

AUTOVALORI E VALORI SINGOLARI DI MATRICI

Letizia SCUDERI

Dipartimento di Scienze Matematiche, Politecnico di Torino

letizia.scuderi@polito.it

A.A. 2017/2018

Definizione

Data una matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$, un numero λ (reale o complesso), si dice **autovalore** di \mathbf{A} se esiste un vettore **non nullo** \mathbf{x} (reale o complesso) soluzione del sistema omogeneo

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

Il vettore \mathbf{x} è detto **autovettore** di \mathbf{A} corrispondente all'autovalore λ .

È immediato verificare che ogni autovettore è definito a meno di una costante moltiplicativa.

Dalla precedente definizione si ha che

λ è un autovalore di \mathbf{A} se, e solo se, la matrice $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ è singolare

Pertanto, gli autovalori di \mathbf{A} coincidono con le n radici dell'**equazione caratteristica** (algebraica di grado n):

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$$

Ne consegue che una matrice quadrata di dimensione n ha esattamente n autovalori (reali o complessi), non necessariamente distinti tra loro.

Si osservi che, poiché gli elementi di \mathbf{A} sono numeri reali, allora l'equazione caratteristica ha coefficienti reali e, di conseguenza, se \mathbf{A} ammette come autovalore un numero complesso λ , anche il suo coniugato $\bar{\lambda}$ sarà un autovalore.

Dalla definizione di autovalore-autovettore si deducono immediatamente le seguenti proprietà.

Proprietà

- Se $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sono gli autovalori di una matrice \mathbf{A} , con corrispondenti autovettori $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$, $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k$ rappresentano gli n autovalori di \mathbf{A}^k . Inoltre, gli autovettori di \mathbf{A} sono anche autovettori di \mathbf{A}^k .
- Se $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sono gli autovalori di una matrice invertibile \mathbf{A} , con corrispondenti autovettori $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$, $\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}$ rappresentano gli n autovalori di \mathbf{A}^{-1} . Inoltre, gli autovettori di \mathbf{A} sono anche autovettori di \mathbf{A}^{-1} .

La definizione di autovalore-autovettore

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \lambda_i\mathbf{x}_i, \quad i = 1, \dots, n$$

consente di scrivere l'identità

$$(\mathbf{A}\mathbf{x}_1, \mathbf{A}\mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{A}\mathbf{x}_n) = (\lambda_1\mathbf{x}_1, \lambda_2\mathbf{x}_2, \dots, \lambda_n\mathbf{x}_n)$$

ovvero

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{X}\mathbf{D}$$

con

$$\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n), \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

I seguenti comandi Matlab consentono di calcolare gli autovalori e gli autovettori ad essi associati di una matrice **A**.

Comandi Matlab

- `d = eig(A)` restituisce il vettore **d** contenente tutti gli autovalori di **A**.
- `[X,D] = eig(A)` restituisce la matrice diagonale **D** i cui elementi sono gli autovalori di **A** e la matrice **X** i cui vettori colonna sono i corrispondenti autovettori (cioè l'*i*-esimo vettore colonna $X(:,i)$ è un autovettore associato all'autovalore $D(i,i)$).

Definizione

Data una matrice \mathbf{A} di ordine n e un vettore non nullo \mathbf{x} di dimensione n , si definisce **quoziente di Rayleigh** il numero

$$r_A(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}^H \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^H \mathbf{x}}$$

ove \mathbf{x}^H denota il vettore trasposto coniugato di \mathbf{x} , ovvero il vettore i cui elementi sono i coniugati \bar{x}_j degli elementi x_j , $j = 1, \dots, n$. Se gli elementi di \mathbf{x} sono tutti reali, allora $\mathbf{x}^H = \mathbf{x}^T$.

Si osservi che se \mathbf{x} è un autovettore con autovalore λ si ha $r_A(\mathbf{x}) = \lambda$.

Pertanto noto l'autovalore λ di \mathbf{A} , un corrispondente autovettore può essere calcolato risolvendo il sistema omogeneo $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$; viceversa, noto un autovettore \mathbf{x} , l'autovalore λ ad esso associato è fornito dal quoziente di Rayleigh.

Utilizzando l'espressione del quoziente di Rayleigh e la definizione di matrice simmetrica e definita positiva, si dimostra immediatamente la seguente proprietà.

Proprietà

Una matrice simmetrica **A** di ordine n è definita positiva se, e solo se, i suoi autovalori sono tutti positivi.

Definizione

Si definisce **raggio spettrale** della matrice **A** di ordine n il modulo dell'autovalore di massimo modulo, cioè

$$\rho(\mathbf{A}) = \max_{i=1,\dots,n} \{|\lambda_i| : \lambda_i \text{ è autovalore di } \mathbf{A}\}$$

Il raggio spettrale di una matrice **A** si può calcolare mediante l'istruzione Matlab `max(abs(eig(A)))`.

Definizione

Si definisce **norma 2** o **norma spettrale** di $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ il numero reale positivo:

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\rho(\mathbf{A}^T \mathbf{A})}$$

Osservazioni

- Se $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ è simmetrica, allora $\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\rho(\mathbf{A}^2)} = \sqrt{\rho(\mathbf{A})^2} = \rho(\mathbf{A})$
- Se $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ è ortogonale, allora
 $\|\mathbf{Ax}\|_2 = \sqrt{(\mathbf{Ax})^T \mathbf{Ax}} = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{Ax}} = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} = \|\mathbf{x}\|_2$

Comando Matlab

`norm(A,2)` oppure `norm(A)` restituisce la norma spettrale della matrice \mathbf{A} .

Nell'applicazione di alcuni metodi numerici è necessario localizzare in modo (più o meno accurato) gli autovalori di \mathbf{A} nel piano complesso. A tale scopo si introducono le seguenti definizioni.

Definizione

Si definisce i -esimo **cerchio riga di Gershgorin** associato alla i -esima riga di \mathbf{A} l'insieme

$$C_i^{(r)} = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| \right\}, \quad i = 1, \dots, n$$

Si definisce j -esimo **cerchio colonna di Gershgorin** associato alla j -esima colonna di \mathbf{A} l'insieme

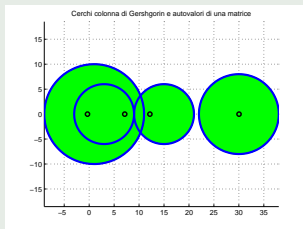
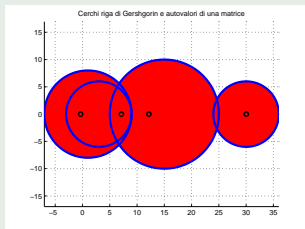
$$C_j^{(c)} = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{jj}| \leq \sum_{i=1, i \neq j}^n |a_{ij}| \right\}, \quad j = 1, \dots, n$$

Teorema

- Tutti gli autovalori di \mathbf{A} appartengono a $\mathcal{R} = \bigcup_{i=1}^n C_i^{(r)}$.
- Tutti gli autovalori di \mathbf{A} appartengono a $\mathcal{C} = \bigcup_{j=1}^n C_j^{(c)}$.

Esempio

A sinistra i cerchi riga di Gershgorin e a destra i cerchi colonna per la matrice: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 30 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 15 & -4 & -2 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ -3 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

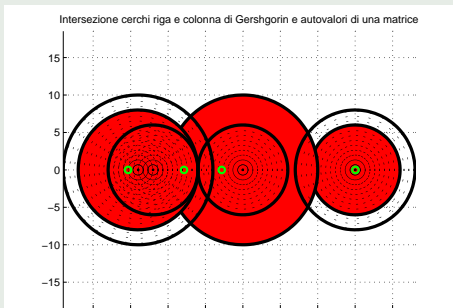


Teorema

Tutti gli autovalori di \mathbf{A} appartengono alla regione del piano complesso individuata dall'intersezione delle regioni \mathcal{R} e \mathcal{C} .

