esercizi di AlgLinGeo 2017/18

1 - VETTORI DELLA GEOMETRIA EUCLIDEA

1. Verificare che il vettore $\mathbf{u} = (4, -10, 8) \in \mathbf{R}^3$ è combinazione lineare dei due vettori $\mathbf{v} = (1, -2, 3)$ e $\mathbf{w} = (0, -1, -2)$ con coefficienti rispettivi 4 e 2.

2. Verificare che ogni vettore $\mathbf{u} = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ si può scrivere come combinazione lineare dei vettori $\mathbf{v_1} = (1, 1, 0)$, $\mathbf{v_2} = (0, 1, 1)$ e $\mathbf{v_3} = (0, 0, 1)$.

3. Dato $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{2k}$, scrivere i vettori di modulo 3 e un versore aventi la stessa direzione di $\mathbf{u}$.

4. Dati $\mathbf{u} = h\mathbf{i} + 2h\mathbf{j}$ e $\mathbf{v} = \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, determinare il parametro reale h tale che $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = \sqrt{6}$.

5. Dato $\mathbf{w} = \mathbf{3i} + \mathbf{5j}$, determinare (se possibile) a e b reali tali che $\mathbf{w} = a(\mathbf{3i} + \mathbf{6j}) + b(\mathbf{2i} + \mathbf{4j})$.

6. Dato $\mathbf{w} = \mathbf{3i} + \mathbf{9j}$, determinare (se possibile) a e b reali tali che $\mathbf{w} = a(\mathbf{2i} + \mathbf{6j}) + b(\mathbf{i} + \mathbf{3j})$.

7. I vettori $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{w} = \mathbf{k}$ sono linearmente indipendenti?

8. Determinare l'angolo $\widehat{\mathbf{uv}}$, sapendo che $|\mathbf{u}| = 2$, $|\mathbf{v}| = 3$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -3$.

9. Determinare $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, sapendo che $|\mathbf{u}| = 4$, $|\mathbf{v}| = 2$, $|\mathbf{u} - \mathbf{v}| = 2\sqrt{3}$.

10. Determinare l'angolo $\widehat{\mathbf{uv}}$, sapendo che $\mathbf{u}$,$\mathbf{v}$,$\mathbf{u} + \mathbf{v}$ sono versori.

11. Dati i vettori $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{3j} - \mathbf{k}$ e $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$, scomporre $\mathbf{u}$ nella somma di un vettore perpendicolare a $\mathbf{v}$ con uno che ha la stessa direzione di $\mathbf{v}$.

12. Calcolare l'area del parallelogramma individuato dai vettori $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ e $\mathbf{w} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

13. Calcolare il prodotto scalare e il prodotto vettoriale dei vettori $\mathbf{u} = (1, 2, -2)$ e $\mathbf{v} = (-2, 0, 1)$ e verificare che il vettore $\mathbf{w} = (2, 3, 4)$ risulta ortogonale sia a $\mathbf{u}$ che a $\mathbf{v}$. Determinare i vettori di modulo 2 ortogonali sia a $\mathbf{u}$ che a $\mathbf{v}$.

14. Dati $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$, determinare:
    (a) la proiezione ortogonale di $\mathbf{v}$ su $\mathbf{u}$;
    (b) i vettori di modulo 2 ortogonali a $\mathbf{u}$ e a $\mathbf{v}$;
    (c) verificare che i vettori $\mathbf{u}$,$\mathbf{v}$,$\mathbf{w} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$ sono complanari.

15. Dati $\mathbf{u} = \mathbf{3i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i}$, $\mathbf{w} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$, determinare il vettore proiezione ortogonale di $\mathbf{w}$ sul piano di $\mathbf{u}$ e di $\mathbf{v}$.

16. Dire per quali valori del parametro reale h i vettori $\mathbf{u} = (1, h, 0)$, $\mathbf{v} = (2h, 0, 1)$, $\mathbf{w} = (1, 0, 1)$ sono linearmente dipendenti e, in corrispondenza dei valori trovati, scrivere uno di essi come combinazione lineare degli altri due.

17. Siano dati i vettori applicati $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \mathbf{v} = \mathbf{j} - 2\mathbf{k}, \mathbf{w} = 3\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$. Quale affermazione è vera?
    (a) $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ sono complanari.
    (b) $\mathbf{w}$ è parallelo a $\mathbf{v}$.
    (c) $\mathbf{u}$ e $\mathbf{w}$ formano un angolo acuto.
    (d) $\mathbf{w}$ è parallelo ad $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$.

