Cinematica e dinamica dei moti relativi (parte I)

Prof. Stefania Bufalino
Corso PIU-ROR a.a. 2017/2018

Testo di riferimento: Mazzoldi, Nigro, Voci

Lezione del 10 Aprile 2018

Moti relativi

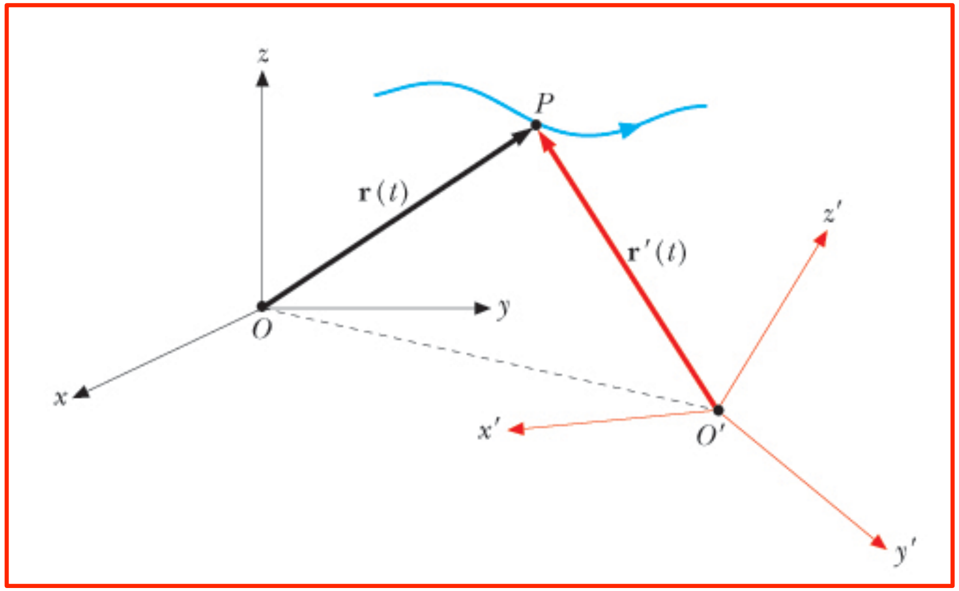
Come descrivere posizione, velocità e accelerazione di un punto materiale P in moto in due sistemi di riferimento cartesiani Oxyz e O'x'y'z'.

Supponiamo **Oxyz: sistema fisso** e **O'x'y: sistema mobile**

$\vec{r}'$ → Vettore posizione di P rispetto a O'x'y'z'

$\vec{r}$ → Vettore posizione di P rispetto a Oxyz

$$\vec{r} = \overline{OO'} + \vec{r}'$$



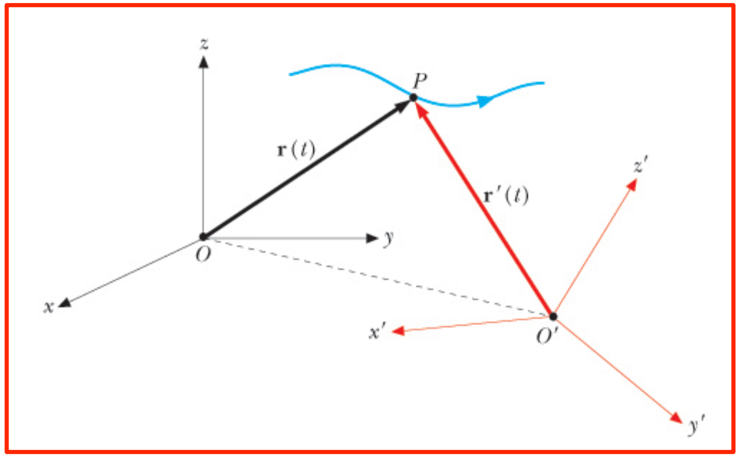
Velocità assoluta: osservatore solidale con sistema fisso

