Prof.ssa Stefania Bufalino
DISAT- Politecnico di Torino
e-mail: stefania.bufalino@polito.it

Integrazione dei capitoli sulla CINEMATICA

1. Il sistema di riferimento

La cinematica è quella branca della fisica che studia il moto di un punto in uno spazio tridimensionale. Il punto è definito come in matematica e pertanto la sua posizione è sempre data rispetto ad un sistema di riferimento, ad esempio un sistema cartesiano. La differenza tra un punto matematico e un punto fisico è enorme ed è la seguente. Un punto matematico (geometrico) è definito dalle sue coordinate, che sono costanti e quindi a differenti coordinate corrispondono punti diversi nello spazio, mentre in cinematica il punto fisico è caratterizzato dal movimento e il "movimento" determina un punto fisico abbia coordinate che sono funzione del tempo.

$$P \Leftrightarrow (x,y,z) \Leftrightarrow \vec{r} \equiv x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$: Punto geometrico

$$P = P(t) \Rightarrow (x = x(t), y = y(t), z = z(t)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} = OP(t)$$: Punto fisico, con O origine del sistema di assi cartesiani

L'insieme di posizioni (punti geometrici) occupate da un punto fisico nel tempo è una curva (unidimensionale) estesa nello spazio tridimensionale e si chiama **traiettoria**. Il set di 3 espressioni della coordinate in funzione del tempo viene chiamato **"equazioni del moto"**.

2 Posizione, velocità e accelerazione

Le quantità principali, per descrivere il moto di un punto fisico, in cinematica sono tre e sono definite nel seguente modo:

Posizione: $$\vec{r}(t) \equiv x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \tag{2.1}$$

Velocità: $$\vec{v} \equiv \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{j} + \frac{dz(t)}{dt}\vec{k} \equiv \dot{\vec{r}}(t) = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} + \dot{z}(t)\vec{k} \tag{2.2}$$

Accelerazione:

$$\vec{a} \equiv \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y(t)}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z(t)}{dt^2}\vec{k} \equiv \ddot{\vec{r}}(t) = \ddot{x}(t)\vec{i} + \ddot{y}(t)\vec{j} + \ddot{z}(t)\vec{k} \tag{2.3}$$

Osservazioni:

1) Conoscere lo spostamento in funzione del tempo (equazione del moto) equivale a conoscere il passato, la posizione attuale e futura di un punto fisico;
2) velocità e accelerazione possono essere dedotte mediante l'operazione di derivazione;
3) Inoltre, a partire da 3 funzioni note $x(t), y(t), z(t)$ e facendone la derivata prima si ottengono 3 nuove funzioni $\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)$, che sono completamente definite. In altre parole, se il vettore spostamento è noto anche la velocità è completamente nota. Lo stesso vale per l'accelerazione: se la velocità è nota, anche l'accelerazione è completamente nota perché ottenuta per derivazione della velocità;
4) se la velocità è conosciuta come una funzione del tempo, si può dedurre lo spostamento mediante integrazione;
5) se l'accelerazione è conosciuta come una funzione del tempo, si può dedurre la velocità mediante integrazione;
6) quando si passa dalla velocità alla posizione e dall'accelerazione alla velocità attraverso integrazioni si ottengono alcune "costanti di integrazione". Queste costanti di integrazione devono essere note, altrimenti le equazioni del moto rimangono indefinite.
Coem vedremo nel seguito e costanti di integrazione sono determinate mediante la conoscenza di alcune condizioni al contorno, come le condizioni iniziali e/o finali del moto.

