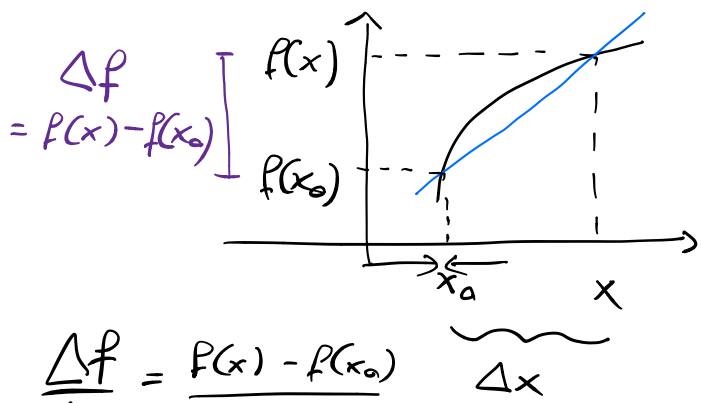
16 - Funzioni derivabili

rapporto incrementale di f in x_0:

$$\boxed{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad \text{per } x \neq x_0}$$

significato geometrico del rapporto incrementale:



$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ rappresenta il coefficiente angolare della retta secante il grafico di f nei punti $(x_0, f(x_0))$ e $(x, f(x))$

se esiste finito

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

questo valore si dice **derivata di f in x_0** e si denota con

$$f'(x_0), \quad \dot{f}(x_0), \quad \frac{df}{dx}, \quad Df(x_0)$$

significato geometrico della derivata:

$f'(x_0)$ rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$

eq. retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$:

$$\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$$

NOTA: scriviamo la def di derivata usando i simboli di LANDAU:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$$

$$f(x) - f(x_0) \asymp x - x_0 \quad \text{per } x \to x_0$$

$$f(x) - f(x_0) \sim f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{per } x \to x_0$$

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \underbrace{o\left(f'(x_0)(x - x_0)\right)}_{= o(x - x_0)}$$

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \quad \text{per } x \to x_0$$

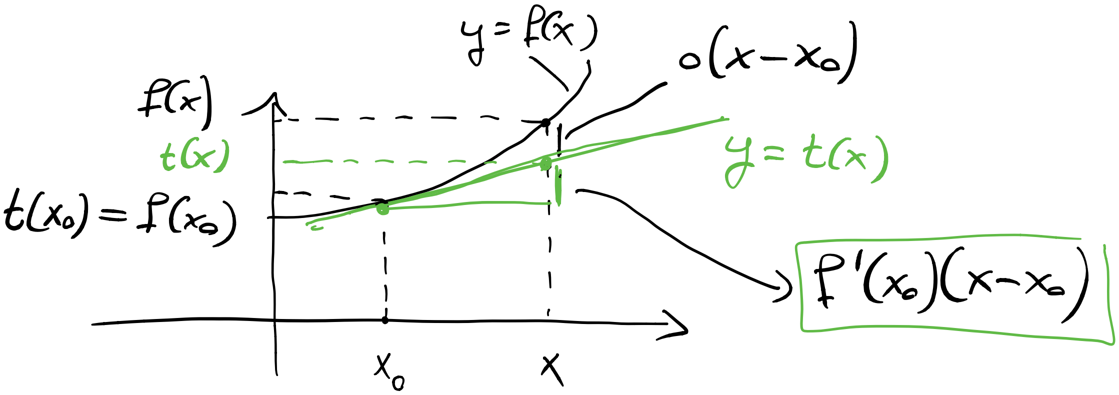
$$\boxed{f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{= t(x)} + o(x - x_0)} \quad \text{per } x \to x_0$$

PRIMA FORMULA DELL' INCREMENTO FINITO

interpretazione della formula:

in un intorno di x_0, si può approssimare il grafico di f

con il grafico della tangente $t(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$
commettendo un errore che è $o(x-x_0)$:



riscrivo la prima formula dell'incremento finito:

$$\underbrace{f(x)-f(x_0)}_{\Delta f}=\underbrace{f'(x_0)(x-x_0)}+o(x-x_0)$$

df_{x_0} = DIFFERENZIALE di f in x_0

$$t(x)-\underbrace{t(x_0)}_{f(x_0)}=f'(x_0)(x-x_0)$$

$$\underbrace{f(x)-f(x_0)}_{\Delta f}=\underbrace{t(x)-t(x_0)}_{=f'(x_0)(x-x_0)}+\underbrace{o(x-x_0)}_{\text{errore}}$$

