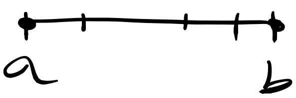
23 - Integrale definito

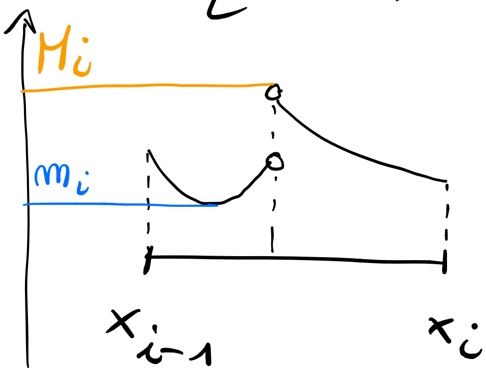
$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ limitata

RICHIAMO:

$\mathcal{P}$ partizione dell' intervallo $[a,b]$



$$\mathcal{P} = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b\}$$



$\exists$ in $\mathbb{R}$:

$$m_i \overset{def}{=} \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

$$M_i \overset{def}{=} \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

$\boxed{m_i (x_i - x_{i-1})}$

$\boxed{M_i (x_i - x_{i-1})}$

se $f \geq 0$ possiamo interpretarle come aree di rettangoli di base $(x_i - x_{i-1})$ e altezza m_i, M_i

- Somma inferiore di RIEMANN corrispondente alla partizione P

$$s(P) \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$$

- Somma superiore di Riemann corrispondente a P:

$$S(P) \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$$

Alcune osservazioni

$\boxed{1}$ $m_i \leq M_i \quad \forall i = 1 \dots n$

$$m_i \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{>0} \leq M_i \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{>0}$$

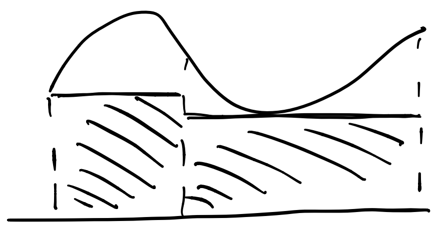
$$\Rightarrow \boxed{s(P) \leq S(P)}$$

data una partizione P, la somma inferiore è minore o uguale alla somma superiore

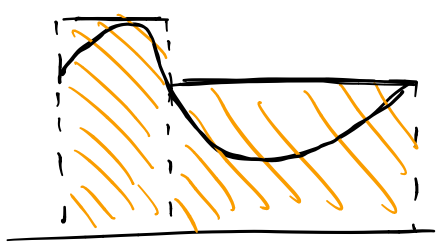
$\boxed{2}$ consideraziome geometrica:

se $f \geq 0$ su $[a,b]$

$s(P)$ = area complessiva dei zettangoli imscritti al sottografico di f



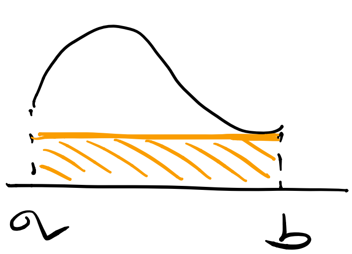
$S(P)$ = area complessiva dei zettangoli circoscritti al sottografico di f

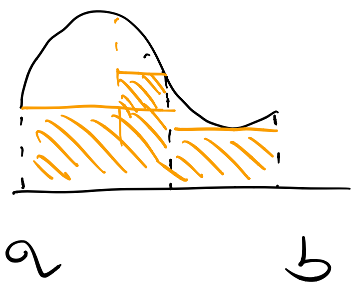


$\boxed{3}$ siano P_1 e P_2 due partizioni di $[a,b]$

allora $P_1 \cup P_2$ è una partizione più fine di P_1 (e di P_2)

