21- Taylor - 2

Richiamo: f di classe C^n in un intorno di x_0

polinomio di Taylor di f di ordine n e centrato in x_0:

$$T_n(x) \stackrel{def}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k$$

se $x_0 = 0$ $T_n(x)$ si chiama anche polinomio di McLaurin:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) x^k$$

- Sviluppo di Taylor / McLaurin di f

$$T_n(x) + o((x-x_0)^n).$$

- Formula di Taylor con resto di Peano:

$$f(x) = T_n(x) + o((x-x_0)^n)$$

per $x \longrightarrow x_0$

Proprietà: polinomio di McLaurin per una funzione PARI (DISPARI):

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \underbrace{f^{(k)}(0)} x^k \;:$$

f PARI $\Longrightarrow$ f' DISPARI

$f(-x) = f(x)$ $\qquad \underbrace{-f'(-x) = f'(x)}$

$\Longrightarrow f'(0) = 0$

f' DISPARI $\Longrightarrow$ f'' PARI

$f''(-0) = f''(0)$

$\Longrightarrow f^{(3)}$ DISPARI $\Longrightarrow f^{(3)}(0) = 0$

... tutte le derivate di ordine dispari si annullano in 0 se f è pari

$$\Longrightarrow f^{(2k+1)}(0) = 0$$

$\Longrightarrow$ il polinomio di McLaurin contiene solo potenze pari di x:

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{2} f''(0)x^2 + \frac{1}{4!} f^{(4)}(0)x^4 + \dots$$

PARI

Analogamente,
se f è dispari, allora il polinomio di McLaurin contiene solo potenze dispari di x

---

"Proprietà di contatto" tra f e T_n:

$$T_n(x) \stackrel{def}{=} f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0) \cdot (x-x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$

Calcolo $T_n(x_0)$:

$$T_n(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\overbrace{(x_0-x_0)}^{=0} + \dots$$
$$\dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) \cdot 0 = f(x_0)$$

$\Rightarrow$ in x_0 T_n e f hanno lo stesso valore: $\boxed{T_n(x_0) = f(x_0)}$

$$T_n'(x) = \Big(f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n \Big)'$$

$$= 0 + f'(x_0)\cdot 1 + \frac{1}{2} f''(x_0)\, 2(x-x_0)\cdot 1 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)\, n\,(x-x_0)^{n-1}\cdot 1$$

$$T_n'(x_0) = f'(x_0) + f''(x_0)\cdot 0 + \dots + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(x_0)\cdot 0 = f'(x_0)$$

$\Rightarrow$ anche le derivate prime di T_n e f hanno lo stesso valore in x_0

$$\boxed{T_n'(x_0) = f'(x_0)}$$

posso proseguire:

$$T_n''(x) = \dots$$

$$\boxed{T_n''(x_0) = f''(x_0)}$$

... fino alla derivata di ordine n:

quindi, in conclusione, la "proprietà di contatto" dice che:

$$\boxed{\begin{aligned} f(x_0) &= T_n(x_0) \\ f'(x_0) &= T_n'(x_0) \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x_0) &= T_n^{(n)}(x_0) \end{aligned}}$$

Esempio: sia $T_3(x) = x^2 + 5x^3$

il polinomio di McLaurin di f di ordine 3

$x_0 = 0$

Determinare $f'''(0)$:

la proprietà di contatto mi permette di dire che $f'''(0) = T_3'''(0)$:

quindi basta calcolare la derivata 3^a di T_3 in $x_0 = 0$:

$T_3(x) = x^2 + 5x^3$

$f(0) = T_3(0) = 0$

$T_3'(x) = 2x + 15x^2$ $\qquad f'(0) = T_3'(0) = 0$

$T_3''(x) = 2 + 30x$ $\qquad f''(0) = T_3''(0) = 2$

$T_3'''(x) = 30$ $\qquad f'''(0) = T_3'''(0) = 30$

$\Rightarrow f(0) = f'(0) = 0 \leftarrow$ 0 è punto critico di f

$f''(0) = 2$

$f'''(0) = 30$

non ho info sulle derivate successive di f in 0

Unicità del polinomio di Taylor

Se f è di classe C^n in un intorno di x_0

Sia $P_n(x)$ polinomio di grado $\leq n$ tale che $f(x) = P_n(x) + o\left((x-x_0)^n\right)$ per $x \to x_0$

