09 - Proprietà dei limiti

Teorema: LIMITE DI RESTRIZIONI

$f: X \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, x_0 di accumulazione per X

e $Y \subset X$ tale che x_0 sia di accumulazione anche per Y. Allora

se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}} \Longrightarrow \exists \lim_{x \to x_0} f_{|_Y}(x) = \ell$

$$f_{|_Y}(x) \overset{def}{=} f(x) \qquad x \in Y$$

$f_{/_Y}$ ha dominio Y

CONSEGUENZA IMPORTANTE:

Se $\lim_{x \to x_0} f_{|_{Y_1}}(x) \neq \lim_{x \to x_0} f_{|_{Y_2}}(x)$

allora $\nexists \lim_{x \to x_0} f(x)$

"se lungo due restrizioni f ha due limiti diversi per $x \to x_0$, allora NON ESISTE il limite di $f(x)$ per $x \to x_0$"

infatti se esistesse $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

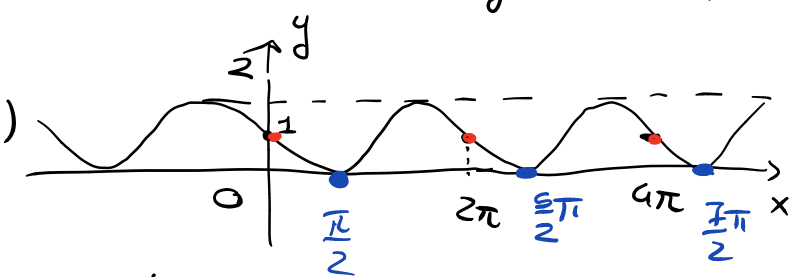
allora per il teorema sul limite delle

restrizioni si avrebbe $\lim_{x \to x_0} f|_{Y_1}(x) = \lim_{x \to x_0} f|_{Y_2}(x) = \ell$

---

es: $\lim_{x \to +\infty} (1 - \sin(x))$

$f(x) = 1 - \sin(x)$



il limite non esiste

infatti:

$Y_1 \overset{\text{def}}{=} \{ x_n = 2n\pi \ : n \in \mathbb{N} \}$ — $+\infty$ è di acc. per Y_1

$= \{0, 2\pi, 4\pi, \ldots\}$

$\lim_{x \to +\infty} f|_{Y_1}(x) = \lim_{n \to +\infty} (1 - \underbrace{\sin(2n\pi)}_{=0})$

$= \lim_{n \to +\infty} 1 = \boxed{1}$

$Y_2 \overset{\text{def}}{=} \{ x_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \ : n \in \mathbb{N} \}$ — $+\infty$ è di acc. per Y_2

$= \{ \frac{\pi}{2}, \frac{5}{2}\pi, \ldots \}$

$$\lim_{x \to +\infty} f|_{Y_2}(x) = \lim_{n \to +\infty} \Big(1 - \underbrace{\sin\Big(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\Big)}_{=1}\Big)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} 0 = 0$$

$1 \neq 0 \Rightarrow$ il limite $\lim_{x \to +\infty} 1 - \sin(x)$ non esiste

---

Teorema della permanenza del segno

Sia $\ell > 0$ tale che $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell > 0$

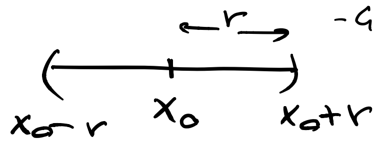
allora esiste un intorno U di x_0 tale che

$x \in U \cap \mathrm{dom}(f),\ x \neq x_0 \Rightarrow f(x) > 0$

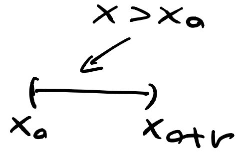
"se f ha limite positivo, allora esiste un $\underbrace{\text{intorno bucato di } x_0}_{U \setminus \{x_0\}}$ tale che $f(x)$ ha segno positivo per tutte le x nell'intorno bucato"

- analogo se $\ell < 0$
- vale anche per limite destro o sinistro sostituendo l'intorno con un intorno destro o sinistro.