Esempio

La regione in rosso punteggiata in nero rappresenta l'intersezione dell'unione dei cerchi riga con l'unione dei cerchi colonna associata alla matrice del precedente esempio. I circoletti verdi rappresentano gli effettivi autovalori.



Teorema

- Denotate con $\mathcal{R}_1 = \bigcup_{i=1}^k C_i^{(r)}$ e con $\mathcal{R}_2 = \bigcup_{i=k+1}^n C_i^{(r)}$, se risulta $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 = \emptyset$, allora esattamente k autovalori appartengono a \mathcal{R}_1 e i restanti $n - k$ appartengono a \mathcal{R}_2 .
- Denotate con $\mathcal{C}_1 = \bigcup_{j=1}^k C_j^{(c)}$ e con $\mathcal{C}_2 = \bigcup_{j=k+1}^n C_j^{(c)}$, se risulta $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \emptyset$, allora esattamente k autovalori appartengono a \mathcal{C}_1 e i restanti $n - k$ appartengono a \mathcal{C}_2 .

Esempio

Per la matrice del precedente esempio, se poniamo $\mathcal{C}_1 = C_1^{(c)}$ e $\mathcal{C}_2 = \bigcup_{j=2}^4 C_j^{(c)}$, abbiamo $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \emptyset$, e quindi un autovalore appartiene a \mathcal{C}_1 e i restanti tre appartengono a \mathcal{C}_2 .

Definizione

Due matrici **A** e **B** di ordine n si dicono **simili** se esiste una matrice **S**, di ordine n e non singolare, tale che

$$S^{-1}AS = B$$

Teorema

Due matrici simili **A** e **B** hanno gli stessi autovalori.

Dimostrazione

Siano λ un autovalore di **A**, **x** un autovettore a esso corrispondente e $\mathbf{B} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$. Allora si ha

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} &\Rightarrow \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{S}^{-1}\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{S}^{-1}\mathbf{x} \\ &\Rightarrow \mathbf{B}\mathbf{z} = \lambda\mathbf{z} \text{ con } \mathbf{z} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{x}\end{aligned}$$

Quindi λ è anche autovalore di **B** con autovettore **z**.

Definizione

Una matrice \mathbf{A} con autovalori λ_i , $i = 1, \dots, n$, si dice **diagonalizzabile** se è simile alla matrice diagonale $\mathbf{D} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, ovvero se esiste una matrice di ordine n e non singolare \mathbf{S} tale che

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{D} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

Osservazione

Se \mathbf{A} è diagonalizzabile e $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{D}$, allora si ha

$$\mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{S}\mathbf{D}$$

e, pertanto, le colonne della matrice \mathbf{S} sono autovettori di \mathbf{A} .

Una matrice diagonalizzabile può essere caratterizzata mediante i suoi autovettori.

Teorema

Una matrice \mathbf{A} di ordine n è diagonalizzabile se, e solo se, \mathbf{A} possiede n autovettori linearmente indipendenti.

Ricordando che gli autovettori associati ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti, si ha la seguente condizione sufficiente.

Teorema

Una matrice è diagonalizzabile se i suoi autovalori sono distinti.

Esempio

Una matrice reale e **simmetrica** \mathbf{A} di ordine n ammette n autovettori ortogonali tra loro (quindi linearmente indipendenti) e, pertanto, è diagonalizzabile. In particolare, per essa esiste una matrice ortogonale \mathbf{V} (per la quale $\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V}^T$) tale che

$$\mathbf{V}^T \mathbf{A} \mathbf{V} = \mathbf{D} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

Condizionamento del calcolo degli autovalori

Si studia ora il condizionamento del problema del calcolo degli autovalori di una matrice \mathbf{A} ovvero si analizza come eventuali perturbazioni (corrispondenti, ad esempio, agli errori di arrotondamento o agli errori sperimentali) presenti negli elementi della matrice si propagano sugli autovalori.

Segue un esempio di matrice mal condizionata rispetto al calcolo dei suoi autovalori.

Esempio

Sia

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 101 & -90 \\ 110 & -98 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori di \mathbf{A} sono $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 1$.

Denotiamo con

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 101 - \varepsilon & -90 - \varepsilon \\ 110 & -98 \end{pmatrix}$$

una perturbazione della matrice \mathbf{A} .

Per $\varepsilon = 0.001$, gli autovalori di $\tilde{\mathbf{A}}$ sono $\tilde{\lambda}_1 \approx 1.701$ e $\tilde{\lambda}_2 \approx 1.298$.

Si osservi che $\|\mathbf{A} - \tilde{\mathbf{A}}\|_2 \approx 0.001$, mentre $|\lambda_1 - \tilde{\lambda}_1|, |\lambda_2 - \tilde{\lambda}_2| \approx 0.3$.

Pertanto, a una perturbazione assoluta pari allo 0.1% sugli elementi della matrice è corrisposta una variazione del 30% sugli autovalori.

Una misura del condizionamento del calcolo degli autovalori, nel caso di matrici diagonalizzabili, è fornita dal seguente teorema.

Teorema (Bauer-Fike)

Sia \mathbf{A} una matrice **diagonalizzabile** e sia \mathbf{S} invertibile tale che $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{D}$ con $\mathbf{D} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. Sia $\tilde{\mathbf{A}}$ una perturbazione della matrice \mathbf{A} e sia $\tilde{\lambda}$ un autovalore di $\tilde{\mathbf{A}}$. Allora

$$\min_{1 \leq i \leq n} |\tilde{\lambda} - \lambda_i| \leq K(\mathbf{S}) \|\mathbf{A} - \tilde{\mathbf{A}}\|$$

dove $K(\mathbf{S}) = \|\mathbf{S}\| \|\mathbf{S}^{-1}\|$ e $\|\cdot\|$ indica una qualsiasi delle norme di matrice $\|\cdot\|_p$, con $p = 1, 2, \infty$.

Il numero $K(\mathbf{S})$ può essere assunto come numero di condizionamento del problema degli autovalori di una matrice diagonalizzabile \mathbf{A} :
se $K(\mathbf{S}) \approx 1$ il problema è ben condizionato, altrimenti il problema può essere mal condizionato.

Esempio

Per l'esempio precedente, tenendo conto che gli autovalori di \mathbf{A} sono distinti e quindi \mathbf{A} è diagonalizzabile, si ha

```
>> A = [101 -90; 110 -98];  
>> [S,D] = eig(A);  
>> condizionamento = cond(S)  
condizionamento =  
4.0000e+02
```

Osservazioni

Se \mathbf{A} è simmetrica, allora \mathbf{A} è diagonalizzabile con \mathbf{S} ortogonale e

$$K_2(\mathbf{S}) = \|\mathbf{S}\|_2 \|\mathbf{S}^T\|_2 = \sqrt{\rho(\mathbf{S}^T \mathbf{S})} \sqrt{\rho(\mathbf{S} \mathbf{S}^T)} = 1$$

Pertanto, per le matrici simmetriche il calcolo degli autovalori è un problema ben condizionato.

... continua osservazioni

- Il condizionamento del problema del calcolo degli autovalori per una matrice diagonalizzabile \mathbf{A} non dipende dal numero di condizionamento $K(\mathbf{A})$ della matrice \mathbf{A} , ma dal numero di condizionamento $K(\mathbf{S})$ della matrice \mathbf{S} degli autovettori.
- Il calcolo degli autovalori di una matrice mal condizionata non è necessariamente un problema mal condizionato; per esempio, la matrice di Hilbert \mathbf{H}_n ha un numero di condizionamento $K(\mathbf{H}_n)$ grande per n grande ma, essendo simmetrica, è ben condizionata per quanto riguarda il calcolo degli autovalori.

