APPLICAZIONI LINEARI

Ricordiamo che, dati due insiemi C e D, una **funzione** $f : C \to D$ è una legge che associa ad ogni elemento $c \in C$ un ben preciso elemento $d \in D$. Si scrive $f(c) = d$ oppure $c \mapsto d$ e si dice che d è immagine di c.

L'**immagine** di f è l'insieme $Im\, f = \{f(c) | c \in C\}$; $Im\, f$ è contenuta nel codominio D e non coincide necessariamente con D. Dato $d \in D$, l'insieme $\{c \in C | f(c) = d\}$ si dice insieme delle **controimmagini** di d e si denota con $f^{-1}(d)$.

Ricordiamo anche che f si dice **suriettiva** se $Im\, f = D$, quindi f è suriettiva se e solo se $f^{-1}(d)$ è non vuoto per ogni $d \in D$. Inoltre f è **iniettiva** se $f(c_1) = f(c_2)$ implica $c_1 = c_2$. Se f è sia iniettiva che suriettiva si dice **biiettiva** e in questo caso esiste la funzione **inversa** $f^{-1} : D \to C$ tale che $f^{-1} \circ f$ e $f \circ f^{-1}$ sono funzioni identità.

Applicazioni lineari $\mathbf{f} : \mathbf{R^n} \to \mathbf{R^m}$

Data una matrice $A \in \mathbf{R}^{m,n}$, possiamo definire una funzione $f_A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ ponendo

$$f_A(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$$

al variare di $\mathbf{v}$ in $\mathbf{R}^n$ (con $\mathbf{v}$ pensato come vettore colonna di $\mathbf{R}^{n,1}$), dove $A\mathbf{v}$ è l'usuale prodotto tra matrici riga per colonna.

Esempio. Data $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{3,4}$, definiamo $f_A : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$: per ogni $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4$

$$f_A(\mathbf{v}) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$$

dove $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 + 4x_4 \\ x_1 + x_3 + 2x_4 \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 \end{pmatrix}$.

In particolare per esempio $f_A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Ricordiamo che per il prodotto tra matrici valgono le

Proprietà. Per ogni $A \in \mathbf{R}^{m,n}$, per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ $\mathbf{R}^n$ e per ogni $k \in \mathbf{R}$

1) $A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v}$

2) $k(A\mathbf{v}) = A(k\mathbf{v})$

Per le funzioni f_A, assegnate come sopra, si ha quindi:

1) $f_A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f_A(\mathbf{u}) + f_A(\mathbf{v})$

2) $k(f_A(\mathbf{v})) = f_A(k\mathbf{v})$

Osservazioni.

1) Le componenti del vettore $f_A(\mathbf{v})$ sono polinomi omogenei di primo grado nelle componenti del vettore $\mathbf{v}$.

2) In generale, nella matrice $A \in \mathbf{R}^{m,n}$, la j-esima colonna rappresenta l'immagine $f_A(\mathbf{e}_j)$ del j-esimo vettore della base canonica di $\mathbf{R}^n$ (come nel caso particolare dell'esempio).

3) Per ogni $A \in \mathbf{R}^{m,n}$, si ha in particolare $f_A(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

4) Dato $\mathbf{w} \in \mathbf{R}^m$, $\{\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n | f_A(\mathbf{v}) = \mathbf{w}\}$ è l'insieme delle controimmagini di $\mathbf{w}$ e si denota con $f_A^{-1}(\mathbf{w})$; si tratta dell'insieme delle soluzioni del sistema lineare avente come matrice dei coefficienti A e come colonna dei termini noti le componenti del vettore $\mathbf{w}$.

Definizione. Una funzione $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ si dice **applicazione lineare** quando gode delle seguenti proprietà, per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ $\mathbf{R}^n$ e per ogni $k \in \mathbf{R}$:

1) $f(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})$

2) $k(f(\mathbf{v})) = f(k\mathbf{v})$

Quando $m = n$, f si dice **endomorfismo**. Se f è una biiezione, si dice che f è un **isomorfismo**.

