04 - NUMERI COMPLESSI $\mathbb{C}$

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

$+, \cdot, -, :$ $\quad x^2 = 2$

$x^2 + 1 = 0$ NON HA SOLUZIONI IN $\mathbb{R}$

$ax^2 + bx + c = 0 \quad a, b, c \in \mathbb{R}$

PROBLEMA:
radici di un polinomio di grado n
a coefficienti reali

TRASFORMATE DI FOURIER

Def: un numero complesso z
è una coppia ordinata di numeri
reali

$$z = (x, y) \qquad x, y \in \mathbb{R}$$

Parte Reale di z — Parte Immaginaria di z

$x = \mathrm{Re}(z)$ $\qquad\qquad$ $y = \mathrm{Im}(z)$

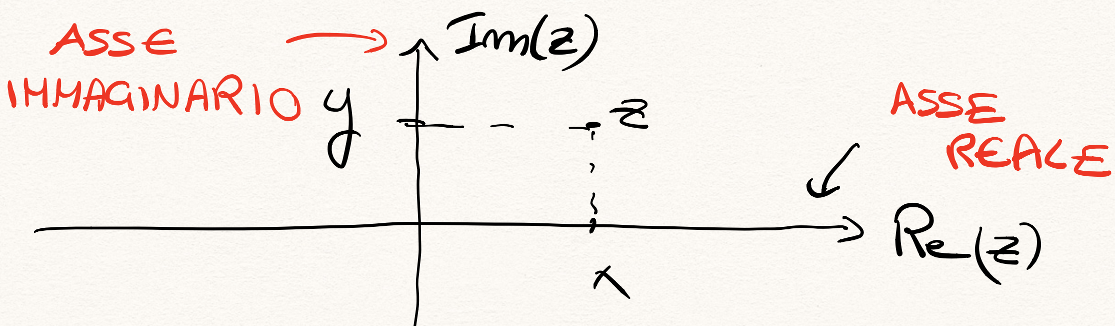
es: $z = (2, 1)$ è un numero complesso

$\mathrm{Re}\, z = 2, \qquad \mathrm{Im}\, z = 1$

$\mathbb{C}$ = insieme dei numeri complessi

$= \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$

$\mathbb{C} \longleftrightarrow \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$



PIANO COMPLESSO $\qquad\qquad$ $z = (x, y)$

o

PIANO di ARGAND-GAUSS

$z_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{C}$

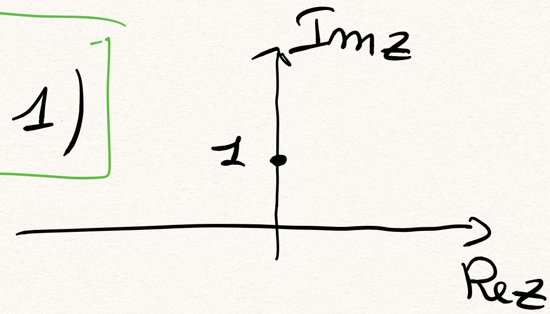
$z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$

$z_1 + z_2 \qquad\qquad z_1 \cdot z_2$

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) \overset{def}{=} (x_1 + x_2 \,,\, y_1 + y_2)$$

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) \overset{def}{=} (x_1 x_2 - y_1 y_2 \,,\, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

definiamo $\boxed{i \overset{def}{=} (0, 1)}$



rappresentazione cartesiana

di $z = (x, y)$

$$\boxed{z = x + iy}$$

es: $z = (\sqrt{2}, -5)$

in forma cartesiana $z = \sqrt{2} - 5i$

---

due numeri complessi

$$z_1 = x_1 + i y_1 \quad e \quad z_2 = x_2 + i y_2$$

sono UGUALI se

$$x_1 = x_2 \quad e \quad y_1 = y_2$$

$$\begin{cases} \operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2 \\ \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2 \end{cases}$$

