Esercitazione del 4/5/2018

Esercizio 1

Un manubrio è costituito da due masse puntiformi m_1 e m_2 unite da una barra di lunghezza $\ell = \ell_1 + \ell_2$ di massa trascurabile. Inizialmente si muove traslando rigidamente con velocità v_0, urta quindi un perno P posto a una distanza ℓ_1 dalla massa superiore e vi rimane attaccato, libero però di ruotare. Calcolare la velocità finale raggiunta in questo caso trascurando gli effetti di g (moto orizzontale) e l'energia dissipata durante l'urto.

Soluzione

Inizialmente il sistema può essere considerato isolato cosicchè si conserva sia la quantità di moto che il momento angolare (oltre alla energia meccanica). Dopo l'urto il sistema entra in rotazione attorno al punto P. Il momento delle forze centripete dirette verso il punto P risulta nullo e quindi sarà ancora conservato il momento angolare totale del sistema. Imponendo la conservazione di quest'ultim si ottiene

$$\begin{aligned} L_i &= -m_1\,\ell_1\,v_0 + m_2\,\ell_2\,v_0 = (-m_1\,\ell_1 + m_2\,\ell_2)\,v_0 \ , \\ L_f &= m_1\,\ell_1\,v_{t1} + m_2\,\ell_2\,v_{t2} = (m_1\,\ell_1^2 + m_2\,\ell^2)\,\omega = I\,\omega \ , \end{aligned} \tag{1}$$

dove $v_{t1} = \ell_1\,\omega$ ed $v_{t2} = \ell_2\,\omega$ sono rispettivamente le velocità tangenziali dei due corpi le quali differiscono l'una dall'altra. Diversamente, la loro velocità angolare ω è uguale poichè le due massa sono vincolate ad una sbarra ideale inestensibile. La quantità $I = m_1\,\ell_1^2 + m_2\,\ell^2$ coincide con il momento di inerzia assiale del sistema rispetto all'asse di rotazione passante per il punto P.
Dalla conservazione del momento angolare totale si ottiene

$$\omega = \frac{m_2\,\ell_2 - m_1\,\ell_1}{m_1\,\ell_1^2 + m_2\,\ell_2^2}\,v_0 \ .$$

In fine, l'energia dissipata durante l'uto è data da

$$\Delta E = \frac{1}{2}\,(m_1\,\ell_1^2 + m_2\,\ell_2^2)\,\omega^2 - \frac{1}{2}\,(m_1 + m_2)\,v_0^2 = \frac{1}{2}\,I\,\omega^2 - \frac{1}{2}\,M\,v_0^2 \ .$$

Esercizio 2

Un carrello di massa $M = 250\,kg$ può muoversi senza attrito su un piano orizzontale. Una persona di massa $m = 75\,kg$ si trova sul carrello; inizialmente il sistema è in quiete. Ad un certo istante la persona si mette a camminare sul carrello mantenendo un'accelerazione $a_R = 0.8\,m/s^2$ costante rispetto al carrello. Si determini l'accelerazione del carrello e della persona in un sistema di riferimento inerziale.

Soluzione

Il sistema carrello + persona è isolatao. Quindi si conserva la quantità di moto del sistema. Essendo questo inizialmente fermo il centro di massa resta fisso nel tempo. Scelto un SRI con l'origine nel centro di massa del sistema carrello + persona si ha

$$\vec{r}_{\rm CM} = \frac{\vec{r}_c\,M + \vec{r}_p\,m}{M+m} \equiv 0$$

che derivata due volte nel tempo ci fornisce una relazione tra le accelerazioni del carrello a_c e della persona a_p rispetto al SRI

$$\vec{a}_c\,M + \vec{a}_p\,m = 0$$

Successivamente fissiamo un SRNI solidale con la persona. Tale sistema si muove rispetto al precedente con accelerazione di trascinamento $a_t \equiv a_R$. Dalla relazione

$$\vec{a}_p + \vec{a}_t = \vec{a}_c$$

si ottiene

$$(\vec{a}_p + \vec{a}_t)\,M + \vec{a}_p\,m = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{a}_p = -\vec{a}_t\,\frac{M}{M+m} \quad \text{e} \quad \vec{a}_c = \vec{a}_t\,\frac{m}{M+m}$$

Esercizio 3

Un carrello di massa $M = 250\,kg$ può muoversi senza attrito su un piano orizzontale. Una persona di massa $m = 75\,kg$ si trova sul carrello; inizialmente il sistema è in quiete. Ad un certo istante la persona si mette a camminare sul carrello mantenendo un'accelerazione $a_R = 0.8\,m/s^2$ costante rispetto al carrello. Si determini l'accelerazione del carrello e della persona in un sistema di riferimento inerziale.

Soluzione

Introdotto un sistema di riferimento con origine in O e asse x orizzontale imponiamo la conservazione dell'energia meccanica tra la configurazione A con la massa m_1 ferma e la molla compressa di $\Delta\ell_0$ e la configurazione B$^-$ che fa riferimento ad un istante precedente l'urto con la molla compressa di $\Delta\ell_1 = d - L = 5\,cm$.

$$\frac{1}{2}\,k\,(\Delta\ell_0)^2 = \frac{1}{2}\,m_1\,v_1^2 + \frac{1}{2}\,k\,(\Delta\ell_1)^2 \qquad \Rightarrow \qquad v_1 = \sqrt{\frac{\kappa}{m_1}\,[(\Delta\ell_0)^2 - (\Delta\ell_1)^2]} = 0.89\,m/s$$

Successivamente, durante l'urto elastico (configurazione B$^-$ $\to$B$^+$) possiamo imporre la conservazione dell'energia cinetica e della quantità di moto

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\,m_1\,v_1^2 = \frac{1}{2}\,m_1\,v_1'^2 + \frac{1}{2}\,m_2\,v_2'^2 \\
&m_1\,v_1 = m_1\,v_1' + m_2\,v_2'
\end{aligned}$$

Le soluzioni del sistema dà

$$\begin{aligned}
v_1' &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\,v_1 \\
v_2' &= \frac{2\,m_1}{m_1 + m_2}\,v_1
\end{aligned}$$

Pertanto durante l'urto i due corpi si scambiano le rispettive velocità, con $v_1' = 0$ e $v_2' = v_1$.
Dopo l'urto, la molla avrà una energia meccanica residuapari a

$$E_{B^+} = \frac{1}{2}\,k\,(\Delta\ell_1)^2 \tag{2}$$

avendo perso completamente la sua energia cinetica durante l'urto. Pertanto le successive oscillazioni armoniche avranno ampiezza $\Delta\ell_1$.