

第二章 解析函数

-----复变函数研究的主要内容

第一节 函数解析性的概念及其判定

1.1 复变函数的导数与微分

1.2 解析函数的概念

1.3 判定函数解析的方法

1. 导数定义:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + \rho(\Delta x)$$

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \rho(\Delta x)\Delta x$$

2. 可导与连续的关系:

可导 \longleftrightarrow 连续

3. 微分定义:

若 $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = a\Delta x + o(\Delta x)$, 则称 $f(x)$

在 x_0 点可微, $a\Delta x$ 称为 $f(x)$ 在 x_0 点的微分.

记为 $dy = a\Delta x$

$$a = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) \quad dy = f'(x_0)dx$$

4. 导数与微分的关系:

可导 \iff 可微

1.1 复变函数的导数与微分

定义2.1 (复变函数的导数) 形式上与一元函数的导数完全一致

设函数 $w=f(z)$ 定义于区域 $D \subseteq \mathbb{C}$, 点 $z_0, z_0 + \Delta z \in D$.

若极限 $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ 存在,

那末就称 $f(z)$ 在 z_0 可导. 这个极限值称为 $f(z)$ 在 z_0 的导数, 记作 $f'(z_0), \left. \frac{dw}{dz} \right|_{z=z_0}$

$$f'(z_0) = \left. \frac{dw}{dz} \right|_{z=z_0} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

注意: 趋近方式的任意性, 使得复变函数的可导性具有许多独特的性质和应用.

如果函数 $f(z)$ 在区域 D 内处处可导, 我们就称 $f(z)$ 在区域内 D 可导.

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

$f(z)$ 称为区域 D 内的可导函数.

例1 求 $f(z) = z^2$ 的导数.

解
$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{2z\Delta z}{\Delta z} = 2z$$

一般的, $(z^n)' = nz^{n-1}, n \in \mathbb{Z}^+$

例2 讨论 $f(z) = \operatorname{Im}(z)$ 的可导性.

解 $\forall z \in C,$

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y = k\Delta x}} \frac{k\Delta x}{\Delta x + ik\Delta x} = \frac{k}{1 + ik}$$

故 $f(z) = \operatorname{Im}(z)$ 处处不可导.

可导与连续的关系

函数 $f(z)$ 在 z_0 处可导则在 z_0 处一定连续, 但函数 $f(z)$ 在 z_0 处连续不一定在 z_0 处可导.

例4 讨论 $f(z) = 2x - yi$ 在复平面 C 的连续性与可导性.

解 $u = 2x, v = -y$ 处处连续, 故 $f(z) = 2x - yi$

在复平面 C 上处处连续.

$$\forall z \in C,$$

$$\lim_{\substack{\Delta z \rightarrow 0 \\ \Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{2\Delta x - \Delta y i}{\Delta x + \Delta y i} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y = k \Delta x}} \frac{(2 - ki)\Delta x}{(1 + ik)\Delta x} = \frac{2 - ki}{1 + ki}$$

故 $f(z) = 2x - yi$ 处处不可导.

一个复变函数的实部和虚部处处可导, 但此复变函数有可能处处不可导.

求导法则

由于复变函数中导数的定义与一元实变函数中导数的定义在形式上完全一致，并且复变函数中的极限运算法则也和实变函数中一样，因而实变函数中的求导法则都可以不加更改地推广到复变函数中来，且证明方法也是相同的。

(1) $(c)' = 0$ ，其中 c 为复常数。

(2) $(z^n)' = nz^{n-1}$ ，其中 n 为正整数。

$$(3) \quad [f(z) \pm g(z)]' = f'(z) \pm g'(z).$$

$$(4) \quad [f(z)g(z)]' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z).$$

$$(5) \quad \left[\frac{f(z)}{g(z)} \right]' = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}. \quad (g(z) \neq 0)$$

$$(6) \quad \{f[g(z)]\}' = f'(w)g'(z). \quad \text{其中 } w = g(z)$$

$$(7) \quad f'(z) = \frac{1}{\varphi'(w)}, \quad \text{其中 } w = f(z) \text{ 与 } z = \varphi(w) \text{ 是}$$

