Prof.ssa Stefania Bufalino
DISAT- Politecnico di Torino
e-mail: stefania.bufalino@polito.it

Esercizi di Cinematica

Esercizio n.1

Due automobili che chiameremo A e B stanno viaggiando nella stessa direzione (come indicato in figura 1) e la macchina A si trova dietro la macchina B ad una distanza d=0.186 *km*. Il modulo della velocità di A è 24.4 *m/s* mentre il modulo della velocità dell'auto *B* è 18.6 *m/s*.

a) Quanto tempo impiega l'auto A a raggiungere l'auto B?
b) Determinare il tempo impiegato da A a raggiungere B nel caso in cui le due auto viaggiano una verso l'altra.

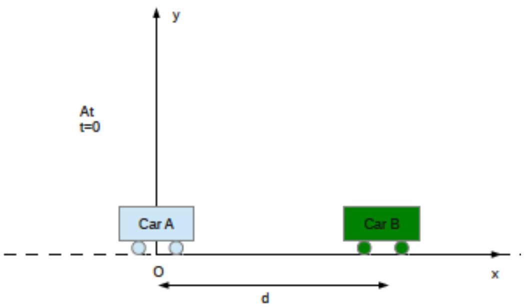


Fig.1

Soluzione es. 1

Come prima cosa per risolvere il problema dobbiamo scegliere un sistema di riferimento. Supponiamo di mettere l'asse x lungo la direzione del moto delle due vetture, positivo da sinistra a destra, con l'origine in corrispondenza della posizione dell' auto A al tempo *t = 0*. La coordinata y è lungo la direzione verticale, positiva dal basso verso l'alto come mostrato in figura 1. Le condizioni iniziali del sistema sono date da:
$x_A(t = 0) = 0$
$x_B(t = 0) = d$
con d pari alla distanza tra le due auto all'istante t=0: d=0.186 km e quindi d= 186 m.

- CASO 1: le due auto stanno viaggiando nella stessa direzione

$$\vec{v}_A(t) = \dot{x}_A(t)\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k} = \vec{v}_A(t)\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k} = v_A\hat{i} = 24.4 m/s\hat{i}$$

$$\vec{v}_B(t) = \dot{x}_B(t)\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k} = \vec{v}_B(t)\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k} = v_B\hat{i} = 18.6 m/s\hat{i}$$

Integrando i valori delle velocità delle auto A e B si puo' trovare la legge del moto delle due auto:

$$v_A = \dot{x}_A = \frac{dx_A}{dt} \Rightarrow dx_A = v_A \cdot dt \Rightarrow \int dx_A = \int v_A \cdot dt \Rightarrow x_A = v_A t + C_A$$

$$v_B = \dot{x}_B = \frac{dx_B}{dt} \Rightarrow dx_B = v_B \cdot dt \Rightarrow \int dx_B = \int v_B \cdot dt \Rightarrow x_B = v_B t + C_B$$

Per determinare le costanti di integrazioni applichiamo le condizioni iniziali:

$$x_A(t=0) = v_A \cdot 0 + C_A = C_A = 0$$
$$x_B(t=0) = v_B \cdot 0 + C_B = C_B = d$$

Quindi abbiamo: $\begin{array}{l} x_A = v_A t \\ x_B = v_B t + d \end{array}$

Per determinare quando l'auto A raggiunge l'auto B dobbiamo imporre che $x_A(t)=x_B(t)$

$$x_A = v_A t = x_B = v_B t + d$$
$$\Rightarrow v_A t - v_B t = d \Rightarrow t = \frac{d}{v_A - v_B} = 32.1s$$

- CASO 2: le due auto stanno viaggiando una verso l'altra.

