PIANI E RETTE

Piani

Per individuare un piano α nello spazio possiamo assegnare:

(a) un punto P_0 di α e un vettore $\mathbf{v}$ ortogonale ad α
(b) un punto P_0 di α e due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{w}$ paralleli ad α
(c) tre punti P_0, P_1, P_2 di α non allineati.

Nel caso (a), sia $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e $\mathbf{v} = (a, b, c)$; se $P = (x, y, z)$ è il generico punto di α, il vettore $(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0})$ è parallelo ad α e quindi è ortogonale a $\mathbf{v}$. Si ha perciò l'equazione vettoriale:

$$\mathbf{v} \cdot (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}) = 0$$

che, passando dai vettori alle componenti, diventa

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

da cui l'equazione cartesiana:

$$(1) \qquad \alpha : ax + by + cz + d = 0 \qquad \text{dove} \qquad d = -(ax_0 + by_0 + cz_0).$$

Un piano α si rappresenta quindi con un'equazione lineare in x, y, z e i coefficienti delle incognite sono le componenti di un vettore ortogonale ad α. Se si moltiplica la (1) per un fattore non nullo, si ottiene un'equazione che rappresenta lo stesso piano, perciò l'equazione cartesiana di α è determinata a meno di un fattore di proporzionalità.

Nel caso (b) è facile ricondursi al caso (a); basta osservare che il piano passante per un punto P_0 e parallelo a due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{w}$ è il piano per P_0 ortogonale al vettore $\mathbf{v} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{w}$.

Nel caso (c) si cerca il piano α passante per i punti P_0, P_1, P_2; basta osservare che α è il piano che passa per uno dei punti, per esempio per P_0 ed è parallelo ai vettori $(\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_0})$ e $(\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_0})$; perciò applicando il caso (b), basta determinare il piano per P_0 ortogonale al vettore $\mathbf{v} = (\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_0}) \wedge (\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_0})$.

Parallelismo tra piani

I piani $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ e $\alpha' : a'x + b'y + c'z + d' = 0$ sono paralleli se e solo se i vettori $\mathbf{v} = (a, b, c)$ e $\mathbf{v}' = (a', b', c')$ sono paralleli; quindi i due piani sono paralleli se e solo se esiste un coefficiente reale non nullo k tale che $(a, b, c) = k(a', b', c')$. Se inoltre $(a, b, c, d) = k(a', b', c', d')$, i due piani coincidono.

Rette

Per individuare una retta r nello spazio possiamo assegnare:

(a) un punto P_0 della retta e un vettore $\mathbf{v}$ parallelo alla retta
(b) due piani non paralleli di cui la retta è intersezione
(c) due punti distinti della retta.

Nel caso (a) siano $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e $\mathbf{v} = (l, m, n)$: un punto $P(x, y, z)$ appartiene ad r se e solo se i vettori $(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0})$ e $\mathbf{v}$ sono paralleli, ossia se e solo se esiste $t \in \mathbf{R}$ tale che

$$(1) \qquad (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}) = t\mathbf{v}$$

(1) si dice *equazione vettoriale* della retta r, $\mathbf{v}$ si dice vettore direttore di r e le componenti l, m, n di $\mathbf{v}$ si dicono *parametri direttori* di r. Da (1), passando alle componenti, si deducono le *equazioni parametriche* di r:

$$(2) \qquad \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

da cui segue l'eguaglianza dei rapporti:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

che, a rigore, avrebbe senso solo se $l \neq 0, m \neq 0, n \neq 0$; tuttavia, osservando le equazioni parametriche di r, si vede che quando è nullo un denominatore, è nullo anche il corrispondente numeratore.

Eguagliando ora due coppie di tali rapporti, per esempio i primi due e il primo e il terzo, si trovano le equazioni di due piani, di cui r è intersezione; il sistema lineare:

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} \\ \dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{z - z_0}{n} \end{cases}$$

è la *rappresentazione cartesiana* di r.

Nel caso (b), sono dati due piani non paralleli $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ e $\alpha' : a'x + b'y + c'z + d' = 0$, che hanno come intersezione la retta r; le coordinate dei punti di r sono le soluzioni del sistema lineare:

$$(3) \qquad \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

Per ottenere una rappresentazione parametrica di r, a partire dalla rappresentazione cartesiana (3), dobbiamo trovare un punto di r, cioè una soluzione particolare (x_0, y_0, z_0) del sistema (3) e un vettore $\mathbf{v}$ parallelo ad r; per fare ciò basta osservare che $\mathbf{v} = (l, m, n)$ deve essere ortogonale a entrambi i vettori $\mathbf{n} = (a, b, c)$ e $\mathbf{n}' = (a', b', c')$, quindi si può scegliere $\mathbf{v} = \mathbf{n} \wedge \mathbf{n}' = (bc' - b'c, a'c - ac', ab' - a'b)$.

Nel caso (c) se vogliamo determinare la retta che passa per $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e $P_1(x_1, y_1, z_1)$, possiamo ricondurci al caso (a), cercando la retta che passa per uno dei due punti, per esempio per P_0, parallela al vettore $\mathbf{v} = (\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_0})$. Si ottengono le equazioni parametriche:

$$(4) \qquad \begin{cases} x = x_0 + t(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + t(y_1 - y_0) \\ z = z_0 + t(z_1 - z_0) \end{cases}$$

Quanto visto finora per le rette nello spazio può ripetersi per analogia nel piano, ricordando che nel piano la scelta del riferimento permette di identificare i vettori applicati nell'origine con coppie ordinate di numeri reali; per ottenere quindi una rappresentazione parametrica della retta r passante per il punto P_0 e parallela al vettore $\mathbf{v} = (l, m)$ basta sopprimere la coordinata z nelle (2):

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases}$$

da cui, eliminando il parametro t, si ottiene una rappresentazione cartesiana della retta r data da un'unica equazione del tipo

$$ax + by + c = 0$$

dove il vettore $\mathbf{u} = (a, b)$ è perpendicolare al vettore $\mathbf{v} = (l, m)$.

