Prof.ssa Stefania Bufalino
DISAT- Politecnico di Torino
e-mail: stefania.bufalino@polito.it

# Esempi ed esercizi con soluzione svolti in aula

## 1. Esempio Calcolo Dimensionale

In una prova scritta di Fisica I, viene chiesto a 3 studenti di trovare la velocità finale *v* di una massa *m* che scorre verso il basso lungo una guida verticale a forma di elica di raggio r. La massa scorre dall'alto con velocità iniziale $v_0$, sotto un'accelerazione *a*, e arriva al fondo della guida dopo un tempo *t*. I 3 studenti danno le seguenti risposte:

1) $v = v_0(1 + e^{-a \cdot t})$
2) $v = (r \cdot a)^{\frac{1}{2}}$
3) $v = v_0 \cdot \sin(\frac{v_0 \cdot t}{r})$

Quali risposte, sulla base del calcolo dimensionale, possiamo dire essere sicuramente sbagliate?

*Soluzione:*

- studente con risposta 1) ha sicuramente dato una risposta errata perché la dimensione dell'esponente è

$$[a \cdot t] = LT^{-2} \cdot T = LT^{-1}$$

che non è adimensionale, come richiesto per un esponente

- studente con risposta 2) $[v] = [r \cdot a]^{\frac{1}{2}} = L^{\frac{1}{2}} \cdot (LT^{-2})^{\frac{1}{2}} = LT^{-1}$ ha dato una soluzione che è dimensionalmente corretta

- studente con risposta 3) $[v] = [v_0] \cdot [\sin(\frac{v_0 \cdot t}{r})] = [v_0]$ e anche $[\frac{v_0 \cdot t}{r}] = [v_0] \cdot T \cdot L^{-1} = LT^{-1} \cdot T \cdot L^{-1}$ Ma, anche se risposte le 2) e 3) sono dimensionalmente corrette, questo non è sufficiente ad escludere che siano sbagliate: poiché sono diverse, almeno una è sbagliata, forse entrambe.

## 2. Derivate parziali di una funzione a più variabili

Una variabile *f* si dice essere funzione a più variabili *(x, y, z…)* ed è indicata come *f(x, y, z…)* se il suo valore dipende dai valori di *(x, y, z…)* che sono chiamate a loro volta variabili indipendenti.

Per ogni funzione *f(x, y, z...)* a più variabili (supponiamo di avere un numero *n* di variabili) possiamo definire un numero *n* di derivate chiamate <u>derivate parziali</u> che possono essere definite nei seguenti modi:

- la derivata parziale di *f(x, y, z…)* rispetto alla variabile *x,* si scrive come $\frac{\partial f(x,y,z,...)}{\partial x}$ ed è la funzione ottenuta derivando *f(x, y, z…)* rispetto ad *x* e considerando tutte le altre n-1 variabili *(y, z, ...)* delle costanti;
- la derivata parziale di *f(x, y, z…)* rispetto alla variabile *y,* si scrive come $\frac{\partial f(x,y,z,...)}{\partial y}$ ed è la funzione ottenuta derivando *f(x, y, z…)* rispetto ad *y* e considerando tutte le altre n-1 variabili *(x, z, ...)* delle costanti;
- ....

Risulta immediato capire che il numero di derivate parziali di una funzione è uguale al numero di variabili indipendenti della funzione stessa.

Di seguito sono riportati alcuni esempi di calcolo di derivata parziale di una funzione a più variabili:

1. $f_1(x,y) = x^2 + y^2$
2. $f_2(x,y) = ax + \pi y^3$
3. $f_3(x,z) = x\sin(z)$

*Soluzione:*

1. Se $f_1(x,y) = x^2 + y^2$ avremo: $\frac{\partial f_1(x,y)}{\partial x} = 2x$ (consideriamo $y^2$ una constante) e $\frac{\partial f_1(x,y)}{\partial y} = 2y$ (consideriamo $x^2$ una costante)

2. Se $f_2(x,y) = ax + \pi y^3$ avremo: $\frac{\partial f_2(x,y)}{\partial x} = a$ e $\frac{\partial f_2(x,y)}{\partial y} = 3\pi y^2$

3. Se $f_3(x,z) = x\sin(z)$, avremo: $\frac{\partial f_3(x,z)}{\partial x} = \sin(z)$ (*z* viene considerata una costante) e $\frac{\partial f_3(x,z)}{\partial z} = x\cos(z)$ (la derivata di *sin(z)* è *cos(z)* e *x* viene trattata come costante).

**Passiamo ora a trovare le derivate parziali delle seguenti funzioni e il loro valore numerico**

a) $f_1(x,y,t) = axe^{-t} + \frac{b}{y}$ funzione di (x,y,t) con x = 2; y = 10; t = 2; a = 5 e b=20.

b) $f_2(x,y,z) = \log_e(y) + e^{xz}$ funzione di (x,y,z) con x = 1; y = 10; t = 2; z = 0.

*Soluzione:*

a) $\frac{\partial f_1(x,y,t)}{\partial x} = ae^{-t} = 0.67$ ; $\frac{\partial f_1(x,y,t)}{\partial y} = -\frac{b}{y^2} = -0.2$ ; $\frac{\partial f_1(x,y,t)}{\partial t} = axe^{-t} = -1.3$

b) $\frac{\partial f_2(x,y,z)}{\partial x} = ze^{xz} = 0$; $\frac{\partial f_2(x,y,z)}{\partial y} = \frac{1}{y} = 0.1$; $\frac{\partial f_2(x,y,z)}{\partial z} = xe^{xz} = 1$