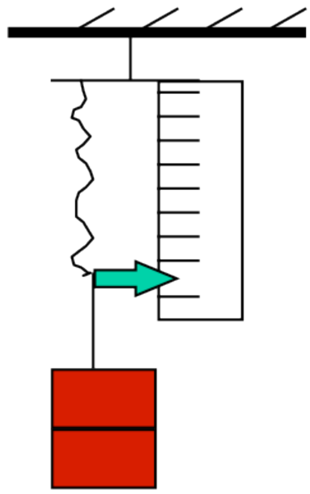
Prof.ssa Stefania Bufalino
DISAT- Politecnico di Torino
e-mail: stefania.bufalino@polito.it

# Dispense integrative sulla DINAMICA del punto materiale

La dinamica studia il moto dei corpi in relazione alle cause che lo hanno prodotto. Per tale studio devono essere conosciuti i seguenti elementi:
- le cause del moto;
- i parametri che intervengono in modo determinante nel moto, per esempio la resistenza esercitata dall'aria su un corpo in movimento;
- le equazioni del moto, quindi le relazioni che permettono di determinare il moto del corpo quando sono note le forze che agiscono su di esso.

## 1. Il concetto di forza e il primo principio della dinamica

La Forza è una grandezza fisica vettoriale che viene definita in modo operativo su base sperimentale. Si tratta della cosiddetta definizione statica di forza che è basata sulle osservazioni condotte su un sistema fermo, equilibrando la forza incognita con una forza nota.
Supponiamo di voler misurare la forza applicata da una fune a un piccolo oggetto ad esso legato: per effettuare tale misurazione si ricorre all'utilizzo di un dinamometro (molla) che ha una lunghezza in condizioni statiche detta lunghezza a riposo. L'estensione del dinamometro rispetto alla lunghezza a riposo, valutabile mediante una scala graduata di cui il dinamometro dispone, indica l'intensità della forza stessa. La forza essendo un vettore è caratterizzata inoltre da una direzione e un verso, che sono determinati osservando l'orientazione assunta dal dinamometro.



Ci sono solo 4 forze fondamentali in natura (in realtà solo 3, perché nel 1984 l'interazione elettromagnetica e debole hanno dimostrato di essere diversi aspetti della stessa interazione) e sono: interazioni gravitazionali, elettromagnetiche, deboli e forti. Tali forze si combinano per formare un numero infinito di vettori forza, che appaiono nell'esperienza comune come le forze che usulmente vengono misurate nella maggior parte dei fenomeni visibili e nella tecnologia del mondo industriale.

### 1.1 Principio di inerzia

Un'osservazione fondamentale nell'ambito della fisica classica è che:
*un corpo non soggetto a forze non subisce cambiamenti di velocità, ovvero permane nel suo stato di quiete se era in quiete o procede nel suo movimento con moto rettilineo uniforme.*

Questo rappresenta l'enunciato del principio di inerzia (o primo principio di Newton) e implica che l'assenza di forza non si traduce nell'assenza di moto ma nella non variazione della velocità del punto fisico.

In natura è impossibile trovare condizioni in cui la forza su un punto fisico sia nulla: il principio di inerzia si applica ad esempio nel caso in cui su un punto fisico agiscono molteplici forze con risultante (somma vettoriale) nulla.

E' importante osservare che il principio di inerzia non ha significato se non si specifica il sistema di riferimento adottato per lo studio del moto. In particolare il principio di inerzia non vale in tutti i sistemi di riferimento ma vale solo nei *sistemi di riferimento inerziali.* Un sistema di riferimento inerziale è un sistema di riferimento in moto traslatorio rettilineo uniforme rispetto ad un sistema solidale al sistema solare.

## 2. Seconda legge (principio) di Newton

Se un punto fisico di massa *m* si muove di moto accelerato rispetto ad un sistema di riferimento inerziale e ad un certo istante la sua accelerazione è $\vec{a}$, si dice che il corpo è soggetto alla forza $\vec{F}_T$ (somma di tutte le possibili forze applicate al punto materiale):

$$\vec{F}_T = m \cdot \vec{a}$$

La forza risulta quindi essere definita come una grandezza derivata con dimensioni

$$[F]=[m][a]=[M][L][T]^{-2}$$

L'unità di misura dell'intensità della forza nel sistema MKSA è il Newton=1kg x 1m/s$^2$ ed è definita come l'intensità di una forza che agendo su un corpo di massa 1 kg gli imprime un'accelerazione di modulo 1m/s$^2$.
Nella definizione della forza è importante sottolineare che quando due corpi di masse diverse interagiscono tra di loro, il corpo di massa maggiore acquista un'accelerazione minore: in questo senso la massa quantifica l'inerzia di un corpo a mettersi in movimento e per questa regione *m* è spesso chiamata massa inerziale.

## 3. Terza legge (principio) di Newton

Si osserva sperimentalmente che in un sistema di riferimento inerziale se due punti materiali, di massa $m_1$ e $m_2$ rispettivamente, interagiscono solo tra di loro e in un determinato istante il corpo con massa $m_1$ possiede un accelerazione $\vec{a}_1$ il corpo con massa $m_2$ possiede un accelerazione

$$\vec{a}_2 = -(m_1/m_2)\vec{a}_1 \qquad (1)$$

Il corpo $m_1$ si muove con accelerezione $\vec{a}_1$ sotto l'effetto della forza che indichiamo con $\vec{F}_{12}$ dovuta all'interazione con il corpo $m_2$ e in modo del tutto analogo $m_2$ a causa dell'interazione con $m_1$ possiede un accelerazione $\vec{a}_2$ dovuta ad una forza che indichiamo con $\vec{F}_{21}$. In termini di forze, secondo il secondo principio di Newton la (1) si scrive come:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \qquad (2)$$

La relazione (2) esprime il terzo principio di Newton e si enuncia nel seguente modo:
*se un corpo esercita una forza su un secondo corpo, quest'ultimo esercita sul primo una forza di uguale intensità, stessa direzione e verso opposto.*

Le due forze che intervengono nell'interazione tra $m_1$ e $m_2$ vengono denominate anche con i termini *azione* e *reazione:* il terzo principio è infatti spesso indicato come principio di azione e reazione.

