Esercizi di Dinamica 13 Aprile 2018

Esercizio 1

Una lastra verticale con ampia superficie di area S contiene una carica elettrica Q distribuita uniformente sulla superficie. In corrispondenza dell'angolo O tra la lastra carica e un piano orizzontale si trova una massa puntiforme di massa m. La massa m è dotata di carica elettrica q e viene colpita con una velocità iniziale $\vec{v}_0$, la cui componente orizzontale è perpendicolare al piano carico. Trascurando la viscosità dell'aria trovare:

a) il campo elettrico $\vec{E}$ generato da Q nel semi-spazio della traittoria di m
b) le forze che agiscono su m lungo la sua traiettoria di moto
c) la distanza d=***OR*** dal piano carico al punto R dove m tocca il piano orizzontale
d) la variazione dell'energia potenziale U di m dalla posizione iniziale in O alla posizione R

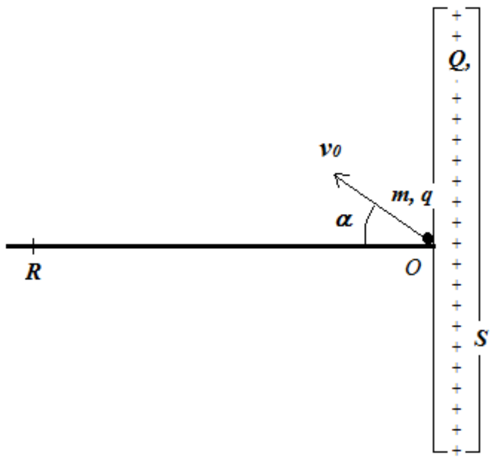
DATI

$v_0 = 5[m/s]; q = +2\cdot 10^{-5}[C]; S = 20[m^2];$

$m = 0.5\ [Kg]; \ Q = 2\cdot 10^{-5}[C]; \alpha = 30°;$

$g = 9.81\ [m/s^2];$

$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9\cdot 10^9[\frac{N\cdot m^2}{C^2}]$ *(sistema MKSA)*



Soluzione esercizio 1

Assumiamo un sistema di riferimento con asse x orizzontale e perpendicolare al piano carico, positivo da destra verso sinistra e l'asse y verticale positivo verso l'alto, con origine in O.

a) $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S} \approx 5.65\cdot 10^4[N/C].$

b) Gravita': $-mg\cdot\vec{j} \approx -4.905\vec{j}[N]$; *Forza Elettrostatica:* $q\vec{E} = \frac{q\cdot Q}{2\varepsilon_0 S}\vec{i} \approx 1.13\vec{i}[N]$

c) Per rispondere ai punti successivi risuta utile definire

$c \equiv \frac{-q\cdot Q}{2\varepsilon_0 S\cdot m} \approx -2.262[N/kg]$ *e applicare la II legge della Dinamica:*

$$m\ddot{x} = \frac{q\cdot Q}{2\varepsilon_0 S} \Rightarrow \ddot{x} = -c \Rightarrow \dot{x} = -ct + v_0\cos\alpha \Rightarrow x = -\frac{1}{2}ct^2 + v_0\cos\alpha\cdot t$$

$$m\ddot{y} = -mg \Rightarrow \ddot{y} = -g \Rightarrow \dot{y} = -gt + v_0 sen\alpha \Rightarrow y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 sen\alpha\cdot t$$

Dove sono state utilizzate le condizioni iniziali :

$$\dot{x}(t=0) = v_0\cos\alpha; x(t=0) = 0$$
$$\dot{y}(t=0) = v_0 sen\alpha; y(t=0) = 0$$

La massa tocca il piano orizzontale al tempo t_d, quando la coordinata y e' zero:

$$0 = y(t_d) = -\frac{1}{2}gt_d^2 + v_0 sen\alpha\cdot t_d \Rightarrow t_d = \frac{2v_0 sen\alpha}{g} \approx 0.51[s]$$
$$d = x(t_d) = -\frac{1}{2}ct_d^2 + v_0\cos\alpha\cdot t_d \approx 2.5[m]$$

d) Per calcolare la variazione di energia potenziale abbiamo 2 modi. La prima è calcolando la differenza di energia cinetica tra la posizione iniziale O e quella in R, poichè siamo nel caso di assenza di forze dissipative:

$$\dot{x}(t_d) = -ct_d + v_0\cos\alpha \approx 5.483[m/s]$$
$$\dot{y}(t_d) = -gt_d + v_0\sin\alpha \approx -2.5[m/s]$$

$$\Delta U = K(0) - K(t^*) = \frac{1}{2}m\cdot(v_0^2 - (\dot{x}(t_d)^2 + \dot{y}(t_d)^2)) = -2.83[J]$$

