第一章　复数与复变函数

教学要求

1. 掌握复数的各种表示方法及其运算.

2. 了解区域的概念.

3. 理解复变函数的概念.

4. 理解复变函数的极限和连续的概念.

一、复数的代数运算

设两复数 $z_1=x_1+iy_1$ 和 $z_2=x_2+iy_2$

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_2y_1 + x_1y_2)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^{\ 2} + y_2^{\ 2}} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^{\ 2} + y_2^{\ 2}}$$

共轭复数及性质 $z = x + iy \Rightarrow \bar{z} = x - iy$

(1) $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$; $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$; $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.

(2) $\bar{\bar{z}} = \overline{(\bar{z})} = z$

(3) $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$.

(4) $z + \bar{z} = 2x,\quad z - \bar{z} = 2iy$.

二、复数的表示方法

1）代数式 $z = x + iy \Rightarrow$

2）三角式 $z = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$

3）指数式 $z = re^{i\theta}$

三、复数的模不等式

$|x| \le |z|,\ |y| \le |z|$ $|z| \le |x| + |y|$

$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|,$ $|z_1 - z_2| \ge \big||z_1| - |z_2|\big|$

四、复数的乘幂与方根

$$z = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$$

1）乘幂 $z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta).$

$$z^n = r^n e^{in\theta}.$$

2）方根 $w_k = \sqrt[n]{z} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$

$$(k = 0, 1, 2, \cdots, n-1).$$

$$w_k = r^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i(\theta + 2k\pi)}{n}}$$

一般情况下，非零复数z的n次方根几何上就是以原点为中心，$\sqrt[n]{r}$为半径的圆的正n边形的n个顶点.

五、复变函数及其极限与连续性

1）复变函数$w=f(z)$, 相当于两个二元实变函数，

$$u=u(x,y),v=v(x,y)$$

几何上可以看成是两个平面之间的映射.

2）复变函数的极限（注意其与一元函数极限的不同之处）

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=A=a+ib \Leftrightarrow \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=a, \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=b.$$

3）复变函数的连续性

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0) \Leftrightarrow \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=u(x_0,y_0), \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=v(x_0,y_0).$$

1、 若$|z|=1, w=z^n+\frac{1}{z^n}$（n为正整数），则（A）

A、$\mathrm{Im(w)}=0$ B、$\mathrm{Re(w)}=0$

C、$\arg(w)=0$ D、以上答案均不对

2、$|z+i|>|z-i|$所表示的平面区域为（ B ）

A、单位圆的外部 B、上半平面

C、下半平面 D、单位圆的内部

3、复数$\frac{(\sqrt{3}-i)^4}{(1-i)^8}$的辐角主值为（ D ）

A、$\frac{4}{3}\pi$ B、$\frac{1}{3}\pi$ C、$-\frac{1}{3}\pi$ D、$-\frac{2}{3}\pi$

1、 Arg(i)=（ B ）

A、$\frac{\pi}{2}$　　B、$\frac{\pi}{2}+2k\boldsymbol{\pi}$ （**k为整数**）

C、$-\frac{\pi}{2}$　　D、$-\frac{\pi}{2}+2k\boldsymbol{\pi}$ （**k为整数**）

2、$(1+i)^n+(1-i)^n=$（ C ），其中n为正整数。

A、$2(\sqrt{2})^n sin\frac{n\pi}{4}$　　B、$2(\sqrt{2})^n isin\frac{n\pi}{4}$

C、$2(\sqrt{2})^n cos\frac{n\pi}{4}$　　D、$2(\sqrt{2})^n icos\frac{n\pi}{4}$

3、设$z_1=5-5i$, $z_2=2+i$，则$\left(\frac{\overline{z_1}}{z_2}\right)=$（ C ）

A、$-3-\mathrm{i}$　　B、$3-\mathrm{i}$　　C、$3+\mathrm{i}$　　D、$-3+\mathrm{i}$

4、方程$|z\text{-}2i| = |z+2|$所表示的曲线为(B)

