

Dispense integrative per lo studio della gravitazione e dell'elettrostatica

Nel seguito enunceremo le leggi di Keplero dimostrando in particolare la seconda legge. I rimanenti argomenti da studiare sulla gravitazione si possono trovare nel testo di riferimento (Mazzoldi, Nigro, Voci). Sono inoltre riportate di seguito le dimostrazioni del Teorema di Gauss e la sua applicazione per alcuni tipi di simmetria. Tali dimostrazioni sono materia di esame orale.

1. Le tre leggi di Keplero

Per poter stabilire quale sistema fosse da preferire tra quello geocentrico e quello eliocentrico furono compiute numerose osservazioni e raccolti un quantitativo ingente di dati sperimentali. L'ultimo grande astronomo che effettuò osservazioni senza l'utilizzo di un telescopio fu Tycho Brahe. I dati da lui raccolti vennero analizzati da Johannes Kepler (1571-1630) che determinò nel moto dei pianeti delle regolarità che sono espresse mediante le tre leggi di seguito enunciate.

1.1 Prima legge di Keplero

Rispetto al sole ogni pianeta descrive un'orbita ellittica di cui il sole occupa uno dei fuochi.

1.2 Seconda legge di Keplero

Il raggio vettore dal sole alla terra descrive aree proporzionali ai tempi impiegati a descriverle; vale a dire che il moto di un pianeta rispetto al sole si svolge con velocità areolare costante.

Dimostrazione:

descriviamo il moto di una massa m puntiforme, sotto l'azione di una forza centrale con punto fisso O . Supponiamo che ad un determinato istante t_0 la velocità con cui la massa si muove è $\vec{v}(t_0)$: scegliamo un sistema di coordinate cilindriche con origine nel punto fisso O e vettori unitari $\vec{\lambda}, \vec{\mu}$ nel piano $(O, \vec{v}(t_0))$. Al tempo t_0 avremo:

$$\vec{F}_C(\vec{r}) = F_C(r) \cdot \vec{\lambda}$$

e la II legge di Newton si scrive come:

$$F_C(r(t_0)) \cdot \vec{\lambda}(t_0) = m \cdot \ddot{\vec{r}}(t_0) = m \cdot (\ddot{r}(t_0) - r(t_0)\dot{\theta}^2(t_0))\vec{\lambda}(t_0) + (2\dot{r}(t_0)\dot{\theta}(t_0) + r(t_0)\ddot{\theta}(t_0))\vec{\mu}(t_0) + \ddot{z}(t_0)\vec{k} \quad (1)$$

dove abbiamo utilizzato l'espressione dell'accelerazione in un sistema di coordinate cilindriche.

Dalla (1) possiamo dedurre che:

- 1) l'accelerazione non ha nessuna componente lungo l'asse z e quindi la velocità rimane sempre nello stesso piano: la traiettoria sotto l'effetto di una forza centrale è planare;
- 2) la componente trasversa (lungo $\vec{\mu}$) dell'accelerazione è nulla, anche per $t > t_0$, perchè la forza rimane sempre lungo la direzione di $\vec{\lambda}$. Ne segue che:

$$2\dot{r}\dot{\vartheta}(t) + r\ddot{\vartheta}(t) = 0 \quad (2)$$

Quando il vettore spostamento si muove di un angolo infinitesimo $d\vartheta$ esso descrive un'area infinitesima dA data da (trascurando termini infinitesimi di ordine superiore):

$$dA = \frac{1}{2}r^2 d\vartheta; \text{ dividendo questa equazione per } dt \text{ si ottiene: } \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2 \frac{d\vartheta}{dt}$$

La derivata dell'area è detta **velocità areolare**. La derivata della *velocità areolare* si scrive come:

$$\frac{d^2 A}{dt^2} = r\ddot{\vartheta} + \frac{1}{2}r^2\ddot{\vartheta} = \frac{1}{2}r(2\dot{r}\dot{\vartheta} + r\ddot{\vartheta})$$

Ricordando la (2) si ha:

$$\Rightarrow \frac{d^2 A}{dt^2} = r\ddot{\vartheta} + \frac{1}{2}r^2\ddot{\vartheta} = \frac{1}{2}r(2\dot{r}\dot{\vartheta} + r\ddot{\vartheta}) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dA}{dt} = \text{const.}$$

da cui si ottiene la **seconda legge di Keplero** enunciata sopra.

