OPERAZIONI SUI SOTTOSPAZI E SPAZI VETTORIALI ASTRATTI

Intersezione, unione e somma di sottospazi

Supponiamo che U e W siano due sottospazi di $\mathbf{R^n}$.

Proposizione. L'intersezione $U \cap W$ è un sottospazio di V.

Dimostrazione. Se $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in U \cap W$, $\mathbf{u} + \mathbf{w}$ appartiene sia a U che a W, quindi appartiene a $U \cap W$; inoltre per ogni $k \in \mathbf{K}$, se $\mathbf{w} \in U \cap W$, $k\mathbf{w}$ appartiene sia a U che a W, quindi appartiene a $U \cap W$.

Ne segue che l'intersezione di un numero qualunque di sottospazi è un sottospazio e, poichè un sottospazio contiene sempre almeno il vettore $\mathbf{0}$, tale intersezione non è mai vuota.

L'unione $U \cup W$ in generale non è un sottospazio; lo è solo nel caso in cui $U \subseteq W$ oppure $W \subseteq U$ (e in questo caso $U \cup W = U$ oppure $U \cup W = W$).

Esempio. Siano U e W due distinte rette vettoriali in $\mathbf{R}^3$: è facile verificare che $U \cup W$ non è chiuso rispetto alla somma di vettori; d'altra parte le due rette vettoriali individuano un piano vettoriale, costituito da tutti e soli i vettori $\mathbf{u} + \mathbf{w}$ tali che $\mathbf{u} \in U$ e $\mathbf{w} \in W$.

Questa situazione ha carattere generale:

Definizione. Sia V uno spazio vettoriale e siano U e W due suoi sottospazi. Si dice **somma** dei sottospazi U e W l'insieme $U + W$ costituito da tutti i vettori del tipo $\mathbf{u} + \mathbf{w}$, al variare di $\mathbf{u} \in U$ e $\mathbf{w} \in W$.

Proposizione. $U + W$ è un sottospazio vettoriale di V, contenuto in ogni sottospazio che contiene $U \cup W$.

Dimostrazione. Due qualsiasi elementi di $U + W$ sono del tipo $\mathbf{u}_1 + \mathbf{w}_1$, $\mathbf{u}_2 + \mathbf{w}_2$ con $\mathbf{u}_i \in U$ e $\mathbf{w}_i \in W$. Si ha:

$$(\mathbf{u}_1 + \mathbf{w}_1) + (\mathbf{u}_2 + \mathbf{w}_2) = (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) + (\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) \in U + W$$

e per ogni $k \in \mathbf{K}$

$$k(\mathbf{u}_1 + \mathbf{w}_1) = (k\mathbf{u}_1) + (k\mathbf{w}_1)$$

Inoltre se un sottospazio T contiene $U \cup W$, deve contenere tutti i vettori $\mathbf{u} \in U$ e tutti i vettori $\mathbf{w} \in W$ e perciò deve contenere tutti i vettori $\mathbf{u} + \mathbf{w} \in U + W$, ossia contiene $U + W$.

Ricordiamo che ogni sottospazio U di uno spazio vettoriale V è tale che $dim(U) \leq dim(V)$; infatti una base di U può sempre essere estesa a una base di V; per lo stesso motivo si ha $dim(U) = dim(V)$ se e solo se $U = V$.

Esempio. In $\mathbf{R}^3$ è dato il sottospazio vettoriale $W = \{(x_1, x_2, x_3) | x_2 + x_3 = 0\}$, vogliamo determinare una base di $\mathbf{R}^3$ che contenga una base di W. Cominciamo col trovare una base di W: la soluzione generale dell'equazione di W è del tipo $(s, t, -t)$, al variare dei parametri reali s, t, quindi una base di W è per esempio $((1, 0, 0), (0, 1, -1))$. Sicuramente l'insieme di vettori $(1, 0, 0), (0, 1, -1), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ è un insieme di generatori di $\mathbf{R}^3$, perchè ottenuto aggiungendo ai vettori della base di W un insieme di generatori di $\mathbf{R}^3$. Costruiamo ora la matrice che ha ordinatamente per righe tutti questi vettori e riduciamola a scala, le righe non nulle della matrice che si ottiene dopo la riduzione sono $(1, 0, 0), (0, 1, -1), (0, 0, 1)$ e sono una base di $\mathbf{R}^3$ che contiene la base $((1, 0, 0), (0, 1, -1))$.