Allora $P_n(x) = T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k$

commento dim:

$$T_n(x) + o(x-x_0)^n = f(x) \quad \text{per } x \to x_0$$

$$\Rightarrow \underbrace{T_n(x) - P_n(x)}\; = o\left((x-x_0)^n\right) \quad \text{per } x \to x_0$$

se per assurdo $T_n(x) \neq P_n(x)$

$T_n(x) - P_n(x)$ deve contenere un termine $\underbrace{\underset{\neq 0}{a}\,(x-x_0)^k}$ con $k \leq n$

che non è $o\left((x-x_0)^n\right)$ ASSURDO

<u>Esempio</u>: scrivere il polinomio di McLaurin di ordine 6 di

$$f(x) = e^{3x^2} - 1$$

---

se uso la definizione, devo calcolare

$$\sum_{k=0}^{6} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)\, x^k$$

LUNGO e CONTOSA!

Usiamo invece l'unicità, insieme al fatto che conosciamo lo sviluppo di McLaurin di e^t:

$$e^t = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(e^0)\, t^k = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 + \dots + \frac{1}{n!}t^n \qquad t \to 0$$

$$f(x) = e^{3x^2} - 1$$

$3x^2 \to 0$ per $x \to 0$

posso usare la sostituzione $t = 3x^2$ e usare lo sviluppo di e^t per scrivere quello di e^{x^2}:

$$\to e^{3x^2} = 1 + 3x^2 + \frac{1}{2}(3x^2)^2 + \frac{1}{3!}\underbrace{(3x^2)^3}_{x^6} + o(x^6)$$

mi posso fermare perché la richiesta è fino all'ordine 6

$$\underbrace{e^{3x^2} - 1}_{f(x)} = 3x^2 + \frac{9}{2}x^4 + \frac{27}{2 \cdot 3}x^6 + o(x^6)$$

per $x \to 0$

$$= \underbrace{3x^2 + \frac{9}{2}x^4 + \frac{9}{2}x^6}\; + \underline{\underline{o(x^6)}} \quad \text{per } x \to 0$$

$\Rightarrow$ per l'unicità, questo è lo sviluppo di McLaurin di f di ordine 6

$$\Rightarrow \boxed{T_6(x) = 3x^2 + \frac{9}{2}x^4 + \frac{9}{2}x^6}$$

domanda: calcolare $f^{(4)}(0)$:

sempre con $f(x) = e^{3x^2} - 1$

1° MODO (MOLTO CONTOSO): derivo 4 volte f e calcolo $f^{(4)}(0)$

2° MODO: uso la proprietà di contatto tra f e $T_6(x)$:

$$f^{(4)}(0) = T_6^{(4)}(0)$$

quindi derivo 4 volte il polinomio $T_6(x)$ e calcolo $T_6^{(4)}(0)$

(CONTOSO)

3° MODO:

$$T_6(x) = 3x^2 + \boxed{\frac{9}{2}x^4} + \frac{9}{2}x^6$$

$$= f(0) + f'(0)x + \underbrace{\frac{1}{2}f''(0)x^2} + \frac{1}{3!}f'''(0)x^3$$

$$+ \boxed{\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4} + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 + \frac{f^{(6)}(0)}{6!}x^6$$

i coefficienti delle potenze uguali devono coincidere (principio di identità dei polinomi)

$$\Rightarrow \frac{f^{(4)}(0)}{4!} = \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow f^{(4)}(0) = \frac{9}{2}\,4!$$

MESSAGGIO: sapendo che

$$f(x) = 3x^2 + \frac{9}{2}x^4 + \frac{9}{2}x^6 + o(x^6)$$

possiamo dire

$$f(0) = 0 = f'(0)$$

$$\frac{f''(0)}{2} = 3 \Rightarrow f''(0) = 6$$

$$f'''(0) = 0$$

$$\frac{1}{4!} f^{(4)}(0) = \frac{9}{2}$$

$$f^{(5)}(0) = 0$$

$$\frac{f^{(6)}(0)}{6!} = \frac{9}{2}$$

Sviluppi notevoli

Per calcolare lo sviluppo di Taylor/Mclaurin di una funzione f è utile conoscere gli sviluppi di Mclaurin delle funzioni elementari:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)\, x^k + o(x^n) \qquad x \to 0$$