Dalla velocità alla posizione:

$$\vec{r} = \int \vec{v}dt = \int \frac{dx(t)}{dt}dt\cdot \vec{i} + \int \frac{dy(t)}{dt}dt\cdot \vec{j} + \int \frac{dz(t)}{dt}dt\cdot \vec{k} \qquad (2.4)$$

(Ogni integrale ha nella propria soluzione una costante quindi in totale si hanno 3 constanti)

Dall'accelerazione alla velocità:

$$\vec{v} \equiv \int \frac{d\vec{v}(t)}{dt}dt = \int \frac{d^2x(t)}{dt^2}dt\cdot\vec{i} + \int \frac{d^2y(t)}{dt^2}dt\cdot\vec{j} + \int \frac{d^2z(t)}{dt^2}dt\cdot\vec{k} \qquad (2.5)$$

(Ogni integrale ha nella propria soluzione una costante quindi in totale si hanno 3 constanti)

Pertanto, ottenendo la velocità dall'accelerazione per poi ottenere lo spostamento dalla velocità, si hanno 6 funzioni "completamente definite", in cui compaiono 6 costanti, i cui valori devono essere determinati se vogliamo conoscere le **"3 equazione del moto"**. Per determinare queste 6 costanti (di integrazione) è necessario conoscere lo spostamento in 2 punti a 2 tempi diversi t_1 e t_2 o deve essere nota la posizione nel punto iniziale 1 al tempo t_1 e la velocità in un altro (o lo stesso) punto al tempo t_2 (t_2 può coincidere con t_1).
In altre parole è necessario che:

$$\begin{aligned} x(t_1) &= x_1 = noto \\ y(t_1) &= y_1 = noto \\ z(t_1) &= z_1 = noto \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} x(t_2) &= x_2 = noto \\ y(t_2) &= y_2 = noto \\ z(t_2) &= z_2 = noto \end{aligned} \qquad (2.6)$$

oppure:

$$
\begin{aligned}
x(t_1) &= x_1 = noto \\
y(t_1) &= y_1 = noto \\
z(t_1) &= z_1 = noto
\end{aligned}
\qquad \text{e} \qquad
\begin{aligned}
\frac{dx(t_2)}{dt} &= v_{x2} = noto \\
\frac{dy(t_2)}{dt} &= v_{y2} = noto \\
\frac{dz(t_2)}{dt} &= v_{z2} = noto
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

Inserendo il valore dei tempi t_1 e t_2 nelle equazioni (2.6) o (2.7) si ottengono 6 equazioni le cui variabili sono le 6 costanti di integrazione che dobbiamo conoscere per determinare le equazioni del moto di un punto fisico.

Al fine di chiarire quanto detto sopra circa le costanti di integrazione possiamo utilizzare il seguente esempio.

***Esempio**: Un giocatore di calcio che deve lanciare una palla*

Un calciatore deve lanciare con le mani la palla dalla linea di confine del campo verso un suo compagno di squadra che si trova davanti a lui a una distanza d = 15 [m]. Si vuole studiare il moto della palla. Procediamo attraverso uno schema dei vari passaggi del problema per vedere come le dichiarazioni di cui sopra si applicano a questo caso.

1) **Punto fisico**: in questo esempio il punto fisico è la **palla**, la cui dimensione è abbastanza piccola rispetto alle dimensioni del moto da intendersi completamente descritto dal suo centro. Possiamo quindi assumere la palla come puntiforme.
2) **Sistema di riferimento**: siamo in grado di scegliere liberamente il sistema come preferiamo. In questo caso supponiamo che **l'asse verticale y sia diretto verso il cielo; l'asse x orizzontale, diretto dal giocatore che tira verso il compagno, l'asse z orizzontale e perpendicolare a x;** assumiamo che l'origine sia esattamente sotto i piedi del giocatore e l'istante 0 del tempo è quello corrispondente all'istante in cui il pallone lascia le mani del giocatore.
3) Lanciare la palla: che cosa significa "lanciare una palla (o un oggetto qualsiasi)"? significa "posizionare ad un certo tempo la palla in un dato punto dello spazio con una data velocità"
4) Sappiamo inoltre che l'accelerazione si può assumere (e sarà dimostrato quando studieremo le forze) che ogni punto fisico sulla superficie della Terra, se è libero da vincoli, contatti e dagli effetti dell'aria (che sono nella maggior parte dei casi trascurabili), ha sempre un'accelerazione *g* (9.8 m/s^2), lungo la direzione verticale e diretta verso il terreno.
5) Ciò che si sa circa la velocità è che al momento 0 (quando il pallone lascia le mani del giocatore) ha modulo e direzione uguale alla velocità delle mani nel percorso finale prima di rilasciare la palla: supponiamo che queste mani hanno direzione inclinata di $\alpha = 30^0$ rispetto al campo orizzontale e il modulo $v_0 = 8[m/s]$.
6) Ciò che è noto circa lo spostamento è che al tempo 0 la sfera (palla) è nelle mani del giocatore, cioè nel punto dello spazio le cui coordinate x e z sono 0 e la coordinata y è uguale all'altezza *h=2,3[m]* delle braccia del giocatore.

