15- Teoremi sulle funzioni continue definite su un intervallo

Massimi e minimi - Teorema di Weierstrass

RICHIAMO $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

$$\max_{x \in [a,b]} f(x) = \max \underbrace{\left(f([a,b]) \right)}_{\text{insieme immagine di } f} =: M$$

caratterizzazione di M:

$f(x) \leq M \quad \forall\, x \in [a,b]$

$\exists$ almeno un $\bar{x} \in [a,b]$: $f(\bar{x}) = M$

VALORE MASSIMO di f

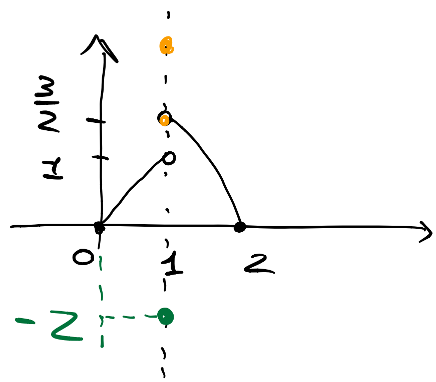
PUNTO DI MASSIMO per f

stessa cosa per $\min\limits_{x \in [a,b]} f(x)$

es:

$$f(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ \lambda & \text{se } x = 1 \\ 2 - \frac{x^2}{2} & \text{se } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

$f : [0,2] \to \mathbb{R}$ determinare i valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ tali per cui f ammetta MASSIMO e MINIMO



per $\alpha = -2$

$\min f = -2$

$f([0,2]) = \{-2\} \cup [0, \frac{3}{2})$

$\max f$ NON ESISTE

$f([0,2]) = [0, \frac{3}{2}) \cup \{\alpha\}$

se $\alpha \geq \frac{3}{2}$ allora $f([0,2]) = [0, \frac{3}{2}) \cup \{\alpha\}$

e $\min\limits_{x \in [0,2]} f = 0$ e $\max\limits_{x \in [0,2]} f = \alpha$

Teorema di Weierstrass

Una funzione f continua su un intervallo chiuso e limitato $\underbrace{}_{[a,b]}$ ammette massimo e minimo.

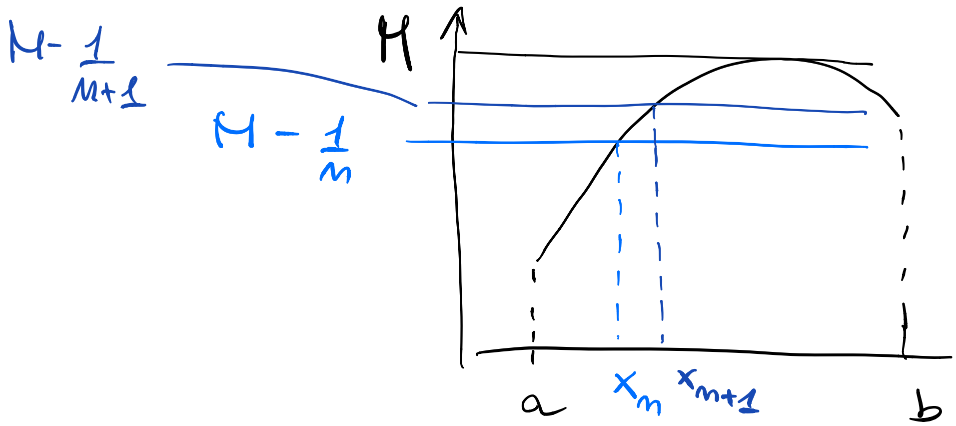
commento sulla dim:

Per provare che f ammette massimo:

si def. $M \overset{def}{=} \sup\limits_{x \in [a,b]} f$

si vuole provare che è finito e $M = \max f$:

supponiamo M finito :



$f(x) \leq M \quad \forall x \in [a,b]$

- $f(x_m) \geq M - \frac{1}{m}$
- $f(x_{m+1}) \geq M - \frac{1}{m+1}$

si dimostra che: •) x_m è crescente

e poiché $x_m \leq b \quad \forall m$, x_m ammette

limite finito ℓ $\quad \boxed{x_m \longrightarrow \ell}$

$a \leq \ell \leq b$

f continua

$\Downarrow$

$f(x_n) \longrightarrow f(\ell)$

- $f(x_m) \geq M - \frac{1}{m}$

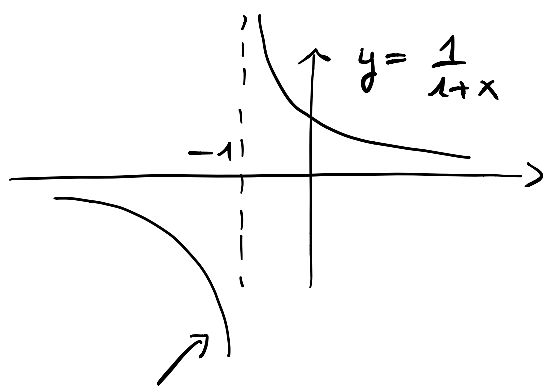
$\downarrow \qquad \downarrow \; m \to +\infty$

