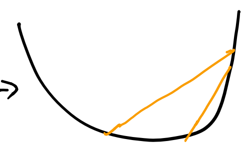
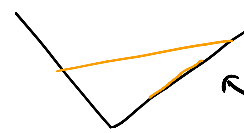
22 - Funzioni convesse e somme di Riemann (introduzione agli integrali definiti)

Richiamo:

STRETTAM. CONVESSA



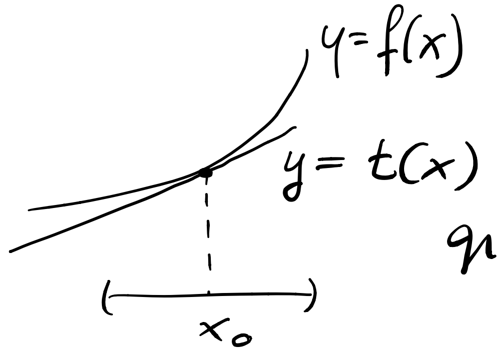


CONVESSA (NON strettamente)

f concava se $-f$ convessa

Richiamo

f convessa e derivabile:



$y=t(x)$ retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$

$$\Rightarrow \quad \boxed{f(x) \geq t(x)}$$

vale $\forall x \in I$ se f è convessa e derivabile

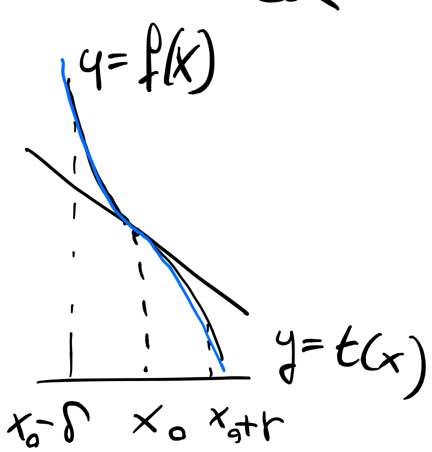
Punto di flesso:

se f è derivabile in x_0

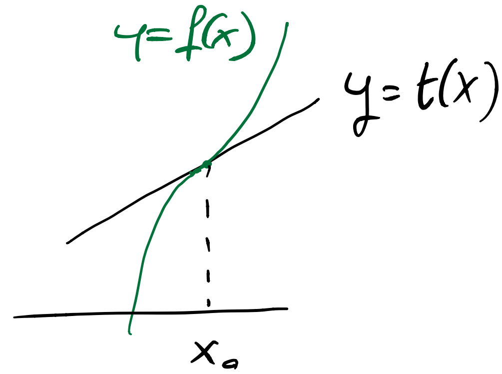
o x_0 punto a tangente verticale:

x_0 è punto di flesso se il grafico di f cambia concavità in x_0, cioè:

f è convessa in un intorno destro di x_0
e concava in un intorno sinistro di x_0
o viceversa



x_0 PUNTO di FLESSO DISCENDENTE



x_0 PUNTO DI FLESSO ASCENDENTE

Teorema studio della convessità di f in un intorno di x_0

f derivabile $n-1$ volte in $I_r(x_0)$
f derivabile n volte in x_0 $\quad n>2$
Supp. $f''(x_0) = 0 = \dots = f^{(n-1)}(x_0)$
$f^{(n)}(x_0) \neq 0$
Allora

se

1) m dispari:

- $f^{(m)}(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ è punto di FLESSO ASCEND.
- $f^{(m)}(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ è punto di FLESSO DISCENDENTE

2) m pari:

- $f^{(m)}(x_0) > 0 \Rightarrow f$ strett. CONVESSA
- $f^{(m)}(x_0) < 0 \Rightarrow f$ strett. CONCAVA

Vediamo come si arriva a questo risultato:
Formula di Taylor, ordine m, centro x_0 resto di Peano: sotto le ipotesi del teorema,

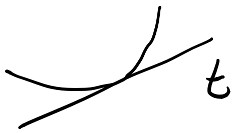
$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}_{t(x)} + \cancel{\frac{1}{2}\underbrace{f''(x_0)}_{=0}(x-x_0)^2}_{=0}$$

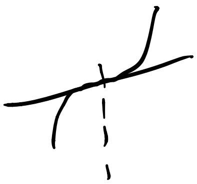
$$+ \frac{1}{m!} f^{(m)}(x_0)(x-x_0)^m + o((x-x_0)^m)$$

per $x \to x_0$

$$f(x) - t(x) = \frac{1}{m!} f^{(m)}(x_0)(x-x_0)^m + o((x-x_0)^m)$$

$$\underbrace{f(x)-t(x)}_{>0} = (x-x_0)^{(n)} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) + o(1)\right)}_{\text{ha la stessa segno di } f^{(n)}(x_0)}$$