两个互为反函数的单值函数, 且 $\varphi'(w) \neq 0$

复变函数的微分（形式上与一元函数的微分完全一致）

设函数 $w=f(z)$ 在 $z_0 \in D$ 可导,

若 $\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = f'(z_0) \cdot \Delta z + \rho(\Delta z)\Delta z$, 其中 $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \rho(\Delta z) = 0$,

且 $|\rho(\Delta z)\Delta z|$ 是 $|\Delta z|$ 的高阶无穷小, $f'(z_0) \cdot \Delta z$ 是 Δw 的线性部分,

$f'(z_0) \cdot \Delta z$ 称为函数 $w = f(z)$ 在点 z_0 的微分, (可微)

记作 $dw = f'(z_0) \cdot \Delta z$.

函数 $w = f(z)$ 在 z_0 可导与在 z_0 可微是等价的.

若函数 $f(z)$ 在区域 D 内处处可微, 则称函数在 D 内可微.

1.2 解析函数的概念

定义2.2 设 $f(z)$ 在区域 D 有定义.

(1) 设 $z_0 \in D$, 若存在 z_0 的一个邻域, 使得 $f(z)$ 在此邻域内处处可导, 则称 $f(z)$ 在 z_0 处解析.

(2) 若 $f(z)$ 在区域 D 内每一点都解析, 则称 $f(z)$ 在区域 D 内解析, 或者称 $f(z)$ 是区域 D 内的解析函数.

若 $f(z)$ 在 z_0 处不解析, 则称为 $f(z)$ 的奇点.

注意: 函数在一点解析与在一点可导不等价.

函数在区域内解析与在区域内可导等价. 解析要求高.

思考题：

- (1) 有没有这样一个函数，只在一点解析，而在这点的邻域内不解析？
- (2) 闭区域解析与闭区域可导是否等价？
- (3) 如果函数 $f(z)$ 在曲线 C 上可导，是否在该曲线上解析？

结论： 设函数 $f(z), g(z)$ 在区域 D 内解析， 则

$f(z) \pm g(z), f(z)g(z), \frac{f(z)}{g(z)}$ (除去分母为0的点)
在区域 D 内解析.

特别地,

(1) 多项式 $P(z)$ 在全平面内解析.

(2) 有理分式在复平面内除分母为零的点之外解析.

例 5 研究下列函数的解析性.

$$(1) f(z) = z^2; \quad (2) g(z) = 2x - yi; \quad (3) \varphi(z) = \frac{1}{z}; \quad (4) h(z) = |z|^2.$$

解 (1) $f'(z) = 2z$, $f(z)$ 处处可导, 处处解析;

(2) $g(z) = 2x - yi$ 由例4知, 处处不可导, 处处不解析;

$$(3) \varphi(z) = \frac{1}{z} \quad \varphi'(z) = -\frac{1}{z^2} \quad (z \neq 0)$$

除去 $z=0$ 的复平面内处处解析.

$$(4) h(z) = |z|^2$$

$$\frac{h(z + \Delta z) - h(z)}{\Delta z} = \frac{(z + \Delta z)\overline{z + \Delta z} - z\bar{z}}{\Delta z} = \bar{z} + \overline{\Delta z} + z \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$$

$$\frac{h(z + \Delta z) - h(z)}{\Delta z} = \bar{z} + \overline{\Delta z} + z \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$$

当 $z=0$ 时，上述极限存在且为0.

$$z \neq 0$$

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y = k\Delta x}} \frac{\Delta x - ik\Delta x}{\Delta x + ik\Delta x} = \frac{1 - ik}{1 + ik}$$

$h(z)$ 仅在 $z=0$ 处可导，故处处不解析.