02 - INSIEMI

insieme = collezione di oggetti, detti elementi

$$A = \{a, x, w\}$$

insieme

elementi

$x \in A$ "appartiene" $\qquad 1 \notin A$

due insiemi A e B si dicono uguali se hanno gli stessi elementi

$$A = B \overset{def}{\iff} \forall x, \ x \in A \iff x \in B$$

es: $A = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$

$$B = \{x \in \mathbb{Z} : \underbrace{|x| \leq 3}, \ x \neq 0\}$$

si ha $A = B$

—— o ——

$\emptyset$ = insieme vuoto, è l'insieme privo di elementi

Fissiamo un insieme ambiente U non vuoto

A sottoinsieme di U, $A \subseteq U$:

$A \subseteq U$ se
tutti gli elementi di A
sono elementi di U

$A \subset U$

$\exists x \in U : x \notin A$

$$A \subseteq U \overset{def}{\iff} \forall x, \; x \in A \Rightarrow x \in U$$

$$A \subset U \iff A \subseteq U \text{ e } A \neq U$$

(sottoinsieme proprio)

$\mathcal{U}$, insieme delle parti di U

$\mathcal{P}(U)$ = insieme di tutti i sottoinsiemi di U

es: $U = \{a, b, c\}$ 3 elementi

$$\mathcal{P}(U) = \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \underbrace{\{a,b,c\}}_{=U} \}$$

$\mathcal{P}(U)$ ha 8 elementi
$= 2^3$

NOTA: se U ha n elementi allora $\mathcal{P}(U)$ ha 2^{n} elementi

---

Modi di rappresentare un insieme:

•) per elencazione

es: $A = \{a, b, c, d\}$

$B = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ insieme numeri PARI

$C = \{2, 4, 6, 8, \ldots, 98, 100\}$

insieme dei numeri pari fino a 100

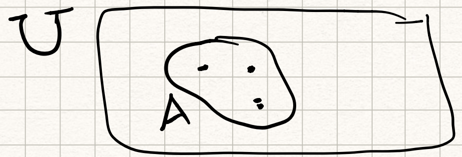
•) mediante una proprietà che lo caratterizzi:

$A = \{x \in U : p(x)\}$

$\{x \in U \mid p(x)\}$

es: $A = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ è pari}\}$

•) diagrammi di Eulero-Venn



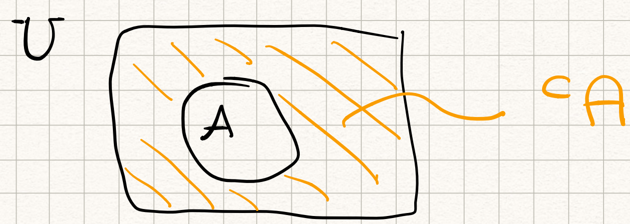
Operazioni tra gli insiemi

U insieme ambiente non vuoto

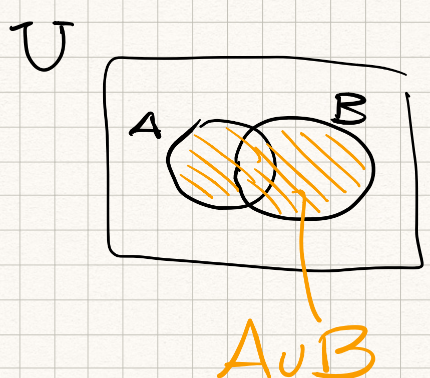
$A, B \subseteq U$

- complementare di A: ${}^cA$, CA, $\cancel{\bar{A}}$

$$ {}^cA \stackrel{def}{=} \{x \in U : x \notin A\} $$

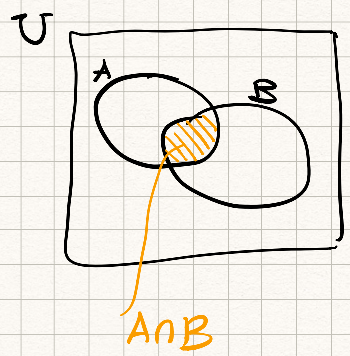


- unione di A e B, $A \cup B$



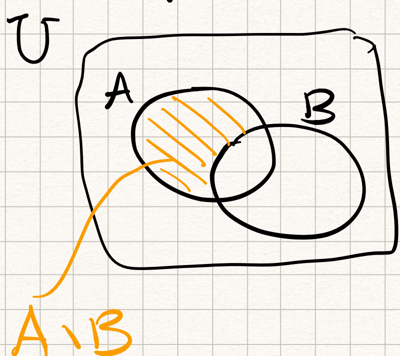
$$ A \cup B \stackrel{def}{=} \{x \in U : x \in A \text{ oppure } x \in B\} $$

