第一章　复数与复变函数

教学要求

1. 掌握复数的各种表示方法及其运算.

2. 了解区域的概念.

3. 理解复变函数的概念.

4. 理解复变函数的极限和连续的概念.

一、复数的代数运算　设两复数 $z_1=x_1+iy_1$ 和 $z_2=x_2+iy_2$

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_2 y_1 + x_1 y_2)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^{\ 2} + y_2^{\ 2}} + i\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^{\ 2} + y_2^{\ 2}}$$

共轭复数及性质　$z = x + iy \Rightarrow \overline{z} = x - iy$

(1) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z}_1 \pm \overline{z}_2$；　$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$；　$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$.

(2) $\overline{\overline{z}} = \overline{(\overline{z})} = z$

(3) $z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$.　　(4) $z + \overline{z} = 2x$,　$z - \overline{z} = 2iy$.

二、复数的表示方法

1）代数式　　$z = x + iy \Rightarrow$

2）三角式　　$z = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$

3）指数式　　$z = re^{i\theta}$

三、复数的模不等式

$|x| \le |z|,\ |y| \le |z|$　　$|z| \le |x| + |y|$

$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|,$　　$|z_1 - z_2| \ge \big||z_1| - |z_2|\big|$

四、复数的乘幂与方根

$$z = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$$

1）乘幂 $z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta).$

$$z^n = r^n e^{in\theta}.$$

2）方根 $w_k = \sqrt[n]{z} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$

$$(k = 0, 1, 2, \cdots, n-1).$$

$$w_k = r^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i\left(\theta + 2k\pi\right)}{n}}$$

一般情况下，非零复数z的n次方根几何上就是以原点为中心，$\sqrt[n]{r}$为半径的圆的正n边形的n个顶点.

五、复变函数及其极限与连续性

1）复变函数$w=f(z)$, 相当于两个二元实变函数，

$$u=u(x,y),v=v(x,y)$$

几何上可以看成是两个平面之间的映射.

2）复变函数的极限（注意其与一元函数极限的不同之处）

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=A=a+ib \Leftrightarrow \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=a, \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=b.$$

3）复变函数的连续性

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0) \Leftrightarrow \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=u(x_0,y_0), \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=v(x_0,y_0).$$

例1 将复数 $z=\dfrac{(\sqrt{3}+i)(2-2i)}{(\sqrt{3}-i)(2+2i)}$ 化为三角形式与指数形式.

解 法一 $z=\dfrac{(\sqrt{3}+i)^2}{|\sqrt{3}+i|^2}\cdot\dfrac{(2-2i)^2}{|2-2i|^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i,$

$$|z|=1, \arg z=-\frac{\pi}{6}. \quad \therefore z=\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}=e^{-\frac{\pi}{6}i}.$$

法二 由于分子分母互为共轭复数 $\therefore |z|=1$

$$\mathrm{Arg}z=\mathrm{Arg}\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}+\mathrm{Arg}\frac{2-2i}{2+2i}=\left(2m\pi+\frac{\pi}{3}\right)+\left(2n\pi-\frac{\pi}{2}\right)=2(m+n)\pi-\frac{\pi}{6}$$

$$\therefore \arg z=-\frac{\pi}{6}.$$

例2 设 $m=a^2+b^2, n=c^2+d^2$, 其中a,b,c,d均为整数. 试证 $m\cdot n$ 仍为两个整数的平方和.

证明 $\because m=a^2+b^2=(a+ib)(a-ib)$

$$n=c^2+d^2=(c+id)(c-id)$$

$$\therefore m\cdot n=(a+ib)(a-ib)\cdot(c+id)(c-id)$$

$$=[(ac-bd)+i(ad+bc)]\cdot[(ac-bd)-i(ad+bc)]$$

$$=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2.$$

于是命题得证.

例3 求下列各式的值. $(1)(\sqrt{3}-i)^5$; $(2)(1-i)^{\frac{1}{3}}$.

解 $(1)(\sqrt{3}-i)^5=\left(2e^{-\frac{\pi}{6}i}\right)^5=2^5e^{-\frac{5\pi}{6}i}=-16(1+\sqrt{3}i)$.

$$(2)\because 1-i=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$\therefore (1-i)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}\right)\right],\quad k=0,1,2$$

$$w_0=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12}\right);$$

$$w_1=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right);\qquad w_2=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{15\pi}{12}+i\sin\frac{15\pi}{12}\right).$$

例4 设 $f(z)=\frac{1}{2i}\left(\frac{z}{\bar{z}}-\frac{\bar{z}}{z}\right),(z\neq 0)$

证明当 $z\to 0$ 时，$f(z)$的极限不存在.

解

$$f(z)=\frac{1}{2i}\frac{z^2-\bar{z}^2}{|z|^2}=\frac{2xy}{x^2+y^2}\qquad u=\frac{2xy}{x^2+y^2},v=0$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}u(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{2kx^2}{x^2+k^2x}=\frac{2k}{1+k^2}.$$

依赖于k的值，

故极限不存在.