复变函数积分

第三章 复变函数的积分

§3.1 复变函数积分的概念

- 1. 有向曲线
- 2. 积分的定义
- 3. 积分存在的条件及其计算法
- 4. 积分性质

1. 有向曲线

设 $C:\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta)$

$x'(t)$、$y'(t) \in C[\alpha, \beta]$, 且$[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 \neq 0$

$$C: \quad z(t) = x(t) + iy(t) \quad (\alpha \le t \le \beta) \quad (1)$$

$z'(t)$连续且$z'(t) \neq 0$

$C --z$平面上的一条光滑曲线.

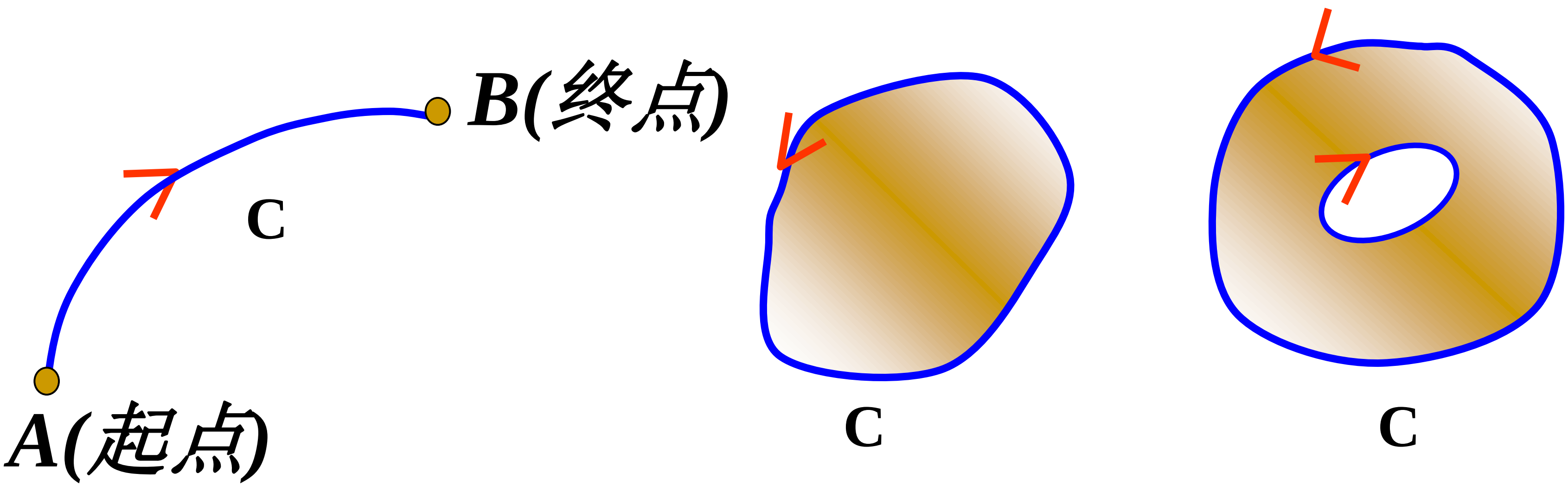
约定: $C-$光滑或分段光滑曲线(因而可求长).

