§ 3.2 Cauchy-Goursat基本定理

分析 § 1的积分例子:

例1中$f(z)=z$在全平面解析,

它沿连接起点及终点的任意C的积分值相同,

即, $\int_C f(z)dz$与路径无关，即$\int_C f(z)dz = \int_A^B f(z)dz$

例2中 $$\oint_{|z-z_0|=r} \frac{1}{z-z_0}dz = 2\pi i \neq 0$$

$\because z = z_0$为奇点,即不解析的点,

但在除去$z = z_0$的非单连通区域内处处解析。

例3中$f(z)=\bar{z}$在复平面上处处不解析,

$\int_C \bar{z}dz$的值与积分路径C有关.

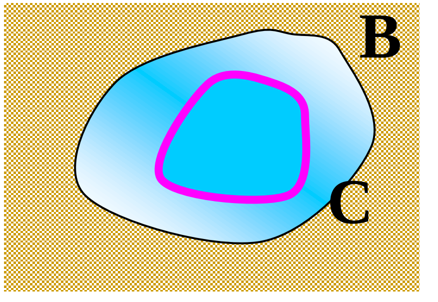
由此猜想：复积分的值与路径无关或沿闭路的积分值＝0的条件可能与被积函数的解析性及解析区域的单连通有关。

Cauchy-Goursat基本定理： —也称Cauchy定理

设$f(z)$在z平面上单连通区域B内解析，

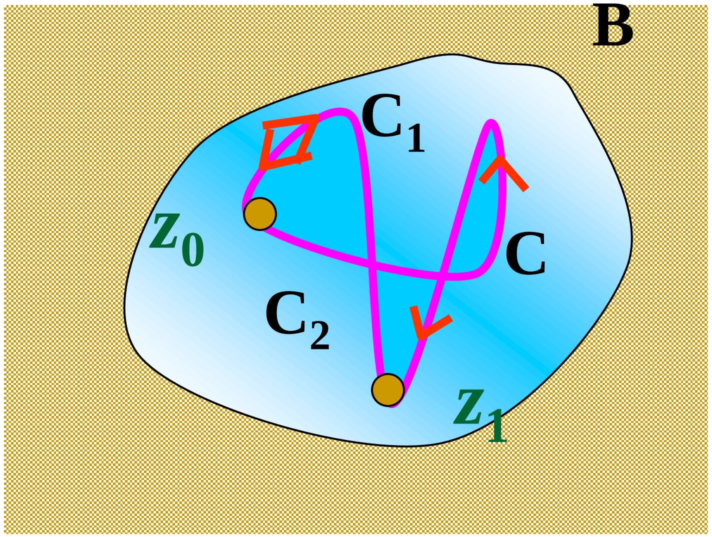
C为B内任一条闭曲线$\Rightarrow \oint_C f(z)dz = 0.$

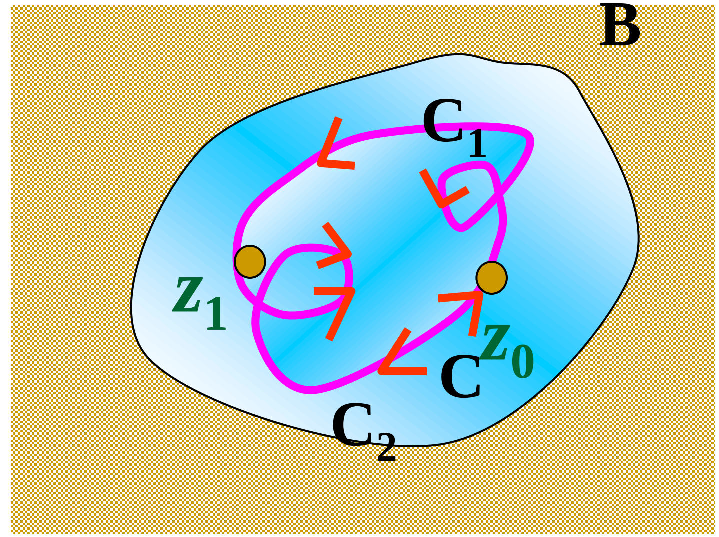
(1)若C为B的边界，$f(z)$在$\overline{B} = C \cup B$上解析，定理仍成立.



(2)若C为B的边界，$f(z)$在B内解析，$f(z)$在$\overline{B} = C \cup B$上连续，定理仍成立.

(3)定理中曲线C不必是简单的！如下图。





推论　设$f(z)$在单连通区域B内解析，则对任意两点$z_0, z_1 \in B$，积分$\oint_c f(z)dz$不依赖于连接起点z_0与终点z_1的曲线，即积分与路径无关。

见上图 $\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz = \int_{z_0}^{z_1} f(z)dz$

例1 计算积分 $\oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \cos(z^2)\mathrm{d}z.$

解 根据柯西－古萨定理得

$$\oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \cos(z^2)\mathrm{d}z = 0$$

讨论1： 在什么情况下，可以用柯西-古萨基本定理求复积分？

讨论2： 以下积分中，哪几个可以用柯西-古萨基本定理直接求出其积分值？

1、$\oint_{|z|=1}\frac{1}{z-2}dz$　　2、$\oint_{|z|=1}\frac{1}{z^2+2z+4}dz$

3、$\oint_{|z|=1}\frac{1}{cosz}dz$　　4、$\oint_{|z|=1}\frac{1}{z-\frac{1}{2}}dz$

5、$\oint_{|z|=1}ze^2dz$　　6、$\oint_{|z|=1}\frac{1}{(z-\frac{i}{2})(z+2)}dz$

§ 3.3 基本定理推广—复合闭路定理

复合闭路定理：

设①B是由$\Gamma = C + C_1^- + C_2^- + \cdots + C_n^-$所围成的有界多连通区域,且$B \subset D$,②$f(z)$在$D$内解析,则

$$\oint_\Gamma f(z)dz = 0 \quad (1)$$

或 $$\oint_c f(z)dz = \sum_{i=1}^{n} \oint_{c_i} f(z)dz \quad (2)$$

其中:闭$C \subset D, C_1, C_2, \cdots C_n$是在$C$的内部的简单闭曲线(互不包含也不相交),每一条曲线C及C_i是逆时针,C_i^- – 顺时针.

说明　(1) Γ, C, C_k 三者之间的关系:

$$\Gamma = C + C_1^- + C_2^- + \cdots + C_k^-$$

(2) C, C_k 的特点与曲线的正向:

C 按逆时针方向, C_k 按顺时针方向.

(3)
$$0 = \oint_\Gamma f(z)dz = \oint_{c+c_1^-+c_2^-+\cdots+c_k^-} f(z)dz$$

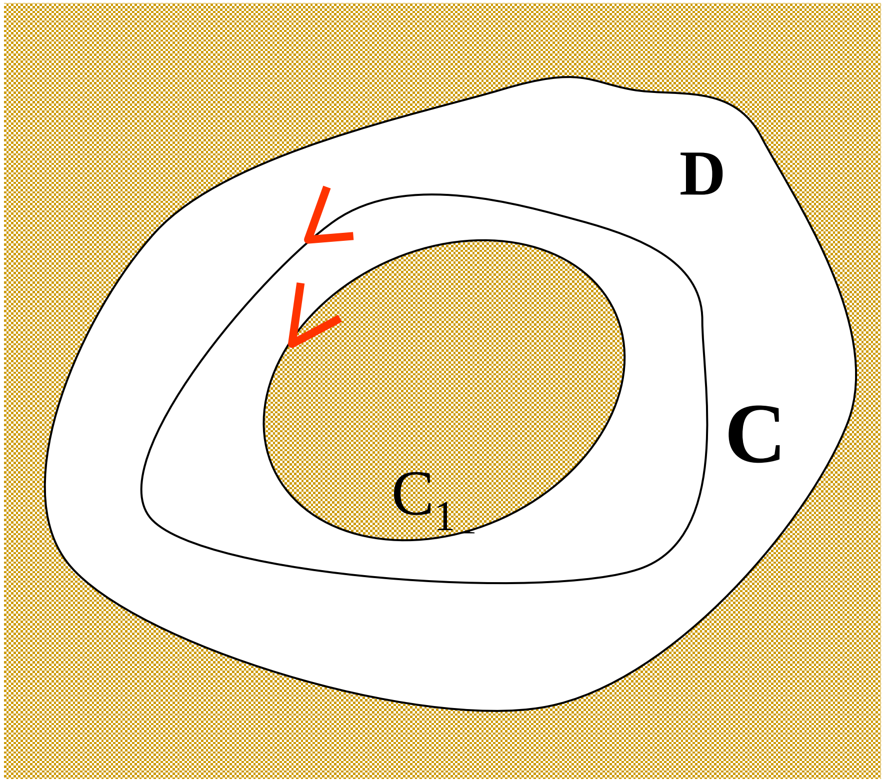
$$= \oint_c f(z)dz + \oint_{c_1^-} f(z)dz + \cdots + \oint_{c_k^-} f(z)dz$$

$$\therefore \quad \oint_c f(z)dz = \oint_{c_1} f(z)dz + \cdots + \oint_{c_k} f(z)dz$$

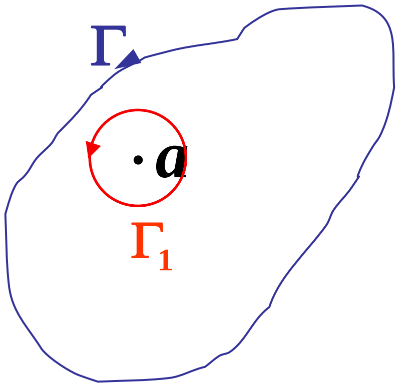
$$\oint_{c} f(z)dz = \oint_{c_1} f(z)dz$$

此式说明一个解析函数沿闭曲线的积分，不因闭曲线在区域内作连续变形而改变它的积分值，只要在变形过程中曲线不经过的$f(z)$的不解析点.

—闭路变形原理



例2 求 $\oint_{\Gamma} \dfrac{1}{(z-a)^{n+1}} \mathrm{d}z$，$\Gamma$ 为含 a 的任一简单闭路，n 为整数.



解 因为 a 在曲线 Γ 内部，

故可取很小的正数 ρ，

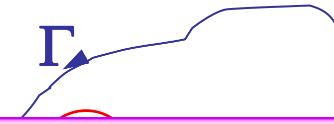
使 $\Gamma_1: |z-a| = \rho$ 含在 Γ 内部，

$\dfrac{1}{(z-a)^{n+1}}$ 在以 $\Gamma + \Gamma_1^-$ 为边界的多连通域

内处处解析，

由复合闭路定理,

$$\oint_{\Gamma}\frac{1}{(z-a)^{n+1}}\mathrm{d}z=\oint\frac{1}{(z-a)^{n+1}}\mathrm{d}z$$



令 $z=a+\rho e^{i\theta}$

$$\oint_{\Gamma_1}\frac{1}{(z-a)^{n+1}}\mathrm{d}z=\int_0 \quad (\rho e \quad \int_0 \quad \rho^n$$

此结论非常重要,用起来很方便,因为Γ不必是圆,a也不必是圆的圆心,只要a在简单闭曲线?内即可.

故 $$\boxed{\oint_{\Gamma}\frac{1}{(z-a)^{n+1}}\mathrm{d}z=\begin{cases}2\pi i, & n=0\\ 0, & n\neq 0.\end{cases}}$$

例3 计算 $\oint_{\Gamma}\frac{2z-1}{z^2-z}dz$ Γ: 包含圆周 $|z|=1$ 在内的任意正向简单闭曲线

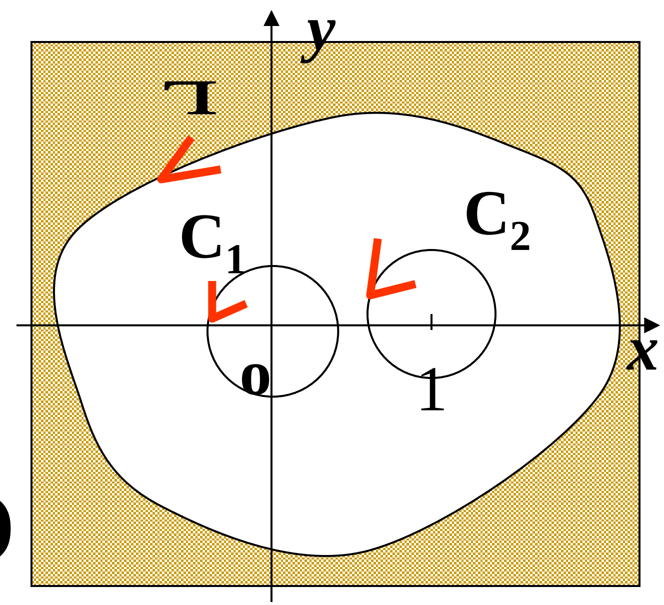
解 $$\text{原式}=\oint_{\Gamma}\left(\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z}\right)dz$$

$$=\oint_{C_1+C_2}\frac{1}{z-1}dz+\oint_{C_1+C_2}\frac{1}{z}dz$$

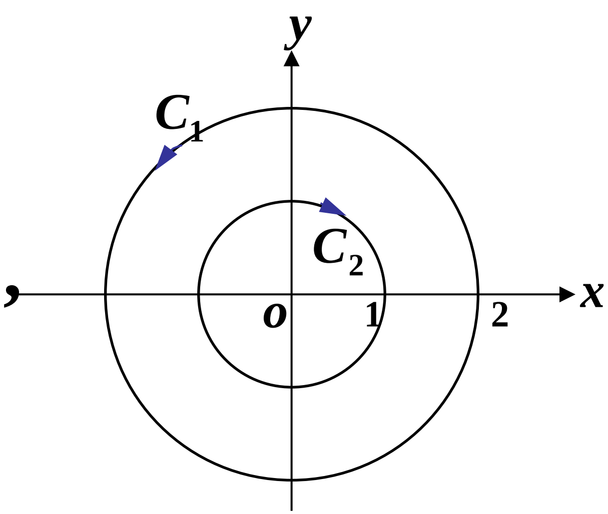
$$=\oint_{C_2}\frac{1}{z-1}dz+\oint_{C_1}\frac{1}{z}dz$$

$$=2\pi i+2\pi i=4\pi i$$

$$\left(\because\oint_{C_1}\frac{1}{z-1}dz=0,\oint_{C_2}\frac{1}{z}dz=0\right)$$



例4　计算积分 $\oint_{\Gamma}\frac{e^{z}}{z}\mathrm{d}z$，$\Gamma$ 为正向圆周 $|z|=2$ 和负向圆周 $|z|=1$ 所组成.



解　C_1 和 C_2 围成一个圆环域，

函数 $\frac{e^{z}}{z}$ 在此圆环域和其边界

上处处解析，圆环域的边界构成一条复合闭路，

根据闭路复合定理，$\oint_{\Gamma}\frac{e^{z}}{z}\mathrm{d}z=0.$

讨论3： 什么情况下使用复合闭路定理求复积分？

2.3 小结

1 掌握柯西一古萨基本定理,并注意定理成立的条件.

(1) 如果函数 $f(z)$ 在单连通域 B 内处处解析,

那末函数 $f(z)$ 沿 B 内的任何一条封闭曲线 C

的积分为零: $\oint_c f(z)\mathrm{d}z = 0.$

(2) 注意定理的条件"单连通域".

反例: $f(z)=\dfrac{1}{z}$ 在圆环域 $\dfrac{1}{2}<|z|<\dfrac{3}{2}$ 内;

(3) 注意定理的不能反过来用.

即不能由 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 0$, 而说 $f(z)$ 在 C 内处处解析.

反例: $f(z)=\dfrac{1}{z^2}$ 在 $|z|=1$ 内.

2 本课所讲述的复合闭路定理与闭路变形原理是复积分中的重要定理, 掌握并能灵活应用它是本章的难点.

(1) 常用结论:

$$\oint_{\Gamma} \frac{1}{(z-a)^{n+1}} \mathrm{d}z = \begin{cases} 2\pi i, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

(2) 利用复合闭路定理是计算沿闭曲线积分的最主要方法.

(3) 使用复合闭路定理时, 要注意曲线的方向.