Teorema. (Relazione di Grassmann) Dati due sottospazi U e W di uno spazio vettoriale V di dimensione finita, si ha

$$dim(U) + dim(W) = dim(U + W) + dim(U \cap W)$$

Tralasciamo la dimostrazione e vediamo su un esempio come si può applicare questo risultato:

Esempio. In $\mathbf{R}^5$ sono dati i sottospazi $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)|2x_1 - x_2 - x_3 = x_4 - 3x_5 = 0\}$ e $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)|x_3 + x_4 = 0\}$, determiniamo la dimensione e una base di $U + W$.

Intanto è facile vedere che $dim(U) = 3$ e $dim(W) = 4$. Cominciamo col trovare la dimensione di $U \cap W$: basta considerare il sistema lineare omogeneo di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si ottiene $dim(U \cap W) = 5 - rg(A) = 2$; quindi, per la relazione di Grassmann, $dim(U + W) = 5$.

Per costruire una base di $U + W$, cerchiamo una base di $(U \cap W)$ e completiamola in modo da ottenere sia una base di U che una base di W. La soluzione generale del sistema omogeneo di matrice A è del tipo $(\frac{1}{2}s - \frac{3}{2}t, s, -3t, 3t, t)$, quindi una base di $(U \cap W)$ è per esempio $(\mathbf{w}_1 = (\frac{1}{2}, 1, 0, 0, 0), \mathbf{w}_2 = (-\frac{3}{2}, 0, -3, 3, 1))$; completiamo questa base in modo da ottenere una base $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$ di U, scegliendo per esempio $\mathbf{w}_3 = (0, 0, 0, 3, 1)$; una base $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_4, \mathbf{w}_5)$ di W si ottiene scegliendo per esempio $\mathbf{w}_4 = (0, 0, -1, 1, 0)$ e $\mathbf{w}_5 = (0, 0, 0, 0, 1)$; in conclusione $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4, \mathbf{w}_5)$ è una base di $U + W$.

Definizione. La somma $U + W$ si dice **somma diretta** (e si indica con $U \oplus W$) quando $U \cap W = \mathbf{0}$.

Esempio. In $\mathbf{R}^3$, sia U il piano $z = 0$ e W l'asse delle z. Allora risulta $\mathbf{R}^3 = U \oplus W$.

Proposizione. La somma $U + W$ è diretta se e solo se ogni vettore $\mathbf{v} \in U + W$ si scrive in modo unico come $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ con $\mathbf{u} \in U$ e $\mathbf{w} \in W$.

Dimostrazione. Supponiamo $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w} = \mathbf{u}' + \mathbf{w}'$; allora si ha sottraendo : $\mathbf{0} = (\mathbf{u} - \mathbf{u}') + (\mathbf{w} - \mathbf{w}')$, da cui $(\mathbf{u} - \mathbf{u}') = -(\mathbf{w} - \mathbf{w}')$ che è un vettore appartenente a $U \cap W$; ma $U \cap W = \mathbf{0}$, quindi la tesi. Viceversa, se ogni vettore $\mathbf{v} \in U + W$ si scrive in modo unico come $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ con $\mathbf{u} \in U$ e $\mathbf{w} \in W$, allora $U \cap W = \mathbf{0}$.

Corollario. Una base di $U \oplus W$ si ottiene facendo l'unione di una base di U e di una base di W.

Esempio. Nell'esempio precedente, se U è il piano $z = 0$ e W è l'asse delle z, una base di $\mathbf{R}^3 = U \oplus W$ è per esempio $(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \cup (\mathbf{k}) = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$.