C的方向规定：

开曲线：指定起点a，终点b，若$a \to b$为正，

则$b \to a$为负，记作 C^{-}；

闭曲线：正方向——观察者顺此方向沿C前进一周，C的内部一直在观察者的左边。

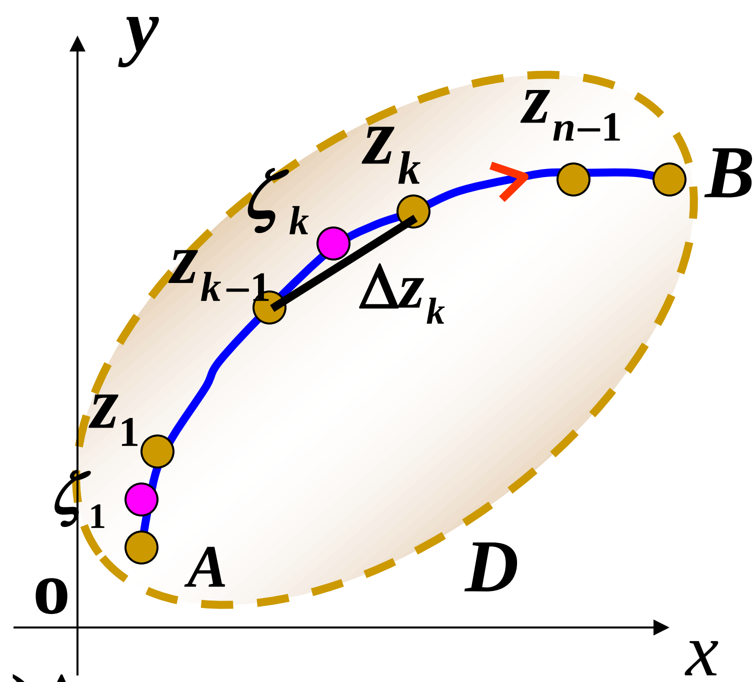


2. 积分的定义

定义 设(1)$w=f(z)\quad z\in D$

(2)C为区域D内点$A\to$点B的一条光滑有向曲线.

(3)将$\overset{\frown}{AB}$任意分划成n个小弧段: $A=z_0,z_1,\cdots,z_n=B$



(4)$\forall\zeta_k\in\overset{\frown}{z_{k-1}z_k}$ 作乘积$f(\zeta_k)\Delta z_k$

(5)作和式$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k$

$\Delta z_k=z_k-z_{k-1}$,记ΔS_k为$\overset{\frown}{z_{k-1}z_k}$的长度,$\delta=\max\limits_{1\le k\le n}\{\Delta S_k\}$

若 $\lim\limits_{\substack{\delta\to 0\\(n\to\infty)}}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k \overset{\exists}{=} I$ (2) 则称I为$f(z)$沿曲线C从$(A\to B)$的积分，记作$\int_C f(z)dz$

无论如何分割C,ζ_i如何取

$$i.e.,\quad \int_C f(z)dz = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k \quad --(3)$$

分割 $\to$ 取乘积 $\to$ 求和 $\to$ 取极限

(1)若闭曲线C 记作$\oint_C f(z)dz$

(2)$C: t\in[a,b]$, $f(z)=u(t)$, 则$\int_C f(z)dz = \int_a^b u(t)dt$

(3)如果$\int_C f(z)dz$存在,一般不能写成$\int_a^b f(z)dz$.

因为$\int_C f(z)dz$不仅与a,b有关,还与曲线C的形状和方向有关。

特例:(1) 若C表示连接点a,b的任一曲线,则

$$\int_C dz = b - a \qquad \int_C z dz = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

(2) 若C表示闭曲线,则 $\oint_C dz = 0,\quad \oint_C z dz = 0$

3. 积分存在的条件及其计算法

定理 当$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在光滑曲线C上连续时，$f(z)$必沿C可积，即$\int_C f(z)dz$存在.

且 $$\boxed{\int_C f(z)dz=\int_C(udx-vdy)+i\int_C(vdx+udy)} \quad (4)$$

$$\overset{\text{记忆}}{=}\int_C(u+iv)(dx+idy)$$

这个定理表明$\int_C f(z)dz$可通过二个二元实变函数的第二型曲线积分来计算.

$\because f(z)$在C上连续,$\therefore u(x,y),v(x,y)$在C上连续 故$\int_C u(x,y)dx$、$\int_C v(x,y)dy$、

$\int_C v(x,y)dx$、$\int_C u(x,y)dy$都存在!

