esercizi di AlgLinGeo 2017/18

**6 - APPLICAZIONI LINEARI**

1. Data l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ associata alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

determinare una base di $Ker f$ e una base di $Im f$.

2. Sia $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare individuata dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

stabilire per quali valori del parametro reale $h$ il vettore $\mathbf{v} = (1, h+2, h)$ appartiene a $Ker f$ e per quali valori di $h$ lo stesso vettore appartiene a $Im f$.

3. Data l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ definita da $f(x, y, z) = (x - 3y + 2z, kx - 2y + kz, 3x - y + 4z)$
   (a) calcolare $f(1, 0, 2)$;
   (b) trovare i valori del parametro reale $k$ per cui $Ker f$ ha dimensione 1;
   (c) trovare i valori del parametro reale $k$ per cui $f$ è un isomorfismo;
   (d) posto $k = 1$ determinare $f^{-1}(0, 0, 6)$.

4. Sia dato l'endomorfismo $f$ di $\mathbf{R}^3$ definito dalle condizioni:

$$f(1, 0, 1) = (1, 1, 1), f(1, 1, 0) = (0, 0, 1), f(0, 1, 0) = (3, 3, 1)$$

Trovare una base di $Ker f$ e dire per quali valori del parametro reale $a$ si ha $f^{-1}(a, 1, 2)$ non vuoto.

5. Dato l'endomorfismo $f$ di $\mathbf{R}^3$ associato alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   (a) trovare (se esistono) le controimmagini di (2,0,-3) ;
   (b) dire se $f$ è un isomorfismo e in tal caso trovare la matrice associata all'applicazione inversa $f^{-1}$.

6. Provare che, nell'insieme degli endomorfismi di $\mathbf{R}^2$
   (a) non esiste alcun elemento $f$ per cui $f(1, 2) = (2, 3), f(2, 3) = (3, 4), f(3, 4) = (1, 1)$;
   (b) esiste uno e un solo elemento $f$ per cui $f(1, 2) = (2, 3), f(2, 3) = (3, 4)$.

7. Sia dato l'endomorfismo $f$ di $\mathbf{R}^3$ dalla matrice:

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 & 4 \\ -3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Verificare che il vettore $(1, -3, +3)$ appartiene al nucleo, senza determinare tutti i vettori del nucleo.

8. Sia $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ una applicazione lineare, $A$ la matrice associata relativa alle basi canoniche. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

A. se $rg(A) = 2$, $f$ è iniettiva
B. $f$ non è mai iniettiva
C. $dim\, Kerf < dim\, Imf$
D. $rg(A) \geq 1$

9. Sia $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ una applicazione lineare tale che $Kerf = Imf$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

A. $f$ è un isomorfismo
B. $f$ è l'applicazione nulla
C. $f$ è individuata in modo unico
D. $n$ è pari.

10. Sia $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ l' applicazione lineare definita da: $f(\mathbf{e_1}) = \mathbf{e_2}, f(\mathbf{e_2}) = \mathbf{e_3}, f(\mathbf{e_3}) = \mathbf{e_2} + \mathbf{e_3}$, dove $(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3})$ è la base canonica, allora

A. il vettore $(1, 1, 1)$ ha una sola controimmagine
B. $f$ è invertibile
C. $Imf = \mathcal{L}(\mathbf{e_2}, \mathbf{e_3})$
D. $\mathbf{e_1} \in Kerf$

11. Sia $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ l'applicazione lineare tale che
$f(\mathbf{e}_1) = (0, 0),\ f(\mathbf{e}_2) = (2, 1),\ f(\mathbf{e}_3) = (0, 0)$,
dove $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ è la base canonica di $\mathbf{R}^3$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

A. $f(x, y, z) = (z, 2z)$
B. $f(x, y, z) = (2y, y)$
C. $f(x, y, z) = (x, 2z)$
D. $f(x, y, z) = (y, 2y)$.

12. Si consideri l'applicazione lineare $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita da

$$f(x, y, z) = (y - z, z - x, x - y).$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

A. $f$ è iniettiva.
B. L'immagine $Im(f)$ ha dimensione 2.
C. $f$ è suriettiva.
D. Il nucleo $Ker(f)$ ha dimensione 2.

13. È data l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ definita da

$$f(x, y, z) = (x + 2y + z, x + 2y + z, y - 3z, -z)$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

A. $f$ è suriettiva;
B. $(1, 0, 0)$ appartiene a $Ker(f)$;
C. non esistono vettori di $\mathbf{R}^3$ che hanno per immagine $(1, 0, 0, 0)$;
D. $dim(Im(f)) = 2$.

14. Sia $M \in \mathbf{R}^{4,6}$ la matrice di un'applicazione lineare $f$. Si supponga $M$ di rango 4.
Quale delle seguenti affermazioni è vera?