Definizione di spazio vettoriale astratto

La struttura di spazio vettoriale studiata su $\mathbf{R}^n$ si può generalizzare: ogni sottospazio di $\mathbf{R}^n$ (compreso $\mathbf{R}^n$ stesso) è un esempio di spazio vettoriale, ma ce ne sono molti altri. Le motivazioni che stanno alla base di questa generalizzazione si possono cosi' riassumere:

- mettere in evidenza gli aspetti della teoria che non dipendono dalla scelta di una base specifica (nello studio di $\mathbf{R}^n$ si utilizza la base canonica, ma per la descrizione dei suoi sottospazi si usano altre basi; è importante capire come si può cambiare base);
- poter usare come scalari numeri diversi dai numeri reali: $\mathbf{R}$ è un esempio di campo numerico, altri esempi sono i numeri razionali $\mathbf{Q}$, i numeri complessi $\mathbf{C}$, il campo finito $\mathbf{Z}_2$ (delle classi di resto degli interi relativi modulo 2), ... ;
- estendere la teoria a spazi di dimensione infinita (in questo corso ci limitiamo a considerare spazi vettoriali di dimensione finita, ma nell' Analisi Matematica i più importanti esempi di spazi vettoriali non hanno dimensione finita).

Per definire uno spazio vettoriale in generale, bisogna assegnare un campo $\mathbf{K}$ di scalari; la cosa importante è che in un campo $\mathbf{K}$, qualunque esso sia, valgono le stesse proprietà che valgono per i numeri reali, ossia gli elementi di $\mathbf{K}$ si possono sommare, sottrarre, moltiplicare e dividere e ci sono due elementi particolari: 0 (elemento neutro rispetto alla somma) e 1 (elemento neutro rispetto a prodotto).

Definizione. Sia dato un campo $\mathbf{K}$ e un insieme non vuoto V in cui sono definite due operazioni:

- la somma $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ di $\mathbf{u},\mathbf{v}\in V$

- il prodotto $k\mathbf{u}$ di $k\in\mathbf{K}$ con $\mathbf{u}\in V$.

V si dice **spazio vettoriale** su $\mathbf{K}$ se, per ogni $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$ e per ogni $a,b\in\mathbf{K}$:

1) $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$

2) $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$

3) Esiste un vettore $\mathbf{0}$ tale che $\mathbf{v}+\mathbf{0}=\mathbf{v}$, per ogni vettore $\mathbf{v}$

4) Per ogni $\mathbf{v}$ diverso dal vettore $\mathbf{0}$, esiste il vettore $-\mathbf{v}$ tale che $\mathbf{v}+(-\mathbf{v})=\mathbf{0}$

5) $a(b\mathbf{v})=(ab)\mathbf{v}$

6) $1\mathbf{v}=\mathbf{v}$

7) $(a+b)\mathbf{v}=a\mathbf{v}+b\mathbf{v}$

8) $a(\mathbf{v}+\mathbf{w})=a\mathbf{v}+a\mathbf{w}$

Osservazione.
1) Gli elementi di V si dicono vettori anche se non è detto che assomiglino ai vettori di $\mathbf{R}^n$.
2) La somma $\mathbf{v}+(-\mathbf{w})$ si scrive di solito $\mathbf{v}-\mathbf{w}$ (differenza tra due vettori).
3) La definizione di spazio vettoriale astratto è una definizione assiomatica, ossia tutte le proprietà della struttura di spazio vettoriale si deducono dagli 8 assiomi. Una immediata conseguenza di questi 8 assiomi è per esempio che, dato qualsiasi $\mathbf{v}\in V$

$$0\mathbf{v}+0\mathbf{v}=(0+0)\mathbf{v}=0\mathbf{v}$$

da cui, sottraendo $0\mathbf{v}$ si ottiene $0\mathbf{v}=\mathbf{0}$; perciò dagli assiomi segue che $0\mathbf{v}$ è il vettore nullo.

Esempi

1) Supponiamo $\mathbf{K}=\mathbf{R}$; in questo caso V si dice spazio vettoriale reale. Un esempio di spazio vettoriale reale è ovviamente $V=\mathbf{R}^n$ con le operazioni viste precedentemente. Un altro esempio è $V=\mathbf{R}^{m,n}$ (matrici a m righe ed n colonne) con le operazioni di somma tra matrici e di prodotto di una matrice per un numero reale.

2) Ricordiamo che un polinomio nell'indeterminata x è un'espressione del tipo

$$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$$

dove i coefficienti possono appartenere a qualsiasi campo $\mathbf{K}$. Il polinomio ha grado n se $a_n\neq 0$. Il termine costante del polinomio è il termine $a_0=p(0)$ che è il valore assunto dalla funzione $x\mapsto p(x)$ nel punto 0; a_0 è nullo se e solo se il polinomio $p(x)$ è divisibile per x.

