VETTORI DELLA GEOMETRIA EUCLIDEA

Fissato un punto O del piano o dello spazio, chiamiamo vettore $\mathbf{v}$ (applicato in O) qualsiasi segmento orientato $\overrightarrow{OP}$, al variare del punto P nel piano o nello spazio. Il vettore $\mathbf{v}$ si può denotare anche con $\vec{v}$ oppure $\underline{v}$.

Fissata una unità di misura delle lunghezze, il vettore $\mathbf{v}$ è individuato assegnando:

- la direzione (quella della retta che passa per O e P)
- il verso (quello da O verso P)
- il modulo (ossia il numero reale non negativo che esprime la lunghezza del segmento OP rispetto all'unità di misura fissata).

Diremo che due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono uguali se sono uguali in direzione, verso e modulo.
Un vettore di modulo nullo si dice vettore nullo e si indica con il simbolo $\mathbf{0}$.
Il modulo del vettore $\mathbf{v}$ si indica con $|\mathbf{v}|$.
Un vettore $\mathbf{v}$ tale che $|\mathbf{v}| = 1$ si dice **versore**; ad ogni $\mathbf{v}$ diverso dal vettore $\mathbf{0}$ è associato un versore che si indica con $vers\mathbf{v}$, cioè un vettore di modulo 1 che la stessa direzione e lo stesso verso di $\mathbf{v}$.

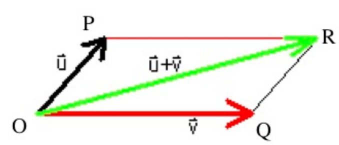
Somma di vettori. Dati due vettori $\mathbf{u} = \overrightarrow{OP}$ e $\mathbf{v} = \overrightarrow{OQ}$, il vettore somma $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ è il segmento orientato $\overrightarrow{OR}$ ossia la diagonale del parallelogramma che ha per lati OP e OQ (regola del parallelogramma); ne segue in particolare che $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ è contenuto nel piano individuato da $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ e che vale la cosiddetta disegualianza triangolare: $|\mathbf{u}+\mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$.

Proprietà

1) (commutativa) $\mathbf{u}+\mathbf{v}$=$\mathbf{v}+\mathbf{u}$;

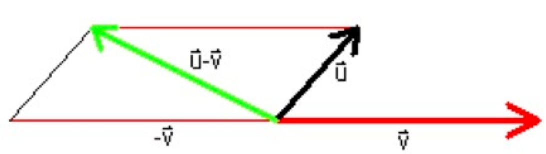
2) (associativa) $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}$=$\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$;

3) $\mathbf{v}+\mathbf{0}$=$\mathbf{v}$, per ogni vettore $\mathbf{v}$;

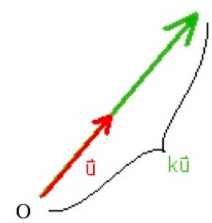


4) Per ogni $\mathbf{v}$ diverso dal vettore $\mathbf{0}$, esiste il vettore $-\mathbf{v}$ avente lo stesso modulo e verso opposto e si ha $\mathbf{v}+(-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$.

La somma $\mathbf{v}+(-\mathbf{w})$ si scrive di solito $\mathbf{v}-\mathbf{w}$ (differenza tra due vettori).



Prodotto di un numero per un vettore. Dato un vettore $\mathbf{u}$ e un numero reale k, il vettore $k\mathbf{u}$ è il vettore che ha la stessa direzione di $\mathbf{u}$, lo stesso verso di $\mathbf{u}$ se $k > 0$, verso opposto se $k < 0$ e modulo $|k||\mathbf{u}|$.



Casi particolari:

Dato $\mathbf{v}$ diverso dal vettore $\mathbf{0}$, si ha $vers\mathbf{v} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v}$.

Dato $\mathbf{v}$ qualsiasi, si ha $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Proprietà

1) $a(b\mathbf{v}) = (ab)\mathbf{v}$ per ogni a, b reali;

2) $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$;

3) $(a + b)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v}$;

4) $a(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = a\mathbf{v} + a\mathbf{w}$.

