28 - Equazioni differenziali

Richiamo: equazioni differenziali ordinarie del 1° ordine a variabili separabili:

$$y' = g(x)\, h(y)$$

EQ. DIFF. A VARIABILI SEPARABILI

Teorema di esistenza e unicità per il problema di Cauchy associato all'equazione differenziale:

$g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continua

$h : J \longrightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1

I, J intervalli

$x_0 \in I, \quad y_0 \in J$

Allora il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = g(x)\,h(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

ammette un'unica soluzione $y(x)$ definita almeno in un intorno di x_0.

Esempio di non unicità per il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \sqrt[3]{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$y' = \sqrt[3]{y}$ eq. a variabili separabili

$$y' = \underbrace{1}_{g(x)} \cdot \underbrace{\sqrt[3]{y}}_{h(y)}$$

<u>soluzioni costanti</u>:

$$h(y)=0 \iff \sqrt[3]{y}=0 \iff y=0$$

$y(x)\equiv 0$ è l'unica sol. costante dell'equazione, è anche una soluzione del problema di Cauchy.

<u>soluzioni non costanti</u>:

$$y'=\sqrt[3]{y}$$

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt[3]{y} \qquad \int \frac{dy}{\sqrt[3]{y}}=\int dx$$

$$\frac{3}{2}\,y^{2/3}=x+c$$

$$y(0)=0 \iff \frac{3}{2}\,0=0+c$$

$\iff \quad c = 0$

$$\frac{3}{2}\, y^{2/3} = x \implies y(x) = \left(\frac{2}{3}x\right)^{3/2}$$

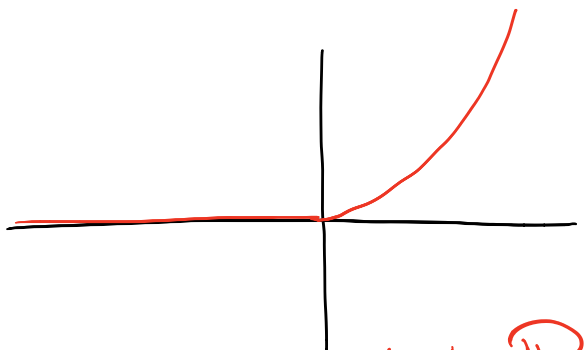
abbiamo trovato una seconda soluzione del problema di Cauchy:

$$y(x) = \sqrt{\left(\frac{2}{3}x\right)^3} \quad \text{definita su } [0,+\infty)$$

a partire da queste due, si possono costruire altre soluzioni del problema di Cauchy:

INCOLLAMENTO

$$y(x) = \begin{cases} \sqrt{\left(\frac{2}{3}x\right)^3} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



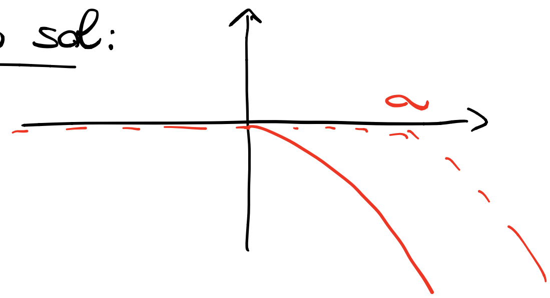
def. su tutto $\mathbb{R}$ e soluzione del problema di Cauchy

$a \geq 0$

$$y(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq a \\ \sqrt{\left(\frac{2}{3}(x-a)\right)^3} & \text{se } x > a \end{cases}$$

$\Rightarrow y' = \sqrt[3]{y}$ e $y(0)=0$ è ancora soluzione del problema di Cauchy

altre sol:



il problema di Cauchy ha infinite soluzioni!

$$h(y) = \sqrt[3]{y}$$

$$h'(y) = \frac{1}{3} \frac{1}{(y)^{2/3}}$$ NON È DEF. in $y = 0$

y_0

h non è di classe C^1 in un intervallo contenente $y_0 = 0$

quindi non è garantita l'unicità per il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sqrt[3]{y} \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

in questo caso $h(y) = \sqrt[3]{y}$ è di classe C^1 in un intorno di $y_0 = -1$ e quindi $\exists!$ soluzione del problema

---

Equazioni differenziali del 1° ordine, lineari

$$y' + a(x)\,y = b(x)$$

a, b funzioni definite su un intervallo comune

Teorema di esistenza e unicità per il problema di Cauchy associato

Se $a, b : I \to \mathbb{R}$ continue

I intervallo

$x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$

Allora il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + a(x)y = b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

ammette un'unica soluzione $y(x)$ definita su tutto l'intervallo I.