## 4. Principali tipi di forze nei fenomeni della fisica classica

### 4.1 Forza gravitazionale

*Caratteristiche*: questa forza appare su un punto fisico 1 (cioè un punto con massa $m_1$) quando un altro punto fisico 2 con massa $m_2$ è ad una distanza $r$ attirando il punto materiale 1 verso il punto materiale 2.
*Definizione:* la forza gravitazionale agisce sul punto 1, lungo la direzione che va da 1 a 2 e viene espressa dalla relazione:

$$\vec{F}_G \equiv -\gamma \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}_{21}}{|\vec{r}_{21}|} \qquad (\gamma = 6.673 \text{ x } 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{Kg}^{-2} \quad \text{in MKSA}) \qquad (3)$$

dove $\vec{r}_{21}$ è il vettore spostamento dal punto 2 (il punto che attrae) al punto 1 (punto attratto) (essendo ovviamente $r = |\vec{r}_{21}|$). Naturalmente la definizione è simmetrica e anche il punto 2 è attratto dal punto 1, con una forza che ha stesso modulo ma verso opposto.

### 4.2 Forza gravitazionale sulla superficie terrestre

*Caratteristiche:* questa forza è la forza gravitazionale valutata sulla superficie terrestre, ad esempio in un volume di un'area di alcuni km$^2$ e un altezza inferiore a 1 km. Direzione e intensità della forza possono essere calcolata dall'eq. (3) supponendo che le forze generate da tutti i punti della Terra che attirano un punto di massa *m* nel volume precedentemente definito è uguale alla forza generata da un singolo punto nel centro della Terra contenente tutta la massa M della Terra. (Questa similitudine sarà dimostrata in seguito).
La forza gravitazionale esercitata dalla Terra su una massa *m* puntiforme nel volume può essere scritta come:

$$\vec{F}_G \equiv -\gamma \cdot \frac{m \cdot M}{(R+h)^2} \cdot \frac{\vec{r}_{21}}{|\vec{r}_{21}|} = -\gamma \cdot \frac{m \cdot M}{R^2 (1 + \frac{h}{R})^2} \cdot \frac{\vec{r}_{21}}{|\vec{r}_{21}|} \quad (4)$$

dove il vettore $\vec{r}_{21}$ è il vettore spostamento dal centro della Terra al punto *m*. Sotto le ipotesi sopra enunciate il rapporto h su R è molto piccolo (trascurabile) rispetto a 1 e la direzione della forza può essere approssimata dalla perpendicolare alla superficie orizzontale (in altre parole in tutti i punti la direzione è sempre la stessa). Pertanto la forza gravitazionale sulla massa *m* può essere scritta come:

$$\vec{F}_g \cong -m \cdot g \cdot \vec{j} \qquad (5)$$

dove il vettore $\vec{j}$ è il versore verticale sulla superficie terrestre ed è rivolto verso il cielo.

*Definizione:* la forza gravitazionale sulla superficie terrestre è una forza costante che agisce su ogni massa *m*, sempre verticale diretta verso il suolo e proporzionale a *mg*.

## 4.3 Forza elettrostatica (o di Coulomb)

*Caratteristiche:* questa forza appare su un punto fisico 1 elettricamente carico (cioè un punto con un carica $q_1$) quando un altro punto fisico 2 con carica $q_2$ è ad una distanza $r$; la carica elettrica è una grandezza fisica misurata da classi di strumenti come gli amperometri o gli strumenti magnetoelettrici.
*Definizione:* la forza elettrostatica agisce sul punto 1, lungo la direzione che va da 1 a 2. Il punto materiale 1 è attratto verso il punto materiale 2 se le cariche hanno segno diverso, altrimenti 1 è respinto dal punto fisico 2.
La forza di Coulomb è espressa da:

$$\vec{F}_E \equiv -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1 q_2}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}_{21}}{|\vec{r}_{21}|} \qquad \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8.99 \text{ x } 10^9 \text{ Nm}^2\text{C}^{-2} \text{ in MKSA}\right) \qquad (6)$$

Dove $\vec{r}_{21}$ è il vettore spostamento dal punto 2 al punto 1 (essendo ovviamente $r = |\vec{r}_{21}|$). Naturalmente la definizione è simmetrica e anche il punto 2 risente della presenza del punto 1, con una forza che ha lo stesso modulo ma verso opposto.

## 4.4 Forza elastica

*Caratteristiche:* questa forza appare ad entrambe le estremità di un "oggetto estensibile" (ad esempio una molla, una corda elastica...) quando viene allungata o accorciata di una quantità $\Delta x$ rispetto alla lunghezza "a riposo".
*Definizione:* la forza elastica agisce su 2 masse collegate agli estremi dell'oggetto estensibile (molla ad esempio) e il suo modulo è espressa da:

$$|\vec{F}_e| \equiv k\cdot|\Delta x| \qquad (7)$$

La direzione della forza è la direzione in cui si muove l'oggetto che risente della forza elastica e la forza spinge entrambe le masse lontano dal centro se l'oggetto è compresso (accorciato) e attira verso il centro le masse se l'oggetto è allungato.

## 4.4 Tensione

*Caratteristiche:* questa forza appare ad entrambe le estremità di un oggetto non estensibile (per esempio una corda, una lastra rigida o un'asta ...)

*Definizione:* la tensione che agisce su 2 masse collegate alle estremità della corda
a) è uguale a 0 se la distanza tra le estremità è inferiore alla lunghezza della corda;
b) è diretta lungo la retta che unisce le estremità, sempre verso il centro della corda. Il modulo della forza è uguale in entrambe le estremità.

*Osservazione*: entrambe le masse subiscono la forza e questo significa che ci sono 2 forze alle estremità dell'oggetto. Queste 2 forze sono uguali e opposte per definizione.

## 4.5 Forza tra due superfici in contatto

*Caratteristiche*: quando 2 superfici piane sono in contatto, cioè sono parallele e la loro distanza è zero, appare una forza $\vec{F}_{12}$ che agisce sulla superficie 1 dovuta al contatto con la superficie 2 e una forza $\vec{F}_{21}$ agente sulla superficie 2 dovuta alla superficie 1. Queste forze sono simmetriche. Se le 2 superfici non sono piane ma hanno (almeno una delle due) un grande raggio di curvatura, possono avere un contatto "quasi planare" in un punto e il piano tangente ad entrambe le superfici nel punto è considerato come piano di contatto (ad esempio una ruota su una superficie piana).

*Queste forze di contatto hanno 2 componenti: una forza normale (alla superficie) e una parallela (alla superficie) che si chiama "attrito".*

## 4.6 Forza normale

*Definizione:* agisce sulla superficie 1 lungo la direzione perpendicolare al piano di contatto, dalla superficie 2 alla superficie 1 (mai nella direzione opposta) e il suo valore N è:

a) un valore positivo se entrambe le superfici sono in contatto
b) 0 se il contatto scompare (distanza> 0)

## 4.7 Forza di attrito statico

*Definizione:* agisce lungo il piano di contatto, quando entrambe le superfici sono in quiete una rispetto all'altra, in una direzione lungo il piano di contatto e con un opportuno valore assoluto che varia da 0 ad un massimo $F_{sMAX}$, che è dato da:

$$F_{sMAX} = \mu_s \cdot N \qquad (8)$$

Il coefficiente $\mu_s$ è chiamato coefficiente di attrito statico ed e' adimensionale: esso dipende dalla coppia di materiali in contatto, ma non dalla superficie di contatto.