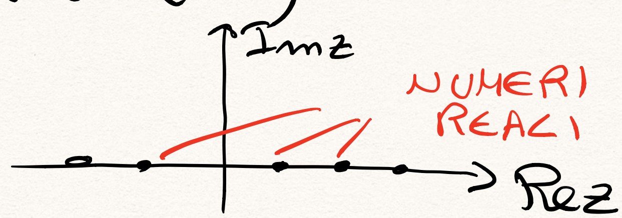
NOTA

$x \in \mathbb{R}$ si può interpretare come il numero complesso $x + i0$

$(x, 0)$

i numeri reali si identificano con i numeri complessi con parte immaginaria nulla $(=0)$

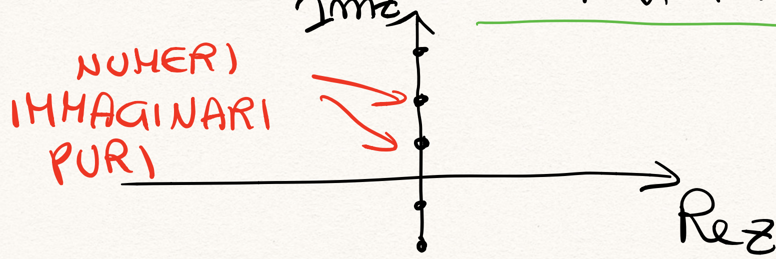
$$\underbrace{x}_{\in \mathbb{R}} = \underbrace{x + i0}_{\in \mathbb{C}}$$



$$iy = 0 + iy$$

$Re = 0$

i numeri complessi con parte reale $= 0$ si chiamano numeri immaginari puri



NOTA: i è una soluzione di

$$x^2 + 1 = 0$$

$$\boxed{i^2 = -1} \qquad [\,(0,1)\cdot(0,1)\,]$$

OPERAZIONI in $\mathbb{C}$

$$z_1 = x_1 + iy_1 \quad , \quad z_2 = x_2 + iy_2$$

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2)$$

$$= \underbrace{x_1 + x_2}_{Re(z_1+z_2)} + i\,\underbrace{(y_1 + y_2)}_{Im(z_1+z_2)}$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + i y_1)(x_2 + i y_2) \qquad i^2 = -1$$

$$= x_1 x_2 + i y_1 x_2 + i x_1 y_2 + i^2 y_1 y_2$$

$$= x_1 x_2 - y_1 y_2 + i (x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

<u>esempio</u>

$$z_1 = 1 + 3i$$

$$z_2 = -5 + 2i$$

$$z_1 + z_2 = (1+3i) + (-5+2i) = -4 + 5i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (1+3i)(-5+2i) = (-5-6) + i(-15+2)$$

$$= -11 - 13i$$

<u>OPPOSTO</u>: $z = x + iy$

$$\boxed{-z = (-x) + i(-y)}$$

$$z + (-z) = 0 + i0$$

es: $z = -1 + 3i$

$-z = 1 - 3i$

RECIPROCO $\quad z = x + iy$

$$\frac{1}{z} = ?$$

es: $z = 2 + 3i$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2+3i} = \frac{1}{2+3i} \cdot \frac{2-3i}{2-3i} =$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$(a+ib)(a-ib) = a^2 - (ib)^2 =$$

$$= a^2 - i^2 b^2 = a^2 + b^2$$

$$= \frac{2-3i}{4+9} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13} i$$

$$\boxed{\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\,\frac{y}{x^2+y^2}}$$

Potenze di i

$$i^{2017} = ?$$

$$i^1 = i$$
$$i^2 = -1$$
$$i^3 = i^2\, i = (-1)i = -i$$
$$i^4 = i^3\, i = (-i)\, i = -(-1) = 1$$
$$i^5 = i^4\, i = 1 \cdot i = i = i^1$$

$\Rightarrow$ si divide per 4 l'esponente e si considera solo il resto della divisione

$$2017 = 504 \cdot 4 + 1$$

$$= (i^4)^{504} = 1^{504} = 1$$

$$i^{2017} = i^{504 \cdot 4 + 1} = i^{504 \cdot 4}\, i^1 = i$$

MODULO di un numero complesso z

$$z = x + iy$$

$$\boxed{|z| \overset{\text{def}}{=} \sqrt{x^2 + y^2}}$$

<u>MODULO di z</u>

es: $z = \sqrt{3} - 2i$

$$|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = \sqrt{3+4} = \sqrt{7}$$

