Prof.ssa Stefania Bufalino
DISAT- Politecnico di Torino
e-mail: stefania.bufalino@polito.it

Dispense integrative per lo studio della dinamica del corpo rigido

1. Il corpo rigido e le sue proprietà

Tra i sistemi di punti fisici una classe particolare di sistemi è quella dei "corpi rigidi", che hanno alcune caratteristiche peculiari. Il concetto di corpo rigido è intuitivo e si collega spesso a un "oggetto compatto, che si comporta come un punto materiale". Definiremo nel seguito il corpo rigido per poi dedurne rigorosamente le proprietà dalla definizione.

Definizione

Un **corpo rigido** è un sistema di punti fisici la cui caratteristica principale è che considerati due punti generici *i* e *j* appartenenti al corpo e aventi masse m_i and m_j, la distanza $d_{i,j}$ dei due punti si mantiene costante nel tempo:

$$d_{i,j} \equiv \left|\vec{R}_i - \vec{R}_j\right| = \text{costante} \quad [\forall i, j] \qquad (1.1)$$

dove la distanza è stata scritta in funzione dei vettori posizione. Nel seguito useremo le coordinate cilindriche per rappresentare lo spostamento di tali vettori. Dimostriamo ora alcune proprietà fondamentali di un corpo rigido e del suo moto.

Proprietà n. 1:
se 2 punti con posizione $\vec{R}_i, \vec{R}_j$ di un corpo rigido sono in quiete durante il moto del corpo, tutti i punti del corpo rigido appartenenti alla linea retta, che unisce *i* e *j,* sono in quiete.

Dimostrazione: consideriamo un punto *l* del corpo rigido appartenente alla linea retta che unisce *i* e *j*. Se assumiamo l'asse z lungo questa linea retta, la posizione dei punti si scrive come: $\vec{R}_i = z_i\vec{k}, \vec{R}_j = z_j\vec{k}, \vec{R}_l = z_l\vec{k}$, e la relazione (1.1) applicata ai punti *i* e *l* si scrive come:

$$d_{i,l}{}^2 = (z_i - z_l)^2 \qquad (1.2)$$

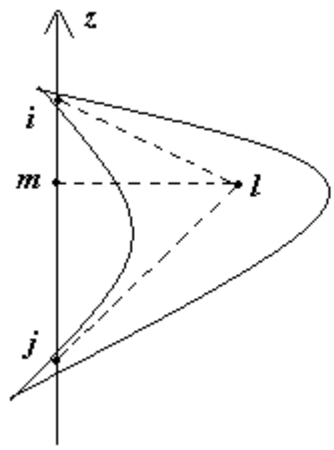
derivando rispetto al tempo entrambe i membri della (1.2) si ottiene:

$$0 = 2 \cdot (z_i - z_l) \cdot \dot{z}_l \Rightarrow \dot{z}_l = 0 \qquad \text{(essendo } z_i \text{ costante)} \qquad (1.3)$$

La linea retta tra *i* e *j* è chiamata "asse fisso del corpo rigido". A parte casi particolari, nel seguito sceglieremo questo asse coincidente con l'asse z del sistema di riferimento (cilindrico).

Proprietà n. 2:
se un corpo rigido ha un asse fisso z, durante il moto del corpo rigido tutti i punti hanno distanza costante dall'asse z.

Dimostrazione:
Sia *l* un punto che non appartiene all'asse z e i punti *i* e *j* siano lungo l'asse fisso z. I punti *i, l* e *j* definiscono un triangolo con lunghezza fissa dei lati: quindi questo triangolo rimane uguale a se stesso in tutte le posizioni durante il moto del corpo rigido. Anche l'altezza *lm*, mantiene dunque la stessa lunghezza: questa altezza è la coordinata r_l di *l* rispetto all'asse e pertanto:



$$\dot{r}_l = 0 \qquad (1.4)$$

Proprietà n. 3:
Se un corpo rigido ha un asse fisso z, tutti i punti del corpo hanno una coordinata z costante.

Dimostrazione: consideriamo un punto *l* che non appartiene all'asse z che passa attraverso i punti *j* e *i*.
Il quadrato della distanza $d_{l,i}{}^2 = (\vec{R}_l - \vec{R}_i)^2 = (r_l \cdot \vec{\lambda} + (z_l - z_i) \cdot \vec{k})^2$ è costante per la prima proprietà e quindi la sua derivata è nulla:

$$0 = \frac{d(\vec{R}_l - \vec{R}_i)^2}{dt} = \frac{d(r_l + (z_l - z_i))^2}{dt} = 2r \cdot \dot{r} + 2(z_l - z_i)(\dot{z}_l - \dot{z}_i) = 2(z_l - z_i) \cdot \dot{z}_l \Rightarrow \dot{z}_l = 0$$
(1.5)

Nella (1.5) abbiamo utilizzato le relazioni (1.4) e (1.3) applicate al punto *i*.

Proprietà n. 4:
i punti di un corpo rigido, che si muove con un asse fisso, descrivono archi di circonferenze disposte in piani perpendicolari all'asse z.

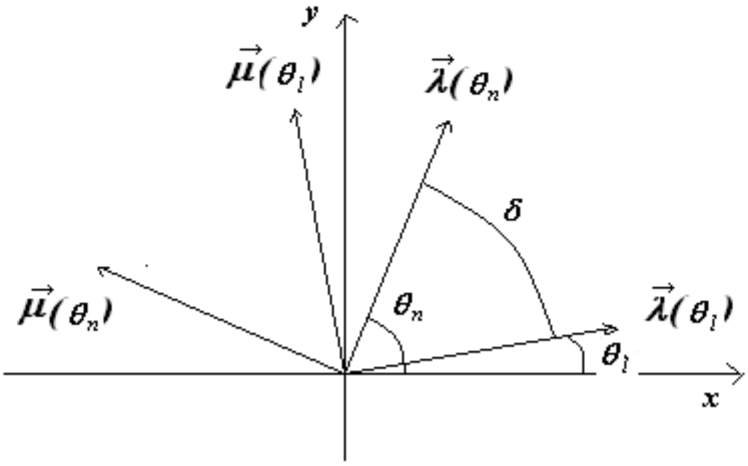
Dimostrazione: dalla proprietà 3, si deduce che un punto del corpo rigido si muove nel piano z = costante, che è perpendicolare all'asse z. Inoltre, anche dalla proprietà 2, la distanza dall'asse di rotazione è costante; pertanto, il punto descrive un arco di circonferenza.

Proprietà n. 5:
le velocità angolari di tutti i punti di un corpo rigido, che ruota attorno ad un asse fisso, sono uguali.