Proposizione. Fissate una base di $\mathbf{R}^n$ e una base di $\mathbf{R}^m$, sia data una applicazione lineare $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$; allora esiste un'unica matrice $M \in \mathbf{R}^{m,n}$ tale che $f = f_M$.

Dimostrazione. Siano $\mathcal{B}_{\mathbf{R}^n} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ e $\mathcal{B}_{\mathbf{R}^m} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$ le basi fissate. L'applicazione f è data, quindi si sa come opera su un qualsiasi vettore di $\mathbf{R}^n$, in particolare si sa come opera sui vettori della base $\mathcal{B}_{\mathbf{R}^n}$; si avrà perciò:

$f(\mathbf{u}_1) = a_{11}\mathbf{v}_1 + a_{21}\mathbf{v}_2 + \ldots + a_{m1}\mathbf{v}_m$
$f(\mathbf{u}_2) = a_{12}\mathbf{v}_1 + a_{22}\mathbf{v}_2 + \ldots + a_{m2}\mathbf{v}_m$
...
$f(\mathbf{u}_n) = a_{1n}\mathbf{v}_1 + a_{2n}\mathbf{v}_2 + \ldots + a_{mn}\mathbf{v}_m$

Sia ora $\mathbf{v} = b_1\mathbf{u}_1 + \ldots + b_n\mathbf{u}_n$ un qualsiasi vettore di $\mathbf{R}^n$; per la linearità di f si ha: $f(\mathbf{v}) = b_1 f(\mathbf{u}_1) + \ldots + b_n f(\mathbf{u}_n)$ e quindi, tenendo conto dei dati precedenti, si ottiene

$$f(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

ossia f è associata alla matrice $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Nucleo e immagine di una applicazione lineare $\mathbf{f} : \mathbf{R^n} \to \mathbf{R^m}$

Definizione. Data la matrice $A \in \mathbf{R}^{m,n}$, si dice **nucleo** di A (o di f_A) l'insieme:

$$ker(A) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n | A\mathbf{v} = \mathbf{0}\}$$

Proposizione. Data la matrice $A \in \mathbf{R}^{m,n}$,

(a) $ker(A)$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^n$;
(b) $ker(A)$ ha dimensione $n - rg(A)$.

Dimostrazione. (a) Basta osservare che $ker(A)$ è per definizione l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo avente A come matrice dei coefficienti e perciò è sottospazio di $\mathbf{R}^n$.

(b) Il sistema omogeneo ha $n - rg(A)$ incognite libere e, per costruzione, una base delle soluzioni è costituita da $n - rg(A)$ vettori.

Definizione. $Im(A) = \{\mathbf{w} \in \mathbf{R}^m |\ esiste\ \mathbf{v} \in \mathbf{R}^n\ tale\ che\ A\mathbf{v} = \mathbf{w}\}$.

Proposizione. Per ogni matrice $A \in \mathbf{R}^{m,n}$,

(a) $Im(A)$ è il sottospazio di $\mathbf{R}^m$ generato dalle colonne di A;
(b) $dim(Im(A)) = rg(A)$.

Dimostrazione. (a) Per ogni vettore $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$, si può scrivere $\mathbf{v} = a_1\mathbf{e_1} + a_2\mathbf{e_2} + \cdots + a_n\mathbf{e_n}$, dove $(\mathbf{e_1}, \cdots, \mathbf{e_n})$ è la base canonica di $\mathbf{R}^n$. Poichè f_A è lineare, si ha $f_A(\mathbf{v}) = a_1 f_A(\mathbf{e_1}) + a_2 f_A(\mathbf{e_2}) + \cdots + a_n f_A(\mathbf{e_n})$, ossia $f_A(\mathbf{v})$ è combinazione lineare delle colonne di A.

(b) $dim(Im(A)) = rg(A)$, perchè lo spazio delle colonne di A ha dimensione $rg(A)$.