NOTA: $|z|$ è un numero reale, ≥ 0

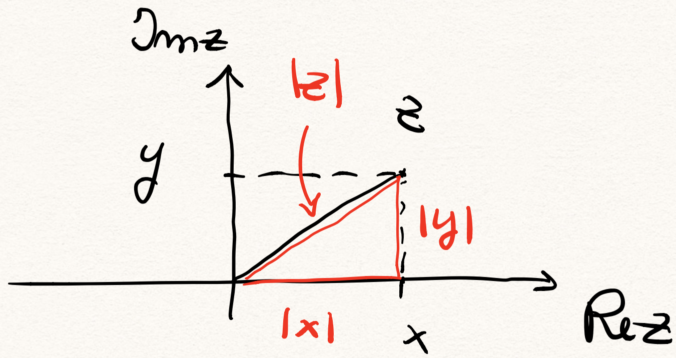
es: $z = -1 + i0 = -1$

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1 = |-1|$$

se z è un numero reale, il suo modulo coincide con il valore assoluto

$$z = x + i0$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + 0^2} = \sqrt{x^2} = |x|$$



$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

geometricamente, $|z|$ rappresenta la distanza di z dall'origine

Proprietà del modulo di z

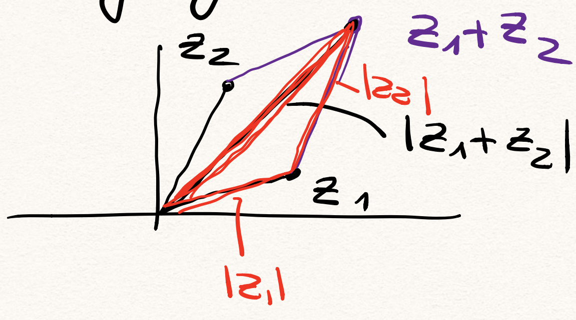
(1) $|z|$ è un numero reale

$|z| \geq 0$ e $|z| = 0 \iff z = 0 + i\,0$

(2) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1|\,|z_2|$

(3) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

disuguaglianza triangolare



obbedisce alla regola del parallelogramma in un triangolo, la lunghezza di un lato è $\leq$ della somma degli altri due.

(4) $$\big|\,|z_1|-|z_2|\,\big| \leq |z_1+z_2|$$

infatti (è sempre una conseguenza della disuguaglianza triangolare):

$$\big|\,|z_1|-|z_2|\,\big| \leq |z_1+z_2|$$

si riscrive

$$-|z_1+z_2| \leq |z_1|-|z_2| \leq |z_1+z_2|$$

$$|z_2| \leq |z_1|+|z_1+z_2| \qquad\qquad |z_1| \leq |z_2|+|z_1+z_2|$$

(5) $$\mathrm{Re}(z) \leq |\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$$