Fasci di piani

Date le equazioni di due piani distinti $\alpha : ax + by + cz + d = 0$, $\alpha' : a'x + b'y + c'z + d' = 0$, diciamo fascio di piani individuato da α e α' l'insieme di tutti i piani individuati da un'equazione del tipo

$$\lambda(ax + by + cz + d) + \mu(a'x + b'y + c'z + d') = 0 \tag{5}$$

al variare di $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$.

Osserviamo che la (5) per ogni coppia di valori $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ è un'equazione lineare in x, y, z e perciò rappresenta (a meno di un fattore di proporzionalità) un ben preciso piano. Distinguiamo due casi:

- se i piani α e α' si intersecano secondo una retta r, ogni piano del fascio passa per la retta r, viceversa si può dimostrare che ogni piano passante per r si può individuare con un'equazione di tipo (5) ; in questo caso si parla di fascio proprio di piani di asse la retta r.

- se i piani α e α' sono paralleli, ogni piano del fascio è parallelo ad α e α' e, viceversa, ogni piano parallelo ad α e α' appartiene al fascio; in questo caso si parla di un fascio improprio di piani. I piani del fascio improprio sono quindi tutti rappresentati da un'equazione del tipo $ax + by + cz + k = 0$, al variare del parametro reale k.

Distanza tra due punti

Dati due punti $P(x, y, z)$ e $P'(x', y', z')$, la distanza di P da P' è il modulo del vettore $(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP'})$, ossia (per il teorema di Pitagora):

$$d(P, P') = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

Distanza di un punto da un piano

Dato un piano α di equazione cartesiana $ax + by + cz + d = 0$ e un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$, la distanza di P_0 da α è la distanza di P_0 dal punto H proiezione ortogonale di P_0 sul piano α :

$$d(P_0, \alpha) = d(P_0, H) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Distanza di un punto da una retta nel piano

Data l'analogia tra l'equazione di una retta nel piano e quella di un piano nello spazio, con un procedimento del tutto simile al precedente, si ottiene la distanza di un punto $P(x_0, y_0)$ da una retta $r : ax + by + c = 0$:

$$d(P_0, r) = d(P_0, H) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Distanza di un punto da una retta nello spazio

Dati la retta r e il punto P_0 , la distanza di P_0 da r può essere determinata con un procedimento geometrico, che segue dai casi precedenti: basta determinare il piano α passante per il punto P_0 e ortogonale alla retta r e considerare il loro punto di intersezione $H = r \cap \alpha$; si ha infatti $d(P_0, r) = d(P_0, H)$.

Distanza tra piani paralleli

Per calcolare tale distanza, ci si può ricondurre al calcolo della distanza tra un punto e un piano: dati i piani paralleli $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ e $\alpha' : ax + by + cz + d' = 0$ si ha

$$d(\alpha, \alpha') = d(Q, \alpha)$$

dove Q è un punto qualsiasi del piano α'. Ne segue:

$$d(\alpha, \alpha') = \frac{|d - d'|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Distanza tra rette sghembe

Date due rette sghembe r ed s esistono due punti (P_1 su r e P_2 su s) tali che la retta passanre per P_1 e P_2 è ortogonale e incidente sia con r, sia con s; il segmento P_1P_2 è quello che ha la lunghezza minima tra tutti i segmenti aventi un estremo su r e un estremo su s; si definisce distanza tra r ed s la distanza tra P_1 e P_2.

Per calcolare tale distanza, ci si può ricondurre al calcolo della distanza tra un punto e un piano: sia α il piano che contiene una delle due rette, per esempio s, ed è parallelo alla retta r, allora

$$d(r, s) = d(r, \alpha) = d(R, \alpha)$$

dove R è un punto qualsiasi della retta r.

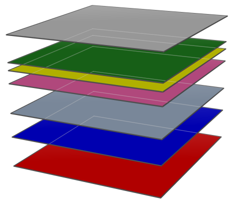

Figura 1: alcuni piani di un fascio improprio

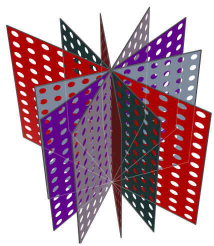

Figura 2: alcuni piani di un fascio proprio

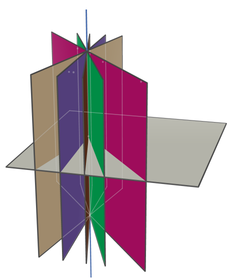

Figura 3: piani ortogonali a un piano assegnato

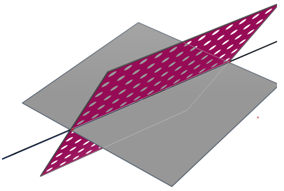

Figura 4: una retta intersezione di due piani

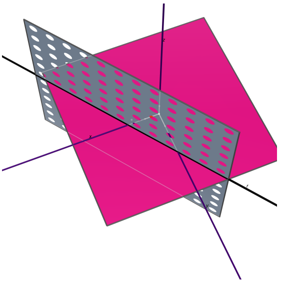

Figura 5: una retta del piano (xy)

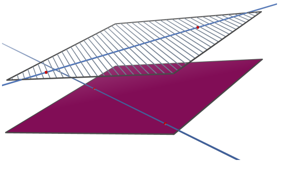

Figura 6: esempio di due rette sghembe