Esempio. L'applicazione lineare $f_A : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

ha nucleo $ker\ f_A = \{(-z - 2t, -2z, z, t)\}$, al variare di $z, t \in \mathbf{R}$; per trovare una base del nucleo basta porre per esempio $z = 1, t = 0$ e poi $z = 0, t = 1$: si ottiene allora $((-1, -2, 1, 0), (-2, 0, 0, 1))$. L'immagine per definizione è $Im\ f_A = \mathcal{L}((2, 1, 1), (-1, 0, -1), (0, 1, -1), (4, 2, 2))$, una base dell'immagine è per esempio $((2, 1, 1), (-1, 0, -1))$.

Dalle due precedenti proposizioni segue il fondamentale

Corollario. Per ogni matrice $A \in \mathbf{R}^{m,n}$, $dim(Im(A)) + dim(ker(A)) = n$.

Proposizione. Data la matrice $A \in \mathbf{R}^{m,n}$, $ker(A) = \{\mathbf{0}\}$ se e solo se f_A è iniettiva.

Dimostrazione. Nel'ipotesi che $ker(A) = \{\mathbf{0}\}$, supponiamo per assurdo che esistano due vettori $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{v}_2 \in \mathbf{R}^n$ tali che $f_A(\mathbf{v}_1) = f_A(\mathbf{v}_2)$; si ha allora, per la linearità di f_A, $f_A(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = \mathbf{0}$, cioè, per definizione di $Ker(f_A)$, $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \in Ker(f_A)$ e quindi dall'ipotesi segue che $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$, ossia $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$.

Nel'ipotesi che f_A sia iniettiva, sia $\mathbf{v} \in Ker(f_A)$; allora per definizione $f_A(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$; sappiamo però che anche $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Poichè f_A è iniettiva, deve essere $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Composizione e prodotto di matrici

Consideriamo le matrici $B \in \mathbf{R}^{m,n}$ e $A \in \mathbf{R}^{n,p}$ e le applicazioni lineari ad esse associate $f_B : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ e $f_A : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^n$ definite rispettivamente da $f_B(\mathbf{u}) = B\mathbf{u}$ e $f_A(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$. La composizione $f_B \circ f_A$ è data da

$$\mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v} \mapsto BA\mathbf{v}$$

ed è perciò associata alla matrice prodotto BA.
Un caso particolare è quello delle applicazioni lineari invertibili. Ricordiamo che se una funzione $f : C \to D$ è invertibile, la funzione $f^{-1} : D \to C$ definita da $f^{-1}(y) = x$ è detta inversa di f e si ha $f^{-1} \circ f = Id_C$ e $f \circ f^{-1} = Id_D$.

Proposizione.

(a) Se $A \in \mathbf{R}^{n,n}$è invertibile, la matrice associata all'applicazione inversa f_A^{-1} è la matrice A^{-1}.
(b) L'applicazione lineare associata a una matrice $A \in \mathbf{R}^{n,n}$è invertibile se e solo se $rg(A) = n$.

Dimostrazione. (a) Segue dalla definizione di composizione di applicazioni.
(b) Nell'ipotesi $n = m$, f_A è invertibile se e solo se, per ogni vettore $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$, l'equazione vettoriale $f_A(\mathbf{v}) = \mathbf{b}$ ha una sola soluzione, inoltre l'equazione $f_A(\mathbf{v}) = \mathbf{b}$ corrisponde a un sistema lineare di n equazioni in n incognite di matrice $(A|\mathbf{b})$. Per il Teorema di Rouchè-Capelli, un sistema del tipo $(A|\mathbf{b})$ ha un'unica soluzione qualunque sia il vettore $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$ se e solo se $rg(A) = n$.

Applicazioni lineari

Siano V, W due spazi vettoriali sullo stesso campo $\mathbf{K}$

Definizione. Una applicazione $f : V \to W$ si dice **lineare** se:

1 - $f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$

2 - $f(k\mathbf{u}) = kf(\mathbf{u})$ per ogni $k \in \mathbf{K}, \mathbf{u} \in V$.

Osservazione. Una conseguenza della definizione è che $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, cioè f manda il vettore nullo di V nel vettore nullo di W.

Siano V, W due spazi vettoriali sul campo $\mathbf{K}$ e $f : V \to W$ una applicazione lineare; come nel caso delle applicazioni lineari $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, valgono in particolare le

Definizioni.
(a) $Ker\, f = \{\mathbf{v} \in V | f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$ si dice **nucleo** di f;
(b) $Im\, f = \{f(\mathbf{v}) | \mathbf{v} \in V\}$ si dice **immagine** di f;
(c) $f^{-1}(\mathbf{w}) = \{\mathbf{v} \in V | f(\mathbf{v}) = \mathbf{w}\}$ si dice **insieme delle controimmagini** del vettore $\mathbf{w} \in W$;

Con la stessa dimostrazione vista per le applicazioni lineari $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, vale la seguente:

Proposizione. Sia $f : V \to W$ una applicazione lineare; f è iniettiva se e solo se $Ker\, f = \mathbf{0}$.

Basi e applicazioni lineari

Sia W un sottospazio dello spazio vettoriale V sul campo $\mathbf{K}$. Ricordiamo che un insieme ordinato di vettori $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k) \in W$ si dice una **base** di W se:

1 - $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k$ sono linearmente indipendenti;

2 - $W = \mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \cdots \mathbf{v}_k)$, cioè i vettori $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k$ sono generatori di V.

Teorema. Dato il **K**- spazio vettoriale V, se esiste una base $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n)$ di V, l'applicazione $f : \mathbf{K}^n \to V$ definita da:

$$(a_1, \cdots, a_n) \mapsto a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n$$

è un isomorfismo.

Dimostrazione. È facile verificare che f è lineare; inoltre dalla definizione di base segue che f è anche iniettiva e suriettiva, cioè è un isomorfismo.

Osservazione. In particolare l'isomorfismo f manda ogni elemento della base canonica di $\mathbf{K}^n$ in un elemento della base data di V. Dunque possiamo usare f per identificare $\mathbf{K}^n$ con V.

Utilizzando tale identificazione, otteniamo risultati analoghi a quelli visti nel caso dello spazio vettoriale $\mathbf{R}^n$, abbiamo in particolare la seguente:

Proposizione. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbf{K}$ con una base $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n)$, allora :
(a) ogni base di V ha n elementi e quindi si può dire che V ha **dimensione** n.
(b) Se m vettori $\mathbf{v}_1, \cdots \mathbf{v}_m$ di V sono linearmente indipendenti, si ha $m \leq n$.
(c) Se $V = \mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \cdots \mathbf{v}_p)$, si ha $n \leq p$.

Proposizione. Dati due $\mathbf{K}$-spazi vettoriali V e W, se $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n)$ è una base di V, per assegnare una applicazione lineare $f : V \to W$ basta assegnare i vettori $f(\mathbf{v}_1), \cdots, f(\mathbf{v}_n)$.

Dimostrazione. Poichè $\mathcal{B}$ è base, ogni vettore di V si scrive in modo unico come $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n$, quindi $f(\mathbf{v}) = f(a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n)$ =(per la linearità di f)=$a_1 f(\mathbf{v}_1) + \cdots + a_n f(\mathbf{v}_n)$.

Questi risultati ci permettono di procedere come per gli spazi $\mathbf{R}^n$, ossia dati due $\mathbf{K}$-spazi vettoriali V e W di dimensione rispettivamente n ed m, possiamo associare una matrice a qualsiasi applicazione lineare $f : V \to W$: basta infatti fissare una base $\mathcal{B}_V$ e una base $\mathcal{B}_W$.

Esempio. Sia $V = W = \mathbf{R}_2[X]$. Sia D l'applicazione lineare definita dalla derivazione rispetto a X: $D(p(X)) = p'(X)$. Se scegliamo la base $(1, X+1, (X+1)^2)$ per V e la base $(1, X, X^2)$ per W, la matrice di D rispetto a queste basi è:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mentre se scegliamo la base $(1, X, X^2)$ sia in V che in W, la matrice di D è:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

.