$U = I_r(x_0) = (x_0 - r,\ x_0 + r)$

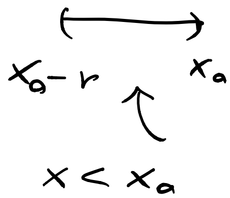


$U^+ = I_r^+(x_0)$



U^+ intorno destro di x_0

$U^- = I_r^-(x_0)$



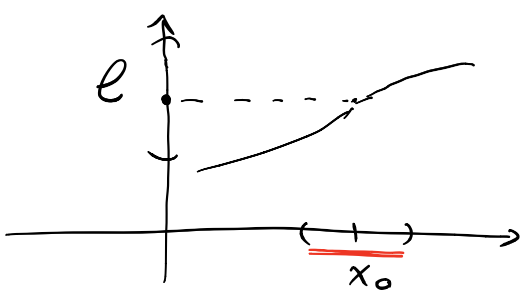
$U^- = (x_0 - r,\ x_0)$ intorno sinistro di x_0

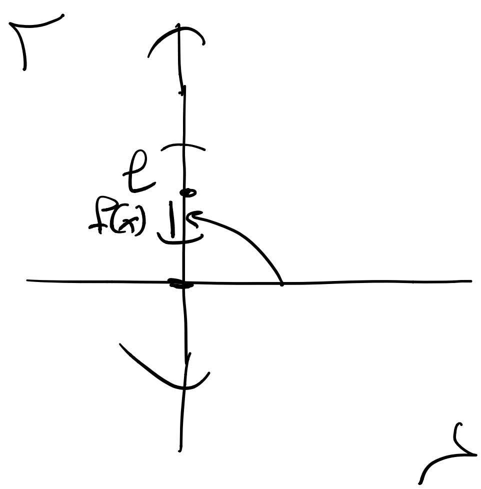
Dim del teorema della permanenza del segno:

IPOTESI: $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell > 0$

TESI: $\exists$ intorno U di x_0: $f(x) > 0$ $\forall x \in U \setminus \{x_0\}$, $x \in \operatorname{dom} f$

casa $\ell \in \mathbb{R}$; $\ell > 0$:

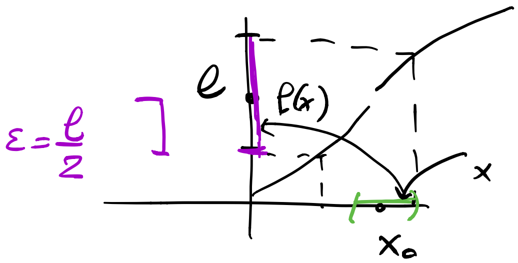




$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

per definizione, $\forall$ intorno V di ℓ $\exists$ intorno W di x_0 : $x \in W \cap \operatorname{dom} f$, $x \neq x_0 \Rightarrow f(x) \in V$

scelgo $\varepsilon = \frac{\ell}{2}$ $\Rightarrow \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$:



$0 < |x - x_0| < \delta$

$\Rightarrow \underline{|f(x) - \ell| < \varepsilon}$

se $0 < |x - x_0| < \delta$ allora $-\varepsilon < f(x) - \ell < \varepsilon$

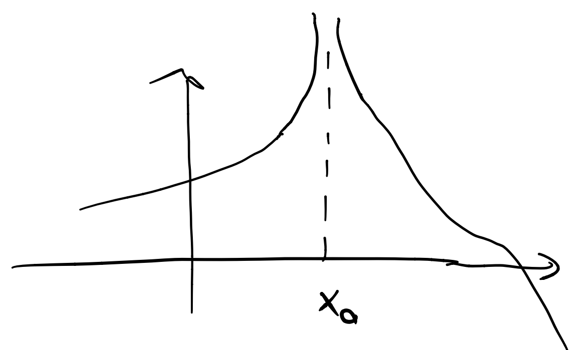
$x \neq x_0$

$\Rightarrow \quad f(x) > \ell - \varepsilon = \ell - \frac{\ell}{2} = \frac{\ell}{2} > 0$

cioè $f(x) > 0$.