Sappiamo che:

$$\vec{v}_A(t) = \dot{x}_A(t)\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k} = \vec{v}_A(t)\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k} = v_A\hat{i} = 24.4m/s\hat{i}$$
$$\vec{v}_B(t) = \dot{x}_B(t)\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k} = \vec{v}_B(t)\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k} = v_B\hat{i} = -18.6m/s\hat{i}$$

L'unica differenza rispetto al caso procedente sta nel segno della velocità dell'auto B che stavolta sarà negativo. Quindi possiamo scrivere:

$$v_A = \dot{x}_A = \frac{dx_A}{dt} \Rightarrow dx_A = v_A \cdot dt \Rightarrow \int dx_A = \int v_A \cdot dt \Rightarrow x_A = v_A t + C_A$$
$$-v_B = \dot{x}_B = \frac{dx_B}{dt} \Rightarrow dx_B = -v_B \cdot dt \Rightarrow \int dx_B = \int -v_B \cdot dt \Rightarrow x_B = -v_B t + C_B$$

e calcolando le costanti di integrazione si ha:

$$x_A(t=0) = v_A \cdot 0 + C_A = C_A = 0$$
$$x_B(t=0) = -v_B \cdot 0 + C_B = C_B = d$$

Infine quindi otteniamo:

$\begin{array}{l} x_A = v_A t \\ x_B = -v_B t + d \end{array}$ e imponendo $x_A(t)=x_B(t)$

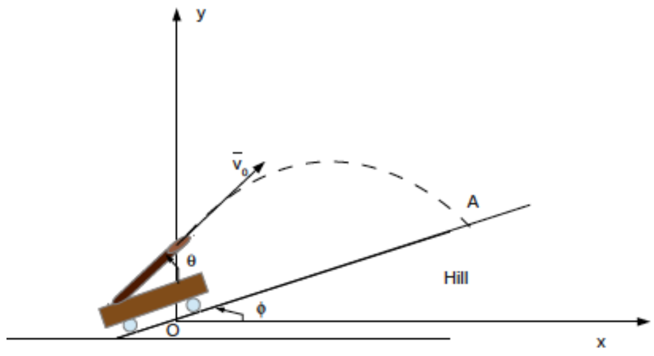
si ottiene: $\begin{array}{l} x_A = v_A t = x_B = -v_B t + d \\ \Rightarrow v_A t + v_B t = d \Rightarrow t = \dfrac{d}{v_A + v_B} = 4.3s \end{array}$

Esercizio n.2

Una pistola è fissata al fondo di una collina la cui pendenza rispetto al piano orizzontale è $\phi = 20^0$ (vedi figura 2). L'inclinazione della pistola rispetto al piano della collina è $\theta = 25^0$. Un proiettile viene sparato dalla pistola con una velocità $\vec{v}_0$($|\vec{v}_0|$ = 100 *m/s*) all'uscita della pistola.

Trovare la distanza *d* tra la pistola e il punto sulla collina (A) in cui il proiettile tocca terra, assumendo le dimensioni della pistola trascurabili rispetto a *d* e la totale assenza di effetti dovuti all' aria.

Fig.2



Soluzione es.2

La prima cosa da fare è scegliere il sistema di riferimento. La scelta migliore è quella con asse delle coordinate x parallelo al piano orizzontale e con verso positivo da sinistra verso destra come mostrato in fig. 2. L'origine degli assi è scelta sul piano della collina in corrispondenza della pistola. L'asse delle coordinate y è lungo la direzione verticale, positivo dal basso verso l'altro come in fig. 2.
Chiamiamo per comodità la somma delle inclinazioni della collina e della pistola $\alpha = \theta + \phi$.
Le condizioni iniziali per quanto riguarda le velocità sono:

$$\begin{cases} \dot{x}(t=0) = v_0 \cos\alpha \\ \dot{y}(t=0) = v_0 \sin\alpha \\ \dot{z}(t=0) = 0 \end{cases}$$

e per quel che riguarda le posizioni:

$$\begin{cases} x(t=0) = 0 \\ y(t=0) = 0 \\ z(t=0) = 0 \end{cases}$$

Sappiamo inoltre che nell'istante iniziale l'accelerazione del proiettile, trascurando l'attrito dovuto all'aria, è $\vec{a} = -g\hat{j}$ lungo la direzione y. Quindi possiamo scrivere:

