03 - Potenze e radici in $\mathbb{R}$

- potenze a esponente intero:

$a \neq 0$, $a \in \mathbb{R}$

$n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ $\quad a^n = \underbrace{a \cdot \ldots a}_{n \text{ volte}}$

$$\left[a^1 \overset{def}{=} a, \quad a^2 = a \cdot a, \quad a^3 = a^2 \cdot a \right]$$

$$a^0 \overset{def}{=} 1$$

$$a^{-n} \overset{def}{=} \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$$

proprietà potenze:

1] $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

2] $(a^m)^p = a^{mp}$

3] $a^n b^n = (ab)^n$, $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

4] $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

proprietà di monotonia:

1] $a^n > b^n \iff a > b$

2] $\left.\begin{array}{l} a^p > a^n \\ \text{se } a > 1 \end{array}\right\} \iff p > n$

Problema:

Dato $a \in \mathbb{R}$, trovare x:

$$x^n = a \qquad n \in \mathbb{N}, \; n \geq 1$$

Γ $a = 0$ $\qquad x^n = 0$

se $n = -1$ $\qquad x^{-1} = 0$ NON HA SOL $\lrcorner$

$$\boxed{\begin{array}{l} a > 0, \quad n \in \mathbb{N}, \; n \geq 1 \\ \quad x^n = a \\ \sqrt[n]{a} \text{ è la soluzione positiva} \end{array}}$$

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

caso $a < 0$

$$x^n = a$$

n dispari $\Rightarrow \exists$ sol. $x = -\sqrt[n]{-a}$

$= \sqrt[n]{a}$:

$$x^n = \left(-\sqrt[n]{-a}\right)^n = \overset{\text{DISPARI}}{(-1)^n}\left(\sqrt[n]{-a}\right)^n$$

$$= (-1)(-a) = a$$

$\left.\begin{array}{l} n \text{ pari} \\ a < 0 \end{array}\right\}$: $x^n = a$ non ammette soluzioni

$\sqrt{-3}$ NON ESISTE in $\mathbb{R}$

$\sqrt[6]{-1}$ NON ESISTE IN $\mathbb{R}$

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

- potenze di esponente razionale

$a > 0 \qquad p, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$a^{\frac{p}{n}} \overset{\text{def}}{=} \sqrt[n]{a^p}$$

- potenze di esponente reale:

$a > 1, \quad \underline{r \in \mathbb{R}}$

$$\boxed{a^r \overset{\text{def}}{=} \sup \{ a^q : q \in \mathbb{Q}, q \leq r \}}$$

$$3^{\sqrt{2}} \overset{\text{def}}{=} \sup \left\{ 3^{\frac{m}{k}} : \begin{array}{l} m, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \\ \text{coprimi} \\ \frac{m}{k} < \sqrt{2} \end{array} \right\}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} 0 < a < 1 : \\ a^r \overset{\text{def}}{=} \underbrace{\left(\frac{1}{a}\right)}_{>1}^{-r \in \mathbb{R}} \end{array}}$$

$$a^r = a^{-(-r)} = (a^{-1})^{-r} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-r}$$

D : a^{b^c} è ben definito? NO

$a, b, c \in \mathbb{N}$

2^{2^3}

$(2^2)^3 = 4^3 = 64$

$\neq$

$2^{(2^3)} = 2^8 = 256$

$(-2)^3 = (-1)^3\ 2^3 = -8$ ✓

$(-2)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{(-2)^3}$ NO

es: $1 < \left(\frac{1}{9}\right)^{2x-3} \leq 27$

$$3^0 < \left(3^{-2}\right)^{2x-3} \leq 3^3$$

$$0 < -2(2x-3) \leq 3$$

$$0 < -4x+6 \leq 3$$

$$\begin{cases} -4x > -6 \\ -4x+6 \leq 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x < \frac{3}{2} \\ 4x \geq 3 \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{3}{4} \leq x < \frac{3}{2}}$$

Nota: con le potenze si definiscono due tipi di problemi:

fissato

$x^p = b$

incognita

1 RADICE p-esima

2 LOGARITMO in base a

incognita

$\boxed{a^x = b}$

fissato

Per $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$
esiste sempre un'unica soluzione
$x \in \mathbb{R}$ tale che $a^x = b$
e si denota con $x = \log_a b$

Proprietà dei logaritmi

(1) $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$

[infatti: poniamo $z = \log_a (xy)$
$z_1 = \log_a x$, $z_2 = \log_a y$. Allora
$a^z = xy = a^{z_1} a^{z_2} = a^{z_1 + z_2}$
$\Leftrightarrow$ $z = z_1 + z_2$]

(2) $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

(3) $\log_a (x^k) = k \log_a x$

$$(4)\quad \log_b x = (\log_b a)(\log_a x)$$

infatti:

poniamo $\underbrace{z = \log_b x}_{b^z = x}$, $\underbrace{z_1 = \log_b a}_{b^{z_1} = a}$, $\underbrace{z_2 = \log_a x}_{a^{z_2} = x}$

allora $b^z = x = a^{z_2} = (b^{z_1})^{z_2} = b^{z_1 z_2}$

$\iff z = z_1 z_2$

$\iff \log_b x = (\log_b a)(\log_a x)$

osserviamo che la formula (4)

si può riscrivere $\dfrac{\log_b x}{\log_b a} = \log_a x$

<u>Notazione</u>: $\log_e = \log$ OPPURE $\ln$

$\log_{10} = \mathrm{Log}$

Es: dimostrare le proprietà dei logaritmi

---

es: $\log_{\frac{1}{2}}(8-2x^2) \geq -1$

$= \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)$

$\log_{\frac{1}{2}} 2$

$$\begin{cases} 8-2x^2 > 0 \\ 8-2x^2 \leq 2 \end{cases}$$

$x^2 < 4$

$|x| < 2$

$-2 < x < 2$

...

sol. $\sqrt{3} \leq |x| < 2$

$\sqrt{ab} \overset{?}{=} \sqrt{a}\sqrt{b}$ NO

IPOTESI $ab \geq 0$

$a = -1$

$b = -2$

$ab = 2$ $\quad \cancel{\sqrt{2} = \sqrt{-1}}\ \sqrt{-2}$

$\sqrt{ab} = \sqrt{|a|}\sqrt{|b|}$ CORRETTO

—— ∘ ——

Def "n fattoriale" $n!$

$n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{\begin{array}{lll} n = 0 & 0! \overset{def}{=} 1 \\ n \geq 1 & n! \overset{def}{=} 1 \cdot 2 \ldots \cdot n \end{array}}$$

es: $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 3! \cdot 4 = 24$

$= 2! \cdot 3 \cdot 4$

$$\boxed{(n+1)! = n! \cdot (n+1)}$$

NOTA: $n!$ rappresenta il numero di modi in cui è possibile disporre in ordine n oggetti distinti es: $\sqcup\sqcup\sqcup$ $\quad a, b, c$

1) a, b, c $\quad$ 3) b, a, c $\quad$ 5) c, a, b

2) a, c, b $\quad$ 4) b, c, a $\quad$ 6) c, b, a

3 elementi $\rightsquigarrow$ $3! = 6$ modi di disporli in ordine

---

Def. coefficiente binomiale

$n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ tale che $1 \leq k \leq n$

$$\boxed{\binom{n}{k} \overset{\text{def}}{=} \frac{n!}{k!\,(n-k)!}}$$

coeff. binomiale

"n su k"

$$\text{es: } \binom{3}{2} = \frac{\overset{=\cancel{2!}\,3}{3!}}{\cancel{2!}\,(3-2)!} = \frac{6}{2 \cdot 1} = 3$$

$3 = n$

$2 = k$

NOTA

il coefficiente binomiale rappresenta il numero di sottoinsiemi di k elementi ottenibili a partire da un insieme di n elementi

es: $\{a, b, c\}$ $n=3$

Quanti sottoinsiemi da due elementi posso ottenere?

$k=2$

$\{a,b\}, \{b,c\}, \{c,a\}$

3 sottoinsiemi

$\binom{3}{2} = 3$

Formula del binomio $\quad n \geq 2$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$= \underbrace{\overbrace{\binom{n}{0} a^{n-0} b^0}^{=a^n}}_{k=0} + \underbrace{\binom{n}{1} a^{n-1} b^1}_{k=1} + \ldots$$

$$\ldots + \underbrace{\overbrace{\binom{n}{n} a^{n-n} b^n}^{=b^n}}_{k=n}$$

$$\binom{n}{0} = \frac{\cancel{n!}}{0!\,\cancel{(n-0)!}} = 1$$

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\,(n-n)!} = 1$$

NOTA: i coefficienti binomiali si possono ottenere dal triangolo di TARTAGLIA

			1		1			
		1		2		1		
	1		3		3		1	
1		4		6		4		1

⋮

$(a+b)^1 = 1a + 1b$

$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$

$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$

$(a+b)^4 = \ldots$