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}}$$

Velocità relativa: osservatore solidale con sistema mobile

$$\boxed{\vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{dx'}{dt}\hat{i}' + \frac{dy'}{dt}\hat{j}' + \frac{dz'}{dt}\hat{k}'}$$

Moti relativi



Velocità O' misurata da un osservatore solidale con sistema fisso

$$\boxed{v_{O'} = \frac{dOO'}{dt} = \frac{dx_{O'}}{dt}\hat{i} + \frac{dy_{O'}}{dt}\hat{j} + \frac{dz_{O'}}{dt}\hat{k}}$$

Derivando rispetto al tempo

$$\vec{r} = \overline{OO'} + \vec{r}\,'$$

$$v = \frac{dr}{dt} = \boxed{\frac{dOO'}{dt}} + \boxed{\frac{dr'}{dt}} =$$

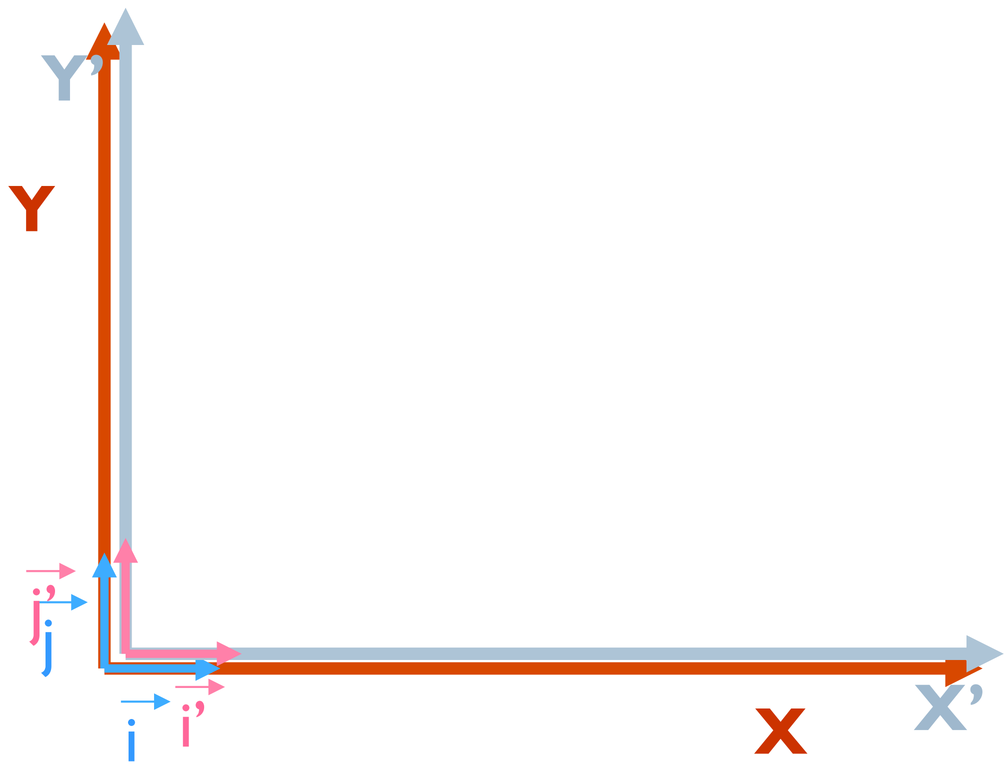
$$\boxed{\frac{dx_{O'}}{dt}\hat{i} + \frac{dy_{O'}}{dt}\hat{j} + \frac{dz_{O'}}{dt}\hat{k}} + \boxed{\frac{dx'}{dt}\hat{i}' + \frac{dy'}{dt}\hat{j}' + \frac{dz'}{dt}\hat{k}' + x'\frac{d\hat{i}'}{dt} + y'\frac{d\hat{j}'}{dt} + z'\frac{d\hat{k}'}{dt}}$$

$$\boxed{v = v'_o + v' + x'\frac{d\hat{i}'}{dt} + y'\frac{d\hat{j}'}{dt} + z'\frac{d\hat{k}'}{dt}}$$

