第一章 复数与复变函数

第二节 复数函数及其极限与连续

2.1 复平面上的区域

2.2 复变函数的概念

2.3 复变函数的极限与连续性

2.1 复平面上的区域

邻域 $U(z_0,\delta)=\{z\in C\,\|z-z_0|<\delta\}$ $\mathring{U}(z_0,\delta)=\{z\in C\,|0<|z-z_0|<\delta\}$

内点 $z_0\in G\subseteq C$ $\exists U(z_0,\delta)\subseteq G$ **开集** 全体内点构成的集合

连通集 **边界点**

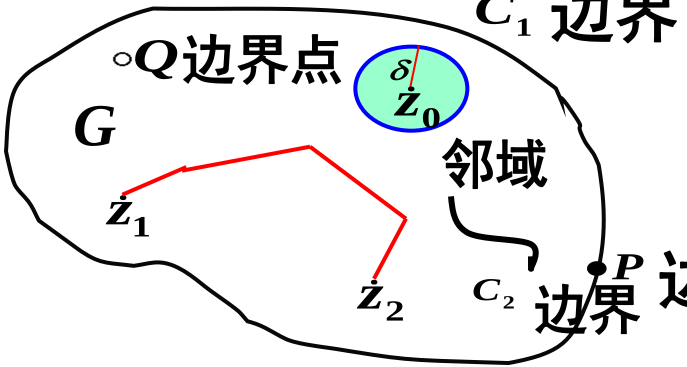
区域 连通的开集 D

闭区域 $\overline{D}=D+\partial D$

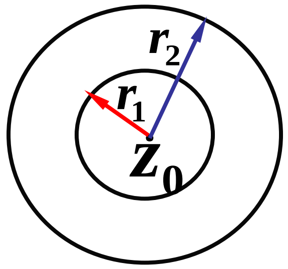
有界区域和无界区域

$\exists M>0,\forall z_0\in D,|z_0|\le M$

边界 ∂D



例1 判断下列区域是否有界?

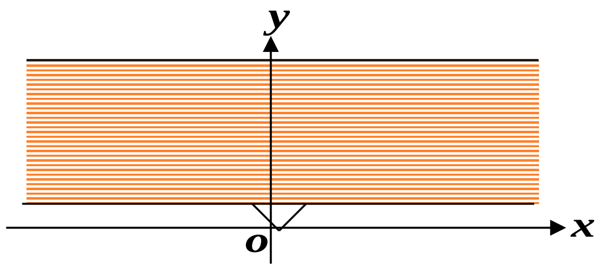


(1) 圆环域: $r_1 < |z - z_0| < r_2$;

(2) 上半平面: $\operatorname{Im} z > 0$;

(3) 角形域: $\varphi_1 < \arg z < \varphi_2$;

(4) 带形域: $a < \operatorname{Im} z < b$.



连续曲线

如果$x=x(t)$, $y=y(t)$ $(\alpha\le t\le\beta)$为连续函数时，则称

$$C:\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}(\alpha \le t \le \beta)$$

为连续曲线.

$$z = z(t) = x(t) + iy(t) \quad (\alpha \le t \le \beta).$$

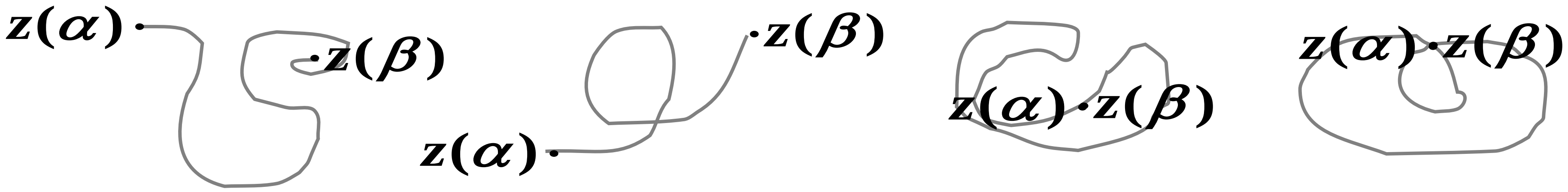
光滑曲线

如果 $x'(t), y'(t)$ 均连续，且 $\forall t, [x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 \ne 0$

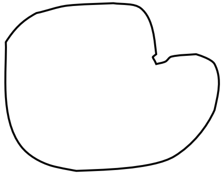
则称曲线是光滑的.　　分段光滑曲线

简单曲线或约当曲线

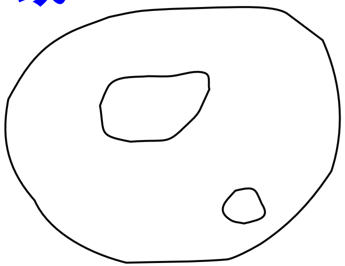
没有重点或除起点和终点重合外，自身不相交的曲线.



单连通域与多连通域



单连通域



多连通域

例2 指出下列不等式所确定的点集，是否有界？是否区域？ 如果是区域，单连通的还是多连通的？

(1) $\mathrm{Re}(z^2) < 1$; (2) $|\arg z| < \frac{\pi}{3}$; (3) $\left|\frac{1}{z}\right| < 3$;

(4) $|z-1| + |z+1| < 4$

2.2 复变函数的概念

定义1.1（复变函数）

设G是复平面上的点集，　若对任何$z\in G$，都存在唯一确定的复数w和z对应，称在 G上确定了一个**单值复变函数**，用$w=f(z)$表示.