Definizione. Dati i numeri reali $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$, il vettore $a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \ldots a_n\mathbf{v}_n$ si dice **combinazione lineare** dei vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ a coefficienti $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Definizione. I vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ si dicono **linearmente dipendenti** se uno di essi si può esprimere come combinazione lineare dei rimanenti, ossia se esistono n coefficienti reali $a_1, a_2, \ldots, a_n$ non tutti nulli tali che $a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \ldots a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$.

Definizione. I vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ si dicono **linearmente indipendenti** se non sono linearmente dipendenti, ossia se l'unico modo per esprimere $\mathbf{0}$ come loro combinazione lineare è di assumere i coefficienti tutti nulli.

Casi particolari

1) $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ sono linearmente dipendenti se si può scrivere $a_1\mathbf{u} + a_2\mathbf{v} + a_3\mathbf{w} = \mathbf{0}$ con almeno un coefficiente non nullo, per esempio a_1; si ha allora $\mathbf{u} = \frac{a_2}{a_1}\mathbf{v} + \frac{a_3}{a_1}\mathbf{w}$, quindi in particolare risulta che $\mathbf{u}$ è complanare con $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$.

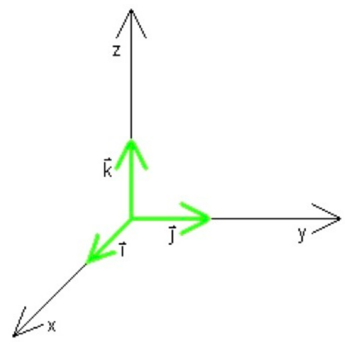
2) $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ sono linearmente dipendenti se si può scrivere $a_1\mathbf{u} + a_2\mathbf{v} = \mathbf{0}$ con almeno un coefficiente non nullo, per esempio a_1; si ha allora $\mathbf{u} = \frac{a_2}{a_1}\mathbf{v}$, quindi in particolare risulta che $\mathbf{u}$ ha la stessa direzione di $\mathbf{v}$.

3) $\mathbf{u}$ è linearmente dipendente se si può scrivere $a_1\mathbf{u} = \mathbf{0}$ con a_1 non nullo; si ha allora $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

4) quattro vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{t}$, nello spazio della geometria, sono sempre linearmente dipendenti.

Componenti di un vettore.Fissato un sistema di riferimento cartesiano $R(O, x, y, z)$ di origine O, ad ogni punto $P(x, y, z)$ è associato un vettore $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$ e viceversa ad ogni vettore $\mathbf{v}$ è associato un unico segmento orientato di origine O ed estremo $P(x, y, z)$, quindi è possibile identificare ogni vettore applicato in O con le coordinate cartesiane del suo estremo.

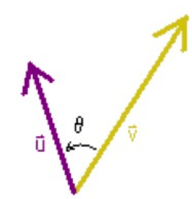
In particolare i vettori $\mathbf{i} = (1, 0, 0), \mathbf{j} = (0, 1, 0), \mathbf{k} = (0, 0, 1)$ sono versori con la stessa direzione e con lo stesso verso degli assi coordinati; $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ si dicono versori fondamentali. Le coordinate (x, y, z) di P si dicono componenti di $\mathbf{v}$ rispetto al sistema di riferimento $R(O, x, y, z)$; risulta quindi che si può scrivere in modo unico $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.



Si può scrivere $\mathbf{v} = (x, y, z) = (x, y, 0) + (0, 0, z)$ e quindi, per il teorema di Pitagora applicato due volte, risulta che $\mathbf{v}$ ha modulo $\sqrt{(\sqrt{x^2+y^2})^2 + z^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Teorema. Dati i vettori $\mathbf{v_1} = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{v_2} = (x_2, y_2, z_2)$ e un numero reale m, si ha $\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$, $m\mathbf{v_1} = m(x_1, y_1, z_1) = (mx_1, my_1, mz_1)$.