Nota: nella variazione del vettore spostamento r' compaiono anche le derivate dei versori degli assi del sistema mobile

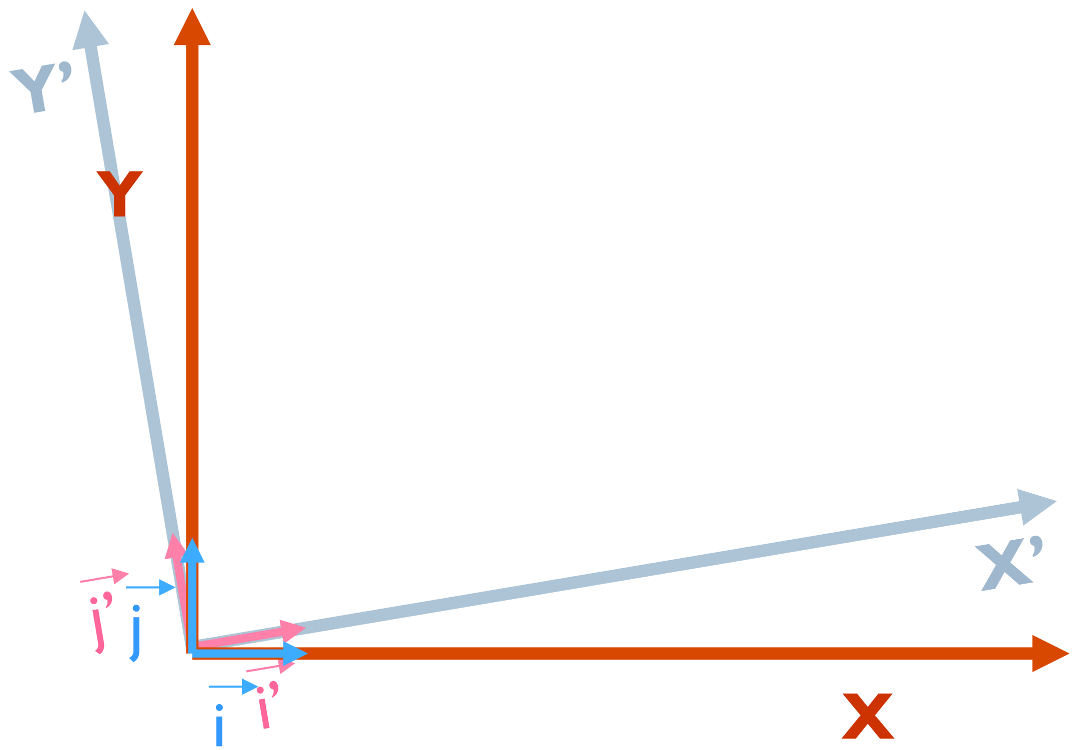
Moti relativi

Caso più generico quando il sistema di riferimento relativo ruota e varia anche l'orientazione dei versori