- intersezione di A e B , $A\cap B$



$$A\cap B=\{x\in U : x\in A \text{ e } x\in B\}$$

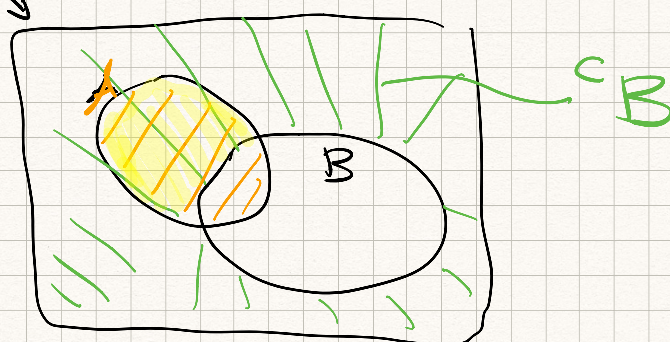
- differenza $A\setminus B$



$$A\setminus B=\{x\in U : \overbrace{x\in A}^{A} \underbrace{\text{ e }}_{\cap} \underbrace{x\notin B}_{{}^cB}\}$$

$$A\setminus B = A\cap {}^cB$$

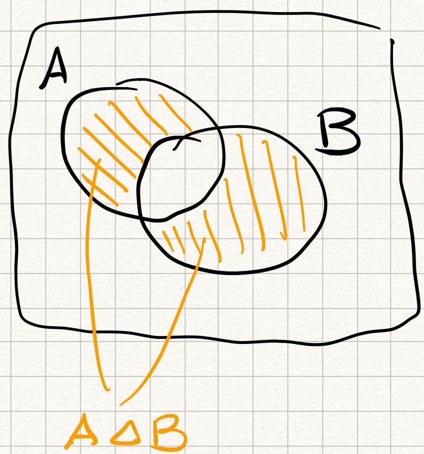
$A\setminus B$



- differenza simmetrica $A \triangle B$

$$A \triangle B \overset{def}{=} \{ x \in U : \overbrace{(x \in A \text{ e } x \notin B)}^{A \setminus B} \text{ oppure } \underbrace{(x \in B \text{ e } x \notin A)}_{B \setminus A} \}$$

oppure $\leftrightarrow$ $\cup$



$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Alcune proprietà:

- $^c(^cA) = A$
- $A \cap {}^cA = \emptyset$ PRINCIPIO DI NON CONTRADDIZIONE
- $A \cup {}^cA = U$ PRINCIPIO del TERZO ESCLUSO

- proprietà commutativa e associativa per $\cup$ e $\cap$

- proprietà distributiva

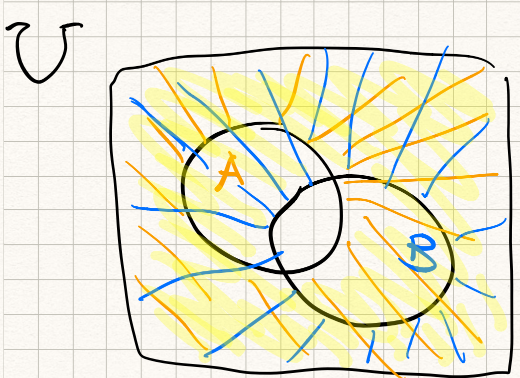
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

