24 - Teorema fondamentale del calcolo integrale

Integrazione per parti

Richiamo: abbiamo definito due quantità:

1) integrale definito di Riemann $\int_a^b f(x)\,dx$

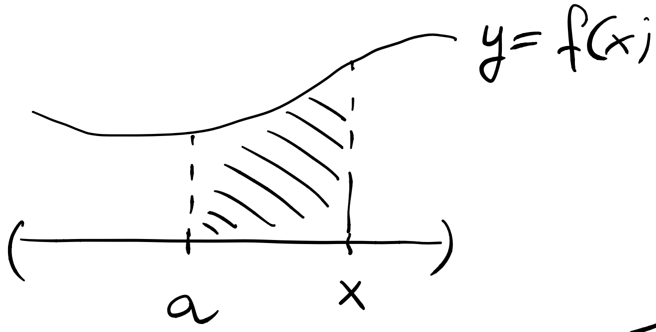
2) primitiva: $\int f(x)\,dx$

Definiamo una terza quantità legata all'integrale:

funzione integrale di f (di base a)

$$F_a(x) \stackrel{def}{=} \int_a^x f(t)\,dt$$

$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ integrabile, $a \in I$



I intervallo

$F_a(x) : I \to \mathbb{R}$

se $x > a$ e $f \geq 0$

$F_a(x)$ rappresenta l'area della regione tra l'asse x e il grafico di f, nell'intervallo (a, x)

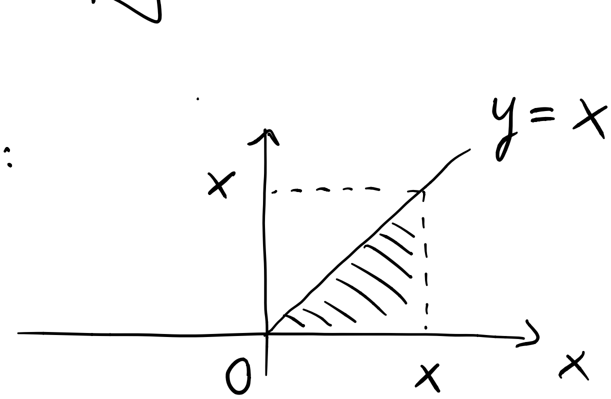
<u>es</u>: $f(t) = t \qquad I = \mathbb{R}$

calcoliamo: $F_0(x) \qquad a = 0$

<u>se $x = 0$</u>: $F_0(0) \overset{\text{def}}{=} \int_0^0 f(t)\,dt = 0$

$\Rightarrow F_0(0) = 0$

<u>se $x > 0$</u>:

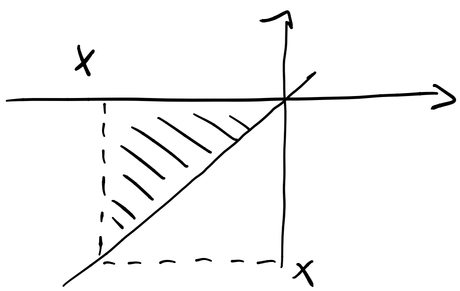


$$F_0(x) \overset{def}{=} \int_0^x t\,dt = \text{area triangolo rettangolo e isoscele di cateto } x$$

$$= \frac{x^2}{2}$$

<u>Se $x < 0$</u>:

$$F_0(x) \overset{def}{=} \int_0^{x<0} t\,dt$$



$$= -\underbrace{\int_x^0 t\,dt}_{-\text{ area triangolo rettangolo e isoscele di cateto } |x|}$$

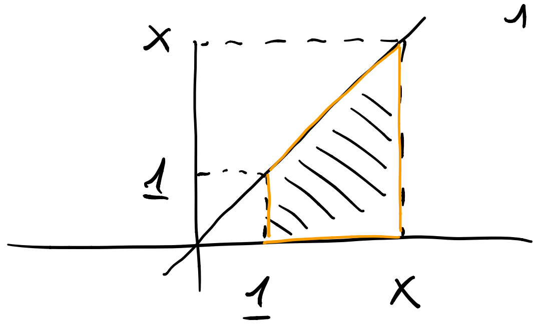
$$= -\left(-\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2}$$

$$\Rightarrow \quad F_0(x) = \frac{x^2}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