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \qquad x \to 0}$$

$\sin(x)$: DISPARI $\Rightarrow$ compaiono solo potenze dispari di x

$f(x) = \sin x$ $\qquad$ $f(0) = 0$

$f'(x) = \cos x$ $\qquad$ $\boxed{f'(0) = 1}$

$f''(x) = -\sin x$ $\qquad$ $f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\cos x$ $\qquad$ $\boxed{f'''(0) = -1}$

$f^{(4)}(x) = \sin x = f(x)$ $\qquad$ $f^{(4)}(0) = 0$

$$\boxed{\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + o(x^{2n+2})}$$

il termine successivo è ... x^{2n+3}

$$\boxed{\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + o\left(x^{2n+1}\right)}$$

il termine successivo è x^{2n+2}

$$\log(1+x) = f(x) \qquad f(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} \qquad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -(1+x)^{-2} \qquad f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = -(-2)(1+x)^{-3} \qquad f'''(0) = 2$$

$$f^{(4)}(x) = -(-2)(-3)(1+x)^{-4} \qquad f^{(4)}(0) = -2\cdot 3$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\,(1+x)^{-n}$$

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{2\cdot 3}x^3 - \frac{2\cdot 3}{2\cdot 3\cdot 4}x^4 + \dots$$

$$\boxed{\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + o(x^n) \quad \text{per } x \to 0}$$

$$f(x) = (1+x)^{\alpha} \qquad \alpha \in \mathbb{R} \qquad f(0) = 1$$

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} \qquad f'(0) = \alpha$$

$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} \qquad f''(0) = \alpha(\alpha-1)$$

$$f'''(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-(n-1))(1+x)^{\alpha-n}$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3$$

$$+ \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n + o(x^n)$$

si pone $\boxed{\binom{\alpha}{n} \overset{def}{=} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots\alpha-(n-1)}{n!} \qquad \alpha\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}}$

$$(1+x)^{\alpha} = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\dots+\binom{\alpha}{n}x^n+o(x^n)$$

$f(x) = \sinh(x)$ DISPARI

$$\sinh(x) \overset{def}{=} \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

si può scrivere lo sviluppo di McLaurin di $\sinh(x)$
- usando la definizione
- usando gli sviluppi di e^x e e^{-x} e la formula che definisce $\sinh(x)$

$$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

è dispari $\Rightarrow$ solo potenze dispari di x

cosh(x) : pari ⇒ solo potenze pari di x

$$\cosh(x) = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$$

$$\boxed{\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \quad \text{per } x \to 0}$$

$$\boxed{\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})}$$

Per calcolare lo sviluppo di McLaurin di una funzione f, al posto della definizione, si usano gli sviluppi notevoli e la sostituzione

Es: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x) - \arctan(x)}{x^3}$

forma indeterminata "$\frac{0}{0}$"

- Landau: $\sin(x) - \arctan(x)$

  $= x + o(x) - x + o(x) = o(x) \Rightarrow$ non

  si risolve

- con L'Hopital? costoso!

- McLaurin:

  $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots$

$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \dots$

$\sin(x) - \arctan x = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots \right) -$

$- \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \dots \right) =$

$$= -\frac{x^3}{3!} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) = \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

per $x \to 0$

$$\frac{\sin(x) - \arctan(x)}{x^3} = \frac{\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}{x^3} \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{1}{6}$$

<u>Es</u>: $f(x) = \sin(x) - x\cos(x) - \frac{x^3}{3}$

calcolare parte principale e ordine di infinitesimo rispetto a $\varphi(x) = x$

<u>Landau</u>: $\sin(x) = x + o(x)$

$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ per $x \to 0$

$$f(x) = x + o(x) - x\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - \frac{x^3}{3}$$

$$= \cancel{x} + o(x) \cancel{- x} + \frac{x^3}{2} + o(x^3) - \frac{x^3}{3}$$

$= o(x)$? così non trovo la parte principale

McLaurin

$$\sin(x) = \boxed{x - \frac{x^3}{3!}} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \dots$$

$$\cos(x) = \boxed{1 - \frac{x^2}{2}} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \dots$$

$$f(x) = \sin(x) - x\cos(x) - \frac{x^3}{3} =$$

$$= \underbrace{x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)}_{\sin x} - x\Big(\underbrace{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)}_{\cos x}\Big) - \frac{x^3}{3}$$

$$= x - \frac{x^3}{6} - x + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$$

$$= x^3\underbrace{\left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)}_{=0} + o(x^4) = o(x^4)$$

ancora non basta!

Aggiungiamo un termine.

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \underbrace{o(x^6)}_{o(x^5)}$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \underbrace{o(x^5)}_{o(x^4)}$$

$$f(x) = \overbrace{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6)}^{\sin(x)} - x\overbrace{\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right)}^{\cos x}$$

$$- \frac{x^3}{3} =$$

$$= x^5 \underbrace{\left(\frac{1}{5!} - \frac{1}{4!}\right)}_{\neq 0} + \overbrace{o(x^6)}^{= o(x^5)}$$

quindi abbiamo ordine e parte principale

$\Rightarrow$ PARTE PRINCIPALE $\left(\frac{1}{5!} - \frac{1}{4!}\right) x^5$

ORDINE 5

$$f(x) = -\frac{1}{30} x^5 + o(x^6) \quad \text{per } x \to 0$$

ho un'info su $f^{(6)}(0)$?

se $f^{(6)}(0) \neq 0$ avrei il termine

$$\frac{1}{6!} f^{(6)}(0) x^6 \neq o(x^6) \Rightarrow \boxed{f^{(6)}(0) = 0}$$

Es: sviluppo di McLaurin di

$f(x) = \sqrt{1+x}\ e^x$ al secondo ordine $n=2$

(caso del prodotto di 2 funzioni elementari)

$$e^x = \underbrace{1 + x + \frac{x^2}{2}}\ \underbrace{+ \frac{x^3}{3!} + \dots}$$

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \overbrace{\frac{1}{2!}\,\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}^{-\frac{1}{8}} x^2 + \dots$$

$$\left[\ (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 \right.$$

$$\left. \alpha = \frac{1}{2}\ \right]$$

dato che l'esercizio chiede lo sviluppo fino all'ordine 2, e la funzione f è un prodotto, è sufficiente scrivere gli sviluppi fino all'ordine 2:

$$f(x) = \sqrt{1+x}\; e^{x} = \left(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+o(x^2)\right)\left(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)$$

$$= 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$$

trascuro le potenze maggiori di 2 perché la richiesta è polinomio fino all'ordine 2

$$= 1+\frac{3}{2}x+\frac{7}{8}x^2+o(x^2)$$

Es: sviluppo di McLaurin di ordine 2 di $f(x) = e^{2x+3}$

$$e^{t} = 1+t+\frac{t^2}{2}+o(t^2) \quad \text{per } t \to 0$$

$$\cancel{\Rightarrow} \quad e^{2x+3} = 1+(2x+3)+\frac{(2x+3)^2}{2}+o\left((2x+3)^2\right)$$

FALSO

non posso fare la sostituzione

$t = 2x+3$ perché

$2x+3 \longrightarrow 3$ per $x \to 0$

$$e^{2x+3} = e^{2x} e^{3} \underset{\substack{\uparrow \\ t=2x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0}}{=} e^{3}\left(1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2} + o(x^2)\right)$$

Γ $e^{\sin x}$ $x \to 0$

$$e^{\cos x} \neq 1 + \cos x \quad \ldots$$

$$e^{(\cos x - 1)+1} = e \, e^{(\cos x)-1}$$

$$\cos x = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} \ldots\right)$$

$$e^{\cos x} = e^{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} \ldots} = e \, e^{\overbrace{\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} \ldots\right)}^{t \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0}}$$

<u>esercizio</u>: $f(x) = x + x e^{\sin x} - \sin^2 x$

sviluppo di McLaurin di ordine 3 e dedurre $f'''(0)$

Richiamo: formula di Taylor con resto di Peano

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k + o\left((x-x_0)^n\right)$$

Richiamo: 2ª formula dell'incremento finito:

Teor. LAGRANGE

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua su $[a,b]$
derivabile su (a,b)

