


## § 5.2 留数(Residue)

 1. 留数的定义

 2. 留数定理

 3. 留数的计算规则

# 1. 留数的定义

$$\oint_c f(z) dz = \begin{cases} 0 & f(z) \text{ 在 } c \text{ 所围成的区域内解析} \\ \text{未必为 } 0 & c \text{ 所围成的区域内含有 } f(z) \text{ 的奇点} \end{cases}$$

$$\text{设 } f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, 0 < |z - z_0| < r$$

$(z_0 \text{ 是 } f(z) \text{ 的孤立奇点, } c \text{ 包含 } z_0 \text{ 在其内部})$

对上式两边沿简单闭曲线  $c$  逐项积分得:

$$\oint_c f(z) dz = c_{-1} \oint_c \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i c_{-1}$$

**定义** 设  $z_0$  为  $f(z)$  的孤立奇点,  $f(z)$  在  $z_0$  邻域内的洛朗级数中负幂次项  $(z-z_0)^{-1}$  的系数  $c_{-1}$  称为  $f(z)$  在  $z_0$  的留数, 记作  $\text{Res}[f(z), z_0]$  或  $\text{Res } f(z_0)$ 。


由留数定义,  $\text{Res}[f(z), z_0] = c_{-1}$  (1)

故  $\text{Res}[f(z), z_0] = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_c f(z) dz$  (2)

## 2. 留数定理

**定理** 设 $c$ 是一条简单闭曲线, 函数 $f(z)$ 在 $c$ 内有有限个孤立奇点 $z_1, z_2, \dots, z_n$ , 除此以外,  $f(z)$ 在 $c$ 内及 $c$ 上解析, 则

$$\oint_c f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}[f(z), z_k] \quad (3)$$

 求沿闭曲线 $c$ 的积分, 归之为求在 $c$ 中各孤立奇点的留数。

**证明** 用互不包含, 互不相交的正向简单闭曲线 $c_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) 将 $c$ 内孤立奇点 $z_k$ 围绕,

由复合闭路定理得：

$$\oint_c f(z)dz = \oint_{c_1} f(z)dz + \oint_{c_2} f(z)dz + \cdots + \oint_{c_n} f(z)dz$$

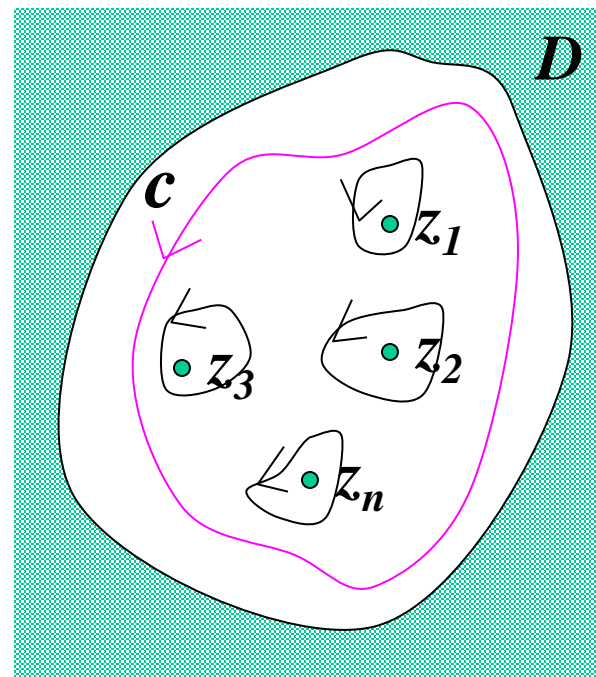
用 $2\pi i$  除上式两边得：

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_c f(z)dz = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_k} f(z)dz$$

$$= \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}[f(z), z_k]$$

$$\text{故} \oint_c f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}[f(z), z_k]$$

得证！



### 3. 留数的计算规则

一般求  $\text{Res}[f(z), z_0]$  是采用将  $f(z)$  在  $z_0$  邻域内展开成洛朗级数求系数  $c_{-1}$  的方法, 但如果能先知道奇点的类型, 对求留数更为有利。

以下就三类孤立奇点进行讨论:

(i) 若  $z = z_0$  为可去奇点  $\Rightarrow c_{-1} = 0 \Rightarrow \text{Res}[f(z), z_0] = 0$

(ii) 若  $z = z_0$  为本性奇点  $\Rightarrow f(z) \overset{\text{展开}}{=} \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$   
 $\Rightarrow \text{Res}[f(z), z_0] = c_{-1}$

(iii)若 $z = z_0$ 为极点时, 求 $\text{Res}[f(z), z_0]$ 有以下几条规则

**规则I** 若 $z_0$ 是 $f(z)$ 的一级极点, $\Rightarrow$

$$\text{Res}[f(z), z_0] = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) \quad (4)$$

**规则II** 设 $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$   $P(z), Q(z)$ 在 $z_0$ 处解析,

$$P(z_0) \neq 0, Q(z_0) = 0, Q'(z_0) \neq 0 \Rightarrow$$

$$z_0 \text{ 是 } f(z) \text{ 的一级极点, 且 } \text{Res}[f(z), z_0] = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)} \quad (5)$$

**规则III** 若 $z_0$ 是 $f(z)$ 的 $m$ 级极点 $\Rightarrow$

$$\text{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[ (z - z_0)^m f(z) \right] \quad (6)$$

## 4. 典型例题

例1 求  $f(z) = \frac{e^z}{z^n}$  在  $z=0$  的留数.

解 因为  $z=0$  是  $f(z)$  的  $n$  阶极点,

$$\begin{aligned}\text{所以 } \operatorname{Res}\left[\frac{e^z}{z^n}, 0\right] &= \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left( z^n \cdot \frac{e^z}{z^n} \right) \\ &= \frac{1}{(n-1)!}.\end{aligned}$$

例2 求  $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{z - \sin z}{z^6}$  在  $z = 0$  的留数.

分析  $P(0) = P'(0) = P''(0) = 0, \quad P'''(0) \neq 0.$

$z = 0$  是  $z - \sin z$  的三级零点

所以  $z = 0$  是  $f(z)$  的三级极点, 由规则3得

$$\text{Res}[f(z), 0] = \frac{1}{(3-1)!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^2}{dz^2} \left[ z^3 \cdot \frac{z - \sin z}{z^6} \right].$$

计算较麻烦.

**解** 如果利用洛朗展开式求 $c_{-1}$ 较方便:

$$\frac{z - \sin z}{z^6} = \frac{1}{z^6} \left[ z - \left( z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots \right) \right]$$

$$= \frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + \cdots,$$

$$\therefore \operatorname{Res} \left[ \frac{z - \sin z}{z^6}, 0 \right] = c_{-1} = -\frac{1}{5!}.$$

**说明:** 1. 在实际计算中应灵活运用计算规则.

如  $z_0$  为  $m$  级极点, 当  $m$  较大而导数又难以计算时, 可直接展开洛朗级数求  $c_{-1}$  来计算留数.

2. 在使用规则III时, 将  $m$  取得比实际的级数高, 这可使计算更简单.

如上例取

$$\text{Res}[f(z), 0] = \frac{1}{(6-1)!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^5}{dz^5} \left[ z^6 \cdot \frac{z - \sin z}{z^6} \right] = -\frac{1}{5!}.$$

例3 求  $f(z) = \frac{e^z - 1}{z^5}$  在  $z = 0$  的留数.

解  $z = 0$  是  $f(z)$  的四级极点.

在  $0 < |z| < +\infty$  内将  $f(z)$  展成洛朗级数:

$$\begin{aligned}\frac{e^z - 1}{z^5} &= \frac{1}{z^5} \left( 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^6}{6!} + \cdots - 1 \right) \\ &= \frac{1}{z^4} + \frac{1}{2!z^3} + \frac{1}{3!z^2} + \frac{1}{4!z} + \frac{1}{5!} + \frac{z}{6!} + \cdots,\end{aligned}$$

$$\text{所以 } \operatorname{Res}[f(z), 0] = c_{-1} = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24}.$$

