esercizi di AlgLinGeo 2017/18

4 - SPAZI VETTORIALI $\mathbf{R}^n$

1. Verificare che in $\mathbf{R}^4$ vettori : $\mathbf{u} = (1, 0, 0, 1)$, $\mathbf{v} =(2, 0, 1, 1)$, $\mathbf{w} = (1, 0, 1, 0)$ sono linearmente dipendenti e scrivere uno di essi come combinazione lineare degli altri due.

2. Trovare un sottospazio di $\mathbf{R}^3$ che contiene i vettori $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{k}$ e $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$.

3. I vettori $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \mathbf{j}$, $\mathbf{w} = \mathbf{2j}$ generano un sottospazio di $\mathbf{R}^3$ (quale?). Il vettore $\mathbf{t} = 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ sta in tale sottospazio?

4. Dati in $\mathbf{R}^4$ i vettori : $\mathbf{u} = (1, 0, 0, 1)$, $\mathbf{v} =(2, 0, 1, 1)$, $\mathbf{w} = (1, 0, 1, 0)$, verificare che il vettore $(3, 0, 1, 2)$ appartiene al sottospazio $V = \mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$, mentre il vettore $(3, 1, 1, 2)$ non vi appartiene.

5. Verificare che l'insieme $\{V = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x - y + z + 1 = 0, x = 0\}$ non è un sottospazio di $\mathbf{R}^3$.

6. Studiando i generatori, dire se i seguenti sottospazi di $\mathbf{R}^4$ coincidono o no:

$$\mathcal{L}((1, 2, -1, 3), (2, 4, 1, -2), (3, 6, 3, -7))$$

$$\mathcal{L}((1, 2, -4, 11), (2, 4, -5, 14))$$

7. Verificare che l'insieme $\{V = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x - y + z = 0, x = 0\}$ è un sottospazio di $\mathbf{R}^3$ e trovarne una base .

8. Consideriamo i seguenti vettori di $\mathbf{R}^4$:

$$\mathbf{w}_1 = (1, 0, 1, 0), \mathbf{w}_2 = (2, h, 2, h), \mathbf{w}_3 = (1, h, 1, 2h)$$

Trovare la dimensione di $\mathcal{L}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$ al variare del parametro reale h.

9. Verificare che $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{w} = \mathbf{i}$ sono una base per i vettori applicati in O. Trovare le componenti del vettore $\mathbf{t} = 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ rispetto a tale base.

10. In $\mathbf{R^4}$ si considerino i vettori $a = (3, -1, 2, 0)$, $b = (3, 0, 1, -1)$ e $c = (0, -2, 2, 2)$.
Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) $\dim(\mathcal{L}(a, b, c)) = 3$.
(b) $\dim(\mathcal{L}(a, b, c)) = 2$.
(c) $a - b + 5c \notin \mathcal{L}(a, b)$.
(d) Esiste $d \in \mathbf{R^4}$ tale che (a, b, c, d) sia una base di $\mathbf{R^4}$.

11. Siano dati i vettori di $\mathbf{R}^3$: $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$
Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) $dim \mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{3}$ per ogni $t \in \mathbf{R}$.
(b) Esiste $t \in \mathbf{R}$ tale che $\mathbf{w} \in \mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.
(c) $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ sono linearmente dipendenti per ogni $t \in \mathbf{R}$.
(d) Esiste $t \in \mathbf{R}$ tale che $\mathbf{u} \in \mathcal{L}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$.

12. Sia V il sottinsieme di $\mathbf{R^3}$ definito da

$$V := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R^3} \;\middle|\; \begin{matrix} x - y + 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{matrix} \right\}$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) V contiene 3 vettori linearmente indipendenti.
(b) V è un sottospazio di $\mathbf{R^3}$ di dimensione 2.
(c) V è un sottospazio di $\mathbf{R^3}$ di dimensione 1.
(d) V è l'insieme vuoto.

4 - SOLUZIONI

9. $a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{w} = \mathbf{0}$ se e solo se $a + b + c = 0, b = 0, -a = 0$, quindi $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ sono linearmente indipendenti e siccome sono in numero pari alla dimensione di $\mathbf{R}^3$, sono una base. Per trovare le componenti di $\mathbf{t}$ rispetto a $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$, basta cercare i coefficienti a, b, c tali che $\mathbf{t} = a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{w}$; si trovano le componenti $(-3, 2, 1)$.

10(b).

11(d).

12(c).