## 4.8 Forza di attrito dinamico (o cinetico)

*Definizione:* agisce lungo il piano di contatto, quando entrambe le superfici sono in moto relativo una rispetto all'altra, nella direzione opposta al moto relativo, e la sua espressione è data da:

$$\vec{F}_d \equiv -\mu_d \cdot N \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \qquad (9)$$

Il coefficiente $\mu_d$ è chiamato coefficiente di attrito dinamico (o cinetico): dipende dalla coppia di materiali in contatto, ma non dalla superficie di contatto. Il versore che definisce la direzione di questa forza ha la stessa direzione della velocita' ma verso opposto poiche' la forza di attrito dinamico si oppone al moto.

### 4.9 Forza viscosa

*Caratteristiche:* questa forza appare quando un corpo si muove all'interno di un fluido come l'acqua, l'aria, olio, etc...
*Definizione:* la forza viscosa agisce sul punto materiale in moto, è parallela alla velocità, e agisce in direzione opposta al moto: la sua intensità è proporzionale alla velocità (prima approssimazione valida a basse velocità tipiche degli studi di fisic classica)

$$\vec{F}_v \equiv -\beta \cdot \vec{v} \qquad (10)$$

Il coefficiente β è chiamato "coefficiente di viscosità (o viscoso)" e dipende dal fluido, dalla forma del corpo, ma non dalla massa. Il coefficiente β può essere scritto come prodotto di 2 quantità $\beta = \gamma \cdot \eta$ : $\gamma$ dipende dalla forma del corpo (ad esempio per una sfera di raggio r, $\gamma = 6\pi \cdot r$ ) e $\eta$ dipende dal fluido e dalla sua temperatura.

A 20°: $\eta(air) \approx 1.81 \cdot 10^{-5}$, $\eta(H_2O) \approx 1.79 \cdot 10^{-3}$, $\eta(Hg) \approx 1.68 \cdot 10^{-3}$, $\eta(glicerina) \approx 12.1$
A 0° : $\eta(air) \approx 1.71 \cdot 10^{-5}$, $\eta(H_2O) \approx 1.00 \cdot 10^{-3}$, $\eta(Hg) \approx 1.554 \cdot 10^{-3}$, $\eta(glicerina) \approx 1.5$

### 4.10 Forza di Lorentz

*Caratteristiche:* questa forza si manifesta quando un punto di massa *m* e carica *q* si muove all'interno di un campo magnetico con una velocità $\vec{v}$. Un campo magnetico è prodotto da metalli speciali o da corrente elettrica (come sarà descritto in Fisica II) ed è caratterizzato da un vettore $\vec{B}$ che è presente in ogni punto geometrico di una regione dello spazio.

*Definizione:* la forza di Lorentz agisce sul punto dotato di carica ed è espressa come

$$\vec{F}_L \equiv q \cdot \vec{v} \times \vec{B} \qquad (11)$$

## 5. Quantità di moto e Impulso di una forza

### 5.1 Quantità di moto

La "**quantità di moto**" $\vec{p}$ di un punto fisico di massa *m*, che si muove con velocità $\vec{v}$ è una quantità vettoriale definita come:

$$\vec{p} \equiv m \cdot \vec{v} \qquad (12)$$

### 5.2 Impulso di una forza

Quando una forza $\vec{F}(t)$ agisce su un punto fisico di massa *m* per un intervallo di tempo infinitesimo *dt*, la quantità vettoriale infinitesima $d\vec{I}(t)$ è chiamata " **impulso** della forza" o anche " **impulso** applicato al punto *m* " dalla forza $\vec{F}(t)$, e si definisce come:

$$d\vec{I}(t) \equiv \vec{F}(t) \cdot dt \qquad (13)$$

L' **impulso totale** $\vec{I}(t_0, t_1)$ della forza che agisce per un tempo finito che va da $t_0$ a $t_1$ è definito come:

$$\vec{I}(t_0, t_1) \equiv \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(t) \cdot dt \qquad (14)$$

Nota: il valore di una forza può assumere valori diversi in un intervallo di tempo finito ed è per tale motivo che l'impulso di una forza viene definito mediante un integrale. Nel caso in cui la forza non dipende dal tempo allora il vettore forza può essere portato fuori dal segno di integrale e l'impulso totale si scrive come $\vec{I}(t_0, t_1) = \vec{F}(t_1 - t_0)$.

**Proprietà dell'impulso**

1) La somma degli impulsi di più forze $\vec{F}_1(t), \vec{F}_2(t), \vec{F}_3(t), \ldots$ è uguale all'impulso della somma delle forze (proprietà additiva dell'impulso rispetto alle forze).
2) La somma degli impulsi di una forza in due intervalli di tempo consecutivi ($t_0$,$t_1$) e ($t_1$,$t_2$) è uguale all'impulso della forza nell'intervallo di tempo totale ($t_0$,$t_2$) (proprietà additiva dell'impulso rispetto al tempo).

### 5.3 Teorema dell'impulso

Quando su un punto fisico di massa *m* agiscono alcune forze $\vec{F}_1(t), \vec{F}_2(t), \vec{F}_3(t), \ldots$ per un intervallo di tempo finito che va da $t_0$ a $t_1$, la variazione della quantità di moto del punto è uguale all'impulso totale della forza risultante agente su di esso $\vec{F}_T = \vec{F}_1(t) + \vec{F}_2(t) + \vec{F}_3(t), \ldots$

**Dimostrazione:**

Calcoliamo l'impulso totale di ciascuna forza e facciamone la somma, ricordando le proprietà di addizione degli integrali e la II legge di Newton:

$$\vec{I}_1(t_0, t_1) \equiv \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_1(t) \cdot dt; \qquad \vec{I}_2(t_0, t_1) \equiv \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_2(t) \cdot dt;$$

$$\vec{I}_3(t_0, t_1) \equiv \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_3(t) \cdot dt \; \ldots.$$

$$\vec{I}_T(t_0, t_1) \equiv \sum_i \vec{I}_i = \sum_i \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_i(t) \cdot dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_i (\vec{F}_i(t) \cdot dt) = \int_{t_0}^{t_1} (\sum_i (\vec{F}_i(t)) \cdot dt = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_T(t) \cdot dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} m \cdot \vec{a} \cdot dt = m \cdot \int_{t_0}^{t_1} \vec{a} \cdot dt = m \cdot (\vec{v}(t_1) - \vec{v}(t_0)) = \vec{p}(t_1) - \vec{p}(t_0)$$

(15)

Dove $\vec{F}_T(t)$ indica la forza totale agente su *m*, che per la II legge è uguale alla massa per l'accelerazione. L'equazione (15) ci permette di osservare che in assenza di forze o nel caso in cui la risultante di tutte le forze agenti sul punto materiale sia nulla anche la variazione di quantita' di moto e' nulla. Questo equivale a dire che la quantita' di moto del punto materiale si mantiene costante.