推论1: 当$f(z)$是连续函数,C是光滑曲线时,

$\int_c f(z)dz$一定存在。

推论2: $\int_c f(z)dz$可以通过两个二元实函数的线积分来计算。

积分计算方法：

参数化计算复积分：

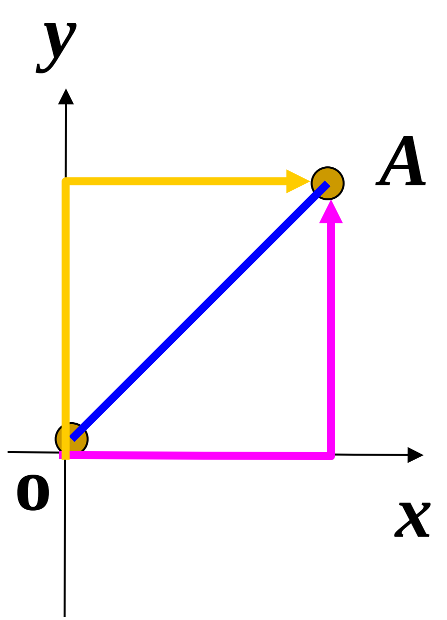
$C: z = z(t)$

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)\mathrm{d}t, \quad t \in [\alpha, \beta]$$

例1 计算$\int_C \bar{z}dz$ $\quad \overline{OA}:\begin{cases} x=3t \\ y=4t \end{cases}(0\le t\le 1)$

解 $\int_C \bar{z}dz=\int_0^1 (3-4i)t\cdot(3+4i)dt$

$$=(3+4i)^2\int_0^1 tdt=\frac{1}{2}(3+4i)^2$$



又解 $\int_C zdz=\int_C (x+iy)(dx+idy)$

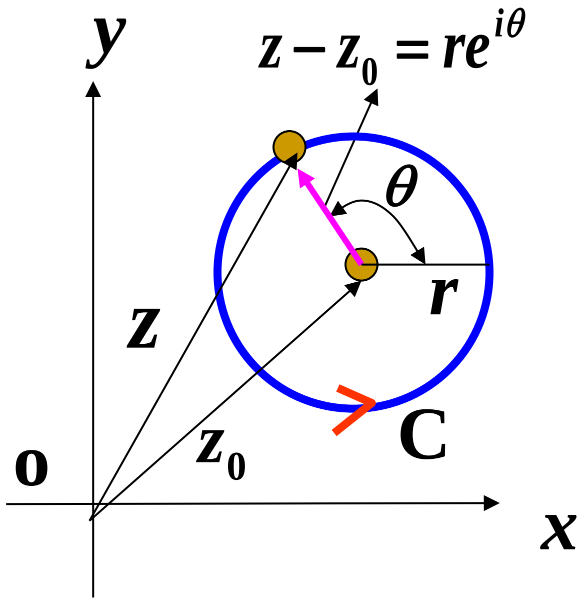
$$=\int_C\left(xdx-ydy\right)+i\int_C\left(ydx+xdy\right)$$

容易验证,右边两个积分都与路径无关,

$\therefore \forall$连接OA的曲线C，其上积分：$\int_C f(z)dz=\dfrac{1}{2}(3+4i)^2$

例2 计算$\oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}}$这里$C$表示以$z_0$为中心,$r$为半径的正向圆周,$n$为整数.

解 $C: z = z_0 + re^{i\theta} \quad 0 \le \theta \le 2\pi$



$$\therefore \oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{i\theta}}{r^{n+1}e^{i(n+1)\theta}} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{i}{r^n e^{in\theta}} d\theta = \begin{cases} i\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i & n=0 \\ \frac{i}{r^n}\int_0^{2\pi} (\cos n\theta - i\sin n\theta) d\theta = 0 & n \ne 0 \end{cases}$$

