Esercitazione del 19/03/2018

Esercizio 1

In un pozzo profondo $h = 10\,m$ viene lasciata cadere dalla sua sommità una pietra. Sapendo che la velocità del suono in aria vale $v_s = 320\,m/s$, determinare dopo quanto tempo si sente il tonfo della pietra nell'acqua stagnante.

Soluzione

Fase 1. La pietra cade di moto rettilineo uniformemente accelerato (MRUA), partendo da ferma ($v_0 = 0\,m/s$) e con accelerazione costante $g = 9.8\,m/s^2$.
Scelto un sistema di riferimento con origine sulla base del pozzo e asse y rivolto verso l'alto, dalla legge oraria del MRUA e tunuto conto della condizione al contorno $y_0 = h$ possiamo scrivere

$$y = y_0 - \frac{1}{2}\,g\,t_1^2\ , \qquad \Rightarrow \qquad t_1 = \sqrt{\frac{2\,y}{g}} = \sqrt{\frac{2\cdot 10}{9.8}} = 1.43\,s\ . \tag{1}$$

Fase 2. Il suono si propaga verso l'alto con velocità costante, percui dalla legge oraria per un MRU si ottine

$$y = v_s\,t_2\ , \qquad \Rightarrow \qquad t_2 = \frac{y}{v_s} = \frac{10}{320} = 0.03\,s\ . \tag{2}$$

Il tempo complessivo sarà dato dalla somma dei due tempi t_1 e t_2 ovvero

$$t_{\rm tot} = t_1 + t_2 = 1.43 + 0.03 = 1.46\,s\ . \tag{3}$$

Esercizio 2

I pipistrelli usano impulsi sonar per il rilevamento degli ostacoli.
Se un pipistrello vola verso una parete con una velocità costante $v_p = 5\,m/s$ ed emette un impulso sonar quando la sua distanza dal muro è $s = 100\,m$, stabilire a quale distanza dal muro si troverà il pipistrello quando riceverà l'impulso sonar riflesso. (Velocità del suono $v_s = 320\,m/s$).

Soluzione

Sia $t_0 = 0\,s$ l'istante in cui viene emesso l'impulso sonoro ed $s_0 = 100\,m$ la distanza del pipistrello dal muro all'istante t_0. Il segnale viaggia a velocita costante v_s percui, scelto un SR con origine sul pipistrello all'istante t_0, dalla legge oraria per un MRU si ottine

$$s = v_s\,t_1 \;, \qquad \Rightarrow \qquad t_1 = \frac{s}{v_s} = \frac{100}{320} = 0.312\,s \;. \tag{4}$$

All'istante t_1 il pipistrello avrà percorso lo spazio

$$s = v_p\,t_1 = 5 \cdot 0.312 = 1.56\,m \;, \tag{5}$$

e pertanto si troverà ad una distanza

$$s_1 = s_0 - s = 100 - 1.56 = 98.44\,m/s \;, \tag{6}$$

dalla parete.
Applicando le leggi della composizione di due MRU su assi paralleli, possiamo immaginare il pipistrello fermo ad una distanza s_1 ed il segnale sonoro che viaggia alla velocità

$$v = v_p + v_s = 5 + 320 = 325\,m/s \;. \tag{7}$$

Pertanto, il tempo impiegato dall'eco per raggiungere il pipistrello sarà dato da

$$t_2 = \frac{s_1}{v} = \frac{98.44}{325} = 0.302\,s \;, \tag{8}$$

mentre il tempo complessivo in cui il pipistrello capta l'eco sonar è pari a

$$t_{\mathrm{tot}} = t_1 + t_2 = 0.312 + 0.302 = 0.614\,s \;. \tag{9}$$

In questo tempo il pipistrello percorre lo spazio

$$s_{\mathrm{tot}} = v_p\,t_{\mathrm{tot}} = 5 \cdot 0.614 = 3.07\,m \;, \tag{10}$$

e quindi risulterà distante dalla parete 96.93 metri.

