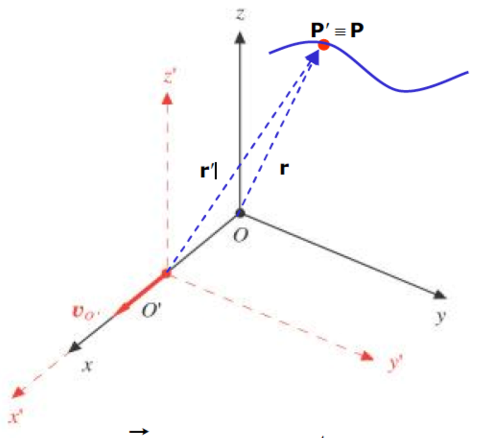
Cinematica e dinamica dei moti relativi
(parte II)

Prof. Stefania Bufalino
Corso PIU-ROR a.a. 2017/2018

Testo di riferimento: Mazzoldi, Nigro, Voci
Lezione del 12 Aprile 2018

Relatività galileana

Sistemi inerziali



abbiamo

$$\begin{cases} \mathbf{r} = \overrightarrow{OO'} + \mathbf{r}' \\ \mathbf{v} = \mathbf{v}_{OO'} + \mathbf{v}' \\ \mathbf{a} = \mathbf{a}_{OO'} + \mathbf{a}' \end{cases}$$

Se O' si muove di moto rettilineo uniforme rispetto ad O

$$\vec{v}_{OO'} = \text{cost}$$

$$\vec{a}_{OO'} = 0 \Rightarrow \vec{a}' = \vec{a}$$

$$\begin{cases} \vec{r} = \overrightarrow{OO'} + \vec{r}' \\ \vec{v} = \vec{v}_{OO'} + \vec{v}' \\ \vec{a} = \vec{a}' \end{cases}$$

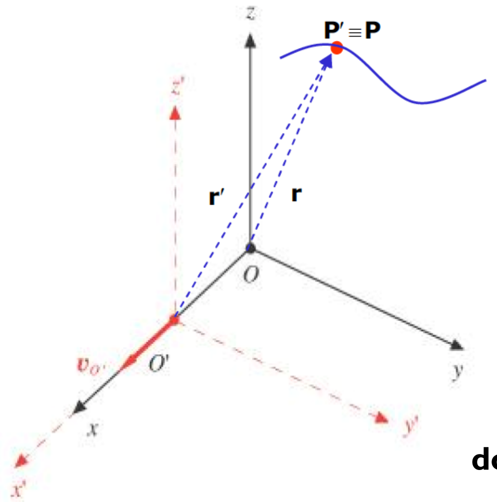
Forze vere: derivanti da interazioni fondamentali

Nel sistema di riferimento O si misura **a** e si deduce che la forza agente è **F** = m**a**
Nel sistema di riferimento O', si misura la stessa **a** e si ricava la stessa forza **F** = m**a**

Non è possibile stabilire, tramite misure effettuate in questi due sistemi, se uno di essi è in quiete o è in moto. Tali sistemi si dicono ***sistemi inerziali.*** → **Relatività Galileana**

Sistemi inerziale: sistema i cui vale rigorosamente la legge di inerzia,
un corpo che si muove con velocità arbitraria in qualunque direzione, si muove di moto rettilineo uniforme o, se è in quiete rimane in quiete

Relatività galileana



Sistemi non inerziali

$$\begin{cases} \mathbf{r} = \overrightarrow{OO'} + \mathbf{r}' \\ \mathbf{v} = \mathbf{v}_{OO'} + \mathbf{v}' \\ \mathbf{a} = \mathbf{a}_{OO'} + \mathbf{a}' \end{cases}$$

Se il sistema O' si muove con velocità variabile

⇓

$\mathbf{v}_{OO'} \neq \text{cost}$ $\mathbf{a}_{OO'} \neq 0$

⇓

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} - \mathbf{a}_{OO'}$$

dove $a_{00'}$=acc (trascinamento) +acc (Coriolis) dal Teorema delle accelerazioni relative

Per cui un **osservatore su O** (nel sistema in quiete)vedrà $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$

mentre **su O'** (sistema accelerato $a_{OO'} \neq 0$)vedrà $\mathbf{F}' = m\mathbf{a}' = m(\mathbf{a} - \mathbf{a}_{OO'}) = \mathbf{F} - m\mathbf{a}_{OO'}$

Forza apparente: non deriva dalle interazioni fondamentali ed esiste solo nei sistemi non inerziali

Un sistema accelerato è un sistema ***non inerziale***: in questo sistema ***non vale la legge di inerzia***, **F**=0 non comporta **a**'= 0 ma **a'=$\mathbf{a}_{OO'}$**. In un sistema non inerziale in assenza di forze fondamentali, **agiscono forze apparenti** $F_{apparenti} = ma_{OO'}$

Sono sistemi inerziali i sistemi in quiete o in moto rettilineo uniforme.