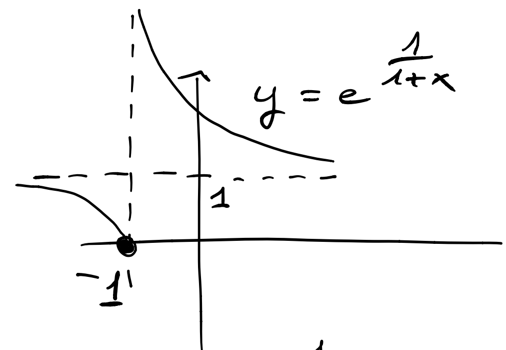
$\boxed{f(\ell) \geq M} \implies f(\ell) = M$

es: $f(x) = e^{\frac{1}{1+x}}$

si applica il teor. di Weierstrass in $\left[-\frac{1}{2}, 2\right]$? <u>sì</u> perché f è continua nell'intervallo considerato

$[-1, 0]$? <u>No</u>





$$\tilde{f}(x) \overset{def}{=} \begin{cases} e^{\frac{1}{1+x}} & \text{se } x \neq -1 \\ 0 & \text{se } x = -1 \end{cases}$$

$\tilde{f}$ è definita in $[-1, 0]$ ma non è continua e quindi non si può applicare il teorema di Weierstrass

——— o ———

uno <u>zero</u> di una funzione è una soluzione dell'equazione $f(x) = 0$

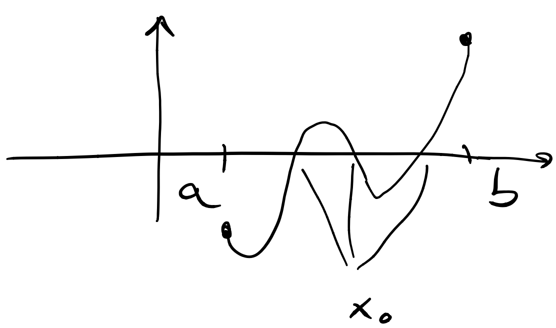
Teorema di esistenza degli zeri

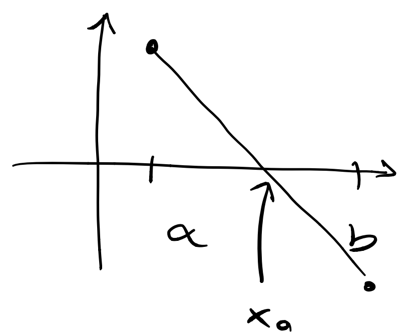
$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua su $[a,b]$

$\underbrace{f(a)f(b)}$ < 0

agli estremi a e b f assume valori di segno opposto

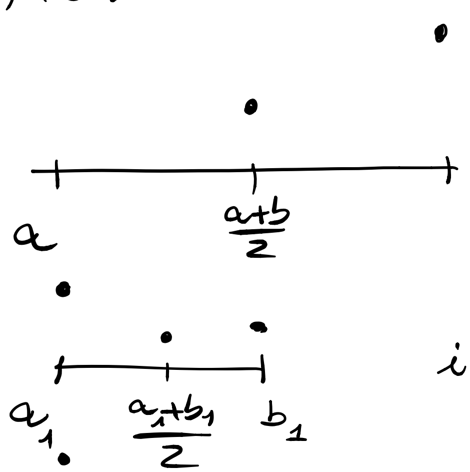
Allora esiste almeno un $x_0 \in (a,b)$ tale che $f(x_0) = 0$