Il seguente comando Matlab consente di calcolare il numero di condizionamento di ciascun autovalore.

Comando Matlab

`c = condeig(A)` restituisce il vettore `c` contenente i numeri di condizionamento di ciascun autovalore della matrice `A`. Se `c(i)`, $i = 1, \dots, n$, è circa 1, allora il calcolo di λ_i è ben condizionato, altrimenti può essere mal condizionato.

Esempio 1

Calcoliamo gli autovalori della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

e i corrispondenti numeri di condizionamento.

```
>> format short e
>> A = [1 2 -2; 1 1 1; 2 2 1];
>> d = eig(A)
d =
    1.0000e+00 + 1.3398e-05i
    1.0000e+00 - 1.3398e-05i
    9.9998e-01
>> c = condeig(A)
c =
    1.1818e+10
    1.1818e+10
    1.1818e+10
```

Gli autovalori calcolati e memorizzati in **d** non sono affidabili, perché il numero di condizionamento degli autovalori è dell'ordine di 10^{10} .

Infatti, l'equazione caratteristica associata ad **A** è $(1 - \lambda)^3 = 0$ e, pertanto, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

Esempio 2

Calcoliamo gli autovalori della matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

e i corrispondenti numeri di condizionamento.

```
>> A = [1 2 -2; 2 1 1; -2 2 1];
```

```
>> d = eig(A)
```

```
d =
```

```
    -2.6458e+00
```

```
     3.0000e+00
```

```
     2.6458e+00
```

```
>> c = condeig(A)
```

```
c =
```

```
     1.0119e+00
```

```
     2.0000e+00
```

```
     2.0119e+00
```

Gli autovalori calcolati e memorizzati in **d** sono affidabili, perché il condizionamento di ciascun autovalore è all'incirca 1.

Infatti, l'equazione caratteristica associata alla matrice **A** è

$$(3 - \lambda)(\lambda^2 - 7) = 0 \text{ e, pertanto, } \lambda_1 = -\sqrt{7}, \lambda_2 = 3 \text{ e } \lambda_3 = \sqrt{7}.$$

Per il calcolo degli autovalori e autovettori di una matrice \mathbf{A} , la procedura matematica — *calcolo delle radici λ dell'equazione caratteristica e risoluzione del sistema omogeneo $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$* — non è, in generale, una procedura numerica conveniente sia per il costo che per la stabilità.

Per il calcolo degli autovalori di una matrice esistono metodi numerici alternativi.

I metodi numerici si classificano in due gruppi:

- metodi per l'approssimazione di un solo autovalore, che in alcuni casi richiedono la localizzazione dell'autovalore cercato;
- metodi per l'approssimazione simultanea di tutti gli autovalori, che si basano sulle similitudini di matrici.

Metodi per l'approssimazione di un autovalore

I metodi per l'approssimazione di un autovalore generano, attraverso procedimenti iterativi, una successione di autovalori convergente all'autovalore cercato.

Metodo delle potenze

Il metodo delle potenze consente di calcolare l'autovalore di modulo massimo di una matrice \mathbf{A} e, conseguentemente, il raggio spettrale $\rho(\mathbf{A})$. Per introdurre l'idea del metodo, per semplicità, si supponga che \mathbf{A} sia reale, **diagonalizzabile** e che, indicati con λ_k , $k = 1, \dots, n$, i suoi autovalori, esista un solo autovalore di modulo massimo, ossia

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|$$

Si osservi che, poiché \mathbf{A} è reale, la prima disuguaglianza stretta comporta che λ_1 sia certamente reale.

Si denotino con $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$, n autovettori corrispondenti agli autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, rispettivamente. Essendo \mathbf{A} diagonalizzabile, i vettori \mathbf{x}_k sono linearmente indipendenti e, pertanto, ogni vettore $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ si rappresenta come

$$\mathbf{z} = \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{x}_n$$

per opportuni coefficienti α_k .

Moltiplicando ambo i membri a sinistra per la matrice \mathbf{A} , si ha

$$\mathbf{A}\mathbf{z} = \alpha_1 \mathbf{A}\mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{A}\mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{A}\mathbf{x}_n = \alpha_1 \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_n \lambda_n \mathbf{x}_n$$

Moltiplicando nuovamente per \mathbf{A} ,

$$\mathbf{A}^2 \mathbf{z} = \mathbf{A}(\mathbf{A}\mathbf{z}) = \alpha_1 \lambda_1^2 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \lambda_2^2 \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_n \lambda_n^2 \mathbf{x}_n$$

Iterando la procedura, dopo m moltiplicazioni¹ per \mathbf{A} , si ottiene

$$\mathbf{z}^{(m)} := \mathbf{A}^m \mathbf{z} = \alpha_1 \lambda_1^m \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \lambda_2^m \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_n \lambda_n^m \mathbf{x}_n$$

Tale vettore si può riscrivere come

$$\mathbf{z}^{(m)} = \lambda_1^m \left(\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^m \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^m \mathbf{x}_n \right) =: \lambda_1^m \mathbf{y}^{(m)}$$

Poiché per ipotesi $|\lambda_1| > |\lambda_k|$ per $k > 1$, si ha

$$\left| \alpha_k \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_1} \right)^m \right| = |\alpha_k| \left| \frac{\lambda_k}{\lambda_1} \right|^m \rightarrow 0 \quad \text{per } m \rightarrow \infty$$

e ciò comporta che

$$\mathbf{y}^{(m)} \rightarrow \alpha_1 \mathbf{x}_1 \quad \text{per } m \rightarrow \infty$$

Pertanto, supponendo $\alpha_1 \neq 0$, il vettore $\mathbf{y}^{(m)}$ tende ad allinearsi al primo autovettore \mathbf{x}_1 della matrice \mathbf{A} .

¹Il nome del metodo deriva dalla presenza delle potenze di \mathbf{A} .

Corrispondentemente anche il vettore $\mathbf{z}^{(m)} = \lambda_1^m \mathbf{y}^{(m)}$ tende ad allinearsi a \mathbf{x}_1 , ma la sua lunghezza tende a 0 oppure a ∞ a seconda che $|\lambda_1| < 1$ oppure $|\lambda_1| > 1$. È quindi opportuno, per evitare fenomeni di underflow o overflow, normalizzare tale vettore, riportandolo a ogni iterazione ad avere lunghezza unitaria.

Partendo da un vettore iniziale $\mathbf{z}^{(0)} := \mathbf{z}$, si costruisce quindi per $m = 0, 1, 2, \dots$ la successione di vettori

$$\mathbf{w}^{(m)} = \frac{\mathbf{z}^{(m)}}{\|\mathbf{z}^{(m)}\|_2}$$

$$\mathbf{z}^{(m+1)} = \mathbf{A}\mathbf{w}^{(m)}$$

Per quanto riguarda l'approssimazione dell'autovalore λ_1 , si osservi che se $\mathbf{w}^{(m)}$ approssima un autovettore \mathbf{x}_1 relativo all'autovalore λ_1 , allora

$$\mathbf{A}\mathbf{w}^{(m)} \approx \lambda_1 \mathbf{w}^{(m)}$$

e

$$(\mathbf{w}^{(m)})^T \mathbf{A}\mathbf{w}^{(m)} \approx \lambda_1 (\mathbf{w}^{(m)})^T \mathbf{w}^{(m)}$$

Appare quindi naturale approssimare l'autovalore λ_1 al passo m mediante il quoziente di Rayleigh

$$\lambda_1^{(m)} = \frac{(\mathbf{w}^{(m)})^T \mathbf{A}\mathbf{w}^{(m)}}{(\mathbf{w}^{(m)})^T \mathbf{w}^{(m)}} = (\mathbf{w}^{(m)})^T \mathbf{A}\mathbf{w}^{(m)} = (\mathbf{w}^{(m)})^T \mathbf{z}^{(m+1)}$$

ove si è tenuto conto che $\mathbf{w}^{(m)T} \mathbf{w}^{(m)} = \|\mathbf{w}^{(m)}\|_2^2 = 1$ e $\mathbf{A}\mathbf{w}^{(m)} = \mathbf{z}^{(m+1)}$.