Prodotto scalare. Dati due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ si dice prodotto scalare di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ il numero reale $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| cos \widehat{\mathbf{uv}}$ dove $0 \leq \widehat{\mathbf{uv}} \leq \pi$ è l'angolo compreso tra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.



Proprietà

1) (commutativa) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$;

2) $(m\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (m\mathbf{v}) = m(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$;

3) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$.

Ricordiamo che due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ non nulli si dicono ortogonali se $\widehat{\mathbf{vw}} = \frac{\pi}{2}$, si dicono paralleli se $\widehat{\mathbf{vw}} = 0$ oppure $\widehat{\mathbf{vw}} = \pi$.

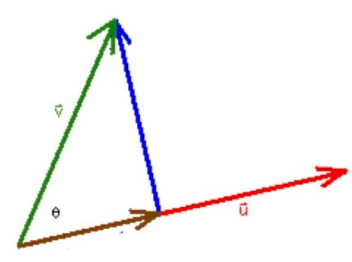
Osservazioni

1) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{v}|^2$;

3) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$ se e solo se uno dei due vettori è nullo oppure i due vettori sono ortogonali tra loro;

4) dati due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, il vettore **proiezione ortogonale** di $\mathbf{v}$ su $\mathbf{u}$ è il vettore $\mathbf{v_u} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^2}$. Si ha infatti: $\mathbf{v_u} = (|\mathbf{v}| cos \widehat{\mathbf{uv}}) vers \mathbf{u} = (|\mathbf{v}| cos \widehat{\mathbf{uv}}) \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}$;

5) $|\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}| \leq |\mathbf{v}||\mathbf{w}|$, in particolare $|\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}| = |\mathbf{v}||\mathbf{w}|$ se e solo se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono paralleli.



Corollario 1. Dati due vettori $\mathbf{v_1} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\mathbf{v_2} = (x_2, y_2, z_2)$, in componenti rispetto a un sistema di riferimento $R(O, x, y, z)$, si ha, per le proprietà del prodotto scalare:

$$\mathbf{v_1} \cdot \mathbf{v_2} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Corollario 2. Per ogni vettore $\mathbf{v}$ si ha

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{j})\mathbf{j} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{k})\mathbf{k}$$

sappiamo infatti che si può scrivere in modo unico $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; facendo per esempio il prodotto scalare di ambo i membri per il vettore $\mathbf{i}$ si ottiene $\mathbf{v} \cdot \mathbf{i} = x\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + y\mathbf{j} \cdot \mathbf{i} + z\mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = x$.

Prodotto vettoriale. Dati due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, si dice prodotto vettoriale di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ il vettore $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ così definito:

- $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ ha direzione perpendicolare al piano di $\mathbf{v}$ e di $\mathbf{w}$

- il verso di $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ è determinato dalla regola della mano destra, ossia $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ e $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ (nell'ordine) formano una terna destrorsa di vettori

- il modulo di $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ è $|\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}| = |\mathbf{v}||\mathbf{w}| sin\widehat{\mathbf{uv}}$

Osservazione. Dalla definizione segue il modulo $|\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}|$ è uguale all'area del parallelogramma avente come lati adiacenti $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$; inoltre se $\mathbf{n}$ è un versore ortogonale sia a $\mathbf{v}$ che a $\mathbf{w}$, $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = |\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}|\mathbf{n}$.

Proprietà

1) (anticommutativa) $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = -\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$;
2) $(m\mathbf{v}) \wedge \mathbf{w} = \mathbf{v} \wedge (m\mathbf{w}) = m(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w})$;
3) $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{w}$.

Casi particolari

$\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{0}$ se e solo se $\mathbf{v}$ o $\mathbf{w}$ sono il vettore nullo oppure $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ hanno la stessa direzione.

