esercizi di AlgLinGeo 2017/18

8 - MATRICI ORTOGONALI, FORME QUADRATICHE

1. Costruire una matrice Q ortogonale che diagonalizza la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Data la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

(i) Trovare gli autovalori di A.
(ii) Trovare due autovettori linearmente indipendenti di A.
(iii) Trovare una matrice ortogonale P e una matrice diagonale D tali che $P^{-1}AP = D$. (Non è necessario verificare tale equazione)
(iv) Indicata con ${}^tP$ la trasposta di P, spiegare perchè $A = PD{}^tP$.

3. Provare che la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$
è diagonalizzabile; scrivere una matrice diagonale simile ad A e determinare tutte le basi ortonormali di autovettori che permettono di ottenerla.

4. Provare che la matrice
$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
è ortogonale e ha autovalori reali. Dire se è diagonalizzabile e vedere se esiste una base ortogonale di autovettori che permette di diagonalizzarla.

5. E' dato il sottospazio vettoriale $W = \mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ di $\mathbf{R}^4$, con $\mathbf{v}_1 = (1,1,1,1), \mathbf{v}_2 = (0,1,1,1), \mathbf{v}_3 = (0,0,1,1)$. Costruire una base ortonormale di W.

6. Studiare il segno della forma quadratica

$$q(x,y) = 5x^2 + 4xy + 8y^2$$

e trovare un cambiamento di coordinate ortonormali che permetta di scriverla in forma canonica.

7. Date le forme quadratiche

(a) $q(x,y) = \frac{3}{2}x^2 - xy + \frac{3}{2}y^2$;
(b) $q(x,y) = 3x^2 + 2\sqrt{7}xy - 3y^2$;
(c) $q(x,y) = x^2 + 2\sqrt{2}xy + 2y^2$

studiarne il segno al variare di $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

8. Data la forma quadratica f associata alla matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}$, quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) A ha 1 come autovalore;
(b) f non è definita;
(c) f è definita negativa;
(d) il polinomio caratteristico di A è $-T^2 + T$.

9. Sia data la forma quadratica $q(x, y) = x^2 - 2\sqrt{3}xy - y^2$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) Per ogni $(x, y) \neq (0, 0) \in \mathbf{R}^2$, $q(x, y) > 0$, cioe' q è definita positiva.
(b) Per ogni $(x, y) \neq (0, 0) \in \mathbf{R}^2$, $q(x, y) < 0$, cioe' q è definita negativa.
(c) $q(x, y)$ ha un autovalore nullo.
(d) La matrice simmetrica associata a $q(x, y)$ ha determinante negativo.

8 - SOLUZIONI

1. La matrice A è simmetrica reale, quindi sicuramente esiste la matrice Q. Gli autovalori di A sono 1 e 3; due corrispondenti autovettori sono per esempio $\mathbf{v}_1 = (1, -1), \mathbf{v}_2 = (1, 1)$ (che sono ortogonali). Siccome servono autovettori di norma 1, una matrice Q sar à per esempio

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. (i) $9, 4$. (ii) per esempio $(1, 2), (-2, 1)$.

3. A è simmetrica, quindi diagonalizzabile. Gli autovalori sono $0, 2, 3$. Gli autospazi sono tra loro ortogonali e generati ordinatamente dai vettori $\mathbf{u} = (-1, 2, 1), \mathbf{v} = (1, 0, 1), \mathbf{w} = (-1, -1, 1)$. Una matrice diagonale e' $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Una base ortogonale che induce D si ricava da : $\mathbf{u}' = \pm\frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}, \mathbf{v}' = \pm\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}, \mathbf{w}' = \pm\frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|}$.

4. Gli autovalori sono $-1, 1$. L' autovalore 1 ha molteplicita' 2 e $dim(V_1) = 2$. Una base ortogonale e' per esempio $(-\sqrt{3}, 0, 3), (\sqrt{3}, 0, 1), (0, 1, 0)$.

5. E' facile verificare che $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ e' una base di W. Una base ortonormale di W si ricava per esempio dai vettori:

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 = (1, 1, 1, 1), \ \mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 = \left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$$

$$\mathbf{w}_3 = \left(0, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

calcolandone i corrispondenti versori

7.
(a) Gli autovalori sono $1, 2$, q e' definita positiva.

(b) Gli autovalori sono ± 4; una forma canonica e' $q = 4X^2 - 4Y^2 = 4(X - Y)(X + Y)$, quindi q si annulla sulle bisettrici del primo e terzo quadrante del sistema di riferimento $R(O, X, Y)$, e' positiva se $(X - Y)(X + Y) > 0$, cioe' in una coppia di angoli opposti al vertice individuati dalle bisettrici, negativa nell'altra coppia di angoli.

(c) Gli autovalori sono $3, 0$, q e' semidefinita positiva, una forma canonica e' $q = 3X^2$, q si annulla sulla retta $X = 0$.