Dimostrazione: questa proprietà deriva direttamente dalle proprietà euclidee degli angoli e dal fatto che le distanze tra i punti devono rimanere costanti. La velocità del punto *i* può essere scritta come: $\vec{v}_l = r_l \cdot \omega \cdot \vec{\mu}(\vartheta_l)$

Prendiamo in considerazione due punti *l* e *n* e la loro distanza al quadrato $d_{l,n}{}^2$ in coordinate cilindriche:

$$d_{l,n}{}^2 = (r_l \cdot \vec{\lambda}(\vartheta_l) - r_n \cdot \vec{\lambda}(\vartheta_n))^2 + (z_l - z_n)^2 \qquad (1.6)$$



Considerando i versori $\vec{\mu}(\vartheta_l), \vec{\mu}(\vartheta_n)$ perpendicolari a $\vec{\lambda}(\vartheta_l), \vec{\lambda}(\vartheta_n)$, rispettivamente la derivata della (1.6) rispetto al tempo si scrive come:

$$0 = 2 \cdot (r_l \cdot \vec{\lambda}(\vartheta_l) - r_n \cdot \vec{\lambda}(\vartheta_n)) \cdot (r_l \cdot \dot{\vartheta}_l \cdot \vec{\mu}(\vartheta_l) - r_n \cdot \dot{\vartheta}_n \cdot \vec{\mu}(\vartheta_n)) + 2(z_l - z_n) \cdot (\dot{z}_l - \dot{z}_n) =$$
$$= 2 \cdot (r_l \cdot \vec{\lambda}(\vartheta_l) - r_n \cdot \vec{\lambda}(\vartheta_n)) \cdot (r_l \cdot \dot{\vartheta}_l \cdot \vec{\mu}(\vartheta_l) - r_n \cdot \dot{\vartheta}_n \cdot \vec{\mu}(\vartheta_n)) =$$
$$= -2 \cdot (r_l r_n \cdot \dot{\vartheta}_n \cdot \vec{\lambda}(\vartheta_l) \cdot \vec{\mu}(\vartheta_n) + r_n r_l \cdot \dot{\vartheta}_l \cdot \vec{\lambda}(\vartheta_n) \cdot \vec{\mu}(\vartheta_l))$$
(1.7)

Come descritto nella figura riportata sopra possiamo definire un angolo $\delta \equiv \vartheta_n - \vartheta_l$, tale che:

- angolo tra $\vec{\lambda}(\vartheta_l)$ e $\vec{\mu}(\vartheta_n) = \delta + \pi/2$
- angolo tra $\vec{\lambda}(\vartheta_n)$ e $\vec{\mu}(\vartheta_l) = -\delta + \pi/2$

i seni dei due angoli descritti sopra sono uguali e di segno opposto. Quindi:

$$\vec{\lambda}(\vartheta_l) \cdot \vec{\mu}(\vartheta_n) = -\vec{\lambda}(\vartheta_n) \cdot \vec{\mu}(\vartheta_l)) \equiv -\sin(\delta) \qquad (1.8)$$

L'eq. (1.8) insieme all'eq. (1.7) ci da:

$$0 = -2 \cdot r_l r_n \cdot (\dot{\vartheta}_n - \dot{\vartheta}_l) \cdot \sin\delta \Rightarrow \dot{\vartheta}_n = \dot{\vartheta}_l \equiv \omega \quad (1.9)$$

Possiamo quindi concludere che il vettore posizione e la velocità di ogni punto l di un corpo rigido si possono scrivere come:

$$\vec{R}_l = r_l \cdot \vec{\lambda}(\vartheta_l) + z_l\vec{k}\,; \quad \vec{v}_l = r_l \cdot \omega \cdot \vec{\mu}(\vartheta_l) \qquad (1.10)$$

Conclusioni sulle proprietà di un corpo rigido

a) In un corpo rigido tutte le distanze tra i punti sono costanti.
b) Durante il moto di un corpo rigido, se due punti del corpo sono in quiete, tutti i punti appartenenti alla linea retta che li unisce (detto asse di rotazione), sono in quiete.
c) Tutti i punti del corpo rigido descrivono circonferenze planari, con la stessa velocità angolare ω.

Quindi il moto di ogni punto di un corpo rigido è completamente conosciuto se è noto l'angolo che definisce la sua posizione nel tempo o la velocità angolare o l'accelerazione angolare.

2. Momento di inerzia

Nello studio del moto di un corpo rigido risulta particolarmente utile definire una nuova quantità, detta "*momento di inerzia I_z rispetto ad un asse z*" di un sistema di N punti che hanno masse m_i come:

$$I_z = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 \qquad (2.1)$$

Dove r_i è la distanza tra il punto i e l'asse z. Il momento di inerzia di un corpo rigido rispetto ad un asse è una proprietà statica del corpo e dell'asse, indipendente dal moto.

Proprietà additiva dei momenti di inerzia

Dalla definizione (2.1) è chiaro che se i punti N sono considerati come appartenenti a 2 sottosistemi, il primo insieme contenente i punti che vanno da 1 a M e il secondo da M + 1 a N, i corrispondenti momenti di inerzia I_z^M e I_z^N rispetto allo stesso asse soddisfano:

$$I_z = I_z^M + I_z^N \qquad (2.2)$$

3. Moto di un corpo rigido attorno a un asse fisso

Il moto di un corpo rigido obbedisce alle equazioni cardinali dei sistemi di punti. Come osservato, la velocità angolare è l'unica variabile necessaria per descrivere il moto attorno a un asse fisso. Di seguito troveremo i rapporti tra la velocità angolare, il momento angolare, il momento delle forze per il corpo rigido con asse fisso e il metodo con cui l'equazione cardinale si utilizza per ottenere l'equazione del moto.

3.1 Momento angolare

Scriviamo il momento angolare di un corpo rigido che ruota attorno a un asse fisso z e con polo O nella posizione $\vec{R}_O = r_O \cdot \vec{\lambda}_O + z_O \vec{k}$:

$$\vec{L}^0 = \sum_{i=1}^{N} (\vec{R}_i - \vec{R}_O) \times m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{N} (r_i \cdot \vec{\lambda}(\vartheta_i) - r_O \cdot \vec{\lambda}_O + (z_i - z_O)\vec{k}) \times m_i r_i \cdot \omega \cdot \vec{\mu}(\vartheta_i) =$$
$$= \omega \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \left\{ r_i^2 \cdot \vec{k} - r_O \cdot \vec{\lambda}_O \times r_i \cdot \vec{\mu}(\vartheta_i) - (z_i - z_0) r_i \cdot \vec{\lambda}(\vartheta_i) \right\} = \tag{3.1}$$
$$= \omega \cdot I_z \cdot \vec{k} - \omega r_O \cdot \vec{\lambda}_O \times \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot r_i \cdot \vec{\mu}(\vartheta_i) - \omega \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \left\{ (z_i - z_0) r_i \cdot \vec{\lambda}(\vartheta_i) \right\}$$

