

## 第三节 Taylor级数

1 Taylor级数展开定理

2 将函数展开成Taylor级数

## 3.1 Taylor级数展开定理

实函数在一点的邻域内展开成Taylor级数是非常重要的问题，它是表示函数、研究函数性质以及进行数值计算的一种工具。

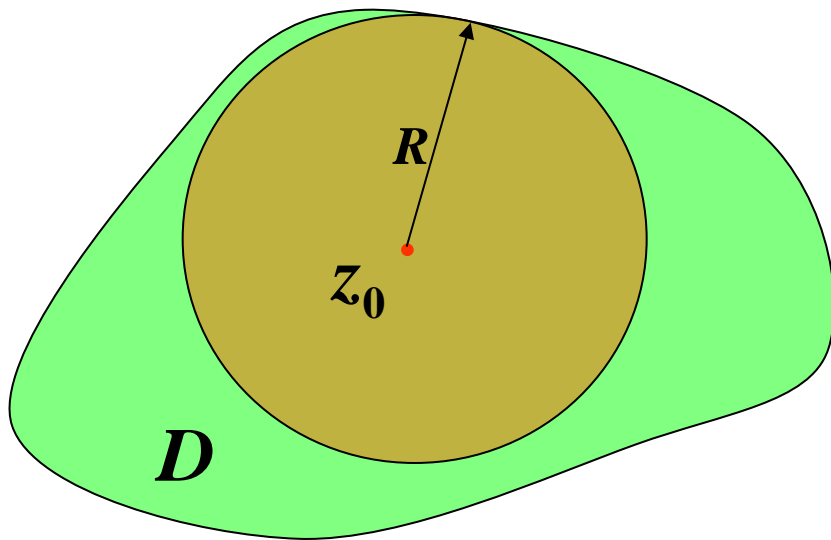
对于复变函数，我们已经知道幂级数在收敛圆域内收敛于解析函数。在本节我们将证明解析函数在解析点的某邻域内一定能够展开成幂级数——Taylor级数。这是解析函数的重要特征。

**定理4.10 (Taylor展开定理)** 设  $f(z)$  在区域  $D$  内解析,  $z_0$  为  $D$  内的一点,  $R$  为  $z_0$  到  $D$  边界的距离 ( $D$  是全平面时,  $R=+\infty$ ), 则  $f(z)$  在  $|z - z_0| < R$  内可展开为幂级数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

$$\text{其中 } c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). 系数  $c_n$  按上述表示的幂级数称为  $f(z)$  在  $z_0$  点的 **Taylor级数**.



## Taylor展开式的唯一性定理

定理4.11 设  $f(z)$  是  $D$  上的解析函数,  $z_0$  是  $D$  内的点, 且在  $|z - z_0| < R$  内可展成幂级数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c'_n (z - z_0)^n,$$

则这个幂级数是  $f(z)$  在  $z_0$  点的Taylor级数, 即

$$c'_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

**注** 这个定理为把函数展开成Taylor级数的间接方法奠定了基础.

## 3.2 将函数展开成Taylor级数

将函数展开为Taylor级数的方法：

1. 直接方法； 2. 间接方法.

### 1. 直接方法

由Taylor展开定理计算级数的系数

$$c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

然后将函数  $f(z)$  在  $z_0$  展开成幂级数.

例3.1 求  $f(z) = e^z$  在  $z = 0$  的Taylor展开式.

解 因为  $f(z) = e^z$  在复平面上解析, 且

$$f^{(n)}(0) = (e^z)^{(n)} \Big|_{z=0} = e^z \Big|_{z=0} = 1,$$

所以它在  $z = 0$  处的Taylor级数为

$$\begin{aligned} e^z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \\ &= 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots, \end{aligned}$$

并且收敛半径  $R = +\infty$ .

## 2. 间接方法

借助于一些已知函数的展开式, 结合解析函数的性质, 幂级数运算性质 (逐项求导, 逐项积分等) 和其它的数学技巧 (代换等), 求函数的 **Taylor** 展开式.

### 间接法的优点:

不要求各阶导数与收敛半径, 因而比直接展开更为简洁, 使用范围也更为广泛.

### 例3.2 利用

本例利用直接方法也很简单

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{1}{2} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (iz)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-iz)^n \right],$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots,$$

并且收敛半径  $R = +\infty$ . 同理

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \quad (|z| < +\infty).$$



## 附: 常见函数的Taylor展开式

$$(1) e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad (|z| < \infty)$$

$$(2) \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad (|z| < 1)$$

$$(3) \frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \cdots + (-1)^n z^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \quad (|z| < 1)$$

$$(4) \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$
$$(|z| < \infty)$$

$$(5) \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!},$$

$$(|z| < \infty)$$

$$(6) \ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} + \cdots,$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} \quad (|z| < 1)$$

$$(7) (1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} z^3 +$$

$$\cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} z^n + \cdots, \quad (|z| < 1)$$

例3.3 求  $f(z) = \frac{1}{(1+z)^2}$  在  $z=0$  点邻域内的Taylor级数.

解

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 + \cdots + (-1)^n z^n + \cdots \quad (|z| < 1),$$

逐项求导, 得

$$\frac{1}{(1+z)^2} = 1 - 2z + 3z^2 + \cdots + (-1)^n (n+1)z^n + \cdots \quad (|z| < 1).$$

例3.4 将  $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2}$  展开为 $z$ 的幂级数.

解 根据例3.3,

$$\frac{1}{(1+\xi)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) \xi^n \quad (|\xi| < 1),$$

令  $\xi = z^2$ , 则

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+z^2)^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) z^{2n} \\ &= 1 - 2z^2 + 3z^4 + \cdots + (-1)^n (n+1) z^{2n} + \cdots \quad (|z| < 1). \end{aligned}$$

## 定理

(1) 函数 $f(z)$ 在点 $z_0$ 解析  $\Leftrightarrow f(z)$ 在 $z_0$ 的某一邻域内可展成幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ .

(2) 函数 $f(z)$ 在区域 $D$ 内解析  $\Leftrightarrow f(z)$ 在 $D$ 内可展成幂级数.

## 小结： $f(z)$ 在点 $z_0$ 解析

- (1)  $f(z)$ 在点 $z_0$ 的某一邻域内可导。
- (2)  $f(z)$ 的实部和虚部在点 $z_0$ 的某一邻域内有连续偏导数且满足  $C - R$  方程。
- (3)  $f(z)$ 在点 $z_0$ 的某一邻域内连续且沿邻域内的任一条正向封闭路线的积分为0。
- (4)  $f(z)$ 在点 $z_0$ 的某一邻域内可展成幂级数。