$\Rightarrow \exists\, c \in (a,b)$: $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

f è derivabile su un intervallo I
$x, x_0 \in I \Rightarrow \exists\, c$ tra x e x_0
tale che

$$\boxed{f(x) - f(x_0) = f'(c)(x-x_0)}$$

2ª formula dell'incremento finito

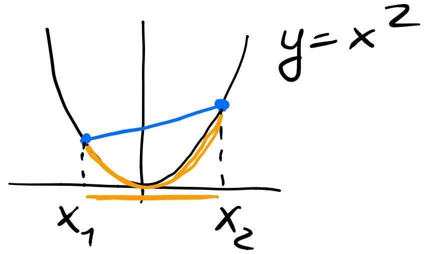
Formula di Taylor con resto di Lagrange:

f di classe C^n in un intorno I di x_0
e f è derivabile $n+1$ volte in $I \setminus \{x_0\}$
allora $\forall\ x \in I \setminus \{x_0\}$
$\exists$ c tra x e x_0 tale che

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k}_{\text{polinomio di Taylor}} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{n+1}(x-x_0)^{n+1}}_{\text{RESTO DI LAGRANGE}}$$

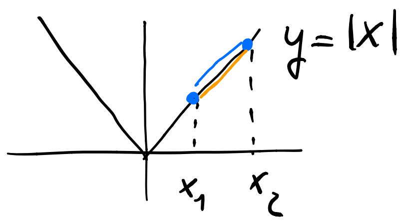
Funzioni convesse

es:



STRETT. CONVESSA

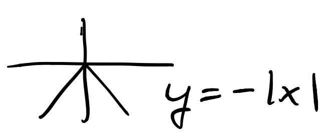
una funzione f definita su un intervallo I è CONVESSA se $\forall\, x_1, x_2 \in I$ distinti, il grafico di $f|_{[x_1, x_2]}$ sta "sotto" il segmento che unisce $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$

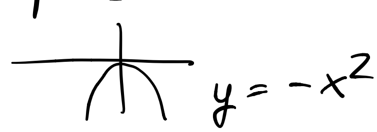


CONVESSA

f è strettamente convessa se il grafico di f non ha tratti rettilinei

f concava se $-f$ è convessa





CONCAVA

in formule: f è convessa in I

se $\forall\ x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2$ si ha

$$f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

$\forall x \in (x_1, x_2)$

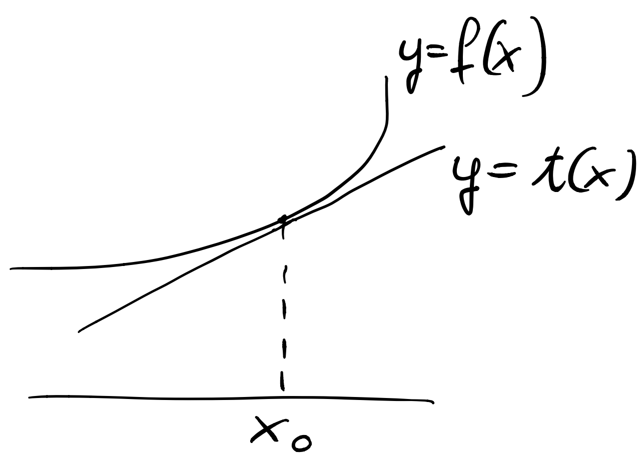
$<$ strett. convessa

$\geq$ concava

$>$ strett. concava

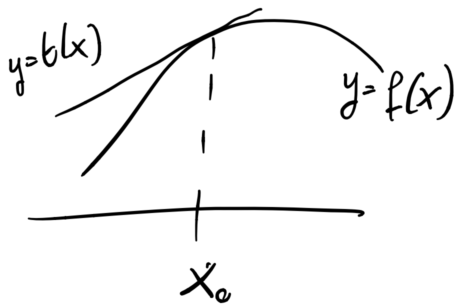
NOTA: se $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ convessa e derivabile in $x_0 \in I$

$\Longrightarrow f(x) \geq t(x)$ dove



$t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$

retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$



$$\boxed{\begin{array}{l} f \text{ concava in } I \\ \quad \Downarrow \text{ e deriv. in } x_0 \\ t(x) \geq f(x) \quad \forall x \in I \end{array}}$$
