Esercitazione del 7/5/2018

Esercizio 1

Un corpo di massa M è fermo su un piano orizzontale scabro con coefficiente di attrito statico μ_s. Sul corpo si trova una molla di costante elastica k con un estremo saldato al corpo stesso. All'altro estremo è vincolato un blocchetto di massa trascurabile che può scivolare senza attrito sul corpo. Un proiettile di massa m, in moto con velocità orizzontale, si conficca nel blocchetto. Si calcoli la massima velocità del proiettile altre la quale il corpo di massa M si muove a seguito dell'urto del proiettile col blocchetto.

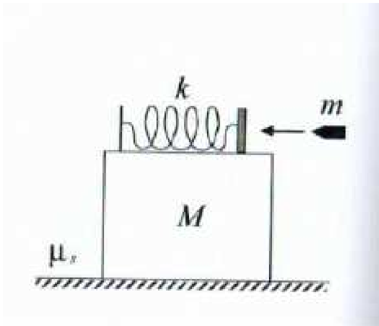

FIG. 1:

Soluzione

Il proiettile si muove di moto rettilineo uniforme conservando la sua energia cinetica finché non interagisce con la molla. Essendo la forza elastica conservativa e il bersaglio ideale (massa nulla) possiamo imporre la conservazione dell'energia meccanica cosicché, all'arresto del proiettile, tutta la sua energia cinetica sarà trasformata in energia potenziale elastica immaganizzata dalla molla

$$\frac{1}{2}\,k\,(\Delta x_0)^2 = \frac{1}{2}\,m\,v_0^2$$

In questa condizione, la molla eserciterà sul blocco la forza elastica $F_{\rm el} = k\,\Delta x_0$ la quale non deve superare la forza di attrito statico tra blocco e piano affinché il sistema $(M+m)$ resti in equilibrio statico

$$F_{\rm el} \le F_{\rm att} \qquad \Rightarrow \qquad k\,\Delta x_0 \le \mu_s\,(M+m)\,g$$

Mettendo assieme le due equazioni si ottiene la condizione sulla velocità del proiettile

$$k\,\sqrt{\frac{m}{k}}\,v_0 \le \mu_s\,(M+m)\,g \qquad \Rightarrow \qquad v_0 \le \mu_s\,\frac{M+m}{\sqrt{m\,k}}\,g$$

Esercizio 2

Un pendolo semplice è costituito da una massa $M = 2\,kg$ appesa ad un filo di massa trascurabile e lunghezza $L = 50\,cm$. Il pendolo viene spostato di un angolo $\theta = 30°$ rispetto alla direzione verticale e poi lasciato libero. Nel punto inferiore dell'oscillazione la massa M urta elasticamente una massa $m = 1\,kg$, appesa ad un filo di lunghezza $l = 20\,cm$, inizialmente ferma. Si determini l'angolo massimo raggiunto dal secondo pendolo dopo l'urto.

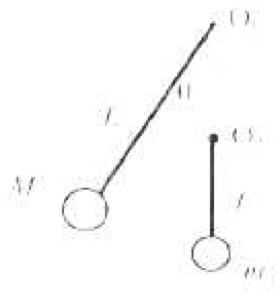

FIG. 2:

Soluzione

Introdotto un sistema di riferimento con asse x passante per la posizione della massa m ferma possiamo imporre la conservazione dell'energia meccanica per il pendolo M tra la sua configurazione iniziale e l'istante antecedente l'urto in cui il pendolo M transita per la verticale

$$M\,g\,L\,(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}\,M\,v_1^2 \qquad \Rightarrow \qquad v_1 = \sqrt{2\,g\,L\,(1-\cos\theta)} = 1.14\,m/s$$