A. Il nucleo $Ker(f)$ ha dimensione 1;
B. $f$ è suriettiva;
C. l'immagine $Im(f)$ ha dimensione 2;
D. $f$ è iniettiva.

15. Sia $\mathbf{R}_3[X]$ lo spazio dei polinomi di grado $\leq 3$ nell'indeterminata $X$ a coefficienti reali. Considerata la base $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$, costruire la matrice che rappresenta, rispetto a tale base, l'applicazione lineare derivata seconda rispetto a $X$. Della stessa applicazione lineare scrivere la matrice rispetto alla base $\mathcal{C} = (\frac{1}{6}X^3, \frac{1}{2}X^2, X, 1)$.

16. Quale delle seguenti funzioni $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ non è un'applicazione lineare?

(a) $f(x, y) = (y, x)$ per ogni $(x, y) \in \mathbf{R}^2$;
(b) $f(x, y) = (0, x)$ per ogni $(x, y) \in \mathbf{R}^2$;
(c) $f(x, y) = (x, x)$ per ogni $(x, y) \in \mathbf{R}^2$;
(d) $f(x, y) = (0, 1)$ per ogni $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

17. Costruire una matrice che rappresenta l'applicazione lineare che:

(a) ruota il piano $(xy)$ di $90^0$;
(b) ruota il piano $z = 0$ di $90^0$ lasciando fisso l'asse $z$;
(c) proietta ogni vettore dello spazio sul piano $z = 0$.

18. E' data l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tale che $f(1, 1) = (2, 2), f(2, 0) = (0, 0)$. Calcolare $f(x, y)$ quando:

(a) $(x, y) = (2, 2)$;
(b) $(x, y) = (3, 1)$;
(c) $(x, y) = (-1, 1)$;
(d) $(x, y) = (a, b)$.

**6 - SOLUZIONI**

1. (b) $Kerf$ ha dimensione 1 se e solo se $Imf$ ha dimensione 2, il che equivale a imporre che il rango della matrice associata ad $f$ sia 2; questa condizione è verificata se e solo se $k = -2$. (c) I valori del parametro reale $k$ per cui $f$ è un isomorfismo sono quelli per i quali la matrice associata ad $f$ ha rango 3, si possono per esempio individuare imponendo che il determinante della matrice sia non nullo; si ottengono tutti i valori di $k$ diversi da $-2$. (d) posto $k = 1$ , $f^{-1}(0,0,6) = (1,1,1)$.

2. Una base di $Kerf$ è per esempio $((1,1,-1,0),(-1,0,1/3,1))$ e si ottiene dalla espressione del generico elemento del nucleo: $(y-t, y, -y+t/3, t)$; una base di $Imf$ è per esempio $((1,1),(3,0))$ e si ottiene riducendo la matrice per colonne.

3. Il vettore $\mathbf{v} = (1, h+2, h)$ appartiene a $Kerf$ se e solo se ha per immagine il vettore nullo, cioè se e solo se $h = -1$; lo stesso vettore appartiene a $Imf$ se e solo se è linearmente dipendente dalle colonne della matrice, cioè se e solo se $h = -3/2$.

4. $\begin{cases} f(\mathbf{e_1}) + f(\mathbf{e_3}) = (1,1,1) \\ f(\mathbf{e_1}) + f(\mathbf{e_2}) = (0,0,1) \\ f(\mathbf{e_2}) = (3,3,1) \end{cases}$ La matrice di $f$ rispetto alla base canonica è quindi $\begin{pmatrix} -3 & 3 & 4 \\ -3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$Kerf = \{(x, -3x, +3x)\}$ al variare di $x$ in $\mathbf{R}$.

Perchè $f^{-1}(a,1,0)$ sia non vuoto, il sistema lineare $\begin{cases} -3x + 3y + 4 = a \\ -3x + 3y + 4 = 1 \\ y + z = 2 \end{cases}$ deve avere soluzioni; ciò capita se e solo se $a = 1$.

5. (a) Si deve risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 2 \\ x + z = 0 \\ -x + 2z = -3 \end{cases}$$

che ha come soluzione $(1,1,-1)$. Si può usare la regola di Cramer perchè si tratta di un sistema quadrato di rango massimo.

(b) La matrice associata ad $f$ ha rango massimo, quindi $f$ è un isomorfismo. La matrice associata a $f^{-1}$ è:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2/3 & -1/3 \\ 1 & -8/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

8. B. Infatti $Kerf$ non può essere il solo vettore nullo di $\mathbf{R}^3$. Lo si ricava dalla relazione $dim\ Kerf + dim\ Imf = 3$, osservando che $dim\ Imf \leq 2$ e quindi $dim\ Kerf \geq 1$.

9. D. Dalla relazione $dim\ Kerf + dim\ Imf = n$ segue infatti: $2\ dim\ Kerf = n$ e quindi $n$ è pari.

10. C. Poichè $Imf$ è generata da $f(\mathbf{e_1}), f(\mathbf{e_2}), f(\mathbf{e_3})$, risulta $Imf = \mathcal{L}(\mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}, \mathbf{e_2} + \mathbf{e_3}) = \mathcal{L}(\mathbf{e_2}, \mathbf{e_3})$.

11. B

12. B

13. C

14. B