Il secondo modo è calcolando l'energia di entrambe le forze conservative in gioco (gravità U_g ed elettrostatica U_E), che sono entrambe definite a meno di una costante:

$U_g = mg\cdot y + C_g; U_E = mc\cdot x + C_E;$ *si può quindi calcolare la differenza tra la loro somma in R e in O:*

$U = [U_g(y=0, x=d) + U_e(x=d)] - [U_g(y=0) + U_e(x=0)] = mg\cdot h + mc\cdot d \approx -2.83$ *[J]*

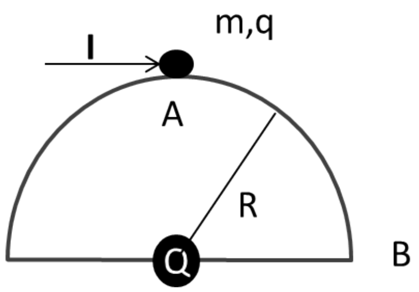
Esercizio 2

Sulla sommita' di una semisfera di raggio *R* rappresentata in figura è posizionata una carica puntiforme *q* di massa *m* a riposo. Una seconda carica puntiforme *Q* è fissata nel centro della semisfera. La superficie sferica è liscia e la viscosità dell'aria è trascurabile. A un determinato istante $t = 0$ un impulso orizzontale $\vec{I}$ è impresso alla massa *m*. Trovare:

a) la velocità v_A della massa dopo che è stato applicato l'impulso dopo aver elencato le forze agenti e le loro caratteristiche;
b) il valore minimo della carica *q* tale che la massa possa giungere in *B*.

DATI: R = 1 [m], m = 0.1 [Kg]; Q=-2q ; I=0.2 [Ns];

ε_0=8.854·10^{-12}[F/m]



Soluzione esercizio 2

a) *La velocità nel punto A si ottiene utilizzando il teorema dell'impulso:*
$$I = m \cdot v_A - 0 \Rightarrow v_A = \frac{I}{m} = 2\ m/s$$
b) *Per giungere nel punto B la massa deve seguire una traiettoria circolare sulla superficie sferica: in ogni punto di questa traiettoria deve essere soddisfatta la seconda legge di Newton.*
Utilizzando le coordinate intrinseche (poichè è nota la traiettoria) e ricordando che:
1. *tutte le forze agenti sono conservative (gravità e forza elettrostatica) o non compiono (forza normale)*
2. *l'energia potenziale elettrostatica è costante sulla superficie sferica (il raggio della sfera su cui avviene il moto non varia)*

si ha che ad un determinato angolo θ (assumendo $\theta = 0$ la posizione verticale della massa in A) e possiamo scrivere:

$$-\frac{2q^2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{R} + \frac{1}{2} m \cdot v_A^2 + mgR = -\frac{2q^2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{R} + \frac{1}{2} m \cdot v^2(\theta) + mgR \cdot \cos\theta$$
$$m\frac{v^2(\theta)}{R} = -N + \frac{2q^2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{R^2} + mg \cdot \cos\theta$$

In B, a $\theta = 90°$, il sistema di equazioni riportato sopra si può scrivere come:

$$v_B^2 = v_A^2 + 2gR \Rightarrow v_B = \sqrt{v_A^2 + 2gR} = 4.9\ m/s$$

$$N = -m\frac{v_B^2}{R} + \frac{2q^2}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{R^2} \geq 0$$

poichè la normale N non è negativa.

Il valore minimo della carica $q_{\min}$ *che dobbiamo trovare*

si ottiene dall'uguaglianza $N = 0$ *:*

$$N = 0 \Rightarrow m\frac{v_B^2}{R} = \frac{2q_{\min}^2}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{R^2} \Rightarrow q_{\min} = \sqrt{2\pi\varepsilon_0 mR}\cdot v_B = 1.15*10^{-5}\,C$$