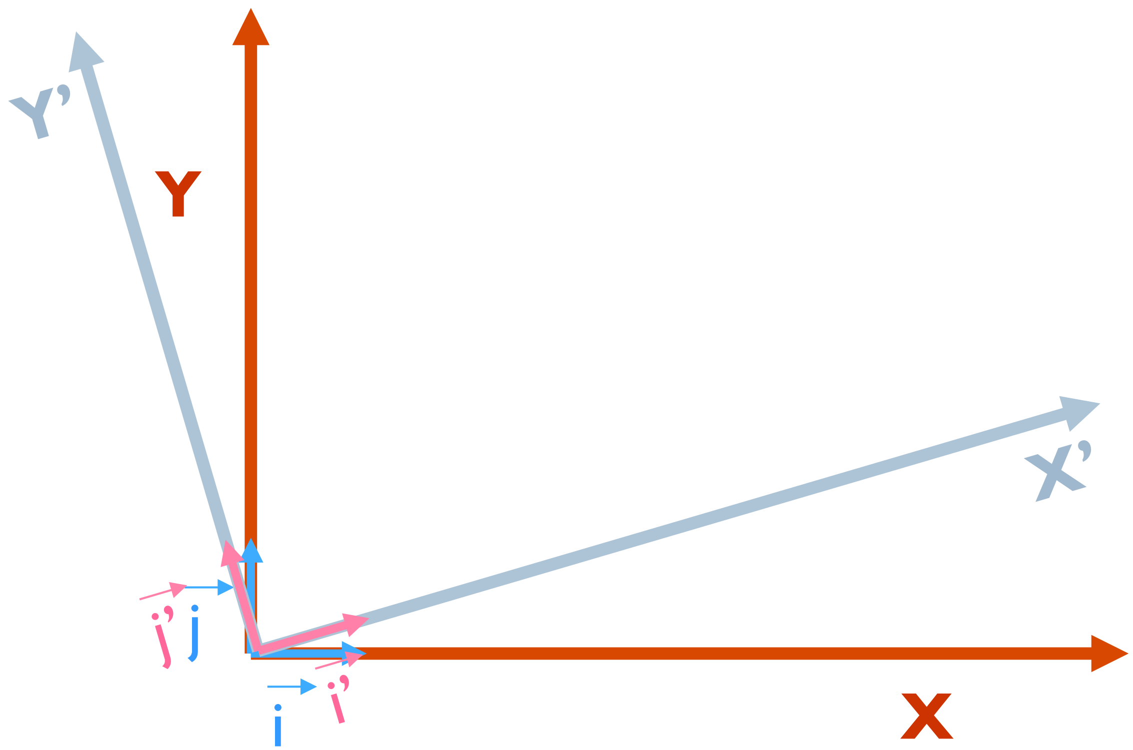
Moti relativi

Caso più generico quando il sistema di riferimento relativo ruota e varia anche l'orientazione dei versori



Moti relativi

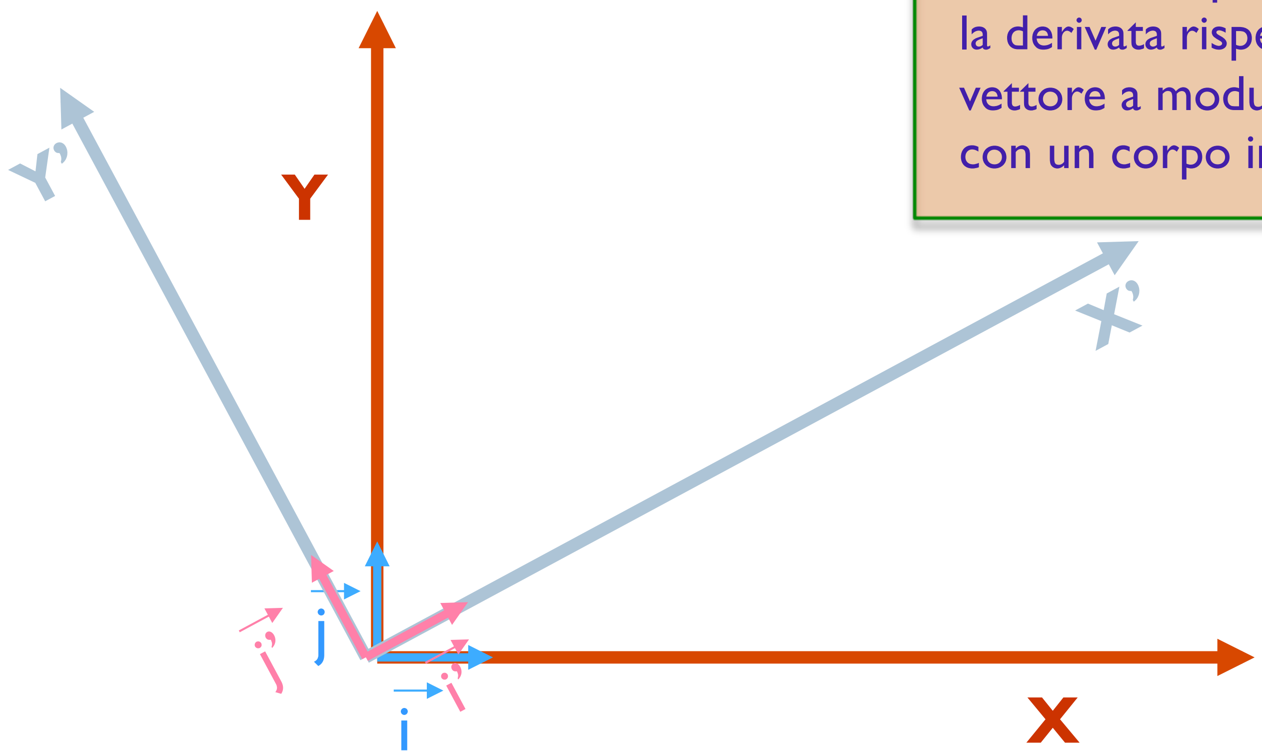
Caso più generico quando il sistema di riferimento relativo ruota e varia anche l'orientazione dei versori