# 6. Energia cinetica e Lavoro

## 6.1 Energia cinetica

L' "**energia cinetica**" $E_c$ di un punto fisico di massa *m*, che si muove con una velocità $\vec{v}$ è una quantità scalare definita come:

$$E_c \equiv \frac{1}{2} m \cdot (\vec{v}^2) = \frac{1}{2} m \cdot v^2 \qquad (16)$$

I

n generale la (16) rappresenta l'energia cinetica di un corpo esteso di massa m in moto traslatorio (tutti i punti del corpo si muovono con la stessa velocità $\vec{v}$). Assumiamo come fatto sinora che anche la massa si mantiene costante nel tempo.
L'energia cinetica può essere scritta utilizzando le componenti della velocità ma si deve sempre tenere in considerazione che $E_c$ è una quantità è scalare e quindi non definita mediante componenti:

$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \qquad (17)$$

## 6.2 Il Lavoro

Quando una forza $\vec{F}(x,y,z)$ agisce su un punto fisico di massa *m* lungo un cammino infinitesimo $d\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$, la quantità scalare infinitesima $dW$ è chiamata "**lavoro della forza**" lungo il cammino, ed è definita come il seguente prodotto scalare:

$$dW \equiv \vec{F}(x,y,z) \cdot d\vec{r} \qquad (18)$$

Consideriamo un punto che si muove lungo un cammino finito su una traiettoria definita, ad esempio una curva $\gamma$ nello spazio, definita da 3 funzioni $x(t), y(t), z(t)$: la traiettoria è composta da un numero infinito di piccolissimi spostamenti $d\vec{r}$ e il **lavoro totale** $L_{A,B}$ della forza che agisce dal punto A al punto B lungo la traiettoria $\gamma$ è definito come:

$$W_{A,B} \equiv \int_{A,\gamma}^{B} \vec{F}(x,y,z) \cdot d\vec{r} = \int_{A,\gamma}^{B} F_x(x,y,z) \cdot dx + F_y(x,y,z) \cdot dy + F_z(x,y,z) \cdot dz \qquad (19)$$

Dove $F_x$, $F_y$, $F_z$, sono le componenti della forza lungo i tre assi cartesiani scelti come sistema di riferimento per lo studio del moto.
*Nota*: dall'eq. (19) è chiaro che il lavoro totale di una forza che agisce su un punto fisico di massa *m* che si muove dal punto geometrico A al punto geometrico B non dipende solo da A e da B ma anche dalla curva $\gamma$ che unisce *A* e *B*. E' importante dunque discutere gli aspetti geometrici dell'eq. (19).

Lo spostamento infinitesimo $d\vec{r}$ si scrive come:

$$d\vec{r} = dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j} + dz \cdot \vec{k} \quad (20)$$

Ricordando che lungo la traiettoria: $dx = \dot{x}(t)dt,\ dy = \dot{y}(t)dt,\ \dot{z}(t)dt,$ (21)

se le coordinate sono note in funzione del tempo possiamo scrivere:

$$W_{A,B} = \int_{A,\gamma}^{B} F_x(x,y,z) \cdot \dot{x}(t) \cdot dt + \int_{A,\gamma}^{B} F_y(x,y,z) \cdot \dot{y}(t) \cdot dt + \int_{A,\gamma}^{B} F_z(x,y,z) \cdot \dot{z}(t) \cdot dt \quad (22)$$

Dove tutte le componenti della forza possono leggersi come funzione del tempo attraverso le coordinate spaziali.
Il lavoro è una grandezza fisica scalare e nel sistema MKSA la sua equazione dimensionale è:

$$[W]=[F][s]=[M][L]^2[T]^{-2}$$

L'unità di misura del lavoro è il prodotto dell'unità di misura dell'intensità della forza con l'unità di misura della lunghezza. Nel sistema MKSA l'unità di misura del lavoro è il joule (J) con 1J= 1Newton x 1 m ed è definita come il lavoro fatto da una forza costante avente l'intensità di 1N quando il punto materiale su cui agisce la forza si sposta di 1 m in direzione della forza.

**Proprietà del Lavoro**

1) La somma dei lavori di più forze $\vec{F}_1(t), \vec{F}_2(t), \vec{F}_3(t), ...$ da un punto $A$ a un punto $B$ lungo la traiettoria $\gamma$ è uguale al lavoro della somma delle forze (proprietà additiva del lavoro rispetto alle forze).
2) La somma dei lavori di una forza in 2 cammini consecutivi ($A,B$) e ($B,C$) lungo la traiettoria $\gamma$ è uguale al lavoro nel cammino totale ($A,C$) (proprietà additiva del lavoro rispetto al cammino).

## 6.3 Teorema del Lavoro o dell'energia cinetica

Quando un punto fisico di massa $m$ si muove da un punto $A$ a un punto $B$ lungo la traiettoria $\gamma$, e su di esso agiscono le forze $\vec{F}_1(x,y,z), \vec{F}_2(x,y,z), \vec{F}_3(x,y,z), ...$, la variazione della sua energia cinetica è uguale al lavoro totale della somma $\vec{F}_T(x,y,z)$ di tutte le forze.