In conclusione: conosciamo l'accelerazione durante tutto il tempo (cioè in funzione del tempo) e la posizione e la velocità in un determinato momento (t = 0). Quindi possiamo scrivere la seguente equazione vettoriale:

$$\vec{a} \equiv \frac{d^2x(t)}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y(t)}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z(t)}{dt^2}\vec{k} \equiv -g\cdot \vec{j} \qquad (2.8)$$

Che si può scrivere sotto forma di 3 equazioni scalari:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x(t)}{dt^2} &= 0 & \qquad \frac{dx(t)}{dt} &= C_1 & \qquad x(t) &= C_1\cdot t + C_4 \\ \frac{d^2y(t)}{dt^2} &= -g\ ; \quad \text{che integrando:} & \frac{dy(t)}{dt} &= -gt + C_2 & y(t) &= -\frac{1}{2}g\cdot t^2 + C_2\cdot t + C_5 \qquad (2.9) \\ \frac{d^2z(t)}{dt^2} &= 0 & \frac{dz(t)}{dt} &= C_3 & z(t) &= C_3\cdot t + C_6 \end{aligned}$$

Ora inseriamo il tempo t = 0 in tutte le equazioni della velocità e la posizione nella (2.9) uguagliandole alla posizione e alle componenti della velocità a t = 0:

$$\begin{aligned} \frac{dx(t=0)}{dt} &= C_1 = v_0\cdot \cos\alpha & \qquad x(t=0) &= C_1\cdot 0 + C_4 = C_4 = 0 \\ \frac{dy(t=0)}{dt} &= -g\cdot 0 + C_2 = C_2 = v_0\cdot \sin\alpha \quad \text{e:} & y(t=0) &= -\frac{1}{2}g\cdot 0^2 + C_2\cdot 0 + C_5 = C_5 = h \qquad (2.10) \\ \frac{dz(t)}{dt} &= C_3 = 0 & z(t=0) &= C_3\cdot 0 + C_6 = C_6 = 0 \end{aligned}$$

Dalle equazioni (2.10) si determinano i valori delle costanti e possiamo scrivere il risultato finale completo come:

$$\begin{aligned} x(t) &= v_0\cos\alpha\cdot t & \qquad \frac{dx(t)}{dt} &= v_0\cos\alpha \\ y(t) &= -\frac{1}{2}g\cdot t^2 + v_0\sin\alpha\cdot t + h \qquad \text{e:} & \frac{dy(t)}{dt} &= -gt + v_0\sin\alpha \qquad (2.11) \\ z(t) &= 0 & \frac{dz(t)}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

Da notare:

1) Il moto rimane in un piano: piano verticale contenente il vettore accelerazione e la velocità iniziale
2) La traiettoria è una curva planare
3) Queste 2 osservazioni sono indipendenti dalla scelta del sistema di riferimento: sono caratteristiche fisiche del moto (il piano è un piano fisico)

L'espressione analitica della traiettoria (cioè la funzione *y(x)* in (x, y) è ottenuta invertendo l'equazione *x(t)* in (2.11) rispetto al tempo e sostituendo il tempo nella seconda equazione:

$$t = \frac{x}{v_0\cos\alpha} \Rightarrow y(x) = -\frac{1}{2}\frac{g}{(v_0\cos\alpha)^2}\cdot x^2 + \tan\alpha\cdot x + h$$