Caso speciale: **polo lungo l'asse *z***

Nell'eq. (3.1) il prodotto vettoriale $\vec{\lambda}_O \times \vec{\mu}(\vartheta_i)$ si trova sull'asse z: **se il polo è stato scelto sull'asse *z***, la distanza r_O diventa nulla e e il momento angolare si scrive semplicemente come:

$$\vec{L}^0 = \omega \cdot I_z \cdot \vec{k} - \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \left\{ (z_i - z_0) r_i \cdot \vec{\lambda}(\vartheta_i) \right\} \omega \tag{3.2}$$

Possiamo dunque osservare, dall'eq. (3.1) che il momento angolare, rispetto ad un polo scelto lungo l'asse fisso di rotazione, ha 2 componenti, L_z lungo z ed L_T nel piano perpendicolare a z:

$$\begin{aligned} \vec{L}^0 &= L_z \cdot \vec{k} + \vec{L}_T \\ L_z &= \omega \cdot I_z \\ \vec{L}_T &\equiv -\sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \left\{ (z_i - z_0) r_i \cdot \vec{\lambda}(\vartheta_i) \right\} \omega \end{aligned} \tag{3.3}$$

La componente lungo z ha una forma molto semplice in termini di momento di inerzia e velocità angolare.

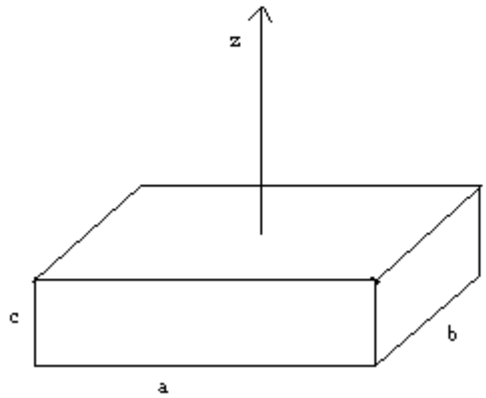
Nota

La componente trasversa L_T del momento angolare in generale non si annulla anche se la rotazione avviene attorno all'asse z; questa componente scompare quando il corpo ha una simmetria geometrica attorno all'asse z. Tipicamente, questo si verifica nel caso di solidi omogenei, la cui forma è generata da una figura geometrica planare che ruota attorno all'asse z.

3.2 Momento di inerzia di alcuni corpi rigidi omogenei

1) Momento di inerzia I_z di un parallelepipedo omogeneo di massa M e lati a, b, c rispetto ad un asse parallelo al lato c e passante attraverso il centro (CM)

Essendo il corpo rigido un corpo continuo il momento di inerzia si scrive come un integrale:



$$I_z \equiv \int_V dm \cdot (x^2 + y^2) = \int_V \rho \cdot dxdydz \cdot (x^2 + y^2)$$

Dove l'asse x è parallelo al lato *a* e l'asse y al lato b. Per calcolare l'integrale riportato sopra, dobbiamo tener presente che è la somma di masse infinitesime *dm* moltiplicate per la loro distanza al quadrato dall'asse z. Grazie alla proprietà commutativa, possiamo scegliere l'ordine con cui aggiungere ogni termine: come primo passo scegliamo di aggiungere ogni massa situata in una striscia lungo l'asse x ad un valore generico (costante) y, quindi aggiungere tutte le strisce che si trovano in un piano a un valore generico (costante) z, per aggiungere infine tutti i piani lungo z.

$$I_z \equiv \int_V \rho \cdot dV \cdot (x^2 + y^2) = \rho \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} dz \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \cdot (x^2 + y^2) = \rho \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} dz \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy [\frac{a^3}{3 \cdot 4} + y^2 a] =$$

$$\rho \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} dz [\frac{a^3 b}{3 \cdot 4} + \frac{b^3 a}{3 \cdot 4}] = \rho \cdot [\frac{a^3 b}{3 \cdot 4} + \frac{b^3 a}{3 \cdot 4}] \cdot c = \frac{\rho \cdot abc}{12}(a^2 + b^2) = \frac{M}{12}(a^2 + b^2)$$

2) *Momento di inerzia I_z di una sfera omogenea di massa M e raggio R rispetto ad un asse passante per il centro (CM)*

$$I_z = \frac{2}{5} MR^2$$

3) *Momento di inerzia I_z di un cilindro pieno e omogeneo di massa M e raggio R rispetto al suo asse (contenente il CM)*

$$I_z = \frac{1}{2} MR^2$$

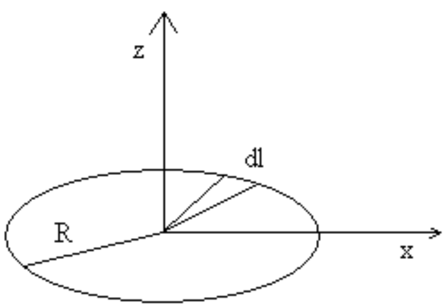
4) *Momento di inerzia I_z di un cilindro vuoto e omogeneo di massa M e raggio interno ed esterno r e R rispettivamente, rispetto al suo asse (contenente il CM)*

$$I_z = \frac{1}{2} M(r^2 + R^2)$$

5) *Momento di inerzia I_z di un anello omogeneo, molto sottile, di massa M e raggio R, rispetto al suo asse (contenente il CM)*

$$I_z = MR^2$$

Dimostrazione:



La massa di ogni arco infinitesimo *dl* dell'anello è uguale alla densità $\rho = \frac{M}{2\pi R}$ moltiplicata per la lunghezza *dl* e la distanza dall'asse z è sempre *R*.
Quindi, utilizzando le coordinate cilindriche per l'integrale (sistema continuo), si ha:

$$I_z \equiv \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=2\pi} R^2 \rho \cdot dl = \int_0^{2\pi} R^2 \cdot \rho \cdot R \cdot d\vartheta = \rho \cdot R^3 \cdot 2\pi = MR^2$$

3.2 Componenti dei momenti di forze in rotazioni attorno un asse fisso

Se un corpo rigido ruota intorno ad un asse fisso, *è molto conveniente scegliere il polo O nell' origine.*
In questo modo si possono sfruttare le seguenti condizioni:
A) il polo è in quiete e il momento angolare ha la forma dell'eq. (3.3)
B) il vettore posizione $\vec{R}_O$ del polo è nullo