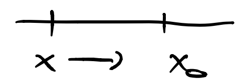
e

derivata destra di f in x_0

$$f'_{+}(x_0)=\lim_{x\to x_0^{+}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

derivata sinistra di f in x_0

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$



NOTA: f è derivabile in x_0 se esistono finiti e sono uguali il limite destro e sinistro del rapporto incrementale

se $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) \in \mathbb{R}$

allora f è derivabile in x_0 e $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$

es: $f(x) = x^2$ verifichiamo che $f'(x) = 2x$

usiamo la definizione di derivata in un punto:

scriviamo il rapporto incrementale

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

def. $h = x - x_0$

$$f(x+h) = (x+h)^2$$

$$\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} =$$

$= 2x + h$

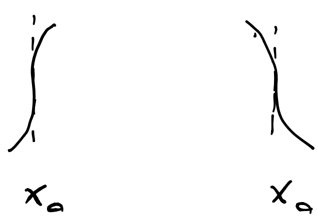
$$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} (2x+h) = 2x$$

$\Rightarrow$ la derivata di x^2 è $2x$

Punti di non derivabilità

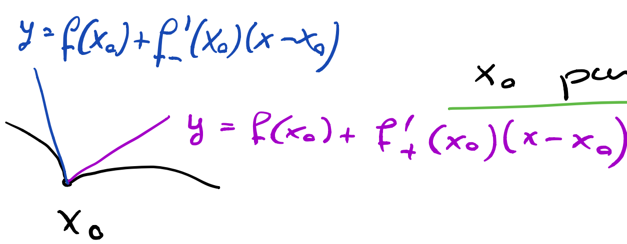
se f è definita in un intorno di $x_0 \in \mathbb{R}$
e f continua in x_0

- se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$ $(-\infty)$



x_0 è punto a tangente verticale

- se $f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$ (ma esistono entrambi finiti)



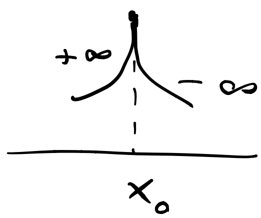
x_0 punto angoloso

- se $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$

  e $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty$

  o viceversa

x_0 punto di cuspide



Nota: la classificazione dei punti di non derivabilità non è completa

negli altri casi in cui f è continua in x_0 ma non esiste finito $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

x_0 si dice punto di non derivabilità per f.

esempi

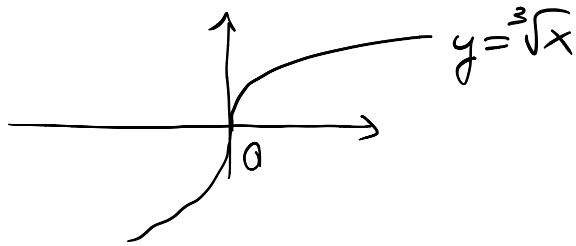
1) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ continua su $\mathbb{R}$

$\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ rapporto incrementale in $x_0=0$

$$\frac{\sqrt[3]{x}-0}{x-0} = \frac{\sqrt[3]{x}}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{2/3}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$$

$\Rightarrow$ 0 è punto di non derivabilità di f
punto a tangente verticale



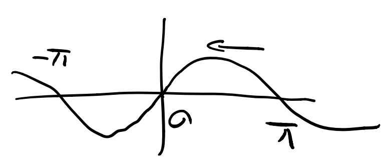
2) $f(x) = |\sin(x)|$ continua su tutto $\mathbb{R}$

studiamo la derivabilità di f in $x=0$:

rapporto incrementale: $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} =$

$$= \frac{|\sin(x)| - |\sin(0)|}{x-0} = \frac{|\sin(x)|}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{|\sin(x)|}{x} :$$



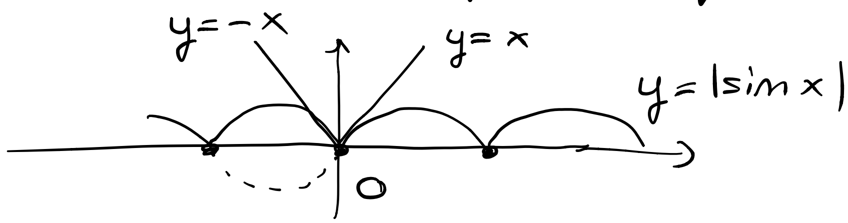
$$|\sin(x)| = \begin{cases} \sin(x) & \text{se } 0 \le x < \pi \\ -\sin(x) & \text{se } -\pi < x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|\sin(x)|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1 = f'_+(0)$$

$$\neq$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|\sin(x)|}{x} = \lim_{x\to 0^-} -\frac{\sin(x)}{x} = -1 = f'_-(0)$$