Soluzione alternativa

Pipistrello più segnale sonoro devono percorrere complessivamente lo spazio $s = 200\,m$. Una parte s_1 di questo spazio è percorso dal pipistrello nel tempo t alla velocità costante v_p, la parte rimanente $s - s_1$ è percorsa dal suono, nello stesso tempo t, alla velocità v_s. Quindi, possiamo mettere a sistema le due leggi orarie ottenendo

$$\begin{cases} s_1 = v_p\,t \;, \\ \\ s - s_1 = v_s\,t \;. \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad s_1 = \tfrac{s\,v_p}{v_s + v_p} = \tfrac{200 \cdot 5}{320+5} = 3.07\,m \;.$$

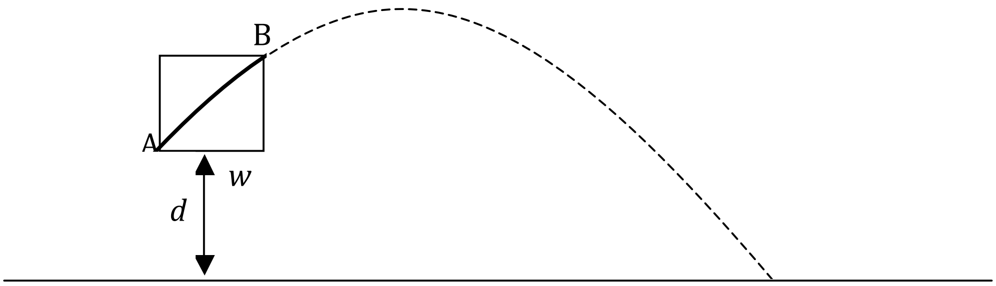
Esercizio 3

Una ragazza in una stanza sta guardando attraverso una finestra quadrata di larghezza *w*=2.0 m ed altezza *h*=2.0 m. All'istante t=0 una pallina da tennis appare dall'angolo della finestra in basso a sinistra (punto A in figura) e dopo un intervallo di tempo t_1=0.4 s scompare dall'angolo in alto a destra (punto B in figura).

a) Determinare le componenti orizzontale e verticale della velocità della pallina quando si trova in B.

b) Determinare l'istante t* e la distanza orizzontale da A a cui la palla raggiunge la massima altezza.

c) Dopo un intervallo di tempo t_2 =2.0 s dalla scomparsa in B, la pallina colpisce il terreno all'esterno della stanza. Trovare l'altezza *d* del lato inferiore della finestra rispetto al suolo esterno (vedere la figura), supponendo che il suolo esterno sia perfettamente orizzontale e trascurando la viscosità dell'aria.



Soluzione

Il moto della palla è sulla superficie terrestre, dove l'accelerazione è verticale, di modulo g e diretta verso il basso. Assumiamo un sistema di riferimento con l'asse x orizzontale, positivo da sinistra verso destra lungo la larghezza della finestra, asse y verticale positivo verso l'alto e asse z perpendicolare alla finestra. L'origine sia in A. Le equazioni del moto sono:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = 0$$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = -g\ ;$$

$$\frac{d^2z(t)}{dt^2} = 0$$

che, una volta integrate, forniscono:
$$\frac{dx(t)}{dt} = C_1 \qquad x(t) = C_1 \cdot t + C_4$$
$$\frac{dy(t)}{dt} = -gt + C_2 \qquad y(t) = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + C_2 \cdot t + C_5$$
$$\frac{dz(t)}{dt} = C_3 \qquad z(t) = C_3 \cdot t + C_6$$

- Le condizioni iniziali sono:

$$x(0) = 0 \qquad x(t_1) = w$$
$$y(0) = 0 \quad e: \quad y(t_1) = h$$

; which lead to: $C_4 = C_5 = C_6 = 0$ *, e:*

$$z(0) = 0 \qquad z(t_1) = 0$$
$$C_1 = \frac{w}{t_1} \approx 5[m]$$
$$C_2 = \frac{1}{t_1}(h + \frac{1}{2} g t_1^2) \approx 6.96[m]$$
$$C_3 = 0$$