Successivamente, durante l'urto elastico vincolato possiamo imporre la conservazione dell'energia cinetica e del momento della quantità di moto rispetto al polo O_1, poichè la reazione vincolare sviluppata durante l'urto agisce lungo la fune passante per O_1 e di conseguenza il suo momento rispetto allo stesso polo O_1 risulterà nullo

$$\frac{1}{2}\,M\,v_1^2 = \frac{1}{2}\,M\,v_1'^2 + \frac{1}{2}\,m\,v_2'^2$$
$$\vec{L}\times M\,\vec{v}_1 = \vec{L}\times M\,\vec{v}_1' + \vec{L}\times m\,\vec{v}_2'$$

Le soluzioni del sistema dà

$$v_1' = \frac{M-m}{m+M}\,v_1 = 0.38\,m/s$$
$$v_2' = \frac{2\,M}{m+M}\,v_1 = 1.52\,m/s$$

In fine, dopo l'urto il pendolo m conserva la sua energia meccanica trasformando l'energia cinetica acquistata nell'urto in energia potenziale di posizione nel punto di massima altezza

$$\frac{1}{2}\,m\,v_2'^2 = m\,g\,l\,(1-\cos\phi) \qquad \Rightarrow \qquad \cos\phi = 1 - \frac{v_2'^2}{2\,g\,l} \qquad \Rightarrow \qquad \phi = 1.15\,rad$$

Esercizio 3

Una molla ideale, di costante elastica $k = 3\,N/m$ e lunghezza di riposo nulla, è collegata al soffitto di un vagone in moto rettilineo; al suo estremo libero è collegata una massa $m = 150\,g$. Posto che il vagone si muova di moto uniformemente accelerato con accelerazione $A = 3\,m/s^2$, stabilire la disposizione e l'elongazione della molla.

Soluzione

Si scelga un sistema di riferimento non inerziale solidale con il vagone, in moto rettilineo uniformemente accelerato, con accelarzione di trascinameneto $\vec{a}_t = A\,\hat{i}$. In tale sistema le forze agenti sul corpo di massa m sono: la forza peso $\vec{P} = -m\,g\,\hat{j}$, la forza apparente $\vec{F}_{\rm app} = -m\,\vec{a}_t$ e la forza elastica che può essere decomposta in

$$\vec{F}_{\rm el} = \vec{F}_{\rm el\,\|} + \vec{F}_{\rm el\,\perp}$$

con

$$\begin{aligned}\vec{F}_{\rm el\,\|} &= k\,\Delta\ell\,\sin\alpha\,\hat{i}\\ \vec{F}_{\rm el\,\perp} &= k\,\Delta\ell\,\cos\alpha\,\hat{j}\end{aligned}$$

Le condizioni di equilibrio sono

$$\begin{aligned}\vec{F}_{\rm el\,\|} + \vec{F}_{\rm app} &= 0\\ \vec{F}_{\rm el\,\perp} + \vec{P} &= 0\end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{aligned}k\,\Delta\ell\,\sin\alpha &= m\,a_t\\ k\,\Delta\ell\,\cos\alpha &= m\,g\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}\tan\alpha &= \frac{a_t}{g}\\ \Delta\ell &= \frac{m}{k}\,\sqrt{g^2 + a_t^2}\end{aligned}$$

Esercizio 4

Un carrello si muove con accelerazione costante a_t su di un piano orizzontale. Sul carrello è fissato un piano scabro ($\mu_s = 0.7$, $\mu_d = 0.6$) inclinato di un angolo $\phi = \pi/6$ rispetto al piano orizzontale. Sul piano scabro, ad una quota $h = 20\,cm$ rispetto al carrello, è appoggiato un blocco di massa $m = 1\,kg$, inizialmente fermo rispetto al piano. Si calcoli il massimo valore a_t dell'accelerazione del carrello per il quale il blocco rimane fermo rispetto al piano ed il tempo impiegato per giungere alla base del carrello se quest'ultimo si muove con accelerazione $2\,a_t$.

