Esercitazioni del 26 Marzo

Dinamica del punto materiale

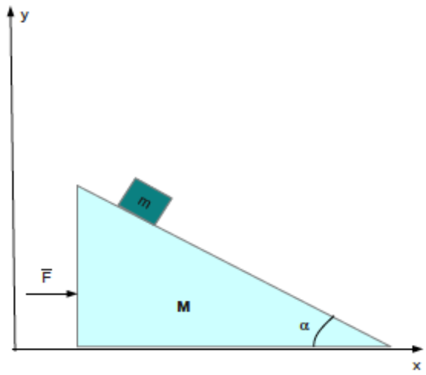
Esercizio 1

Un corpo di massa M e della forma riportata in figura e con un angolo di inclinazione α si trova su un piano orizzontale. Un massa m è sulla superficie inclinata del corpo di massa M e sulla massa M è applicata una forza di intensità F come mostrato in figura. Assumiamo che non ci sia attrito tra m e M e nemmeno tra il corpo di massa M e il piano orizzontale.

Determinare il modulo della forza F tale da tenere la massa m ferma rispetto al corpo di massa M.

Dati: M=100kg; m=10kg; $\alpha=30^0$

Soluzione es. 1



Consideriamo come sistema di riferimento quello riportato nella figura a destra con asse delle x coincidente con il terreno e asse delle y perpendicolare ad x.

Possiamo utilizzare la II legge di Newton in componenti per le diverse forze che agiscono su M.

$$\begin{cases} M\ddot{x}_M = F - Nsen\alpha \\ M\ddot{y}_M = -Mg - N\cos\alpha + R \end{cases}$$

Dove R rappresenta la forza normale che agisce su M a causa del contatto con il terreno e N è la normale tra M e la massa m.

Per quanto riguarda le forze agenti su m possiamo scrivere:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_m = Nsen\alpha \\ m\ddot{y}_m = -mg + N\cos\alpha \end{cases}$$

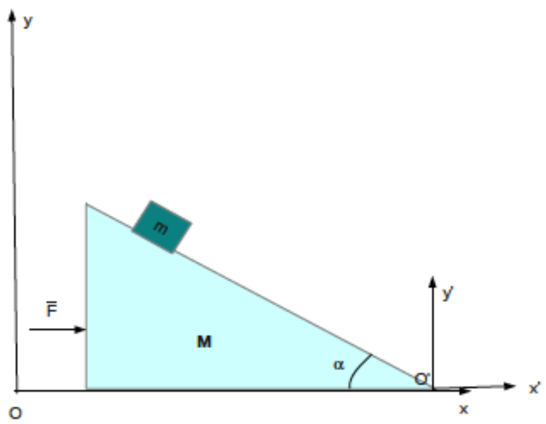
Quindi abbiamo in totale un sistema di 4 equazioni che si riduce ad un sistema di 3 equazioni visto che la massa M è in equilibrio lungo l'asse del y quindi $M\ddot{y}_M = 0$

$$\begin{cases} M\ddot{x}_M = F - Nsen\alpha \\ m\ddot{x}_m = Nsen\alpha \qquad\qquad (\#) \\ m\ddot{y}_m = -mg + N\cos\alpha \end{cases}$$

In tutto ho 5 incognite e 3 equazioni quindi il sistema non è risolvibile. Scegliamo dunque un diverso sistema di riferimento come riportato nella figura sottostante in cui consideriamo un sistema di coordinate (x', y') che si muove in modo solidale con la massa M. L'asse x' è lungo la base la corpo di massa M con asse delle x' crescenti da sinistra verso destra, l'asse dell y' è perpendicolare a x' e l'origine O' coincide con l'estremità inferiore destra di M.