1.3 Terza legge di Keplero

I quadrati dei periodi T di rivoluzione dei vari pianeti intorno al sole sono proporzionali ai cubi dei semiassi maggiori r delle rispettive orbite ellittiche: $T^2 = kr^3$ dove k è una costante di proporzionalità il cui valore varia a seconda del pianeta considerato.

La terza legge di Keplero viene utilizzata per dimostrare la **Legge di gravitazione universale**: ogni corpo esistente nell'universo attira ogni altro corpo con una forza gravitazionale. Le forze di gravitazione esistenti tra due punti materiali hanno come retta di applicazione la retta individuata dalla posizione dei due punti, intensità proporzionale al prodotto delle masse dei punti materiali e inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza.

2. Il campo gravitazionale e il campo elettrico

La forza **gravitazionale** e di **Coulomb** sono forze generate da punti fisici che hanno massa o sono dotate di una carica elettrica. Queste forze agiscono su altri punti fisici e la loro intensità e direzione dipendono dalle posizioni relative dei punti che generano la forza e dei punti che risentono della forza.

Se il punto che genera la forza si trova in una posizione fissa (possiamo assumere che questa posizione coincida con l'origine O di un sistema inerziale) in ogni punto geometrico dello spazio un punto fisico di massa m (carica q) risente di una forza proporzionale alla massa m (carica q).

Il rapporto della forza gravitazionale (elettrica) e della massa m (carica q) è un vettore $\vec{E}_G(x, y, z) \equiv \vec{F}_G(x, y, z)/m$ ($\vec{E}_E(x, y, z) \equiv \vec{F}_E(x, y, z)/q$), che è detto "**campo gravitazionale (elettrico)**".

Ne segue che la conoscenza del campo che agisce in una determinata regione dello spazio permette di trovare il valore della forza che agisce su un punto fisico semplicemente moltiplicando il campo per il valore della massa o della carica del punto.

2.1 Sistemi di punti che generano un campo

Da quanto detto sappiamo che una particella puntiforme, dotata di massa o carica elettrica, genera un campo in ogni punto dello spazio. Questo campo ha direzione lungo il segmento che unisce il punto alla particella. Molte particelle, che occupano diverse posizioni nello spazio, generano nello stesso punto un campo che è dato dalla somma (vettoriale) dei singoli campi generati dalle singole particelle (questa proprietà deriva dalla proprietà additiva delle forze).

Anche se in generale risulta necessario valutare questa somma per valutare il campo totale generato da un sistema di particelle dotate di massa o cariche, in alcuni casi alcune distribuzioni spaziali delle particelle mostrano delle particolari simmetrie che permettono una valutazione analitica del campo e delle sue proprietà.

Per sfruttare tali simmetrie noi utilizzeremo il concetto di **flusso di un campo** e il **Teorema di Gauss**.

Il Teorema di Gauss per essere dimostrato richiede che il campo abbia le seguenti proprietà:

- 1) direzione lungo il segmento che unisce la particella al punto geometrico;
- 2) intensità inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza.

Entrambe le proprietà sono soddisfatte dal campo gravitazionale e dal campo elettrico. Nel seguito dimostreremo il teorema di Gauss solo per il caso del campo elettrico: il caso gravitazionale si ricava molto facilmente scambiando le cariche con le masse e sostituendo in modo opportuno le costanti.

2.2 Teorema di Gauss

Definiamo il flusso infinitesimo $d\phi$ di un campo $\vec{E}(x, y, z)$ generato da una carica puntiforme Q su una superficie infinitesima dS , posizionata attorno al punto (x, y, z) , il cui vettore unitario perpendicolare a dS è \vec{n} (vedi Fig. 1):

$$d\phi(x, y, z) \equiv \vec{E}(x, y, z) \cdot \vec{n} dS \quad (3)$$

Prima di dimostrare il teorema, descriviamo la fig.1:

- S è una superficie chiusa che contiene la carica Q (a volte chiamata "superficie di Gauss")
- AB è approssimabile alla superficie dS attorno al punto (x,y,z)
- QA, QB sono le distanze dei punti A e B dalla carica: l'angolo \widehat{AQB} è infinitesimo poichè dS è infinitesima e quindi $QA \cong QB$ (a meno di differenze infinitesimali di ordine superiore)
- B' è un punto su QB tale che: $QA = QB'$ (in altri termini B' sta su una sfera di centro Q e raggio QA : chiamiamo dS' la superficie sferica infinitesima contenente A e B'
- A'' e B'' sono punti di una sfera di centro Q e raggio $QA'' = QB'' = 1$: la superficie totale di questa sfera è $S'' = 4\pi$ e la superficie sferica infinitesima dS'' contiene A'' e B'' e sottiene lo stesso angolo $\widehat{AQB'}$ di dS' .

