25- Regole di integrazione
Integrali impropri

RICHIAMO

Integrazione per parti

$$\int \underbrace{x e^x}_{\text{prodotto di 2 funzioni}} dx$$

$$\int \underbrace{f' g} = \int (fg)' - \int f g'$$

$$\int f' g = fg - \underbrace{\int f g'}_{}$$

FORMULA DI INTEGRAZIONE PER PARTI

obiettivo: ottenere un integrale più semplice

nell'esempio:

$$\boxed{\int x e^x dx} :$$

x ← g, e^x ← f'

$g \dashrightarrow g' = 1 \Rightarrow \int g' f$ sarà più semplice

Se sceglievo: $x = f'$ e $e^x = g$

$$\int \underset{\substack{\uparrow \\ f' \Rightarrow f(x) = \frac{x^2}{2}}}{x}\, e^x = \frac{x^2}{2} e^x - \underbrace{\int \frac{x^2}{2} e^x}_{\text{più complicato rispetto all'integrale di partenza}}$$

---

es: $\boxed{\int \log(x)\,dx}$

$$= \int \underset{\substack{\uparrow \\ f'}}{1} \cdot \underbrace{\log(x)}_{g} = x \log x - \underbrace{\int x \frac{1}{x}\,dx}_{= \int 1\,dx = x + c}$$

$$\Rightarrow \int \log(x)\,dx = x \log x - x + c$$

---

es: $\boxed{\int \sin^2(x)\,dx}$

$$\int \underbrace{\sin(x)}_{f'} \underbrace{\sin(x)}_{g}\,dx =$$

$$= -\cos(x)\sin(x) - \int -\cos(x)\cos(x)\,dx$$

$$= -\cos(x)\sin(x) + \int \underbrace{\cos^2(x)}_{= 1 - \sin^2 x}\,dx$$

$$\int \sin^2(x)\,dx = -\cos(x)\sin(x) + \underbrace{\int \left(1 - \sin^2(x)\right)dx}_{\int 1 - \int \sin^2 x\,dx}$$

$$\Rightarrow 2\int \sin^2(x)\,dx = -\cos(x)\sin(x) + \int 1\,dx$$

$$\Rightarrow \int \sin^2(x)\,dx = \frac{1}{2}\left(-\cos(x)\sin(x) + x\right) + C$$

es: $\boxed{\int \underbrace{x^2}_{g}\, \underbrace{\sin(x)}_{f'}\, dx}$

A VOLTE BISOGNA INTEGRARE PER PARTI PIÙ VOLTE

PER PARTI

$$\stackrel{\downarrow}{=} -\cos(x)\, x^2 - \int -(\cos x)\, 2x\, dx$$

$$= -\cos(x)\, x^2 + 2 \int \underbrace{x}_{g}\, \underbrace{\cos(x)}_{f'}\, dx$$

ANCORA PER PARTI

$$\stackrel{\downarrow}{=} -x^2 \cos(x) + 2\left(x \sin(x) - \int \sin(x)\, dx \right)$$

$$= -x^2 \cos(x) + 2x \sin(x) + 2\cos(x) + c$$

CURIOSITÀ: - altro modo, utile se si deve integrare per parti più volte:

$$\int x^2 \sin(x)\, dx = -x^2\cos(x) + 2x\sin(x) + 2\cos(x) + c$$

$$\begin{array}{cc} \text{DERIVO} & \text{INTEGRO} \\ x^2 & \\ 2x & -\cos(x) \\ 2 & -\sin(x) \\ 0 & \cos(x) \end{array}$$

esercizio: calcolare

$$\int (x^3+1)\, e^{2x}\, dx$$

Integrazione per sostituzione

Richiamo: derivata della funzione composta:

$$\big(F(\varphi(x))\big)' = F'(\varphi(x))\,\varphi'(x)$$

si integra

$$\Longrightarrow \int F'(\underbrace{\varphi(x)}_{u})\,\underbrace{\varphi'(x)dx}_{du} = F(\varphi(x)) + c$$

$u \quad \varphi(x)$

$du \quad \varphi'(x)\,dx$

$$= \int F'(u)\,du = F(u)+c = F(\varphi(x))+c$$

esempio:

$$\int \cos(x)\, e^{\sin(x)}\, dx =$$

$$u \overset{def}{=} \sin(x)$$

$$du = \cos(x)dx$$

$$= \int e^u\, du = e^u + c = e^{\sin(x)} + c$$

es: $\frac{t}{1+t^4}\, dt =$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2t}{1+(t^2)^2}\, dt$$

$$y = t^2$$

$$dy = 2t\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+y^2}\, dy = \frac{1}{2}\arctan(y) + c$$

$$= \frac{1}{2}\arctan(t^2) + c$$

---

es: $\int \tan(x)\,dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,dx$

SOSTITUZIONE

$$= -\int \frac{1}{y}\,dy = -\log|y| + c$$

$y = \cos(x)$ $\qquad = -\log|\cos(x)| + c$

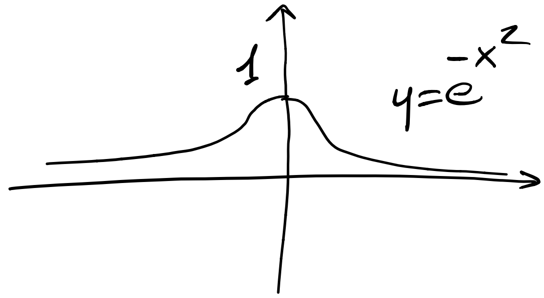
$dy = -\sin(x)\,dx$

Funzioni dotate di primitive che non si possono scrivere in termini di funzioni elementari:

$$f(x) = e^{-x^2}$$

PARI

dom $f = \mathbb{R}$



GAUSSIANA

continua

una primitiva è la funzione integrale:

$$F(x) \overset{def}{=} \int_0^x e^{-t^2}\,dt$$, quindi possiamo

scrivere: $\Rightarrow \int e^{-x^2}\,dx = F(x) + c$

è possibile studiare la funzione $F(x)$:

$F(0) = 0$

$F'(x) = e^{-x^2} > 0 \Rightarrow F$ crescente

(funzione usata in probabilità e statistica)

F non si può scrivere tramite le funzioni elementari

Un altro esempio:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

dom $f = \mathbb{R}$ e f continua

$$\int \frac{\sin(x)}{x}\,x = F(x) + c$$

funzione integrale

$$F(x) \overset{\text{def}}{=} \int_a^x \frac{\sin(x)}{x}\,dx = Si(x)$$

im elettronica

SENO INTEGRALE

anche $S_i(x)$ non si può scrivere tramite le funzioni elementari

Integrazione di funzioni razionali

es 1: $\boxed{\int \frac{1}{(x-1)^n}\,dx}$

se $n = 1$: $\int \frac{1}{x-1}\,dx = \log|x-1| + c$

se $n \neq 1$: $\int (x-1)^{-n}\,dx = \frac{1}{-n+1}(x-1)^{-n+1} + c$

---

es.2 $\boxed{\frac{1}{2}\int \frac{2x}{(1+x^2)}\,dx}$

$t = 1+x^2$

$dt = 2x\,dx$

SOSTITUZIONE

$$\overset{\downarrow}{=} \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^n}\,dt = \begin{cases} \text{se } n=1 & \frac{1}{2}\log|t|+c \\ \text{se } n\neq 1: & \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-n}\,t^{1-n}+c \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int \frac{x}{(1+x^2)^n} = \begin{cases} \frac{1}{2}\log\left(1+x^2\right)+c & \text{se } n=1 \\ \frac{1}{2(1-n)}\left(1+x^2\right)^{1-n}+c & \text{se } n\neq 1 \end{cases}$$

<u>es 3</u>

$$\boxed{\int \frac{1}{1+x^2}\,dx} = \arctan(x)+c$$

$$\boxed{\int \frac{1}{(x+2)^2+2}\,dx} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(\frac{x+2}{\sqrt{2}}\right)+1}\,dx$$

$$t = \frac{x+2}{\sqrt{2}} \Rightarrow dt = \frac{dx}{\sqrt{2}} \Rightarrow dx = \sqrt{2}\,dt$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2+1} \sqrt{2}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(t) + c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x+2}{\sqrt{2}}\right) + c$$

---

es 4 : $\boxed{\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\, dx}$

STRATEGIA

$$\frac{1}{(1+x^2)^2} \overset{\downarrow}{=} \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{1+x^2}{(1+x^2)^2} - \frac{x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{1}{(1+x^2)^1} - \frac{x^2}{(1+x^2)^2}$$

DA STUDIARE:

$$\Longrightarrow \int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \underbrace{\int \frac{1}{1+x^2} dx}_{= \arctan(x)} - \underbrace{\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx}_{\text{DA STUDIARE:}}$$

$$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{-2}\int \underbrace{x}_{g}\ \underbrace{\frac{-2x}{(1+x^2)^2}}_{f'} =$$

$$f(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

$$\underset{\text{per parti}}{=} -\frac{1}{2}\,\frac{x}{1+x^2} - \int -\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$= -\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\arctan(x) + c$$

Riassumendo:

$$\Rightarrow \int \frac{1}{(1+x^2)^2} = \arctan(x) - \left(-\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\arctan(x)\right) + c$$

$$= \frac{1}{2}\arctan(x) + \frac{x}{2(1+x^2)} + c$$

ALGORITMO per integrare le funzioni razionali:

$$\int \frac{A(x)}{B(x)}\,dx \qquad \text{con } A \text{ e } B \text{ polinomi}$$

Passo 1: se $\deg A \geq \deg B$ effettuare la divisione

$$\frac{A(x)}{B(x)} = D(x) + \frac{R(x)}{B(x)}$$

con D, R polinomi, $\deg R < \deg B$

$$\Rightarrow \int \frac{A(x)}{B(x)}\,dx = \int \underbrace{D(x)}_{\substack{\text{polinomio} \\ \text{FACILE da INTEGRARE}}}\,dx + \int \underbrace{\frac{R(x)}{B(x)}}_{\substack{\text{funzione razionale} \\ \text{con } \deg R < \deg B}}\,dx$$

quindi dobbiamo studiare: $\int \frac{R(x)}{B(x)}\,dx$.

Passo 2: decomposizione in FRATTI SEMPLICI di $\frac{R(x)}{B(x)}$:

2.1: si scrive la rappresentazione del denominatore $B(x)$ in fattori irriducibili in $\mathbb{R}$

es1: $B(x) = x^4 - 1$

$$= (x^2-1)(x^2+1)$$

$$= (x-1)(x+1)(x^2+1)$$

es 2: $B(x) = x^2 (x^2+4x+6)$

$$\Delta = 16 - 20 < 0$$

B non si fattorizza ulteriormente in $\mathbb{R}$

2.2: vediamo con un esempio esplicito:

$$\int \frac{6x^3+8x^2+16x+6}{x^2(x^2+4x+6)}\,dx$$

$\deg(\text{NUMERATORE}) = 3 < 4 = \deg$ denominatore

e il denominatore è già "fattorizzato in $\mathbb{R}$"

Decomposizione in fratti semplici:

$$\frac{6x^3+8x^2+16x+6}{x^2(x^2+4x+6)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+4x+6} =$$

Calcoliamo le costanti A, B, C, D:

$$= \frac{Ax(x^2+4x+6)+B(x^2+4x+6)+x^2(Cx+D)}{x^2(x^2+4x+6)}$$

$\Rightarrow$ i numeratori devono essere uguali:

$$6x^3+8x^2+16x+6 = Ax^3+4Ax^2+6Ax+$$
$$+Bx^2+4Bx+6B+Cx^3+Dx^2$$

$$\begin{cases} 6 = A+C \\ 8 = 4A+B+D \\ 16 = 6A+4B \\ 6 = 6B \end{cases}$$

PRINCIPIO DI IDENTITÀ DEI POLINOMI: le potenze uguali hanno coefficienti uguali

$B=1$, $16 = 6A+4 \Rightarrow A=2$

$6 = 2 + C \Rightarrow C = 4$

$D = 8 - 8 - 1 = -1$

abbiamo ottenuto la decomposizione in fratti semplici:

$$\int \frac{6x^3+8x^2+16x+6}{x^2(x^2+4x+6)} = \underbrace{\int \frac{2}{x}}_{= 2\log|x|} + \underbrace{\int \frac{1}{x^2}}_{= -\frac{1}{x}} + \underbrace{\int \frac{4x-1}{x^2+4x+6}}_{\text{DA STUDIARE:}}$$

$$\frac{4x-1}{\underbrace{x^2+4x+6}} = \frac{2(2x+4)-8-1}{x^2+4x+6}$$

$(x^2+4x+6)' = 2x+4$

$$= 2\,\frac{2x+4}{x^2+4x+6} - \frac{9}{x^2+4x+6}$$

$$\int \frac{2x+4}{x^2+4x+6}\,dx \overset{\text{SOSTITUZIONE}}{=} \int \frac{dy}{y} =$$

