13 – SIMBOLI DI LANDAU

f, g due funzioni definite in un intorno (bucato) di $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$

vogliamo confrontare il comportamento di f e di g "vicino" a x_0

- se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ FINITO e NON NULLO

  si dice che f e g sono dello stesso ordine e si scrive $\boxed{f \asymp g \quad \text{per } x \to x_0}$

- se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ si dice che

  che f e g sono equivalenti per x che tende a x_0 e si scrive $\boxed{f \sim g \quad \text{per } x \to x_0}$

- se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ si dice che

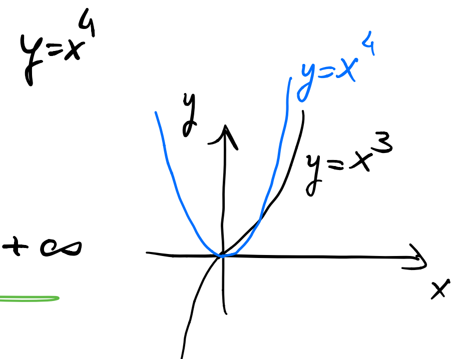
  f è un o-piccolo di g per x che tende a x_0 e si scrive $\boxed{f = o(g) \quad \text{per } x \to x_0}$

- se $\exists\, C>0 : \left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| \leq C$ $\forall x$ in un intorno bucato di x_0

allora si dice che f è un O-grande di g e si scrive $\boxed{f = O(g) \text{ per } x \to x_0}$

$\asymp$, $\sim$, o e O sono i simboli di Landau.

es: $f(x) = x^3 \qquad g(x) = x^4$



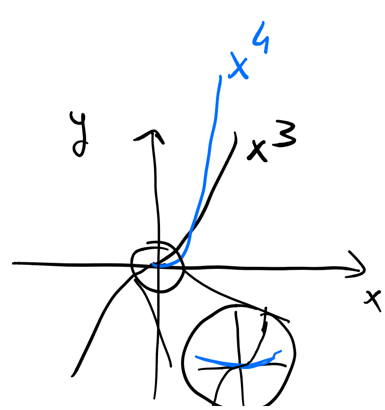
- $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^4} = 0$

$\Rightarrow \quad x^3 = o(x^4) \quad$ per $x \to +\infty$

si dice anche che x^3 è trascurabile rispetto a x^4 per $x \to +\infty$

- $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \quad \nexists$

$\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x^4}{x^3} = \lim_{x \to 0} x = 0$



$\Rightarrow \quad x^4 = o(x^3) \quad$ per $x \to 0$

Quindi

- "a $+\infty$ le potenze più basse sono trascurabili"

$$x^m = o(x^k) \quad \text{se } m < k$$

per $x \to +\infty$

- se $m < k$

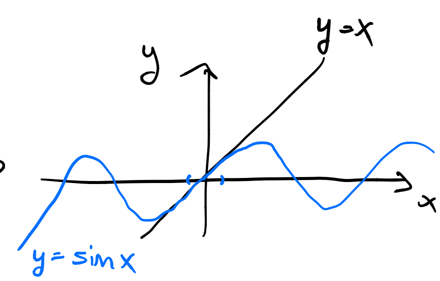
$$x^k = o(x^m) \quad \text{per } x \to 0$$

"in 0 le potenze più alte sono trascurabili"

——— o ———

es: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

$\Longrightarrow \quad \sin(x) \sim x \quad \text{per } x \to 0$



se $f \sim g$ per $x \to x_0$: in un intorno (piccolo) di x_0 i grafici di f e di g sono indistinguibili

——— o ———

Proprietà

① relazione tra $\asymp$ e $\sim$:

sia $f \asymp g$ per $x \to x_0$

questo vuol dire $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

osserviamo che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\ell\, g(x)} = \frac{1}{\ell} \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{\ell}\, \ell = 1$$

cioè $f \sim \ell g$ per $x \to x_0$

Cioè $\boxed{f \asymp g \text{ per } x \to x_0 \text{ con } \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \implies f \sim \ell g \text{ per } x \to x_0}$

es: $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$

$\implies 1-\cos(x) \asymp x^2$ per $x \to 0$

$1-\cos(x) \sim \frac{1}{2} x^2$ per $x \to 0$

è possibile sostituire il grafico di $1-\cos(x)$ con il grafico della parabola $\frac{x^2}{2}$ in un piccolo intorno di 0

