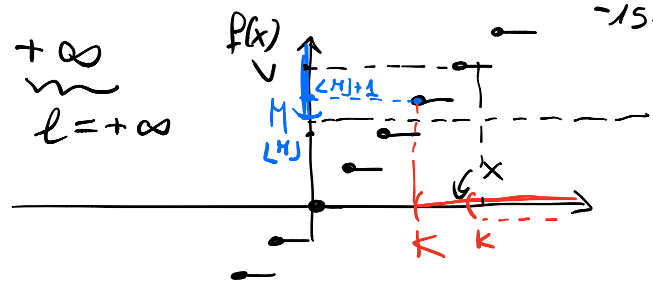


$x \neq 3 \qquad f(x) = 1 \Rightarrow |f(x) - 1| = 0 < \varepsilon$

$\Rightarrow$ in questo caso qualunque valore di $\delta > 0$ verifica la definizione.

———— o ————

es: $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ x_0=+\infty}} \lfloor x \rfloor = \underbrace{+\infty}_{\ell=+\infty}$



verificare con la definizione la correttezza del risultato:

$\forall$ intorno V di $\ell=+\infty \iff \forall M \quad V=(M,+\infty)$

$\exists$ intorno U di $x_0=+\infty \iff \exists K \quad U=(K,+\infty)$

tale che se $x \in X=\mathbb{R}$, $x \in U \setminus \{x_0\}$

$\iff \quad x > K \qquad\qquad x \in (K,+\infty)$

si ha $\quad f(x) \in V \iff f(x) \in (M,+\infty)$

$f(x) > M$

quindi la def di limite in questo caso diventa:

$\forall M \quad \exists K$ tale che $x > K \Rightarrow f(x) > M$

verifica della def: $\qquad \lfloor x \rfloor > M$

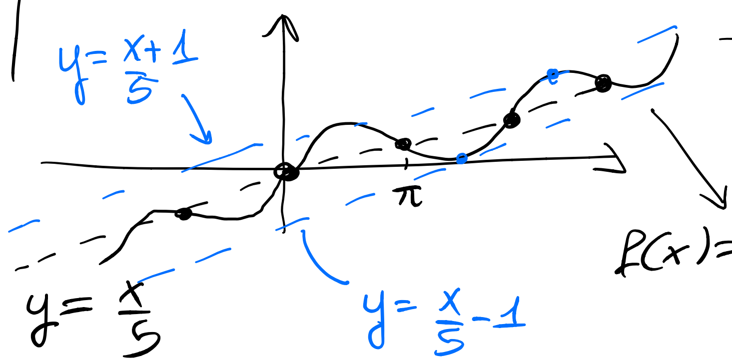
dato M, $\lfloor M \rfloor \leq M < \lfloor M \rfloor + 1$, quindi

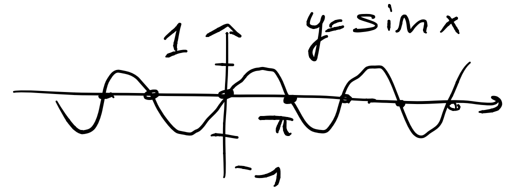
se $\quad x > \lfloor M \rfloor + 1 \Rightarrow \lfloor x \rfloor \geq \lfloor M \rfloor + 1 > M$

quindi scegliendo $K = \lfloor M \rfloor + 1$ si ha: $x > K \Rightarrow \lfloor x \rfloor > M$

esempio: $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{5} + \sin(x) \right) = +\infty = \ell$

x_0





$$-1 \leq \sin(x) \leq 1$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{x}{5} - 1 \leq \frac{x}{5} + \sin(x) \leq \frac{x}{5} + 1$$

Verifica con la def di limite:

$\forall M \;\exists K : \quad x > K \Rightarrow \frac{x}{5} + \sin(x) > M$:

M fissato, devo trovare K:

se $x > K$ allora $\frac{x}{5} + \sin(x) > M$

sfruttiamo il fatto che

$\frac{x}{5} + \sin(x) \geq \frac{x}{5} - 1$ e risolviamo: $\frac{x}{5} - 1 > M$

$\Longleftrightarrow x > 5(M+1)$. scelgo $K = 5(M+1)$

se $x > K$ allora

$f(x) = \frac{x}{5} + \sin(x) \geq \frac{x}{5} - 1 > M$

cioè se $x > 5(M+1) \Rightarrow \frac{x}{5} + \sin(x) > M$ ✓

o

<u>esercizio</u>: verificare usando la definizione

che $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{10} + |\tan x| \right) = +\infty$

<u>es</u>: $f, g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ strett. positive

e tali che $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in \mathbb{R}$

Dimostrare che se $L > 1$ allora

$f(x) > g(x)$ in un intorno di $+\infty$

Significato di $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$:

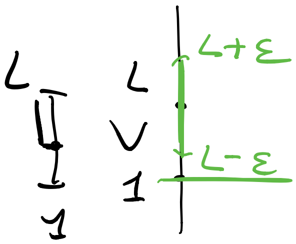
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists R : x \in (0, +\infty), \ x > R$

$\Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| < \varepsilon$

quindi se $x > R$, $\underline{\underline{x > 0}}$

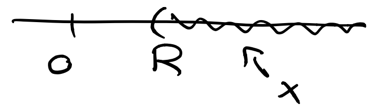
$-\varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} - L < \varepsilon$

$$\Rightarrow \quad \frac{f(x)}{g(x)} - L > -\varepsilon \quad \iff \quad \boxed{\frac{f(x)}{g(x)} > L-\varepsilon}$$



TESI: $f(x) > g(x)$

in un intorno di $+\infty$



$$\frac{f(x)}{g(x)} > 1$$

$$\frac{f}{g} > L-\varepsilon \overset{!}{>} 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{f}{g} > 1$$

scelgo ε: $L-\varepsilon > 1$ la scelta è sempre possibile perché $L > 1$ (p.es. $\varepsilon = \frac{L-1}{2}$)

FUNZIONI CONTINUE

- la continuità è una proprietà locale di una funzione, nel senso che

  si studia la continuità in un punto del dominio di f

- se f risulta continua in tutti i punti del dominio allora la funzione si dice continua

Def $f: X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in X = \mathrm{dom}\, f$

f si dice continua nel punto $x_0 \in \mathrm{dom} f$ se

$(f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon)$ $\qquad$ $(x_0-\delta, x_0+\delta)$

$\forall$ intorno V di $f(x_0)$ $\exists\, U$ intorno di x_0

tale che $x \in U \cap \mathrm{dom} f \Rightarrow f(x) \in V$

Cosa cambia rispetto alla def. di limite?

qui non si deve escludere $x \neq x_0$

inoltre, $x_0 \in \mathbb{R}$, $f(x_0) \in \mathbb{R}$

Def. "operativa": f si dice continua in $x_0 \in X$ ($X = \mathrm{dom} f$)
se $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ tale che
se $x \in \mathrm{dom} f$, $\quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

es: $f(x) = x^2$: verificare che è continua in $x_0 = -1$