$y = x^2+4x+6$

$$= \log|y| = \log\left(x^2+4x+6\right) + c$$

$$\int \frac{9}{x^2+4x+6}\,dx = 9\int \frac{1}{\underbrace{x^2+4x+4}_{(x+2)^2}+2}\,dx$$

$$= 9 \int \frac{1}{(x+2)^2+2}\,dx$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{VISTO}\\ \text{SOPRA}}}{=} \frac{9}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x+2}{\sqrt{2}}\right) + c$$

Riassumendo:

$$\int \frac{6x^3+8x^2+16x+6}{x^2\left(x^2+4x+6\right)}\,dx$$

$$= \int \frac{2}{x} + \int \frac{1}{x^2} + 2\int \frac{2x+4}{x^2+4x+6} - 9\int \frac{1}{x^2+4x+6}\,dx$$

$$= 2\log|x| - \frac{1}{x} + 2\log(x^2+4x+6) -$$

$$- \frac{9}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x+2}{\sqrt{2}}\right) + c$$

NOTA

Quando si effettua la decomposizione in fratti semplici: $\frac{A(x)}{B(x)}$

- ad ogni fattore di $B(x)$ della forma $(x-a)^m$ corrisponde la somma:

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_m}{(x-a)^m}$$

- ad ogni fattore di $B(x)$ della forma $(\underbrace{x^2+bx+c}_{\Delta<0})^k$ corrisponde

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+bx+c} + \dots + \frac{B_kx+C_k}{(x^2+bx+c)^k}$$

<u>NOTA</u>: usando la sostituzione, alcuni integrali si trasformano in integrali di funzioni razionali:

<u>es:</u> $\displaystyle\int \frac{1+e^x}{e^{2x}+e^x}\,dx$ con la sostituzione $y=e^x$, si ha

$dy = e^x\,dx = y\,dx$

$\Rightarrow dx = \frac{1}{y}\,dy$

$$\| $$

$$\int \frac{1+y}{y^2+y}\,\frac{1}{y}\,dx$$

$\leftarrow$ funzione razionale

Quindi, sia $R(x)$ una funzione razionale, cioè $R(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$ con $A(x), B(x)$ polinomi. Allora

$\int R(e^x)\,dx$ con la sostituzione $y = e^x$ $\quad dx = \frac{1}{y}\,dy$

diventa l'integrale di una funzione razionale nella variabile y.

altri esempi:

Integrali di alcune funzioni trascendenti

1) $\int R(e^x)\,\mathbf{d}x$, con R funzione razionale

E' utile la sostituzione

$$e^x = t \Rightarrow x = \log t$$

L'integrale è ricondotto ad un integrale di funzione razionale.

2) $\int \frac{1}{x} R(\log x)\,\mathbf{d}x$, con R funzione razionale

E' utile la sostituzione

$$\log x = t \Rightarrow x = e^t$$

L'integrale è ricondotto ad un integrale di funzione razionale.

3) $\int R(\cos x, \sin x)\,\mathbf{d}x$, con R funzione razionale

E' utile la sostituzione

$$t = \tan\frac{x}{2} \Rightarrow x = 2\arctan t$$

ricordando le formule parametriche:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

L'integrale è ricondotto ad un integrale di funzione razionale.