$\boxed{f = o(1) \quad \text{per } x \to x_0}$

vuol dire $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{1} = 0$ cioè $f(x)$ è infinitesima per $x \to x_0$

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = 0}$$

proprietà di $\sim$:

<u>riflessiva</u>: $f \sim f$ per $x \to x_0$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{f(x)} = \lim_{x \to x_0} 1 = 1 \quad \checkmark$$

<u>simmetrica</u>: $f \sim g$ per $x \to x_0 \Rightarrow g \sim f$ per $x \to x_0$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \underset{f \sim g}{=} 1$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow g \sim f \text{ per } x \to x_0 \quad \checkmark$$

<u>transitiva</u>: $f \sim g$ e $g \sim h$ per $x \to x_0 \Rightarrow f \sim h$ per $x \to x_0$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{h(x)} \frac{g(x)}{g(x)}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \underbrace{\frac{f(x)}{g(x)}}_{\substack{\downarrow \\ 1 \\ \text{perché } f\sim g}} \cdot \underbrace{\frac{g(x)}{h(x)}}_{\substack{\downarrow \\ 1 \\ \text{perché } g\sim h}} = 1 \implies f \sim h \text{ per } x \to x_0$$

✓

⊙ proprietà di o-piccolo

riflessiva? $f = o(f)$ per $x \to x_0$

NO perché $\frac{f}{f} = 1 \xrightarrow[x \to x_0]{} 1 \neq 0$

simmetrica? $f = o(g)$ per $x \to x_0$

NO $\overset{?}{\implies} g = o(f)$ per $x \to x_0$

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ per ipotesi, allora

$\uparrow$
$f = o(g)$

$\lim_{x \to x_0} \left| \frac{g(x)}{f(x)} \right| = +\infty$ quindi NON è vero che $g = o(f)$ per $x \to x_0$.

transitiva: $f = o(g)$ e $g = o(h)$ per $x \to x_0$

SI

$\implies f = o(h)$ per $x \to x_0$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x \to x_0} \underbrace{\frac{f(x)}{g(x)}}_{\substack{\to 0 \\ \text{perché } f=o(g)}} \underbrace{\frac{g(x)}{h(x)}}_{\substack{\to 0 \\ \text{perché } g=o(h)}} = 0$$

supponiamo $f \sim g$ per $x \to x_0$

allora $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

$$\iff \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right) = 0$$

$$\iff \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = 0$$

$$\iff f - g = o(g) \quad \text{per } x \to x_0$$

$$\iff f = g + o(g) \quad \text{per } x \to x_0$$

abbiamo ottenuto che

$\boxed{f \sim g \text{ per } x \to x_0}$

si può riscrivere come $\boxed{f = g + o(g) \text{ per } x \to x_0}$

---

es: 1) $\sin(x) \sim x$ per $x \to 0$

$$\iff \boxed{\sin(x) = x + o(x) \text{ per } x \to 0}$$

2) $1 - \cos(x) \sim \frac{1}{2} x^2$ per $x \to 0$

$$\iff 1 - \cos(x) = \frac{1}{2} x^2 + o\left(\boxed{\tfrac{1}{2}} x^2\right) \quad \text{per } x \to 0$$

osserviamo che $o\left(\frac{1}{2}x^2\right) = o(x^2)$ per $x \to 0$

sia $f = o\left(\frac{1}{2}x^2\right)$ per $x \to 0$ $\overset{?}{\Longrightarrow}$ $f = o(x^2)$ per $x \to 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} \frac{f(x)}{\frac{1}{2}x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\frac{1}{2}x^2} = 0$$

perché per ipotesi $f(x) = o\left(\frac{1}{2}x^2\right)$ per $x \to 0$

$\Longrightarrow$ $f = o(x^2)$ per $x \to 0$

per cui abbiamo ottenuto

$$\boxed{1 - \cos(x) = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \quad \text{per } x \to 0}$$

proprietà degli o-piccolo:

$$o(x) - o(x) = o(x)$$

$$o(f) - o(f) = o(f)$$

$\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$: $\quad o(\alpha f) = o(f)$

$$o(f) \cdot o(g) = o(fg)$$

$$f\, o(g) = o(fg)$$