<u>NOTA</u>: in particolare se a e b sono continue e definite su tutto $\mathbb{R}$, allora anche la soluzione $y(x)$ è definita su tutto $\mathbb{R}$.

<u>Notazione</u>:

- $y' + a(x)\, y = 0$ EQ. DIFF. LINEARE OMOGENEA
- $y' + a(x)\, y = b(x)$ EQ. DIFF. LINEARE, COMPLETA

Risolviamo prima l'equazione omogenea:

$$y' + a(x)y = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad y' = \underbrace{-a(x)}_{=g(x)} \underbrace{y}_{h(y)}$$

eq. diff. a variabili separabili

<u>soluzioni costanti</u>: $h(y) = 0$

$$\Longleftrightarrow \quad y = 0$$

l'unica sol. costante è $y(x) \equiv 0$

<u>soluzioni non costanti</u>:

$$y' = -a(x)y$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -a(x)y$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int a(x)dx$$

$$\log|y| = -A(x) + c$$

dove $A'(x) = a(x)$

$$|y(x)| = e^{-A(x)+c} = e^{c} e^{-A(x)}$$

$$y(x) = \underbrace{\pm e^{c}}_{=: K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} e^{-A(x)}$$

scrittura unica per tutte le soluzioni:

$$\boxed{y(x) = K e^{-A(x)} \qquad K \in \mathbb{R}}$$

soluzioni di

$$\boxed{y' + a(x) y = 0 \quad , \text{ con } A'(x) = a(x)}$$

Notazione: la famiglia di tutte le soluzioni di un' eq. diff. si chiama integrale generale

Studiamo l'equazione diff. lineare completa:

$$y' + a(x)\,y = b(x)$$

Metodo della variazione delle costanti:

prendendo spunto dalla soluzione

$$y(x) = \underbrace{K}_{\text{COSTANTE}} e^{-A(x)}$$

dell' eq. omogenea cerchiamo una soluzione dell'eq. completa della forma

$$y(x) = \underbrace{B(x)}_{\text{FUNZIONE}} e^{-A(x)}$$

la domanda è: sotto quali condizioni per $B(x)$, la funzione $y(x) = B(x)\, e^{-A(x)}$ risolve l'eq. completa?

Inseriamo questa funzione nell'eq. completa:

$$y'(x) = \left(B(x)\, e^{-A(x)}\right)' =$$

$$= B'(x)\, e^{-A(x)} + B(x)\, e^{-A(x)} \left(-\overbrace{A'(x)}^{=a(x)}\right)$$

$$= B'(x)\, e^{-A(x)} - a(x) B(x)\, e^{-A(x)}$$

inseriamo nell'eq. completa: $y' + a(x) y = b(x)$

$$\Longleftrightarrow \underbrace{B'(x)\, e^{-A(x)} - \cancel{a(x) B(x)\, e^{-A(x)}}}_{y'} + \cancel{a(x)}\, \underbrace{\cancel{B(x) e}^{-A(x)}}_{y} =$$

$$= b(x)$$

$$\Longleftrightarrow \quad B'(x)\, e^{-A(x)} = b(x)$$

$\Longleftrightarrow B'(x) = b(x)e^{A(x)}$

questa è la condizione su $B(x)$ affinché $B(x)e^{-A(x)}$ sia soluzione

Quindi:

per risolvere $y' + a(x)y = b(x)$:

- calcolo $A(x) \stackrel{def}{=} \int a(x)dx$ (non serve la costante)

- calcolo $B(x) = \int b(x)\, e^{A(x)} dx$

$$\Longrightarrow \boxed{y(x) = e^{-A(x)}\left(B(x) + c\right)}$$ INTEGRALE GENERALE EQ. LINEARE COMPLETA

Esempio: $\boxed{y' - 2xy = x}$

$a(x) = -2x$
$b(x) = x$
def. su $I = \mathbb{R}$

$$A(x) = \int a(x)dx = \int -2x\,dx = -x^2$$

$$B(x) = \int b(x)\,e^{A(x)}\,dx =$$

$$= \int x\,e^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2}$$

$$\Rightarrow y(x) = e^{-A(x)}\left(B(x)+c\right)$$

$$= e^{(x^2)}\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}+c\right)$$

$$= -\frac{1}{2} + c\,e^{(x^2)}$$ def. su $I = \mathbb{R}$

integrale generale dell'eq.