Moti relativi

Caso più generico quando il sistema di riferimento relativo ruota e varia anche l’orientazione dei versori

Dobbiamo ricorrere alle formule di Poisson che permettono di ricavare la derivata rispetto al tempo di un vettore a modulo costante e solidale con un corpo in rotazione



Moti relativi

Formule di Poisson per ricavare le derivate rispetto al tempo di versori unitari

$$\frac{d\hat{i}}{dt} = \left(\frac{d\hat{i}}{dt}\cdot\hat{i}\right)\hat{i} + \left(\frac{d\hat{i}}{dt}\cdot\hat{j}\right)\hat{j} + \left(\frac{d\hat{i}}{dt}\cdot\hat{k}\right)\hat{k}$$

Componenti cartesiane come proiezioni del versore lungo i tre assi cartesiani

Il primo termine è nullo poiché sappiamo che la derivata di un versore è perpendicolare a se stesso.
Possiamo scrivere analogamente le derivate per tutti i versori

6 componenti NON indipendenti

Eq.(*)

$$\frac{d\hat{i}}{dt} = \left(\frac{d\hat{i}}{dt}\cdot\hat{j}\right)\hat{j} + \left(\frac{d\hat{i}}{dt}\cdot\hat{k}\right)\hat{k}$$

$$\frac{d\hat{j}}{dt} = \left(\frac{d\hat{j}}{dt}\cdot\hat{i}\right)\hat{i} + \left(\frac{d\hat{j}}{dt}\cdot\hat{k}\right)\hat{k}$$

$$\frac{d\hat{k}}{dt} = \left(\frac{d\hat{k}}{dt}\cdot\hat{i}\right)\hat{i} + \left(\frac{d\hat{k}}{dt}\cdot\hat{j}\right)\hat{j}$$

Set di derivate con componenti uguali in modulo a 2 a 2. Derivando i prodotti scalari $\hat{i}\cdot\hat{j}=0$ per tutte le combinazioni di versori si ottiene

$$\frac{d\hat{i}}{dt}\cdot\hat{j} = -\frac{d\hat{j}}{dt}\cdot\hat{i}$$

$$\frac{d\hat{i}}{dt}\cdot\hat{k} = -\frac{d\hat{k}}{dt}\cdot\hat{i}$$

$$\frac{d\hat{j}}{dt}\cdot\hat{k} = -\frac{d\hat{k}}{dt}\cdot\hat{j}$$

Moti relativi

Passiamo a definire un vettore ω che ha le seguenti componenti

$$\omega_x = \frac{d\hat{j}}{dt} \cdot \hat{k} \qquad \omega_y = \frac{d\hat{k}}{dt} \cdot \hat{i} \qquad \omega_z = \frac{d\hat{i}}{dt} \cdot \hat{j}$$