4) $\int R(\sin x)\cos x\,\mathbf{d}x$ oppure $\int R(\cos x)\sin x\,\mathbf{d}x$, con R funzione razionale

E' utile la sostituzione

$$\sin x = t \qquad \text{oppure, nel secondo caso,} \qquad \cos x = t$$

5) $\int R(\tan x)\,\mathbf{d}x$, con R funzione razionale

E' utile la sostituzione

$$t = \tan x \Rightarrow x = \arctan x$$

Integrali di alcune funzioni irrazionali

$\int R(x^{r_1/s_1}, \ldots, x^{r_k/s_k})\,\mathbf{d}x$, con R funzione razionale

E' utile la sostituzione

$$x = t^n$$

con n il minimo comune multiplo tra $s_1, \ldots, s_k$.

——— o ———

Integrali impropri

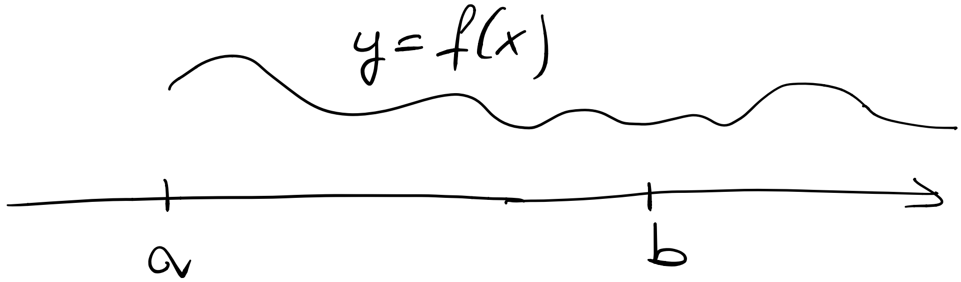
Richiamo: abbiamo definito l'integrale di Riemann per una funzione

1) f definita su un intervallo limitato
2) f limitata

rimuoviamo l'ipotesi 1)

consideriamo una funzione continua f, definita su una semiretta:

$$f:[a,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{continua}$$

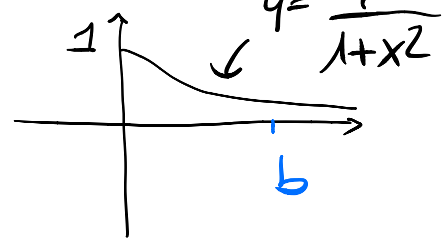


$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

INTEGRALE IMPROPRIO

esempi :

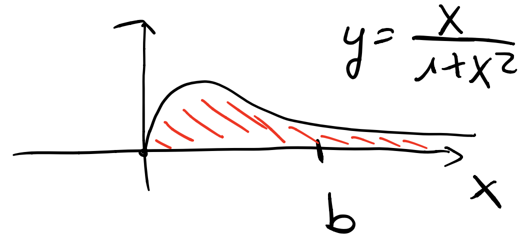
1) $$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$



$$\int_0^{b} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(b) - \arctan(0)$$
$$= \arctan(b)$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \arctan(b) = \frac{\pi}{2}$$

2) $$\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

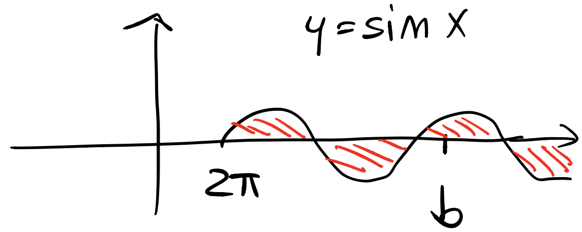


$$\int_0^{b} \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\log(1+x^2)\Big|_{x=0}^{x=b}$$

$$= \frac{1}{2}\log(1+b^2) - \frac{1}{2}\underbrace{\log 1}_{=0} = \frac{1}{2}\log(1+b^2)$$

$$\Longrightarrow \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{2}\log(1+b^2) = +\infty$$

3) $$\int_{2\pi}^{+\infty} \sin(x)\,dx$$



$$\int_{2\pi}^{b} \sin(x)\,dx = -\cos(x)\Big|_{2\pi}^{b} =$$

$$= -\cos(b) + \cos(2\pi) = 1 - \cos(b)$$

$$\Longrightarrow \int_{2\pi}^{+\infty} \sin(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} 1-\cos(b)$$

NON ESISTE

<u>Definizione</u>:

$f: [a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ continua

$b \geq a$ e sia $F(b) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b f(x)\,dx$

consideriamo $\lim_{b \to +\infty} F(b) = \boxed{\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx}$:

- Se $\exists$ finito, allora l'integrale improprio $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ si dice convergente e $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx$

- Se $= +\infty$ oppure $-\infty$, allora l'integrale improprio $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ si dice divergente

- Se $\nexists$, allora l'integrale improprio si dice indeterminato (oscillante)

Teorema:

$f: [a,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ continua

$f \geq 0$ su $[a,+\infty)$

Allora l'integrale improprio

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ è convergente

oppure

divergente a $+\infty$

Dim: se $f \geq 0$ su $[a,+\infty)$

$$F(x) \overset{def}{=} \int_a^x f(t)dt \quad \text{per } x \geq a$$

se $a \leq x_1 < x_2$

$$F(x_2) = \int_a^{x_2} f(t)dt = \int_a^{x_1} f(t)dt + \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt$$

$$= F(x_1) + \overbrace{\int_{x_1}^{x_2} \underbrace{f(t)}_{\geq 0}dt}^{\geq 0} \geq F(x_1)$$

cioè $F(x_2) \geq F(x_1)$ se $x_1 < x_2$

cioè F è crescente su $[a, +\infty)$

$$\underbrace{\lim_{x \to +\infty} F(x)}_{= \int_a^{+\infty} f(t)\,dt} = \sup_{[a,+\infty)} F(x) \begin{cases} \in \mathbb{R} \\ +\infty \end{cases}$$

limite di funzioni monotone

$\square$

<u>NOTA</u>: se $f \leq 0$ su $[a, +\infty)$

allora $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge

oppure diverge a $-\infty$

NOTA: $f: [a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $b > a$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{\substack{\text{integrale definito} \\ \text{esiste finito, in } \mathbb{R}}} + \int_b^{+\infty} f(x)\,dx$$

$\Longrightarrow$ i due integrali impropri hanno lo stesso comportamento.

Teorema criterio del confronto per integrali impropri

$f, g: [a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ continue

$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, +\infty)$

Allora:

② $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ CONVERGE $\Rightarrow$ $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ CONVERGE

③ $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ DIVERGE $\Rightarrow$ $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ DIVERGE

Dim: $b > a$

definiamo $F(b) \overset{def}{=} \int_a^b f(x)dx$

$G(b) \overset{def}{=} \int_a^b g(x)dx$

allora

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \Rightarrow 0 \leq F(b) \leq G(b)$$

e F e G crescenti $\Rightarrow$ F e G ammettono limite a $+\infty$ (finito o $+\infty$)

Si applica il teorema del confronto dei limiti a F, G o —

Esempio importante

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx \qquad \alpha > 0$$

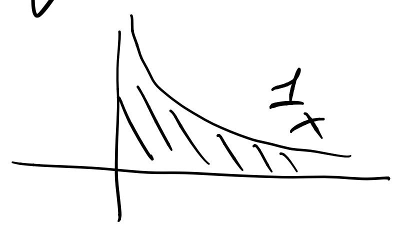
se $\alpha = 1$

$$\int_1^b \frac{1}{x}\, dx = \log x \Big|_1^b =$$

$$= \log b - \log 1 = \log b$$

$$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{b \to +\infty} \log b = +\infty$$

DIVERGE



se $\alpha \neq 1$:

$$\int_1^b x^{-\alpha}\, dx = \frac{1}{1-\alpha}\, x^{-\alpha+1} \Big|_1^b$$

$$= \frac{1}{1-\alpha}\left(b^{-\alpha+1} - 1\right)$$

$$\int_1^{+\infty} x^{-\alpha}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{1-\alpha}\left(b^{-\alpha+1}-1\right)$$

se $\overbrace{-\alpha+1>0}^{\alpha<1}$ il limite fa $+\infty$

se $\underbrace{-\alpha+1<0}_{\Leftrightarrow\ \alpha>1}$ il limite $\dfrac{1}{\alpha-1}$

<u>Conclusione</u>:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \quad \begin{cases} \text{diverge se } \alpha\leq 1 \\ \text{converge a } \dfrac{1}{\alpha-1} \text{ se } \alpha>1 \end{cases}$$

<u>p. es</u>:

$\int \frac{1}{x^2}$ conv.

$\int \frac{1}{x}$ diverge