Si può fare la verifica:
si calcola y' e si inserisce
nell'equazione $y' - 2xy = x$

Esempio (dal Bernaccolo p. 440)

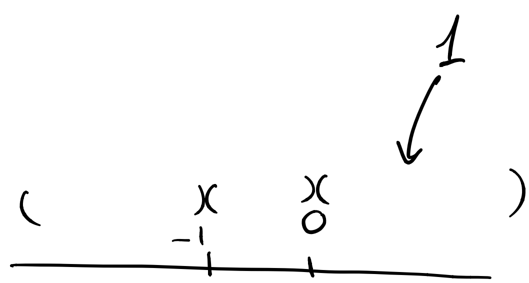
$$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{x(x+1)} + x \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

$x_0 \in I$

risolvere il problema di Cauchy

$$y' + a(x)y = b(x)$$

$$y' - \frac{1}{x(x+1)}\, y = x$$



$a(x) = -\dfrac{1}{x(x+1)}$ def su $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$

$b(x) = x$ def. su tutto $\mathbb{R}$

$I = ?$ $\quad 1 \in I \Rightarrow I = (0, +\infty)$

$$A(x) = \int a(x)\,dx = \int -\frac{1}{x(x+1)}\,dx$$

$$= \int \frac{x-1-x}{x(x+1)}\,dx =$$

$$= \int \left(\frac{x}{x(x+1)} - \frac{1+x}{x(x+1)}\right)dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}\right) dx$$

$$= \log|x+1| - \log|x|$$

$$= \log\left|\frac{x+1}{x}\right| \underset{x>0}{=} \log\frac{x+1}{x} = A(x)$$

$$B(x) = \int b(x)\,e^{A(x)}\,dx$$

$$= \int x \, e^{\log \frac{x+1}{x}} \, dx$$

$$= \int x \, \frac{x+1}{x} \, dx = \int (x+1) \, dx = \frac{(x+1)^2}{2}$$

$$y(x) = e^{-A(x)} \left(B(x) + c \right)$$

$$= e^{-\log \frac{x+1}{x}} \left(\frac{(x+1)^2}{2} + c \right)$$

$$= e^{\log \left(\frac{x+1}{x}\right)^{-1}} \left(\frac{(x+1)^2}{2} + c \right)$$

$$= \frac{x}{x+1} \left(\frac{(x+1)^2}{2} + c \right)$$ integrale generale dell' eq. diff.

$y(1) = 1$:

$$1 \overset{!}{=} \frac{1}{1+1}\left(\frac{(1+1)^2}{2}+c\right)$$

$$1 \overset{!}{=} \frac{1}{2}(2+c) \iff 2 \overset{!}{=} 2+c$$

$$\Rightarrow c = 0$$

$\Rightarrow$ la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = \frac{x}{x+1}\,\frac{(x+1)^2}{2} = \frac{x(x+1)}{2}$$

Equazioni differenziali lineari del secondo ordine

- $y'' + a(x)y' + b(x)y = g(x)$ COMPLETA
- $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ OMOGENEA