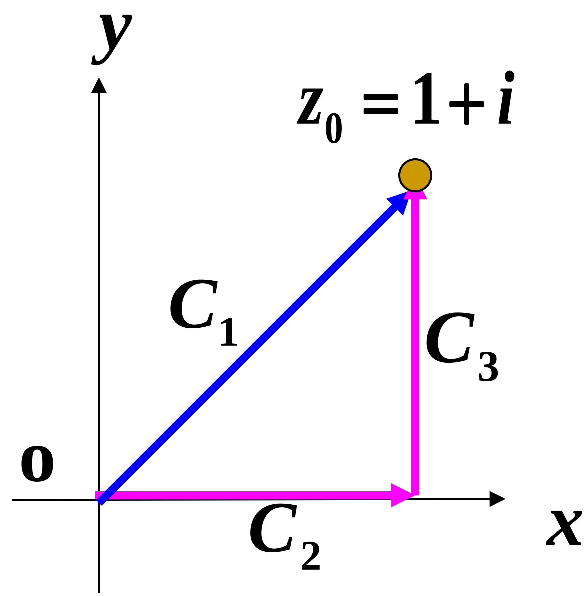
$$\boxed{\therefore \oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \oint_{|z-z_0|=r} \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \begin{cases} 2\pi i & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}}$$

这个结果与半径r及z_0无关,这个结果以后经常用到,应记住.

例3 计算$\int_C \bar{z}dz$的值

$1)C = C_1 = \overline{Oz_0}$

$2)C = C_2 + C_3$(见图)



解 $1)C_1: \quad z = (1+i)t \quad 0 \le t \le 1$

$$\int_C \bar{z}dz = \int_0^1 (t - it)(1+i)dt = \int_0^1 2tdt = 1$$

$2)C_2: z = t \quad 0 \le t \le 1 \quad C_3: z = 1 + it \quad 0 \le t \le 1$

$$\int_C \bar{z}dz = \int_{C_2} \bar{z}dz + \int_{C_3} \bar{z}dz$$

$$= \int_0^1 tdt + \int_0^1 (1 - it)idt = \frac{1}{2} + (\frac{1}{2} + i) = 1 + i$$

例4 计算$\int_{C_1}\bar{z}dz, \int_{C_2}\bar{z}dz$的值, 其中

C_1是单位圆$|z|=1$的上半圆周, 顺时针方向;

C_2是单位圆$|z|=1$的下半圆周，逆时针方向.

解: 1)C_1: $z=e^{i\theta}, 0\le\theta\le\pi$.

$$\int_{C_1}\bar{z}dz=\int_{\pi}^{0}e^{-i\theta}ie^{i\theta}d\theta=i\int_{\pi}^{0}dt=-\pi i$$

2)C_2: $z=e^{i\theta}, -\pi\le\theta\le 0$.

$$\int_{C_2}\bar{z}dz=\int_{-\pi}^{0}e^{-i\theta}ie^{i\theta}d\theta=i\int_{-\pi}^{0}dt=\pi i$$

4. 积分性质

由积分定义得:

$$1)\int_C f(z)dz = -\int_{C^-} f(z)dz$$

$$2)\int_C kf(z)dz = k\int_C f(z)dz$$

$$3)\int_C [f(z) \pm g(z)]dz = \int_C f(z)dz \pm \int_C g(z)dz$$

4) $C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$(分段光滑曲线)

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \cdots + \int_{C_n} f(z)dz$$

5)设C的长度为L,函数$f(z)$在C上满足$|f(z)| \le M$

$$\Rightarrow \left|\int_C f(z)dz\right| \le \int_C |f(z)|ds \le ML$$ ——估值定理.

例5 设 C 为从原点到点 $3+4i$ 的直线段,

试求积分 $\int_C \frac{1}{z-i}\mathrm{d}z$ 绝对值的一个上界.

解 C 的参数方程为 $z=(3+4i)t$, $(0\le t\le 1)$

根据估值不等式知

$$\left|\int_C \frac{1}{z-i}\mathrm{d}z\right| \le \int_C \left|\frac{1}{z-i}\right|\mathrm{d}s$$

因为在 C 上, $\left|\frac{1}{z-i}\right| = \frac{1}{|3t+(4t-1)i|}$

$$=\frac{1}{\sqrt{(3t)^2+(4t-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{25\left(t-\frac{4}{25}\right)^2+\frac{9}{25}}}\leq\frac{5}{3},$$

从而 $\left|\int_C \frac{1}{z-i}\mathrm{d}z\right| \leq \frac{5}{3}\int_C \mathrm{d}s = \frac{25}{3}$

故 $\left|\int_C \frac{1}{z-i}\mathrm{d}z\right| \leq \frac{25}{3}.$

例题

计算 $\int_C \mathrm{Re}\,z\mathrm{d}z$, 其中 C 为:

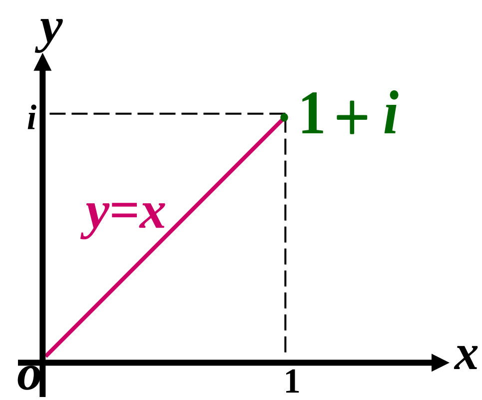
(1)从原点到点 $1+i$ 的直线段;

(2) 抛物线 $y=x^2$ 上从原点到点 $1+i$ 的弧段;

(3) 从原点沿 x 轴到点1再到 $1+i$ 的折线.

解 (1) 积分路径的参数方程为

$$z(t)=t+it \quad (0\le t\le 1),$$



于是 $\mathrm{Re}\,z=t, \quad \mathrm{d}z=(1+i)\mathrm{d}t,$

$$\int_C \mathrm{Re}\,z\mathrm{d}z=\int_0^1 t(1+i)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}(1+i);$$

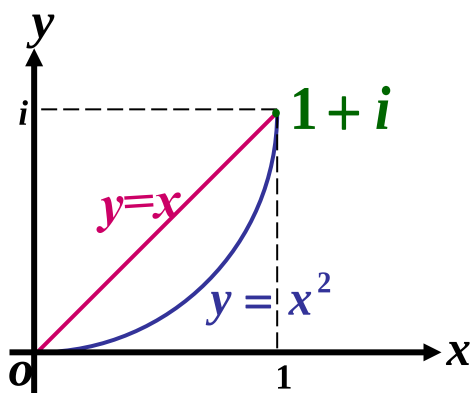
(2) 积分路径的参数方程为

$$z(t) = t + it^2 \quad (0 \le t \le 1),$$

于是 $\mathrm{Re}\, z = t, \quad \mathrm{d}z = (1 + 2ti)\mathrm{d}t,$

$$\int_C \mathrm{Re}\, z \mathrm{d}z = \int_0^1 t(1 + 2it)\mathrm{d}t$$

$$= \left(\frac{t^2}{2} + \frac{2i}{3} t^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} i;$$



(3) 积分路径由两段直线段构成

x轴上直线段的参数方程为 $z(t)=t \quad (0\le t\le 1)$,

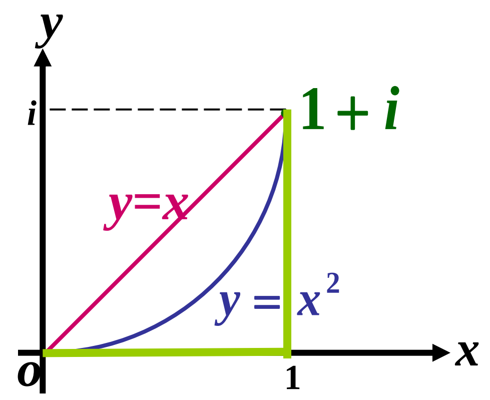
于是 $\operatorname{Re} z=t, \quad \mathrm{d}z=\mathrm{d}t,$

1到1+i直线段的参数方程为$z(t)=1+it \ (0\le t\le 1)$,

于是 $\operatorname{Re} z=1, \quad \mathrm{d}z=i\mathrm{d}t,$

$$\int_C \operatorname{Re} z\mathrm{d}z=\int_0^1 t\mathrm{d}t+\int_0^1 1\cdot i\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}+i.$$



积分与路径有关引入柯西古萨基本定理