I versori fondamentali $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ formano una terna ortogonale destrorsa, quindi si ha per esempio: $\mathbf{i} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{j} \wedge \mathbf{k} = -\mathbf{k} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{i}$, $\mathbf{k} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{j}$, mentre $\mathbf{i} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{0}$.

In generale non vale una proprietà associativa del prodotto vettoriale, si ha per esempio: $(\mathbf{i} \wedge \mathbf{i}) \wedge \mathbf{j} = \mathbf{0} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{0}$, mentre $\mathbf{i} \wedge (\mathbf{i} \wedge \mathbf{j}) = \mathbf{i} \wedge \mathbf{k} = -\mathbf{j}$.

Dalle proprietà del prodotto vettoriale e dalle osservazioni precedenti segue che, dati due vettori $\mathbf{v} = (x_1, y_1, z_1), \mathbf{w} = (x_2, y_2, z_2)$, in componenti rispetto a un sistema di riferimento $R(O, x, y, z)$, si ha $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = (x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}) \wedge (x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}) = (y_1z_2 - z_1y_2)\mathbf{i} - (x_1z_2 - z_1x_2)\mathbf{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\mathbf{k}$; ossia (pensando alla nozione di determinante):

$$\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

tale espressione si può riscrivere simbolicamente nel seguente modo:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Prodotto misto. Dati tre vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, si dice prodotto misto di $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ il numero reale $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$; ovviamente si esegue prima il prodotto vettoriale e poi il prodotto scalare, altrimenti $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w}$ non ha senso. Supponiamo che $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ siano dati in componenti rispetto a un sistema di riferimento $R(O, x, y, z)$: $\mathbf{u} = (x_0, y_0, z_0), \mathbf{v} = (x_1, y_1, z_1), \mathbf{w} = (x_2, y_2, z_2)$. Allora, utilizzando come sopra la nozione di determinante, si ottiene:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Dalla definizione segue che $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = 0$ se e solo se $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ o $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{0}$ oppure $\mathbf{u}$ è ortogonale a $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$, nel qual caso risulta che $\mathbf{u}$ sta nel piano individuato da $\mathbf{v}$ e da $\mathbf{w}$; in conclusione $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = 0$ se e solo se $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono linearmente dipendenti. In particolare l'annullamento del prodotto misto non dipende dall'ordine dei vettori; il segno del prodotto misto, invece, cambia se si scambiano tra loro due vettori; per esempio si ha:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = -\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \wedge \mathbf{u}$$

come segue da considerazioni geometriche oppure dallo studio dei determinanti.

Osservazioni.

1) Dati tre vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ linearmente indipendenti, possiamo ricavare l'espressione del vettore $\mathbf{u}_\alpha$ **proiezione ortogonale** di $\mathbf{u}$ **sul piano** α individuato da $\mathbf{v}$ e da $\mathbf{w}$. Si ha: $\mathbf{u} = \mathbf{u}_\alpha + \mathbf{u}_p$, dove $\mathbf{u}_p$ è il vettore proiezione ortogonale di $\mathbf{u}$ sulla retta p ortogonale al piano α. Si ha dunque $\mathbf{u}_\alpha = \mathbf{u} - \mathbf{u}_p$, con $\mathbf{u}_p = \mathbf{u}_{\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) \frac{\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}}{|\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}|^2}$ (cfr. Osservazione 4 pag.3).

2) Il volume del parallelepipedo avente per spigoli i vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ è uguale a $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}|$. Infatti il volume del parallelepipedo si ottiene moltiplicando l'area della base per l'altezza; consideriamo per esempio come base del parallelepipedo il parallelogramma che ha per lati $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$; l'area di tale base vale $|\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}|$, mentre l'altezza relativa a tale base è data dal modulo della proiezione ortogonale di $\mathbf{u}$ sulla direzione di un versore $\mathbf{n}$ ortogonale sia a $\mathbf{v}$ che a $\mathbf{w}$; ponendo per esempio $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}}{|\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}|}$, si ottiene $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}||\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}| = |\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}|$.