Dalle proprietà del prodotto vettoriale scritto
in forma matriciale e ricordando le eq (*) si ottiene:

$$\frac{d\hat{i}}{dt} = \omega_z \hat{j} - \omega_y \hat{k} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{\omega} \times \hat{i}$$

$$\frac{d\hat{j}}{dt} = -\omega_z \hat{i} + \omega_x \hat{k} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{\omega} \times \hat{j}$$

$$\frac{d\hat{k}}{dt} = \omega_y \hat{i} - \omega_x \hat{j} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{\omega} \times \hat{k}$$

Moti relativi: Teorema delle velocità relative

Possiamo quindi scrivere le formule di Poisson per il sistema mobile tenendo conto dell'esistenza del vettore ω tramite il quale esprimere le tre derivate:

$$\boxed{\frac{d\hat{i}'}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{i}'} \qquad \boxed{\frac{d\hat{j}'}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{j}'} \qquad \boxed{\frac{d\hat{k}'}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{k}'}$$

Alla rotazione di uno dei versori con velocità angolare ω corrisponde una rotazione degli altri due versori con uguale velocità angolare

Riscriviamo $$\boxed{v = v_o' + v' + x'\frac{d\hat{i}'}{dt} + y'\frac{d\hat{j}'}{dt} + z'\frac{d\hat{k}'}{dt}}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} v &= v_{O'} + v' + x'(\vec{\omega} \times \hat{i}') + y'(\vec{\omega} \times \hat{j}') + z'(\vec{\omega} \times \hat{k}') = \\ &= v_{O'} + v' + \vec{\omega} \times (x'\hat{i}' + y'\hat{j}' + z'\hat{k}') \end{aligned}$$

$$\boxed{\Rightarrow v = v_{O'} + v' + \vec{\omega} \times \vec{r}'}$$

Il **Teorema delle velocità relative** lega le velocità nei due sistemi di riferimento: fisso e mobile

Moti relativi: velocità di trascinamento

Velocità di trascinamento

$$\boxed{v_t = v - v' = v_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}'}$$

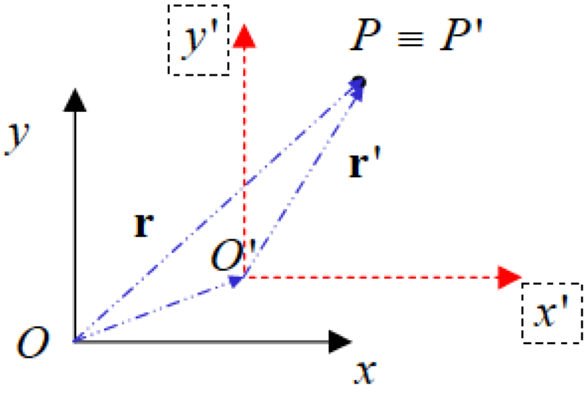
-Se il punto fisico P fosse fermo rispetto al sistema mobile la sua velocità misurata dal sistema fisso coinciderebbe con la velocità di trascinamento

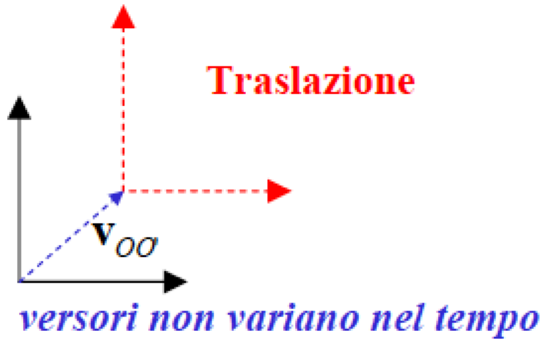
-Se il punto fisico P si muove rispetto al sistema mobile il teorema delle velocità relative ci dice che la velocità assoluta è la somma della velocità di trascinamento e di quella relativa