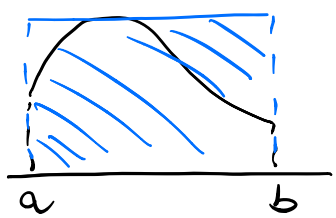
$$s(P_1) \leq s(P_1 \cup P_2)$$

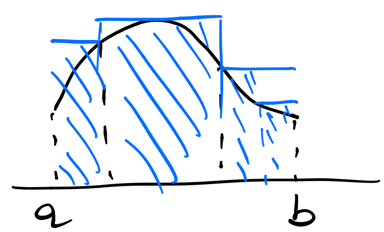




$P_1 = \{a, b\}$

$$S(P_2) \geq S(P_1 \cup P_2)$$





infittendo la partizione P di $[a,b]$
le somme inferiori crescono
e le somme superiori decrescono

$\boxed{4}$ Date P_1, P_2 partizioni di $[a,b]$:

$$(b-a)\inf_{x\in[a,b]} f(x) \leq s(P_1) \leq s(P_1 \cup P_2) \leq S(P_1 \cup P_2)$$

$$\leq S(P_2) \leq (b-a)\sup_{x\in[a,b]} f(x)$$

f limitata in $[a,b] \Rightarrow \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ e $\sup_{x\in[a,b]} f(x)$

sono numeri reali

$\Rightarrow$ $\boxed{s(P) \text{ e } S(P) \text{ sono limitate } \forall P}$

$\boxed{5}$ $s \overset{def}{=} \sup_{P} s(P)$ è un numero reale

$S \overset{def}{=} \inf_{P} S(P)$ è un numero reale

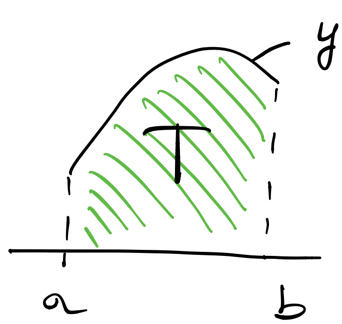
$s(P) \leq S(P) \quad \forall P \Rightarrow \boxed{s \leq S}$

Si dice che f è integrabile secondo Riemann se $s = S$

il valore comune $s = S$ si dice integrale di f su $[a,b]$ e si denota con

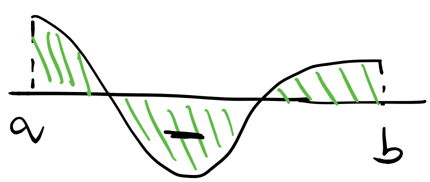
$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx}$$

NOTA: se $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ limitata è integrabile su $[a,b]$ e $f \geq 0$ su $[a,b]$ allora l'integrale di f su $[a,b]$ rappresenta l'area del sottografico di f



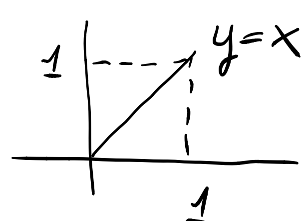
$$\text{area } T = \int_a^b f(x)dx$$

Se f cambia segno,



$\int_a^b f(x)\,dx$ rappresenta "l'area con segno" di f

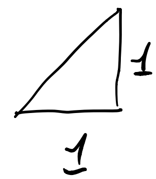
Es: $f(x) = x$



calcolare $\int_0^1 x\,dx$:

$f(x) = x \geq 0$ su $[0,1]$

$$\int_0^1 x\,dx = \text{area triangolo}$$



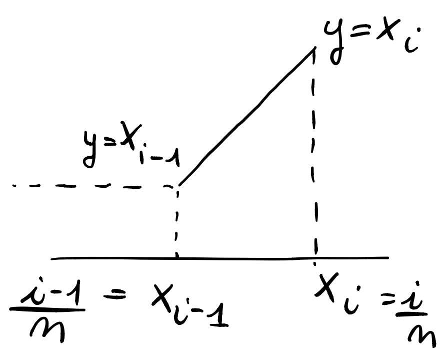
$$= \frac{1}{2}$$

verifichiamo usando la definizione:

$$P \overset{def}{=} \left\{ \frac{i}{n} : i = 0,1,\dots,n \right\}$$

$$x_i \overset{def}{=} \frac{i}{n}$$

$$s(P) \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{n} m_i \, (x_i - x_{i-1})$$



$$m_i \overset{def}{=} \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \overbrace{f(x)}^{f(x) = x} = x_{i-1} = \frac{i-1}{n}$$

$$\Rightarrow s(P) = \sum_{i=1}^{n} \overset{m_i}{\frac{i-1}{n}} \overbrace{\left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n} \right)}^{= 1/n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{i-1}{n^2} = \frac{0}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \dots \frac{n-1}{n^2}$$

$$= \frac{1}{m^2} \sum_{k=1}^{m-1} k = \frac{1}{m^2} \frac{(m-1)m}{2}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & + & 2 & + & \cdots & + & 100 \\ 100 & + & 99 & & & + & 1 \\ \| & & \| & & & & \| \\ 101 & & 101 & & & & 101 \end{array}$$