$\Rightarrow$ $f'_+(0)$ e $f'_-(0)$ esistono finite ma sono diverse $\Rightarrow$ 0 è punto angoloso



3) $$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

f è continua anche in $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} -x = 0 = f(0) = \sqrt{0}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}$$

studiamo la derivabilità di f in $x_0 = 0$:

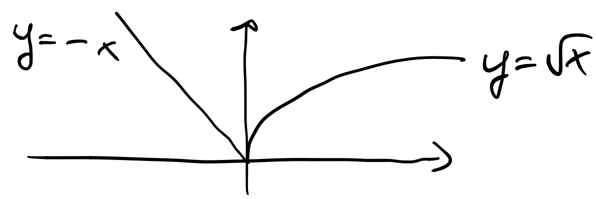
$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$ per scrivere esplicitamente f

dobbiamo studiare separatamente i limiti da destra e da sinistra:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = +\infty$$

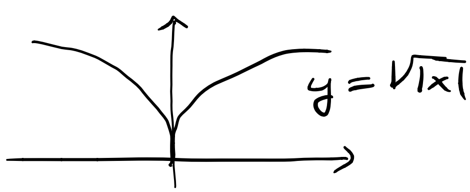
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} -\frac{x}{x} = -1 = f'_-(0)$$

$\Rightarrow$ $x_0 = 0$ è punto di non derivabilità per f



4) $f(x) = \sqrt{|x|}\,(e^x - 1)$

stabilire se f è derivabile in 0:



ha un punto di cuspide in 0

questa osservazione però non permette di concludere sulla derivabilità di f in $x_0 = 0$

studiamo il rapporto incrementale di f in 0:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt{|x|}\,(e^x - 1) - 0\,(e^0 - 1)}{x - 0}$$

$$= \frac{\sqrt{|x|}\,(e^x-1)}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\sqrt{|x|}}_{\substack{x\to 0\\ \to 0}} \underbrace{\left(\frac{e^x-1}{x}\right)}_{\xrightarrow{x\to 0} 1} = 0$$

$\Rightarrow$ f è derivabile in $x=0$ e $f'(0)=0$

5) $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ è definita in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \underbrace{x^2}_{\to 0} \underbrace{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{LIMITATA}} = 0$$

definiamo il prolungamento per continuità:

$$\tilde{f}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x\neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$\tilde{f}$ è continua in tutto $\mathbb{R}$

studiamo la derivabilità di $\tilde{f}$ in $x=0$:

$$\frac{\tilde{f}(x)-\tilde{f}(0)}{x-0} \underset{\substack{\uparrow\\ x\neq 0}}{=} \frac{f(x)-0}{x-0} = \frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \underset{\downarrow \atop 0}{x} \underbrace{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{LIMITATA}} = 0$$

$\tilde{f}$ è derivabile in $x=0$ e $\tilde{f}'(0)=0$

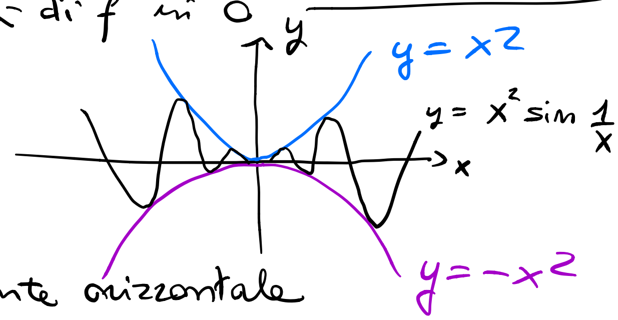
$$f'(x) = \left(x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} \Big(\underbrace{2x\sin\frac{1}{x}}_{\to 0} - \underbrace{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}_{\nexists}\Big) \quad \nexists$$

il fatto che il limite di $f'(x)$ per $x\to 0$ non esista, non mi permette di concludere sulla derivabilità di f in 0

$$-x^2 \leq x^2\sin\frac{1}{x} \leq x^2$$



il grafico di $f(x)$ si trova tra le parabole $-x^2$ e x^2 che hanno entrambe tangente orizzontale in $x=0 \Rightarrow$ anche f è forzata ad avere tangente orizzontale in $x=0$