<u>Cambiamenti di base</u>

Sia V un $\mathbf{K}$-spazio vettoriale di dimensione finita n e siano $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n)$ e $\mathcal{B}' = (\mathbf{e}'_1, \cdots, \mathbf{e}'_n)$ due sue basi, con $\mathcal{B}'$ assegnata nel modo seguente:

$$\mathbf{e}'_1 = a_{11}\mathbf{e}_1 + \cdots a_{n1}\mathbf{e}_n$$
$$\mathbf{e}'_2 = a_{12}\mathbf{e}_1 + \cdots a_{n2}\mathbf{e}_n$$
$$\cdots$$
$$\mathbf{e}'_n = a_{1n}\mathbf{e}_1 + \cdots a_{nn}\mathbf{e}_n$$

Definizione. La matrice $P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ si dice **matrice di passaggio** o **di cambio di base** da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$.

Osservazione. P è invertibile, infatti le sue colonne sono i vettori della base $\mathcal{B}'$. La matrice inversa P^{-1} è la matrice di passaggio da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$.

Dato un qualsiasi vettore $\mathbf{v} \in V$, si avrà $\mathbf{v} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots x_n\mathbf{e}_n = x'_1\mathbf{e}'_1 + \cdots x'_n\mathbf{e}'_n$; le relazioni tra le componenti di $\mathbf{v}$ rispetto a $\mathcal{B}$ e le componenti di $\mathbf{v}$ rispetto a $\mathcal{B}'$ si ottengono come segue:

$$\mathbf{v} = x_1'\mathbf{e}_1' + \cdots x_n'\mathbf{e}_n' = x_1'(a_{11}\mathbf{e}_1 + \cdots a_{n1}\mathbf{e}_n) + \cdots + x_n'(a_{1n}\mathbf{e}_1 + \cdots a_{nn}\mathbf{e}_n) = \cdots = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots x_n\mathbf{e}_n$$

da cui

$$x_1 = a_{11}x_1' + \cdots a_{1n}x_n'$$

$$x_2 = a_{21}x_1' + \cdots a_{2n}x_n'$$

$$\cdots$$

$$x_n = a_{n1}x_1' + \cdots a_{nn}x_n'$$

ossia $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$ oppure $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Cambiamenti di base e applicazioni lineari

Sia data un'applicazione lineare $f : V \to W$, con V, W spazi vettoriali di dimensione finita sul campo numerico $\mathbf{K}$. Fissiamo una base $\mathcal{B}_V$ per lo spazio V e una base $\mathcal{B}_W$ per lo spazio W, allora risulta univocamente determinata una matrice M associata ad f rispetto a $\mathcal{B}_V$ e a $\mathcal{B}_W$, si può quindi scrivere $MX = Y$, dove X è il vettore colonna delle coordinate di un qualunque $\mathbf{v} \in V$ rispetto a $\mathcal{B}_V$, mentre Y è il vettore colonna delle coordinate di $f(\mathbf{v})$ rispetto a $\mathcal{B}_W$. Se si cambia base in V, passando alla base $\mathcal{B}_V'$ e si cambia base in W, passando alla base $\mathcal{B}_W'$, i due cambiamenti di base saranno descritti dalle rispettive matrici di passaggio P e Q, cioè $X = PX'$ e $Y = QY'$. Segue che:

$$M(PX') = QY'$$

da cui $Q^{-1}MPX' = Y'$; come è noto, dopo aver fissato una base in V e una in W, la matrice associata ad f è univocamente determinata, di conseguenza $Q^{-1}MP$ è la matrice di f rispetto a $\mathcal{B}_V'$ e $\mathcal{B}_W'$.

Nel caso particolare in cui lo spazio di partenza coincida con lo spazio di arrivo, cioè $V = W$, si può fissare la stessa base $\mathcal{B}$ in entrambi gli spazi. Se si cambia base, passando alla base $\mathcal{B}'$ con matrice di passaggio P, il legame tra la matrice di f rispetto a $\mathcal{B}$ e la matrice di f rispetto a $\mathcal{B}'$ è dato da

$$M' = P^{-1}MP$$

Definizione. Due matrici quadrate M ed M' si dicono **simili** se esiste una matrice invertibile P tale che $M' = P^{-1}MP$.