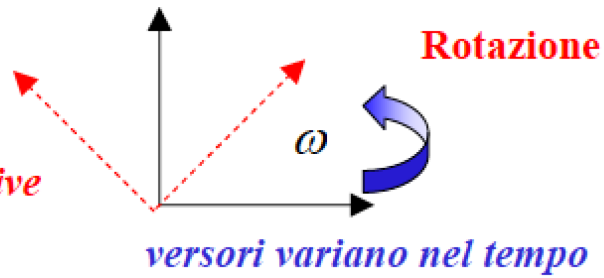
MOTO DI TRASCINAMENTO:
TERMINE TRASLATORIO CON VELOCITA' ISTANTANEA $V_{0'}$ + TERMINE ROTATORIO VARIABILE SIA IN MODULO CHE DIREZIONE

Moti relativi: Teorema delle velocità relative

Teorema delle velocità relative







In generale si può dimostrare che:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_{OO'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$$ *Teorema delle velocità relative*

Termine correttivo per passare da un sistema all'altro: velocità di trascinamento v_t

$$\mathbf{v}_t = \mathbf{v} - \mathbf{v}' = \mathbf{v}_{OO'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \quad \begin{cases} \text{se} \quad \boldsymbol{\omega} = 0 \quad \Rightarrow \mathbf{v}_t = \mathbf{v}_{OO'} & \textit{(solo traslazione -caso già visto)} \\ \text{se} \quad \mathbf{v}_{OO'} = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_t = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' & \textit{(solo rotazione)} \end{cases}$$

Moti relativi: Teorema delle accelerazioni relative

Accelerazione assoluta (rispetto al sistema fisso) $\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{k}$

Accelerazione relativa (rispetto al sistema mobile) $\vec{a}' = \frac{d^2x'}{dt^2}\hat{i}' + \frac{d^2y'}{dt^2}\hat{j}' + \frac{d^2z'}{dt^2}\hat{k}'$

L'accelerazione si determina derivando rispetto al tempo la velocità espressa nel teorema delle velocità relative

$$\boxed{\begin{aligned} &\vec{v} = \vec{v}_{O'} + \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}' \\ &\Rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_{O'}}{dt} + \frac{d\vec{v}'}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}'}{dt} \end{aligned}}$$

Utilizzando nuovamente le formule di Poisson per il calcolo delle derivate degli assi mobili si ottiene

$$\boxed{\frac{dv'}{dt} = \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{v}'} \qquad \boxed{\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})}$$

Moti relativi: Teorema delle accelerazioni relative

Definendo con $\vec{a}_{O'}$ l'accelerazione dell'origine del sistema mobile rispetto all'origine del sistema fisso O possiamo scrivere

$$\vec{a} = \vec{a}' + \boxed{\vec{a}_{O'} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,') + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}\,'} + \boxed{2\vec{\omega} \times \vec{v}\,'}$$

a_t: accelerazione di trascinamento, dipende dai parametri del moto relativo tra i due sistemi di riferimento

a_c: accelerazione complementare o di Coriolis e dipende dal moto di P rispetto al sistema mobile (v')

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_c \quad \begin{cases} \text{se} \quad \boldsymbol{\omega} = 0 \quad \Rightarrow \vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{O'} & \textit{(solo traslazione -caso già visto)} \\ \text{se} \quad \mathbf{v}_{OO'} = 0 \quad \Rightarrow \vec{a} = \vec{a}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,') + \dfrac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}\,' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}\,' & \textit{(solo rotazione)} \end{cases}$$