- Spostamento e velocità sono:

$$x(t) = C_1 \cdot t \qquad \frac{dx(t)}{dt} = C_1$$
$$y(t) = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + C_2 \cdot t \quad \text{and} \quad \frac{dy(t)}{dt} = -gt + C_2$$
$$z(t) = C_3 \cdot t \qquad \frac{dz(t)}{dt} = 0$$

a) *La velocità in A e B è data dalla velocità negli istanti t=0 e t =* t_1*:*
$$\frac{dx(0)}{dt} = C_1 \approx 5[m/s] \qquad \frac{dx(t_1)}{dt} = C_1 \approx 5[m/s]$$
$$\frac{dy(0)}{dt} = C_2 \approx 6.96[m/s] \qquad \frac{dy(t_1)}{dt} = C_2 - g \cdot t_1 \approx 3.04[m/s]$$

b) *Quando la palla raggiunge la massima altezza al tempo t* la componente verticale della velocità si annulla, per cui:*
$$\frac{dy(t)}{dt} = 0 = -gt^* + C_2 \Rightarrow t^* = C_2/g \approx 0.71[s]$$
e la distanza orizzontale l da A è:

$$l = x(t^*) = C_1 \cdot (t^*) \approx 3.55[m]$$

c) *L'altezza d si trova imponendo che la coordinata y al tempo* $t_1 + t_2$ *sia –d (perchè abbiamo posto l'origine nel punto A)*
$$y(t_1 + t_2) = C_2 \cdot (t_1 + t_2) - \frac{1}{2} g \cdot (t_1 + t_2)^2 = -d \qquad d = 11.52[m]$$

Esercizio 4

Un'auto sta correndo su una pista circolare di raggio R=2 km. Al tempo *t=0* è in quiete e il pilota comincia a premere l'acceleratore. La pressione del piede produce una variazione dei valori sul tachimetro, in modo tale che il pilota legga sul tachimetro valori *n(t)* che variano nel tempo secondo la legge $n(t) = m \cdot \sin(\omega \cdot t)$, in cui $m = 60$ e $\omega = \frac{\pi}{20}$ in unità MKSA.

Usando coordinate cilindriche con origine nel centro della circonferenza e l'asse x passante per il punto di partenza, trovare:

1) le dimensioni di n, m, ω
2) il modulo della velocità dell'auto al tempo $t = 2s$
3) l'accelerazione (modulo e direzione) dopo 10 s.

Soluzione

1) *Siccome n viene letto sul tachimetro, esso è il modulo di una velocità. D'altra parte, il seno e il suo argomento sono adimensionati. Perciò abbiamo:*
   $[m] = LT^{-1}, [m] = LT^{-1}, [\omega] = T^{-1}$

2) *la velocità e l'accelerazione in coordinate cilindriche sono date da:*
   $\vec{v}(t) = \dot{r}\vec{\lambda} + r\dot{\vec{\lambda}} + \dot{z}\vec{k} = \dot{r}\vec{\lambda} + r\dot{\vartheta}(t)\vec{\mu}(t)$ *e*
   $\vec{a}(t) = (\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2(t))\vec{\lambda}(t) + (2\dot{r}\dot{\vartheta}(t) + r\ddot{\vartheta}(t))\vec{\mu}(t)$

   La traiettoria è una circonferenza, quindi:
   $r(t) = R; \dot{r}(t) = 0; \vec{v} = R\dot{\vartheta} \cdot \vec{\mu}; v(t) = R\dot{\vartheta} = n(t) = m \cdot \sin(\omega \cdot t) \Rightarrow v(t = 2) \approx 18.54\,[m/s]$

3) *Dalla formula dell'accelerazione in coordinate cilindriche, sapendo che il raggio è costante, abbiamo:* $\vec{a} = -R \cdot \dot{\vartheta}^2 \vec{\lambda} + R \cdot \ddot{\vartheta} \cdot \vec{\mu}$.
   Dalla formula del punto 2) otteniamo:
   $\dot{\vartheta}(t) = \frac{v(t)}{R} = \frac{m}{R} \cdot \sin(\omega \cdot t); \ddot{\vartheta}(t) = \frac{m \cdot \omega}{R} \cdot \cos(\omega \cdot t)$,
   da usare per calcolare l'accelerazione
   $\vec{a} = -R \cdot \dot{\vartheta}^2 \vec{\lambda} + R \cdot \ddot{\vartheta} \cdot \vec{\mu}$
   che in modulo vale $a = \sqrt{(R \cdot \dot{\vartheta}^2)^2 + (R \cdot \ddot{\vartheta})^2}$
   e all'istante t=10[s] otteniamo
   $a = \sqrt{(2000m)^2 \cdot (0.03s^{-1})^4 + (2000m)^2 (0s^{-1})^2} = 1.8m/s^2$

Esercizio 5

Una nave *N* sta navigando nel mare sotto il controllo di un RADAR *R*, che ogni *ms* registra (e trasmette) la distanza *r = NR* e l'angolo ϑ rispetto alla linea che collega la stazione radar con un faro *L* sulla costa. Dalla registrazione di *r* e ϑ il computer di bordo trova:
$\vartheta(t) = c \cdot \sqrt{t}; r(t) = a \cdot t + b$, in cui *a = 10*, *b =0.5* e *c =1/60* in unità MKSA.