Di seguito l'algoritmo che implementa il metodo delle potenze.

Function Matlab

```
function [lambda_max,w,m] = potenze(A,z,tol,m_max)
w = z/norm(z);
lambda = 0;
for m = 1:m_max
    z = A*w;
    lambda_max = w'*z ;
    w = z/norm(z);
    if abs(lambda_max-lambda) <= tol*abs(lambda_max)
        break
    end
    lambda = lambda_max;
end
```

Osservazioni

- L'ipotesi che il vettore iniziale $\mathbf{z}^{(0)}$ abbia componente non nulla rispetto all'autovettore \mathbf{x}_1 (cioè l'ipotesi $\alpha_1 \neq 0$) non è restrittiva nella pratica perché, grazie questa volta agli errori di arrotondamento, dopo poche iterazioni compare una componente nella direzione di \mathbf{x}_1 , anche se questa non era presente nel vettore iniziale $\mathbf{z}^{(0)}$.
- Se $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k$ e $|\lambda_1| > |\lambda_{k+1}| \geq \dots \geq |\lambda_n|$ il metodo delle potenze converge (lentamente) ancora a λ_1 e a un autovettore ad esso associato.

... continua osservazioni

- Se $\lambda_1 = -\lambda_2$, cioè se esistono due autovalori distinti di ugual modulo massimo, allora in generale il metodo delle potenze non converge.
- Se λ_1 e λ_2 sono complessi e coniugati, cioè se esistono due autovalori complessi distinti di ugual modulo massimo, allora il metodo delle potenze non converge perché, così come è stato formulato, non può convergere ad autovettori e autovalori complessi.

... continua osservazioni

- Per una generica matrice \mathbf{A} , la velocità di convergenza di $\lambda_1^{(m)}$ a λ_1 per $m \rightarrow \infty$ è pari a quella con cui $\left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|^m \rightarrow 0$ per $m \rightarrow \infty$.
- Si può dimostrare che per una matrice simmetrica \mathbf{A} la convergenza è più rapida perchè dipende dal quadrato del suddetto rapporto, ossia la velocità di convergenza di $\lambda_1^{(m)}$ a λ_1 per $m \rightarrow \infty$ è pari a quella con cui $\left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|^{2m} \rightarrow 0$ per $m \rightarrow \infty$.
- Se $|\lambda_2| \approx |\lambda_1|$ la convergenza della successione $\lambda_1^{(m)}$ a λ_1 può risultare eccessivamente lenta. In questa situazione il metodo viene utilizzato solo per una stima iniziale, da migliorare successivamente con un metodo più veloce (per esempio, il metodo delle potenze inverse).

Metodo delle potenze inverse

Una variante del metodo delle potenze, detta metodo delle potenze inverse, consente di approssimare un qualunque autovalore λ di \mathbf{A} purché se ne conosca un'approssimazione p .

Infatti, osservando che da $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ segue

$$(\mathbf{A} - p\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} - p\mathbf{x} = (\lambda - p)\mathbf{x}$$

si ha che $\lambda - p$ è autovalore della matrice $\mathbf{A} - p\mathbf{I}$ con autovettore \mathbf{x} .

Conseguentemente,

$$(\mathbf{A} - p\mathbf{I})^{-1}\mathbf{x} = \frac{1}{\lambda - p}\mathbf{x}$$

e, dunque, $(\lambda - p)^{-1}$ è autovalore della matrice $(\mathbf{A} - p\mathbf{I})^{-1}$.

Se allora p è sufficientemente vicino a un autovalore λ di \mathbf{A} , il numero $\mu = \frac{1}{\lambda - p}$ è l'autovalore di modulo massimo di $(\mathbf{A} - p\mathbf{I})^{-1}$.

Pertanto, applicando il metodo delle potenze alla matrice $(\mathbf{A} - p\mathbf{I})^{-1}$, si determina μ e, quindi,

$$\lambda = p + \frac{1}{\mu}$$

Osservazione

Nell'algoritmo che implementa il metodo delle potenze occorrerebbe allora sostituire \mathbf{A} con $(\mathbf{A} - p\mathbf{I})^{-1}$ ma, tenendo conto che

$$\mathbf{z}^{(m+1)} = (\mathbf{A} - p\mathbf{I})^{-1}\mathbf{w}^{(m)} \iff (\mathbf{A} - p\mathbf{I})\mathbf{z}^{(m+1)} = \mathbf{w}^{(m)},$$

non è necessario né conveniente invertire la matrice $\mathbf{A} - p\mathbf{I}$, ma è sufficiente calcolare la sua fattorizzazione $\mathbf{PA}=\mathbf{LU}$ una volta per tutte e, a ogni passo, calcolare la soluzione del sistema $(\mathbf{A} - p\mathbf{I})\mathbf{z}^{(m+1)} = \mathbf{w}^{(m)}$ mediante la risoluzione di due sistemi triangolari.

Di seguito l'algoritmo che implementa il metodo delle potenze inverse.

Function Matlab

```
function [lambda_p,w,m] = potenze_inverse(A,p,z,tol,m_max)
n = size(A);
w = z/norm(z);
lambda = 0;
[L,U,P] = lu(A-p*eye(n));
for m = 1:m_max
    y = L\(P*w);
    z = U\y;
    lambda_p = p+1/(w'*z);
    w = z/norm(z);
    if abs(lambda_p-lambda) <= tol*abs(lambda_p)
        break
    end
    lambda = lambda_p;
end
```

Osservazioni

- Se si assume $p = 0$ il metodo delle potenze inverse permette di approssimare l'autovalore di minimo modulo di \mathbf{A} , nell'ipotesi che esista un solo autovalore (reale) di modulo minimo.
- Un'approssimazione di p può essere ottenuta mediante i cerchi di Gershgorin.
- Il valore di p potrebbe essere modificato nel corso delle iterazioni, ponendo $p = \lambda^{(m+1)}$. Ciò comporta una diminuzione del numero di iterazioni necessarie per soddisfare il test d'arresto, ma anche un considerevole aumento del costo computazionale in quanto la matrice $(\mathbf{A} - p\mathbf{I})^{-1}$ cambia a ogni passo e non sarà più possibile fattorizzarla una volta per tutte prima del processo iterativo.

Assegnata una matrice \mathbf{A} , i seguenti comandi Matlab ci consentono di calcolare solo alcuni suoi autovalori, per esempio quelli più grandi in modulo oppure quelli più vicini a un dato valore p .

Comandi Matlab

- $[X,D] = \text{eigs}(A,k)$ restituisce in D e in X rispettivamente, i k autovalori di A di modulo più grande e i corrispondenti autovettori.
- $[X,D] = \text{eigs}(A,k,p)$ restituisce in D e in X rispettivamente, i k autovalori di A più vicini a p e i corrispondenti autovettori.

Metodo QR

Il metodo più efficiente e più usato per il calcolo di tutti gli autovalori, ed eventualmente autovettori, di una matrice \mathbf{A} è il metodo QR , il cui nome deriva dal fatto che esso si basa sulla fattorizzazione $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$.

Il metodo verrà descritto solo nella forma più elementare, che non sempre però garantisce la convergenza agli autovalori di \mathbf{A} .