Prendiamo in considerazione tutti i momenti delle forze esterne (rispetto a *O*) che agiscono sul corpo e concentriamo la nostra attenzione sulla componente *z* del momento $\tau^O_{E,z}$: la II equazione cardinale lungo z si scrive come (cfr. Eq. 3.3):

$$\tau^O_{E,z} = \frac{dL_z}{dt} = I_z \cdot \dot{\omega} \qquad (3.4)$$

Il vettore posizione $\vec{R}_i$ del punto *i* e la forza esterna $\vec{F}^i_E$, che agisce su di esso, si scrivono in coordinate cilindriche nel seguente modo:

$$\vec{R}_i = r_i \cdot \vec{\lambda}(\vartheta_i) + z_i \cdot \vec{k}\,; \qquad \vec{F}^i_E = F^i_{E,\lambda} \cdot \vec{\lambda} + F^i_{E,\mu} \cdot \vec{\mu} + F^i_{E,z} \cdot \vec{k} \qquad (3.5)$$

Tenendo in considerazione che il polo coincide con l'origine, il momento delle forze esterne è:

$$\begin{aligned}
\vec{\tau}^O_E &= \sum_{i=1}^{N} (\vec{R}_i - \vec{R}_O) \times (F^i_{E,\lambda} \cdot \vec{\lambda} + F^i_{E,\mu} \cdot \vec{\mu} + F^i_{E,z} \cdot \vec{k}) = \\
&= \sum_{i=1}^{N} \vec{R}_i \times (F^i_{E,\lambda} \cdot \vec{\lambda} + F^i_{E,\mu} \cdot \vec{\mu} + F^i_{E,z} \cdot \vec{k}) = \\
&= \sum_{i=1}^{N} (r_i \cdot \vec{\lambda}(\vartheta_i) + z_i \cdot \vec{k}) \times (F^i_{E,\lambda} \cdot \vec{\lambda} + F^i_{E,\mu} \cdot \vec{\mu} + F^i_{E,z} \cdot \vec{k}) = \\
&= \sum_{i=1}^{N} (r_i \cdot F^i_{E,\mu} \cdot \vec{k} - r_i \cdot F^i_{E,z} \cdot \vec{\mu} + z_i \cdot F^i_{E,\lambda} \cdot \vec{\mu} - z_i \cdot F^i_{E,\mu} \vec{\lambda})
\end{aligned} \qquad (3.6)$$

Dalla relazione (3.6) possiamo osservare che, in caso di rotazione intorno ad un asse fisso, con polo coincidente con l'origine:
a) <u>solo le componenti delle forze esterne perpendicolari alla distanza</u> dell'origine (polo) dal punto, che subisce l'effetto di tali forze, contribuiscono alla componente z del momento delle forze.

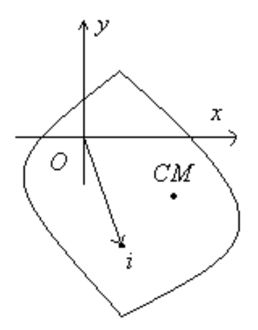
b) le forze parallele a z non contribuiscono alla componente z del momento delle forze esterne.

3.3 Energia cinetica nella rotazione di un corpo rigido intorno ad un asse fisso

Ricordando la definizione della velocità $\vec{v}_l = r_l \cdot \omega \cdot \vec{\mu}(\vartheta_l)$ di un punto l nella rotazione attorno ad un asse fisso (proprietà 5) possiamo scrivere l'energia cinetica totale E_K^T per un corpo rigido avente un asse fisso z:

$$E_K^T = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i (r_i \cdot \omega \cdot \vec{\mu}(\vartheta_i))^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 = \frac{1}{2} I_z \omega^2 \quad (3.7)$$

3.4 Caso 1: corpo rigido con asse orizzontale fisso



Se l'asse fisso z di un corpo rigido è orizzontale, tra le altre forze perpendicolari a z, esiste anche la gravità applicata ad ogni punto della massa m_i del corpo rigido. Scegliamo l'asse x come asse orizzontale e l'asse y verticale, positivo verso l'alto, come mostrato in figura. Inoltre, scegliamo l'origine degli assi come polo per il momento della forza di gravità: in questo modo abbiamo $x_O = y_O = z_O = 0$. La forza di gravità su ogni punto è $-m_i g\vec{j}$ e **la componente *z* del momento** τ_z^g:

$$\begin{aligned}
\tau_z^g = (\tau^g)_z &= \sum_{i=1}^{N} ((\vec{R}_i - \vec{R}_O) \times (-m_i \cdot g \cdot \vec{j}))_z = \sum_{i=1}^{N} (-\vec{R}_i \times m_i \cdot g \cdot \vec{j})_z = \\
&= \sum_{i=1}^{N} (-(x_i \vec{i} + y_i \vec{j} + z_i \vec{k}) \times m_i \cdot g \cdot \vec{j})_z = \sum_{i=1}^{N} -((x_i \vec{i} + z_i \vec{k}) \times m_i \cdot g \cdot \vec{j})_z = \qquad (3.8) \\
&= \sum_{i=1}^{N} - x_i \vec{i} \times m_i \cdot g \cdot \vec{j} = \sum_{i=1}^{N} (-x_i m_i \cdot g \cdot \vec{k}) = (-\sum_{i=1}^{N} x_i m_i) \cdot g \cdot \vec{k} = -M \cdot g \cdot x_{CM} \vec{k}
\end{aligned}$$

In aggiunta, **l'energia potenziale gravitazionale** di un corpo rigido con asse orizzontale fisso ha proprietà simili.
L'energia potenziale della forza di gravità su ogni punto è $m_i g \cdot y_i$ e l'energia potenziale totale:

$$U = \sum_{i=1}^{N} (m_i \cdot g \cdot y_i) = g \cdot \sum_{i=1}^{N} (m_i \cdot y_i) = Mg \cdot y_{CM} \qquad (3.9)$$

Conclusioni: Nel caso di un corpo rigido ruotante attorno ad un asse fisso orizzontale, il contributo della gravità al momento delle forze intorno all'asse fisso e all'energia potenziale può essere calcolato come per un singolo punto fisico che si trova nel CM e che ha massa pari alla massa totale della corpo rigido.

3.5 Caso particolare 2: pendolo composto

Un pendolo composto è un corpo rigido di massa M, avente un asse fisso orizzontale (asse z) e un centro di massa (CM) a distanza $l \neq 0$ da questo asse. In generale la viscosità dell'aria e l'attrito dinamico intorno all'asse sono trascurabili e le uniche forze esterne sono la gravità e la normale applicata dall'asse fisso orizzontale sul corpo. Scegliendo l'asse x orizzontale e l'asse y verticale rivolto verso l'alto, come per il caso dell'eq. (3.8), il polo O appartenente all'asse fisso z e definendo θ come angolo formato dal segmento O-CM rispetto alla verticale che passa attraverso O, come nel pendolo standard, abbiamo: $x_{CM} = l \cdot sin\vartheta$ e $y_{CM} = l \cdot \cos\vartheta$.

