Prof.ssa Stefania Bufalino
DISAT- Politecnico di Torino
e-mail: stefania.bufalino@polito.it

Breve Introduzione alla Fisica

[DIMENSIONE VARIABILI, MISURE, ERRORI]

1. Fisica: la scienza dell'osservazione

La fisica è la scienza che studia i fenomeni naturali attraverso **l'osservazione.**

Come possiamo osservare i fenomeni naturali?
Le osservazioni devono essere obiettive: quindi devono essere effettuate utilizzando strumenti la cui risposta rimane la stessa per la stessa osservazione dello stesso oggetto osservato nelle stesse condizioni esterne.

L'oggetto dell'osservazione viene definita **osservabile (o quantità)**: una determinata quantità si osserva attraverso uno strumento, che, operando sulla quantità, dà un numero reale come risposta.
Questa operazione è chiamata **misurazione**. Un modo empirico (sperimentale) per definire una quantità è quello di associare una quantità allo strumento (o classe di strumenti) attraverso il quale viene misurata.
Come esempio, la quantità "lunghezza" è definita come l'osservabile misurata dallo strumento "righello", o dalla classe di strumenti che operano come un righello (sonar, radar ...); un altro esempio: la quantità "tempo" è definita come osservabile misurata dallo strumento "orologio", o dalla classe di strumenti che operano come un orologio (clessidra, oscillazioni del pendolo, meridiana ...).

Poiché la risposta di uno strumento è un numero e i numeri possono essere trattati matematicamente, anche le operazioni matematiche sono state annoverate tra gli "strumenti oggettivi" che possono definire nuove quantità. Pertanto, dato un insieme di quantità x, y, z ..., ogni funzione f (x, y, z…) di x, y, z ... può essere definita come una nuova quantità.

Alcuni esempi tipici:

1. L'energia cinetica di un punto fisico di massa m, che si muove con una velocità di modulo v, è definita come: $E \equiv \frac{1}{2} m \cdot v^2$ dove m è misurata da una bilancia, v è misurata da un tachimetro.

2. La pressione P generata da una forza di modulo F su una superficie rettangolare S con bordi di lunghezza a e b e perpendicolare alla forza, è definita come: $P \equiv \frac{F}{a \cdot b}$ dove F è misurata utilizzando un dinamometro, a e b sono misurate mediante un righello.

Misure dirette: se il valore di una grandezza è ottenuto come il risultato di un'operazione dello strumento ad essa associato, questa operazione è chiamata "misura diretta".

Misure indirette: se x, y, z,.. sono quantità misurate direttamente (cioè quantità misurate mediante strumenti appropriati), ne segue che ogni quantità definita come una funzione matematica *f(x,y,z,…)* di x, y, z, ... può essere definita "misura indiretta". Naturalmente se alcuni delle osservabili x, y, z... sono grandezze misurate indirettamente, anche la funzione *f(x,y,z,…)* è una misura indiretta.
Come esempio possiamo considerare le due quantità E e P citate prima: si tratta di quantità ottenute misurando con strumenti appropriati le quantità m, v, F, a, b per poi determinare E e P come funzioni matematiche dei valori delle grandezze misurate direttamente.

2. Dimensioni e unità di misura

2.1 Dimensione

La caratteristica intrinseca di una quantità è la proprietà di essere definita dalla propria classe di strumenti: questa caratteristica è spesso chiamata **"dimensione"**.

Da questa definizione ogni quantità ha una propria dimensione.
Quantità misurabili dallo stesso strumento o dalla stessa classe di strumenti sono chiamate quantità omogenee e hanno la stessa dimensione.

In fisica, per ciascuna grandezza è definita un'operazione "addizione", che dà sempre come risultato una quantità omogenea. Nessuna addizione può essere definita tra quantità non omogenee.

Quindi possiamo dire che: <u>solo grandezze omogenee possono essere sommate tra di loro e il risultato della somma è sempre la stessa quantità.</u>

Dimensione in misure indirette

Come già detto le misure indirette consistono in funzioni matematiche di alcune grandezze dirette e le funzioni matematiche sono fondamentalmente polinomi, esponenziali, logaritmi, funzioni trigonometriche, derivate e integrali.
Esaminiamo di seguito le dimensioni di ciascuna di queste funzioni.