6) $$f(x) = \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x\neq 0 \\ 0 & \text{se } x=0 \end{cases}$$

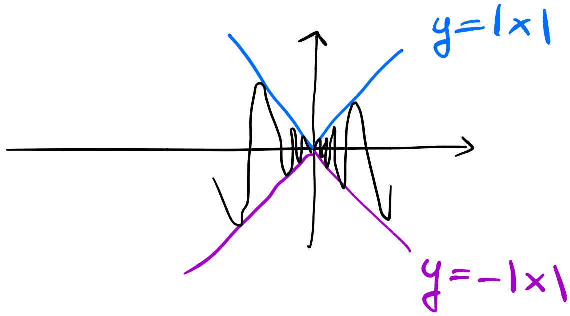
f è continua in 0. Studiamo la derivabilità in $x=0$:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-0}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\nexists$$

f non è derivabile in 0



$$-|x| \leq x\sin\frac{1}{x} \leq |x|$$

———— o ————

Teorema: relazione tra CONTINUITÀ e DERIVABILITÀ:

se f è derivabile in x_0

$\Downarrow$

allora f è continua in x_0

Dim: TESI: $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

sappiamo per ipotesi che f è derivabile in x_0

cioè $\exists$ finito $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \underbrace{f'(x_0)}_{\in\mathbb{R}}$

possiamo riscrivere la tesi:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) \overset{?}{=} 0$$

riscrivo facendo comparire il rapporto incrementale cioè moltiplico e divido per $(x - x_0)$:

$$\lim_{x \to x_0} \underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{f'(x_0)} \underbrace{(x-x_0)}_{0} = 0$$

per ipotesi

abbiamo ottenuto $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} f(x_0)$

cioè f continua in x_0.

$\square$

NOTA: il teorema dice

$$\boxed{\begin{array}{c} f \text{ derivabile} \\ \Downarrow \\ f \text{ continua} \end{array}}$$

questo equivale a:

$$\boxed{\begin{array}{c} f \text{ non è continua in } x_0 \\ \Downarrow \\ f \text{ non è derivabile in } x_0 \end{array}}$$

conclusione: i punti di DERIVABILITÀ di f si studiano tra i punti di continuità di f

es:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \geq 0 \\ x-1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

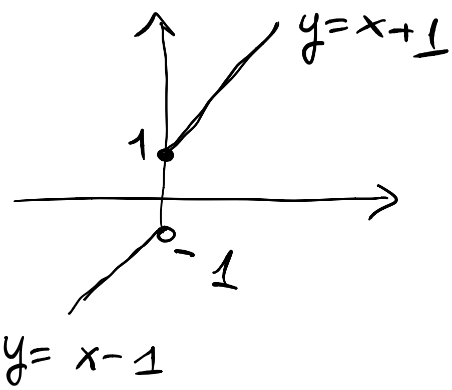
derivabilità in $x = 0$?

$$\left.\begin{array}{l} (x+1)' = 1 \\ (x-1)' = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow f'_-(0) = f'_+(0) = 1$$

$\Rightarrow$ f è derivabile in 0

FALSO

perché f NON è CONTINUA in 0



Possiamo calcolare le derivate delle funzioni elementari:

esercizio : derivata di $\sin(x)$:

$$f(x) = \sin(x)$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$$

$$= \frac{\sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h) - \sin(x)}{h}$$

formula di addizione

$$= \left(\sin(x) \underbrace{\frac{\cos(h)-1}{h}}_{\xrightarrow[h\to 0]{} 0} + \cos(x) \underbrace{\frac{\sin(h)}{h}}_{\xrightarrow[h\to 0]{} 1} \right) \longrightarrow \cos(x)$$

$$\frac{\cos(h)-1}{h^2} \xrightarrow[h \to 0]{} -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \left(\sin(x)\right)' = \cos(x)$$

<u>es</u>: $f(x) = e^x$. $f'(x) = ?$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{e^{x+h} - e^x}{h} =$$

$$= e^x \underbrace{\frac{e^h - 1}{h}}_{\xrightarrow[h\to 0]{} 1} \longrightarrow e^x \cdot 1$$

$$\Rightarrow D(e^x) = e^x$$

Utilizzando la definizione, si ricavano le formule delle derivate di funzioni elementari:

- $(x^n)' = n x^{n-1}$ con $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$
- $(\sin(x))' = \cos(x)$
- $(\cos(x))' = -\sin(x)$
- $(e^x)' = e^x$
- $(a^x)' = a^x \log a$ $\quad a > 0,\ a \neq 1$