Nel metodo QR viene generata una successione di matrici nel modo seguente: posto

$$\mathbf{A}_1 := \mathbf{A}$$

per $k = 1, 2, \dots$ si calcola una fattorizzazione QR della matrice \mathbf{A}_k ,

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{Q}_k \mathbf{R}_k$$

ove \mathbf{Q}_k è ortogonale e \mathbf{R}_k è triangolare superiore, e si definisce la matrice \mathbf{A}_{k+1} mediante la relazione

$$\mathbf{A}_{k+1} := \mathbf{R}_k \mathbf{Q}_k$$

Dalle precedenti relazioni risulta che \mathbf{A}_2 è simile ad $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}$

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{R}_1 \mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}_1^T \underbrace{\mathbf{Q}_1 \mathbf{R}_1 \mathbf{Q}_1}_{\mathbf{A}_1} = \mathbf{Q}_1^T \mathbf{A}_1 \mathbf{Q}_1$$

e quindi \mathbf{A}_2 ha gli stessi autovalori di \mathbf{A} .

Tenendo conto che la relazione di similitudine è transitiva e che \mathbf{A}_{k+1} è simile ad \mathbf{A}_k , le matrici \mathbf{A}_k della successione sono tutte simili tra loro e, quindi, alla matrice assegnata \mathbf{A} .

Inoltre, se \mathbf{A} è simmetrica, tutte le \mathbf{A}_k lo sono; se \mathbf{A} è di Hessenberg superiore tutte le \mathbf{A}_k lo sono.

Sotto opportune ipotesi, la successione di matrici \mathbf{A}_k converge per $k \rightarrow \infty$ verso una matrice limite \mathbf{A}_∞ con le seguenti proprietà:

- se la matrice \mathbf{A} è simmetrica, allora \mathbf{A}_∞ è diagonale; gli elementi sulla diagonale sono gli autovalori di \mathbf{A} ;
- se la matrice \mathbf{A} non è simmetrica, ma ha autovalori tutti reali, allora \mathbf{A}_∞ è triangolare superiore; gli elementi sulla diagonale sono gli autovalori di \mathbf{A} ;
- se la matrice \mathbf{A} non è simmetrica e ha alcuni autovalori complessi (coniugati), allora \mathbf{A}_∞ è **quasi triangolare superiore**, ossia presenta lungo la diagonale sottomatrici 1×1 contenenti gli autovalori reali di \mathbf{A} , e sottomatrici 2×2 , i cui autovalori sono una coppia di autovalori complessi coniugati di \mathbf{A} .

Osservazioni

- La convergenza del metodo nella sua versione base è garantita se la matrice \mathbf{A} ha autovalori tutti distinti.
- Il metodo QR è alla base della function MATLAB `eig`.

Di seguito l'algoritmo che implementa la versione base del metodo QR .

Function Matlab

```
function [d,m] = qr_base(A,tol,m_max)
% la convergenza e' garantita solo se A ha autovalori distinti in modulo
for m = 1:m_max
    [Q,R] = qr(A);
    A = R*Q;
    if norm(tril(A,-1),inf) <= tol
        break
    end
end
d = diag(A);
```

Applicazione 1. Viabilità interurbana

Consideriamo n città e sia \mathbf{A} la matrice di ordine n con elementi

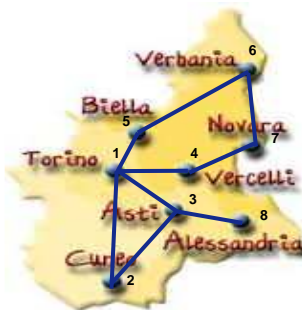
$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se la città } i \text{ ha un collegamento diretto con la città } j; \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si può dimostrare che le componenti dell'autovettore \mathbf{x} (di norma unitaria) associato all'autovalore di modulo massimo forniscono una misura della facilità di accesso alle varie città.

La città più facilmente raggiungibile è quella associata alla componente di \mathbf{x} più grande in modulo, mentre la peggiore è quella associata alla componente più piccola in modulo.

... continua esempio

In figura si riporta una rappresentazione schematica delle connessioni ferroviarie in Piemonte tra i capoluoghi di provincia: 1 Torino, 2 Cuneo, 3 Asti, 4 Vercelli, 5 Biella, 6 Verbania, 7 Novara, 8 Alessandria.



... continua esempio

La matrice **A** di ordine 8 associata alla rete ferroviaria in figura è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e l'autovettore **x** di lunghezza unitaria associato all'autovalore di modulo massimo di **A** è

$$\mathbf{x} = (0.5772, 0.4059, 0.4564, 0.3038, 0.3038, 0.1964, 0.1964, 0.1792)^T$$

Pertanto, la città più facilmente raggiungibile è quella associata alla componente 1, cioè Torino, mentre la città meno facilmente raggiungibile è Alessandria, associata alla componente 8.

Applicazione 2. (Siti web)

Procedendo in maniera analoga all'applicazione 2, è possibile misurare l'importanza di un determinato sito web tenendo conto dei siti che puntano ad esso. Denotando con n il numero dei principali siti riguardanti un determinato argomento, e con \mathbf{A} la matrice di ordine n con elementi

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se il sito web } j \text{ ha un link al sito web } i \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

le componenti dell'autovettore \mathbf{x} (di norma unitaria) associato all'autovalore di modulo massimo forniscono una misura dell'importanza dei vari siti: il sito più importante è quello che corrisponde alla componente maggiore di tale autovettore.

In questo modo, quando si esegue una ricerca in rete, si riceve una lista di siti in ordine di importanza decrescente, con ai primi posti i siti più visitati e interessanti. Questa è, ad esempio, l'idea utilizzata dal motore di ricerca Google.

Le nozioni di autovalore, determinante e inversa perdono di significato per una matrice rettangolare; esse vengono sostituite rispettivamente con le nozioni più generali di valore singolare, rango e pseudo-inversa di una matrice.

Il termine *valore singolare* è collegato al fatto che mediante tali quantità è possibile misurare la distanza di una matrice dall'insieme delle matrici singolari.

Teorema

Ogni matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ è fattorizzabile nella forma

$$\mathbf{U}^T \mathbf{A} \mathbf{V} = \mathbf{S} = \text{diag}(s_1, \dots, s_p) \in \mathbb{R}^{m,n}, \quad p = \min\{m, n\}$$

con $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{m,m}$ e $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n,n}$ matrici **ortogonali**, e

$$s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_p \geq 0$$

La matrice \mathbf{S} è univocamente determinata, mentre \mathbf{U} e \mathbf{V} non lo sono.

Definizioni

La fattorizzazione $\mathbf{U}^T \mathbf{A} \mathbf{V} = \mathbf{S}$ è detta **decomposizione ai valori singolari** di \mathbf{A} (o *Singular Value Decomposition*, SVD).

I valori s_i sono detti **valori singolari** di \mathbf{A} .

I vettori colonna \mathbf{v}_i per $i = 1, \dots, n$ della matrice \mathbf{V} e \mathbf{u}_i per $i = 1, \dots, m$ della matrice \mathbf{U} sono definiti **vettori singolari destri** e **vettori singolari sinistri** della matrice \mathbf{A} , rispettivamente.

Tenendo conto che \mathbf{U} e \mathbf{V} sono **ortogonali**, la decomposizione ai valori singolari si può scrivere anche nella seguente forma:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{V}^T$$

La matrice $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{m,n}$ ha una delle seguenti forme

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} s_1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & s_m & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{se } p = m \ (m < n),$$

oppure

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} s_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & s_2 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & s_n \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{se } p = n \ (m > n),$$

oppure

$$\mathbf{S} = \text{diag}(s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^{n,n} \quad \text{se } p = m = n.$$

Sia $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{m,n}$ con $m > n$. Allora si ha

$$\begin{aligned}
 \mathbf{USV}^T &= \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \dots & \dots & \dots & \mathbf{u}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & s_2 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & s_n \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{v}_2^T \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n^T \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \dots & \dots & \dots & \mathbf{u}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \mathbf{v}_1^T \\ s_2 \mathbf{v}_2^T \\ \vdots \\ s_n \mathbf{v}_n^T \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \\
 &= \mathbf{u}_1 s_1 \mathbf{v}_1^T + \dots + \mathbf{u}_n s_n \mathbf{v}_n^T = \sum_{i=1}^n s_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T
 \end{aligned}$$

In generale vale $\mathbf{USV}^T = \sum_{i=1}^p s_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T$

I seguenti comandi Matlab consentono di calcolare i valori singolari e i fattori **U**, **S** e **V** della decomposizione ai valori singolari della matrice **A**.

Comandi Matlab

- **d = svd(A)** restituisce il vettore **d** contenente, in ordine decrescente, i valori singolari di **A**.
- **[U,S,V] = svd(A)** restituisce la matrice diagonale **S**, delle stesse dimensioni di **A** e con elementi diagonali (non negativi e in ordine decrescente) coincidenti con i valori singolari, e due matrici ortogonali **U** e **V** tali che **A = USV^T**.

Il calcolo dei valori singolari di una matrice \mathbf{A} è un problema sempre ben condizionato. Si può infatti dimostrare il seguente teorema.

Teorema

Sia $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ e $\bar{\mathbf{A}}$ una sua perturbazione. Siano s_i e \bar{s}_i i valori singolari di \mathbf{A} e di $\bar{\mathbf{A}}$, rispettivamente. Si ha¹

$$|s_i - \bar{s}_i| \leq \|\bar{\mathbf{A}} - \mathbf{A}\|_2, \quad i = 1, \dots, p$$

¹Il concetto di norma può essere esteso anche a matrici rettangolari $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$. In particolare, per la norma 2 si ha $\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\rho(\mathbf{A}^T \mathbf{A})}$.

Proprietà della decomposizione SVD

Teorema

Sia $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ e sia

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T$$

la sua decomposizione ai valori singolari. Se risulta

$$s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_r > s_{r+1} = \dots = s_p = 0$$

allora

1) Il rango di \mathbf{A} è r .

2) $\mathbf{A} = \mathbf{U}_r \mathbf{S}_r \mathbf{V}_r^T = \sum_{i=1}^r s_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T$ ove

- $\mathbf{U}_r \in \mathbb{R}^{m,r}$ è la matrice le cui colonne sono $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$,
- $\mathbf{V}_r \in \mathbb{R}^{n,r}$ è la matrice le cui colonne sono $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$,
- $\mathbf{S}_r \in \mathbb{R}^{r,r}$ è la matrice diagonale i cui elementi diagonali sono s_1, \dots, s_r .

... continua teorema

- 3) Le colonne $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$ di \mathbf{U} formano una base ortonormale dello spazio vettoriale **immagine di \mathbf{A}** , cioè di $\text{Im}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{Ax} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$.
- 4) Le colonne $\mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_n$ di \mathbf{V} formano una base ortonormale dello spazio vettoriale **nucleo di \mathbf{A}** , cioè di $\text{Ker}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{Ax} = \mathbf{0}\}$.
- 5) Le colonne $\mathbf{u}_{r+1}, \dots, \mathbf{u}_m$ formano una base ortonormale dello spazio vettoriale $\text{Ker}(\mathbf{A}^T)$.
- 6) Le colonne $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$ formano una base ortonormale dello spazio vettoriale $\text{Im}(\mathbf{A}^T)$.

... continua teorema

- 7) $\lambda_i = s_i^2$, $i = 1, \dots, r$, sono gli autovalori della matrice $\mathbf{A}^T \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ (i restanti $n - r$ autovalori sono nulli) e i corrispondenti autovettori formano la matrice ortogonale \mathbf{V} .
- 8) $\mu_i = s_i^2$, $i = 1, \dots, r$, sono gli autovalori della matrice $\mathbf{A} \mathbf{A}^T \in \mathbb{R}^{m,m}$ (i restanti $m - r$ autovalori sono nulli) e i corrispondenti autovettori formano la matrice ortogonale \mathbf{U} .
- 9) $\|\mathbf{A}\|_2 = s_1$.
- 10) Se $m = n$ e \mathbf{A} è simmetrica, allora $s_i = |\lambda_i|$, $i = 1, \dots, n$ e i vettori singolari destri e sinistri coincidono con gli autovettori di \mathbf{A} .

Osservazione

In virtù della proprietà 7), in teoria si potrebbe pensare di determinare i valori singolari di \mathbf{A} , calcolando gli autovalori della matrice simmetrica $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$. Questa procedura, come mostra l'esempio che segue, può però portare a una perdita di accuratezza.

Esempio

Consideriamo la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad |\varepsilon| < \sqrt{\epsilon_{ps}}$$

... continua esempio

Calcoliamo

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon^2 & 1 \\ 1 & 1 + \varepsilon^2 \end{pmatrix}$$

È facile verificare che gli autovalori di $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ sono $\lambda_1 = 2 + \varepsilon^2$ e $\lambda_2 = \varepsilon^2$; i valori singolari di \mathbf{A} sono allora $s_1 = \sqrt{2 + \varepsilon^2}$ e $s_2 = |\varepsilon|$.

In aritmetica finita con precisione di macchina ε_m , denotate con $\overline{\mathbf{A}}$ e $\overline{\mathbf{A}^T \mathbf{A}}$ le matrici di macchina associate ad \mathbf{A} e ad $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ rispettivamente, si ha

$$\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{A}, \quad \overline{\mathbf{A}^T \mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori di $\overline{\mathbf{A}^T \mathbf{A}}$ sono $\eta_1 = 2$ e $\eta_2 = 0$ e, di conseguenza, i valori singolari di $\overline{\mathbf{A}}$ sono $\sigma_1 = \sqrt{2}$ e $\sigma_2 = 0$. Pertanto, nella aritmetica fissata, σ_1 concorda con $\bar{s}_1 = \sqrt{2}$, mentre σ_2 non concorda con \bar{s}_2 .

Teorema

Sia $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ e sia

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T$$

la sua decomposizione ai valori singolari, con

$$s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_r > s_{r+1} = \dots = s_p = 0$$

e sia k un intero positivo minore o uguale a r . Indicando con

$$\mathbf{A}_k = \sum_{i=1}^k s_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T$$

e

$$\mathcal{B}_k = \{\mathbf{B} : \text{rango di } \mathbf{B} \text{ è } k\}$$

si ha

$$\min_{\mathbf{B} \in \mathcal{B}_k} \|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|_2 = \|\mathbf{A} - \mathbf{A}_k\|_2 = s_{k+1}$$

Il precedente teorema stabilisce due importanti risultati:

- la matrice \mathbf{A}_k rappresenta la migliore approssimazione in norma 2 di rango k della matrice \mathbf{A} ;
- s_{k+1} rappresenta la minima distanza in norma 2 della matrice \mathbf{A} dall'insieme delle matrici di rango k .

Descriviamo ora alcune importanti applicazioni della decomposizione ai valori singolari.

- **Applicazione 1. Calcolo del rango di una matrice**

La decomposizione ai valori singolari costituisce lo strumento più efficace per la determinazione del rango di una matrice.

Il rango di una matrice coincide con il numero dei suoi valori singolari diversi da zero, cioè se risulta

$$s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_r > s_{r+1} = \dots = s_p = 0,$$

allora **il rango di \mathbf{A} è r .**

Tuttavia, in precisione finita di calcolo, i valori singolari devono essere selezionati sulla base di una tolleranza *tol*; pertanto, si definisce **rango numerico**, il numero dei valori singolari maggiori di una tolleranza fissata.

Comandi Matlab

- `r = rank(A)` restituisce in `r` il rango della matrice `A` sulla base di una tolleranza di default, che dipende dalla matrice fornita in input e dalla precisione di macchina.
- `r = rank(A,tol)` restituisce in `r` il rango numerico della matrice `A`, calcolato come il numero dei valori singolari maggiori della tolleranza `tol`.

• Applicazione 2. Calcolo del condizionamento di una matrice

La decomposizione ai valori singolari costituisce uno strumento efficace per la determinazione del condizionamento spettrale di una matrice.

Sia \mathbf{A} una matrice di ordine n e di rango n , allora esistono due matrici ortogonali \mathbf{U} e \mathbf{V} tali che $\mathbf{A} = \mathbf{USV}^T$ dove \mathbf{S} è diagonale con elementi $(S)_{ii} = s_i > 0$, $i = 1, \dots, n$. Si ha

$$\begin{aligned}\|\mathbf{A}\|_2 &= \sqrt{\rho(\mathbf{A}^T \mathbf{A})} = \sqrt{\rho(\mathbf{VS}^T \mathbf{U}^T \mathbf{USV}^T)} = \sqrt{\rho(\mathbf{VS}^2 \mathbf{V}^T)} \\ &= \sqrt{\rho(\mathbf{S}^2)} = s_1\end{aligned}$$

Analogamente si dimostra che $\|\mathbf{A}^{-1}\|_2 = 1/s_n$. Pertanto,

$$K_2(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|_2 \|\mathbf{A}^{-1}\|_2 = \frac{s_1}{s_n}$$

● Applicazione 3. Risoluzione del sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

Dato il sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, con \mathbf{A} di dimensione n e non singolare, e nota la decomposizione $\mathbf{A} = \mathbf{USV}^T$, è possibile ottenere la soluzione \mathbf{x} mediante la risoluzione di un sistema diagonale e di due prodotti matrice-vettore:

$$\mathbf{USV}^T \mathbf{x} = \mathbf{b} \implies \mathbf{S} \underbrace{\mathbf{V}^T \mathbf{x}}_y = \mathbf{U}^T \mathbf{b} \implies \begin{cases} \mathbf{S} y = \mathbf{U}^T \mathbf{b} \Rightarrow y \\ \mathbf{V}^T \mathbf{x} = y \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{V} y \end{cases}$$

Il costo di tale algoritmo, quando occorre calcolare la decomposizione ai valori singolari, è all'incirca pari a $32/3n^3$ operazioni aritmetiche per n grande. Pertanto, avendo un costo di gran lunga superiore a quello richiesto dalla fattorizzazione $\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$, la decomposizione SVD non viene generalmente utilizzata per risolvere sistemi lineari. Tuttavia, essa risulta preferibile a $\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$ quando il sistema è mal condizionato e prossimo ad essere singolare.

- **Applicazione 4. Risoluzione di un sistema lineare sovradeterminato**

Si consideri il sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ con \mathbf{A} di dimensione $m \times n$, con $m \geq n$. Si supponga che il rango di \mathbf{A} sia uguale a $r \leq n$.

Si determina come soluzione del suddetto sistema, il vettore \mathbf{x}^* di minima norma e soluzione del seguente problema dei minimi quadrati

$$\|\mathbf{Ax}^* - \mathbf{b}\|_2 = \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2$$

Per calcolare \mathbf{x}^* verrà utilizzata la decomposizione ai valori singolari $\mathbf{A} = \mathbf{USV}^T$ della matrice \mathbf{A} .

Ricordando che, se \mathbf{U} è ortogonale $\|\mathbf{Uy}\|_2 = \|\mathbf{y}\|_2$, si ha:

$$\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2^2 = \|\mathbf{U}^T(\mathbf{Ax} - \mathbf{b})\|_2^2 = \|\mathbf{U}^T\mathbf{A}\mathbf{V}\mathbf{V}^T\mathbf{x} - \mathbf{U}^T\mathbf{b}\|_2^2 = \|\mathbf{S}\mathbf{y} - \mathbf{c}\|_2^2$$

con $\mathbf{y} := \mathbf{V}^T\mathbf{x}$ e $\mathbf{c} := \mathbf{U}^T\mathbf{b}$.

Tenendo conto che r è il numero dei valori singolari non nulli di \mathbf{A} , partizioniamo \mathbf{S} , \mathbf{y} e \mathbf{c} nelle seguenti forme:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{S}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{S}} \in \mathbb{R}^{r,r}$$

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_1, \mathbf{c}_1 \in \mathbb{R}^r, \quad \mathbf{y}_2 \in \mathbb{R}^{n-r}, \quad \mathbf{c}_2 \in \mathbb{R}^{m-r}$$

Allora risulta

$$\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2^2 = \|\mathbf{Sy} - \mathbf{c}\|_2^2 = \left\| \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{S}}\mathbf{y}_1 - \mathbf{c}_1 \\ -\mathbf{c}_2 \end{pmatrix} \right\|_2^2 = \|\tilde{\mathbf{S}}\mathbf{y}_1 - \mathbf{c}_1\|_2^2 + \|\mathbf{c}_2\|_2^2$$

Poiché solo il primo addendo dipende da $\mathbf{y} = \mathbf{V}^T \mathbf{x}$ si ha che $\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2^2$ è minimo se e solo se $\|\tilde{\mathbf{S}}\mathbf{y}_1 - \mathbf{c}_1\|_2^2$ è minimo.

Essendo $\tilde{\mathbf{S}}$ non singolare e diagonale, $\tilde{\mathbf{S}}\mathbf{y}_1 = \mathbf{c}_1$ ammette una e una sola soluzione \mathbf{y}_1^* , per la quale si ha $\|\tilde{\mathbf{S}}\mathbf{y}_1^* - \mathbf{c}_1\|_2^2 = 0$. Denotando con $(\mathbf{y}_1)_i$ le componenti di \mathbf{y}_1 e con \mathbf{u}_i la i -esima colonna di \mathbf{U} , e imponendo

$$\|\tilde{\mathbf{S}}\mathbf{y}_1 - \mathbf{c}_1\|_2^2 = \sum_{i=1}^r (s_i(\mathbf{y}_1)_i - \mathbf{u}_i^T \mathbf{b})^2 = 0,$$

si ricava

$$(\mathbf{y}_1^*)_i = \frac{\mathbf{u}_i^T \mathbf{b}}{s_i}, \quad i = 1, \dots, r$$

Fra tutti i vettori \mathbf{y} di lunghezza n con le prime r componenti coincidenti con quelle di \mathbf{y}_1^* , il vettore di minima norma euclidea \mathbf{y}^* è quello per cui le restanti $n - r$ componenti sono nulle.

In definitiva,

$$y_i^* = \begin{cases} \frac{\mathbf{u}_i^T \mathbf{b}}{s_i}, & i = 1, \dots, r \\ 0, & i = r + 1, \dots, n \end{cases}$$

Ricordando che $\mathbf{x} = \mathbf{V}\mathbf{y}$, il vettore soluzione nel senso dei minimi quadrati è

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{V}\mathbf{y}^* = \sum_{i=1}^r y_i^* \mathbf{v}_i$$

Si osservi che, poiché $\|\mathbf{x}^*\|_2 = \|\mathbf{y}^*\|_2$, \mathbf{x}^* ha norma euclidea minima.

Sia

$$\mathbf{S}^+ \in \mathbb{R}^{n,m} : (\mathbf{S}^+)_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{s_i}, & i \equiv j = 1, \dots, r \\ 0, & i \equiv j = r+1, \dots, n, \quad i \neq j \end{cases}$$

allora

$$\mathbf{y}^* = \mathbf{S}^+ \mathbf{U}^T \mathbf{b}$$

e

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{V} \mathbf{S}^+ \mathbf{U}^T \mathbf{b}$$

Posto

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{V} \mathbf{S}^+ \mathbf{U}^T$$

si ha quindi che la soluzione nel senso dei minimi quadrati e di minima norma del sistema sovradeterminato $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ è

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{A}^+ \mathbf{b}$$

Definizione

La matrice \mathbf{A}^+ è detta **pseudo-inversa di Moore-Penrose** oppure **inversa generalizzata** di \mathbf{A} .