Monomio $M = x^n \cdot y^m \cdot \ldots \cdot z^k$ (con n, m, k interi)
La dimensione di un monomio è definita come il prodotto delle dimensioni di ogni elemento nel prodotto. La dimensione è indicata dalla quantità all'interno delle parentesi quadrate:

$$[M] \equiv [x]^n \cdot [y]^m \cdot \ldots \cdot [z]^k$$

Il rapporto tra 2 quantità aventi la stessa dimensione è scritto come:

$$[M] \equiv [x] \cdot [x]^{-1} = [x]^0 = 1$$

ed è denominato “adimensionale”.

Polinomio $P \equiv \sum_n x^n \cdot y^m \cdot \ldots \cdot z^k$

in cui ogni monomio rappresenta una quantità fisica e solo quantità omogenee possono essere sommate. Di conseguenza il polinomio ha la stessa dimensione di ogni monomio $x^n \cdot y^m \cdot \ldots \cdot z^k$

$$[P] \equiv [x]^n \cdot [y]^m \cdot \ldots \cdot [z]^k$$

Esponenziale e^x **.**

Dalla definizione $e^x = \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{x}{n})^n$ come una serie di termini omogenei possiamo dedurre che a) l'esponenziale ha la dimensione di 1 e b) x ha la dimensione di n; vale a dire che sia esponenziale che esponente sono adimensionali.

Funzione esponenziale: $I(x) \equiv I_0 \cdot e^x$

Da quanto riportato in precedenza è banale dedurre che $[I(x)] = [I_0] \cdot [e^x] = [I_0]$

Logaritmo $\ln(x)$**:**

si tratta dell'esponente di un esponenziale quindi è adimensionale per le proprietà discusse sopra.

Potenza x^a (con a numero reale);

Innanzitutto osserviamo che l'esponenziale ha come esponente un numero reale che è quindi adimensionale. In generale le grandezze fisiche sono definite come prodotti di quantità, cioè le potenze hanno esponente intero. Ci sono dei casi in cui dopo aver definito $y \equiv x^n$, con n intero, si deve guardare alla quantità x per verificare la correttezza dimensionale dell'equazione $y \equiv x^n$. Al fine di mantenere il rapporto dimensionale delle equazioni dobbiamo valutare la dimensione della grandezza fisica x rispetto ad y: $[x] = [y]^{1/n}$. Ricordiamo che $\frac{1}{n}$ è a sua volta adimensionale. Rapporti o prodotti di potenze sono uguali a esponenti adimensionali e generici del tipo $\frac{m}{n}$.

Funzioni trigonometriche.

Essendo seno e coseno rapporti di cateti a ipotenuse, vale a dire rapporto tra due segmenti, deduciamo che sono quantità adimensionali: pertanto i loro rapporti così come le potenze di queste due funzioni trigonometriche sono adimensionali.

Funzioni trigonometriche inverse rappresentano argomenti di funzioni trigonometriche: ma l'argomento di una funzione trigonometrica è un angolo, definito come rapporto di un arco di circonferenza al raggio della circonferenza, angoli dunque e funzioni trigonometriche inverse sono adimensionali.

Derivate $\frac{dy}{dx}$:

La derivata è definite come il limite $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0}(\frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x})$ di una serie di termini omogenei; ne segue che la dimensione della derivata è uguale alla dimensione di ogni termine, vale a dire la dimensione di y diviso la dimensione di x.

Integrali $\int f(x) \cdot dx$

Tutte le definizioni (Riemann, Lebesgue…) di un integrale si riconducono essenzialmente al limite di una somma di termini $f(x) \cdot \Delta x$ dove Δx tende a zero; di conseguenza la dimensione della quantità $\int f(x) \cdot dx$ è la dimensione di *f(x)* moltiplicata per la dimenzione di *x.*

Tenendo presente quanto detto possiamo concludere che dal punto di vista dimensionale tutte le quantità misurate indirettamente si riducono a monomi. Questi monomi possono essere definiti da quantità misurate direttamente o indirettamente $x^n \cdot y^m \cdot ... \cdot z^k$

Si potrebbe dedurre che il numero di possibili dimensioni è uguale al numero di misurazioni dirette indipendenti esistenti, che è infine il numero di classe di strumenti che vengono utilizzati in Fisica (e, più importante, in tutti i rami di ingegneria). Questo in principio è vero, ma a volte, come vedremo, diverse grandezze sono legate tra loro da alcune equazioni matematiche, chiamate **leggi fisiche.** In questo modo la dimensione di una certa quantità direttamente misurata può essere espressa come monomio di altre grandezze misurate direttamente.