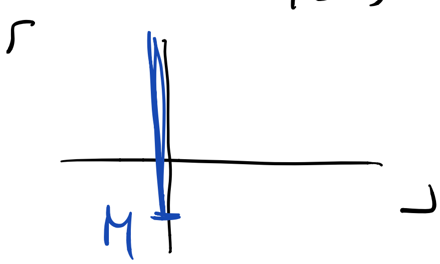
<u>caso $\ell = +\infty$:</u>

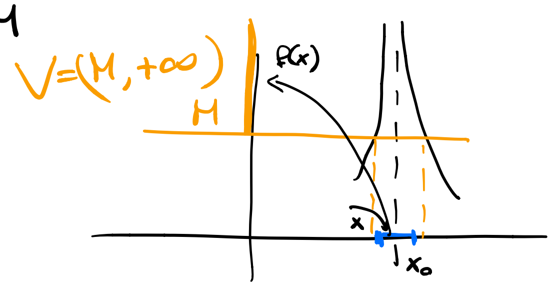
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$



$\forall M \in \mathbb{R}$ $\exists\, \delta > 0$: se $0 < |x - x_0| < \delta$

allora $f(x) > M$





scelgo $M > 0$ allora $\exists\, \delta > 0$:

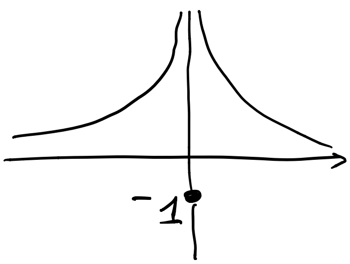
se $0 < |x - x_0| < \delta$ allora $f(x) > M > 0$

cioè $f(x) > 0$

$\square$

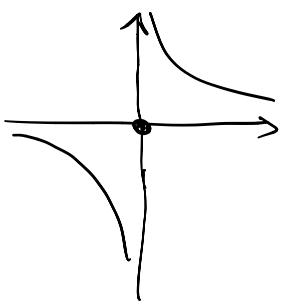
es: il teorema non dà informazioni sul segno di f in x_0

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ -1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$



$$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$$

$\Rightarrow \exists$ intorno bucato di $x_0 = 0$ in cui $f(x) > 0$.



$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \quad \text{non esiste}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$\Rightarrow \exists$ intorno destro di $x_0 = 0$ in cui $\frac{1}{x}$ ha segno $+$

<u>NOTA</u>: se f è continua in x_0 e $f(x_0) \neq 0$ allora per il teorema della permanenza del segno esiste un intorno di x_0 in cui $f(x)$ ha lo stesso segno di $f(x_0)$

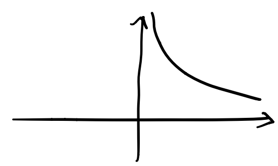
<u>NOTA</u>: il teorema della permanenza del segno "non si può invertire":

$f(x) > 0$ in un intorno di x_0, x_0 di acc. per dom f

$$\not\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) > 0$$

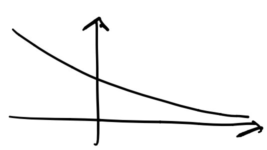
per esempio:

•) $f(x) = \frac{1}{x}$ per $x > 0$

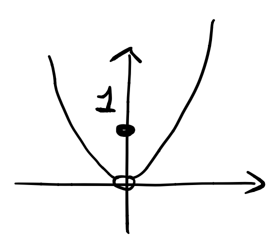


$\underline{\underline{f(x) > 0}}$ ma $\frac{1}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

•) $f(x) = e^{-x} > 0 \ \forall x$ ma $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$



•) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$



$f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

NOTA: se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ e

e se $f(x) \geq 0$ $\forall x$ in un intorno bucato di x_0
$I_r(x_0) \setminus \{x_0\}$

allora $\ell \geq 0$

(risultato analogo per $f(x) \leq 0$)

Dim: PER ASSURDO

se $\ell < 0$ allora per il teorema della permanenza del segno $\exists \bar{r}$: se

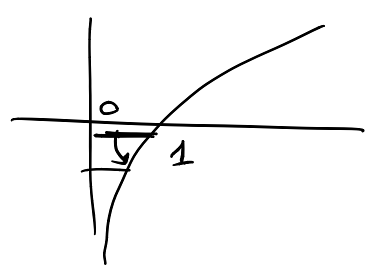
$x \in I_{\bar{r}}(x_0) \cap I_r(x_0) \setminus \{x_0\}$ allora

$f(x) < 0$ ← $I_{\bar{r}}(x_0)$

e $f(x) \geq 0$ ← $I_r(x_0)$

↳ ASSURDO

⌈



$x \in (0,1)$

⌋

Teorema della limitatezza locale

"se f ha limite finito per $x \to x_0$ allora f è limitata in un intorno bucato di x_0"

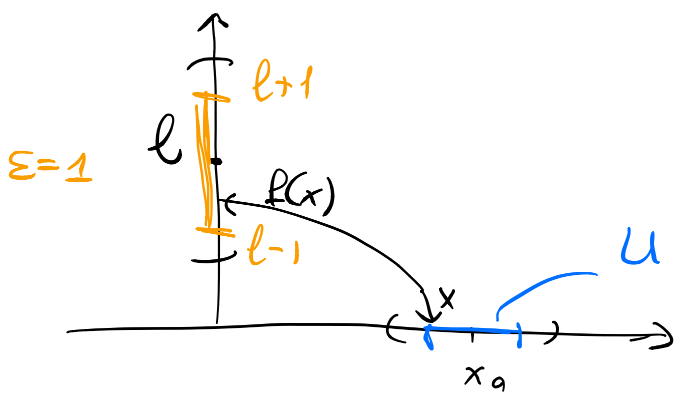
Se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$

allora $\exists M > 0$, $\exists$ intorno U di x_0

tale che $x \in U \cap \operatorname{dom} f$, $x \neq x_0$

$\Rightarrow \quad |f(x)| < M$

Dim :



$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

fissiamo $\varepsilon = 1$

allora $\exists$ intorno U di x_0 tale che

se $\underline{x \in U \cap \operatorname{dom} f,\ x \neq x_0}$ (*)

allora $|f(x) - \ell| < 1$

$$|f(x)| = |(f(x)-\ell)+\ell| \leq |f(x)-\ell| + |\ell|$$

$$\overset{*}{<} 1+|\ell|$$

se $x \in U \cap \operatorname{dom} f$, $x \neq x_0$

abbiamo ottenuto che
se $x \in U \cap \operatorname{dom} f$, $x \neq x_0$

$$|f(x)| < \underbrace{1+|\ell|}_{\overset{def}{=} M}$$

$\square$

Teorema sull'algebra dei limiti

Siano $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$, x_0 di acc. per X.

Supponiamo $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell_1$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell_2$

con $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$.

Allora

- $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x)+g(x)) = \ell_1 + \ell_2$

  "il limite della somma di due funzioni è la somma dei limiti"

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x) = \ell_1 \ell_2$

"il limite del prodotto di due funzioni è il prodotto dei limiti"

- se $\ell_2 \neq 0$ allora $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell_1}{\ell_2}$

"se $g(x)$ ha limite non nullo allora il limite del quoziente $\frac{f(x)}{g(x)}$ è il quoziente dei limiti"

$\frac{f(x)}{g(x)}$

$x \neq x_0$ NON SERVE $g(x_0) \neq 0$

serve $g(x) \neq 0$

$g(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell_2 \neq 0 \Rightarrow$ $g(x)$ ha lo stesso segno di ℓ_2 in un intorno bucato di x_0 e quindi in particolare $g(x) \neq 0$ nell'intorno bucato

Dim nel testo

CONSEGUENZA 1: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to x_0} \left(\alpha f(x) + \beta g(x)\right) = \alpha \ell_1 + \beta \ell_2$$

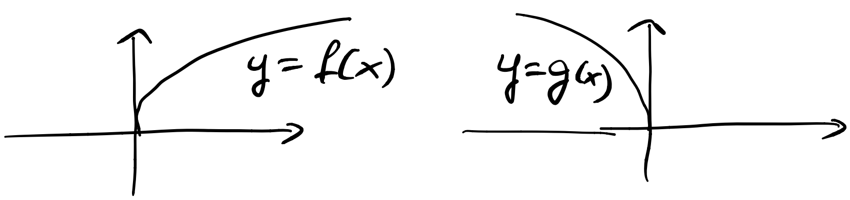
"limite della combinazione lineare di due funzioni è la combinazione lineare dei limiti"

CONSEGUENZA 2 : se f, g sono continue in x_0 allora

- la combinazione lineare di f e g è continua in x_0
- prodotto di f e g è continua in x_0
- se $g(x_0) \neq 0$ allora il quoziente $\frac{f}{g}$ è una funzione continua in x_0

es: $f(x) = \sqrt{x}$ continua in $[0, +\infty)$

$g(x) = \sqrt{-x}$ continua in $(-\infty, 0]$



$\Rightarrow$ $f+g$ è una funzione continua

$(f+g)(x) = \sqrt{x} + \sqrt{-x}$ è definita solo in $x=0$

$\Rightarrow$ $\text{dom}(f+g) = \{0\}$

$f+g$ è continua in 0

CONSEGUENZA 3

- le funzioni polinomiali sono continue

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \dots + a_1 x + a_0$

- le funzioni razionali $= \dfrac{\text{polinomio}}{\text{polinomio}}$

$$= \frac{a_n x^n + \dots + a_0}{b_k x^k + \dots + b_0}$$ sono continue

nel loro dominio

Estensione dell'algebra dei limiti:

poniamo $+\infty + l = +\infty$ se $l \neq -\infty$

$-\infty + l = -\infty$ se $l \neq +\infty$

con segno dato dalla regola dei segni $\quad l \cdot \infty = \infty$ se $l \neq 0$

$\vdots$

si può definire l'algebra dei limiti

$f(x) \longrightarrow l_1, \quad g(x) \longrightarrow l_2$ con $l_1, l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$

NON SONO DEFINITE LE FORME INDETERMINATE

$+\infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \dfrac{0}{0}, \quad \dfrac{\infty}{\infty}$

questi casi non si risolvono con l'algebra sui limiti

ESERCIZIO: $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell > 0$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ e $g(x) \neq 0$ per $x \neq x_0$. Allora verificare che $\lim_{x \to x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = +\infty$

infatti: sia $M > 0$,

$\varepsilon \overset{def}{=} \frac{\ell}{2} > 0 \Rightarrow \exists\, U_1 : x \in U_1 \cap \overbrace{(\mathrm{dom} f \cap \mathrm{dom} g)}^{X} \Rightarrow f(x) > \ell - \varepsilon = \frac{\ell}{2} > 0$

$\exists\, U_2 : x \in U_2 \cap X \Rightarrow |g(x)| < \frac{\ell}{2M} \Rightarrow \frac{1}{|g(x)|} > \frac{2M}{\ell}$

$\Rightarrow \frac{f(x)}{|g(x)|} > \frac{\ell}{2} \frac{2M}{\ell} = M \quad \forall x \in U_1 \cap U_2 \cap X \setminus \{x_0\}$

---

limiti all'infinito di polinomi:

es: $\lim_{x \to +\infty} (x - x^2)$ NON SI RISOLVE CON L'ALGEBRA DEI LIMITI

perché dà la forma indeterminata $+\infty - \infty$

$$x - x^2 = \underset{\downarrow\, +\infty}{x^2} \underbrace{\left(\frac{1}{x} - 1 \right)}_{\to -1} \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x - x^2) = \lim_{x \to +\infty} (-x^2) = -\infty$$

limiti all'infinito di funzioni razionali:

es: $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x^5}{3x^5 - x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-\cancel{x^5}}{3\cancel{x^5}} = -\frac{1}{3}$

---

es: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$

con l'algebra dei limiti non si risolve,

si risolve moltiplicando e dividendo per
$1+\sqrt{1-x^2}$ ("razionalizzo")

$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

$$\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2} \cdot \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-(1-x^2)}{x^2\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}$$

$$= \frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}} \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{1}{2}$$

Teorema del confronto (caso finito)

Supponiamo

$$\underbrace{f(x)} \leq g(x) \leq \underbrace{h(x)} \qquad \underline{\forall x \in I_r(x_0) \setminus \{x_0\}}$$

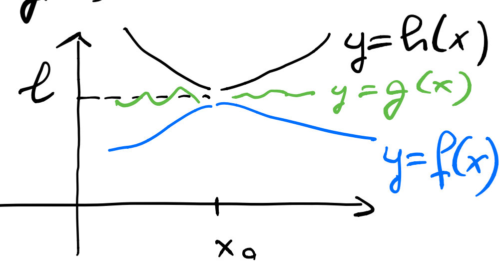
e supponiamo

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = \ell \in \mathbb{R}$$

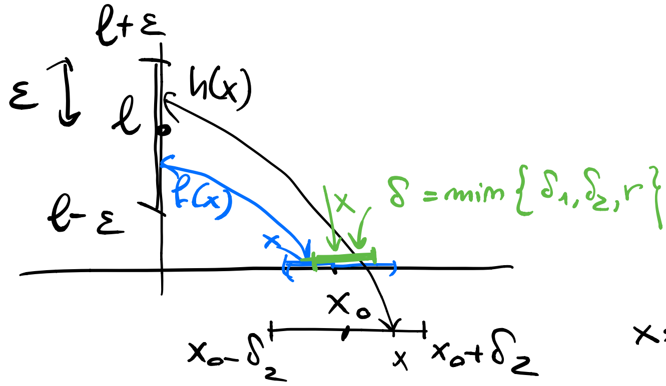
Allora $\exists$ il limite di $g(x)$ e vale ℓ:

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$$

[noto anche come teorema dei due carabinieri]



Dim: fissiamo $\varepsilon > 0$



$x \neq x_0 \quad x \in I_r(x_0)$

$$f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell \implies \exists\, \delta_1 > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta_1$$

allora $|f(x) - \ell| < \varepsilon$

questa disuguaglianza si riscrive

$$-\varepsilon < f(x) - \ell < \varepsilon$$

in particolare $f(x) \overset{A}{>} \ell - \varepsilon$ se $x \in I_{\delta_1}(x_0) \setminus \{x_0\}$

$$h(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell \implies \exists\, \delta_2 > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta_2$$

allora $|h(x) - \ell| < \varepsilon$

possiamo riscrivere $-\varepsilon < h(x) - \ell < \varepsilon$

in particolare $h(x) \overset{B}{<} \ell + \varepsilon$ se $x \in I_{\delta_2}(x_0) \setminus \{x_0\}$

se fisso $\delta \overset{def}{=} \min\{\delta_1, \delta_2, r\}$

se $x \in I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$

$$\ell - \varepsilon \overset{A}{<} f(x) \leq g(x) \leq h(x) \overset{B}{<} \ell + \varepsilon$$

$|x - x_0| < \delta \leq \delta_1$ $\qquad$ $|x - x_0| < \delta \leq \delta_2$

abbiamo ottenuto

$$\ell - \varepsilon \lneq g(x) \lneq \ell + \varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow -\varepsilon \lneq g(x) - \ell \lneq \varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow \quad |g(x) - \ell| < \varepsilon \quad \text{per } x \in I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$$

$$\Longrightarrow \lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$$

$\varepsilon > 0$ è arbitrario.

