esercizi di AlgLinGeo 2017/18

3 - MATRICI E SISTEMI LINEARI

1. Con il metodo di sostituzione, determinare tutte le soluzioni di ciascuno dei seguenti sistemi, precisando quali sono le possibili incognite libere:

$$\begin{cases} 2x_1 - \sqrt{2}x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \\ (1/2)x_3 = -1/8 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

2. Data $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, dire quali delle seguenti equazioni matriciali ha almeno una soluzione:

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}; A^2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

3. Dati i vettori $\mathbf{v}_1 = (a, b, c)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 1, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (0, 1, -1)$ e $\mathbf{w} = (2, 3, -1)$ e l'equazione

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{w}$$

Determinare se esistono parametri reali (a, b, c) tali che

(a) l'equazione ha un'unica soluzione;
(b) l'equazione non ha soluzione;
(c) l'equazione ha infinite soluzioni.

4. Ridurre a scala le seguenti matrici utilizzando operazioni elementari sulle righe:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 & 1 \\ 4 & -6 & 1 & -2 \\ 6 & -9 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Dire se il seguente sistema di matrice $(A|B)$ è compatibile e in caso affermativo precisare se la soluzione è unica o dipende da parametri liberi:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \text{ oppure } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

6. Discutere al variare del parametro reale k il sistema lineare

$$\begin{cases} kx + y - z = 2 \\ -kx + y + (2k-1)z = 2k \\ (k-1)y + z = k^2 - k + 1 \end{cases}$$

7. Data $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ 0 & 1 & t^3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, determinare per quali valori del parametro reale t il sistema di matrice $(A|B)$ è compatibile e in caso affermativo precisare se la soluzione è unica o dipende da incognite libere, in ciascuno dei seguenti casi:

(a) $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$; (b) $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$; (c) $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

8. Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 & 1 \\ 4 & -6 & 1 & -2 \\ 6 & -9 & -6 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

determinare le soluzioni dei sistemi omogenei aventi rispettivamente A e B come matrici dei coefficienti.

9. Sono dati i vettori $\mathbf{u} = (1, 3, 4)$ e $\mathbf{v} = (0, 4, 5)$; sapendo che sono soluzioni di uno stesso sistema lineare $AX = B$, $B \neq 0$, scrivere:

(a) una soluzione del sistema omogeneo associato $AX = 0$;
(b) un'altra soluzione del sistema lineare $AX = B$.

10. Sono dati la retta $r : hx + y - 2z = 0, y + z + 2k = 0$ e il piano $\alpha : 2x + y + 2z + 1 = 0$.

(a) Trovare i valori dei parametri reali h e k per i quali r risulta parallela ad α e per i quali giace su α.
(b) Posto $h = 0, k = 1$, verificare che r ed α hanno esattamente un punto in comune.
(c) Posto $h = 0, k = 1$, trovare la retta che giace su α e incontra r ortogonalmente.

11. Determinare se possibile l'inversa della seguente matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \\ 13 & 21 & 35 \end{pmatrix}$$

12. Quale delle seguenti affermazioni è vera? Un sistema lineare $AX = B$ con A quadrata invertibile

(a) ha una sola soluzione, qualunque sia B
(b) non è mai risolubile;
(c) se è risolubile ha una incognita libera;
(d) è risolubile solo se B è nulla.

13. Siano $A \in \mathbf{R}^{2,3}$ e $X \in \mathbf{R}^{3,1}$. Si supponga A di rango 2. Quale delle seguenti affermazioni è necessariamente vera?

(a) il sistema lineare $AX = B$ non ha soluzione, qualunque sia B;
(b) il sistema lineare $AX = 0$ ha infinite soluzioni;
(c) il sistema lineare $AX = B$ ha una sola soluzione, qualunque sia B;
(d) il sistema lineare $AX = 0$ ha una sola soluzione.

14. Quale delle seguenti affermazioni è vera? Data la matrice $A := \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, il sistema lineare $AX = B$

(a) non è mai risolubile, qualunque sia B
(b) se è risolubile ha infinite soluzioni
(c) è risolubile solo se B è nulla
(d) ha una sola soluzione, qualunque sia B

3 - SOLUZIONI

5. Con un procedimento di eliminazione di Gauss si possono ridurre i due sistemi ai rispettivi sistemi equivalenti

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & | & 1 \\ 0 & -5 & -4 & -4 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & | & 1 \\ 0 & -5 & -4 & -4 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Il primo sistema è perciò incompatibile, mentre il secondo è compatibile e si possono assumere x_3 e x_4 come incognite libere.

6. $k \neq 0, 2$: una sola soluzione; $k = 2$: ∞^1 soluzioni; $k = 0$: sistema incompatibile.

8. Basta calcolare il numero di righe non nulle di una qualsiasi riduzione a scala delle matrici date; si ha $rg(A) = 2$, $rg(B) = 3$. Il sistema di matrice A ha ∞^2 soluzioni del tipo $(\frac{3}{2}x_2 + \frac{3}{10}x_4, x_2, \frac{4}{5}x_4, x_4)$, il secondo sistema ha solo la soluzione banale.

9. Suggerimento: ricordare che relazione c'è tra le soluzioni di un sistema e quelle del sistema omogeneo associato.

10. (a) La retta r è parallela al vettore $(3, -h, h)$, quindi è parallela al piano α se e solo se $(3, -h, h)\cdot(2, 1, 2) = 0$, cioè se e solo se $h = -6$; r giace su α se e solo se $h = -6$ e $k = 3/8$.

(b) Intersecando r con α si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} y - 2z = 0 \\ y + z + 2 = 0 \\ 2x + y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

che fornisce come unica soluzione il punto $(5/6, -4/3, -2/3)$.

(c) In questo caso r è parallela all'asse x, quindi ha parametri direttori proporzionali a $(1, 0, 0)$; la retta s richiesta passa per il punto $(5/6, -4/3, -2/3)$, perciò ha equazioni parametriche del tipo

$$\begin{cases} x = 5/6 + lt \\ y = -4/3 + mt \\ z = -2/3 + nt \end{cases}$$

Imponendo poi che s stia sul piano α e che sia ortogonale a r si ottengono i parametri direttori $(0, -2, 1)$.

11. A è invertibile se $rg(A) = 3$. Applicando l'eliminazione di Gauss al sistema $(A|I)$ risulta :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & | & -3 & 1 & 0 \\ 13 & 21 & 35 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & | & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 9 & | & -13 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & | & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

volendo, per ottenere A^{-1}, si può proseguire ancora con operazioni elementari sulle righe (metodo di Gauss-Jordan)

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & | & 7 & 7 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & | & -1 & 9 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & \frac{7}{2} & -1 \\ \frac{-1}{2} & \frac{9}{2} & -1 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$