Questo sistema è un corpo rigido che ruota intorno ad un asse fisso orizzontale sotto la forza gravitazionale e possiamo utilizzare i risultati dei paragrafi precedenti. Chiamando I_z il momento di inerzia del corpo rispetto all'asse z, possiamo scrivere l'eq. (3.4) tenendo conto dell'equivalente (3.8)

$$I_z \cdot \dot{\omega} = \tau^O_{z,E} = -M \cdot g \cdot x_{CM} = -M \cdot g \cdot l \cdot \sin\vartheta \qquad (3.9)$$

Possiamo riscrivere la (3.9) come:

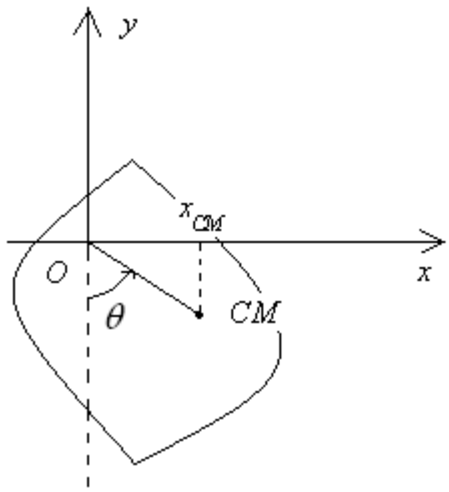
$$I_z \cdot \ddot{\vartheta} + M \cdot g \cdot l \cdot sin\vartheta = 0 \xrightarrow{sin\vartheta \approx \vartheta} I_z \cdot \ddot{\vartheta} + M \cdot g \cdot l \cdot \vartheta = 0 \qquad (3.10)$$

L'eq. (3.10) si riduce a quella del pendolo per piccole oscillazioni. La soluzione viene ottenuta dopo adeguata modifica dei parametri:

$$\vartheta(t) = A \cdot sin(\omega \cdot t + \varphi),$$

con:

$$\omega^2 = \frac{Mgl}{I_z} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{I_z}{Mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_{CM} + M \cdot l^2}{Mgl}}$$



Note:

a) il periodo di un pendolo composto dipende dal momento dell'inerzia
b) se l'asse fisso passa attraverso un punto diverso da O, ma alla stessa distanza dal CM, il periodo è uguale
c) anche i punti O' a distanza $l' = \frac{I_{CM}}{M \cdot l}$ hanno lo stesso periodo.

4. Teorema di Huygens-Steiner

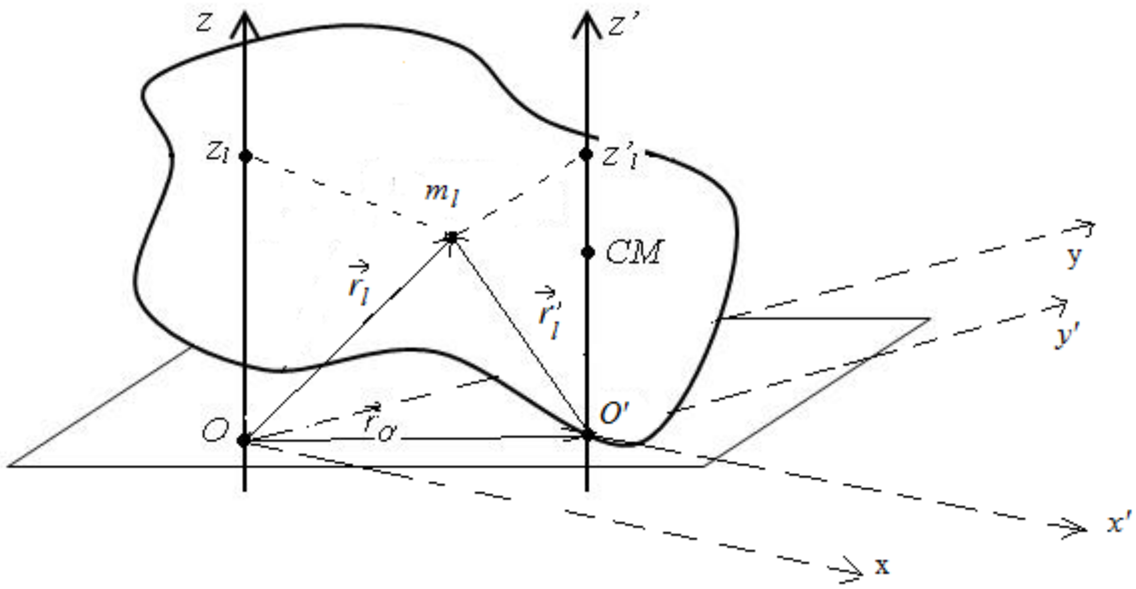
Per un corpo ci sono infiniti momenti di inerzia, a seconda della scelta degli assi. Tuttavia c'è una relazione importante tra tutti i momenti relativi agli assi paralleli, che si chiama "teorema di Huygens-Steiner", il cui enunciato è il seguente:

"Il momento di inerzia I_z di un corpo rigido rispetto all'asse z è uguale al momento di inerzia $I_{z'}$ rispetto all'asse parallelo che passa attraverso il CM sommato alla massa totale M del corpo moltiplicata per la distanza d al quadrato tra i 2 assi ":

$$I_z = M \cdot d^2 + I_{z'} \qquad (4.1)$$

Dimostrazione:

Chiamiamo *z'* l'asse che passa attraverso il CM del corpo e *z* l'altro asse riportato nella figura seguente. Scegliamo due sistemi di riferimento cartesiani con origini *O* e *O'*, assi (*x, y, z*) e (*x', y ', z'*) rispettivamente, con *O'* alla stessa z di *O*.



Definendo d_l la distanza di ogni massa puntiforme m_l dall'asse *z,* il momento di inerzia I_z rispetto all'asse *z* si scrive come:

$$I_z = \sum_{l=1}^{N} m_l \cdot d_l^2 = \sum_{l=1}^{N} m_l \cdot (x^2{}_l + y^2{}_l) \qquad (4.2)$$

Se consideriamo la relazione tra i vettori posizione nei due sistemi di riferimento abbiamo:

$$\vec{r} = \vec{r'} + \vec{r}_{O'} \Rightarrow x_l = x_l' + x_{O'} \text{ e } \quad y_l = y_l' + y_{O'} \qquad (4.3)$$

l'eq. (4.2) diventa:

$$
\begin{aligned}
I_z &= \sum_{l=1}^{N} m_l \cdot (x^2{}_l + y^2{}_l) = \sum_{l=1}^{N} m_l \cdot (x'_l + x_{O'})^2 + (y'_l + y_{O'})^2 = \\
&= \sum_{l=1}^{N} m_l \cdot (x_l'^2 + x_{O'}^2 + y_l'^2 + y_{O'}^2 + 2x_{O'}x'_l + 2y_{O'}y'_l) = \\
&= \sum_{l=1}^{N} m_l \cdot (x_l'^2 + y_l'^2) + \sum_{l=1}^{N} m_l \cdot (x_{O'}^2 + y_{O'}^2) + \sum_{l=1}^{N} m_l \cdot (2x_{O'}x'_l) + \sum_{l=1}^{N} m_l \cdot (2y_{O'}y'_l)
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