$\square$

<u>esempio</u> : $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x}$

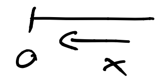
NON SI RISOLVE CON L'ALGEBRA DEI LIMITI

studiamo parità / disparità di $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$

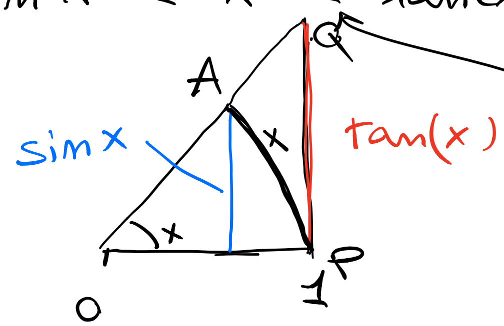
$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} \overset{\sin(x) \text{ DISPARI}}{=} \frac{-\sin(x)}{-x} = \frac{\sin(x)}{x} = f(x)$$

$\Rightarrow \quad f(-x) = f(x)$ cioè funzione PARI

$\Rightarrow$ è sufficiente calcolare il limite destro
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(x)}{x}$$



Vale:
$$\sin x < x < \tan(x) \qquad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

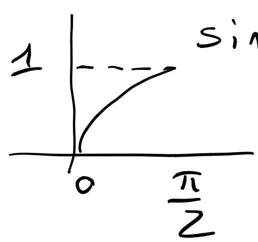


area settore $\overset{\frown}{OAP}$
< area triangolo $\overset{\triangle}{OPQ}$

$$\underbrace{\frac{x \cdot 1}{2}}_{\text{area settore}} < \underbrace{\frac{1 \cdot \tan(x)}{2}}_{\text{area triangolo}}$$

$\Leftrightarrow \quad x < \tan(x)$

Quindi $\quad \sin(x) < x < \tan(x)$



$\sin(x) > 0$ se $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

divido per $\sin(x)$

$$\frac{\sin(x)}{\sin(x)} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\tan(x)}{\sin(x)}$$

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$$1 < \frac{x}{\sin(x)} < \frac{1}{\cos x}$$

$$\downarrow_{x \to 0^+} \qquad\qquad \downarrow_{x \to 0^+}$$

$$1 \qquad\qquad \frac{1}{\cos(0)} = 1$$

teor. del confronto $\Rightarrow \frac{x}{\sin(x)} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 1$

$\Rightarrow$ algebra dei limiti $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\frac{x}{\sin(x)}} = 1$

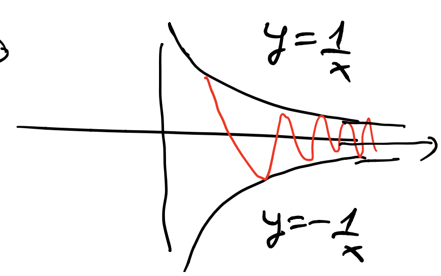
$$\Leftrightarrow \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

---

es: $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$

$x > 0 \quad -\frac{1}{x} \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{1}{x}$



usiamo il teorema del confronto

perché $-\frac{1}{x} \longrightarrow 0$, $\frac{1}{x} \longrightarrow 0$ per $x \to +\infty$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

Teorema del confronto (per gli infiniti)