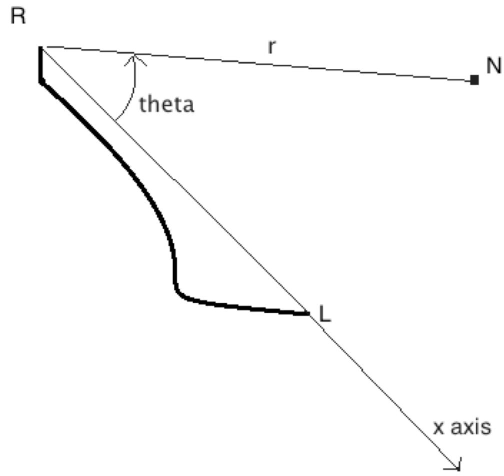
Trovare :

1) le dimensioni di *a,b,c*;

2) la posizione di *N* dopo $t_0 = 4[h]$;

3) la velocità di N dopo $t_0 = 4[h]$;

4) l'accelerazione di *N* dopo $t_0 = 4[h]$



Soluzione

1) $[a] = LT^{-1}; [b] = L; [c] = T^{-\frac{1}{2}}$ *, da cui: a = 10m/s*, *b =0.5 m* and *c =1/60 rad/s*$^{1/2}$

2) Scegliendo un sistema di riferimento con asse x ($\vartheta = 0$*) lungo RL e la direzione positiva di* ϑ *in senso antiorario (direzione trigonometrica), si definisce un sistema di coordinate cilindrico. Possiamo scrivere:*

$$r(t) = a \cdot t + b; \dot{r} = a; \ddot{r} = 0$$

$$\vartheta(t) = c \cdot \sqrt{t}; \dot{\vartheta}(t) = \frac{c}{2\sqrt{t}}; \ddot{\vartheta}(t) = -\frac{c}{4} t^{-\frac{3}{2}}$$ *da cui otteniamo:*

$$\vec{r}(t) = r(t) \cdot \vec{\lambda} = (a \cdot t + b) \cdot \vec{\lambda}$$

$$\vec{v}(t) = \dot{r}(t) \cdot \vec{\lambda} + r \cdot \dot{\vartheta} \cdot \vec{\mu} = a \cdot \vec{\lambda} + \frac{c \cdot (a \cdot t + b)}{2\sqrt{t}} \cdot \vec{\mu}$$

$$\vec{a}(t) = (\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2) \cdot \vec{\lambda} + (r \cdot \ddot{\vartheta} + 2\dot{r}\dot{\vartheta}) \cdot \vec{\mu} = -c^2 \frac{at+b}{4t} \cdot \vec{\lambda} + (-\frac{c}{4}(at+b) \cdot t^{-\frac{3}{2}} + \frac{ac}{\sqrt{t}}) \cdot \vec{\mu}$$

Inserendo il valore di t_0 si ottiene il risultato

$$\vec{r}(t_0) = (a \cdot t_0 + b) \cdot \vec{\lambda} \cong (144km)\vec{\lambda}$$

$$\vartheta(t_0) = c \cdot \sqrt{t_0} = 2.0rad$$

$$\vec{v}(t_0) = a \cdot \vec{\lambda} + \frac{c \cdot (a \cdot t_0 + b)}{2\sqrt{t_0}} \cdot \vec{\mu} = (10m/s) \cdot \vec{\lambda} + (10m/s) \cdot \vec{\mu}$$

$$\vec{a}(t) = -c^2 \frac{at_0 + b}{4t_0} \cdot \vec{\lambda} + (-\frac{c}{4}(at_0 + b) \cdot t_0^{-\frac{3}{2}} + \frac{ac}{\sqrt{t_0}}) \cdot \vec{\mu} = \left(-0.0007m/s^2\right) \cdot \vec{\lambda} + \left(0.001m/s^2\right) \cdot \vec{\mu}$$