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = 0 \\ \ddot{y}(t) = -g \\ \ddot{z}(t) = 0 \end{cases} \quad \text{Integrando otteniamo} \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = C_1 \\ \dot{y}(t) = -gt + C_2 \\ \dot{z}(t) = C_3 \end{cases}$$

Le costanti di integrazioni si possono calcolare imponendo le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} \dot{x}(t=0) = C_1 = v_0 \cos\alpha \\ \dot{y}(t=0) = -g*0 + C_2 = C_2 = v_0 \sin\alpha \\ \dot{z}(t=0) = C_3 = 0 \end{cases}$$

Infine integrando le equazioni della velocità possiamo ricavare le equazioni del moto nelle 3 componenti:

$$\begin{cases} x(t) = C_1 t + C_4 = v_0 \cos\alpha * t + C_4 \\ y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + C_2 t + C_5 = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin\alpha * t + C_5 \\ z(t) = C_6 \end{cases}$$

utilizzando le condizioni iniziali si trova

$$\begin{cases} x(t=0) = C_4 = 0 \\ y(t=0) = C_5 = 0 \\ z(t=0) = C_6 = 0 \end{cases}$$ quindi le equazioni del moto del proiettile sono:

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos\alpha * t \\ y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin\alpha * t \\ z(t) = 0 \end{cases}$$ Dalla prima equazione si trova $t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$

che sostituito in y(t) ci da l'equazione della traiettoria del proiettile:

$$y(x) = -\frac{1}{2} g * \frac{x^2}{v_0^2 (\cos\alpha)^2} + tg\alpha * x$$

Inoltre possiamo scrivere l'equazione della retta che rappresenta il piano della collina come $Y(x) = tg\phi * x$.

Quando il proiettile tocca terra avremo Y(x)=y(x) che corrisponde ad imporre:

$$y(x) = Y(x) = -\frac{1}{2} g * \frac{x^2}{v_0^2 (\cos\alpha)^2} + tg\alpha * x = tg\phi * x$$

$$\Rightarrow (-\frac{1}{2} g * \frac{x^2}{v_0^2 (\cos\alpha)^2} + tg\alpha - tg\phi) = 0$$

Le soluzioni di questa ultima equazione sono x=0 e y=0 che corrispondono all'origine degli assi e considerando g=9.8 m/s^2

$$x = \frac{2 v_0^2 (\cos\alpha)^2 * (tg\alpha - tg\phi)}{g} = 649m$$

$$y = tg\phi * x = tg\phi * \frac{2 v_0^2 (\cos\alpha)^2 * (tg\alpha - tg\phi)}{g} = 236m$$

La distanza d che cerchiamo può essere calcolata utilizzando il terorema di Pitagora:

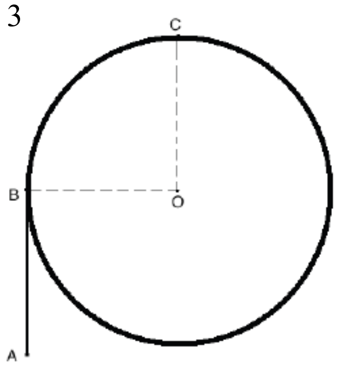
$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + x^2 * tg^2\phi} = 690.5m$$

Esercizio 3

Una macchina da corsa è ferma nel punto A di una pista che ha la forma riportata in figura 3. AB è un segmento e BC è un arco di circonferenza di raggio R = 150 m. Al tempo t =0 il conducente preme completamente il pedale dell'acceleratore per poi rilasciarlo lentamente ad un rate pari a $a(t) = a_0 e^{-t/\tau}$.
Sapendo che la macchina arriva in B dopo un tempo t_0 = 50 s, trovare:

a) la distanza AB
b) il modulo dell'accelerazione appena prima del punto B
c) il modulo dell'accelerazione appena oltre il punto B

Fig. 3



Dati: a_0= 4m/s^2; τ = 20 s.