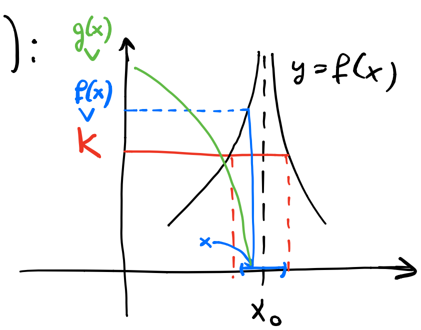
Sia $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in X$

Allora

1) se $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$ allora $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

2) se $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ allora $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$

Dim : 2):



fisso $K \in \mathbb{R}$, $\exists$ intorno U di x_0 tale che

se $x \in U \cap \operatorname{dom} f$, $x \neq x_0$ allora $f(x) > K$

$g(x) \geq f(x) > K$ cioè anche $g(x) > K$

$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$

K è arbitrario

1) si fa in modo analogo.

CONSEGUENZE:

1) se $f(x)$ è infinitesima per $x \to x_0$
e $g(x)$ è limitata in un intorno bucato
di x_0 allora $f(x)g(x)$ è infinitesima:

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$
- $\exists M>0 : |g(x)| < M \quad \forall x \in I_r(x_0) \setminus \{x_0\}$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x \to x_0} g(x) f(x) = 0$$

$$-M|f(x)| < g(x) f(x) < M|f(x)|$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$0 \qquad\qquad\qquad 0$$

quindi per il teorema del confronto
$f(x)g(x) \to 0$

es: $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin(x)}{x}$

$\frac{1}{x}$ funzione infinitesima: $\frac{1}{x} \to 0$

$\sin(x)$ funzione limitata $|\sin(x)| \leq 1$

$\Rightarrow \frac{\sin(x)}{x} = \frac{1}{x} \sin(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

---

2) • se $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} +\infty$

• se $g(x)$ è limitata inferiormente in un intorno bucato di x_0: $\exists M: g(x) > M$
allora $x \in I_r(x_0) \setminus \{x_0\}$

$$f(x) + g(x) > f(x) + M$$

$$\downarrow$$

$$+\infty$$

per il confronto $f(x) + g(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} +\infty$

2^{bis}) • se $f(x) \longrightarrow -\infty$

• e $g(x)$ è limitata superiormente:
$\exists M : g(x) < M \quad \forall x \in I_r(x_0) \setminus \{x_0\}$

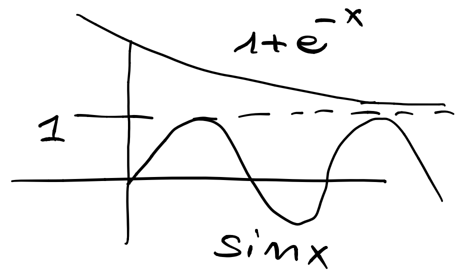
allora $f(x) + g(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} -\infty$

ATTENZIONE: se $f(x) \leq g(x)$ e

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ $\exists$ finito

non implica che $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ esiste

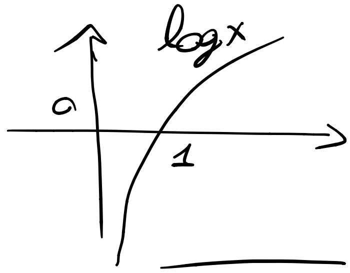
es: $\sin(x) \leq \underbrace{1 + e^{-x}}_{\xrightarrow{x \to +\infty} 1}$



$$\text{es: } \lim_{x \to 0} \underbrace{x}_{\to 0} \cdot \overbrace{\underbrace{M\left(\frac{1}{x}\right)}_{0 \leq \quad < 1}}^{\text{LIMITATA}} = 0$$

$$\text{es: } \lim_{x \to 0} \left(\underbrace{\log x}_{\to -\infty} + \overbrace{\sin \frac{1}{x}}^{-1 \leq \quad \leq 1} \right) = -\infty$$

nella def. di limite $U \cap$ dom funzione



$(-\delta, \delta) \cap (0, +\infty) = (0, \delta)$

intorno di 0 $\cap$ dom(log) = intorno destro di 0