**Dimostrazione:**

Calcoliamo i lavori totali di tutte le forze, quindi il lavoro della forza totale che agisce sul punto fisico, ricordando le proprietà di addizione degli integrali e che la forza totale è data dal prodotto della massa del punto per la sua accelerazione:

$$W_{A,B,\gamma} \equiv \int_{A,\gamma}^{B} \vec{F}_T(x,y,z)\cdot d\vec{r} = \int_{A,\gamma}^{B} (F_{Tx}(x,y,z)\cdot dx + F_{Ty}(x,y,z)\cdot dy + F_{Tz}(x,y,z)\cdot dz) =$$

$$= \int_{A,\gamma}^{B} (m\ddot{x}\cdot dx + m\ddot{y}\cdot dy + m\ddot{z}\cdot dz) = \int_{A,\gamma}^{B} (m\frac{d\dot{x}}{dt}\cdot dx + m\frac{d\dot{y}}{dt}\cdot dy + m\frac{d\dot{z}}{dt}\cdot dz) =$$

$$= \int_{A,\gamma}^{B} (m\frac{d\dot{x}}{dt}\cdot \frac{dx}{dt}dt + m\frac{d\dot{y}}{dt}\cdot \frac{dy}{dt}dt + m\frac{d\dot{z}}{dt}\cdot \frac{dz}{dt}dt) = \int_{A,\gamma}^{B} (m\dot{x}\cdot \frac{d\dot{x}}{dt}\cdot dt + m\dot{y}\cdot \frac{d\dot{y}}{dt}\cdot dt + m\dot{z}\frac{d\dot{z}}{dt}\cdot dt) =$$

$$= \int_{A,\gamma}^{B} (m\dot{x}\cdot d\dot{x} + m\dot{y}\cdot d\dot{y} + m\dot{z}\cdot d\dot{z}) = m\cdot \left[\int_{A,\gamma}^{B} \dot{x}\cdot d\dot{x} + \int_{A,\gamma}^{B} \dot{y}\cdot d\dot{y} \int_{A,\gamma}^{B} \dot{z}\cdot d\dot{z}\right] =$$

$$= m\cdot \left\{\frac{\left[\dot{x}^2\right]_A^B}{2} + \frac{\left[\dot{y}^2\right]_A^B}{2} + \frac{\left[\dot{z}^2\right]_A^B}{2}\right\} = \frac{1}{2}mv^2(B) - \frac{1}{2}mv^2(A) = E_c(B) - E_c(A) \tag{23}$$

Questo teorema è anche noto come **teorema delle forze vive** e vale in qualunque sistema di riferimento (inerziale e non) e qualunque siano le caratteristiche delle forze agenti.

# 7. Energia potenziale

## 7.1 Definizione di energia potenziale

Torniamo all'espressione del lavoro dato nell'eq. (18)

$$\vec{F}(x,y,z)\cdot d\vec{r} = F_x(x,y,z)\cdot dx + F_y(x,y,z)\cdot dy + F_z(x,y,z)\cdot dz \tag{24}$$

che è una quantità infinitesima data dalla somma di 3 termini, ognuno dei quali è il prodotto di una quantità finita ($F_x$, $F_y$ or $F_z$ ) per una quantità infinitesima ($dx$, $dy$ or $dz$).
In alcuni casi particolari di alcuni tipi di forze si verificano le seguenti condizioni:

$$\begin{aligned} F_x(x,y,z) &= -\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x} \\ F_y(x,y,z) &= -\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial y} \\ F_z(x,y,z) &= -\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z} \end{aligned} \tag{25}$$

In altre parole possiamo dire che esiste una **funzione scalare *U(x,y,z)* delle coordinate (e non del tempo)**, le cui derivate parziali rispetto a *x,y* e *z,* con segno negativo rappresentano le componenti della forza.
E' importante sottolineare che l'esistenza di una funzione unica *U(x,y,z)* che soddisfa tutte e tre le equazioni della (25) non si verifica per tutti i tipi di forze: infatti solo alcune forze godono dell'esistenza di tale funzione con le proprietà sopra descritte.
Queste forze per cui esiste una funzione *U(x,y,z)* che soddisfa la (25) sono dette "**forze conservative**"; tutte le rimanenti forze vengono dette non conservative.

La funzione *U(x,y,z)* è detta "**energia potenziale**" della forza.

**Note:**
Le richieste della (25) non possono essere completamente definite da $U(x,y,z)$: infatti se $U(x,y,z)$ soddisfa la (25) allora anche $U(x,y,z)+const$ la soddisfa. Ne segue che l'energia potenziale di una forza conservativa è sempre determinata a meno di una costante.

**Lavoro delle forze conservative**

Se una forza è conservativa, cioè soddisfa la (25), il lavoro di questa forza dal punto *A* al punto *B* lungo il cammino $\gamma$ è dato da:

$$\begin{aligned} W_{A,B,\gamma} &= \int_{A,\gamma}^{B} \vec{F}(x,y,z)\cdot d\vec{r} = \int_{A,\gamma}^{B} F_x(x,y,z)\cdot dx + F_y(x,y,z)\cdot dy + F_z(x,y,z)\cdot dz = \\ &= -\int_{A,\gamma}^{B} \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial y}\cdot dy + \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z}\cdot dz = -\int_{A,\gamma}^{B} dU = U(A) - U(B) \end{aligned} \tag{26}$$

Nella (26) si fa uso della proprietà:

$$dU(x,y,z) = \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial y}\cdot dy + \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z}\cdot dz$$

già utilizzata nella teoria degli errori: la variazione differenziale di una funzione di piu' variabili è uguale (a meno di termini di ordine superiore) alla somma delle derivate parziali prima rispetto ad ogni singola variabile.

**Note:**

**a)** la (26) afferma che **il lavoro di una forza conservativa è indipendente dal cammino $\gamma$;**

b) il lavoro lungo una curva chiusa è nullo;

c) il lavoro tra 2 punti A e B lungo il cammino $\gamma$ è dato dalla differenza di energia potenziale, che cancella le eventuali costanti della definizione di energia potenziale.

**7.2 Teorema del Lavoro in presenza di forze conservative**

Se la forza totale $\vec{F}_T$ agente su un punto fisico è data dalla somma di forze non conservative $\vec{F}^{NC}$ e conservative $\vec{F}^{C}: \vec{F}_T = \vec{F}^{NC} + \vec{F}^{C}$, il teorema del lavoro si scrive come:

$$\begin{aligned} W_{A,B,\gamma} &\equiv \int_{A,\gamma}^{B} \vec{F}_T(x,y,z)\cdot d\vec{r} = \int_{A,\gamma}^{B} \vec{F}^{NC}(x,y,z)\cdot d\vec{r} + \int_{A,\gamma}^{B} \vec{F}^{C}(x,y,z)\cdot d\vec{r} = \\ &= W^{NC}_{A,B,\gamma} + U(A) - U(B) = E_c(B) - E_c(A) \end{aligned} \tag{27}$$

L'eq. (27) diventa di importanza fondamentale quando non sono presenti forze non conservative; in questo caso il lavoro non conservativo $W_{A,B,\gamma}^{NC}$ è nullo e si ottiene:

$$U(A) - U(B) = E_c(B) - E_c(A) \Rightarrow E_c(B) + U(B) = E_c(A) + U(A) \quad (28)$$

L'equazione (28) afferma che in assenza di forze non conservative la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale di una massa puntiforme è costante durante il proprio moto. La somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale è chiamata energia meccanica totale:

$E_T \equiv E_c + U$ e l'eq. (28) si traduce nel noto **teorema della conservazione dell'energia**.