I sistemi per i quali ***$a_{OO'} \neq 0$ non sono inerziali***.

I punti in tali sistemi sono soggetti a forze apparenti

Le forze apparenti non sono dovute a interazioni fondamentali e non esistono in un sistema di riferimento inerziale

Esempio

Sistema: ascensore al cui interno è posta una massa m, in quiete rispetto alle pareti dell'ascensore, appesa al soffitto tramite una molla di costante elastica k

Osservatore a) in quiete rispetto al sistema solidale con il suolo
Osservatore b) in quiete rispetto al sistema solidale con l'ascensore

Possiamo distinguere 2 casi

CASO 1: l'ascensore è fermo o si muove di moto rettilineo uniforme: i due osservatori a) e b) vedono che la molla è allungata rispetto alla lunghezza di riposo di un tratto δ tale da sviluppare una forza di richiamo che equilibri la forza peso

Per a) e b) la risultante delle forze agenti sulla massa è nulla!

Esempio

- CASO 2: l'ascensore si muove di moto uniformemente vario. Supponiamo che l'ascensore scenda verso il basso con un accelerazione *A* che in modulo è minore di *g*.

Osservatore a) sopra il corpo agisce la forza peso mg e la forza di richiamo della molla verso l'alto quindi per lui vale la relazione

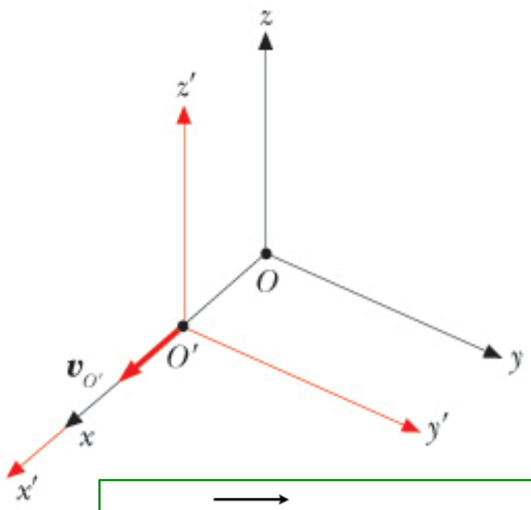
$$mg - k\,\delta = mA$$

Osservatore b) rivela la stessa compressione della molla rivelata da a) ma per lui l'accelerazione del corpo è nulla mentre la risultante delle forze è

$$mg - k\,\delta \neq 0$$

→ per spiegare lo stato di equilibrio e non confutare la validità del principio di Newton l'osservatore deve introdurre l'esistenza nel sistema non inerziale di forze che sono le cosidette FORZE FITTIZIE o APPARENTI

Moto di trascinamento rettilineo uniforme



Caso 1: due sistemi inerziali che si muovono di moto rettilineo uniforme l'uno rispetto all'altro

O' si muove lungo una traiettoria rettilinea con un moto traslatorio lungo l'asse x che coincide in questo caso con l'asse x' e $\mathbf{a}_{oo'}=0$

$$\mathbf{r}=\overrightarrow{OO'}+\mathbf{r}' \Rightarrow \mathbf{r}=\mathbf{v}_{O'}t+\mathbf{r}'$$

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}'+\mathbf{v}_{OO'}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}' \Rightarrow \mathbf{v}=\mathbf{v}'+\mathbf{v}_{OO'}$$

