esercizi di AlgLinGeo 2017/18

5 - SPAZI VETTORIALI

1. Sia $V = \{M \in \mathbf{R}^{2,2} | a_{11} + a_{12} + a_{21} = 0\}$; provare che V costituisce un sottospazio di $\mathbf{R}^{2,2}$; trovarne una base e la dimensione.

2. Sia $V = \mathbf{R}^{2,2}$. Siano V_1 e V_2 rispettivamente i sottoinsiemi di V costituiti dalle matrici triangolari superiori e dalle matrici simmetriche.
   (a) dimostrare che V_1 e V_2 sono sottospazi di V e trovarne una base;
   (b) trovare una base di $V_1 \cap V_2$.

3. Sia V il sottoinsieme di $\mathbf{R}_2[X]$, costituito dai polinomi di grado ≤ 2 che si annullano per $X = 3$. Dimostrare che si tratta di un sottospazio vettoriale; determinarne poi dimensione e una base.

4. Verificare che in $\mathbf{R}[X]$ i polinomi $2X + X^3, X + 1, X^2 + X, X^3 - 3X^2 + 1$ sono linearmente dipendenti e trovare una base per il sottospazio da essi generato.

5. Trovare una base di $\mathbf{R}^4$ che contenga sia una base di U che una base di V , dove

$$U = \{(x, y, z, t) | x - 2z + y = 0\}, V = \mathcal{L}((0, 2, 1, -1), (1, -2, 1, 1), (1, 2, 3, -1), (1, 2, 7, 1))$$

6. Sono dati i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbf{R}^4$: $U = \{((0, a, b, c) | a, b, c \in \mathbf{R}\}, W = \{((p, q, p, r) | p, q, r \in \mathbf{R}\}$;
   (a) trovare una base di $U, W, U \cap W, U + W$;
   (b) dire se $U + W$ è una somma diretta;
   (c) determinare (se possibile) un sottospazio T di $\mathbf{R}^4$ tale che $\mathbf{R}^4 = T \oplus U$.

7. Sia $V = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 | x + y = 0, z = 0, x + y + 2z = 0\}$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?
   (a)V è un sottospazio vettoriale di dimensione 2
   (b) V è un sottospazio vettoriale di dimensione 1
   (c) V contiene una base di $\mathbf{R}^3$.
   (d) V è unione di tre piani.

8. Sia V un sottospazio di $\mathbf{R}^3$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?
   (a) Esiste un sottospazio $W \subseteq \mathbf{R}^3$ tale che $dim(V + W) = dim(W)$.
   (b) Se $dim(V) = 2$, esiste un sottospazio $W \subseteq \mathbf{R}^3$ tale che $dim(W) = 2$ e $V \cap W$ contiene un solo vettore.
   (c) Esiste un sottospazio $W \subseteq \mathbf{R}^3$ tale che $V \cap W$ sia vuoto.
   (d) Per ogni sottospazio $W \subseteq \mathbf{R}^3$ l'insieme$V \cap W$ contiene infiniti vettori.

5 - SOLUZIONI

1. $V = \{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ -a_{11}-a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\}$ soddisfa le tre proprietà che caratterizzano un sottospazio vettoriale. Una base di V è per esempio $(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix})$, quindi $dim(V) = 3$.

2. $V_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$. Si verifica facimente che V_1 e V_2 soddisfano le tre proprietà che caratterizzano un sottospazio vettoriale. Come basi si trovano per esempio:

$$\mathcal{B}_{V_1} = (\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}), \mathcal{B}_{V_2} = (\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}); \ V_1 \cap V_2 = \{\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}\}$$

e una base è $(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$.

3. Il generico polinomio di grado ≤ 2 che si annulla per $X = 3$ è del tipo $-3(a_1 + 3a_2) + a_1X + a_2X^2$, ossia è il vettore di componenti $(-3(a_1 + 3a_2), a_1, a_2)$ rispetto alla base $(1, X, X^2)$. È facile verificare che V soddisfa le tre proprietà che caratterizzano un sottospazio vettoriale. Una base è per esempio $((-3, 1, 0), (-9, 0, 1))$; di conseguenza la dimensione è 2.

4. I polinomi dati, rispetto alla base $(1, X, X^2, X^3)$, hanno componenti corrispondenti alle righe della matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

utilizzando qualunque procedimento di riduzione per righe si ottiene che ha rango 3; di conseguenza i polinomi dati sono linearmente dipendenti e le righe non nulle della matrice ridotta forniscono le componenti degli elementi di una base del sottospazio da essi generato.

5. Risolvendo l'equazione $x - 2z + y = 0$ di U rispetto a una delle incognite, per esempio la x, si ricava il generico vettore $(-y + 2z, y, z, t)$ di U, al variare di $y, z, t \in \mathbf{R}$, quindi $dim(U) = 3$. Riducendo a scala la matrice che ha per righe i generatori di V si ha:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 7 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 6 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui $dim(V) = 3$ e il generico vettore di V può essere scritto come $(a, -2a+2b, a+b+2c, a-b+c)$, al variare di $a, b, c \in \mathbf{R}$. Per ricavare il sottospazio $U \cap V$ imponiamo a tale vettore di appartenere a U: sostituendo le sue componenti nell'equazione di U si ha la condizione $3a = -4c$ e di conseguenza il generico vettore di $U \cap V$ è $(-4c, 8c + 6b, 2c + 3b, -c - 3b)$; una base di $U \cap V$ è perciò $\mathcal{B}_{U\cap V} = ((0, 2, 1, -1), (-4, 8, 2, -1))$. Completando opportunamente $\mathcal{B}_{U\cap V}$, si ottiene per esempio $\mathcal{B}_U = ((0, 2, 1, -1), (-4, 8, 2, -1), (0, 0, 0, 1))$ e $\mathcal{B}_V = ((0, 2, 1, -1), (-4, 8, 2, -1), (0, 0, 2, 1))$. Per ottenere infine una base di $\mathbf{R}^4$, tenendo anche presente la formula di Grassmann, basta considerare i vettori

$$((0, 2, 1, -1), (-4, 8, 2, -1), (0, 0, 2, 1), (0, 0, 0, 1))$$

7. (b)

8. (a)