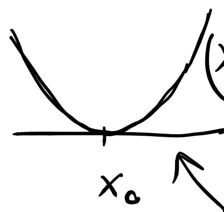




se n pari

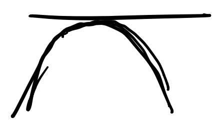
$n=2k$

$(x-x_0)^{2k}$

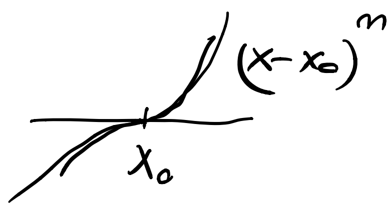


se $f^{(n)}(x_0)>0$

$$(x-x_0)^{2k}\underbrace{f^{(n)}(x_0)}_{<0}$$



se n dispari: $(x-x_0)^n$



Teorema studio della natura di un punto critico di f

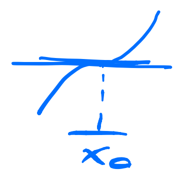
f definita e derivabile $n-1$ volte in $I_r(x_0)$

f derivabile n volte in x_0, $n \geq 2$

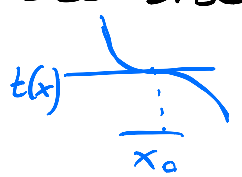
Supponiamo $f'(x_0) = 0 = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0)$

$f^{(n)}(x_0) \neq 0$

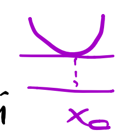
Allora:

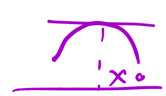


- n dispari
  - $f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ punto di FLESSO ASCENDENTE
  - $f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ punto di FLESSO DISCENDENTE



- n pari
  - $f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ punto di MINIMO RELATIVO
  - $f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ punto di MASSIMO RELATIVO





es: $f(x) = x + xe^{\sin x} - \sin^2 x \qquad x \to 0$

polinomio di Mclaurin ordine 3

$$f(x) = x + x\left(1 + (\sin x) + \frac{1}{2}(\sin x)^2 + \frac{1}{3!}(\sin x)^3 + o((\sin x)^3)\right) - \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)^2$$

$$= x + x\left(1 + x - \frac{x^3}{3!} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)^3\right) - x^2 + o(x^3)$$

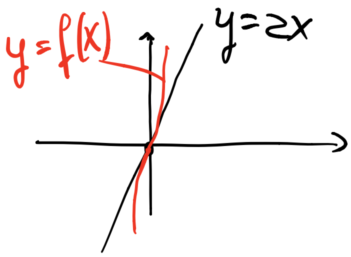
$$= x + x\left(1 + x - \frac{x^3}{3!} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{x^3}{3!}\right) - x^2 + o(x^3)$$

$$= 2x + x^2 + \frac{x^3}{2} - x^2 + o(x^3)$$

$$= \underbrace{2x} + \frac{x^3}{2} + o(x^3) \qquad \text{per } x \to 0$$

$f'(0) = 2 \qquad x = 0$ NON è punto critico

$f''(0) = 0, \quad \frac{f'''(0)}{3!} = \frac{1}{2} \Rightarrow f'''(0) = 3 > 0$



$x=0$ è punto di flesso ascendente

Esercizio:

$$f(x)=3-x+x^2+2\log(\cos(x))$$

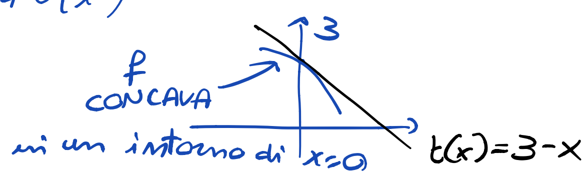
studiare f in un intorno di $x_0=0$

$$f(x)=3-x+x^2+2\log\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\right) \quad \text{per } x\to 0$$

$$=3-x+x^2+2\left(\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\right)^2\right)$$