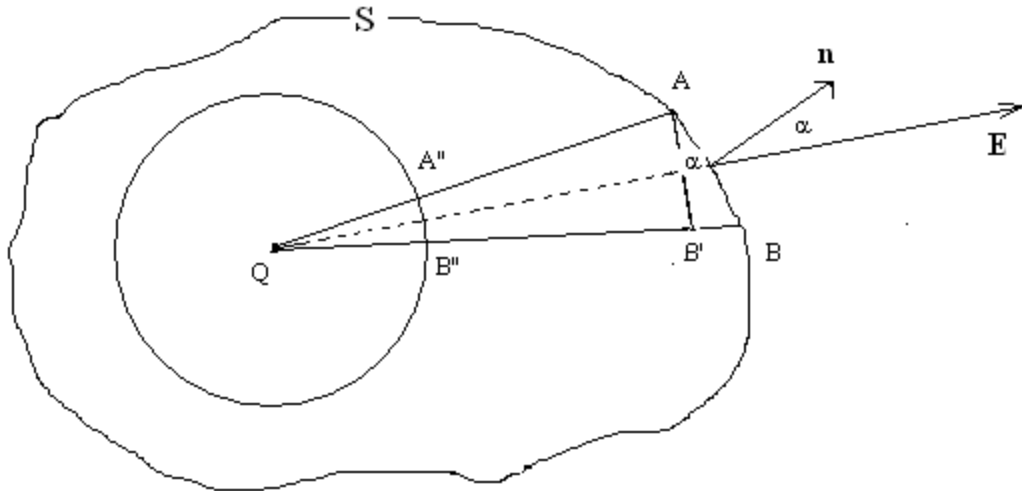


Fig. (1) (i simboli in **grassetto** sono vettori)

Da considerazioni geometriche sulla similitudine dei triangoli ricordiamo che $\frac{dS'}{QA^2} = \frac{dS''}{QA''^2}$

e che tutte le aree infinitesime dS, dS', dS'' posso essere approssimate dalle superfici planari contenenti $AB, AB', A''B''$: inoltre l'angolo tra il campo e il vettore normale a dS è uguale a $\widehat{B'AB}$.

Il campo elettrico è dato da:

$$\vec{E} \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{QA^2} \cdot \frac{\vec{QA}}{|QA|}$$

Essendo $dS' = \cos(\alpha) \cdot dS$, possiamo riscrivere l'espressione del flusso come:

$$d\phi(x, y, z) \equiv \vec{E}(x, y, z) \cdot \vec{n}dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{QA^2} \cdot \frac{\vec{QA}}{|\vec{QA}|} \cdot \vec{n}dS = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{QA^2} \cdot \cos(\alpha)dS =$$

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{QA^2} \cdot dS' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{QA^2} \cdot \frac{QA^2 \cdot dS''}{QA'^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dS''}{QA'^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot dS''$$

(3.4.2)

Se definiamo il flusso totale $\phi(\vec{E}, S)$ del campo \vec{E} su una superficie S di forma qualunque come la somma di tutti i flussi infinitesimi $d\phi(x, y, z)$, costruiti su S (questa somma è un integrale visto che i termini sono infinitesimi), otteniamo:

$$\phi \equiv \int d\phi(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int dS'' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot 4\pi = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (4)$$

Nota 1

Cosa accade se dentro la superficie S abbiamo più di una carica? Possiamo scrivere il flusso infinitesimo dS generato da 2 cariche Q e Q' posizionate dentro S in posizioni distinte, che produce 2 campi \vec{E}, \vec{E}' :

$$d\phi_{TOT}(x, y, z) \equiv \vec{E}_{TOT}(x, y, z) \cdot \vec{n}dS = [\vec{E}(x, y, z) + \vec{E}'(x, y, z)] \cdot \vec{n}dS =$$

$$= \vec{E}(x, y, z) \cdot \vec{n}dS + \vec{E}'(x, y, z) \cdot \vec{n}dS = d\phi(x, y, z) + d\phi'(x, y, z) \quad (5)$$