- leggi di DE MORGAN

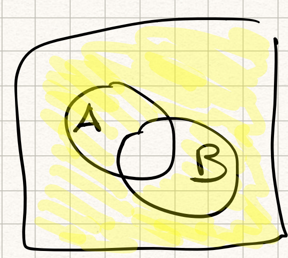
$${}^c(A \cap B) = {}^cA \cup {}^cB$$

$${}^c(A \cup B) = {}^cA \cap {}^cB$$



${}^cA \cup {}^cB$

$${}^c(A \cap B) = {}^cA \cup {}^cB$$



${}^c(A \cap B)$

Prodotto cartesiano

$$A \times B \overset{\text{def}}{=} \{ \underbrace{(a, b)}_{\text{COPPIA ORDINATA}} : a \in A,\ b \in B \}$$

es: $A = \{3, 4, 5\}$, $B = \{0, 1\}$

$$A \times B = \{(3,0), (3,1), (4,0), (4,1), (5,0), (5,1)\}$$

$$B \times A = \{(0,3), (0,4), (0,5), (1,3), (1,4), (1,5)\}$$

$$B^2 = B \times B = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$$

INSIEMI NUMERICI

un insieme A si dice numerico se sono definite due operazioni
$+$ e $\cdot$

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ insieme dei numeri naturali

$\exists$ dell'opposto "$-a$"
(1) $a + x = 0$ a parte il caso $a=0$ non ha soluzioni in $\mathbb{N}$
dato in $\mathbb{N}$

(2) $a x = 1$ a meno che $a = 1$ non si risolve in $\mathbb{N}$
$\exists$ del reciproco "$\frac{1}{a}$"

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$ insieme dei numeri interi

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$

in $\mathbb{Z}$ esiste sempre l'opposto

es: $2 + x = 0$ $x = -2$
$-5 + x = 0$

$a + x = 0$ ha sempre soluzione in $\mathbb{Z}$
$a \in \mathbb{Z}$

in $\mathbb{Z}$ non si risolve p.es. $-2x=1$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p,q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \quad p \text{ e } q \underbrace{\text{primi tra loro}}_{\text{cioè NON HANNO DIVISORI COMUNI}} \right\}$$

insieme dei numeri razionali

$$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$$

in $\mathbb{Q}$ si risolve sempre anche il problema del reciproco:

$$a x = 1$$

fissato $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ ha sempre soluzione $x \in \mathbb{Q}$

$$x = \frac{1}{a}$$

reciproco di a

NOTA: $\mathbb{Q}$ è un insieme ORDINATO, cioè, dati due elementi posso sempre stabilire qual è più grande es: $\frac{2}{7} \overset{?}{\gtrless} \frac{3}{8}$

$\frac{2}{7} \times \frac{3}{8}$ $\qquad 2 \cdot 8 \qquad 3 \cdot 7$

$\qquad\qquad\qquad 16 < 21$

$\Rightarrow \frac{2}{7} < \frac{3}{8}$

NOTA: proprietà di <u>DENSITÀ per $\mathbb{Q}$</u>:

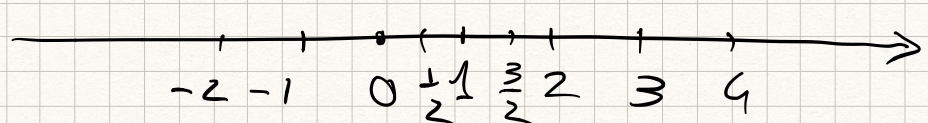
dati $x, y \in \mathbb{Q}$, con $x < y$

$\exists$ sempre $a \in \mathbb{Q}$ tale che

$$x < a < y$$

p. es. $a = \frac{x+y}{2}$

Rappresentazione geometrica

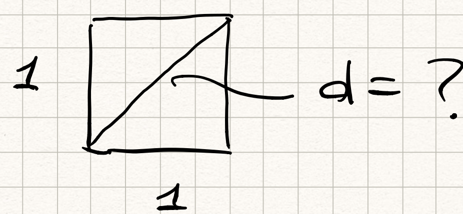


$x \in \mathbb{Q} \Longrightarrow$ punto sulla retta

$\quad\;\; \not\Longleftarrow$

$\mathbb{R}$ = insieme che permette di definire una corrispondenza biunivoca tra i suoi elementi e i punti di una retta

$$\boxed{\begin{array}{l} x^2 = 2 \\ \text{non si risolve} \\ \text{in } \mathbb{Q} \end{array}}$$



$$d^2 = 1^2 + 1^2$$

Dimostrazione per assurdo:

supponiamo che $x^2 = 2$ abbia soluzione in $\mathbb{Q}$

$\Rightarrow \exists\ p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0$ e primi tra loro

tali che

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \iff p^2 = 2q^2$$

$\Rightarrow p^2$ è pari $\Rightarrow p$ è pari

$\Rightarrow \exists\ k : \ p = 2k$

$p^2 = 2q^2$

si riscrive $(2k)^2 = 2q^2$

$$4k^2 = 2q^2 \Rightarrow 2k^2 = q^2$$

$\Rightarrow q^2$ è pari $\Rightarrow q$ è pari

ASSURDO

Valore assoluto

$\forall x \in \mathbb{R}$ si definisce

$$|x| \overset{def}{=} \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

geometricamente:
$|x|$ rappresenta la distanza dall'origine

es: $$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{se } x-2 \geq 0 \\ -(x-2) & \text{se } x-2 < 0 \end{cases}$$

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{se } x \geq 2 \\ 2-x & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

$$\sqrt{|\cos 3x - \arctan(10x^2-1)|}$$

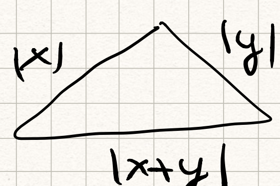
$$= \begin{cases} \cos(3x) - \arctan(10x^2-1) \\ \qquad\qquad \text{se } \cos(\quad)\ldots \geq 0 \\ \end{cases}$$

Proprietà

•) $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| \geq 0$ e $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

•) $|x+y| \leq |x| + |y|$

disug. triangolare



•) $|xy| = |x|\,|y|$

es:

$$|x+2| \leq |2x+3| + 1$$

$$|x+2| \leq 2|x+2| = |2x+4|$$

$$= |\underbrace{2x+3}+\underbrace{1}| \leq |2x+3| + \underbrace{|1|}_{=1}$$

disug. triangolare

$\Rightarrow$ vale $\forall x \in \mathbb{R}$

INSIEMI LIMITATI, SUP e INF di un insieme

def: $A \subseteq \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$

- k è un maggiorante di A se
  $\forall x \in A$, $x \leq k$

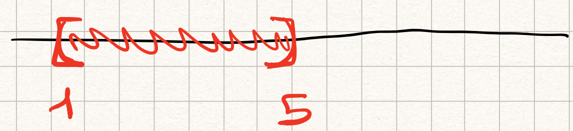
(k è un numero che è più grande di qualunque elemento dell'insieme A)