## 8. Forze conservative e non conservative

Per verificare se una forza è conservativa o meno bisogna verificare che esista una $U(x, y, z)$ con le caratteristiche descritte sopra. Prendiamo in considerazione le forze di cui ci occupiamo in genere nella fisica classica.

1) **Gravità sulla superficie terrestre**: è facile verificare che assumendo un sistema di riferimento con asse verticale $y$ positivo dal basso verso l'alto, la funzione $U(x, y, z) \equiv mgy + const$ soddisfa la richiesta dell'equazione (25).

***2)*** **Attrito dinamico**: questa forza ha la stessa direzione della velocità e la velocità di un punto non dipende dalle coordinate del punto. Infatti una massa puntiforme può passare dallo stesso punto con velocità diverse in istanti diversi. Ne segue che ***l'attrito dinamico non è una forza conservativa.***

***3)*** **Attrito viscoso**: questa forza è proporzionale alla velocità e la velocità di un punto non dipende dalle coordinate del punto. Quindi per le stesse ragioni espresse nel caso dell'attrito dinamico anche ***l'attrito viscoso non è una forza conservativa.***

4) **Attrito statico**: nello stesso punto (di contatto tra 2 superfici) l'attrito statico può avere valori diversi, ne segue che un'energia potenziale $U(x, y, z)$ (funzione del punto di coordinate *x,y,z*) che soddisfi la (25) nel caso dell'attrito statico non può esistere.

5) **Forza normale**: come nel caso dell'attrito statico, nello stesso punto la normale può avere valori diversi, quindi l'energia potenziale $U(x, y, z)$ (funzione del punto *x,y,z*) non esiste. Se però la superficie dove è applicata la forza normale è a riposo, il lavoro della normale è nullo perchè il moto del punto fisico è parallelo alla superficie o avviene fuori dalla superifice stessa (dove la normale è nulla).

6) **Tensione**: come nel caso dell'attrito statico e della forza normale, nello stesso punto la tensione può ssumere valori diversi quindi l'energia potenziale $U(x, y, z)$ (funzione del punto *x,y,z*) non esiste. Se ad esempio un'estremità della corda è fissata nel punto *O*, la massa connessa all'altra estremità subisce un lavoro nullo, perchè il moto del punto fisico avviene su una superficie sferica quando la distanza da *O* è uguale alla lunghezza della corda (in questo caso il moto è perpendicolare alla tensione) o dentro una sfera quando la distanza dal punto *O* è minore della lunghezza della corda (in questo caso la tensione è nulla).

7) **Forza di Lorentz**: l'esistenza di uno speciale tipo di potenziale (detto **potenziale vettore**) in presenza di campi elettromagnetici sarà trattata nel corso di Fisica II. Per quanto riguarda il teorema del lavoro, bisogna sottolineare che, se il campo magnetico è independente dal tempo, $\vec{B} = \vec{B}(x, y, z)$, la forza di Lorentz non produce nessun lavoro.

Se ricordiamo che il risultato di un prodotto vettoriale è un vettore perpendicolare al piano in cui stanno i due vettori, abbiamo:

$$W_{A,\gamma}^{B} = \int_{A,\gamma}^{B} \vec{F}_L \cdot d\vec{r} = q \cdot \int_{A,\gamma}^{B} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r} = q \cdot \int_{A,\gamma}^{B} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = q \cdot \int_{A,\gamma}^{B} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} dt = 0 \quad (29)$$

8) **Forza di gravità**: la forza gravitazionale generata da una massa puntiforme $m_0$, posizionata in $\vec{r}_0$ ($x_0, y_0, z_0$), su una massa puntiforme $m$, posizionata in $\vec{r}$ ($x, y, z$), si scrive come $\vec{F}_G \equiv -\gamma \cdot \frac{m \cdot m_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^2} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}$ e può essere riscritta usando proprietà geometriche:

$$\vec{F}_G(x, y, z) = -\gamma \cdot m_0 m \cdot \frac{(x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k}}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)]^{\frac{3}{2}}} \quad (30)$$

Si può facilmente verificare, applicando le derivate parziali, che l'energia potenziale:

$$U(x, y, z) = -\gamma \frac{m \cdot m_0}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}} \quad (31)$$

soddisfa la (25).

**Proprietà additiva del potenziale gravitazionale**

Se un numero $N$ di masse $m_i$ sono distribuite con coordinate spaziali $(x_i, y_i, z_i)$, esse producono su un punto di massa $m$ una forza totale:

$$\vec{F}(x, y, z) \equiv \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i(x, y, z) = -\gamma \cdot m \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{(x - x_i)\vec{i} + (y - y_i)\vec{j} + (z - z_i)\vec{k}}{[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2]^{3/2}} \quad (32)$$

Ogni singola forza $\vec{F}_i(x, y, z)$ ha energia potenziale $U_i(x, y, z)$ ed è facile dimostrare che $U(x, y, z)$, definita come segue, rappresenta l'energia potenziale della forza $\vec{F}(x, y, z)$:

$$U(x, y, z) \equiv \sum_{i=1}^{N} U_i(x, y, z) = -\gamma \cdot m \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}} \quad (33)$$

9) **Forza di Coulomb**

La forza di Coulomb generata da una carica puntiforme $q_0$, posizionata in ($x_0, y_0, z_0$), su una carica puntiforme q, posizionata in ($x, y, z$), è

$\vec{F}_E \equiv -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q \cdot q_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^2} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}$ e può essere riscritta usando proprietà geomtriche:

$$\vec{F}_E(x,y,z) = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{(x-x_0)\vec{i} + (y-y_0)\vec{j} + (z-z_0)\vec{k}}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)]^{\frac{3}{2}}} \qquad (34)$$

Si può facilmente verificare, applicando le derivate parziali, che l'energia potenziale:

$$U(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qq_0}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}}$$

soddisfa la (25).

