§3.4 原函数与不定积分

- 1. 原函数与不定积分的概念
- 2. 积分计算公式

1. 原函数与不定积分的概念

由§2基本定理的推论知：设$f(z)$在单连通区域B内解析，则对B中任意曲线C, 积分$\oint_c f(z)dz$与路径无关，只与起点和终点有关。

当起点固定在z_0, 终点z在B内变动, $\oint_c f(z)dz$在B内就定义了一个变上限的单值函数，记作

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\varsigma)d\varsigma \quad (1)$$

定理 设$f(z)$在单连通区域B内解析，则$F(z)$在B内解析，且$F'(z)=f(z)$

定义 若函数$\varphi(z)$在区域B内的导数等于$f(z)$，即$\varphi'(z)=f(z)$,称$\varphi(z)$为$f(z)$在B内的原函数.

上面定理表明 $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\varsigma)d\varsigma$ 是$f(z)$的一个原函数。

设$H(z)$与$G(z)$是$f(z)$的任何两个原函数,

$$\because [G(z)-H(z)]'=G'(z)-H'(z)=f(z)-f(z)=0$$

$$\therefore G(z)-H(z)=c,\quad (c\text{为任意常数})$$

这表明：$f(z)$的任何两个原函数相差一个常数。

定义　设$F(z)$是$f(z)$的一个原函数，称$F(z)+c$(c为任意常数)为$f(z)$的不定积分，记作

$$\int f(z)dz = F(z)+c$$

2. 积分计算公式

定理　设$f(z)$在单连通区域B内解析，$F(z)$是$f(z)$的一个原函数，则

$$\boxed{\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = F(z_1)-F(z_0)} \quad (\forall z_0, z_1 \in B)$$

此公式类似于微积分学中的牛顿－莱布尼兹公式.

但是要求函数是解析的,比以前的连续条件要强

例1 计算下列积分：

1) $\int_C \frac{1}{z^2} dz$

其中C为半圆周：$|z|=3, \operatorname{Re} z \geq 0,$

起点为$-3i$，终点为$3i$；

解1) $\because \frac{1}{z^2}$在$\operatorname{Re} z \geq 0$，$z \neq 0$上解析，

故 $$\int_C \frac{1}{z^2} dz = \frac{1}{-2+1} z^{-2+1} \Big|_{-3i}^{3i} = \frac{2i}{3}$$

解2：$$\int_C \frac{1}{z^2} dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{3ie^{i\theta}}{9e^{2i\theta}} d\theta = \frac{1}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{i}{e^{i\theta}} d\theta = \frac{2i}{3}$$

例2 计算下列积分：

$$\int_{-i}^{+i} z^2 dz = \frac{z^3}{3}\Big|_{-i}^{i} = -\frac{2i}{3}$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} z^n dz = \frac{1}{n+1} z^{n+1}\Big|_{\alpha}^{\beta} = \frac{1}{n+1}\left(\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}\right)$$

例3　求$\int_0^{\pi i} z\cos z^2 \mathrm{d}z$的值.

解　$$\int_0^{\pi i} z\cos z^2 \mathrm{d}z = \frac{1}{2}\int_0^{\pi i} \cos z^2 \mathrm{d}z^2$$

$$= \frac{1}{2}\sin z^2 \Big|_0^{\pi i} = \frac{1}{2}\sin(-\pi^2) = -\frac{1}{2}\sin \pi^2.$$

(使用了微积分学中的“凑微分”法)

例4 求 $\int_0^i z\cos z\mathrm{d}z$ 的值.

解 $$\int_0^i z\cos z\mathrm{d}z = \int_0^i z\mathrm{d}(\sin z)$$

$$= [z\sin z]_0^i - \int_0^i \sin z\mathrm{d}z$$

$$= [z\sin z + \cos z]_0^i = e^{-1} - 1.$$

此方法使用了微积分中“分部积分法”

小结　求积分的方法

(1) $\int_c f(z)dz = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta x_k$

(2) $\int_c f(z)dz = \int udx - vdy + i\int vdx + udy$

(3) $\int_c f(z)dz = \int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)dt$

(4)若$f(z)$解析, B单连通, $C \subset B$, 则$\oint_c f(z)dz = 0$

(5)若$f(z)$在B内解析, B单连通, 则

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = F(z)\Big|_{z_0}^{z_1}, \quad F'(z) = f(z)$$