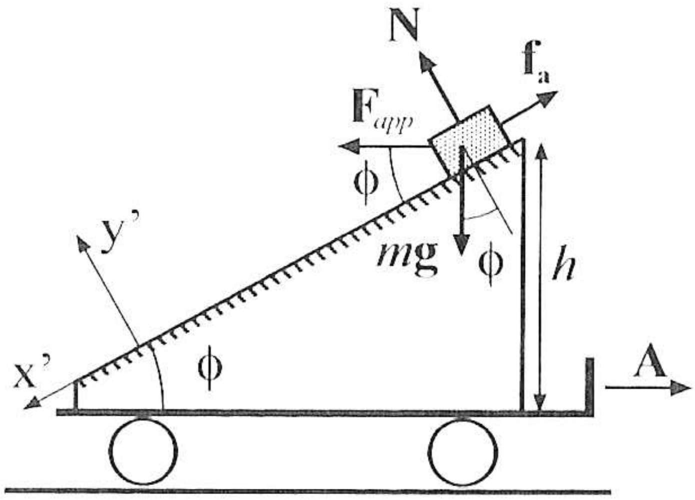

FIG. 3:

Soluzione

Scelto un sistema di riferimento non inerziale solidale con il carrello e con asse x parallelo al piano inclinato, avremo

$$N + F_{app\perp} = P_\perp \ ,$$
$$F_{app\parallel} + P_\parallel - F_{att} = m\,a' \ ,$$

dove a' è l'accelerazione del blocco misurata nel sistema non inerziale ed $F_{app} = m\,a_t$ è la forza apparente misurata nel sistema non inerziale.
Esplicitando, si ottiene

$$N = m\,(g\,\cos\phi - a_t\,\sin\phi) \ ,$$
$$m\,(a_t\,\cos\phi + g\,\sin\phi) - \mu_s\,N = m\,a' \ .$$

Affinchè il blocco non scivoli è necessario che $a' = 0$ da cui

$$m\,(a_t\,\cos\phi + g\,\sin\phi) = \mu_s\,N \qquad \Rightarrow \qquad m\,(a_t\,\cos\phi + g\,\sin\phi) = \mu_s\,m\,(g\,\cos\phi - a_t\,\sin\phi) \ ,$$

che risolto in a_t da

$$a_t = g\left(\frac{\mu_s\,\cos\phi - \sin\phi}{\mu_s\,\sin\phi + \cos\phi}\right) = 9.8\left(\frac{0.7\cdot 0.86 - 0.5}{0.7\cdot 0.5 + 0.86}\right) = 0.82\,m/s^2 \ .$$

Si noti che la massima accelerazione che il sistema può sopportare è data dalla relazione

$$N \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad g\,\cos\phi \geq a\,\sin\phi \qquad \Rightarrow \qquad a \leq g\,\cot\phi = 16.97\,m/s^2 \ .$$

Diversamente, se l'accelerazione del carrello è $a = 2\,a_t$ si avrà

$$m\,(2\,a_t\,\cos\phi + g\,\sin\phi) - \mu_d\,m\,(g\,\cos\phi - 2\,a_t\,\sin\phi) = m\,a'\ ,$$

che risolta in a' darà

$$\begin{aligned} a' &= (2\,a_t - \mu_d\,g)\,\cos\phi + (g + 2\,\mu_d\,a_t)\,\sin\phi \\ &= (2\cdot 0.82 - 0.6\cdot 9.8)\,\sqrt{3}/2 + (9.8 + 2\cdot 0.6\cdot 0.82)\cdot 0.5 = 1.72\,m/s^2\ . \end{aligned}$$

Il moto sarà quindi uniformemente accelerato cosicchè, dalla legge oraria si ricava

$$s = \frac{1}{2}a'\,t^2 \qquad \Rightarrow \qquad t = \sqrt{\frac{2\,h}{a'\,\sin\phi}} = \sqrt{\frac{2\cdot 0.2}{1.72\cdot 0.5}} = 0.68\,s\ .$$