Valutiamo ora ognuno dei 4 termini dell'eq. (4.4)

$$
\begin{aligned}
&\sum_{l=1}^{N} m_l \cdot (x_l'^2 + y_l'^2) = I_{z'} \\
&\sum_{l=1}^{N} m_l \cdot (x_{O'}^2 + y_{O'}^2) = (\sum_{l=1}^{N} m_l) \cdot d_l^2 = M \cdot d^2 \\
&\sum_{l=1}^{N} m_l \cdot (2x_{O'}x'_l) = 2x_{O'} \sum_{l=1}^{N} m_l \cdot x'_l = 2x_{O'} M \cdot x'_{CM} = 0 \\
&= \sum_{l=1}^{N} m_l \cdot (2y_{O'}y'_l) = 2y_{O'} \sum_{l=1}^{N} m_l \cdot y'_l = 2y_{O'} M \cdot y'_{CM} = 0
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

1) la prima equazione deriva dalla definizione di momento di inerzia nel sistema di riferimento *O'*
2) Nella seconda equazione *d* indica la distanza tra z e z', che è data dalla distanza delle origini *OO'*
3) Nella terza e quarta equazione, dopo che le coordinate di *O'* sono state spostate dalla somma perché non dipendono dall'indice *l*, la somma rimanente è uguale alla definizione delle coordinate *x'* e *y'* del CM (moltiplicato per la massa totale) nel sistema di riferimento *O'*. In questo sistema di riferimento le coordinate *x'* e *y'* del CM sono le stesse dell'origine *O'*, cioè sono nulle.

Quindi la (4.4) diventa:

$$I_z = M \cdot d^2 + I_{z'} \tag{4.6}$$

L'eq. (4.6) dimostra il teorema di Huygens-Steiner:
il momento di inerzia di un corpo rigido rispetto ad un asse z è uguale al momento di inerzia rispetto ad un asse parallelo z ', passante per il centro di massa sommato al prodotto della massa per la distanza al quadrato tra i due assi .

5. Statica del corpo rigido

Quando tutti i punti di un corpo rigido sono in quiete, si dice che il corpo si trova in una **"condizione statica"** o anche in **"equilibrio stabile "**.
La condizione statica è raggiunta sotto gli effetti di forze esterne, che in generale non sono tutte nulle.
Tuttavia queste forze esterne devono obbedire a due condizioni, che provengono dalle proprietà del corpo rigido e dalla II equazione cardinale.

Condizione n. 1: se un corpo rigido è in quiete, la forza esterna totale è nulla.
Dimostrazione: se tutti i punti del corpo rigido sono in quiele, le loro velocità sono sempre nulle, quindi:

$$\vec{v}_{CM} \equiv \frac{\sum_i^N m_i \vec{v}_i}{\sum_i^N m_i} = 0 \qquad (5.1)$$

Ne segue che la quantità di moto totale (che guale alla quantità di moto del CM) è una costante (=0). Dalla prima equazione cardinale di ha:

$$\vec{F}^E = \dot{\vec{P}}_T = \dot{\vec{P}}_{CM} = 0 \Rightarrow \vec{F}^E = 0 \qquad (5.2)$$

Condizione n. 2: Se un corpo rigido è in quiete, il momento totale delle forze esterne rispetto al polo è nullo.

Dimostrazione:
Se tutti i punti del corpo rigido sono in quiete, le loro velocità sono nulle, quindi il momento angolare rispetto ad un polo O è una costante (= 0). Dalla II equazione cardinale, tenendo conto che la quantità di moto totale è nulla, come detto nella precedente dimostrazione, abbiamo:

$$\vec{\tau}_O^E = \frac{d\vec{L}_O^T}{dt} + \dot{\vec{r}}_O \times \vec{P}_T = \frac{d\vec{L}_O^T}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{\tau}_O^E = 0 \qquad (5.3)$$

Le condizioni (5.2) e (5.3) sono necessarie per la statica del corpo rigido. Ora dimostriamo che sono anche sufficienti se a un certo istante $\underline{t_0}$ tutti i punti sono in quiete.

Dimostrazione:
Se al tempo t_0 tutti i punti sono in quiete e $\vec{F}^E = \vec{\tau}_o^E = 0$, il CM non è accelerato e quindi rimarrà con velocità nulla, cioè in quiete. Se scegliamo un polo O (a riposo), il momento angolare angolare $\vec{L}_O^T$ rispetto a quel polo è nullo a t_0 e rimane nullo visto che il momento totale esterno è $\vec{\tau}_O^E = 0$.

Si potrebbe obiettare: ma in questo caso dobbiamo valutare il momento angolare e il momento rispetto ad un grande numero (infinito) di poli, per scartare tutte le eventuali simmetrie.

In realtà, questo non è necessario perché

$$
\begin{aligned}
\vec{L}_O^T &= \sum_i^N (\vec{r}_i - \vec{r}_O) \times m_i \cdot \vec{v}_i = \sum_i^N (\vec{r}_i - \vec{r}_{O'} + \vec{r}_{O'} - \vec{r}_O) \times m_i \cdot \vec{v}_i = \\
&= \sum_i^N (\vec{r}_i - \vec{r}_{O'}) \times m_i \cdot \vec{v}_i + \sum_i^N (\vec{r}_{O'} - \vec{r}_O) \times m_i \cdot \vec{v}_i = \vec{L}_{O'}^T + (\vec{r}_{O'} - \vec{r}_O) \times \sum_i^N m_i \cdot \vec{v}_i = \qquad (5.4) \\
&= \vec{L}_{O'}^T + (\vec{r}_{O'} - \vec{r}_O) \times M \cdot \vec{v}_{CM} = \vec{L}_{O'}^T + (\vec{r}_{O'} - \vec{r}_O) \times \vec{P}_{CM}
\end{aligned}
$$

Se il momento angolare è nullo rispetto a un polo, allora è nullo rispetto a tutti i poli e tutte le simmetrie possono essere escluse: l'unica possibilità è che tutte le velocità siano nulle.

6. Moto di un corpo rigido attorno ad un asse che trasla

Nel caso generale un corpo rigido ruota attorno ad un asse, che si muove, e la descrizione di questo moto non è semplice in molti casi. Noi ci occuperemo dello studio di un caso in cui le leggi che descrivono questo moto sono molto semplici e sono simili al caso della rotazione attorno ad un asse fisso.
Questo caso si presenta quando **un corpo rigido ruota attorno ad un asse, che si muove nello spazio mantenendo sempre la stessa direzione**, vale a dire rimane parallelo a se stesso.