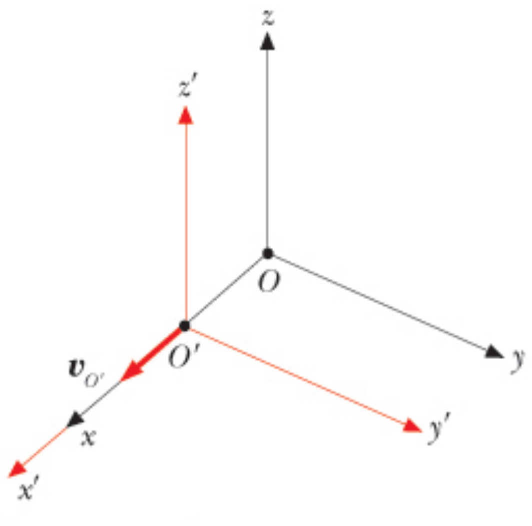
$$\mathbf{a}=\mathbf{a}'+\mathbf{a}_{OO'}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}')+2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}' \Rightarrow \mathbf{a}=\mathbf{a}'$$

Proiettando sugli assi otteniamo

$$\begin{cases} x'=x-v_{O'}t \\ v_x'=v_x-v_{OO'} \\ a'_x=a_x \end{cases} \qquad \begin{cases} y'=y \\ v_y'=v_y \\ a'_y=a_y \end{cases} \qquad \begin{cases} z'=z \\ v_z'=v_z \\ a'_z=a_z \end{cases}$$

Trasformazioni galileane

Moto di trascinamento rettilineo accelerato



Caso 1: O è un sistema inerziale mentre O' non è inerziale

$$\mathbf{a_{oo'}} \neq 0, \ \omega = 0 \ \text{e} \ \mathbf{a_{oo'}} = \mathbf{a_t}$$

O' ha un'accelerazione costante a_t e una velocità iniziale v_{in}, parallele e concordi all'asse x coincidente con x'.
Posizione e velocità di O' si scrivono come:

$$\overrightarrow{OO'} = x_{OO'} = v_{in}t + \frac{1}{2}a_t t^2 \qquad v_{OO'} = v_{in} + a_t t$$

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OO'} + \mathbf{r'} \Rightarrow \mathbf{r'} = \mathbf{r} - \overrightarrow{OO'}$$

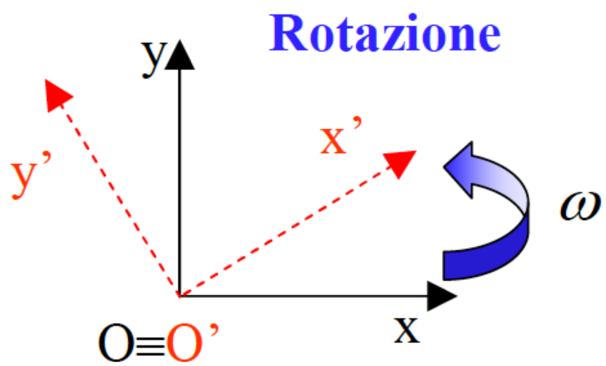
$$\mathbf{v} = \mathbf{v'} + \mathbf{v}_{OO'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r'} \Rightarrow \mathbf{v'} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{OO'}$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a'} + \mathbf{a}_{OO'} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r'}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v'} \Rightarrow \mathbf{a'} = \mathbf{a} - \mathbf{a}_{OO'}$$

Proiettando sugli assi otteniamo

$$\begin{cases} x' = x - v_{in}t - \frac{1}{2}a_t t^2 \\ v_x' = v_x - v_{in} - a_t t \\ a'_x = a_x - a_t \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = y \\ v_y' = v_y \\ a'_y = a_y \end{cases} \qquad \begin{cases} z' = z \\ v_z' = v_z \\ a'_z = a_z \end{cases}$$

Moto di trascinamento rotatorio uniforme



Consideriamo 2 sistemi di riferimento con origine in comune, uno in rotazione rispetto all'altro

ω=costante $a_{OO'}=0$ e $v_{OO'}=0$

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OO'} + \mathbf{r}'$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_{OO'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_{OO'} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$$

$$\begin{cases} \mathbf{r} = \overrightarrow{OO'} + \mathbf{r}' \\ \mathbf{v} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \\ \mathbf{a} = \mathbf{a}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' \end{cases}$$

