

§ 3.5 Cauchy积分公式

内 容 简 介

利用Cauchy-Goursat基本定理在多连通域上的推广,即复合闭路定理,导出一个用边界值表示解析函数内部值的积分公式,该公式不仅给出了解析函数的一个积分表达式,从而成为研究解析函数的有力工具,而且提供了计算某些复变函数沿闭路积分的方法.

分析

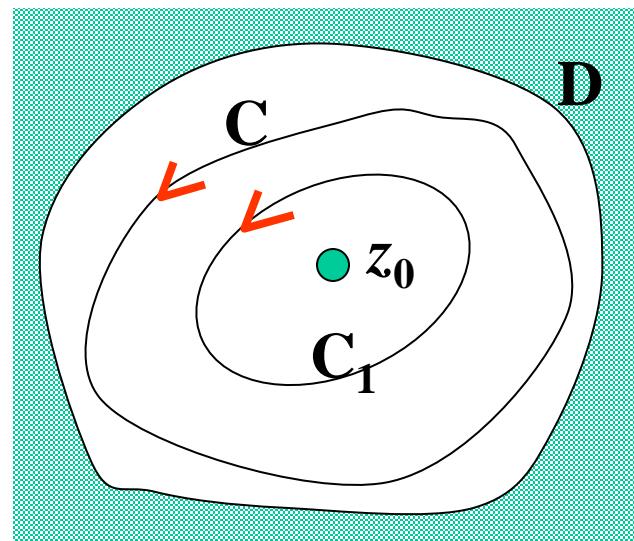
设 D – 单连通, $f(z)$ 在 D 内解析,

$z_0 \in D$, C 是 D 内围绕 z_0 的一条闭曲线, 则

$\frac{f(z)}{z - z_0}$ 在 z_0 不解析 $\therefore \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz \stackrel{\text{一般}}{\neq} 0$

由复合闭路定理得,
任意包含 z_0 在内部的
曲线 $C_1 \subset C$ 的内部

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$



特别取 $C_1 = \{z \mid |z - z_0| = \delta (\delta > 0 \text{ 可充分小})\}$

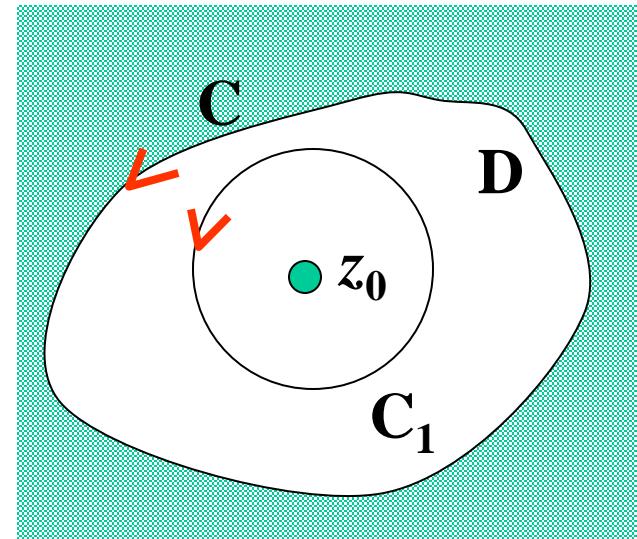
$\because f(z)$ 的连续性, 在 C_1 上的函数值 $f(z)$

当 $\delta \rightarrow 0$ 时, $f(z) \rightarrow f(z_0)$

\therefore 猜想积分

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \xrightarrow{\delta \rightarrow 0}$$

$$\rightarrow f(z_0) \oint_{C_1} \frac{1}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$$



这个猜想是对的, 这就是下面的定理.

定理(*Cauchy* 积分公式)

- 1) 设 $f(z)$ 在 D 内处处解析,
- 2) C 是 D 内任意一条正向简单闭曲线,
它的内部完全含于 D ,
- 3) z_0 为 C 内任意一点 \Rightarrow

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$



- (1) 若定理条件改为 $f(z)$ 在 C 所围区域 B 内解析, 及在 $C + B = \bar{B}$ 上连续, *Cauchy*积分公式仍成立.
- (2) *Cauchy*积分公式表明函数在 C 内部任一点的值可以用它在边界的值来表示. 即若 $f(z)$ 在区域边界上的值一经确定, 则它在区域内部任一处的值也就确定了.

 (3) 若 $C : z = z_0 + Re^{i\theta}$ 则

$$\begin{aligned}f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz \\&= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + Re^{i\theta})}{Re^{i\theta}} Rie^{i\theta} d\theta \\&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\theta}) d\theta\end{aligned}$$

一个解析函数在圆心处的值等于它在圆周上的平均值.

例1 求: 1) $\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=4} \frac{\sin z}{z} dz$ 2) $\oint_{|z|=4} \left(\frac{1}{z+1} + \frac{2}{z-3} \right) dz$

解 1) $\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=4} \frac{\sin z}{z} dz = \sin z \Big|_{z=0} = 0$

2) $\oint_{|z|=4} \left(\frac{1}{z+1} + \frac{2}{z-3} \right) dz = \oint_{|z|=4} \frac{dz}{z+1} + \oint_{|z|=4} \frac{2}{z-3} dz$

$$f(z)=1 \text{ 及 } 2 \\ = 2\pi i \cdot 1 + 2\pi i \cdot 2 = 6\pi i$$

例2 求 $\oint_C \frac{2z-1}{z^2-z} dz$

C 为包含 $|z|=1$ 在内的任意简单正向曲线.