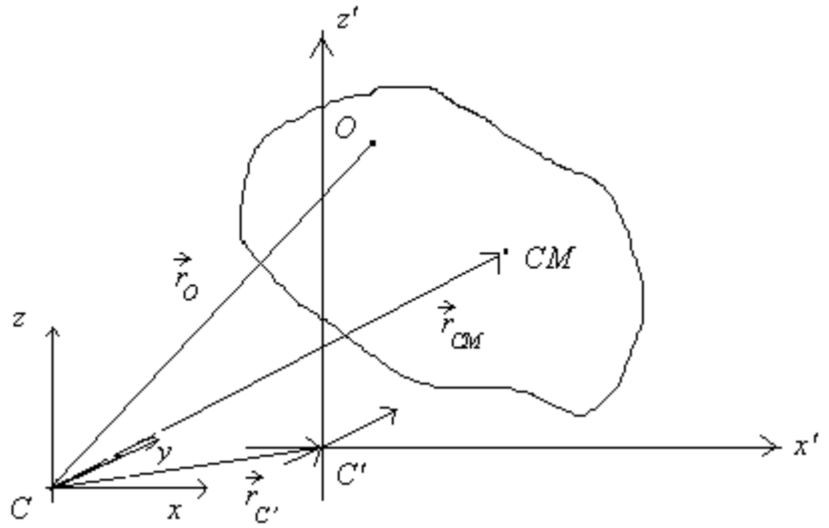


Fig. 6.1

Prima di passare allo studio dettagliato del moto, dobbiamo ricordare che l'asse di rotazione non può essere scelto come un sistema di riferimento inerziale, perchè l'origine sull'asse è in genere accelerata. Ne segue, che se vogliamo applicare le equazioni cardinali, dobbiamo scrivere i momenti angolari in un diverso sistema di riferimento inerziale.
Possiamo scegliere:

a) un sistema di riferimento inerziale che ha l'asse z parallelo all'asse di rotazione del corpo rigido e origine in C;

b) un sistema di riferimento in moto con asse *z'* parallelo *z* e origine in *C'*; gli assi *x'* e *y'* sono scelti paralleli a x e y rispettivamente e privi di moto di rotazione
c) un polo *O* non coincidente con *C'*.

Ricordiamo che nel sistema di riferimento in moto il corpo viene visto esattamente come nel caso del corpo rigido che ruota attono ad un asse fisso: l'unica differenza è che la II equazione cardinale deve essere scritta nel sistema di riferimento inerziale.
Richiamiamo per chiarezza le quantità definite e che ci interessano nella descrizione di questo moto:

$\vec{r}_{C'}$ = *vettore posizione di C' misurato nel sistema di riferimento con origine in C*
$\vec{r}_O$ = *vettore posizione del polo O misurato nel sistema di riferimento con origine in C*
$\vec{r}_O^{\,'}$ = *vettore posizione del polo O misurato nel sistema di riferimento con origine in C'*
$\vec{r}_{CM}$ = *vettore posizione del CM misurato nel sistema di riferimento con origine in C*
$\vec{r}_{CM}^{\,'}$ = *vettore posizione del CM misurato nel sistema di riferimento con origine in C'*
$\vec{r}_i$ = *vettore posizione del punto i misurato nel sistema di riferimento con origine in C*
$\vec{r}_i^{\,'}$ = *vettore posizione del punto i misurato nel sistema di riferimento con origine in C'*

$$\begin{aligned}
\vec{r}_i &= \vec{r}_i^{\,'} + \vec{r}_{C'} \\
\vec{r}_{CM} &= \vec{r}_{CM}^{\,'} + \vec{r}_{C'} \\
\vec{r}_O &= \vec{r}_O^{\,'} + \vec{r}_{C'} \\
\vec{v}_{CM} &= \vec{v}_{CM}^{\,'} + \vec{v}_{C'} \\
\vec{v}_O &= \vec{v}_O^{\,'} + \vec{v}_{C'}
\end{aligned} \tag{6.1}$$

Ora possimo scrivere la relazione tra il momento angolare, riseptto al polo *O*, in un sistema di riferimento inerziale (*C,x,y,z*) e in un sistema di riferimento in moto (non di moto rotatorio) (*C',x',y',z'*), con assi paralleli:

$$\begin{aligned}
\vec{L}_O &= \sum_{i=1}^{N} (\vec{r}_i - \vec{r}_O)\times m_i\vec{v}_i = \sum_{i=1}^{N} ((\vec{r}_i^{\,'} + \vec{r}_{C'}) - (\vec{r}_O^{\,'} + \vec{r}_{C'}))\times m_i(\vec{v}_{C'} + \vec{v}_i^{\,'}) = \\
&= \sum_{i=1}^{N} ((\vec{r}_i^{\,'} - \vec{r}_O^{\,'})\times m_i(\vec{v}_{C'} + \vec{v}_i^{\,'}) = \sum_{i=1}^{N} ((\vec{r}_i^{\,'} - \vec{r}_O^{\,'})\times m_i\vec{v}_i^{\,'} + \sum_{i=1}^{N} ((\vec{r}_i^{\,'} - \vec{r}_O^{\,'})\times m_i\vec{v}_{C'} = \\
&= \vec{L}'_O + \sum_{i=1}^{N} (\vec{r}_i^{\,'} - \vec{r}_O^{\,'})\times m_i\vec{v}_{C'} = \vec{L}'_O + \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i^{\,'}\times m_i\vec{v}_{C'} - \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_O^{\,'}\times m_i\vec{v}_{C'} = \\
&= \vec{L}'_O + (\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i^{\,'})\times \vec{v}_{C'} - (\sum_{i=1}^{N} m_i)\cdot \vec{r}_O^{\,'}\times\vec{v}_{C'} = \vec{L}'_O + M\cdot\vec{r}_{CM}^{\,'}\times\vec{v}_{C'} - M\cdot\vec{r}_O^{\,'}\times\vec{v}_{C'} = \\
&= \vec{L}'_O + M\cdot(\vec{r}_{CM}^{\,'} - \vec{r}_O^{\,'})\times\vec{v}_{C'}
\end{aligned} \tag{6.2}$$

La derivata della (6.2) rispetto al tempo:

$$\dot{\vec{L}}_O = \dot{\vec{L}}'_O + M \cdot (\vec{v}'_{CM} - \vec{v}'_O) \times \vec{v}_{C'} + M \cdot (\vec{r}'_{CM} - \vec{r}'_O) \times \vec{a}_{C'} \qquad (6.3)$$