A、以$2i$为圆心，半径为2的圆周

B、是连接-2和$2i$两点直线段的垂直平分线

C、是连接2和$2i$两点直线段的垂直平分线

D、以2为圆心，半径为2的圆周

1、如果等式$\frac{(x+1)+i(y-3)}{5+3i}=1+i$成立，求实数$x$和$y$。

$x=1; y=11$

7、一复数对应的向量按顺时针方向旋转$\frac{\pi}{3}$时对应的复数为$1+i$，求原复数。

$$\frac{1-\sqrt{3}}{2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}i$$

8、求极限$\lim\limits_{z\to 1}\frac{z\bar{z}+2z-\bar{z}-2}{z^2-1}$。

$$\frac{3}{2}$$

5、求$\sqrt[4]{1+i}$的值。

$$\sqrt[8]{2}\left(cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}+isin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}\right), k=0,1,2,3$$

6、已知$\mathrm{z}=\frac{(1+\mathrm{i})(\cos\sqrt{3}-\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(\cos\sqrt{3}+\mathrm{i})}$，求$|\mathrm{z}|$。

1

第二章　解析函数

教学要求

1. **理解**复变函数的导数与复变函数解析的概念.

2. **掌握**复变函数解析的充要条件.

3. **了解**指数函数、对数函数、幂函数、三角函数的定义及它们的主要性质.

一、函数$f(z)$解析的概念

若$f(z)$在 z_0 的邻域内处处可导, 则称 $f(z)$在z_0 处解析.

如果$f(z)$在区域D内处处解析，则称$f(z)$在D内解析.

注意：　函数在一点解析与在一点可导不等价,解析要求高.

函数在区域内解析与在区域内可导等价.

二、函数可导与解析的判定方法

(1) 利用定义、求导公式或求导法判定函数的可导性.

(2) 利用函数可导、解析的充分条件：一阶偏导连续，且

u和v满足C-R方程.　$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

(3) 利用函数可导、解析的充要条件：

即 验证u和v是否满足C-R方程，以及u和v是否可微.

并有求导公式 $$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$$

(4) 如果$f(z)$解析，$g(z)$不解析，则$f(z)g(z)$在$f(z)\neq 0$时不解析.

三、复变初等函数

$(1)\exp z=e^x(\cos y+i\sin y)$，是在复平面上处处解析的单值函数，且$(e^z)'=e^z$．其周期为$2k\pi i$.

$(2)\ \mathrm{Ln}z = \ln|z| + i\mathrm{Arg}z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi) \quad (k = 0, \pm1, \pm2, \cdots).$

具有无穷多值，在除去原点和负实轴的平面上处处解析.

且 $(\mathrm{Ln}z)' = \frac{1}{z}.$

$(3)\ a^b = e^{b\mathrm{Ln}a}$ 是多值的，在除去原点和负实轴的平面上处处解析；

整幂次幂 z^n 是单值解析的，且 $(z^n)' = nz^{n-1}.$

$(4)\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i};\ \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2};$ 在复平面上处处解析，且

$(\sin z)' = \cos z,\quad (\cos z)' = -\sin z$ 其周期为 2π. ,为无界函数.

4、设$f(z)=ze^{\bar{z}}$，则（ A ）

A、$f(z)$仅在$z=0$处可导

B、$f(z)$在复平面上处处不可导

C、$f(z)$在复平面上处处可导

D、$f(z)$仅在$z=0$处解析

5、设$f(z)=cosz$，则下列命题正确的是（ C ）

A、$f(z)=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2}$

B、$|f(z)|$是有界的

C、$f(z)$在复平面上处处解析

D、$f(z)$以π为周期

6、关于复数的对数函数，下面公式正确的是（ A ）

A、$Ln(z_1z_2)=Lnz_1+Lnz_2$

B、$lnz^2=2lnz$

C、$ln(z_1z_2)=lnz_1+lnz_2$

D、 $Lnz^2=2Lnz$

7、方程$e^z = 1 + \sqrt{3}i$的解为（ B ）

A、$ln2 + i\frac{\pi}{3}$　　B、$ln2 + i\left(2k\pi + \frac{\pi}{3}\right)$，$k \in Z$

C、$ln2 + \frac{\pi}{3}$　　D、$ln2 + i2k\pi$，$k \in Z$

8、设$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$，那么$u(x,y)$与$v(x,y)$在点(x_0,y_0)可微是$f(z)$在点$z_0 = x_0 + iy_0$可微的（ B ）