[Commento sulla dimostrazione:

si usa il METODO DI BISEZIONE: supponiamo $f(a)<0$, $f(b)>0$



$f\left(\frac{a+b}{2}\right) =$
- 0 → $x_0 = \frac{a+b}{2}$ FINE
- >0
- <0

itera il procedimento

... dopo n passi: $[a_n, b_n]$

con $f(a_n)<0$, $f(b_n)>0$

di ampiezza $\boxed{b_n - a_n} = \dfrac{b-a}{2^n} \longrightarrow 0$

si dimostra che $a_n \nearrow$, $b_n \searrow$

quindi ammettono limite FINITO

$$\left.\begin{array}{l} a_n \longrightarrow \ell_1 \\ b_n \longrightarrow \ell_2 \end{array}\right\} \quad \ell_1 = \ell_2$$

$$\boxed{x_0 = \ell_1 = \ell_2}$$

$$\underbrace{f(a_n)}_{<0} \longrightarrow f(\ell_1) \leq 0$$

$$\|$$

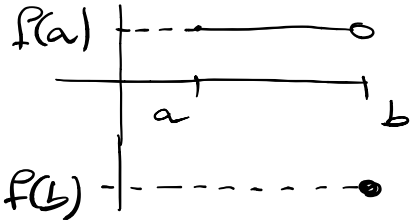
$$\underbrace{f(b_n)}_{>0} \longrightarrow f(\ell_2) \geq 0$$

ATTENZIONE: tutte le ipotesi del teorema degli zeri sono necessarie!

- P.es: se consideriamo

$$\left.\begin{array}{l} f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \\ f(a)f(b) < 0 \end{array}\right\} \not\Rightarrow \exists\, x_0 : f(x_0) = 0$$

(cioè omettiamo f continua in $[a,b]$)



$$f(x) = \begin{cases} 1 & \forall x \in [1,3) \\ -1 & \text{se } x = 3 \end{cases}$$

$f : [1,3] \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad f(1)\,f(3) < 0$

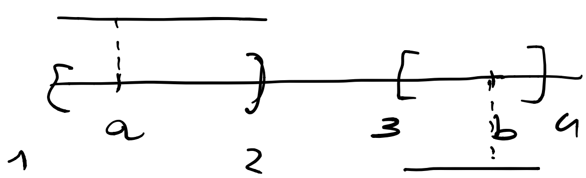
soddisfa le ipotesi ma non si annulla mai

• P. es: $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$:

$f(a)\,f(b) < 0$

(qui abbiamo omesso l'ipotesi che X sia un intervallo chiuso e limitato)

allora non è detto che f si annulli in X:



$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \\ -1 & \text{se } 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

allora f è continua in $X = [1,2] \cup [3,4]$

$f\left(\frac{3}{2}\right) = 1 \qquad f\left(\frac{7}{2}\right) = -1$

$a = \frac{3}{2}$, $b = \frac{7}{2}$, quindi f soddisfa le ipotesi ma non si annulla.

---

es: $f(x) = x^2$ è continua in $[-1,1]$

$f(-1) = 1 = f(1)$ stesso segno

ma f si annulla in 0.

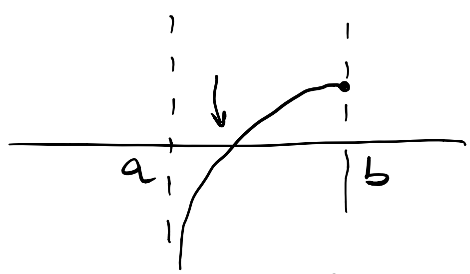
[il teor. degli zeri dà delle condizioni solo SUFFICIENTI per l'$\exists$ di uno zero]

CONSEGUENZE IMPORTANTI:

Sia f continua in un intervallo I

se f ammette limiti (finiti o infiniti) di segno opposto per x che tende agli estremi di I, allora f ha almeno uno zero in I

esempi:



$I = (a, b]$

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$

$f(b) > 0$

$I = \mathbb{R}$

$f(x) = x^7 + 3x^5 + 2$ polinomio di grado 7

f è continua su $I = \mathbb{R}$

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} x^7 = \pm\infty$

i limiti hanno segno opposto

$x^7 + 3x^5 + 2 = 0$ ha almeno una soluzione
cioè $f(x) = 0$ ha almeno
uno zero in $\mathbb{R}$

Possiamo localizzare meglio lo zero:

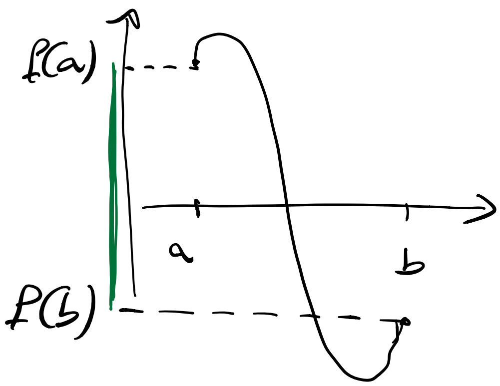
$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 2 \\ f(-1) = -1 - 3 + 2 < 0 \end{array}\right\} \underset{\text{teor. degli zeri}}{\Longrightarrow} f \text{ si annulla in } (-1, 0)$$

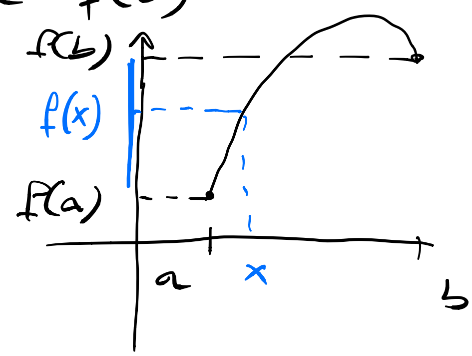
CONCLUSIONE: ogni polinomio di grado dispari
ha almeno uno zero in $\mathbb{R}$

Teorema dei valori intermedi

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua su $[a,b]$

Allora f assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$

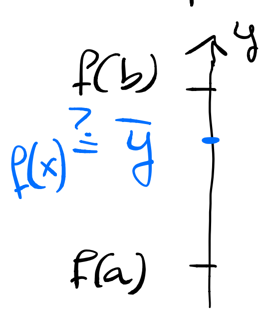




Dim:

se $f(a) = f(b)$: non c'è niente da provare

se $f(a) \neq f(b)$, supponiamo $f(a) < f(b)$



Sia $\bar{y} \in [f(a), f(b)]$

TESI: $\exists$ almeno una $x \in [a,b]$: $f(x) = \bar{y}$

cioè vogliamo provare che l'equazione $f(x) = \bar{y}$ ha (almeno) una soluzione $x \in [a,b]$

e per questo utilizziamo il teorema degli zeri:

$$f(x) = \bar{y} \iff f(x) - \bar{y} = 0$$

vogliamo cioè provare che la funzione $f(x) - \bar{y}$ ha almeno uno zero:

- $g(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) - \bar{y}$
- $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ perché g è una traslazione (verso l'alto o verso il basso) di f e f è definita in $[a,b]$
- g è continua in $[a,b]$ perché è la traslazione di f che è continua in $[a,b]$
- $g(a) = f(a) - \bar{y} < 0$

$\bar{y} \in \left\{ f(a), f(b) \right]$

$f(a) < \bar{y} < f(b)$

$\Rightarrow f(a) - \bar{y} < 0$

$g(b) = f(b) - \bar{y} > 0$

$\Rightarrow g(a)\, g(b) < 0$

g soddisfa le ipotesi del teorema degli zeri

$\Rightarrow \exists \ \bar{x} \in [a,b]$ t.c. $g(\bar{x}) = 0$

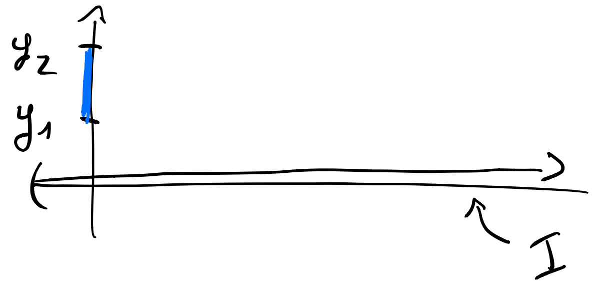
cioè $f(\bar{x}) = \bar{y}$

$\square$

CONSEGUENZE :

1) f continua su un intervallo I

$y_1, y_2 \in f(I) \qquad y_1 < y_2$



$\Rightarrow [y_1, y_2] \subset f(I)$

per il teor. dei valori intermedi

2) se f è continua su un intervallo I

allora l'immagine di f $f(I)$ è un intervallo di estremi $\inf_I f$ e $\sup_I f$

ATTENZIONE: sia f continua su un intervallo I.

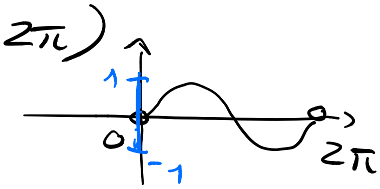
•) I intervallo aperto $\overset{?}{\Longrightarrow}$ $f(I)$ intervallo aperto?