$a, b, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ funzioni

NON $\exists$ METODO GENERALE DI SOLUZIONE

Caso dei coefficienti costanti : $a, b \in \mathbb{R}$

oss. preliminare :

consideriamo la funzione

$x \longmapsto e^{i\alpha x}$ $\quad \alpha \in \mathbb{R}$

$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$e^{i\alpha x} = \cos(\alpha x) + i \sin(\alpha x)$$

formula di EULERO

$$\left(e^{i\alpha x}\right)' = \left(\cos(\alpha x) + i \sin(\alpha x)\right)'$$

$$= \underbrace{-}_{=i^2} \alpha \sin(\alpha x) + i\alpha\cos(\alpha x)$$

$$= i^2 \alpha \sin(\alpha x) + i\alpha \cos(\alpha x)$$

$$= i\alpha\left(\cos(\alpha x) + i\sin(\alpha x)\right)$$

$$= i\alpha\, e^{i\alpha x}$$

$$\left(e^{i\alpha x}\right)' = i\alpha\, e^{i\alpha x}$$

$$\lambda \in \mathbb{C}, \quad \lambda = \alpha + i\beta$$

$$e^{\lambda x} = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x}$$

$$\left(e^{\lambda x}\right)' = \left(e^{\alpha x} e^{i\beta x}\right)' = \alpha e^{\alpha x} e^{i\beta x}$$

$$+ e^{\alpha x}\, i\beta e^{i\beta x} = (\alpha + i\beta) e^{(\alpha+i\beta)x}$$

$$= \lambda e^{\lambda x}$$

quindi $\boxed{\lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow \left(e^{\lambda x}\right)' = \lambda e^{\lambda x}}$

—— o ——

Come risolvere un'eq. diff. lineare, del 2° ordine, omogenea, a coefficienti costanti:

$a, b \in \mathbb{R}$

$$y'' + a y' + b y = 0$$

Richiamo: $y' + a y = 0$

$$\Leftrightarrow \quad y' = -a y \quad \Rightarrow \quad y(x) = K e^{-ax}$$

prendiamo spunto dalle soluzioni dell'eq. lineare del primo ordine e cerchiamo una soluzione dell'eq. del 2° ordine del tipo

$e^{\lambda x}$ $\qquad \lambda \in \mathbb{C}$:

cerchiamo le condizioni su λ affinché $e^{\lambda x}$ sia soluzione:

$$y'' + ay' + by = 0$$

$$y = e^{\lambda x}, \quad y' = \lambda e^{\lambda x}, \quad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

$$\underbrace{\lambda^2 e^{\lambda x}}_{y''} + a \underbrace{\lambda e^{\lambda x}}_{y'} + b \underbrace{e^{\lambda x}}_{y} = 0$$

$$\underbrace{e^{\lambda x}}_{\neq 0} (\lambda^2 + a\lambda + b) = 0 \qquad \lambda \in \mathbb{C}$$

$$\iff \lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

Quindi: $y(x) = e^{\lambda x}$ risolve
$y'' + ay' + by = 0$
$\iff \lambda \in \mathbb{C}$ risolve $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$

$$\boxed{\lambda^2 + a\lambda + b = 0}$$ EQ. CARATTERISTICA associata all'eq. diff.

CASI POSSIBILI:

(1) 2 sol. reali distinte $\lambda_1 \neq \lambda_2$ $(\Delta > 0)$

(2) 1 sola sol. reale λ di molteplicità 2 $(\Delta = 0)$

(3) due soluzioni complesse coniugate λ e $\bar{\lambda}$ $(\Delta < 0)$ (con parte immaginaria non nulla)

Proprietà importante per le eq. lineari:

Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sono due soluzioni dell'eq. diff. lineare

$$y'' + a y' + b y = 0$$

allora $y(x) = c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x)$,

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, è soluzione dell'eq. differenziale:

infatti: inserisco $y(x)$ nell'equazione:

$$\left(c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)\right)'' + a\left(c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)\right)' + b\left(c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)\right) \overset{?}{=} 0$$

$\iff$

$$c_1\, y_1''(x) + c_2\, y_2''(x) + a\left(c_1\, y_1'(x) + c_2\, y_2'(x)\right) + b\left(c_1 y_1(x) + c_2\, y_2(x)\right) =$$

$$= c_1 \left(\underbrace{y_1''(x) + a\, y_1'(x) + b\, y_1(x)}_{=0}\right)$$

$$+ c_2 \underbrace{\left(y_2''(x) + a y_2'(x) + b y_2(x) \right)}_{=0} = 0 \quad \checkmark$$

perchè per ipotesi $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sono due soluzioni dell'equazione differenziale

Date due soluzioni distinte $y_1(x)$ e $y_2(x)$ dell'eq. lineare del secondo ordine omogenea, la combinazione lineare $c_1 y_1 + c_2 y_2$ dà l'integrale generale dell'equazione omogenea.

Data $y'' + a y' + b y = 0$

l'eq. caratteristica associata $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$

caso 1: l'eq. caratt. ha due radici reali distinte $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ l'integrale generale dell'eq. diff. è

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

caso 2: l'eq. caratteristica ha un'unica radice $\lambda \in \mathbb{R}$ di molteplicità 2 $(\Delta = 0)$

$e^{\lambda x}$ risolve l'eq. diff.

e si può vedere che $x e^{\lambda x}$ è un'altra soluzione dell'eq. diff.

$\Rightarrow$ l'integrale generale è

$$y(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

<u>caso 3</u> : l'eq. caratteristica ha due soluzioni complesse coniugate λ e $\bar{\lambda}$ $\qquad \lambda \in \mathbb{C}$

$$\underline{\underline{k_1 e^{\lambda x} + k_2 e^{\bar{\lambda} x}}} \in \mathbb{C}, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{C}$$

possiamo scrivere l'integrale generale in $\mathbb{R}$, prendendo la parte reale e la parte immaginaria di $e^{\lambda x}$: $\quad \lambda = \alpha + i\beta \quad \beta \neq 0$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$e^{\lambda x} = e^{(\alpha + i\beta)x}$$

$$= e^{\alpha x}\left(\cos(\beta x) + i \sin(\beta x)\right)$$

$$\operatorname{Re} e^{\lambda x} = e^{\alpha x} \cos(\beta x)$$

$$\operatorname{Im} e^{\lambda x} = e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

$\Rightarrow$ l'integrale generale dell'eq. diff.

$$y(x) = e^{\alpha x}\left(c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x)\right)$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

<u>Es</u>: $y'' - 5y' + 6y = 0$

eq. diff. lineare, del secondo ordine, omogenea, a coefficienti costanti

integrale generale = ?

---

equazione caratteristica associata

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \quad \text{in } \mathbb{C}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$$

$(\lambda-2)(\lambda-3) = 0 \qquad \Delta > 0$

2 radici reali distinte $\lambda_1 = 3$
e $\lambda_2 = 2$

$\Rightarrow$ integrale generale dell'eq. diff.:

$$y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x} \quad , \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

è possibile ottenere soluzioni limitate in $\mathbb{R}$? Sì con $c_1 = c_2 = 0$

<u>Es</u>: $y'' - 4y' + 4y = 0$

integrale generale = ?

equazione caratteristica associata

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - 2)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 2$$

$\lambda = 2$ unica radice $\Rightarrow e^{2x}$ è soluzione dell'eq. diff. Vale che xe^{2x} è un'altra soluzione: infatti:

$$\tilde{y}(x) \overset{def}{=} xe^{2x}$$

$$\tilde{y}' = e^{2x} + 2xe^{2x} = (1+2x)e^{2x}$$

$$\tilde{y}'' = 2e^{2x} + 2(1+2x)e^{2x}$$

$$= 4(1+x)e^{2x}$$

inseriamo $\tilde{y}$ nell'eq. diff:

$$\underbrace{4(1+x)e^{2x}}_{\tilde{y}''} - 4\underbrace{(1+2x)e^{2x}}_{\tilde{y}'} + 4\underbrace{xe^{2x}}_{\tilde{y}}$$

$$= 4e^{2x}\left(\cancel{1} + \cancel{x} - \cancel{1} - \cancel{2x} + \cancel{x}\right) = 0 \quad \checkmark$$

$\Rightarrow$ integrale generale dell'eq. diff.

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 xe^{2x} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

———— ∘ ————

Es: $y'' + 2y' + 5y = 0$

integrale generale = ?

---

equazione caratteristica associata:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$$

$$(\lambda + 1)^2 + 4 = 0$$

$$(\lambda + 1)^2 = -4$$

$$\lambda + 1 = \pm 2i$$

$$\boxed{\lambda = -1 \pm 2i}$$

$$\Delta < 0$$

$$\frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2}$$

$$\vdots$$

due soluzioni complesse coniugate

$\Rightarrow$ integrale generale

$$y(x) = e^{-x}\left(c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)\right)$$

$$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$