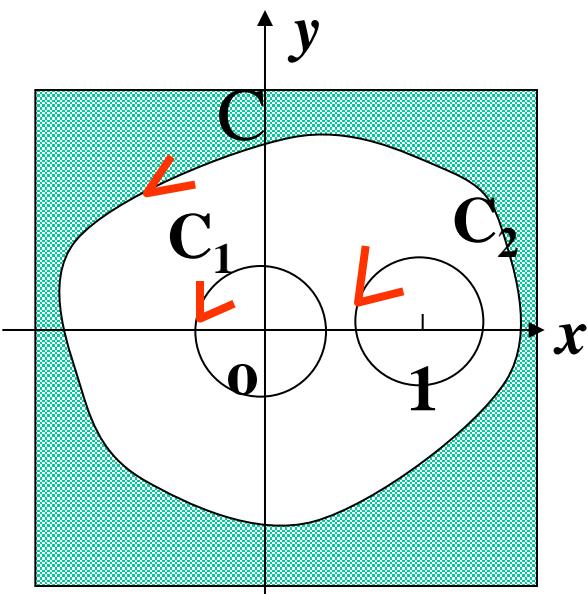
解 $\oint_C \frac{2z-1}{z^2-z} dz = \oint_{C_1} \frac{2z-1}{z^2-z} dz + \oint_{C_2} \frac{2z-1}{z^2-z} dz$

$$= \oint_{C_1} \frac{z-1}{z} dz + \oint_{C_2} \frac{z}{z-1} dz$$

由 C 积分公式

$$= \left. \frac{2z-1}{z-1} \right|_{z=0} 2\pi i + \left. \frac{2z-1}{z} \right|_{z=1} 2\pi i$$

$$= 4\pi i$$



例3 设 C 表圆周 $x^2 + y^2 = 3^2$, $f(z) = \int_C \frac{3\zeta^2 + 7\zeta + 1}{\zeta - z} d\zeta$,

求 $f'(1+i)$.

解 $\because 3z^2 + 7z + 1$ 在全平面上处处解析,

$$\therefore f(z) = \int_C \frac{3\zeta^2 + 7\zeta + 1}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} 0 & |z| > 3 \\ 2\pi i(3z^2 + 7z + 1) & |z| < 3 \end{cases}$$

$$\text{又 } f'(z) = \begin{cases} 0 & |z| > 3 \\ 2\pi i(6z + 7) & |z| < 3 \end{cases}$$

$$\text{故 } f'(1+i) = 2\pi i[6(1+i) + 7] = 2\pi(13i - 6)$$

§ 6 解析函数的高阶导数

内 容 简 介

本节研究解析函数的无穷次可导性，并导出高阶导数计算公式。研究表明：一个解析函数不仅有一阶导数，而且有各阶导数，它的值也可用函数在边界上的值通过积分来表示。这一点与实变函数有本质区别。

形式上，

$$\text{对积分公式 } f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad (z_0 \in D)$$

两边在积分号下对 z_0 求导得

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz$$

$$f''(z_0) = \frac{2!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^3} dz \quad \dots\dots$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad (n = 1, 2, \dots)$$

以下将对这些公式的正确性加以证明。

定理 解析函数 $f(z)$ 的导数仍为解析函数,
它的 n 阶导数为

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad (n = 1, 2, \dots)$$

其中 C 为在 $f(z)$ 的解析区域 D 内围绕 z_0 的
任意正向简单闭曲线,而且它的内部 $\subset D$.

定理表明 $f(z)$ 在 z 平面上 D 内解析 $\Rightarrow f(z)$ 在 D 内
具有各阶导数,即在 D 内解析——无穷次可导.

一个解析函数的导数仍为解析函数。

用途: 可计算积分 $\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)$

例1 求下列积分值 $C : |z| = r > 1$

$$1) \oint_C \frac{\cos \pi z}{(z-1)^5} dz \quad 2) \oint_C \frac{e^z}{(1+z^2)^2} dz$$

解 1) $\because \cos \pi z$ 在全平面处处解析

$$\oint_C \frac{\cos \pi z}{(z-1)^5} dz = \frac{2\pi i}{(5-1)!} (\cos \pi z)^{(4)} \Big|_{z=1}$$

$$= \frac{2\pi i}{4!} (-\pi^4) = -\frac{\pi^5}{12} i$$

2) $\frac{e^z}{(z^2 + 1)^2}$ 在 $z = \pm i$ 处不解析. 取 $C_1 : |z - i| = \rho_1$

$C_2 : |z + i| = \rho_2$, C_1, C_2 不相交且在 C 的内部

$$\therefore \oint_C \frac{e^z}{(1+z^2)^2} dz = \oint_{C_1} \frac{e^z}{(1+z^2)^2} dz + \oint_{C_2} \frac{e^z}{(1+z^2)^2} dz$$

$$= \oint_{C_1} \frac{\frac{e^z}{(z+i)^2}}{(z-i)^2} dz + \oint_{C_2} \frac{\frac{e^z}{(z+i)^2}}{(z+i)^2} dz$$

$$= \frac{2\pi i}{(2-1)!} \left(\frac{e^z}{(z+i)^2} \right)' \Bigg|_{z=i} + \frac{2\pi i}{(2-1)!} \left(\frac{e^z}{(z-i)^2} \right)' \Bigg|_{z=-i}$$

$$= \frac{\pi}{2} (1-i)(e^i - ie^{-i})$$

$$= \frac{\pi}{2} (1-i)^2 (\cos 1 - i \sin 1) = \pi i \sqrt{2} \sin\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$$

3) 求下列积分值, $C : |z| = r > 1, \oint_C \frac{e^z}{z^n} dz$

$$n = 1, \text{原式} = 2\pi i; \quad n \neq 1, \text{原式} = \frac{2\pi i}{(n-1)!}$$

4) 求下列积分值, $\oint_{|z|=4} \frac{\cos \pi z}{z^3 (z-1)^2} dz \quad (12 - \pi) \pi i$