Soluzione es.3

La prima osservazione che possiamo fare è che, essendo la traiettoria nota, possiamo affrontare la soluzione del problema utilizzando le coordinate intrinseche. Scegliamo l'orgine nel punto A e come direzione positiva del moto quella che va dal punto A al punto B. In questo modo sappiamo che il percorso AB è uguale a calcolare $S(t_0)$ essendo t_0 il tempo impiegato dal conducente per giungere dal punto iniziale A al punto B.
Inoltre, sappiamo dai dati iniziali, che l'azione di accelerazione sul pedale cambia la velocità secondo la legge $\ddot{S} = a(t) = a_0 e^{-t/\tau}$.

Ne segue che come prima cosa possiamo trovare velocità e coordinata S integrando la relazione dell'accelerazione riportata sopra.

$$\begin{aligned} \dot{S}(t) &= \int a(t)dt = \int a_0 e^{-t/\tau}dt = -a_0\tau e^{-t/\tau} + C_1 \\ S(t) &= \int \dot{S}(t)dt = a_0\tau^2 e^{-t/\tau} + C_1 t + C_2 \end{aligned} \qquad (*)$$

Per calcolare le costanti C_1 e C_2 applichiamo le condizioni iniziali inserendole nel set di equazioni (*):

$$1)\dot{S}(t=0)=0$$
$$\Rightarrow -a_0\tau e^{-0/\tau}+C_1=0$$
$$\Rightarrow C_1=a_0\tau$$
$$2)S(t=0)=0$$
$$\Rightarrow a_0\tau^2 e^{-0/\tau}+C_1*0+C_2$$
$$\Rightarrow C_2=-a_0\tau^2$$

Le condizioni 1) e 2) sono imposte rispettivamente perchè sappiamo che all'istante iniziale la macchina è ferma in A quindi ha velocità nulla e inoltre abbiamo scelto A come posizione iniziale dell'auto corrispondente all'origine del sistema di coordinate intrinseche [S(t=0)=0].

Quindi possiamo riscrivere le equazioni (*) come:

$$\dot{S}(t)=\int a(t)dt=\int a_0 e^{-t/\tau}dt=-a_0\tau e^{-t/\tau}+a_0\tau$$
$$S(t)=\int \dot{S}(t)dt=a_0\tau^2 e^{-t/\tau}+a_0\tau\cdot t-a_0\tau^2$$

a) Per calcolare il percorso AB basta calcolare quanto vale la coordinata S nel punto B essendo A l'origine delle coordinate. Per fare questo calcoliamo $S(B)=S(t_0=50s)$:

$S(t_0)=\int \dot{S}(t)dt=a_0\tau^2 e^{-50/\tau}+a_0\tau\cdot 50-a_0\tau^2=2.531km$ con $a_0= 4m/s^2$ e $\tau = 20$ s.

Per calcolare il modulo dell'accelazione ricordiamo la sua espressione in coordinate intrinseche:

$$|\vec{a}|=\left|\ddot{s}\vec{\tau}+\frac{\dot{s}^2}{\rho}\vec{n}\right|=\sqrt{(\ddot{s})^2+\left(\frac{\dot{s}^2}{\rho}\right)^2}$$

b) Poco prima del punto B il tratto è rettilineo quindi il raggio di curvatura ρ è per definizione geometrica tendente ad infinito. Quindi abbiamo che il modulo dell'accelerazione è:

$$|\vec{a}|=\sqrt{[\ddot{s}(t_0=50s)]^2}=a_0 e^{-t_0/\tau}=0.328m/s^2$$

c) Poco dopo il tratto B il raggio di curvatura ρ è invece uguale al raggio della circonferenza della pista $\rho=R=150$ m quindi abbiamo che il modulo dell'accelerazione si calcola come:

$$|\vec{a}|=\sqrt{[\ddot{s}(t_0=50s)]^2+\left(\frac{\dot{s}^2(t_0=50s)}{R}\right)^2}=35.53m/s^2$$