Ricordando che i teoremi di base della dinamica (vale a dire le 2 equazioni cardinali, il teorema del lavoro e i vari principi di conservazione) sono validi nel sistema di riferimento inerziale possiamo scrivere la **II equazione cardinale per rotazione attorno ad un asse che trasla** nel sistema di riferimento inerziale come:

$$\begin{aligned} \vec{\tau}_O^{(E)} &= \dot{\vec{L}}_O + \vec{v}_O \times M \cdot \vec{v}_{CM} = \\ &= \dot{\vec{L}}'_O + M \cdot (\vec{v}'_{CM} - \vec{v}'_O) \times \vec{v}_{C'} + M \cdot (\vec{r}'_{CM} - \vec{r}'_O) \times \vec{a}_{C'} + \vec{v}_O \times M \cdot \vec{v}_{CM} \end{aligned} \qquad (6.4)$$

L'eq. (6.4) contiene 4 termini e non è semplice da studiare ma si semplifica molto in 2 casi fisici interessanti. Questi casi sono i seguenti:

1) **il polo *O* è scelto coincidente con il *CM***
2) **l'origine *C'* è in quiete** (e il polo *O* coincide con C')

Nel caso 1): $\vec{r}'_O = \vec{r}'_{CM}$, $\vec{v}'_O = \vec{v}'_{CM}$ e $\vec{v}'_O \| \vec{v}'_{CM}$, quindi: $\vec{\tau}_O^{(E)} = \dot{\vec{L}}'_O$ (6.5)

Nel caso 2) $\vec{r}'_O = \vec{r}'_{C'} = 0 \;\Rightarrow \vec{v}_O = \vec{v}_{C'} = 0 \Rightarrow \vec{a}_{C'} = 0$, quindi: $\vec{\tau}_O^{(E)} = \dot{\vec{L}}'_O$ (6.6)

Ricordiamo che $\vec{L}'_O$ è il momento angolare in un sistema di riferimento dove l'asse di rotazione è fisso: quindi in questo sistema di riferimento possiamo scrivere la componente *z* come:

$$L'_{OZ} = I_{z'} \cdot \omega' \cdot \vec{k} \qquad (6.7)$$

ω' è la velocità angolare attorno *z'*, misurata nel sistema di riferimento in moto.
Dobbiamo ricordare ancora una volta che il moto del *CM* è determinato dalla I equazione cardinale.
In conclusione, in ognuno dei due casi discussi sopra, la rotazione di un corpo rigido attorno ad un asse con direzione fissata è determinata solo da 4 delle 6 equazioni scadinali scalari:

$$\begin{aligned} M \cdot \vec{a}_{CM} &= \vec{F}_T^{(E)} \\ I_{z'} \cdot \dot{\omega}' \cdot \vec{k} &= \vec{\tau}_{OZ} \end{aligned} \qquad (6.8)$$

Energia Cinetica

Anche l'energia cinetica totale E_K^T di un corpo rigido che ruota attorno ad un asse fisso *z'* deve essere calcolata nel sistema di riferimento inerziale, per poter applicare le equazioni cardinali. Come nel caso del momento angolare, la velocità del punto *i-esimo* del sistema diventa difficile da calcolare, mentre rispetto al sistema di riferimento in moto (*C',x',y',z'*) risulta semplice da determinare.
Troviamo nel seguito la relazione tra l'energia cinetica totale calcolata in (*C,x,y,z*) e in (*C',x',y',z'*):

$$
\begin{aligned}
E_K^T &= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^{\,2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{v}_{C'} + \vec{v}_i^{\,'})^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i (v_{C'}^2 + 2 \cdot \vec{v}_{C'} \cdot \vec{v}_i^{\,'} + v_i^{'2}) = \\
&= \frac{1}{2} (\sum_{i=1}^{N} m_i) v_{C'}^2 + \sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{v}_{C'} \cdot \vec{v}_i^{\,'}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i v_i^{'2} = \qquad (6.9) \\
&= \frac{1}{2} M v_{C'}^2 + M(\vec{v}_{C'} \cdot \vec{v}_{CM}^{\,'}) + \frac{1}{2} I_z \omega^2
\end{aligned}
$$

Nel caso 1) discusso prima, se scegliamo anche l'origine *C'* del sistema di riferimento in moto coincidente con *CM*, abbiamo:

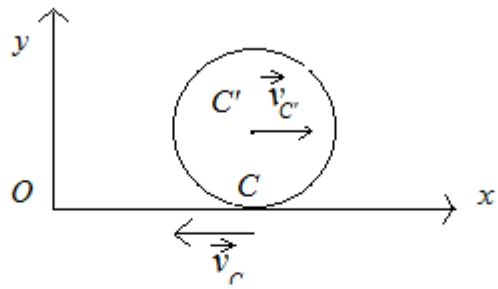
$$E_K^T = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_z \omega^2 \quad \text{visto che } \vec{v}_{CM}^{\,'} = 0 \qquad (6.10)$$

.

Nel caso 2) avremo $\vec{v}_{C'} = 0$ e quindi: $E_K^T = \frac{1}{2} I_z \omega^2$. (6.11)

Velocità del punto di contatto e del centro in rotazione delle ruote

Quando una ruota di raggio *R* (o ogni altro solido di rotazione) ruota su una superficie piana, si stabilisce una relazione tra la velocità del centro della ruota e il punto di contatto. Per trovare questa relazione consideriamo un sistema di riferimento (*O,x,y*) in quiete e un sistema di riferimento (*C',x',y'*) con origine *C'* nel centro della ruota e *x'* parallelo a *x*, *y'* parallelo a *y*. Chiamiamo poi *C* il punto di contatto della ruota con la superficie in un determinato istante $\vec{v}_{C'}, \vec{v}_C, \vec{v}'_{C'} = 0, \vec{v}'_C$ sono le velocità in entrambe i sistemi di riferimento. Nel sistema (*C', x', y'*) i moduli delle velocità di tutti i punti sulla circonferenza sono dati da $|\vec{v}'| = R \cdot \omega$, dove ω è la velocità angolare di rotazione. Quindi la velocità del punto di contatto in entrambe i sistemi di riferimento è data da:



$$\vec{v}_C = \vec{v}_{C'} + \vec{v}'_C = v_{C'}\vec{i} - R \cdot \omega \cdot \vec{i}\,' = v_{C'}\vec{i} - R \cdot \omega \cdot \vec{i} == (v_{C'} - R \cdot \omega) \cdot \vec{i} \qquad (6.12)$$

Dall'eq. (6.12) vediamo che quando il modulo della velocità del centro è uguale a $R \cdot \omega$, il punto di contatto si trova a riposo nel sistema di riferimento (*O,x,y*): questo tipo di rotazione è chiamata "moto di puro rotolamento" e il punto di contatto ha un attrito di tipo statico con la superficie. Se invece $v_{C'} \neq R \cdot \omega$ il punto di contatto ha una velocità non nulla rispetto alla superficie e si ha un attrito di tipo dinamico.