2.1 Proprietà del vettore velocità

Proprietà n.1: la velocità di un punto è sempre tangente alla traiettoria

Per provare la suddetta proprietà:

- consideriamo il vettore posizione al tempo *t*, $\vec{r}(t)$, e al tempo $t+\Delta t, \vec{r}(t+\Delta t)$ e calcoliamo la differenza: $\Delta\vec{r}(t)=\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)$. Quando $\Delta t \to 0$ la direzione di $\Delta\vec{r}(t)$ si avvicina (tende) alla tangente alla traiettoria nel punto $\vec{r}(t)$.
- Il vettore $\dfrac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t}$ è parallelo a $\Delta\vec{r}(t)$: quindi il limite per $\Delta t \to 0$ diventa anch'esso tangente alla traiettoria nel punto $\vec{r}(t)$.
- scrivendo esplicitamente $\dfrac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t}$ come:

$$\frac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t} \equiv \frac{\Delta x(t)}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta y(t)}{\Delta t}\vec{j} + \frac{\Delta z(t)}{\Delta t}\vec{k}$$

e nel limite di $\Delta t \to 0$ possiamo scrivere:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t} \equiv \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x(t)}{\Delta t}\vec{i} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y(t)}{\Delta t}\vec{j} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z(t)}{\Delta t}\vec{k} = \vec{v}$$

Proprietà n.2: il cammino di un punto fisico diviso il tempo necessario a compiere quel cammino è uguale al modulo della velocità.

Dismostriamo la proprietà 2:

- Consideriamo il modulo di $\Delta\vec{r}(t)$, che è la corda di un arco della traiettoria, e nel limite di $\Delta t \to 0$ si ha che $\dfrac{|\Delta\vec{r}(t)|}{\Delta t} = \left|\dfrac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t}\right|$. Quest'ultima espressione è il cammino effettuato diviso l'intervallo di tempo necessario a perrcorrerlo. Inoltre $\left|\dfrac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t}\right|$ è, nel limite $\Delta t \to 0$, il modulo della velocità.

3. Coordinate cilindriche

La posizione di un punto materiale può anche essere descritto da un insieme di 2 coordinate, *r* e θ e 2 vettori unitari $\vec{\lambda}$ e, $\vec{\mu}$, definiti come:

- *r* è la distanza (scalare) tra l'origine del sistema di riferimento e il punto fisico
- θ è l'angolo tra il vettore posizione e l'asse x
- $\vec{\lambda}$ è il versore (vettore unitario) lungo la direzione della posizione
- $\vec{\mu}$ è il vettore unitario perpendicolare a $\vec{\lambda}$, positivo quando il verso è in senso antiorario

  Notiamo che non solo r e θ sono funzioni del tempo, ma anche i vettori di modulo unitario lo sono!

Pertanto lo spostamento può essere scritto come:

$$\vec{r}(t) \equiv x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \rightarrow \vec{r}(t) \equiv r\vec{\lambda} + z(t)\vec{k}$$

Essendo i versori funzioni del tempo possono essere facilmente ricavati nel seguente modo:

$$\begin{cases} \vec{\lambda}(t) \equiv \cos(\vartheta(t))\vec{i} + \sin(\vartheta(t))\vec{j} \\ \vec{\mu}(t) \equiv -\sin(\vartheta(t))\vec{i} + \cos(\vartheta(t))\vec{j} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\vec{\lambda}}(t) = -\dot{\vartheta}(t)\sin(\vartheta(t))\vec{i} + \dot{\vartheta}(t)\cos(\vartheta(t))\vec{j} = \dot{\vartheta}(t)\vec{\mu}(t) \\ \dot{\vec{\mu}}(t) = -\dot{\vartheta}(t)\cos(\vartheta(t))\vec{i} - \dot{\vartheta}(t)\sin(\vartheta(t))\vec{j} = -\dot{\vartheta}(t)\vec{\lambda}(t) \end{cases}$$