FALSO

controesempio: $\left.\begin{array}{l} I = \mathbb{R} \\ f(x) = \sin(x) \end{array}\right\} \quad f(\mathbb{R}) = [-1,1]$

potevo anche scegliere $I = (0, 2\pi)$

$\Rightarrow \quad f((0,2\pi)) = [-1,1]$

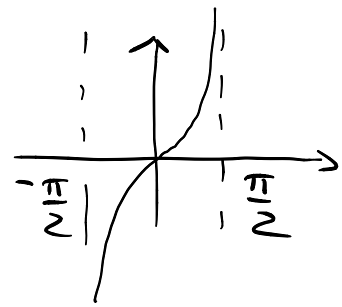


•) I limitato $\overset{?}{\Longrightarrow}$ $f(I)$ intervallo limitato ?

FALSO

controesempio: $f(x) = \tan(x)$

$I = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$



$f(I) = \mathbb{R}$

•) I illimitato $\not\Longrightarrow$ $f(I)$ intervallo illimitato

$\left.\begin{array}{l} f(x) = \arctan(x) \\ I = \mathbb{R} \\ \text{illimitato} \end{array}\right\}$ $f(\mathbb{R}) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

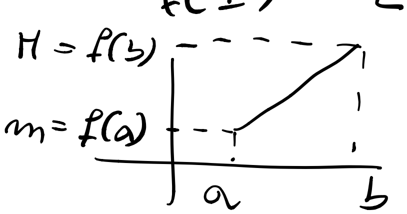
limitato

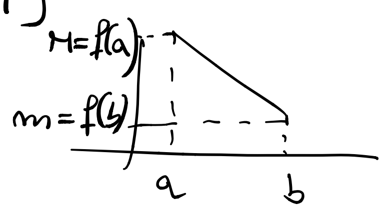
•) I chiuso e limitato, f continua su I

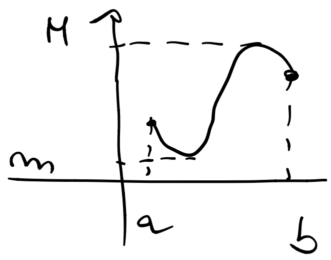
$\overset{?}{\Longrightarrow}$ $f(I)$ chiuso e limitato ?

VERA : per il teorema di Weierstrass f ammette massimo assoluto M e minimo assoluto m e per il teorema dei valori intermedi

$$f(I) = [m, M]$$







Richiamo: f strettam. monotona

$$\Downarrow \quad \cancel{\Uparrow}$$

f iniettiva

es: $f(x) = \frac{1}{x}$ è iniettiva ma non è strett. monotona.

NOTA: f continua su un intervallo I allora

$$f \text{ iniettiva} \iff f \text{ strett. monotona}$$

DOMANDA: la funzione inversa di una funzione continua e invertibile è sempre continua?

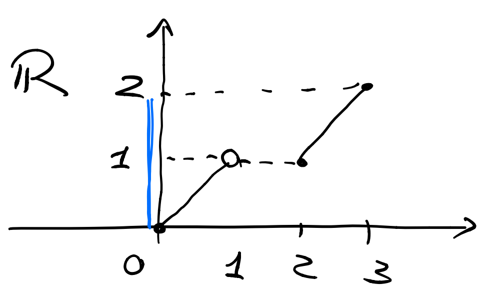
es:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ x-1 & \text{se } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

$$f : \underbrace{[0,1) \cup [2,3]}_{X} \longrightarrow \mathbb{R}$$

f è continua in X

è invertibile

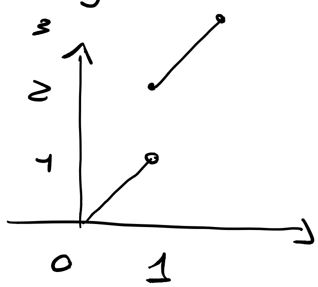


passiamo calcolare esplicitamente la funzione inversa:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ x+1 & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$f(x) = y$ $y \in [0,1)$ / $y \in [1,2)$

$f^{-1} : [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$



f^{-1} è discontinua in $x=1$

questo esempio prova che l'inversa di una funzione continua NON è necessariamente continua

---

Teorema: continuità della funzione inversa

f continua e invertibile su un intervallo I allora la funzione inversa f^{-1} è continua sull'intervallo $f(I)$

$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, $f(I)$ intervallo

$f^{-1} : f(I) \longrightarrow \mathbb{R} \Rightarrow f^{-1}$ continua in $f(I)$

— o —