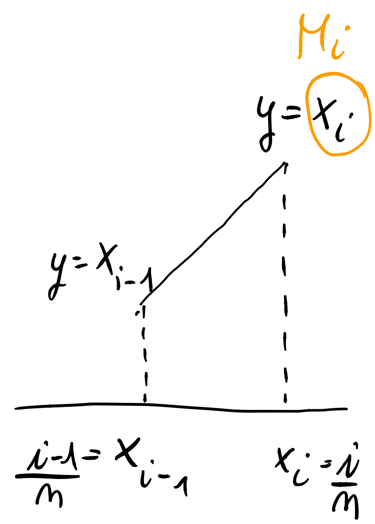
SOMMARE I PRIMI 100 NUMERI:

$$\Rightarrow \cancel{2}\,(1+2+\ldots+100) = \frac{100 \cdot 101}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} i = \frac{m(m+1)}{2}$$

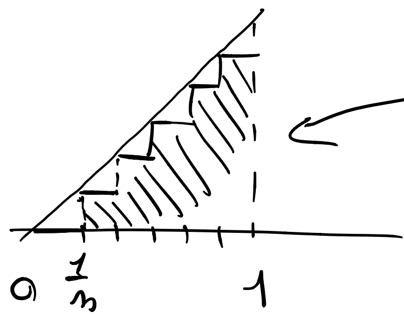
$$S(P) \stackrel{def}{=} \sum_{i=1}^{m} M_i \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{=1/m}$$

dove $M_i \stackrel{def}{=} \sup\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$



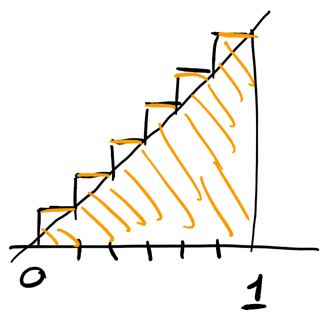
$$\Rightarrow M_i = x_i = \frac{i}{m}$$

$$S(P) = \sum_{i=1}^{m} \frac{i}{m} \frac{1}{m} = \frac{1}{m^2} \sum_{i=1}^{m} i = \frac{m(m+1)}{2m^2}$$



$$s(P) = \frac{(n-1)n}{2n^2}$$

$$s = \sup_P s(P) = \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)n}{2n^2}}_{= \frac{1}{2}}$$



$$S(P) = \frac{n(n+1)}{2n^2}$$

$$S = \inf_P S(P) = \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2}}_{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad s = S = \frac{1}{2}$$

quindi abbiamo verificato che $s = S = \frac{1}{2}$

= area triangolo di base 1 e altezza 1.

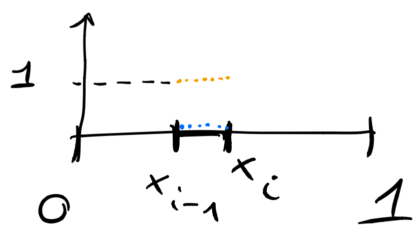
——— o ———

<u>NOTA</u>: esempio di funzione limitata su un intervallo $[a,b]$ che <u>non</u> è integrabile secondo Riemann:

$f: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ limitata

FUNZIONE DI DIRICHLET

$$f(x) \overset{def}{=} \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{se } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$



$$m_i \overset{def}{=} \inf_{x \in (x_{i-1}, x_i)} f(x) = 0$$

$$M_i \overset{def}{=} \sup_{x \in (x_{i-1}, x_i)} f(x) = 1$$

$\forall$ partizione $\mathcal{P}$ di $[0,1]$

$$s(\mathcal{P}) = \sum \underbrace{m_i}_{=0} (x_i - x_{i-1}) = 0 \Rightarrow \sup s(\mathcal{P}) = 0$$

cioè $s = 0$

$$S(\mathcal{P}) = \sum \underbrace{M_i}_{1} (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})$$

$$= \underbrace{(\cancel{x_1} - x_0)}_{i=1} + \underbrace{(\cancel{x_2} - \cancel{x_1})}_{i=2} + \dots + \underbrace{(x_n - \cancel{x_{n-1}})}_{i=n}$$

SOMMA TELESCOPICA

$$= x_n - x_0 = 1 - 0 = 1$$

$$\Rightarrow S(P) = 1 \quad \forall P \Rightarrow \inf_P S(P) = 1$$

cioè $S = 1$

CONCLUSIONE: $0 = s < S = 1$

$\Rightarrow$ la funzione di Dirichlet

NON è integrabile secondo Riemann.

$\boxed{\text{Teorema}}$:

su $[a, b]$ intervallo chiuso e limitato sono integrabili secondo Riemann:

- le funzioni continue
- le funzioni continue a tratti (= hanno un numero finito di discontinuità eliminabili o di tipo salto)
- le funzioni monotone

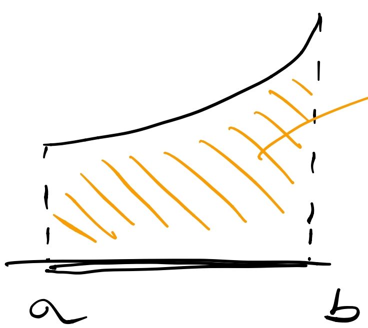
Media integrale:

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrabile sec. Riemann

la media integrale di f su $[a,b]$

$$\boxed{m(f; a,b) \overset{def}{=} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx}$$

Significato geometrico: se $f \geq 0$ su $[a,b]$



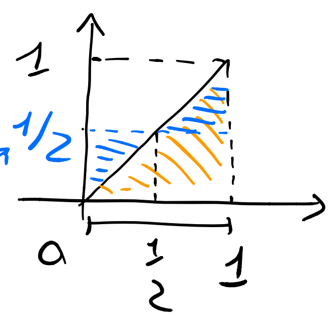
$\int_a^b f(x)\,dx$ rappresenta l'area del sottografico

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{(b-a)\; m(f; a,b)}_{\text{area rettangolo di base } (b-a) \text{ e altezza } m(f;a,b)}$$

formula che definisce la media integrale quindi la media integrale si può interpretare (per $f \geq 0$) come l'altezza del rettangolo, di base $(b-a)$, che ha la stessa area del sottografico di f

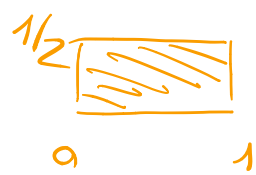
---

es:



$f(x) = x$

$$\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2} = 1 \cdot \frac{1}{2}$$



$$m(f; 0, 1) = \frac{1}{2}$$

Teorema della media integrale:

Sia $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ limitata.

Allora

$\boxed{1)}$ se f è integrabile su $[a,b]$ allora

$$\inf_{x \in [a,b]} f(x) \leq m(f; a, b) \leq \sup_{x \in [a,b]} f(x)$$

$\boxed{2)}$ se f è continua su $[a,b]$ allora $\exists$ $c \in [a,b]$ tale che

$$m(f;a,b) = f(c)$$

<u>Dim</u>:

$\boxed{1)}$: f integrabile su $[a,b]$ per ipotesi

$$m(f;a,b) \overset{def}{=} \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = s = S$$

$$\Rightarrow \ldots \leq s(P) \leq \int_a^b f(x)dx \leq S(P) \leq \ldots$$

$\forall$ partizione P di $[a,b]$

$$\Rightarrow \inf_{x\in[a,b]} f(x)\,\underbrace{(b-a)} \leq \int_a^b f(x)dx \leq \sup_{x\in[a,b]} f(x)\,\underbrace{(b-a)}$$

dividendo per $(b-a)$ si ottiene

$$\inf_{x\in[a,b]} f(x) \leq m(f;a,b) \leq \sup_{x\in[a,b]} f(x)$$ ✓

2): se f è continua su $[a,b]$

$\Longrightarrow$ f ammette massimo e minimo su $[a,b]$ per il teor. di Weierstrass

e questi coincidono con $\sup f(x)$ e $\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, rispettivamente

f continua $\Longrightarrow$ f integrabile

1)

$$\Longrightarrow \min_{x\in[a,b]} f(x) \leq m(f;a,b) \leq \max_{x\in[a,b]} f(x)$$