La velocità può essere quindi espressa in funzione delle nuove coordinate e dei nuovi vettori calcolando la derivata prima della posizione come segue:

$$\dot{\vec{r}}(t) = \dot{r}\vec{\lambda} + r\dot{\vec{\lambda}} + \dot{z}\vec{k} = \dot{r}\vec{\lambda} + r\dot{\vartheta}(t)\vec{\mu}(t) + \dot{z}\vec{k} \quad (2.12)$$

e possiamo fare analogamente per il calcolo dell'accelerazione:

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \ddot{r}\vec{\lambda} + \dot{r}\dot{\vec{\lambda}} + \dot{r}\dot{\vartheta}(t)\vec{\mu}(t) + r\ddot{\vartheta}(t)\vec{\mu}(t) + r\dot{\vartheta}(t)\dot{\vec{\mu}}(t) + \ddot{z}\vec{k} = (\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2(t))\vec{\lambda}(t) + (2\dot{r}\dot{\vartheta}(t) + r\ddot{\vartheta}(t))\vec{\mu}(t) + \ddot{z}\vec{k} \quad (2.13)$$

Se descriviamo il moto del punto fisico nel piano, e quindi non abbiamo bisogno di utilizzare la coordinata *z,* rientriamo nel caso del moto in coordinate polari. In questo ultimo caso sia la velocità che l'accelerazione si possono esprimere come somma di una componente radiale (direzione e verso dati dal versore $\vec{\lambda}$) e una componente detta trasversa (direzione e verso dati dal versore $\vec{\mu}(t)$) come segue

$$\dot{\vec{r}}(t) = \dot{r}\vec{\lambda} + r\dot{\vec{\lambda}} + \dot{z}\vec{k} = \dot{r}\vec{\lambda} + r\dot{\vartheta}(t)\vec{\mu}(t) \qquad \ddot{\vec{r}}(t) = (\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2(t))\vec{\lambda}(t) + (2\dot{r}\dot{\vartheta}(t) + r\ddot{\vartheta}(t))\vec{\mu}(t)$$

$$\dot{r}\vec{\lambda} = \vec{v}_R, \qquad \text{e} \qquad (\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2(t))\vec{\lambda}(t) = \vec{a}_R$$

$$r\dot{\vartheta}(t)\vec{\mu}(t) = \vec{v}_\vartheta \qquad (2\dot{r}\dot{\vartheta}(t) + r\ddot{\vartheta}(t))\vec{\mu}(t) = \vec{a}_\vartheta$$

4. Coordinate intrinseche planari

Le coordinate intrinseche possono essere utilizzate quando la traiettoria del moto è nota. Qui trattiamo solo il caso (che è anche il più frequente) di una traiettoria piana ed è anche il caso che troveremo negli esercizi. Se la traiettoria, che è nota, può essere descritta nel piano (x, y) come *y* funzione di *(x)* anche la sua tangente può essere calcolata.
Le coordinate intrinseche planari sono definite mediante 2 coordinate (*s(t)*, *ρ(t)*) e 2 vettori unitari che sono definiti come segue:
• *s(t)* è la distanza sulla traiettoria del punto fisico da un **punto fisso** della traiettoria assunto come origine delle coordinate *s*;
• *ρ(t)* è il raggio di una circonferenza speciale (a volte chiamata "cerchio osculatore") che passa per il punto a distanza *s(t)* dal punto fisso;
• $\vec{\tau}$ (t) è il versore tangente alla traiettoria a distanza *s(t)* dal punto fisso;
• $\vec{n}$ (t) è il vettore unitario perpendicolare a $\vec{\tau}$, positivo quando è rivolto verso la concavità.

Sfruttando la definizione della velocità e dell'accelerazione possiamo scrivere:

$$\vec{v} = \dot{s}(t)\cdot\vec{\tau}(t)$$

$$\vec{a} = \ddot{s}(t)\cdot\vec{\tau}(t) + \dot{s}(t)\cdot\dot{\vec{\tau}}(t)$$

Cerchiamo ora di esprimere il vettore
$\dot{\vec{\tau}}$ in funzione dei vettori unitari $\vec{\tau}$ and $\vec{n}$ e delle coordinate *s(t)* and *ρ(t)*.
Dimostriamo prima di tutto che la derivata di un vettore unitario (versore) è sempre perpendicolare al versore:

$$1 = \vec{n} \bullet \vec{n} \Rightarrow 0 = \frac{d(\vec{n} \bullet \vec{n})}{dt} = \frac{d\vec{n}}{dt} \bullet \vec{n} + \vec{n} \bullet \frac{d\vec{n}}{dt} = 2\vec{n} \bullet \frac{d\vec{n}}{dt} \Rightarrow \vec{n} \perp \frac{d\vec{n}}{dt}$$

Lo stesso vale, naturalmente, per $\vec{\tau}$, $\vec{\lambda}$, $\vec{\mu}$, ...
Quindi possiamo concludere che l'accelerazione ha una componente parallela a $\vec{n}$ (cioè perpendicolare $\vec{\tau}$). Qual è il modulo di questa componente?
Consideriamo una determinata traiettoria e 2 posizioni, *s(t)* ed *s(t+Δt)*, su di essa. I corrispondenti versori sono $\vec{\tau}(t)$ e $\vec{\tau}(t+\Delta t)$. Lungo $\vec{n}(t)$ e $\vec{n}(t+\Delta t)$ ci sono i raggi *ρ(t)* e *ρ(t+Δt)* dei 2 cerchi osculatore, con i loro centri C e C'. Se Δt è piccolo C e C' sono vicini e *ρ(t)* e *ρ(t+Δt)* sono quasi uguali. È facile vedere che, spostando $\vec{\tau}(t+\Delta t)$ in modo tale che la sua origine si sovrapponga all'origine di $\vec{\tau}(t)$, il triangolo i cui lati sono $\vec{\tau}(t)$,$\vec{\tau}(t+\Delta t)$ e $\Delta\tau \equiv \vec{\tau}(t+\Delta t) - \vec{\tau}(t)$, è simile al triangolo *ρ(t)*, *ρ(t+Δt)* e *Δs*, dove *Δs* è il segmento che va dal punto *s(t)* al punto *s(t+Δt)*.

Pertanto:

$$\frac{|\Delta\tau|}{|\tau|} \cong \frac{\Delta s}{\rho(t)} \Rightarrow \frac{|\Delta\tau|}{\Delta t \cdot |\tau|} \cong \frac{\Delta s}{\Delta t \cdot \rho(t)} \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} \left|\dot{\vec{\tau}}\right| = \left|\frac{\dot{s}(t)}{\rho(t)}\right|$$

Dall'ultima equazione e dalla derivata prima di un versore possiamo scrivere l'accelerazione come:

$$\vec{a} = \ddot{s}(t) \cdot \vec{\tau}(t) + \frac{\dot{s}^2(t)}{\rho(t)} \cdot \vec{n}$$

dove il simbolo del modulo è stato semplificato perchè la componente di $\vec{n}$ è sempre positiva e l'accelerazione ha una prima componente che viene detta componente tangenziale e una seconda componente che viene detta componente normale o centripeta.

- Esercizio 1 (moto in 1 dimensione)

Un corpo si muove lungo l'asse delle X secondo la seguente legge oraria:

$$x = 2t^3 + 5t^2 + 5 \qquad (*)$$

dove *x* è espressa in *km* e *t* in secondi.

Determinare:
a) le dimensioni e l'unità di misura dei coefficienti 2, 5 e 5
b) la velocità e l'accelerazione ad un generico istante *t*
c) la posizione, la velocità e l'accelerazione a *t*=2 s e *t*=3 s.

Dare i risultati in m, m/s e m/s^2.

Soluzione es.1:

a) Ogni coefficiente deve avere dimensione tale che l'intera espressione a destra dell'equazione (*) abbia la dimensione di *x:* una lunghezza L.
Quindi possiamo scrivere:
- il coefficiente 2 del termine $2t^3$ deve avere dimensione $\frac{[L]}{[T^3]}$ e quindi unità di misura: $\frac{m}{s^3}$
- il coefficiente 5 del termine $5t^2$ deve avere dimensione $\frac{[L]}{[T^2]}$ e quindi unità di misura: $\frac{m}{s^2}$
-infine il coefficiente 5 deve avere dimensione [L] e unità di misura: *m*.

b) Data la legge del moto: $x = f(t) = 2\frac{km}{s^3}t^3 + 5\frac{km}{s^2}t^2 + 5km$

$$\Rightarrow x = f(t) = 2\cdot 10^3\frac{m}{s^3}t^3 + 5\cdot 10^3\frac{m}{s^2}t^2 + 5\cdot 10^3 m \qquad (1)$$

Per calcolare la velocità dobbiamo calcolare la derivata prima di *x* rispetto alla variabile *t*:

$$v = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = (6\cdot 10^3\frac{m}{s^3}t^2 + 10\cdot 10^3\frac{m}{s^2}t) \qquad (2)$$

poichè la velocità è la variazione dello spazio nel tempo.

L'accelerazione è la variazione della velocità per unità di tempo e per calcolarla dobbiamo dunque calcolare la derivata prima della velocità rispetto al tempo *t*:

$$a = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = (12\cdot 10^3\frac{m}{s^3}t + 10\cdot 10^3\frac{m}{s^2}) \qquad (3)$$

che com abbiamo visto equivale a derivare due volte la legge oraria rispetto al tempo $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$

c) Per determinare la posizione, la velocità e l'accelerazione a t=2 s e t=3 s è sufficiente sostituire il valore di *t* nelle equaizioni (1), (2) e (3)

per t=2

$$x(t = 2s) = 2\cdot 10^3\frac{m}{s^3}2^3s^3 + 5\cdot 10^3\frac{m}{s^2}2^2s^2 + 5\cdot 10^3 m = 41\cdot 10^3 m$$

$$v(t = 2s) = (6\cdot 10^3\frac{m}{s^3}2^2s^2 + 10\cdot 10^3\frac{m}{s^2}2s) = 44\cdot 10^3 m/s$$

$$a(t = 2s) = (12\cdot 10^3\frac{m}{s^3}2s + 10\cdot 10^3\frac{m}{s^2}) = 34\cdot 10^3\frac{m}{s^2}$$

per t=3

$$x(t = 3s) = 2\cdot 10^3\frac{m}{s^3}3^3s^3 + 5\cdot 10^3\frac{m}{s^2}3^2s^2 + 5\cdot 10^3 m = 1.04\cdot 10^5 m$$

$$v(t = 3s) = (6\cdot 10^3\frac{m}{s^3}3^2s^2 + 10\cdot 10^3\frac{m}{s^2}3s) = 8.4\cdot 10^4 m/s$$

$$a(t = 3s) = (12\cdot 10^3\frac{m}{s^3}3s + 10\cdot 10^3\frac{m}{s^2}) = 4.6\cdot 10^4\frac{m}{s^2}$$

- Esercizio 2 (Determinazione equazioni del moto)

Una persona si trova dentro una stanza e sta guardando una finestra di forma rettangolare di larghezza *w=2m* e altezza *h=1.4 m*. Al tempo *t=0* la persona nella stanza vede apparire una palla dal centro del bordo inferiore della finestra e poi vede sparire la palla dopo un tempo $t_1=1s$ nel punto centrale del lato destro della finistra. Trovare l'istante t in cui la palla raggiunge l'altezza massima (rispetto al bordo inferiore della finestra).

Soluzione es. 2

La prima cosa che dobbiamo fare è scegliere il sistema di riferimento. Consideriamo un sistema di riferimento con l'asse della coordinata x lungo il bordo inferiore della palla e direzione positiva da sinistra verso destra e l'asse della coordinata y lungo la direzione verticale positiva dal basso verso l'alto: l'origine si trova nel punto di mezzo del bordo inferiore della finestra.