cambiamo base: $F_1(x) \overset{def}{=} \int_1^x t\,dt$ ← $a = 1$

$$F_1(1) = 0$$

se $x > 1$: $F_1(x) = \int_1^x t\,dt =$



= area trapezio rettangolo di basi 1 e x e altezza $x-1$

altezza trapezio

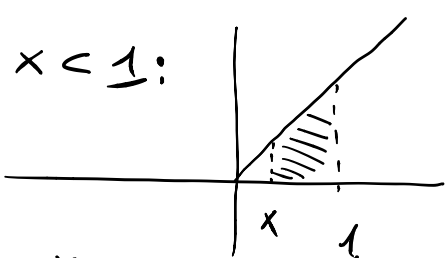
$$= \frac{(x+1)(x-1)}{2} = \frac{x^2-1}{2} = \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{F_0(x)} - \frac{1}{2}$$

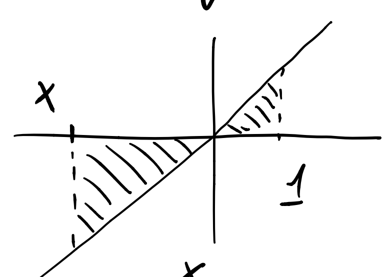
osserviamo che possiamo scrivere

$$F_1(x) = F_0(x) - \frac{1}{2}$$

esercizio: calcolare $F_1(x)$ negli altri casi

$0 < x < 1$:





: $x < 0$

$\int_1^x t\,dt$ ——— o ——— $\int_1^x t\,dt$

NOTA: f integrabile su un intervallo I

$a_1, a_2 \in I$ fissati

Allora $\exists\, c \in \mathbb{R}$ tale che

$$\boxed{F_{a_1}(x) = F_{a_2}(x) + c}$$

infatti:

$$F_{a_1}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{a_1}^{x} f(t)\,dt =$$

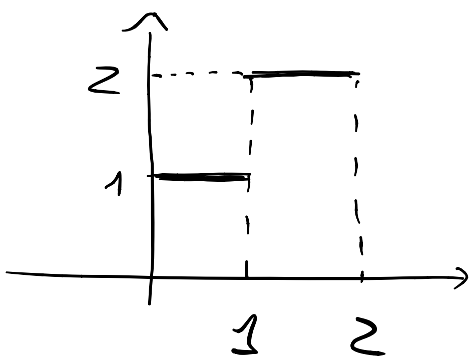
$$= \underbrace{\int_{a_1}^{a_2} f(t)\,dt}_{\stackrel{\text{def}}{=} c \in \mathbb{R}} + \underbrace{\int_{a_2}^{x} f(t)\,dt}_{\stackrel{\text{def}}{=} F_{a_2}(x)} = c + F_{a_2}(x)$$

Proprietà di $F_a(x)$:

f integrabile su un intervallo I
$a \in I$ fissato. Allora la funzione
integrale $F_a(x)$ è continua in I.

es:

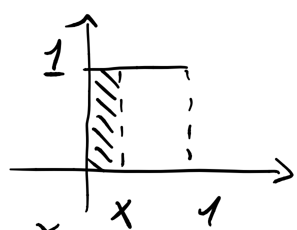
$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \le t \le 1 \\ 2 & \text{se } 1 < t \le 2 \end{cases}$$



f è integrabile su $[0,2]$

$F_0(x) = ?$

Se $0 < x < 1$:

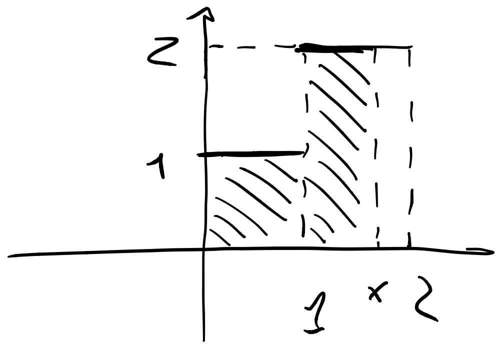


$$F_0(x) \overset{def}{=} \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x 1\,dt$$ = area rettangolo di base x e altezza 1

$\Rightarrow$ se $0 < x < 1 \Rightarrow F_0(x) = x$

<u>se $1 < x < 2$:</u>

$$F_0(x) \stackrel{def}{=} \int_0^x f(t)\,dt$$

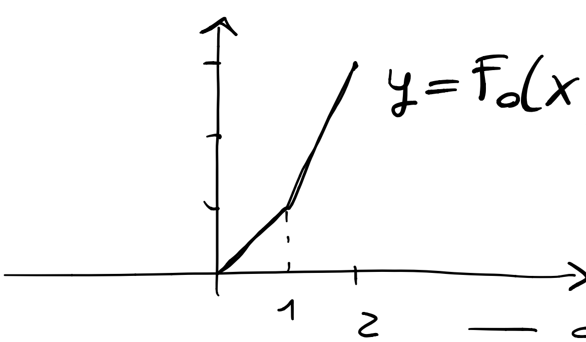


= area quadrato di lato 1 + area rettangolo di base $(x-1)$ e altezza 2

$= 1 + 2(x-1) = 2x - 1$

$$F_0(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 2x-1 & \text{se } 1 < x < 2 \end{cases}$$

$$F_0(1) = 1 = \lim_{x \to 1^-} (x) = \lim_{x \to 1^+} (2x-1)$$



$y = F_0(x)$ F_0 è continua in $[0,2]$

— o —

Teorema fondamentale del calcolo integrale

$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, I intervallo

fissiamo $a \in I$

def. la funzione integrale di f di base a

$$F_a(x) \stackrel{def}{=} \int_a^x f(t)dt$$

Allora F_a è derivabile

e $F_a'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$

cioè F_a è una primitiva di f

Dim: sia $x_0 \in I$

TESI: $\underbrace{F_a'(x_0)}_{\| def} = f(x_0)$

$$\lim_{h \to 0} \frac{F_a(x_0+h) - F_a(x_0)}{h}$$

Scriviamo il rapporto incrementale di F_a in x_0:

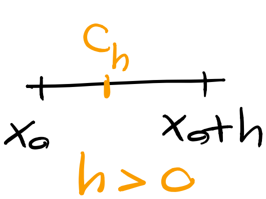
$$\frac{F_a(x_0+h)-F_a(x_0)}{h} = \frac{1}{h}\left(\underbrace{\int_a^{x_0+h} f(t)\,dt}_{F_a(x_0+h)} - \underbrace{\int_a^{x_0} f(t)\,dt}_{F_a(x_0)} \right)$$

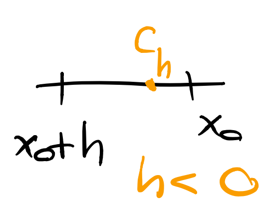
$$= \frac{1}{h}\left(\underbrace{\cancel{\int_a^{x_0} f(t)\,dt} + \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt}_{\int_a^{x_0+h} = \int_a^{x_0} + \int_{x_0}^{x_0+h}} - \cancel{\int_a^{x_0} f(t)\,dt} \right)$$

media integrale di f da x_0 a x_0+h

$$= \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt \overset{\text{def}}{=} m\,(f;\, x_0, x_0+h)$$

$(x_0+h)-x_0$





f continua per ipotesi

allora per il teorema della media integrale $\exists\, c_h$ tra x_0 e x_0+h

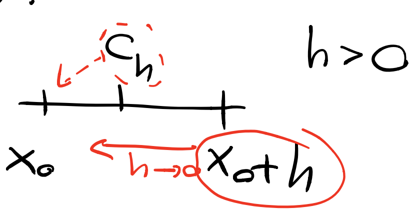
tale che $m(f; x_0, x_0+h) = f(c_h)$

Quindi, riassumendo, abbiamo ottenuto che $\exists\, c_h$ tra x_0 e x_0+h tale che

$$\frac{F_a(x_0+h)-F_a(x_0)}{h} = f(c_h)$$

$$\overset{\overset{x_0}{\uparrow}}{x_0} < c_h < \overset{\overset{x_0}{\uparrow}}{x_0+h}$$

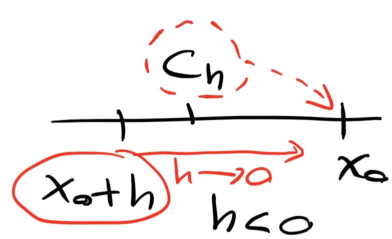
nel limite per $h \to 0$:



$$c_h \xrightarrow[h\to 0]{} x_0$$

f continua

$$\Rightarrow f(c_h) \xrightarrow[h\to 0]{} f(x_0)$$



$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{F_a(x_0+h)-F_a(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} f(c_h)$$

$$= f(x_0)$$

$\Rightarrow$ F_a è derivabile in x_0

e $F_a'(x_0) = f(x_0)$

per l'arbitrarietà di $x_0 \in I$ si conclude $F_a' = f$ su I

$\square$

<u>Conseguenza</u>: $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continua
$\uparrow$ intervallo

allora tutte le primitive di f su I sono della forma

$$F_a(x) + c \quad , \quad c \in \mathbb{R}$$

Formula fondamentale del calcolo integrale o formula di Torricelli - Barrow:

$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ f continua sull'intervallo I

G una primitiva di f su I.

Allora $\forall\, a, b \in I$

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a)}$$

<u>Dim</u>: fissiamo $x_0 \in I$ e definiamo la funzione integrale $F_{x_0}(x) \overset{def}{=} \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^{x_0} f(t)\,dt + \underbrace{\int_{x_0}^{b} f(t)\,dt}_{F_{x_0}(b)}$$

$$= -\int_{x_0}^{a} f(t)\,dt + F_{x_0}(b) =$$

$$= -F_{x_0}(a) + F_{x_0}(b)$$

dal teor. fondamentale del calcolo integrale

F_{x_0} è una primitiva di f

siamo su un intervallo I

$\Rightarrow$ F_{x_0} e G differiscono per una costante su I, cioè $\exists\, c \in \mathbb{R}$ tale che

$$F_{x_0}(x) \overset{(*)}{=} G(x) + c$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = F_{x_0}(b) - F_{x_0}(a)$$

$$\underset{(*)}{=} G(b) + \cancel{c} - \left(G(a) + \cancel{c} \right) = G(b) - G(a)$$

$\square$

Notazione:

$$\int_a^b f(t)dt = \Big[G(x) \Big]_{x=a}^{x=b} = G(x)\Big|_a^b$$

$$= G(x)\Big|_{x=a}^{x=b} = G(b) - G(a)$$

$\int_a^b f$

quindi per calcolare l'integrale definito determiniamo una primitiva G di f e poi calcoliamo $G(b) - G(a)$

<u>Quesito</u>: sia $I = \int_0^4 e^{\sqrt{x}}\,dx$

Allora

$\boxed{A}$ $I < -10$

$\boxed{B}$ $0 \leq I < 4$

$\boxed{C}$ $4 \leq I \leq 40$

$\boxed{D}$ $I > 40$

$\boxed{E}$ $-10 < I < 0$

$$f(x) = e^{\sqrt{x}} \gneqq 0 \Rightarrow I > 0$$

per cui escludiamo A e E

$$f(0) = e^{\sqrt{0}} = 1 \quad , \quad f(4) = e^{\sqrt{4}} = e^2$$

f è monotona crescente $\Rightarrow f(0) \leq f(x) \leq f(4)$

cioè $\quad 1 \leq e^{\sqrt{x}} \leq e^2 \quad \forall x \in [0,4]$

usiamo la monotonia degli integrali:

$$\underbrace{\int_0^4 1\,dx}_{x\Big|_0^4} \leq \int_0^4 e^{\sqrt{x}}\,dx \leq \underbrace{\int_0^4 e^2\,dx}_{e^2\,x\Big|_0^4}$$

$$\Rightarrow \quad 4 \leq I \leq 4e^2 < 36 < 40$$

$$\boxed{\begin{array}{l} e < 3 \\ \Rightarrow e^2 < 9 \\ \quad 4 \cdot 9 = 36 \end{array}}$$

$\Rightarrow \quad$ C è corretta

Richiamo: teor. della derivata del prodotto di 2 funzioni:

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$\Rightarrow f'g = (fg)' - fg'$$

$$\Rightarrow \int f'g = \underbrace{\int (fg)'}_{= fg} - \int fg'$$

$$\boxed{\int f'g = fg - \int fg'}$$

FORMULA DI INTEGRAZIONE PER PARTI

<u>esempio</u>: $\int x e^x \, dx$

qual è la scelta conveniente per f' e g?

$f'(x) = x$ e $g(x) = e^x$ oppure $f'(x) = e^x$ e $g(x) = x$

se scegliamo $f'(x) = e^x$, $g(x) = x$

$\Rightarrow f(x) = e^x$ e $g'(x) = 1$

$$\Rightarrow \int x e^x \overset{\text{PER PARTI}}{=} e^x x - \underbrace{\int e^x 1 \, dx}_{\text{più semplice}}$$

$$= x e^x - e^x + c$$

$$= (x-1) e^x + c$$

$$\Rightarrow \int x e^x \, dx = (x-1) e^x + c$$