当$z\in G$所对应的w不止一个时，称在G上确定了一个**多值复变函数**.

G称为函数的定义域，对应于z的所有w的全体G^*称为函数的值域.

复变函数与自变量之间的关系

令 $z = x + iy$, $w = u + iv$,

$$w = f(z) = u + iv,$$

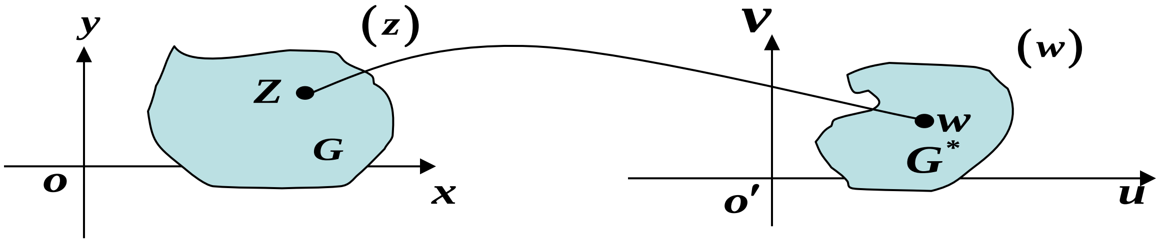
相当于两个关系式 $u = u(x, y), v = v(x, y)$

例如， 函数 $w = z^2$, $w = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$

$$u = x^2 - y^2, v = 2xy$$

由于一个复变函数反映了两对变量u,v和x,y之间的对应关系，因而无法用同一平面内的几何图形来表示，必须看成是两个复平面上的点集之间的对应关系.

映射



2.3 复变函数的极限与连续性

复变函数的极限

设复变函数$w=f(z)$在z_0的某个去心邻域内$\mathring{U}(z_0,\rho)$有定义,

A是复常数. 若对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在$\delta>0(\delta\le\rho)$

使得当 $0<|z-z_0|<\delta$ 时，总有 $|f(z)-A|<\varepsilon$

成立, 则称当z趋于z_0时, $f(z)$以A为极限，并记作

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=A \quad \text{或} \quad f(z)\to A\ (z\to z_0).$$

注意：定义中$z\to z_0$的方式是任意的.

定理1.1（极限计算定理）

设函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y), A=u_0+iv_0, z_0=x_0+iy_0$

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=A \Leftrightarrow \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=u_0, \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=v_0$$

复变函数极限的性质

（1）唯一性　（2）有界性　（3）有理运算法则

注意：因为一个复变函数的极限问题相当于两个二元实变函数的极限问题，复变函数的极限要比实变函数的极限复杂得多，要求也苛刻的多。

例3 证明当 $z \to 0$ 时, 函数 $f(z) = \dfrac{\mathrm{Re}(z)}{\bar{z}}$ 极限不存在.

方法. 沿 $y = kx$

复变函数的连续性

设 $f(z)$在z_0的邻域内有定义，且 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$

则称$f(z)$在z_0处**连续**.

若$f(z)$在区域D内的每一点都连续，则称$f(z)$在**区域D上连续**.

定理1.2 设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，则 $f(x)$ 在 $z_0=x_0+iy_0$ 处连续的充分必要条件是 $u(x,y)$，$v(x,y)$ 都在 (x_0,y_0) 点连续.

连续函数的性质：

（1）连续函数的和、差、积、商（分母不为0）的连续性；

（2）复合函数的连续性.

例4 试证 $\arg z$ 在原点与负实轴上不连续.

证明

$$\arg z = \begin{cases} \arctan \dfrac{y}{x} & x > 0 \\ \pm \dfrac{\pi}{2} & x = 0, y \neq 0 \\ \arctan \dfrac{y}{x} \pm \pi & x < 0, y \neq 0 \\ \pi & x < 0, y = 0 \end{cases}$$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \arg z$ 沿x轴

$$\lim_{\substack{x\to 0^+\\ y=0}} \arg z = \lim_{\substack{x\to 0^+\\ y=0}} \arctan \frac{y}{x} = 0$$

$$\lim_{\substack{x\to 0^-\\ y=0}} \arg z = \lim_{\substack{x\to 0^-\\ y=0}} \left(\arctan \frac{y}{x} + \pi\right) = \pi$$

$\therefore \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \arg z$ 不存在，故不连续.

负实轴 $\lim\limits_{\substack{y\to 0^- \\ x=-a}} \arg z = -\pi, \lim\limits_{\substack{y\to 0^+ \\ x=-a}} \arg z = \pi$

所以，函数在负实轴上的极限不存在，故不连续.

练习： 证明$f(z) = \frac{Re(z)}{|z|}$在$z \to 0$时极限不存在.

补例： $\lim\limits_{z \to 1} \frac{z \cdot \bar{z} + 2z - \bar{z} - 2}{z^2 - 1}$

本章内容总结(一)

- 复数
  - 复数表示法
    - 定义表示法
    - 三角表示法
    - 指数表示法
  - 几何意义
  - 复数的运算
    - 共轭运算
    - 代数运算
    - 乘幂与方根

本章内容总结(二)