Dai dati del problema possiamo scrivere le coordinte della palla all'istante t_1 come:
$x(0) = 0; y(0) = 0; x(t_1) = w/2; y(t_1) = h/2$
e, trascurando gli effetti dell'aria, che: $\vec{a} = -g \cdot \vec{j}$
Possiamo dunque ricavare la velocità integrando le componenti dell'accelerazione che in questo caso ha solo componente lungo l'asse delle *y*:

$$\dot{x}(t) = C_1 \qquad \dot{y}(t) = -g \cdot t + C_2$$

e integrando nuovamente:

$$x(t) = C_1 \cdot t + C_3 \qquad y(t) = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + C_2 \cdot t + C_4$$

Otteniamo quindi 4 costanti di integrazione che possiamo determinare imponendo le condizioni iniziali. Applicando le condizioni a
t=0 otteniamo che: $C_3 = 0$ and $C_4 = 0$ e nota la posizione all'istante t_1 otteniamo:

$$x(t_1) = \frac{w}{2} = C_1 \cdot t_1 \qquad y(t_1) = \frac{h}{2} = -\frac{1}{2} g \cdot t_1^2 + C_2 \cdot t_1$$

da cui possiamo calcolare C_1 e C_2 come segue

$$C_1 = \frac{w}{2 \cdot t_1} = \frac{2m}{2 \cdot 1s} = 1m/s$$

$$C_2 = \frac{h}{2 \cdot t_1} + \frac{1}{2} g \cdot t_1 = \frac{1.4m}{2 \cdot 1s} + (0.5 \cdot 9.8m/s^2 \cdot 1s) = 5.6m/s$$

L'altezza massima è raggiunta dalla palla quando la componente verticale della velocità è nulla:

$$\dot{y}(t) = -g \cdot t + C_2 = 0$$

$$C_2 = g \cdot t \Rightarrow t = \frac{C_2}{g} = \frac{5.6m/s}{9.8m/s^2} = 0.6s$$

- Esercizio 3 (Coordinate Cilindriche)

Un'automobile sta gareggiando su una pista circolare di raggio R=2 km. Il tachimetro mostra un valore costante della velocità v_0 dopo l'istante iniziale $t = 0$. Utilizzando un sistema di riferimento in coordinate cilindriche con origine nel centro della circonferenza rappresentata dalla pista e l'asse delle x passante per il punto di partenza, trovare il modulo dell'accelerazione.

Soluzione es. 3

Possiamo scrivere:

$$r(t) = R \Rightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0;$$

l'angolo ϑ *è legato all'arco* s *dalla relazione* $s = R \cdot \vartheta$ *e considerando la proprietà del modulo della velocità (scritto come il rapporto tra l'intervallo infinitesimo di spazio percorso e l'intervallo infinitesimo di tempo in cui avviene lo spostamento) possiamo scrivere*

$$v_0 = \dot{s} = R \cdot \dot{\vartheta} \Rightarrow \dot{\vartheta} = \frac{v_0}{R} \Rightarrow \vartheta = \int d\vartheta = \int \dot{\vartheta} dt = \frac{v_0}{R} t + C$$

Dalla condizione iniziale otteniamo $C = 0$.

Inoltre abbiamo che $v_0 = const$ *quindi anche* $\dot{\vartheta} = const \Rightarrow \ddot{\vartheta} = 0$

Ne segue che se consideriamo tutti i termini dell'espressione dell'accelerazione in coordinate cilindriche riportata nella 2.13 rimane un solo termine non nullo e otteniamo quanto segue:

$$\vec{a} = -R \cdot \dot{\vartheta}^2 \vec{\lambda} \Rightarrow |\vec{a}| = R \cdot \dot{\vartheta}^2 \Rightarrow |\vec{a}(t_0)| = \frac{v_0^2}{R}$$

<u>*Nota*</u>*: anche se il modulo della velocità è costante, l'accelerazione non è nulla.*