

# 第三章 复变函数的积分

## 教学要求

1. 了解复变函数积分的定义及性质.
2. 会求复变函数的积分.
3. 理解柯西积分定理.
4. 掌握柯西积分公式和解析函数的高阶导数公式.
5. 了解解析函数无限次可导的性质.
6. 掌握解析函数与调和函数的关系

## 一、积分存在的条件及计算

设  $C: z=z(t) \quad \alpha \leq t \leq \beta$ , 是分段光滑(或可求长)的有向曲线,  
 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$  在  $C$  上连续, 则

$\int_C f(z)dz$  存在, 并且

$$\begin{aligned}\int_C f(z)dz &= \underline{\int_C udx - vdy} + i \underline{\int_C vdx + udy.} \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} f[z(t)]z'(t)dt\end{aligned}$$

## 二、积分模估值性质

设曲线  $C$  的长度为  $L$ , 函数  $f(z)$  在  $C$  上满足

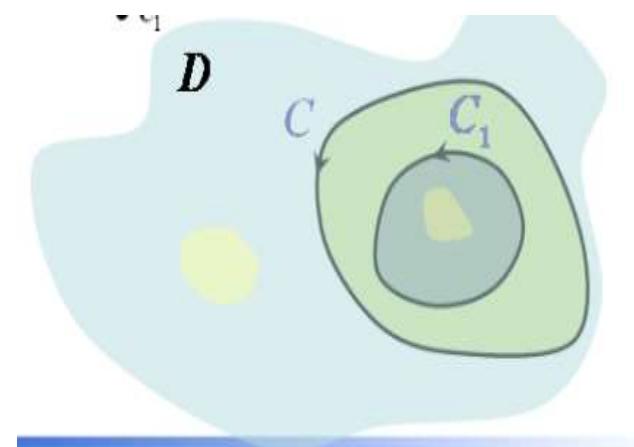
$$|f(z)| \leq M, \text{ 则 } \left| \int_C f(z)dz \right| \leq \int_C |f(z)|ds \leq ML.$$

### 三、柯西-古萨基本定理

(Cauchy积分定理) 设 $f(z)$ 是在单连通区域D内解析，C为D内任一条闭曲线，则  $\oint_C f(z)dz = 0.$

### 四、闭路变形原理

在给定区域内的解析函数 $f(z)$ 沿闭曲线的积分，不因闭曲线在区域内作连续变形而改变它的值，只要在变形过程中曲线不经过 $f(z)$ 的不解析点。  $\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz$



## 五、复合闭路定理

若 $f$ 在正向闭曲线 $C$ 内除有限个点外解析,  $C_1, C_2, \dots, C_n$  分别为  $C$ 内包含  $z_1, z_2, \dots, z_n$  的正向简单闭曲线, 则

$$\oint_C f(z) dz = \sum_{k=1}^n \oint_{C_k} f(z) dz,$$

## 六、柯西积分公式和高阶导数公式

设 $f(z)$ 在区域 $D$ 内处处解析,  $C$ 为 $D$ 内任意一条正向简单闭曲线, 它的内部完全含于 $D$ ,  $z_0$ 为 $C$ 内任意一点, 则

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

- (1) 高阶导数公式说明了一个解析函数的导数仍然是解析函数.
- (2) 高阶导数公式的作用: 不在于通过积分来求导, 而在于通过求导来求积分. 故可以解决围线积分问题.