- k è il <u>massimo di A</u> se

  (1) k è un maggiorante di A

  (2) $k \in A$

es: $A = [1, 5]$



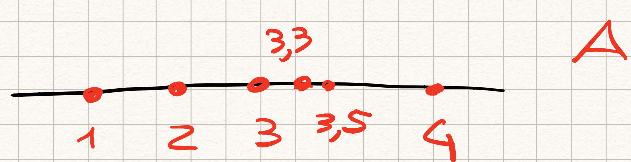
maggiorante 5, 5,1 , 6

10.000

tutti i numeri ≥ 5 sono maggioranti

5 è il massimo di A

$5 = \max A$



maggioranti di A: nr ≥ 4

$\max A = 4$

NOTA: se A ammette un maggiorante allora ammette infiniti maggioranti

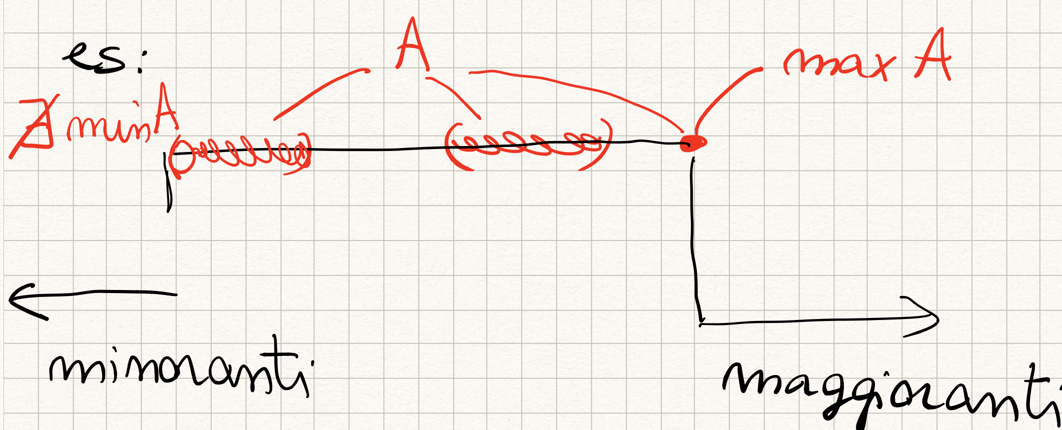
Def: k minorante di A

se $k \leq x \quad \forall x \in A$

$k = \min A$ $\quad$ k è il minimo di A

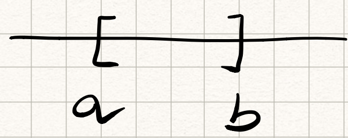
se (1) k è un minorante
(2) $k \in A$

es:



INTERVALLI

$[a,b]$ chiuso $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$



(a,b) aperto $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

$[a,b)$ chiuso a sinistra

$(a,b]$ chiuso a destra

$a < x \leq b$

$a \notin$ intervallo $(a,b]$

$b \in$ intervallo $(a,b]$

$(a,+\infty)$ $x > a$

$[a,+\infty)$ $x \geq a$

$\vdots$

$\mathbb{R}$

es $|x| \leq 5 \iff [-5,5]$

$|x| > 2 \iff (-\infty,-2) \cup (2,+\infty)$

Def: A sottoinsieme di $\mathbb{R}$ si dice

limitato superiormente se ammette un maggiorante

cioè esiste un numero $k \in \mathbb{R}$:

$x \leq k \quad \forall x \in A$

limitato inferiormente se ammette un minorante

cioè $\exists\, k \in \mathbb{R} : \quad x \geq k \quad \forall x \in A$

limitato se è limitato sia inferiorm. sia superiormente

es: $[1, 10]$ è limitato

illimitato superiormente
limitato inferiormente $\quad (2, +\infty)$

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$: non ha maggioranti

ha minoranti : ogni numero ≤ 0

$\mathbb{N}$ è limitato inferiormente

def: $A \subseteq \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$

k è l'estremo superiore di A,
$\boxed{k = \sup A}$, se è il minimo
dei maggioranti

k è l'estremo inferiore di A
$\boxed{k = \inf A}$ se è il massimo
dei minoranti

es: $A = (2, 7]$

limitato: p.es. -1 è minorante
100 è maggiorante

$\sup A$? insieme dei maggioranti

$[7, +\infty)$

min

$7 = \sup A$

$\inf A$: insieme dei minoranti
$(-\infty, 2]$ max $\Rightarrow$ $\inf A = 2$

$\inf A = 2 \qquad \min A \nexists$

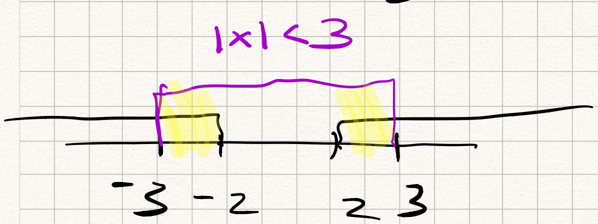
$\sup A = 7 = \max A$

NOTA

- se $\exists \max A$, allora coincide con $\sup A$
  $(\min A)$ $(\inf A)$

- sup e inf sono unici

es: $A = \{x \in \mathbb{R} : 4 \leq x^2 < 9\}$



$$\begin{cases} x^2 \geq 4 \\ x^2 < 9 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} |x| \geq 2 \\ |x| < 3 \end{array}$$