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$$

$$\boxed{ma' = F + F_{centr} + F_{Cor}}$$

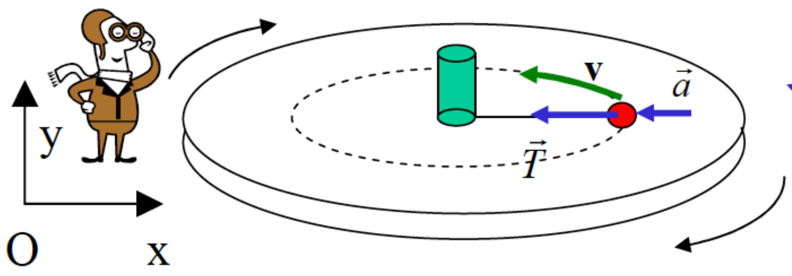
F_{centr}: forza centrifuga $F_{centr} = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$

F_{Cor}: forza di Coriolis $F_{Cor} = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$

Moti relativi: forze centrifuga e di Coriolis

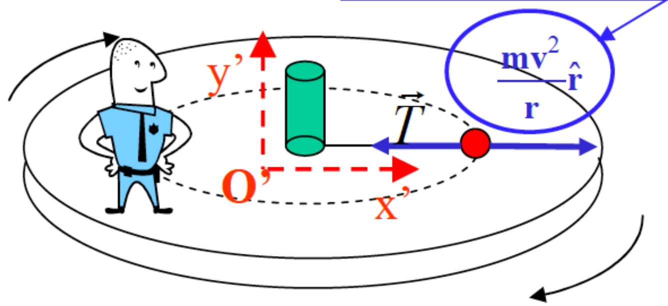
Consideriamo due sistemi di riferimento, uno inerziale O, e l'altro solidale con una piattaforma rotante con velocità angolare ω.

Si lega un punto P con filo all'asse di rotazione e diamo una velocità ωr in modo che il punto ruoti con la stessa velocità angolare del sistema O'



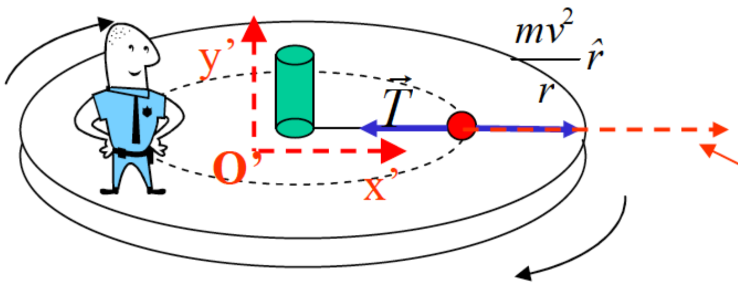
Per O il punto descrive un moto circolare uniforme e l'unica forza in gioco è la tensione del filo T

forza centrifuga



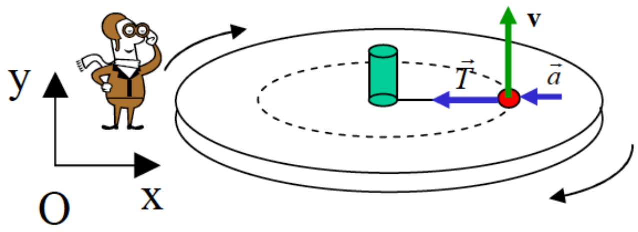
Per O' il punto è fermo **v**'=0 e **a**'=0, ma osservando il filo teso, O' è costretto ad ammettere che esiste un'altra forza che agisca verso l'esterno bilanciando la tensione del filo: la forza centrifuga

Moti relativi: forze centrifuga e di Coriolis

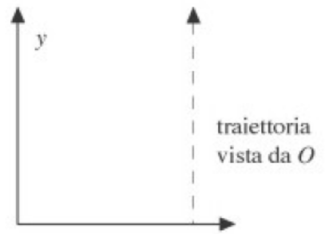


Per verificare la sua ipotesi (esistenza di una forza centrifuga), O’ taglia il filo tra l’origine ed il punto ***e immagina*** di vedere il punto allontanarsi radialmente, sotto l’effetto della forza centrifuga

Dopo il taglio:



dopo il taglio, l’osservatore in **O** vede il punto muoversi di moto rettilineo uniforme in direzione tangente alla circonferenza



dopo il taglio, l’osservatore in **O’** non osserva il moto atteso (rettilineo lungo la direzione radiale), ma osserva un moto curvilineo

O’ deve ipotizzare che sul punto agisca un’altra forza, che non si manifesta quando il corpo è in quiete: ***è la forza di Coriolis***