$\Longrightarrow$ per il teorema dei valori intermedi

$$\exists\, c\in[a,b]: \quad f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

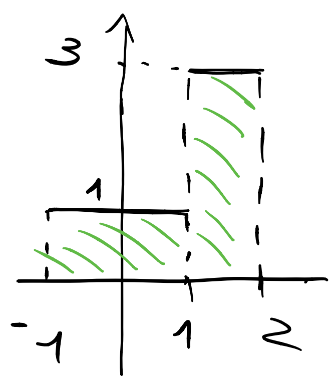
$\square$

es:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 3 & \text{se } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

$f : [-1,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ limitata e continua a tratti $\Rightarrow$ integrabile

$m(f; -1,2) = ?$



per def: $\dfrac{1}{2-(-1)} \displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$

$$= \frac{1}{3}\left(2 \cdot 1 + 1 + 3\right) = \frac{5}{3} = m(f; -1,2)$$

$$\underset{\min f}{\underset{\shortparallel}{\inf f}} = 1 \leq \frac{5}{3} \leq 3 = \underset{\max f}{\underset{\shortparallel}{\sup f}}$$

f non è continua e non $\exists\ c \in [-1,2]$ tale che $f(c) = \dfrac{5}{3}$

Integrale di Riemann orientato

$$\int_a^b f(x)\,dx \qquad \forall \text{ scelta di } a \text{ e } b \text{ reali}$$

$$\int_1^0 f(x)\,dx = ? \qquad \underbrace{\int_1^1 f(x)\,dx}_{=0} = ? \qquad \underbrace{\int_1^2 f(x)\,dx}_{s=S}$$

$$\stackrel{def}{=} -\int_0^1 f(x)\,dx$$

definiamo:

$$\int_a^b f(x)\,dx \stackrel{def}{=} \begin{cases} \underbrace{\sup_P s(P) = \inf_P S(P)}_{\text{cioè quello visto}} & \text{se } a<b \\ 0 & \text{se } a=b \\ -\int_b^a f(x)\,dx & a>b \end{cases}$$

Proprietà dell'integrale orientato

- **LINEARITÀ**: f, g integrabili allora $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$$

in particolare:
- $\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx$
- $\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

- **MONOTONIA**: se f, g integrabili e

$$g(x) \leq f(x) \quad \forall x \quad \text{allora}$$

$$\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx$$

in particolare se $f(x) \geq 0 \quad \forall x$

allora $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

$\not\Leftarrow$

- f integrabile $\boxed{\Longrightarrow}$ $|f|$ integrabile e

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \overset{*}{\leq} \int_a^b |f(x)|\,dx$$

in particolare osserviamo che:

se $f \geq 0$ su $[a,b]$:

allora $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq 0 \Rightarrow \left|\int_a^b f\right| = \int_a^b f$

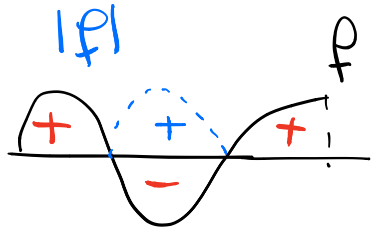
$|f(x)| = f(x)$ su $[a,b] \Rightarrow \displaystyle\int_a^b |f| = \int_a^b f$

quindi se $f \geq 0$ $*$ è $=$

se $f \leq 0$:

$$\left.\begin{aligned} &\int_a^b f \leq 0 \Rightarrow \left|\int_a^b f\right| = -\int_a^b f \\ &|f| = -f \Rightarrow \int |f| = \int -f = -\int f \end{aligned}\right\} * \text{ è } =$$

Se f cambia segno allora in generale avremo una disuguaglianza:



$$\left|\int f\right| \le \int |f|$$

NOTA: f integrabile $\Rightarrow$ $|f|$ integrabile
$$\not\Leftarrow$$

controesempio: ci serve una funzione f che NON sia integrabile ma tale che $|f|$ sia integrabile:

$$f(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} -1 & \text{se } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \\ 1 & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \end{cases}$$

f NON è integrabile $s = -1 \neq S = 1$

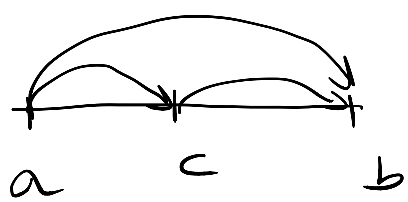
$|f(x)| = 1 \ \forall x \Rightarrow |f|$ è integrabile

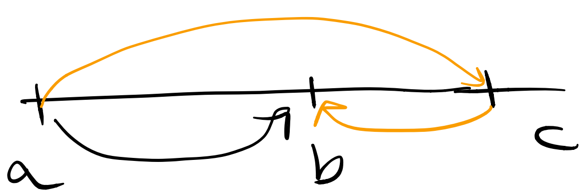
- "ADDITIVITÀ rispetto al dominio":

f integrabile su un intervallo I

allora $\underline{\forall\, a, b, c \in I}$ vale

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{\boxed{c}} f(x)\,dx + \int_{\boxed{c}}^b f(x)\,dx$$





attenzione: la formula vale per qualunque ordine tra a, b e c

---

INTEGRALE INDEFINITO:

Una funzione F si dice primitiva di una funzione f su un intervallo I se F è derivabile e $F' = f$ su I

es: $f(x) = 2x$

una primitiva di f è $F(x) = x^2$

un'altra primitiva di f è $x^2 + 1$

Teorema:

Sia F una primitiva di f su un intervallo I. Allora

G è una primitiva di f su I

$$\Updownarrow$$

$$G = F + c \quad \text{con } c \in \mathbb{R}$$

Dim:

$\boxed{\Uparrow}$: se $G(x) \overset{def}{=} F(x) + c$ con $c \in \mathbb{R}$

tesi: G è una primitiva di f su I:

questo è vero perché G è derivabile in quanto somma di funzioni derivabili su I

e $G'(x) = (F(x)+c)' = F'(x) = f(x)$

$\boxed{\Downarrow}$ sia G un'altra primitiva di f su I

Tesi: $\exists\, c \in \mathbb{R} : \quad G(x) = F(x) + c$:

G primitiva di $f \Rightarrow G$ è derivabile su I

e $\quad G'(x) = f(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ipotesi}}}{=} F'(x)$

$\Longleftrightarrow \quad G'(x) - F'(x) = 0 \quad \forall x \in I$

$\Longrightarrow \quad \big(G(x) - F(x)\big)' = 0 \quad$ su I

$\underset{\uparrow}{\Longrightarrow} \quad \exists\, c \in \mathbb{R} : \quad G(x) - F(x) = c \qquad \checkmark$

tutte e sole le funzioni
a derivata nulla su un intervallo sono le
funzioni costanti

$\square$

integrale indefinito di f = l'insieme
di tutte le primitive di f su I e si
denota con $\displaystyle\int f(x)\,dx$

NOTA: la tabella delle derivate dà anche una tabella di primitive

$$\begin{tikzcd} f \arrow[r, dashed, "\text{DERIVATA DI } f"'] & f' \arrow[l, dashed, bend right, "\text{PRIMITIVA di } f'"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \sin(x) \arrow[r, dashed] & \cos(x) \arrow[l, dashed, bend left] \end{tikzcd}$$

PRIMITIVA di $\cos(x)$ è $\sin(x)$

OSS: vale $\boxed{m(f; a, b) = m(f; b, a)}$

infatti:

$$\underline{m(f; b, a)} \overset{def}{=} \frac{1}{a-b} \int_b^a f(x)\,dx$$

$$= \boxed{-} \frac{1}{a-b} \int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$$

$$= \underline{m(f; a, b)}$$