Il flusso totale ϕ_{TOT} è la somma (integrale) di tutti i flussi infinitesimi $d\phi_{TOT}(x, y, z)$ su una superficie S e quindi:

$$\phi_{TOT} = \int d\phi(x, y, z) + \int d\phi'(x, y, z) = \frac{Q}{\epsilon_0} + \frac{Q'}{\epsilon_0} \quad (6)$$

Ripetendo la dimostrazione si prova che il flusso totale su una superficie chiusa contenente un certo numero di cariche Q_i è uguale alla carica interna totale diviso il valore di ϵ_0 :

$$\phi_{TOT} = \frac{\sum_i Q_i}{\epsilon_0} \quad (7)$$

Nota 2

Cosa accade se la carica Q è esterna alla superficie S ? In Fig. 2 si nota che le aree AB e DC si riferiscono alla stessa area $A''B''$ sulla sfera di raggio 1, ma gli angoli tra i campi e i vettori normali alla superficie hanno segni opposti.

una distanza r ($r > R$) dal centro della sfera, ha un punto simmetrico A' con la stessa massa, rispetto a

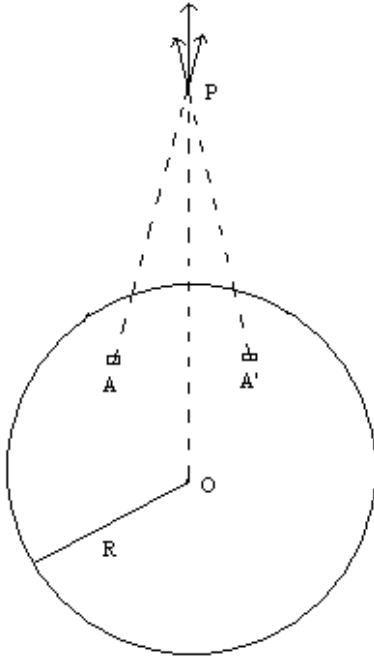


Fig. 3

OP , tale che il campo $\vec{E}'(r, \vartheta, \varphi)$ prodotto da A' cancella la componente tangente di $\vec{E}(r, \vartheta, \varphi)$: quindi il campo in P è solo radiale

$$\vec{E}(r, \vartheta, \varphi) = E(r, \vartheta, \varphi) \cdot \frac{\vec{r}}{r} \quad (10)$$

(in eq. (10) $E(r, \vartheta, \varphi)$ è la componente del campo). Inoltre, tutti i punti a distanza r risentono della stessa somma di forze prodotte da tutti i volumi infinitesimi e quindi la forza totale su un punto P dipende solo dalla distanza r ma non dipende dall'angolo θ o dall'angolo φ , quindi:

$$\vec{E}(r, \vartheta, \varphi) = E(r) \cdot \frac{\vec{r}}{r} \quad (11)$$

In altri termini, il campo prodotto dai punti alla stessa distanza da O ha la stessa intensità. Applichiamo ora il Teorema di Gauss a una superficie sferica (superficie di Gauss) di raggio r e centrata in O . Ricordiamo che ogni superficie sferica infinitesima dS è radiale, vale a dire parallela al campo. Quindi il flusso su tutta la superficie sferica è:

$$\phi = \int_S E(r) \cdot \frac{\vec{r}}{r} \cdot \frac{\vec{r}}{r} dS = \int_S E(r) \cdot dS = E(r) \int_S dS = E(r) \cdot 4\pi r^2 \quad (12)$$

Il teorema di Gauss afferma dunque che il flusso totale sulla superficie è uguale alla massa totale interna:

$$4\pi r^2 \cdot M = E(r) \cdot 4\pi r^2 \Rightarrow E(r) = \frac{\gamma \cdot M}{r^2} \quad (13)$$

Nota: Il campo gravitazionale prodotto da un volume di masse, distribuite nello spazio con simmetria sferica, in un punto fuori dal volume è lo stesso di quello generato quando la massa totale è concentrata nel centro del volume.