Sia $\mathbf{K}_n[x]$ l'insieme dei polinomi in x di grado minore o uguale a n a coefficienti nel campo $\mathbf{K}$. Definiamo in $\mathbf{K}_n[x]$ le due operazioni seguenti: per ogni $k\in\mathbf{K}$ e per ogni polinomio di $\mathbf{K}_n[x]$

$$p(x)+q(x)=(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n)+(b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n)=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+\cdots+(a_n+b_n)x^n;$$

$$kp(x)=k(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n)=ka_0+ka_1x+ka_2x^2+\cdots+ka_nx^n$$

È facile verificare che per queste operazioni sono soddisfatte le 8 proprietà della definizione, quindi $\mathbf{K}_n[x]$ con queste operazioni è uno spazio vettoriale su $\mathbf{K}$.

Combinazioni lineari e sottospazi

Come nel caso dello spazio vettoriale $\mathbf{R}^n$, dati i vettori $\mathbf{v}_1, \cdots \mathbf{v}_k$ di uno spazio vettoriale V sul campo $\mathbf{K}$, denotiamo con $\mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \cdots \mathbf{v}_k)$ l'insieme di tutte le **combinazioni lineari** $a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_k\mathbf{v}_k$ al variare dei coefficienti $a_1, \cdots a_k \in \mathbf{K}$.

Analogamente, in uno spazio vettoriale V sul campo $\mathbf{K}$

Definizione. Un sottoinsieme W di V si dice **sottospazio vettoriale** se :

1 - W non è vuoto

2 - per ogni coppia di vettori $\mathbf{u} \in W$ e $\mathbf{v} \in W$, risulta $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$

3 - per ogni vettore $\mathbf{u} \in W$ e ogni numero $k \in \mathbf{K}$, risulta $k\mathbf{u} \in W$

Ne segue (come nel caso di $\mathbf{R}^n$) che un sottospazio è in particolare uno spazio vettoriale: infatti le operazioni che vi sono definite soddisfano gli 8 assiomi perchè li soddisfano in V. Analogamente al caso di $\mathbf{R}^n$, i sottospazi vettoriali possono essere descritti assegnando i generatori oppure assegnando opportune equazioni lineari omogenee.

Definizione. In uno spazio vettoriale V sul campo $\mathbf{K}$, i vettori $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k$ si dicono **linearmente indipendenti** se l'equazione:

$$x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

(con $x_i \in \mathbf{K}$) ha solo la soluzione $x_1 = \cdots = x_k = 0$.

Definizione. Sia W un sottospazio dello spazio vettoriale V sul campo $\mathbf{K}$. Un insieme ordinato di vettori $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k) \in W$ si dice una **base** di W se:

1 - $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k$ sono linearmente indipendenti;

2 - $W = \mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \cdots \mathbf{v}_k)$, cioè i vettori $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k$ sono generatori di V.

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbf{K}$ con una base $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n)$, allora :

(a) ogni base di V ha n elementi e quindi si può dire che V ha **dimensione** n.
(b) Se m vettori $\mathbf{v}_1, \cdots \mathbf{v}_m$ di V sono linearmente indipendenti, si ha $m \leq n$.
(c) Se $V = \mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \cdots \mathbf{v}_p)$, si ha $n \leq p$.

Esempio. Determiniamo la dimensione dell'insieme dei numeri complessi $\mathbf{C}$ pensato con due diverse strutture di spazio vettoriale, ossia come:
(a) $\mathbf{C}$-spazio vettoriale
(b) $\mathbf{R}$-spazio vettoriale.

(a) L'insieme $\mathbf{C}$ con le usuali operazioni di somma di numeri complessi e di prodotto tra numeri complessi è un $\mathbf{C}$-spazio vettoriale di dimensione 1, infatti ogni numero complesso z (pensato come vettore) è il prodotto di z stesso (pensato come scalare) per il numero 1 (pensato come vettore).

(b) All'insieme dei numeri complessi $\mathbf{C}$ possiamo dare una struttura di $\mathbf{R}$-spazio vettoriale con le usuali operazioni di somma di numeri complessi e di prodotto di un numero complesso per un numero reale; in questo caso $dim(\mathbf{C}) = 2$, perchè ogni numero complesso $z = a + ib$ è, in modo unico, combinazione lineare a coefficienti reali a e b dei numeri 1 e i che sono vettori linearmente indipendenti.