**例4** 计算积分  $\oint_C \frac{e^z}{z(z-1)^2} dz$ ,  $C$  为正向圆周:  $|z| = 2$ .

**解**  $z = 0$  为一级极点,  $z = 1$  为二级极点,

$$\text{Res}[f(z), 0] = \lim_{z \rightarrow 0} z \cdot \frac{e^z}{z(z-1)^2}$$

$$= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z}{(z-1)^2},$$

$$\text{Res}[f(z), 1] = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \left[ (z-1)^2 \frac{e^z}{z(z-1)^2} \right]$$

$$= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \left( \frac{e^z}{z} \right) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{e^z (z - 1)}{z^2} = 0,$$

所以  $\oint_C \frac{e^z}{z(z-1)^2} dz$

$$= 2\pi i \{ \text{Res}[f(z), 0] + \text{Res}[f(z), 1] \}$$

$$= 2\pi i (1 + 0)$$

$$= 2\pi i.$$

例5 计算:  $\oint_{|z|=2} \frac{5z-2}{z(z-1)^2} dz$

解  $f(z) = \frac{5z-2}{z(z-1)^2}$  在  $|z|=2$  的内部有一个一级

极点  $z=0$  和一个二级极点  $z=1$

由规则I

$$\operatorname{Res}[f(z), 0] = \lim_{z \rightarrow 0} z f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{5z-2}{(z-1)^2} = -2$$

由规则II

$$\operatorname{Res}[f(z), 1] = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{(2-1)!} \frac{d}{dz} \left\{ (z-1)^2 \frac{5z-2}{z(z-1)^2} \right\}$$

$$= \lim_{z \rightarrow 1} \left( \frac{5z-2}{z} \right)' = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{2}{z^2} = 2$$

$$\therefore \oint_{|z|=2} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}[f(z), 0] + 2\pi i \operatorname{Res}[f(z), 1] = 0$$

例6 计算  $\oint_c \frac{z}{z^4 - 1} dz$   $c$  : 正向  $|z| = 2$

解  $\because f(z)$  有4个一级极点:  $\pm 1, \pm i$  都在圆周  $c$  内,

由规则III  $\frac{P(z)}{Q'(z)} = \frac{z}{4z^3} = \frac{1}{4z^2}$

故  $\oint_c \frac{z}{z^4 - 1} dz$

$$= 2\pi i \{ \operatorname{Res}[f(z), -1] + \operatorname{Res}[f(z), 1]$$
$$+ \operatorname{Res}[f(z), i] + \operatorname{Res}[f(z), -i] \}$$
$$= 2\pi i \left[ \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right] = 0$$

例7 计算  $\int_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3} dz$

解  $f(z) = \frac{\cos z}{z^3}$  有一个  $z=0$  的三级极点

由规则II

$$\operatorname{Res}[f(z), 0] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{(3-1)!} \frac{d^2}{dz^2} [z^3 f(z)]$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} (\cos z)'' = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \int_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3} dz = 2\pi i \operatorname{Res}[f(z), 0] = 2\pi i \left(-\frac{1}{2}\right) = -\pi i$$

例8 计算  $\int_{|z|=n} \tan \pi z dz \quad (n \in \mathbb{N})$

解  $\tan \pi z = \frac{\sin \pi z}{\cos \pi z} \quad \text{令 } \cos \pi z = 0$

解得  $\pi z = k\pi + \frac{\pi}{2}$  即,  $z = k + \frac{1}{2} (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

$$\because (\cos \pi z)' \Big|_{z=k+\frac{1}{2}} = -\pi \sin \pi z \Big|_{z=k+\frac{1}{2}} \neq 0$$

$\therefore z = k + \frac{1}{2}$  为一级极点, 由规则II得

$$\operatorname{Res} \left[ \tan \pi z, k + \frac{1}{2} \right] = \frac{\sin \pi z}{(\cos \pi z)'} \Big|_{z=k+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\pi} \quad (k = 0, \pm 1, \dots)$$

故 由留数定理得:

$$\oint_{|z|=n} \tan \pi z dz = 2\pi i \sum_{\left|k+\frac{1}{2}\right|<n} \operatorname{Res} \left[ \tan \pi z, k + \frac{1}{2} \right] = 2\pi i \left( -\frac{2n}{\pi} \right) = -4ni$$