**Proprietà additiva del potenziale di Coulomb**

Se un numero $N$ di cariche $q_i$ sono distribuite con coordinate spaziali $(x_i, y_i, z_i)$, esse producono su un punto di carica $q$ una forza totale:

$$\vec{F}(x,y,z) \equiv \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} q_i \frac{(x-x_i)\vec{i} + (y-y_i)\vec{j} + (z-z_i)\vec{k}}{[(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2]^{3/2}} \qquad (35)$$

Ogni singola forza $\vec{F}_i(x,y,z)$ ha energia potenziale $U_i(x,y,z)$ ed è facile dimostrare che $U(x,y,z)$, definita come segue, rappresenta l'energia potenziale della forza $\vec{F}(x,y,z)$:

$$U(x,y,z) \equiv \sum_{i=1}^{N} U_i(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}} \qquad (36)$$

10) **Forza Elastica**

**Energia potenziale elastica**

Una forza elastica $\vec{F}^E$ agisce lungo la direzione di una molla che ha lunghezza a riposo $l_0$ e costante elastica $k$. Se l'estremità della molla, non connessa al punto fisico, ha vettore posizione $\vec{r}_0$, la forza si scrive nalla sua forma piu' generale come:

$$\vec{F}^E = -k \cdot (|\vec{r} - \vec{r}_0| - l_0) \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|r - r_0|} \qquad (37)$$

Dove $|\vec{r} - \vec{r}_0|$ rappresenta la lunghezza della molla, $|\vec{r} - \vec{r}_0| - l_0$ è l'elongazione della molla e $\frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|r - r_0|}$ è la direzione della molla.

Se il moto di una particella subisce l'effetto di una forza elastica, avverrà lungo una linea retta (si pensi al caso di una massa *m* connessa ad una molla estesa su un piano orizzontale e, inizialmente a risposo), il sistema di riferimento piu' comodo avrà un asse (scegliamo *x*) nella direzione del moto e l'origine nell'estremità fissata della molla. In questo modo, $\vec{r}_0 = 0, \vec{r} = x \cdot \vec{i}$ e la forza elastica e l'energia potenziale elastica sono:

$$\begin{aligned} \vec{F}_e &= -k \cdot (x - l_0) \cdot \vec{i} \\ U_e &\equiv \frac{k}{2} \cdot (x - l_0)^2 \end{aligned} \qquad (38)$$

Forza ed energia potenziale delle eq. (38) soddisfano le condizione della (25), come può essere verificato derivando $U_e$ rispetto alle variabili *x*, *y, z*.

## 9. Forze centrali

Per descrivere le forze centrali risulta utile scegliere un sistema di coordinate nello spazio che è detto sistema di "coordinate sferiche".

### Coordinate sferiche

Le coordinate sferiche sono definite nel seguente modo:
dato un sistema di riferimento cartesiano con origine O, la prima coordinata è *r,* definita come la distanza, nello spazio, del punto fisico dall'origine O. Questa coordinata è anche il modulo del vettore spostamento del punto fisico e può anche essere valutato come $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
Un angolo $q$ è la seconda coordinata, definito come l'angolo tra il vettore spostamento $\vec{r}$ e l'asse z. La terza coordinata è l'angolo $j$ che rappesenta l'angolo che la proiezione del punto fisico sul piano (*x, y*) forma con l'asse *x*. È facile verificare che ogni punto fisico è completamente e univocamente rappresentato da una terna di coordinate (r, q, j), con: $0 \le r \le \infty$, $0 \le j \le \pi$ and $0 \le q \le 2\pi$. I 3 versori sono $\frac{\vec{r}}{r}$ e 2 vettori unitari $\vec{\tau}$ e $\vec{m}$, che giacciono in un piano perpendicolare a $\frac{\vec{r}}{r}$. Noi non daremo ulteriori dettagli per la definizione di $\vec{\tau}$ e $\vec{m}$, perché non è di interesse per i nostri scopi.
Il vettore spostamento è semplicemente scritto come $\vec{r} = r \cdot \frac{\vec{r}}{r}$. La variazione $d\vec{r}$ del vettore spostamento in coordinate sferiche è ottenuto facendo la derivata rispetto al tempo, ricordando il teorema della derivata di un prodotto:
.

$$d\vec{r} \equiv d(r \cdot \frac{\vec{r}}{r}) = dr \cdot \frac{\vec{r}}{r} + r \cdot d(\frac{\vec{r}}{r}) = dr \cdot \frac{\vec{r}}{r} + r \cdot \frac{d}{dt}(\frac{\vec{r}}{r}) \cdot dt \qquad (39)$$

Il secondo termine nella (39) contine la derivata di un vettore unitario $\frac{\vec{r}}{r}$, che come sappiamo è perpendicolare al vettore unitario stesso: $d(\frac{\vec{r}}{r}) = \frac{d}{dt}(\frac{\vec{r}}{r}) \cdot dt$ sta in un piano perpendicolare a $\frac{\vec{r}}{r}$ e può essere scomposto lungo $\vec{\tau}$ ed $\vec{m}$: $d(\frac{\vec{r}}{r}) = dr_\tau \cdot \vec{\tau} + dr_m \cdot \vec{m}$. Il differenziale $d\vec{r}$ si scrive dunque come:

$$d\vec{r} = dr \cdot \frac{\vec{r}}{r} + dr_\tau \cdot \vec{\tau} + dr_m \cdot \vec{m} \qquad (40)$$

**Nota:** la notazione $r$ per una coordinata è utilizzata anche in coordinate cilindriche ma il significato di $r$ in coordinate cilindriche è molto diverso: $r$ è la distanza della proiezione del punto mobile sul piano ($x$, $y$), mentre in coordinate sferiche è la distanza.

## Forze centrali

Una forza $\vec{F}_C(x,y,z) \equiv \vec{F}_C(\vec{r})$ che agisce su un punto P è chiamata ***"Forza Centrale"*** quando esiste un punto O fisso nello spazio tale che la direzione di $\vec{F}_C(\vec{r})$ è parallela al segmento $\overline{O}\vec{P} \equiv \vec{r}$ che unisce O al punto fisico e la componente $F_C$ della forza dipende solo dalla distanza $OP \equiv r$. Se il punto O è scelto come origine di un sistema di coordinate sferiche, la forza centrale è scritta come:

$$\vec{F}_C(\vec{r}) = F_C(r) \cdot \frac{\vec{r}}{r} \qquad (41)$$

**Esempi di forze centrali**

1) La forza gravitazionale $\vec{F}_G(x,y,z)$, generata da una massa fissa puntiforme $m_o$ su una massa $m$ a riposo, è centrale, in quanto diretta da $m$ a $m_o$ e dipende dalla distanza $r$, come risulta chiaro dalla definizione. In coordinate sferiche, assumendo la posizione di $m_o$ come origine, la forza gravitazionale è scritta come:

$$\vec{F}_G(x,y,z) = -\gamma \cdot \frac{m_0 m}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \qquad (42)$$

2) La forza di Coulomb è centrale poichè possiede le stesse caratteristiche della forza gravitazionale.