$$=3-x+x^2-x^2+\frac{2}{4!}x^4-\frac{x^4}{4}+o(x^4)$$

$$=3-x-\frac{x^4}{6}+o(x^4) \quad \text{per } x\to 0$$



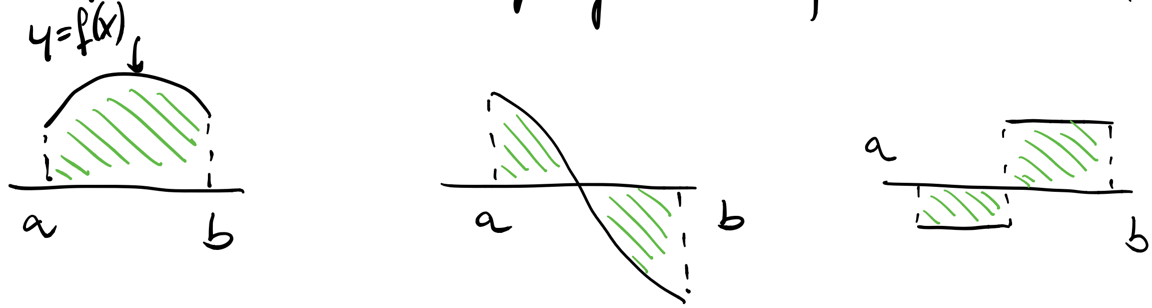
INTEGRALE

- DEFINITO: calcolo di aree di regioni piane
- INDEFINITO: calcolo delle primitive

INTEGRALE DEFINITO

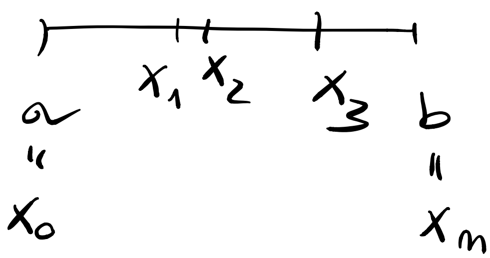
$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ~~continua~~ limitata

sottografico = regione del piano compresa tra il grafico di f e l'asse x



PROBLEMA: area sottografico?

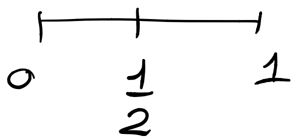
Partizione dell'intervallo $[a,b]$



$$\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$$

aggiungendo uno o più punti a una partizione $\mathcal{P}$ si ottiene una nuova partizione detta PIÙ FINE della precedente

<u>esempio:</u>

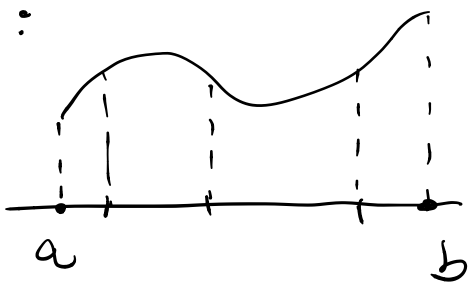


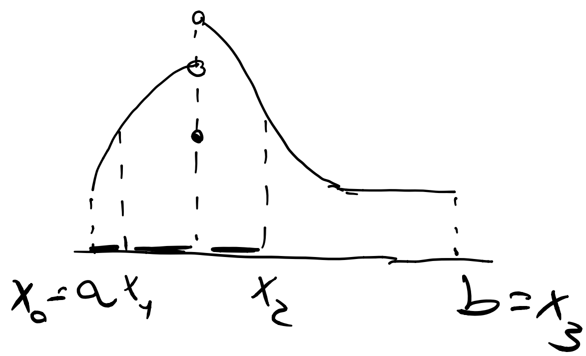
$$P_1 = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$$

$$P_2 = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\right\}$$

P_2 è più fine di P_1

<u>NOTA</u>:



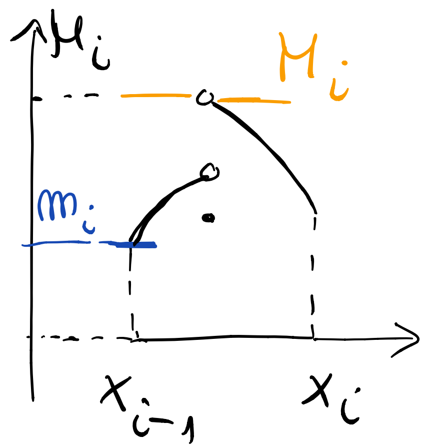


se $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ è LIMITATA

e $P = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\}$ è una partizione di $[a,b]$ allora