In questo sistema di riferimento M è fermo
e la massa m si muove con una velocità che ha le

seguenti componenti:



$$\begin{cases} v'_x = v' \cos\alpha \\ v'_y = -v' \sin\alpha \end{cases}$$

Da cui ricaviamo che:

$$\frac{v'_y}{v'_x} = -tg\alpha \Rightarrow \dot{y}'_m = -tg\alpha \cdot \dot{x}'_m$$

e se deriviamo una volta rispetto al tempo otteniamo

$$\ddot{y}'_m = -tg\alpha \cdot \ddot{x}'_m \qquad (*)$$

Inoltre possiamo scrivere le relazioni che legano le accelerazioni della massa m nel sistema di riferimento in moto e in quello fermo

$$\begin{cases} \ddot{x}_m = \ddot{x}_{O'} + \ddot{x}'_m \\ \ddot{y}_m = \ddot{y}_{O'} + \ddot{y}'_m \end{cases}$$

dove $\ddot{y}_{O'} = 0$ perchè il moto dell'origine nel sistema di riferimento in moto lungo y è nullo e $\ddot{x}_{O'} = \ddot{x}_M$ perchè il moto dell'origine avviene con la stessa accelerazione della massa M.

Quindi il nostro sistema di equazioni diventa $\begin{cases} \ddot{x}_m = \ddot{x}_M + \ddot{x}'_m \\ \ddot{y}_m = \ddot{y}'_m \end{cases}$

Dalla prima equazione di questo ultimo sistema e dalla relazione (*) otteniamo:

$$\begin{cases} \ddot{x}'_m = \ddot{x}_m - \ddot{x}_M \\ \ddot{y}'_m = -tg\alpha \cdot \ddot{x}'_m = tg\alpha \cdot (\ddot{x}_M - \ddot{x}_m) \end{cases}$$

Noi vogliamo determinare la forza che permette alla massa m di rimanere ferma sulla massa M quindi dobbiamo imporre che l'accelerazione delle due masse lungo l'asse delle x sia la stessa e non ci sia moto lungo y.

Quindi abbiamo 2 condizioni da imporre:

$$\begin{cases} \ddot{x}_m = \ddot{x}_M \\ \ddot{y}'_m = \ddot{y}_m = 0 \end{cases}$$

Possiamo riscrivere il sistema (#) come

$$\begin{cases} M\ddot{x}_M = F - Nsen\alpha \\ m\ddot{x}_m = Nsen\alpha \\ m\ddot{y}_m = -mg + N\cos\alpha \end{cases}$$

Se consideriamo la terza equazione e la condizione $\ddot{y}'_m = \ddot{y}_m = 0$ otteniamo $N = \dfrac{mg}{\cos\alpha}$

quindi la seconda eqauzione del sistema diventa $m\ddot{x}_m = \dfrac{mg}{\cos\alpha} sen\alpha = mg \cdot tg\alpha$
$\Rightarrow \ddot{x}_m = g \cdot tg\alpha$

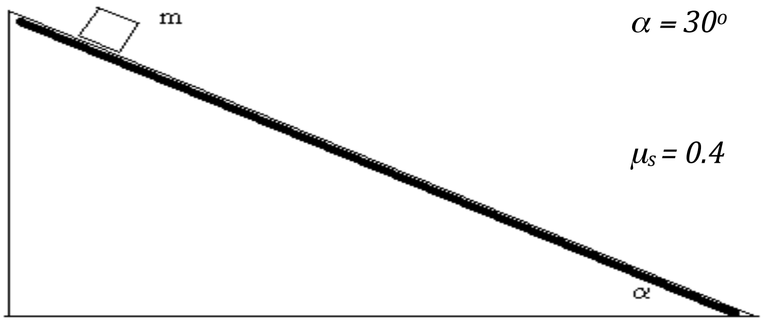
Considerando ora la prima equazione del sistema e imponendo la condizione $\ddot{x}_M = \ddot{x}_m$ si ottiene:

$$M\ddot{x}_M = M\ddot{x}_m = F - mg \cdot tg\alpha$$
$$\Rightarrow M(g \cdot tg\alpha) = F - mg \cdot tg\alpha$$

quindi otteniamo che la forza deve avere intensità $F = (M + m)g \cdot tg\alpha = 635N$