Esercizio 6

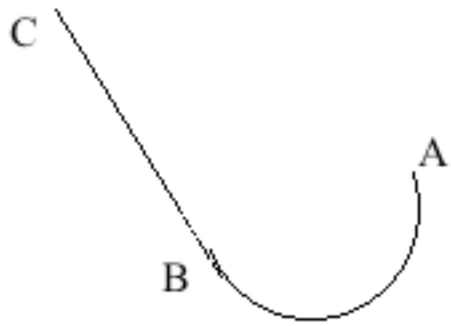
Una macchina sta correndo su una strada che va da A a C percorrendo mezza circonferenza di raggio R=20 m da A a B e un segmento rettilineo che va da B a C con distanza *BC=1 km*.

Il tachimetro mostra un valore della velocita' crescente secondo la legge $v(t) = b \cdot t^{\frac{3}{2}}$, dove *b =1* in unita' MKSA e *t = 0* quando la macchina si trova nella posizione A.

Trovare:

1) la dimensione di *b*;

2) in quale posizione il modulo dell'accelerazione e' massimo.



Soluzione

1) Il tachimetro misura il modulo della velocita' quindi se effettuiamo il calcolo dimensionale otteniamo:

$$[v] = [b] \cdot \left[t^{\frac{3}{2}}\right] \Rightarrow [b] = LT^{-\frac{5}{2}}$$

2) Il moto dalla posizione A alla posizione C avviene lungo mezza circonferenza e poi lungo un segmento quindi siamo nella condizione in cui la traiettoria e' nota.
In questo caso possiamo affrontare la soluzione del problema utilizzando le coordinate intrinseche.

Poniamo all'istante iniziale *t=0* $s(0) = 0$ e abbiamo: $\rho = R$; *da A a B e* $\rho = \infty$ da B a C per come abbiamo definito ρ.
Quindi riscrivendo in coordinate intrinseche la velocita' si ha:

$$\dot{s} = b \cdot t^{\frac{3}{2}},$$

da cui possiamo ricavare mendiante la definizione la legge del moto e l'espressione dell'accelerazione:

$$s = \frac{2}{5} b \cdot t^{\frac{5}{2}} \text{ e } \ddot{s} = \frac{3}{2} b \cdot t^{\frac{1}{2}}$$

Chiamiamo t_B e t_C il tempo in cui l'auto si trova in B e C rispettivamente.

Questi due tempi si possono ricavare da $s = \frac{2}{5} b \cdot t^{\frac{5}{2}}$ ottenendo

$$\pi R = \frac{2}{5} b \cdot t_B^{\frac{5}{2}}; \Rightarrow t_B = \left(\frac{5\pi R}{2b} \right)^{\frac{2}{5}} = 7.56 s$$

$$\pi R + BC = \frac{2}{5} b \cdot t_C^{\frac{5}{2}} \Rightarrow t_C = \left(\frac{5(\pi R + BC)}{2b} \right)^{\frac{2}{5}} = 23.43 s$$

Ricordiamo che da A a B l'accelerazione ha sia componente centripeta che tangente, mentre da B a C la componente centripeta e' nulla perche' il raggio e' infinito.

Inoltre entrambe le componenti, centripeta e tangente, aumentano durante il tempo utile a percorrere i percorsi AB e BC. Quindi in B abbiamo il massimo dell'accelerazione raggiunta nel tratto AB mentre in C il massimo di quella raggiunta in BC.

Per trovare il valore massimo in assoluto e' sufficiente quindi valutare il modulo dell'accelerazione nel punto B e C e confrontarli.

Si ha:

$$|\vec{a}(B)| = \sqrt{\ddot{s}^2(t_B) + \frac{\dot{s}^4(t_B)}{R^2}} = \sqrt{\frac{9}{4} b^2 t_B + \frac{b^4 t_B^6}{R^2}} = 21.99 m/s^2$$

$$|\vec{a}(C)| = \ddot{s}(t_C) = \frac{3}{2} b t_C^{1/2} = 7.26 m/s^2$$