第二章　解析函数

教学要求

1. 理解复变函数的导数与复变函数解析的概念.

2. 掌握复变函数解析的充要条件.

3. 了解指数函数、对数函数、幂函数、三角函数的定义及它们的主要性质.

一、函数$f(z)$解析的概念

若$f(z)$在z_0的邻域内处处可导, 则称$f(z)$在z_0处解析.

如果$f(z)$在区域D内处处解析，则称$f(z)$在D内解析.

注意： 函数在一点解析与在一点可导不等价,解析要求高.

函数在区域内解析与在区域内可导等价.

二、函数可导与解析的判定方法

(1) 利用定义、求导公式或求导法判定函数的可导性.

(2) 利用函数可导、解析的充分条件：一阶偏导连续，且

u和v满足C-R方程. $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

(3) 利用函数可导、解析的充要条件：

即 验证u和v是否满足C-R方程，以及u和v是否可微.

并有求导公式 $$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$$

(4) 如果$f(z)$解析，$g(z)$不解析，则$f(z)g(z)$在 $f(z)\neq 0$ 时不解析.

三、复变初等函数

(1) $\exp z=e^{x}(\cos y+i\sin y)$, 是在复平面上处处解析的单值函数，且 $(e^{z})'=e^{z}$. 其周期为$2k\pi i$.

$(2)\,\mathrm{Ln}z = \ln|z| + i\mathrm{Arg}z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi) \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$

具有无穷多值，在除去原点和负实轴的平面上处处解析.

且 $(\mathrm{Ln}z)' = \dfrac{1}{z}$.

$(3)\,a^b = e^{b\mathrm{Ln}a}$ 是多值的，在除去原点和负实轴的平面上处处解析；

整幂次幂 z^n 是单值解析的，且 $(z^n)' = nz^{n-1}$.

$(4)\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$; $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$;在复平面上处处解析，且

$(\sin z)' = \cos z$, $(\cos z)' = -\sin z$ 其周期为 2π. ,为无界函数.

例1 判断下列函数何处可导，何处解析.

$(1)\ f(z)=\bar{z}z^n\,(n\in Z,n>1)$;　　$(2)\ f(z)=x^3-y^3+2x^2y^2i$;

解 $(1)\because z\neq 0$，$\bar{z}$ 不可导，z可导，所以二者的乘积不可导.

所以$f(z)=\bar{z}z^n\,(n\in Z,n>1)$ 仅在零点可导，处处不解析.

$(2)\ f(z)=x^3-y^3+2x^2y^2i\Rightarrow\ u=x^3-y^3,\ v=2x^2y^2$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2,\ \frac{\partial u}{\partial y}=-3y^2,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=4xy^2,\ \frac{\partial v}{\partial y}=4x^2y.$$

$$\left.\begin{aligned}3x^2&=4x^2y\\3y^2&=4xy^2\end{aligned}\right\}\Rightarrow x=y=0;\ x=y=\frac{3}{4}$$

$\therefore f(z)$仅在(0,0)点和 $\left(\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right)$点可导，复平面上处处不解析.

例2 指出下列函数的解析性区域，并求出其导数.

$$(1) z^5 + iz;\ (2) \frac{1}{z\left(z^2+1\right)};\ (3) \frac{az+b}{cz+d} \quad (c, d\text{至少有一个不为}0)$$

解 $(1)\ f'(z) = \left(z^5 + iz\right)' = 5z^4 + i$，故$f(z)$在复平面上处处解析

$(2)\ z \neq 0, \pm i$ 时，$f(z)$处处可导，且 $f'(z) = -\dfrac{3z^2+1}{z^2\left(z^2+1\right)^2}$

故$f(z)$在除去 $0, \pm i$ 的复平面上处处解析.

$(3)\ c = 0, d \neq 0,\ f(z) = \dfrac{a}{d}z + \dfrac{b}{d} \Rightarrow f'(z) = \dfrac{a}{d}$

故$f(z)$在复平面上处处解析

$c \neq 0, d = 0,\ f(z) = \dfrac{az+b}{cz} \Rightarrow f'(z) = -\dfrac{b}{cz^2} \quad (z \neq 0)$

$$c \neq 0, d \neq 0, \qquad f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

$$\Rightarrow f'(z) = \frac{a(cz+d)-(az+b)c}{(cz+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \left(z \neq -\frac{d}{c}\right)$$

例3 设 $f(z) = my^3 + nx^2y + i(x^3 + lxy^2)$ 为解析函数，试确定 l, m, n 的值.

解 $u = my^3 + nx^2y,\ v = x^3 + lxy^2,$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2nxy, \frac{\partial u}{\partial y} = 3my^2 + nx^2, \ \frac{\partial v}{\partial x} = 3x^2 + ly^2, \frac{\partial v}{\partial y} = 2lxy.$$

$$2nxy = 2lxy,\ 3my^2 + nx^2 = -3x^2 - ly^2.$$

解得 $l = n = -3, m = -1$

即当 $l = n = -3, m = -1$ 时，$f(z)$ 为解析函数.

例4 设$f(z)=u+iv$在区域D内解析，且$\arg f(z)$在D内为常数，证明$f(z)$在区域D内为常数.

证明 因为$f(z)$在D内解析，则u,v在D内可微，且满足

$$u_x = v_y, u_y = -v_x.$$

设$\arg f(z)=C$，则$\tan(\arg f(z))= v/u =\tan C=k$,于是，$v=ku$.

$k=0$时，结论显然成立.

$k \neq 0$ 时， $v_x = ku_x = kv_y, v_y = ku_y = -kv_x.$

$$\left(1+k^2\right)v_x = 0 \quad \Rightarrow v_x = 0, u_x = 0. \quad \Rightarrow f'\left(z\right) = 0$$

由第12讲例4知，$f(z)=C$.

例5 求解下列方程 $1+e^{z}=0;$

解 $1+e^{z}=0 \quad \Rightarrow e^{z}=-1 \Rightarrow z=Ln(-1)$

$$\Rightarrow z=\ln|-1|+i\arg(-1)+2k\pi i,(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

$$\Rightarrow z=\pi i+2k\pi i,(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

例6 试求下列函数 $(1+i)^{(1-i)}$ 的值及主值.

解 $$(1+i)^{(1-i)} = e^{(1-i)Ln(1+i)} = e^{(1-i)\left[\ln\sqrt{2}+i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right]}$$

$$= e^{\left(\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)+i\left(-\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)}$$

$$= \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}+2k\pi}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2}\right)\right], k\in Z$$

故主值为 $$\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2}\right)\right]$$