2.2 Cenni di calcolo dimensionale.

Il calcolo della dimensione di una grandezza è utile per verificare se una relazione tra 2 espressioni è errata: il cosiddetto "calcolo dimensionale", se correttamente eseguito, deve dare lo stesso valore dimensionale su entrambi i lati di tutte le equazioni. Le regole del "calcolo dimensionale" sono solo due e sono dedotte dalle proprietà e le definizioni citate in precedenza:

1) ogni termine della somma deve avere la stessa dimensione e la somma ha la dimensione di ogni termine
2) entrambi i lati di una equazione devono avere la stessa dimensione

2.3 Unità di Misura

Una misurazione consiste in un'operazione con la quale si afferma quanti campioni uguali (chiamati unità) di quantità sono contenute in un'altra quantità omogenea. Per ciascun quantitativo i campioni possono essere scelti liberamente, ad esempio si può misurare una lunghezza in metri, centimetri, chilometro, pollici senza influenzare la correttezza della misura. Ma, naturalmente, è assolutamente sbagliato mescolare i risultati di diverse misurazioni omogenee ottenute con diversi campioni, ad esempio

confrontando la lunghezza di una penna misurata in [mm] con l'altezza di una casa misurata in [km]: la casa sarebbe "piccola" rispetto alla penna! Un sistema di unità, chiamato MKSA, è stato concordato a livello internazionale, sulla base delle seguenti unità: metro per la lunghezza, secondo per il tempo, kg per la massa, Coulomb per la carica elettrica e grado Kelvin per la temperatura. Tutte le altre unità di misura possono essere trasformate nel sistema MKSA attraverso opportuni fattori costanti. Da questo segue che il risultato di una misurazione è sempre dato da un numero reale seguito da un'unità di misura.
Nel 1960 è stato creato il *Sistema Internazionale di Unità* (abbreviato con SI), che è adottato per legge nell'Unione Europea ed è attualmente in vigore in 55 stati. Le grandezze fondamentali del Sistema Internazionale sono sette (tabella sotto).

Grandezza	Nome	Simbolo	Definizione
Lunghezza	**metro**	m	"I metro è la lunghezza del tragitto compiuto dalla luce nel vuoto in un intervallo di tempo di 1/299 792 458 di secondo"; è così fissata, per definizione, la velocità della luce in 299 792 458 m/s
Massa	**kilogrammo**	kg	"I kilogrammo è l'unità di massa ed è eguale alla massa del prototipo internazionale"; il prototitpo internazionale, cilindro di platino iridio, è conservato presso il BIPM (Bureau International des Poids et mesures)"
Tempo	**secondo**	s	"il secondo è l'intervallo di tempo che contiene 9 192 631 770 periodi della radiazione corrispondente alla transizione tra i due livelli iperfini dello stato fondamentale dell'atomo di cesio 133"
Intensità di corrente elettrica	**ampere**	A	"l'ampere è l'intensità di corrente elettrica che, mantenuta costante in due conduttori paralleli, di lunghezza infinita, di sezione circolare trascurabile e posti alla distanza di un metro l'uno dall'altro, nel vuoto, produrrebbe tra i due conduttori la forza di $2x10^{-7}$ newton per ogni metro di lunghezza"
Temperatura termodinamica	**kelvin**	K	"il kelvin è la frazione 1/273,16 della temperatura termodinamica del punto triplo dell'acqua"; la temperatura termodinamica si indica con il simbolo T; il valore numerico della temperatura Celsius (indicata con t) in gradi celsius è data da: t/°C = T/K-273,15.
Intensità luminosa	**candela**	cd	"la candela è l'intensità luminosa, in una data direzione, di una sorgente che emette una radiazione monocromatica di frequenza 540 x 10^{12} hertz e la cui intensità energetica in quella direzione è 1/683 watt allo steradiante"
Quantità di sostanza	**mole**	mol	"la mole è la quantità di sostanza di un sistema che contiene tante entità elementari quanti sono gli atomi in 0,012 kg di carbonio 12 (^{12}C). Le entità elementari devono essere specificate e possono essere atomi, molecole, ioni, elettroni, ecc., ovvero gruppi specificati di tali particelle", in questa definizione va inteso che gli atomi di ^{12}C sono non legati e nello stato fondamentale.

3. Cenni alla Teoria degli Errori

3.1 Errore in misure dirette

È esperienza comune che: ripetendo un numero N di volte la misura di una grandezza fisica i risultati di tali misurazioni non sono tutti lo stesso valore. Da questa osservazione è possibile assumere che descritta ogni osservazione è sempre affetta da errore (o incertezza).
Gli errori possono essere distinti in 2 classi:
1) Errore dello strumento (sistematico): questo tipo di errore è dovuto alla precisione dello strumento utilizzato (ad esempio per l'intervallo di linearità, risoluzione massima tra 2 valori vicini tra loro ...) L'errore sistematico dipende dalle prestazioni dello strumento: migliore è lo strumento più piccolo sarà l'errore sistematico associato alla quantità misurata. In generale, l'errore sistematico è invisibile in una misura: può essere rilevata per confronto con il risultato della stessa misura effettuata mediante l'utilizzo di altri strumenti.

2) Errore di misurazioni ripetute (statistiche): questo tipo di errore è dovuto alle piccole variazioni della grandezza da misurare, a qualche piccola differenza nel modo di utilizzare lo strumento per ogni misurazione.

L'errore di una quantità misurata è la **somma dei moduli degli errori sistematici e statistici** ed è sempre positivo. Dopo una serie di misurazioni della stessa quantità, si ottiene una serie di valori di questa quantità, che risultano essere diverse in generale una dall'altra. **Si presume che il valore medio (media aritmetica) è il risultato (valore effettivo) della misurazione.**

La media aritmetica $\bar{x}$ di una serie di N misure in cui ciascuna misura fornisce un risultato $x_i, \{i = 1,2,...N\}$ è definita come

$$\bar{x} \equiv \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

se chiamiamo Δx l'errore sulla quantità x allora il valore della quantità x misurata dovrà sempre essere riportato come $\bar{x} \pm \Delta x$

Errore relativo
Il modulo del rapporto tra l'errore e il valore medio della quantità misurata è chiamato "errore relativo" e si scrive come $\left|\frac{\Delta x}{\bar{x}}\right|$.

Errore statistico
Le definizioni comunemente utilizzate di errore statistico sono le seguenti:

1) $\Delta x \equiv \frac{x_{MAX} - x_{\min}}{2}$ (usato in caso di un numero piccole di misure)

2) $\Delta x \equiv MAX|x_i - \bar{x}|$ (usato quando si richiede un alto "safety level")

3) definendo come "varianza" σ^2 il valore medio della quantità $(x_i - \bar{x})^2$:

$$\sigma^2 \equiv \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2$$

e molto spesso l'errore statistico è definito come $\Delta x = \sigma$ (utilizzato quando si dispone di un numero grande di misurazioni).

3.2 Errore in misure indirette

Se *x, y, z,.* sono quantità misurate con valore medio ed errore dati da: $\bar{x} + \Delta x, \bar{y} + \Delta y, \bar{z} + \Delta z,...$ si può determinare l'errore sulla grandezza $f(x, y, z,...)$ definite come funzione f di *x,y,z,...* utilizzando la seguente **definizione**

$$\Delta f(x, y, z,...) \equiv \left|\frac{\partial f(x, y, z,...)}{\partial x}\right| \cdot \Delta x + \left|\frac{\partial f(x, y, z,...)}{\partial y}\right| \cdot \Delta y + \left|\frac{\partial f(x, y, z,...)}{\partial z}\right| \cdot \Delta z + ...$$

dove tutte le derivate sono calcolate per $x = \bar{x}, y = \bar{y}, z = \bar{z},...$

Come fatto nel caso di misure dirette anche nel caso di misure indirette possiamo definire **l'errore relativo** come $\left|\frac{\Delta f(x,y,z,...)}{f(x,y,z,...)}\right|$

Prendiamo in considerazione a titolo di esempio i monomi $f(x,y,z,...) \equiv c \cdot x^{\alpha} \cdot y^{\beta} \cdot z^{\gamma} \cdot ....$ dove c è una costante priva di errore avremo che

$$\Delta f(x,y,z,...) \equiv \left|\alpha \cdot c \cdot x^{\alpha-1} \cdot y^{\beta} \cdot z^{\gamma} \cdot ....\right| \cdot \Delta x + \left|\beta \cdot c \cdot x^{\alpha} \cdot y^{\beta-1} \cdot z^{\gamma} \cdot ....\right| \cdot \Delta y + \left|\gamma \cdot c \cdot x^{\alpha} \cdot y^{\beta} \cdot z^{\gamma-1} \cdot ....\right| \cdot \Delta z + ...$$

e l'errore relativo sarà dato da

$$\left|\frac{\Delta f(x,y,z,...)}{f(x,y,z,...)}\right| = \left|\alpha \cdot \frac{\Delta x}{x}\right| + \left|\beta \cdot \frac{\Delta y}{y}\right| + \left|\alpha \cdot \frac{\Delta z}{z}\right| + ...$$