$$\mathrm{Im}(z) \leq |\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$$

$\ulcorner$ $z = x+iy \qquad \mathrm{Re}\, z = x$

$$x \leq |x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} = |z|$$

$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ $\lrcorner$

COMPLESSO CONIUGATO di z

$z = x + iy$

il complesso coniugato di z è il numero

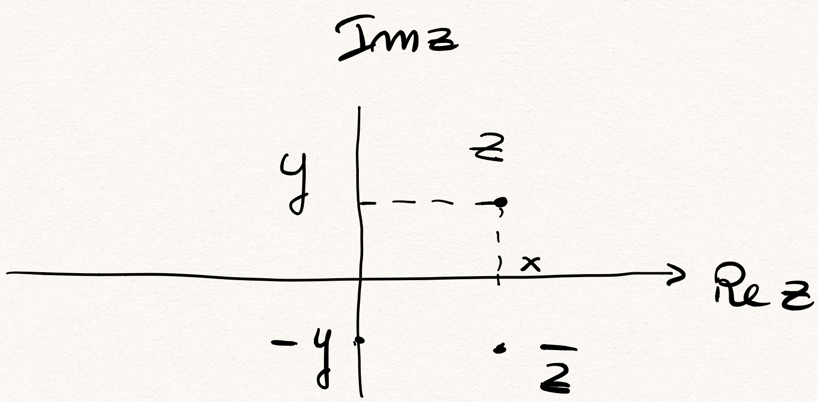
$$\boxed{\bar{z} = x - iy}$$

es: $z = 1 - \sqrt{2}\, i$

$\bar{z} = 1 + \sqrt{2}\, i$

$z = -2 + 3i$

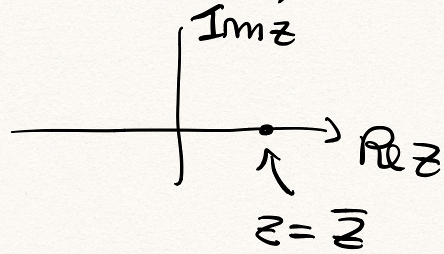
$\bar{z} = -2 - 3i$



geometricamente, $\bar{z}$ è simmetrico di z rispetto all'asse reale $\mathrm{Re}\, z$

Proprietà del complesso coniugato

(1) $z = \bar{z} \iff \operatorname{Im}(z) = 0 \iff z \in \mathbb{R}$



(2) $\operatorname{Re}(z) = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$

$$z = x + iy$$
$$\bar{z} = x - iy$$
$$z + \bar{z} = x + iy + x - iy = 2x$$
$$\Rightarrow \quad \frac{z + \bar{z}}{2} = x = \operatorname{Re} z$$

(3) $\operatorname{Im}(z) = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$

(4) $z\bar{z} = |z|^2$

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy$$
$$z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2 = |z|^2$$

(5) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$

(6) $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$

(7) $\overline{\overline{z}} = z$

(8) $|\overline{z}| = |z|$

NOTA: in $\mathbb{C}$ non hanno senso disuguaglianze del tipo

$\cancel{z < 1+2i}$. $\cancel{z \geq 0}$

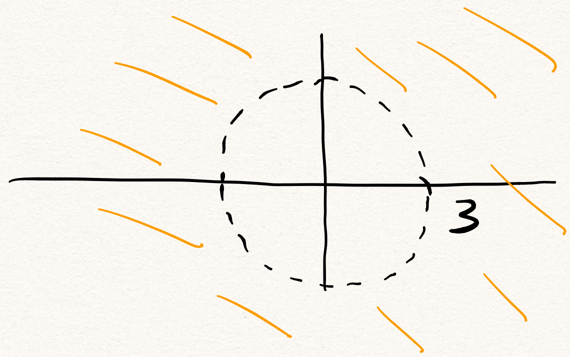
Hanno senso disequazioni del tipo

$|z| > 3$

$Re(z) < Im\, z$

esempio: risolvere in $\mathbb{C}$

$$|z| > 3$$



$z = x + iy$

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\sqrt{x^2+y^2} > 3$$

sono tutti i punti esterni alla circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 3

---

es: risolvere in $\mathbb{C}$

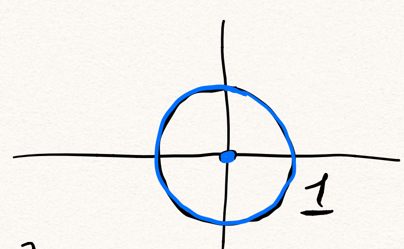
$$z^2 \bar{z} = z$$

$$z(z\bar{z} - 1) = 0$$

$$z(|z|^2 - 1) = 0$$

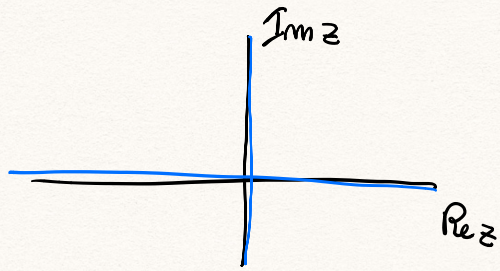
$\Rightarrow \quad z = (0,0)$

oppure $|z|^2 - 1 = 0$



$$\{(0,0)\} \cup \{(x,y) : x^2+y^2 = 1\}$$

es: $z \in \mathbb{C}$: $z^2 \in \mathbb{R}$



$$z = x + iy$$

$$z^2 = (x+iy)(x+iy)$$

$$= x^2 - y^2 + 2ixy \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Im}(z^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2xy = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0$$

$\Rightarrow$ asse reale , asse immaginario

$x + i0$ $\quad$ $0 + iy$