$= (-3, -2] \cup [2, 3)$

A è limitato

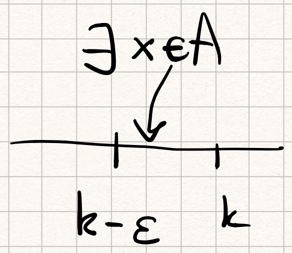
$\inf A = -3 \qquad \min A \nexists$

$\sup A = 3 \qquad \max A \nexists$

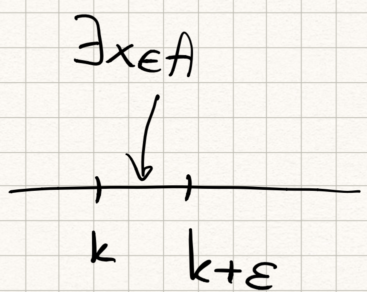
—— ∘ ——

Caratterizzazione di sup e inf:

$$k = \sup A \iff \begin{cases} (1) \ \forall x \in A, \ x \le k \\ \quad (k \text{ è maggiorante}) \\ (2) \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in A : \\ \quad x > k - \varepsilon \\ \quad (k \text{ è il più piccolo dei maggioranti}) \end{cases}$$



$$k = \inf A \iff \begin{cases} (1) \ \forall x \in A, \ k \le x \\ (2) \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in A : \\ \quad x < k + \varepsilon \\ \quad (k \text{ è il più grande dei minoranti}) \end{cases}$$



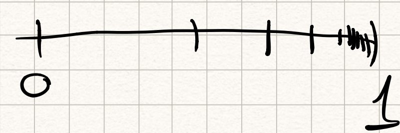
$$A = \left\{ 1 - \frac{1}{n} \; : \; n \in \mathbb{N}, \, n \neq 0 \right\} \subset \mathbb{R}$$

$x \in A \qquad x = 1 - \frac{1}{n}$

$$A = \left\{ 0, \frac{1}{2}, \; 1 - \frac{1}{3}, \; 1 - \frac{1}{4}, \dots \; 1 - \frac{1}{n} \dots \right\}$$

$n = 1 \qquad 1 - \frac{1}{1} = 0$

$n = 2 \qquad 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$



$0 \leq x \quad \forall x \in A \Rightarrow 0$ è minorante

$0 \in A \Rightarrow 0 = \min A = \inf A$

$1 \overset{?}{=} \sup A$:

(1) 1 è maggiorante: ✓

$1 \geq x \quad \forall x \in A \qquad x \in A, \exists n : x = 1 - \frac{1}{n}$

$1 \geq 1 - \frac{1}{n} \qquad \underbrace{0 \geq -\frac{1}{n}}$ vero $\forall n \geq 1$ naturale

(2) fisso $\varepsilon > 0$ devo trovare un elemento x di A t.c. $x > 1 - \varepsilon$

$x \in A \iff x = 1 - \frac{1}{n}$ ✓

devo provare che $\exists\, n$ tale che

$$1 - \frac{1}{n} > 1 - \varepsilon$$

$$\iff \frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}$$

$\exists\, n$ tale che $n > \frac{1}{\varepsilon}$

$\forall\, r \in \mathbb{R} \quad \exists\, n \in \mathbb{N} : \quad n > r$

$\Rightarrow$ possiamo concludere che $1 = \sup A$

$\mathbb{R}$ è un insieme completo:
$\forall\, A \subseteq \mathbb{R}$ A limitato superiormente $\Rightarrow$ A ammette $\sup A \,(\in \mathbb{R})$

es: $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\} \subset \mathbb{R}$

$x^2 < 2 \iff |x| < \sqrt{2} \iff -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$

$A = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

inf A   sup A

$B = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\} = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$

$B \subset \mathbb{Q}$

B ammette maggiorante p.es. 2

$\Rightarrow$ B è limitato superiormente

però non $\exists$ sup B in $\mathbb{Q}$

idea: supp. che esista $k = \sup B$, $k \in \mathbb{Q}$

$k \neq \sqrt{2}$, $k \in \mathbb{Q}$

discuto le altre 2 possibilità

$k > \sqrt{2}$ e $k < \sqrt{2}$ e trovo

un assurdo