Se il punto P è interno ($r < R$) al volume contenente la massa M , è evidente che tutte le simmetrie discusse prima circa la direzione del campo e l'intensità rimangono valide: la sola differenza è che la massa interna m dentro una sfera ideale di raggio r è solo una parte della

massa totale della sfera ed è data: $m = \int_0^r \rho(r) \cdot dV$

Come caso particolare, possiamo considerare una sfera di raggio R che ha una densità uniforme $\rho = \rho_0$: la massa m inclusa dentro la sfera (superficie di Gauss) di raggio r ($r < R$)

è data da: $m = \rho_0 \frac{4}{3} \pi r^3$, e quindi:

$$4\pi\gamma \cdot m = 4\pi\gamma \cdot \rho_0 \frac{4}{3} \pi r^3 = E(r) \cdot 4\pi r^2 \Rightarrow E(r) = \frac{4\gamma\rho_0\pi \cdot r}{3} \quad (14)$$

ne segue che dentro una sfera omogenea la gravità cresce linearmente con la distanza dal centro.

3.2 Simmetria planare

Consideriamo un piano sottile, con carica totale Q e un'area (molto grande) A , che ha una densità di carica uniforme $\rho_0 = Q/A$. Consideriamo un punto A su un lato del piano come in fig. 4 ad una distanza d e un altro punto A' dall'altro lato in una posizione simmetrica rispetto al piano. Osserviamo che il campo di Coulomb in A è perpendicolare al piano per ragioni di simmetria, se l'area è infinita (o molto grande), perchè la componente laterale del campo si cancella per ogni coppia di punti (come mostrato in fig.4), come per il caso della simmetria sferica. Inoltre tutti i punti a distanza d hanno lo stesso valore $E(d)$ di intensità del campo, per ragioni di simmetria.

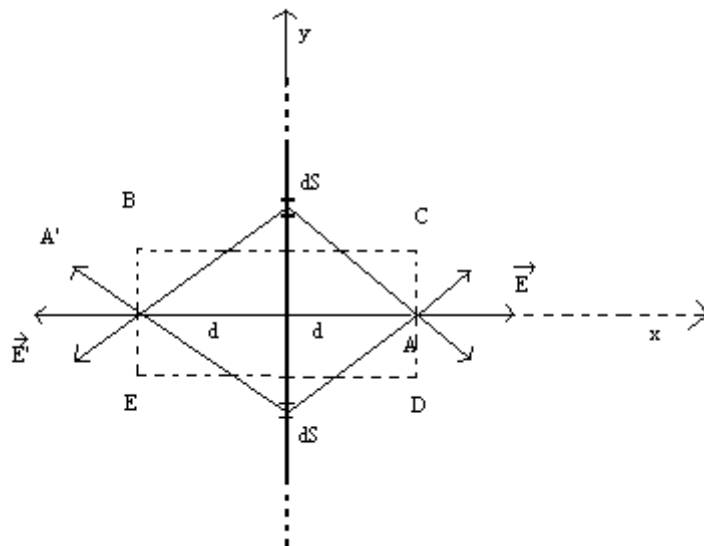


Fig.4

Prendiamo ora una superficie di Gauss, un cilindro con le basi parallele al piano, a una distanza d su entrambe i lati e di area S e S' (CD e BE rispettivamente, in fig.4). Il flusso totale è dato dal flusso ϕ_L sulla superficie laterale a cui sommare i flussi ϕ e ϕ' sulle basi del cilindro S e S' rispettivamente. Il versore normale alla superficie laterale è sempre parallelo

al piano, quindi perpendicolare al campo e per questo risulta $\phi_L = 0$. Il versore normale alla superficie delle basi è \vec{i} e $-\vec{i}$, e il campo è $E(d) \cdot \vec{i}$ e $-E(d) \cdot \vec{i}$, su S e S' rispettivamente. Quindi il flusso totale ϕ_T è:

$$\phi_T = \phi_L + \phi + \phi' = 0 + S\vec{i} \cdot E(d)\vec{i} + S'(-\vec{i}) \cdot E(d)(-\vec{i}) = 2S \cdot E(d) \quad (15)$$

La carica interna della superficie di Gauss è $S \cdot \rho_0$ e quindi per il teorema di Gauss:

$$\phi_T = 2S \cdot E(d) = \frac{S \cdot \rho_0}{\epsilon_0} \Rightarrow E(d) = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \quad (16)$$

