Esercitazione 12 Marzo 2018

Calcolo Dimensionale, stima degli errori e calcolo vettoriale

Esercizio 1

Determinare dimensioni e unità di misura della viscosità di un fluido data dalla formula

$$F = \eta S \frac{dv}{dz}$$

nel sistema MKS (Sistema Internazionale) e nel Sistema CGS (in cui le unità fondamentali per lunghezza, massa e tempo sono: centimetro, grammo, secondo) e il corrispondente fattore di ragguaglio.

Soluzione:

Posto η = F dz / S dv e tenuto conto che [F] = [M] [L] / [T^2], [S] = [L^2], [v] = [L] / [T] si ottiene [η] = [M] / [L] [T].
Pertanto nel sistema MKS la viscosità si misura in kg / m·s mentre nel sistema CGS l'unità di misura sarà il g / cm·s, detto Poise.
Infine, ricordando che 1 Kg = 10^3 g, e 1 m = 10^2 cm, si trova immediatamente il fattore di ragguaglio tra i due sistemi di unità di misura, ovvero 1 kg / m·s = 10 Poise.

Esercizio 2

G è la costante di gravitazione universale che compare nella legge di Newton

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

che dà l'intensità della forza gravitazionale tra due masse m_1 e m_2 poste a distanza *r*.

a) Trovare le unità di *G* nel Sistema Internazionale

b) Sapendo che il periodo di rivoluzione di un satellite artificiale su un'orbita circolare di raggio *r* attorno ad un pianeta di massa *M* è data da

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM}}$$

verificare la correttezza dimensionale di questa relazione.

Soluzione:

a) Posto G =F r^2 / m_1 m_2 e tenuto conto che [F] = [M] [L] / [T^2], si ottiene [G] = [L^3] / [M] [T^2].

b) Si deve verificare che la grandezza P ha le dimensioni di un tempo. Infatti, osservando che 2π è una quantità adimensionale si avrà
[P] = [$L^{3/2}$] [$M^{1/2}$] [T] / [$L^{3/2}$] [$M^{1/2}$] che semplificata da [P] = [T], cvd

Esercizio 3

Una variabile *f* è detta "funzione" delle variabili *x, y, z…* ed è indicata come *f(x, y, z…)*, se il suo valore dipende dal valore delle variabili *x, y, z…*, che sono dette "variabili indipendenti". Si calcoli come si propaga l'errore sulla funzione *f* a causa dell'incertezza sulla misura delle variabili indipendenti nei seguenti casi:

1 $f_4(w,v,t) = w^2 + \ln(v) + 3t$

2. $f_5(x,y,z) = a\ln(x) + \frac{b}{y} + \cos(z)$

Soluzione:

1. Se $f_4(w,v,t) = w^2 + \ln(v) + 3t$ avremo: $\frac{\partial f_4(w,v,t)}{\partial w} = 2w$, $\frac{\partial f_4(w,v,t)}{\partial v} = \frac{1}{v}$ e $\frac{\partial f_4(w,v,t)}{\partial t} = 3$.

   Quindi l'errore su $f_4(w,v,t)$ sarà $\Delta f_4(w,v,t) = 2w\cdot \Delta w + \frac{1}{v}\cdot \Delta v + 3\Delta z$

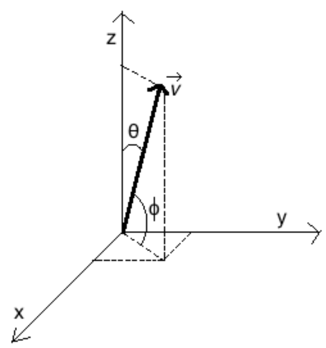
2. Se $f_5(x,y,z) = a\ln(x) + \frac{b}{y} + \cos(z)$ avremo: $\frac{\partial f_5(x,y,z)}{\partial x} = \frac{a}{x}$, $\frac{\partial f_5(x,y,z)}{\partial y} = -\frac{b}{y^2}$, $\frac{\partial f_5(x,y,z)}{\partial z} = -\sin(z)$.

   Quindi l'errore su $f_5(x,y,z)$ sarà $\Delta f_5(x,y,z) = \frac{a}{x}\cdot \Delta x - \frac{b}{y^2}\cdot \Delta y - \sin z\cdot \Delta z$

Esercizio 4

Supponiamo di avere un vettore che ha componenti $v_x = 2\ m$, $v_y = 3\ m$ e $v_z = 5\ m$, in un sistema di riferimento cartesiano con assi ortogonali. Calcolare:

a) il suo modulo
b) l'angolo formato dal vettore con l'asse *z*
c) l'angolo formato dal vettore con il piano *xy*



Soluzione:

a) Il vettore si scrive come:

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k} = (2\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k})m$$

e il suo modulo è dato da

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{38}m = 6.16m$$

b) l'angolo formato dal vettore con l'asse *z*

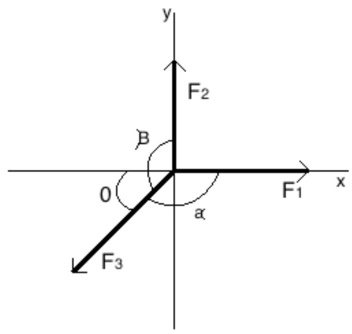
$v_z = v\cos\vartheta$ quindi $\cos\vartheta = \frac{v_z}{v}$ e $\vartheta = \cos^{-1}\left(\frac{v_z}{v}\right) = 35.74^0$

c) l'angolo formato dal vettore con il piano *xy* è $\phi = \frac{\pi}{2} - \vartheta = 54.26^0$

Esercizio 5

Tre forze coplanari $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ e $\vec{F}_3$ di modulo F_1= 3 *N*, F_2=4 *N* e F_3=5*N* rispettivamente sono applicate sullo stesso corpo. Calcolare l'angolo α tra $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_3$ e l'angolo β tra $\vec{F}_2$ e $\vec{F}_3$ sapendo che l'angolo tra $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ e 90^0 e la forza risultante delle tre forze è zero.

Soluzione:



dati F_1= 3 *N*, F_2=4 *N* e F_3=5*N* scriviamo la condizione

che la forza netta risultante sia nulla come:

$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$

Scrivendolo in componenti si ottiene:

$F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = 0$

$F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = 0$ ma dalle condizioni date dal problema sappiamo anche che:

1) $F_{2x} = 0$ e $F_{1y} = 0$

2) $F_{1x} = F_1$ e $F_{2y} = F_2$

Da queste equazioni possiamo dedurre:

3) $F_{3x} = -F_1$

4) $F_{3y} = -F_2$

Dalla figura è facile vedere che $tag\vartheta = \frac{F_2}{F_1}$ con θ angolo tra asse delle x ed $\vec{F}_3$

ne segue che $\vartheta = 0.927 rad = 53.13°$, $\alpha = 2\pi - \vartheta$ e $\beta = \frac{\pi}{2} + \vartheta$