A、充分但非必要条件　　B、 必要但非充分条件

C、 充分必要条件　　D、既非充分也非必要条件

1、设$f(z)=\bar{z}z^3$，则（ A）

A、$f(z)$仅在$z=0$处可导　　B、$f(z)$在复平面上处处不可导

C、$f(z)$在复平面上处处可导　　D、$f(z)$仅在$z=0$处解析

2、若$e^{z_1}=e^{z_2}$，则（B）

A、$z_1=z_2+ik\boldsymbol{\pi}$ （k为整数）　B、$z_1=z_2+2ik\boldsymbol{\pi}$ （k为整数）

C、$z_1=z_2+2k\boldsymbol{\pi}$ （k为整数）　D、$z_1=z_2$

3、$lnz=\frac{\pi}{2}i$的解为（ D）

A、πi　　B、$-i$　　C、$-\pi i$　　D、i

4、设$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，下列命题正确的是（ C ）

A、$f(z)$在曲线C上可导，则$f(z)$一定在曲线C上解析

B、$f(z)$在z_0处可导，而$f(z)$在z_0的邻域内未必可导，由此得出，如果$f(z)$在z_0处解析，则$f(z)$ 在z_0的邻域内也未必解析

C、$f(z)$在曲线C上解析，则$f(z)$一定在曲线C上可导

D、$u(x,y),v(x,y)$均在z_0处可微，则$f(z)$在z_0处解析

4、设$f(z)=x^2+2xy+ay^2+i(-x^2+bxy+y^2)$，问常数$a,b$取何值时，$f(z)$在复平面上处处解析？并求此时的导数。

$a=-1; b=2; f'(z)=2z-2iz$

第三章　复变函数的积分

教学要求

1. 了解复变函数积分的定义及性质.
2. 会求复变函数的积分.
3. 理解柯西积分定理.
4. 掌握柯西积分公式和解析函数的高阶导数公式.
5. 了解解析函数无限次可微的性质.
6. 掌握解析函数与调和函数的关系

一、积分存在的条件及计算

设C：$z=z(t)$ $\alpha \le t \le \beta$，是分段光滑(或可求长)的有向曲线，

$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在C上连续，则

$\int_C f(z)\mathrm{d}z$ 存在，并且

$$\int_C f(z)dz = \int_C u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y + i\int_C v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y.$$

$$= \int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)\mathrm{d}t$$

二、积分模估值性质

设曲线C的长度为L，函数$f(z)$在C上满足

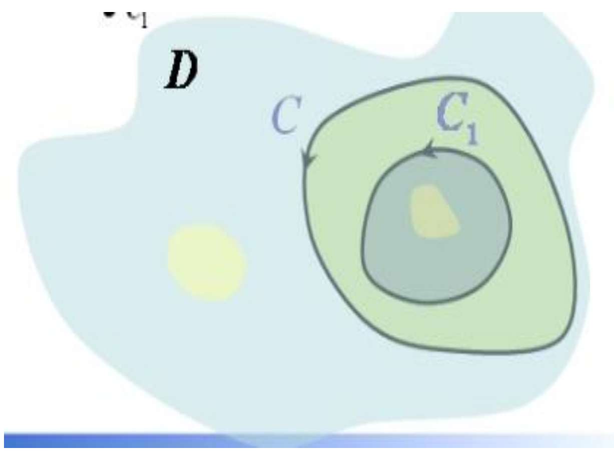
$|f(z)| \le M$，则 $\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \le \int_C |f(z)|\mathrm{d}s \le ML.$

三、柯西-古萨基本定理

(Cauchy积分定理) 设$f(z)$是在单连通区域D内解析， C为D内任一条闭曲线，则 $\oint_C f(z)dz = 0.$

四、闭路变形原理

在给定区域内的解析函数$f(z)$沿闭曲线的积分，不因闭曲线在区域内作连续变形而改变它的值，只要在变形过程中曲线不经过$f(z)$的不解析点.



$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz$$

五、复合闭路定理

若f在正向闭曲线C内除有限个点外解析，$C_1, C_2, \cdots, C_n$

分别为 C内包含 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 的正向简单闭曲线，则

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)\mathrm{d}z,$$

六、柯西积分公式和高阶导数公式

设$f(z)$在区域D内处处解析，C为D内任意一条正向简单闭曲线，它的内部完全含于D，z_0为C内任意一点，则

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\mathrm{d}z.$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z$$

（1）柯西积分公式说明了一个解析函数的导数仍然是解析函数.

（2）高阶导数公式的作用：不在于通过积分来求导, 而在于通过求导来求积分. 故可以解决围线积分问题.