Esercizio 2

Su un piano inclinato con attrito un cubo di massa m è lasciato libero in un punto A con velocità nulla, al tempo iniziale. L'inclinazione del piano è α, e i coefficienti di attrito statico e cinetico sono rispettivamente μ_s e μ_d e la costante di viscosità rispetto all'aria è β.
Trovare:
a) se e perché il cubo scivola giù dalla posizione A
b) In caso di risposta positiva alla domanda a), quale sarà la velocità massima del cubo (nell'ipotesi di lunghezza infinita del piano)
c) La velocità del cubo dopo 10 s



$\alpha = 30^o$ $\beta = 0.1 kg/s$

$\mu_s = 0.4$ $m = 4kg$

Fig.2

Soluzione es. 2:

Prima di affrontare la soluzione del problema scegliamo il sistema di riferimento avente asse delle x lungo il piano inclinato con x crescenti da sinistra verso destra. L'asse delle y e' perpendicolare ad x e con valori crescenti che vanno dal basso verso l'alto.

a) Come dimostrato a lezione dobbiamo verificare se la tangente dell'angolo di inclinazione è maggiore o minore del coefficiete di attrito statico:

$tg\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} > 0.5 > \mu_s = 0.4$ quindi la massa scivola lungo il piano!

Quest relazione si ottiene considerano che

$$ma = mg \cdot \sin\alpha$$
$$mg \cdot \cos\alpha - N = 0$$
$$\Rightarrow N = mg \cdot \cos\alpha$$

Affinche' ci sia moto deve essere vinta la forza di attrito statico e quindi deve essere verificata la relazione

$$ma > \mu_s N = \mu_s mg \cdot \cos\alpha$$
$$\Rightarrow mg \cdot \sin\alpha > \mu_s mg \cdot \cos\alpha$$
$$\Rightarrow \sin\alpha > \mu_s \cos\alpha \Rightarrow tg\alpha > \mu_s$$

b) La velocita' massima assumendo che il piano inclinato abbia lunghezza infinita si ottiene imponendo che in queste consizioni la velocita' si mantiene costante e l'accelerazione e' di conseguneza nulla.

Possiamo dunque scrivere:

$$m\ddot{x}_\infty = mg\sin\alpha - mg\mu_d\cos\alpha - \beta\dot{x}_\infty = 0$$
$$\Rightarrow \dot{x}_\infty = \frac{mg(\sin\alpha - \mu_d\cos\alpha)}{\beta} \approx 115\left[\frac{m}{s}\right]$$

c) Il diagramma di corpo libero è *:* $m\ddot{x} = mg\sin\alpha - mg\mu_d\cos\alpha - \beta\dot{x}$

risolvibile ponendo

$$z \equiv \dot{x} \Rightarrow \dot{z} = \ddot{x} \Rightarrow \dot{z} + \frac{\beta}{m} z + \gamma = 0 \qquad \text{la cui soluzione è:}$$

$$z = Ce^{-\frac{\beta}{m}t} - \frac{m\gamma}{\beta} \Rightarrow \dot{x} = \frac{mg}{\beta}(\sin\alpha - \mu_d \cos\alpha)(1 - e^{-\frac{\beta}{m}t})$$

anche in questo caso abbiamo usato la condizione $\dot{x}(0) = 0$ e γ è definito come:

$$\gamma \equiv g(-\sin\alpha + \mu_d \cos\alpha)$$

Quindi la soluzione è

$$\dot{x}(t = 10) = \frac{mg}{\beta}(\sin\alpha - \mu_d \cos\alpha)(1 - e^{-\frac{\beta}{m}10}) = 24.6 m/s$$

Esercizio 3

Una sfera di massa m è legata attraverso una corda ad un punto fsso O su un piano orizzontale. Il piano è ruvido e i coefficienti di attrito sono m μ_s e μ_d . A un certo tempo t = 0 la massa è calciata con una velocità iniziale $\vec{v}_0$ il cui modulo è $|\vec{v}_0|$. La traiettoria della massa è una circonferenza di raggio R come mostrato in fig. 3. La velocità iniziale $\vec{v}_0$ è tangente alla circonferenza stessa.
Trovare l'angolo in corrispondeza del quale la massa si ferma.

