

GEOMETRIA

20 Settembre 2017 – 60 minuti

Istruzioni:

- Scrivere cognome, nome, matricola in STAMPATELLO negli appositi spazi.
- Per ogni quiz nella prima parte, indicare l'affermazione giudicata corretta nella tabella in questa pagina.
- Trascrivere la risposta alle singole domande degli esercizi della seconda parte nelle pagine bianche alla fine di ogni esercizio.

COGNOME, NOME: _____

MATRICOLA: _____

DOCENTE: _____

Q1	a	b	c	d
Q2	a	b	c	d
Q3	a	b	c	d
Q4	a	b	c	d

Q5	a	b	c	d
Q6	a	b	c	d
Q7	a	b	c	d
Q8	a	b	c	d

Non scrivere in questo spazio

QUIZ

ESERCIZIO

TOTALE

QUIZ

Q1. Si consideri la superficie S di equazione $x^2 + 2y^2 - z^2 = 4$.

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (a) S è una sfera di centro l'origine;
- (b) l'intersezione di S con il piano $z = 0$ è un'ellisse;
- (c) S è un cono con vertice nell'origine;
- (d) S è un paraboloide a sella.

Q2. Nello spazio siano dati la retta r e il piano π rispettivamente di equazioni

$$(x, y, z) = (t, t, t) \quad \text{e} \quad 2x - y - z - 3 = 0.$$

Dire quale delle seguenti affermazioni è vera.

- (a) r e π sono incidenti;
- (b) r e π sono paralleli;
- (c) r e π sono ortogonali;
- (d) il fascio avente per asse r contiene il piano π .

Q3. La matrice $N := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

- (a) ha un autovalore uguale a zero;
- (b) ha tre autovalori distinti;
- (c) ha un autovettore uguale a $(1, -2, 3)$;
- (d) ha nucleo di dimensione 1.

Q4. E' dato un endomorfismo f di \mathbb{R}^3 tale che

$$f \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Si indichi l'affermazione corretta.

- (a) il vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ appartiene al nucleo di f ;
- (b) f è iniettivo;
- (c) l'immagine di f ha dimensione 3;
- (d) f è invertibile.

Q5. E' data la forma quadratica $f(x, y) = x^2 - 3xy + 8y^2$.

Dire quale delle seguenti affermazioni è vera.

- (a) esiste (x_1, y_1) per cui si ha $f(x_1, y_1) < 0$;
- (b) esiste $(x_2, y_2) \neq (0, 0)$ per cui si ha $f(x_2, y_2) = 0$;
- (c) l'equazione $f(x, y) = -100$ ha infinite soluzioni reali;
- (d) $q(x, y)$ è definita positiva.

Q6. Un sistema lineare $AX = B$ con A matrice quadrata non invertibile

- (a) non è mai risolubile;
- (b) se è risolubile ha esattamente una incognita libera;
- (c) si può risolvere se ogni colonna della matrice B è combinazione lineare delle colonne di A ;
- (d) se è risolubile ha solo la soluzione nulla.

Q7. Siano dati i vettori di \mathbb{R}^3 $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (a) $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ non sono complanari.
- (b) Il volume del parallelepipedo generato dai tre vettori vale 1;
- (c) $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sono linearmente indipendenti;
- (d) Il prodotto misto dei tre vettori vale 0.

Q8. Sia $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ la base canonica di \mathbb{R}^3 e si considerino i seguenti sottospazi:

$$U = \mathcal{L}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3) \quad V = \mathcal{L}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$$

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- (a) $U \cap V$ è l'insieme vuoto;
- (b) $\dim(U \cap V) = 2$;
- (c) $\dim(U + V) = 3$;
- (d) La somma di U e V è diretta.

ESERCIZIO

Esercizio. Sia dato l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definito dalle seguenti condizioni

$$\begin{cases} f(1, 0, 0) = (3, 3, 3) \\ f(0, 1, 0) = (3, 3, 3) \\ f(0, 0, 1) = (3, 3, 3) \end{cases}$$

- (i) Scrivere la matrice che rappresenta f rispetto alle basi canoniche;
- (ii) Trovare equazioni cartesiane per l'immagine di f ;
- (iii) Determinare tutti gli autovalori di f ;
- (iv) Determinare una base per ogni autospazio di f ;
- (v) Dire se esiste una base ortonormale di \mathbb{R}^3 costituita da autovettori di f .

Svolgimento: