§2.2 解析函数的充要条件

- 1. 解析函数的充要条件
- 2. 举例

如果复变函数 $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$在定义域 D内处处可导，则函数 $w = f(z)$ 在 D内解析。

问题　如何判断函数的解析性呢？

本节从函数 $u(x, y)$ 及 $v(x, y)$ 的可导性，探求函数$w=f(z)$ 的可导性，从而给出判别函数解析的一个充分必要条件，并给出解析函数的求导方法。

定理1 设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在 D 内有定义，

则 $f(z)$在点 $z=x+iy\in D$处可导的充要条件是

$u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在点 (x,y) 可微，且满足

Cauchy-Riemann方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\qquad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$$

上述条件满足时,有

$$f'(z)=u_x+iv_x=u_x-iu_y=v_y-iu_y=v_y+iv_x$$

定理2 函数$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在D内解析充要条件是 $u(x, y)$ 和 $v(x,y)$在D内可微，且满足Cauchy-Riemann方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$$

由此可以看出可导函数的实部与虚部有密切的联系. 当一个函数可导时, 仅由其实部或虚部就可以求出导数来.

利用该定理可以判断那些函数是不可导的.

使用时: i) 判别 $u(x, y)$， $v(x, y)$ 偏导数的连续性，

ii) 验证C-R条件.

iii) 求导数:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}$$

前面我们常把复变函数看成是两个实函数拼成的，但是求复变函数的导数时要注意，并不是两个实函数分别关于x, y求导简单拼凑成的.

二. 举例

例1 判定下列函数在何处可导，在何处解析：

$$(1)w=\bar{z};\quad (2)f(z)=e^{x}(\cos y+i\sin y);\quad (3)w=|z|^{2}$$

解 (1) 设$z=x+iy$ $w=x-iy$ $u=x,$ $v=-y$ 则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1 \quad \frac{\partial u}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=0 \quad \frac{\partial v}{\partial y}=-1$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}\neq\frac{\partial v}{\partial y}$$

故 $w=\bar{z}$在全平面不可导，不解析。

解(2)$\because f(z)=e^x(\cos y+i\sin y)$ 则 $u=e^x\cos y$, $v=e^x\sin y$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-e^x\sin y$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}=e^x\sin y \quad \frac{\partial v}{\partial y}=e^x\cos y$$
$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$$

故 $f(z)=e^x(\cos y+i\sin y)$在全平面可导，解析。

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=e^x\cos y+ie^x\sin y=f(z)$$

解 (3) 设$z=x+iy$　$w=x^2+y^2$　$u=x^2+y^2$，$v=0$ 则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x \quad \frac{\partial u}{\partial y}=2y \quad \frac{\partial v}{\partial x}=0 \quad \frac{\partial v}{\partial y}=0 \Rightarrow$$

仅在点$z=0$处满足C-R条件，故

$w=|z|^2$仅在$z=0$处可导，但处处不解析。

例2 求证函数

$$w = u(x,y) + iv(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$$

在$z = x + iy \neq 0$处解析，并求$\dfrac{dw}{dz}$.

证明 由于在$z\neq 0$处，$u(x,y)$及$v(x,y)$都是可微函数，且满足C-R条件：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

故函数$w=f(z)$在$z\neq 0$处解析，其导数为

$$\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}+i\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$=-\frac{(x-iy)^2}{(x^2+y^2)^2}=-\frac{1}{z^2}$$

例3 若$f'(z)\equiv 0,\ z\in D \Rightarrow f(z)=C,\ z\in D$

证明 $\Theta\ f'(z)=u_x+iv_x=\frac{1}{i}u_y+v_y\equiv 0$

$$\therefore u_x=v_x=u_y=v_y=0$$

$\Rightarrow u=C_1 \quad v=C_2 \quad f(z)=C_1+iC_2=C$(复常数)

练习： 1.判别$f(z)=x^2-iy$的可导性与解析性.

2.判别$f(z)=zRe(z)$的可导性与解析性.

3.设$f(z)=x^2+axy+by^2+i(cx^2+dxy+y^2)$，

a,b,c,d为何值时，$f(z)$在复平面处处解析？

并求出其导数.

$$a=2\ ,\ b=-1\ ,\ c=-1\ ,\ d=2$$

4.若$f(z)=u+iv$解析，证明$\overline{i\overline{f(z)}}$也解析.

结论：

1.若$f(z)$在区域D内解析，且$|f(z)|$在区域D内为一常数，

则$f(z)$在区域D为常数.

2.若$f(z)$在区域D内解析，且$\overline{f(z)}$在区域D内也解析，

则$f(z)$在区域D为常数.