18. Siano dati i vettori $\mathbf{u} = (0, 1, 0), \mathbf{v} = (1, 1, 0), \mathbf{w} = (0, 0, 1)$. Quale affermazione è vera?
    (a) $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ è ortogonale a $\mathbf{w}$
    (b) il volume del parallelepipedo generato dai tre vettori vale 3
    (c) $\mathbf{u}$ forma un angolo ottuso con $\mathbf{v} + \mathbf{w}$
    (d) Il prodotto misto dei tre vettori vale 0

1 - SOLUZIONI

3. Dalla definizione di modulo di un vettore si ha che $|\mathbf{u}| = \sqrt{6}$, perciò i vettori di modulo 3 paralleli a $\mathbf{u}$ sono $\mathbf{v}_1 = (3/\sqrt{6})(\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k})$ e $\mathbf{v}_2 = (-3/\sqrt{6})(\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k})$. Un versore parallelo a $\mathbf{u}$ è per esempio $\mathbf{w}_1 = (-1/\sqrt{6})(\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k})$.

4. Dall'ipotesi si ha $|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 = 6$, mentre $\mathbf{u} + \mathbf{v} = h\mathbf{i} + (2h+1)\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$; quindi deve essere $6 = h^2 + (2h+1)^2 + 4$, da cui segue $h = -1$ oppure $h = 1/5$.

5. Non è possibile trovare a e b tali che $\mathbf{w} = (3a + 2b)(\mathbf{i} + 2\mathbf{j})$, infatti $\mathbf{w} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ non è multiplo di $(\mathbf{i} + 2\mathbf{j})$.

6. Per determinare a e b tali che $\mathbf{w} = (2a + b)(\mathbf{i} + 3\mathbf{j})$ basta osservare che $\mathbf{w} = 3(\mathbf{i} + 3\mathbf{j})$ e quindi la relazione è soddisfatta per ogni coppia (a, b) tale che $2a + b = 3$.

7. Si ha $a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{w} = a\mathbf{i} + (-a + b)\mathbf{j} + (b + c)\mathbf{k} = \mathbf{0}$ se e solo se $a = b = c = 0$, quindi $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ sono linearmente indipendenti.

8. Si ha $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| cos\widehat{\mathbf{uv}}$; ossia $cos\widehat{\mathbf{uv}} = -1/2$ e quindi $\widehat{\mathbf{uv}} = 2\pi/3$.

9. Per le proprietà del prodotto scalare $|\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2|\mathbf{u}||\mathbf{v}| cos\widehat{\mathbf{uv}}$ quindi $cos\widehat{\mathbf{uv}} = 1/2$ e $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 4$.

10. Si ha $|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 + 2|\mathbf{u}||\mathbf{v}| cos\widehat{\mathbf{uv}}$, quindi $cos\widehat{\mathbf{uv}} = -1/2$ e $\widehat{\mathbf{uv}} = 2\pi/3$.

11. Un vettore (a, b, c) è perpendicolare a $\mathbf{v}$ se e solo se $(a, b, c) \cdot (1, -1, 0) = 0$ cioè se e solo se $a - b = 0$. Per poter scrivere $(1, 3, -1) = (a, a, c) + (k, -k, 0)$, basta quindi che sia $a = 2, k = -1, c = -1$.

12. $|\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}| = -5\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$, quindi l'area richiesta è $\sqrt{3}5$.

14. (a) La proiezione ortogonale di $\mathbf{v}$ su $\mathbf{u}$ è $\mathbf{v}_{\mathbf{u}} = -\frac{1}{2}(1, -1, 0) = -\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$.

(b) Un vettore è ortogonale a $\mathbf{u}$ e a $\mathbf{v}$ se è parallelo al loro prodotto vettoriale $-\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, cioè è del tipo $k(-1, -1, 1)$; un tale vettore ha modulo 2 se e solo se $|k| = 2/\sqrt{3}$, quindi si ottengono i vettori $\mathbf{v} = \pm(2/\sqrt{3})(-1, -1, 1)$.

15. Per determinare il vettore $\mathbf{z}$ richiesto occorre determinare il vettore $\mathbf{r}$ proiezione ortogonale di $\mathbf{w}$ sulla direzione ortogonale a $\mathbf{u}$ e a $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{r} = -\frac{1}{2}(0, 1, -1)$$

Si ha poi $\mathbf{r} + \mathbf{z} = \mathbf{w}$ e quindi $\mathbf{z} = \mathbf{w} - \mathbf{r} = (1, -1, 0) + \frac{1}{2}(0, 1, -1)$.

16. $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ sono linearmente dipendenti se e solo se il loro prodotto misto si annulla. Si ha $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = -h(2h - 1)$. Se $h = 0$, si ottiene $\mathbf{u} = -\mathbf{v} + \mathbf{w}$; se $h = 1/2$, $\mathbf{v} = \mathbf{w}$, mentre se $h \neq 0$ e $h \neq 1/2$, i tre vettori sono linearmente indipendenti.