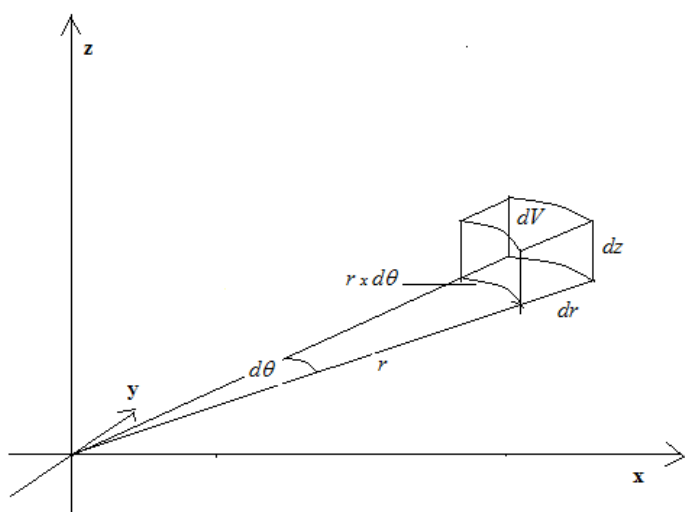
Nota 1: il campo elettrico creato da una distribuzione planare uniforme è uniforme e indipendente dalla distanza dal piano. Il campo cambia verso ai due lati della distribuzione.

Nota 2: due distribuzioni di carica planari e parallele con lo stesso segno di carica producono un campo che è la somma fuori da entrambe i piani e la differenza dentro i piani. Se le cariche hanno segno opposto il campo si somma fuori dai due piani e si fa la differenza dei due contributi dentro i piani.

Nota 3: se due distribuzioni di carica planari e parallele hanno la stessa densità e segno opposto, il campo fuori dai due piani è nullo mentre raddoppia nella regione compresa fra i due piani. Questo risultato rappresenta il principio di funzionamento dei condensatori planari che saranno studiati approfonditamente in Fisica II.

3.3 Simmetria cilindrica

Consideriamo un cilindro di raggio R e lunghezza infinita, che contiene al suo interno una carica elettrica. Scegliendo un sistema di riferimento in coordinate cilindriche, la densità di carica $\lambda(r, \vartheta, z)$ è una funzione del punto di coordinate r, ϑ, z . Si ottiene facilmente che il volume infinitesimo attorno al punto di coordinate r, ϑ, z è dato da: $dV = r \cdot dr \cdot d\vartheta \cdot dz$ (vedi figura sotto).



La carica infinitesima contenuta nel volume infinitesimo è dato da:

$$dq = \rho(r, \vartheta, z) \cdot dV = \rho(r, \vartheta, z) \cdot r \cdot dr \cdot d\vartheta \cdot dz \quad (17)$$

Supponiamo che la densità di carica non dipenda dalle coordinate z e ϑ ma solo da r : $\rho(r, \vartheta, z) = \rho(r)$. Questa è chiamata **simmetria cilindrica**. Sotto questa ipotesi vogliamo valutare il campo elettrico generato dal cilindro in un punto r_0, ϑ_0, z_0 **fuori dal cilindro**, quindi per $r_0 > R$. Per semplicità, scegliamo l'origine del sistema di riferimento coincidente con la coordinata z_0 del punto r_0, ϑ_0, z_0 e l'origine degli angoli ϑ lungo la linea che unisce il punto esterno r_0, ϑ_0, z_0 all'asse delle z , in modo che le sue coordinate siano: $r_0, \vartheta_0 = 0, z_0 = 0$.

Partiamo dalle seguenti osservazioni:

- 1) nel punto r_0, ϑ_0, z_0 il campo elettrico è prodotto da **tutte** le cariche infinitesime presenti nel cilindro (punto esterno al cilindro).
- 2) per ogni carica $dq = \rho(r) \cdot r \cdot dr \cdot d\vartheta \cdot dz$ nel volume attorno al punto (r, ϑ, z) c'è una carica uguale $dq' = \rho(r) \cdot r \cdot dr \cdot d\vartheta \cdot dz$ posizionata in una posizione simmetrica $(r, \vartheta, -z)$ rispetto all'asse delle z . I 2 campi prodotti hanno lo stesso modulo, perchè entrambe i volumi contengono la stessa quantità di carica (la densità non dipende da z) e le loro distanze dal punto r_0, ϑ_0, z_0 sono identiche. Inoltre le loro componenti z sono uguali e opposte quindi si cancellano e il loro campo totale è perpendicolare all'asse z .
- 3) Se costruiamo un piano α passante per il punto $(r_0, \vartheta_0 = 0, z_0 = 0)$ e l'asse delle z , per ogni carica dq nel volume attorno al punto (r, ϑ, z) c'è una carica uguale dq'' posizionata in una posizione simmetrica $(r, 2\pi - \vartheta, z)$ rispetto al piano α . I 2 campi prodotti hanno lo stesso modulo, perchè entrambe i volumi contengono la stessa quantità di carica (la densità non dipende da ϑ) e le loro distanze dal punto r_0, ϑ_0, z_0 sono identiche. Inoltre le loro componenti perpendicolari a $r\vec{\lambda}$, nel piano (r, ϑ) , sono uguali e opposte e si cancellano. Quindi il campo totale giace nel piano α .
- 4) Per costruire il campo totale nel punto (r_0, ϑ_0, z_0) , dobbiamo sommare i contributi di tutte le cariche infinitesime. Possiamo fare la somma sommando ogni quadrupolo (insieme di 4 cariche) dq, dq', dq'', dq''' , e ognuno di essi produce un contributo che è radiale e perpendicolare all'asse z , e poi sommando tutti i quadrupoli insieme. Il risultato è un **campo radiale** $\vec{E}(r_0, \vartheta_0 = 0, z_0 = 0)$ **perpendicolare all'asse z** :

$$\vec{E}(r_0, \vartheta_0 = 0, z_0 = 0) = E(r_0, \vartheta_0 = 0, z_0 = 0) \cdot \vec{\lambda}(\vartheta_0 = 0) \quad (18)$$

- 5) Possiamo applicare la stessa procedura per calcolare il campo in un altro punto (r_0, ϑ_1, z_1) alla stessa distanza dall'asse z : otteniamo lo stesso risultato circa la direzione del campo, radiale e perpendicolare all'asse z . Inoltre anche il modulo deve essere lo stesso perchè le cariche che producono il campo sono distribuite nello stesso modo rispetto al punto. Quindi possiamo affermare che in un generico punto (r_0, ϑ_0, z_0) il modulo è indipendente da ϑ_0 e z_0 , dipende solo dalla distanza r_0 dall'asse z : $\vec{E}(r_0, \vartheta_0, z_0) = E(r_0) \cdot \vec{\lambda}(\vartheta_0)$

Per valutare il modulo del campo, scegliamo come superficie di Gauss (ideale) una superficie cilindrica di altezza infinitesima dz e il raggio r_0 attorno all'asse z (ad esempio un cilindro di spessore infinitesimo). Si puo' notare che il versore perpendicolare alla superficie laterale (una corona di spessore infinitesimo) è ovunque $\vec{\lambda}$, mentre il versore perpendicolare alla base superiore è ovunque \vec{k} e sulla base inferiore è ovunque $-\vec{k}$. Il flusso infinitesimo su un elemento della superficie laterale è dato da:

$$\begin{aligned} d\Phi_{LS}(r_0, \vartheta, z) &= E(r_0) \cdot \vec{\lambda}(\vartheta_0) \cdot \vec{\lambda}(\vartheta_0) \cdot dS = E(r_0) \cdot \vec{\lambda}(\vartheta_0) \cdot \vec{\lambda}(\vartheta_0) \cdot r_0 \cdot d\vartheta \cdot dz = \\ &= E(r_0) \cdot r_0 \cdot d\vartheta \cdot dz \end{aligned} \quad (19)$$

dove $r_0 \cdot d\vartheta \cdot dz$ è l'elemento differenziale doppio della superficie.