总结复变函数积分的计算方法

（1）如果只知道被积函数$f(z)=u+iv$在曲线C上连续，且

$$c: z = z(t) = x(t) + iy(t) \quad （\alpha 对应起点，\beta 对应终点）$$

$$\int_c f(z)dz = \int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)dt$$

（2）如果被积函数$f(z)$在单连通区域D内解析，

$$\int_c f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(z)dz = F(z)\Big|_\alpha^\beta = F(\beta) - F(\alpha) \quad （\text{N-L公式}）$$

$$\oint_C f(z)dz = 0 \quad (\text{柯西古萨基本定理}）$$

（3）如果被积函数在区域D内解析有单个奇点，c为包含奇点的任意光滑简单闭曲线的正向，

$$(a)\oint_c \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}dz=\begin{cases}2\pi i, & n=0\\ 0, & n\neq 0\end{cases}$$ （明星公式）

$$(b)\oint_c \frac{f(z)}{z-z_0}dz=2\pi i f(z_0)$$ （柯西积分公式）

$$(c)\oint_c \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz=\frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z_0)$$ （高阶导数公式）

说明：如果被积函数不符合上述形式，要通过拆项等方法，使之符合上述形式

（4）如果被积函数在曲线C所包围的区域内有多个奇点，根据复合闭路定理，在封闭曲线C上的积分可以转化为包含各个奇点的小圆周闭曲线上的积分和.

七、解析函数与调和函数的关系

1.任何在区域D内的解析函数，它的实部和虚部都是调和函数. 即u 和 v 都满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2 u}{\partial^2 y}=0 \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2 v}{\partial^2 y}=0$$

2.已知解析函数的实部或虚部，求解析函数的方法有：

（**1**）偏积分法；（**2**）不定积分法.

9、设函数$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$是解析函数，则下列结论错误的是（ B ）

A、$-u$是v的共轭调和函数　　B、u是v的共轭调和函数

C、$3v$是$3u$的共轭调和函数　　D、v是u的共轭调和函数

10、设c为正向圆周$|z|=\frac{3}{2}$与负向圆周$|z|=1$所组成的复合闭路，则$\oint_c \frac{dz}{z^2(z^2+4)}=$（ B ）

A、1　　B、0　　C、$-\pi$　　D、π

1、设函数$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在区域D内解析，则下列等式中错误的是（ C ）

A、$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$　　B、$f'(z)=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}$

C、$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y}$　　D、$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}$

2、设 $c_1:|z|=1$ 为负向，$c_2:|z|=3$ 为正向，则 $\oint_{c=c_1+c_2}\frac{sinz}{z^2}\mathrm{d}z=$（ B ）

A、$-2\pi i$　　B、0

C、$2\pi i$　　D、$4\pi i$

2、求$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=2}\frac{e^{2z}}{z^2+z}dz+e^{-2}$。

$$1$$

3、计算积分$\int_0^{1+i}[(x-y)+ix^2]dz$，积分路径：自原点沿实轴到1，再由1垂直向上至$1+i$。

$$-\frac{1}{2}+\frac{5}{6}i$$

4、计算积分$\oint_c \frac{\bar{z}}{|z|}dz$的值，其中$c$为正向圆周$|z|=4$。

$$8\pi i$$

5、求积分$\int_0^{\mathrm{i}} \mathrm{z}e^{z^2}\,dz$。

$$-\frac{1}{2}(cos1-1)$$

6、计算积分$\oint_{|z|=2}\frac{e^z}{z(1-z)^3}dz$的值。

$$(2-e)\pi i$$

3、求积分$\oint_{|z|=1}\frac{\sin(z)}{z(z-2)^2}dz$。

$\mathbf{0}$

4、求积分$\oint_{|z|=4}\frac{e^z}{(z-\pi i)^5}dz$

$-\frac{\pi i}{12}$

5、求积分$\int_0^i z\cos(z)dz$。

$e^{-1}-1$

6、计算积分$\int_C \arg(z)dz$，其中C是直线段$z=(1+i)t$，$1\le t\le 2$，起点为$1+i$。

$\frac{\pi}{4}(1+i)$

7、设$f(z)=\oint_{|\xi|=4}\frac{e^{\xi}}{\xi-z}d\xi$，其中$|z|\neq 4$，求$f'(\pi i)$的值。

$-2\pi i$