## 总结复变函数积分的计算方法

- (1) 如果只知道被积函数  $f(z)=u+iv$  在曲线  $C$  上连续, 且  
 $c: z = z(t) = x(t) + iy(t)$  ( $\alpha$  对应起点,  $\beta$  对应终点)

$$\int_c f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f[z(t)] z'(t) dt$$

- (2) 如果被积函数  $f(z)$  在单连通区域  $D$  内解析,

$$\int f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z) dz = F(z) \Big|_{\alpha}^{\beta} = F(\beta) - F(\alpha) \quad (\text{N-L 公式})$$

$$\int_C f(z) dz = 0 \quad (\text{柯西古萨基本定理})$$

(3) 如果被积函数在区域 $D$ 内解析有单个奇点,  $c$ 为包含奇点的任意光滑简单闭曲线的正向,

$$(a) \oint_c \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \begin{cases} 2\pi i, & n=0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \quad (\text{明星公式})$$

$$(b) \oint_c \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i f(z_0) \quad (\text{柯西积分公式})$$

$$(c) \oint_c \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0) \quad (\text{高阶导数公式})$$

说明: 如果被积函数不符合上述形式, 要通过拆项等方法, 使之符合上述形式

(4) 如果被积函数在曲线 $C$ 所包围的区域内有多个奇点, 根据复合闭路定理, 在封闭曲线 $C$ 上的积分可以转化为包含各个奇点的小圆周闭曲线上的积分和.

## 七、解析函数与调和函数的关系

1. 任何在区域  $D$  内的解析函数，它的实部和虚部都是调和函数. 即  $u$  和  $v$  都满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} = 0 \quad \frac{\partial^2 v}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 v}{\partial^2 y} = 0$$

2. 已知解析函数的实部或虚部，求解析函数的方法有：  
(1) 偏积分法； (2) 不定积分法.

**例1** 计算  $\int_C \operatorname{Im}(z) dz$  , 其中  $C$  为:

- (1) 以  $O$  为起点, 以  $B(2,1)$  为终点的线段;
- (2) 从  $O$  点到  $A(2,0)$ , 再到  $B(2,1)$  的折线段.

**解** (1)  $C : z = (2+i)t, \quad 0 \leq t \leq 1$

$$\int_C \operatorname{Im}(z) dz = \int_0^1 t d(2+i)t = (2+i) \frac{1}{2} t^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2}(2+i).$$

(2)  $C = OA + AB \quad OA : z = 2t, \quad 0 \leq t \leq 1;$

$AB : z = 2+it, \quad 0 \leq t \leq 1;$

$$\int_C \operatorname{Im}(z) dz = \int_0^1 0 d(2t) + \int_0^1 t d(2+it) = \frac{1}{2}i.$$

**例2** 设 $C$ 为圆周  $|z-1|=2$ ， 证明不等式  $\left| \int_C \frac{z+1}{z-1} dz \right| \leq 8\pi.$

分析  $\left| \int_C \frac{z+1}{z-1} dz \right| \leq \int_C \left| \frac{z+1}{z-1} \right| ds \leq \frac{1}{2} \int_C |z+1| ds$

解  $\because 2 = |z-1| = |z+1-2| = |z+1-2| \geq |z+1| - 2$

$$\therefore |z+1| \leq 4.$$

$$\left| \int_C \frac{z+1}{z-1} dz \right| \leq \frac{1}{2} \int_C |z+1| ds \leq \frac{1}{2} 4 \cdot 2\pi \cdot 2 = 8\pi.$$

**例3** 计算下列积分

$$(1) \oint_{|z|=1} \frac{\cos(z^{100} + z + 1)}{z^2 + 2z + 4} dz; \quad (2) \oint_{|z|=2} \frac{z}{(9 - z^2)(z + 1)} dz.$$

**解** (1) 因为被积函数的不解析点  $z = -1 \pm \sqrt{3}i$  均不在  $|z|=1$  内，

$$\therefore \oint_{|z|=1} \frac{\cos(z^{100} + z + 1)}{z^2 + 2z + 4} dz = 0.$$

$$(2) \oint_{|z|=2} \frac{z}{(9 - z^2)(z + 1)} dz = \oint_{|z|=2} \frac{\frac{z}{9 - z^2}}{z + 1} dz = 2\pi i \left. \frac{z}{9 - z^2} \right|_{z=-1} = -\frac{\pi i}{4}.$$

## 例4 计算下列积分

$$(1) \oint_C \frac{e^z}{z(z^2+1)} dz \quad C : |z-i| = \frac{3}{2};$$

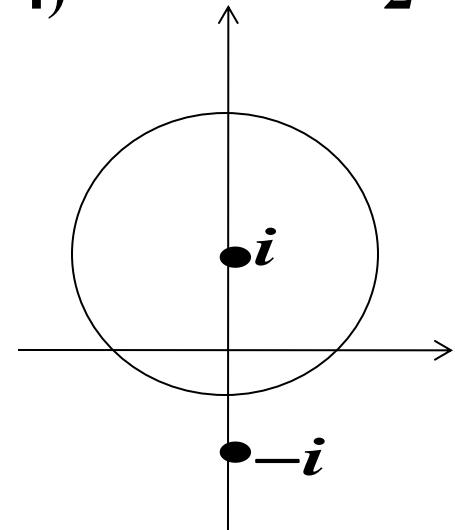
$$(3) \oint_{|z|=2} \frac{\sin z}{(z - \frac{\pi}{2})^2} dz \quad C : |z| = 2.$$

解 (1)  $\oint_C \frac{e^z}{z(z^2+1)} dz = \oint_{|z|=\frac{1}{8}} \frac{e^z}{z} dz + \oint_{|z-i|=\frac{1}{8}} \frac{e^z}{z(z+i)} dz$

$$= 2\pi i \frac{e^z}{z^2+1} \Big|_{z=0} + 2\pi i \frac{e^z}{z(z+i)} \Big|_{z=i}$$

$$= \pi [\sin 1 + (2 - \cos 1)i]$$

$$(2) \oint_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)} dz \quad C : |z| = \frac{3}{2};$$



$$\begin{aligned}
(2) \oint_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)} dz &= \oint_{|z-i|=\frac{1}{4}} \frac{\frac{1}{(z+i)(z^2+4)}}{z-i} dz + \oint_{|z+i|=\frac{1}{4}} \frac{\frac{1}{(z-i)(z^2+4)}}{z+i} dz \\
&= 2\pi i \left[ \frac{1}{(z+i)(z^2+4)} \right]_{z=i} + 2\pi i \left[ \frac{1}{(z-i)(z^2+4)} \right]_{z=-i} = 2\pi i \left[ \frac{1}{6i} - \frac{1}{6i} \right] = 0.
\end{aligned}$$

$$(3) \oint_{|z|=2} \frac{\sin z}{(z - \frac{\pi}{2})^3} dz = \frac{2\pi i}{(3-1)!} (\sin z)'' \Big|_{z=\frac{\pi}{2}} = -\pi i.$$

**例2** 已知调和函数  $v = e^x \sin y$ , 试求一解析函数

$$f(z) = u + iv, \text{ 使 } f(0) = 0.$$

**解 法一 偏积分法**

$$u_x = v_y = e^x \cos y,$$

$$u = \int v_y dx = \int e^x \cos y dx = e^x \cos y + C(y)$$

$$u_y = -e^x \sin y + C'(y) = -v_x = -e^x \sin y,$$

$$C'(y) = 0, \quad C(y) = C.$$

$$f(z) = u + iv = e^x \cos y + ie^x \sin y + C$$

$$f(0) = 1 + C = 0, \quad C = -1.$$

$$f(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y - 1 = e^z - 1$$

**法二 不定积分法**       $v = e^x \sin y,$

$$u_x = v_y = e^x \cos y, \quad v_x = e^x \sin y,$$

$$f'(z) = u_x + i v_x$$

$$= e^x \cos y + i e^x \sin y,$$

$$= e^z. \quad (x = z, y = 0)$$

$$\Rightarrow f(z) = e^z + C$$

$$f(0) = 1 + C = 0, \quad C = -1.$$

$$f(z) = e^z - 1$$