Il flusso infinitesimo su ogni base è:

$$d\Phi_B = E(r_0) \cdot \vec{\lambda}(\vartheta_0) \cdot (\pm \vec{k}) \cdot dS = 0 \quad (20)$$

Il flusso totale $\Phi_T = \Phi_B + \Phi_{LS} = \Phi_{LS}$ è la somma di tutti i flussi infinitesimi $d\Phi_{LS}(r_0, \vartheta, z)$ sulla corona, quindi l'integrale in $d\vartheta$ soltanto (il raggio è costante lungo la corona e z non cambia su uno spessore infinitesimo dz):

$$\begin{aligned} \Phi_T &= \int_{LS} d\Phi_{LS}(r_0, \vartheta, z) = \int_{LS} E(r_0) \cdot r_0 \cdot d\vartheta \cdot dz = E(r_0) \cdot r_0 \cdot dz \cdot \int_0^{2\pi} d\vartheta = 2\pi \cdot E(r_0) \cdot r_0 \cdot dz \\ &\quad (21) \end{aligned}$$

Possiamo calcolare la carica Q' dentro la superficie di Gauss integrando dq dell'eq. (17) sul volume del cilindro carico dentro la superficie di Gauss:

$$Q' = dz \cdot \int_0^{2\pi} \left[\int_0^R \rho(r) \cdot r \cdot dr \right] d\vartheta = 2\pi \cdot dz \cdot \left[\int_0^R \rho(r) \cdot r \cdot dr \right] \quad (22)$$

Dove l'integrale doppio della (22) si risolve tenendo in considerazione che la parentesi quadra ha un termine costante rispetto a ϑ . Bisogna sottolineare che la parentesi quadra è un integrale definito e quindi un numero.

Ora possiamo applicare il Teorema di Gauss:

$$\begin{aligned} \Phi_T &= 2\pi \cdot E(r_0) \cdot r_0 \cdot dz = \frac{Q'}{\epsilon_0} = \frac{2\pi}{\epsilon_0} \cdot dz \cdot \left[\int_0^R \rho(r) \cdot r \cdot dr \right] \Rightarrow E(r_0) = \frac{\left[\int_0^R \rho(r) \cdot r \cdot dr \right]}{\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r_0} \\ &\quad (23) \end{aligned}$$

La formula (23) rappresenta il campo in un punto fuori dal cilindro. Ricordando che la parentesi quadra è un integrale definito e quindi un numero, il significato di questo numero si ottiene osservando che la carica interna Q' è la carica in una striscia di spessore assiale dz : se dividiamo Q' per lo spessore dz , otteniamo la carica per unità di altezza del cilindro, che è detta "*densità di carica lineare*" e si indica spesso come:

$$\lambda \equiv \frac{Q'}{dz} = 2\pi \cdot \left[\int_0^R \rho(r) \cdot r \cdot dr \right] = const, \quad (24)$$

Quindi il campo in (23) si scrive come: $E(r_0) = \frac{\lambda}{2\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r_0}$ (25)

Note:

- 1) la densità lineare (25) per una simmetria cilindrica, nel caso $r_0 > R$, è una costante rispetto alla distanza del punto dall'asse del cilindro.
- 2) Eq. (23) mostra che il modulo del campo elettrico prodotto da un cilindro infinito, uniformemente carico in z e ϑ , diminuisce con la potenza -1 della distanza dall'asse del cilindro (il campo prodotto da un singolo punto carico diminuisce con la potenza -2).

Esaminiamo ora il caso in cui il punto (r_0, ϑ_0, z_0) si trova **dentro il cilindro carico**, quindi $r_0 < R$. Tutte le proprietà della simmetria cilindrica riportate sopra continuano a valere e i risultati del teorema di Gauss sono gli stessi. L'unica differenza sta nella quantità di carica dentro la superficie di Gauss (corona) che diventa:

$$Q' = 2\pi \cdot dz \cdot \left[\int_0^{r_0} \rho(r) \cdot r \cdot dr \right] \quad (26)$$

L'applicazione del Teorema di Gauss da:

$$\Phi_T = 2\pi \cdot E(r_0) \cdot r_0 \cdot dz = \frac{Q'}{\epsilon_0} = \frac{2\pi}{\epsilon_0} \cdot dz \cdot \left[\int_0^{r_0} \rho(r) \cdot r \cdot dr \right] \Rightarrow E(r_0) = \frac{\left[\int_0^{r_0} \rho(r) \cdot r \cdot dr \right]}{\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r_0} \quad (27)$$

La formula (27) permette di determinare il campo in un punto dentro il cilindro: anche in questo caso il termine in parentesi quadre è integrale definito ma il risultato è una funzione del limite superiore, ad esempio r_0 . In questo caso la dipendenza del campo dalla distanza dall'asse dipende dal tipo di funzione che esprime $\rho(r)$.