Dati: $|\vec{v}_0|$= 10 m/s, μ_s = 0:50, μ_d = 0:25, R=1 m.

Soluzione es. 3:

Dobbiamo scegliere un sistema di riferimento adeguato. Poiché la traiettoria del palla è nota, la scelta delle coordinate intrinseche è adatta in questo caso. Scegliamo l'origine nella posizione della palla a t = 0, quando la velocità è $\vec{v}_0$ e il verso positivo verso l'alto.

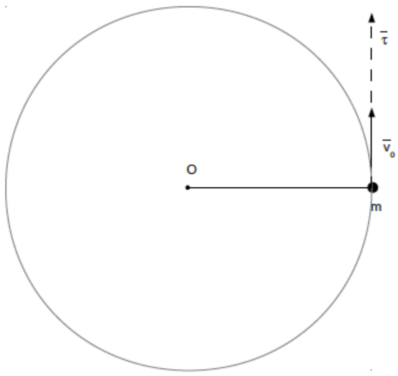


Fig. 3

Le condizioni iniziali del sistema at = 0 sono, considerando la velocità della palla e la posizione all'istante iniziale:

$$\dot{s}(0) = v_0 \quad \text{e} \quad s(0) = 0$$

Consideriamo che la palla scivoli sul piano senza ruotare. Essendo il tavolo ruvido e avendo quindi la presenza di attriti per la II legge della dinamica si ha:

$$\vec{F} = \vec{F}_d = -\mu_d N \frac{\vec{v}}{|v|}$$

ma per la sceta del sistema di coordinate nel nostro caso il versore $\frac{\vec{v}}{|v|}$ corrisponde al versore $\vec{\tau}$, vettore unitario tangente alla circonferenza (traiettoria della massa).

$$\vec{F} = \vec{F}_d = -\mu_d N \vec{\tau}$$

Inoltre sappiamo che lungo l'asse perpendicolare al tavolo (asse z) abbiamo:

$m\ddot{z} = N - mg = 0 \Rightarrow N = mg$ visto che lungo l'asse z non c' è moto.

Possiamo riscrivere la II legge lungo $\vec{\tau}$

$$m\ddot{s} = -\mu_d N = -\mu_d mg$$
$$\Rightarrow \ddot{s} = -\mu_d g$$

Integrando rispetto al tempo si ottiene

$$\dot{s} = -\mu_d gt + C_1$$

Utilizzando le condizioni iniziali $\dot{s}(0) = v_0$ possiamo riscrivere la costante di integrazione come:

$$\dot{s}(t = 0) = -\mu_d g * 0 + C_1 = C_1 = v_0$$
$$\Rightarrow \dot{s} = -\mu_d gt + v_0$$

Integrando nuovamente otteniamo la legge del moto della palla lungo $\vec{\tau}$

$$s = -\frac{1}{2}\mu_d gt^2 + v_0 t + C_2$$

e usando la condizione iniziale $s(0) = 0$ otteniamo la costante C_2

$$s(t = 0) = -\frac{1}{2}\mu_d g * 0^2 + v_0 * 0 + C_2 = 0$$
$$\Rightarrow C_2 = 0$$

Infine quindi: $s = -\frac{1}{2}\mu_d gt^2 + v_0 t$

Determinare quando la massa si ferma significa calcolare $\dot{s}(t) = 0$

$$s(t) = -\mu_d gt + v_0 = 0$$
$$\Rightarrow t = \frac{v_0}{\mu_d g} = 4s$$

utilizzando l'approssimazione g = 10 m/s^2

Lo spazio percorso dalla palla in t=4s è a

$$s(t = 4) = -\frac{1}{2}\mu_d g * 4^2 + v_0 * 4 = 20m$$

La lughezza della circonferenza è $l = 2\pi R = 6.28m$ e il numero di giri fatti dalla palla è n=s(t=4s)/l=3.18 giri che corrsiponde quindi a 3 giri pieni piu' un angolo (quello richiesto dall'esercizio) dato da $\theta = 0.18 * 2\pi = 1.13rad = 64.7^0$