Si osservi che se $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ e $\text{rank}(\mathbf{A}) = n$, $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^{-1}$.

Comando Matlab

`X = pinv(A)` restituisce in `X` la pseudo-inversa della matrice `A` a partire dalla sua SVD. I valori singolari al di sotto di una tolleranza di default (dipendente da `A`) sono trattati come zeri.

`X = pinv(A,tol)` restituisce in `X` la pseudo-inversa di `A` ottenuta ponendo uguali a zero i valori singolari al di sotto della tolleranza `tol`.

Osservazione

Nel caso di un sistema lineare mal condizionato, una procedura numerica che consente di ottenere una soluzione più accurata di quella che si ottiene, per esempio, con la fattorizzazione $\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$, consiste nel trascurare (annullare) i valori singolari più piccoli (al di sotto di una prefissata tolleranza), nell'approssimare la matrice \mathbf{A} con una matrice di rango inferiore e, infine, nel risolvere il risultante problema dei minimi quadrati.

Esempio

Consideriamo, per esempio, il sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ con matrice \mathbf{A} di Hilbert di ordine $n = 15$ e con termine noto \mathbf{b} definito in modo tale che la soluzione coincida con il vettore $\mathbf{x} = (1, \dots, 1)^T$.

Il condizionamento in norma spettrale del suddetto sistema è all'incirca 10^{17} .

L'errore in norma 2 associato alla soluzione, ottenuta mediante il metodo delle eliminazioni di Gauss con pivoting parziale, è superiore al 100%.

Invece, indicato con r il numero dei valori singolari più grandi per esempio di $\text{tol} = 10^{-12}$, se si procede approssimando \mathbf{A} con la matrice $\mathbf{A}_r = \sum_{i=1}^r s_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T$ di rango r e risolvendo il risultante sistema, l'errore in norma 2 associato alla soluzione è dell'ordine di 10^{-6} .

... continua esempio

Infatti con le seguenti istruzioni Matlab e il metodo delle eliminazioni di Gauss

```
>> n = 15;  
>> A = hilb(n);  
>> b = sum(A,2);  
>> x_gauss = A\b;  
>> u = ones(n,1);  
>> err_gauss = norm(u-x_gauss)/norm(u)
```

si ha

```
Warning: Matrix is close to singular or badly scaled. Results may be inaccurate.  
RCOND = 5.460912e-19.
```

```
err_gauss =  
6.1408e+00
```


... continua esempio

Invece con il seguente algoritmo

```
>> tol = 1.0e-12;
>> [U,S,V] = svd(A);
>> s = diag(S);
% s contiene i valori singolari (ordinati dal piu' grande al piu' piccolo) di A
ind_s = find(s<=tol);
% ind_s contiene le componenti dei valori singolari piu' piccoli di tol
r = ind_s(1)-1;
% r e' la componente dell'ultimo valore singolare piu' grande di tol
y = zeros(n,1);
y(1:r) = (U(:,1:r)'*b)./s(1:r);
x_svd = V*y
err_svd = norm(u-x_svd)/norm(u)
```

si ottiene un errore più piccolo:

```
err_svd =
    1.0667e-06
```

Si osservi che la soluzione `x_svd` si può calcolare anche scrivendo

```
x_svd = pinv(A,tol)*b.
```

- **Risoluzione di un sistema lineare sottodeterminato**

Si consideri il sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ con \mathbf{A} di dimensione $m \times n$, con $m < n$. Si supponga che il rango di \mathbf{A} sia uguale ad r e che \mathbf{A} ammetta la seguente decomposizione ai valori singolari $\mathbf{A} = \mathbf{USV}^T$.

Si ha

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \implies \mathbf{S} \underbrace{\mathbf{V}^T \mathbf{x}}_y = \mathbf{U}^T \mathbf{b} \implies \begin{cases} \mathbf{S} y = \mathbf{U}^T \mathbf{b} \\ \mathbf{V}^T \mathbf{x} = y \end{cases}$$

Riscrivendo \mathbf{S} nella forma

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{S}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{S}} \in \mathbb{R}^{r,r}$$

il sistema $\mathbf{S}\mathbf{y} = \mathbf{d}$, ove $\mathbf{d} := \mathbf{U}^T \mathbf{b}$, ammette come soluzione di norma euclidea minima il vettore

$$y_i^* = \frac{d_i}{s_i}, \quad i = 1, \dots, r, \quad y_i^* = 0, \quad i = r + 1, \dots, n.$$

Inoltre, per l'ortogonalità di \mathbf{V} , la norma euclidea di \mathbf{x} è minima se e solo se la norma euclidea di $\mathbf{y} = \mathbf{V}^T \mathbf{x}$ è minima, pertanto la soluzione \mathbf{x}^* del sistema assegnato è data da

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{V}\mathbf{y}^*.$$

Applicazione 3. Compressione di immagini

La capacità della decomposizione *SVD* di fornire informazioni su come ottenere approssimazioni di rango inferiore di una matrice assegnata, è utile in molteplici applicazioni.

Segnaliamo, ad esempio, il suo utilizzo negli algoritmi di compressione dei dati, in particolare, nella codifica di immagini.

Ogni foto può essere discretizzata decomponendo l'immagine in quadrettini e assegnando un livello di grigio ad ogni quadrettino. Imponendo, ad esempio, una griglia di dimensione 1000×1000 su una foto e assegnando un livello di grigio da 0 a 10, si ha una matrice (*blackness matrix*) di 1000000 interi.

... continua esempio

Sia \mathbf{A} la matrice che definisce i livelli di grigio. Mediante la decomposizione in valori singolari si vede se l'approssimazione di rango inferiore

$$\mathbf{A}_n = \sum_{i=1}^n s_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T$$

può rappresentare adeguatamente l'immagine. In caso affermativo, la matrice \mathbf{A}_n può essere codificata mediante $2n$ vettori \mathbf{u}_i e \mathbf{v}_i e i numeri s_i .

Se ad esempio è adeguato $n = 5$, per una matrice \mathbf{A} di dimensione 1000×1000 sarà sufficiente memorizzare $2 \cdot 5 \cdot 1000 + 5 = 10005$ valori anziché 1000000, con un risparmio di quasi il 99%.

... continua esempio

La matrice che genera la prima immagine nella slide che segue, occupa uno spazio di memoria pari a

$$271 \cdot 300 \cdot 8 \text{ bytes} = 650400 \text{ bytes}$$

Le immagini successive sono state ottenute approssimando la suddetta matrice con matrici di rango $n = 10, 30, 50$, rispettivamente.

In tal caso, l'occupazione di memoria è inferiore ed è data da

$$(271 \cdot n + 300 \cdot n + n) \cdot 8 \text{ bytes}$$

pari al 7%, 21% e 35% della memoria totale.

650400 bytes



n=10, 45760 bytes (7%)



n=30, 137280 bytes (21%)



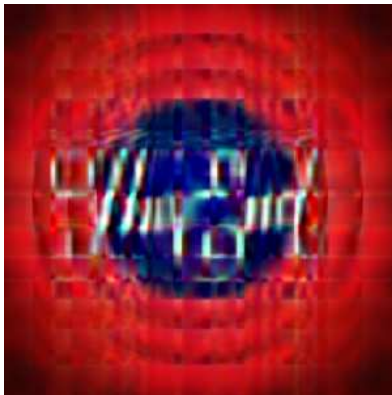
n=50, 228800 bytes (35%)



Esempio

Questa è l'approssimazione \mathbf{A}_n , di rango $n = 5$,

$n=5$



... continua esempio

della matrice **A** che genera la seguente immagine:

