第四章　级数

教学要求

1.理解幂级数收敛的概念.

2.会求幂级数的收敛半径.

3.会用间接展开法将函数展成泰勒级数.

4.理解洛朗定理.

5.会用间接展开法将函数展成洛朗级数.

一、复数项级数

设复数列 $\{\alpha_n\}=\{a_n+ib_n\}(n=1,2,\cdots)$，复数 $\alpha=a+ib$，

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 收敛 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)=s$.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 收敛 $\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}a_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 均收敛.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 收敛 $\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$.

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 收敛，称 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 绝对收敛.

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 收敛，而 $\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$发散，称 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 条件收敛.

二、幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$

1.收敛半径的求法：若 $(1)\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lambda$; $(2)\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|} = \lambda$,

则 (1) 当 $0 < \lambda < +\infty$ 时，收敛半径 $R = \frac{1}{\lambda}$.

(2) 当 $\lambda = +\infty$ 时，收敛半径 $R = 0$;

(3) 当 $\lambda = 0$ 时，收敛半径 $R = +\infty$.

2.幂级数的运算

(1) 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, |z| < R_1, \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, |z| < R_2$. 令 $R = \min(R_1, R_2)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) z^n, \quad |z| < R.$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0\right) z^n, \quad |z| < R.$$

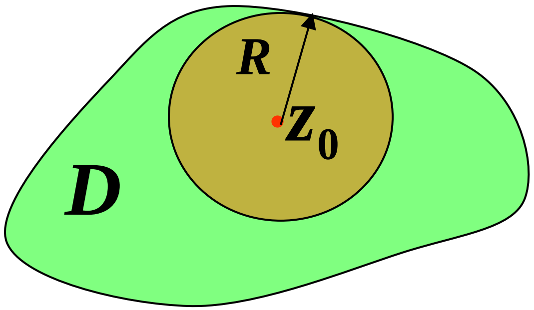
3.幂级数的性质

幂级数在收敛圆内的和函数是解析的，在收敛圆内可以逐项求导和逐项积分.

三、泰勒展开定理

设 $f(z)$ 在区域 D 内解析, z_0 为 D 内的一点, R 为 z_0 到 D 边界的距离， 则 $f(z)$ 在 $|z-z_0|<R$ 内可唯一地表示为 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$,

其中 $c_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0) \quad (n=0,1,2,\cdots)$.



四、洛朗展开定理

设 $0 \le R_1 < R_2 \le +\infty$, 函数$f(z)$在圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内解析, 则函数$f(z)$ 在此环域内必能唯一地展开为

Laurent级数 $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \ \left(R_1 < |z - z_0| < R_2\right)$,

其中 $c_n = \dfrac{1}{2\pi i} \oint_C \dfrac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}z \ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$,

C是圆周$|z - z_0| = R \ (R_1 < R < R_2)$的正向.

附: 常见函数的Taylor展开式

$$(1)\ e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad (|z| < \infty)$$

$$(2)\ \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad (|z| < 1)$$

$$(3)\ \frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \cdots + (-1)^n z^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \quad (|z| < 1)$$

$$(4)\ \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \quad (|z| < \infty)$$

$$(5)\ \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots,$$

$$(|z| < \infty)$$

$$(6)\ \ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} + \cdots,$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} \qquad (|z| < 1)$$

$$(7)\ (1+z)^{\alpha} = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} z^3 +$$

$$\cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} z^n + \cdots, \qquad (|z| < 1)$$

例1 判断下列级数的敛散性：

$$(1)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}+\frac{i}{\sqrt{n}}\right);\quad (2)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3+4i}{2}\right)^n;\quad (3)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(i)^n}{n}$$

解 $(1)\because \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}+\frac{i}{\sqrt{n}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}+i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$

因为虚部项级数发散，故该级数发散.

$(2)\because \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{3+4i}{2}\right|^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{2}\right)^n \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{2}\right)^n=\infty.$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3+4i}{2}\right)^n\neq 0$ 故$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3+4i}{2}\right)^n$ 发散.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(i)^n}{n} = \left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\cdots\right)+i(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots)$

因为实部项级数和虚部项级数均为莱布尼兹型级数，故实部项级数和虚部项级数均收敛，故原级数收敛.

例2 判断下列级数的绝对收敛与条件收敛.

$$(1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(6+5i)^n}{8^n};\qquad (2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos in}{2^n}.$$

解 $(1)\because \sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{6+5i}{8}\right|^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{61}{64}\right)^{\frac{n}{2}}$ $\quad\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{61}{64}\right)^{\frac{n}{2}}$ 收敛

故原级数绝对收敛.

$$(2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos in}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^n+e^{-n}}{2^{n+1}}\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{e^n+e^{-n}}{2^{n+1}}=\infty$$

故原级数发散.

例3 求下列幂级数的收敛半径：

$$(1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2 z^n}{n^n};\qquad (2)\sum_{n=0}^{\infty}(1+i)^n z^n;$$

解 $(1)\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{[(n+1)!]^2}{(n+1)^{n+1}}\frac{n^n}{(n!)^2} = \lim_{n\to\infty}(n+1)\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \infty$

$\therefore R = 0.$

$(2)\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|C_n|} = |1+i| = \sqrt{2}\quad \therefore R = \frac{1}{\sqrt{2}}.$

例4 将下列函数在指定点 z_0 处展成泰勒级数.

$(1)\dfrac{z}{(z+1)(z+2)}$, $z_0=2$; $(2)\arctan z$, $z_0=0$.

解 (1)

$$\frac{z}{(z+1)(z+2)}=\frac{2}{z+2}-\frac{1}{z+1}=\frac{2}{4+z-2}-\frac{1}{3+z-2}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\dfrac{z-2}{4}}-\frac{1}{3}\frac{1}{1+\dfrac{z-2}{3}}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-2}{4}\right)^n-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-2}{3}\right)^n \quad |z-2|<3.$$

$(2)\arctan z,\quad z_0 = 0.$

$$\because (\arctan z)' = \frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}$$

$$\therefore \arctan z = \int_0^z \frac{1}{1+z^2}dz = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}z^{2n+1}, |z| < 1.$$

例5 将函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z+i)(z-2)}$ 在下列圆环域内展成洛朗级数. $(1)\ 1<|z|<2;\quad (2)\ 2<|z|<+\infty.$

解 $\because f(z)=\dfrac{1}{(z+i)(z-2)}=\dfrac{1}{2+i}\left[\dfrac{1}{z-2}-\dfrac{1}{z+i}\right]$

$(1)\ 1<|z|<2 \Rightarrow \dfrac{1}{|z|}<1, \dfrac{|z|}{2}<1.$

$$\therefore f(z)=\frac{1}{2+i}\left[-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}-\frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{i}{z}}\right]=\frac{1}{2+i}\left[-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{i}{z}\right)^n\right]$$

$$(2)\, 2<|z|<+\infty \Rightarrow \frac{2}{|z|}<1, \frac{1}{|z|}<1.$$

$$\because f(z)=\frac{1}{2+i}\left[\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z+i}\right]=\frac{1}{2+i}\left[\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}}-\frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{i}{z}}\right]$$

$$=\frac{1}{2+i}\left[\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{i}{z}\right)^n\right]$$