3) La forza elastica applicata su una massa $m$ da una molla (o un elastico), avente un'estremità fissata in O e $m$ collegata all'altra estremità, è centrale. Infatti la direzione della forza è lungo la molla e l'intensità dipende dalla distanza tra le estremità (sottratta della lunghezza $l_0$ a riposo della molla). Come per la gravità e la forza di Coulomb, assumendo l'estremità fissa della molla (o dell'elastico) come origine, in coordinate sferiche, la forza elastica è scritta come:

$$\vec{F}^E = -k \cdot (r - l_0) \cdot \frac{\vec{r}}{r} \qquad (43)$$

**Energia potenziale delle forze centrali**

Consideriamo una massa puntiforme *m* sottoposta ad una forza centrale $\vec{F}_C(r) = F(r)\cdot\frac{\vec{r}}{r}$ con un punto fisso *O*. Scegliamo *O* come l'origine del sistema di coordinate sferiche e chiamiamo $\vec{r}$ il vettore posizione di *m*.
Il lavoro fatto dalla forza centrale dal punto A al punto B lungo la traiettoria del moto $\gamma$ è:

$$W_{A,B,\gamma} = \int_{A,\gamma}^{B} \vec{F}_C(r)\cdot d\vec{r} = \int_{A,\gamma}^{B} F_C(r)\frac{\vec{r}}{r}\cdot d\vec{r} = \int_{A,\gamma}^{B} F_C(r)\frac{\vec{r}}{r}\cdot\left(dr\cdot\frac{\vec{r}}{r} + dr_\tau\cdot\vec{\tau} + dr_m\cdot\vec{m}\right) =$$
$$= \int_{A,\gamma}^{B} F_C(r)\cdot dr = \int_{A}^{B} F_C(r)\cdot dr \qquad (44)$$

Dove:

a) si è fatto uso delle proprietà della normale per i 3 vettori unitari $\frac{\vec{r}}{r}, \vec{\tau}, \vec{m}$;
b) l'ultimo integrale nella (44) è funzione di una sola variabile: quindi la traiettoria scompare.

Chiamiamo *f(r)* la funzione la cui derivata prima rispetto ad *r* è $F_C(r)$:

$$\frac{df}{dr} = F_C(r) \Leftrightarrow f(r) = \int F_C(r)\cdot dr \qquad (45)$$

L'ultimo integrale della (44) diventa:

$$W_{A,B,\gamma} = \int_A^B F_C(r)\cdot dr = \int_A^B \frac{df(r)}{dr}\cdot dr = \int_A^B df = f(B) - f(A) \qquad (46)$$

Inoltre se esiste la funzione energia potenziale $U_C(\vec{r})$, possiamo scrivere il lavoro:

$$W_{A,B,\gamma} = \int_A^B dU_C = U(B) - U(A) \qquad (47)$$

Uguagliando la (46) e la (47) per tutti gli intervalli (*A,B*), otteniamo:

$$U_C = f(r) + const.$$

Pertanto è stato dimostrato che la forza centrale è conservativa e che la sua energia potenziale è data dall'integrale dell'intensità della forza centrale (a meno di una costante additiva).

# 10. Momento angolare e Momento di una forza.

## 10.1 Momento angolare

Il “**momento aongolare**” $\vec{L}_O$ di un punto fisico di massa $m$ e con vettore di posizione $\vec{r}$, che si muove con una velocità $\vec{v}$, rispetto ad un punto $O$ scelto in modo arbitrario (chiamato polo), è una quantità vettoriale definita come:

$$\vec{L}_O \equiv (\vec{r} - \vec{r}_O) \times m \cdot \vec{v} \qquad (48)$$

dove $\vec{r}_O$ è il vettore di posizione di $O$.

**10.2 Momento della forza**

Quando una forza $\vec{F}$ agisce su un punto fisico di massa $m$ (con vettore di posizione $\vec{r}$) il momento $\vec{\tau}_O$ della forza rispetto ad un punto $O$ scelto in modo arbitrario (detto polo) con vettore di posizione $\vec{r}_O$,si definisce come:

$$\vec{\tau}_O \equiv (\vec{r} - \vec{r}_O) \times \vec{F} \qquad (49)$$

**Proprietà additiva del momento di una forza**

Se una forza si scrive come somma di altre forza: $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$,... il suo momento è:

$$\begin{aligned}&\vec{\tau}_O \equiv (\vec{r} - \vec{r}_O) \times \vec{F} = (\vec{r} - \vec{r}_O) \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + ...) = \\ &(\vec{r} - \vec{r}_O) \times \vec{F}_1 + (\vec{r} - \vec{r}_O) \times \vec{F}_2 + (\vec{r} - \vec{r}_O) \times \vec{F}_3 + ... = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \vec{\tau}_3 + ...\end{aligned} \qquad (50)$$

quindi il momento totale della forza è la somma dei momenti delle singole forze.

**10.3 Teorema del momento angolare**

Qunado un punto fisico di massa $m$ è soggetto alle forze $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3,...$ la cui somma è $\vec{F}_T$, la variazione del suo momento angolare rispetto al polo $O$ è uguale al momento totale delle forze meno il prodotto della velocità del polo (prodotto vettoriale) e la quantità di moto della massa.

**Dimostrazione:**

Ricordando la proprietà additiva e la II legge di newton si scrive:

$$\begin{aligned}&\frac{d\vec{L}_O}{dt} \equiv \frac{d((\vec{r} - \vec{r}_O) \times m \cdot \vec{v})}{dt} = (\dot{\vec{r}} - \dot{\vec{r}}_O) \times m \cdot \vec{v} + (\vec{r} - \vec{r}_O) \times m \cdot \dot{\vec{v}} = \\ &= -\dot{\vec{r}}_O \times m \cdot \vec{v} + (\vec{r} - \vec{r}_O) \times \vec{F}_T = -\dot{\vec{r}}_O \times m \cdot \vec{v} + \vec{\tau}_O^T\end{aligned} \qquad (51)$$

**Note:**

a) se il polo è fermo l'eq. (51) si riduce a : $\dfrac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\tau}_O^T$ (52)

b) se la velocità del polo è parallela a quella del punto si ha: $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\tau}_O^T$

c) le Equazioni (51) e (52) sono equazioni vettoriali: quindi ciscuana di esse si scompone in 3 equazioni scalari per le 3 componenti

d) Se le condizioni a) o b) sono soddisfatte e il momento totale della forza è $\vec{\tau}_O^T = 0$ otteniamo:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L}_O = const. \qquad (53)$$

quindi il momento angolare del punto è costante e questo vuole semplicemente dire che si conserva.