<u>esistono in $\mathbb{R}$</u>

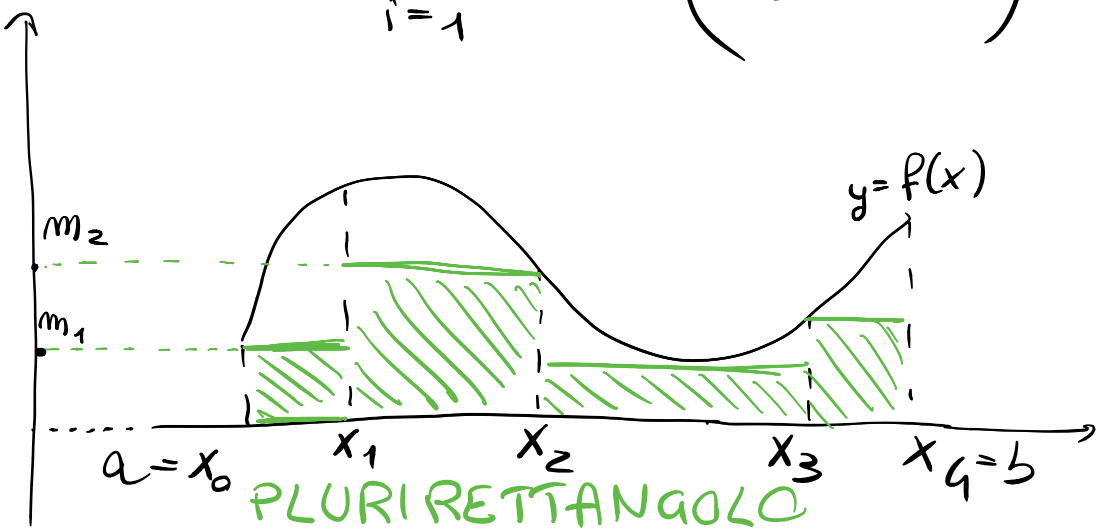
- $m_i \overset{def}{=} \inf\limits_{x \in (x_{i-1}, x_i)} f(x)$
- $M_i \overset{def}{=} \sup\limits_{x \in (x_{i-1}, x_i)} f(x)$



definisco

somma inferiore di Riemann corrispondente alla partizione P

$$s(P) \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$$

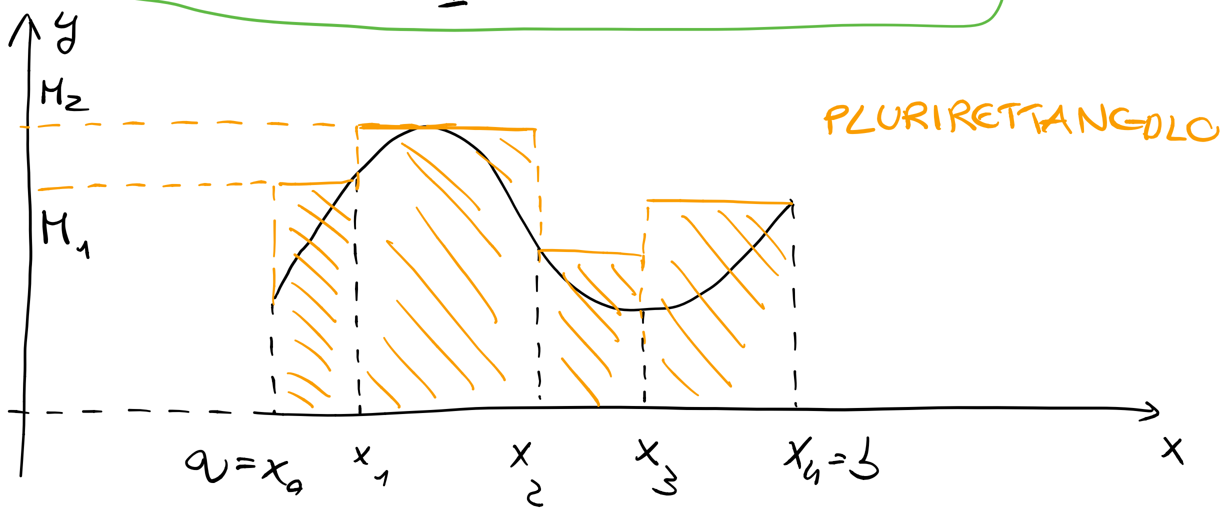


se $f(x) \geq 0 \ \forall x \in [a,b]$ allora
$s(P)$ rappresenta l'area del plurirettangolo inscritto nel sottografico di f

analogamente, si definisce

somma superiore di Riemann

$$S(P) \stackrel{def}{=} \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$$



se $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$ allora

$S(P)$ rappresenta l'area del plurirettangolo circoscritto al grafico di f