第五章　留数及其应用

教学要求

1.理解留数的概念.

2.掌握极点的留数的求法.

3.掌握留数定理.

4.掌握用留数计算围道积分的方法.

5.会用留数求一些实变函数的积分.

一、孤立奇点

如果函数$f(z)$在z_0点不解析，但在z_0的某个去心邻域 $0<|z-z_0|<\delta$ 内处处解析，则称z_0为$f(z)$的孤立奇点.

孤立奇点	Laurent级数的特点	$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$
可去奇点	无负幂项	存在且为有限值
m级极点	含有有限个负幂项 关于 $(z-z_0)^{-1}$ 的最高幂为 $(z-z_0)^{-m}$	∞
本性奇点	含无穷多个负幂项	不存在且不为∞

二、留数

1.留数定义

设 z_0 是$f(z)$的孤立奇点, 则把 $c_{-1}=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\mathrm{d}z$ 称为$f(z)$在 z_0 处的留数，记作 $\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\mathrm{d}z=C_{-1}$

2.留数定理

设函数$f(z)$在区域D内除有限个孤立奇点 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 外处处解析, C是D内包含所有奇点在内的简单闭曲线,则

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}\left[f(z),z_k\right].$$

3.留数的计算

(1) 如果 z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点, 则

$$\mathrm{Res}[f(z),z_0]=0.$$

(2) 如果 z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点, 则需将 $f(z)$ 展开成Laurent级数, 求 c_{-1}.

(3) 如果 z_0 为 $f(z)$ 的极点, 则有如下计算规则

•规则1　如果 z_0 为 $f(z)$ 的1级极点, 那么

$$\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\lim_{z\to z_0}[(z-z_0)f(z)].$$

•规则2　设 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$, $P(z)$ 及 $Q(z)$ 在 z_0 都解析.

如果 $P(z_0)\neq 0$, $Q(z_0)=0$, $Q'(z_0)\neq 0$, 那么 z_0 为 $f(z)$ 的1级极点, 并且

$$\operatorname{Res}[f(z),z_0]=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}.$$

•规则3　如果 z_0 为 $f(z)$ 的 m 级极点, 取正整数 $n\geq m$, 那么

$$\operatorname{Res}[f(z),z_0]=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}[(z-z_0)^n f(z)].$$

三、留数在计算实积分中的应用

1. 形如 $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)d\theta$ 的定积分

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta = \oint_{|z|=1} R\left[\frac{z^2+1}{2z},\frac{z^2-1}{2iz}\right]\frac{1}{iz}\mathrm{d}z = \oint_{|z|=1} f(z)\mathrm{d}z$$

$$= 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),z_k].$$

2. 形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx$ 的广义积分

定理1: 设$R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, $P(x)$,$Q(x)$为互质多项式，且$Q(x)$的次数至少比$P(x)$高二次，在实轴上，$R(z)$没有孤立奇点，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\mathrm{d}x = 2\pi i\sum_{\substack{k=1\\ \mathrm{Im}(z_k)>0}}^{n}\mathrm{Res}[R(z),z_k].$$

3. 形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{aix}dx \quad (a>0)$ 的广义积分

定理2： 设 $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$，$P(x)$,$Q(x)$为互质多项式，且$Q(x)$的次数至少比$P(x)$高一次，在实轴上，$R(z)$没有孤立奇点，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{aix}\mathrm{d}x = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[R(z)e^{aiz},z_k]. \quad (\mathrm{Im}\,z_k>0)$$

其中z_k为$R(z)$在上半平面的孤立奇点

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{aix}\mathrm{d}x = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[R(z)e^{aiz}, z_k].$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)cosaxdx + i\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)sinaxdx = 2\pi i\sum_{k} Res[R(z)e^{aiz}, z_k]$$

所以：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)cosaxdx = Re\left[\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{aix}dx\right] = Re\left\{2\pi i\sum_{k} Res[R(z)e^{aiz}, z_k]\right\}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)sinaxdx = Im\left[\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{aix}dx\right] = Im\left\{2\pi i\sum_{k} Res[R(z)e^{aiz}, z_k]\right\}$$

其中z_k为$R(z)$在上半平面的孤立奇点

例 1 下列函数有什么奇点，若是极点，指出它们的级.

(1) $\dfrac{(z-5)\sin z}{(z-1)^2 z(z+1)^3}$； (2) $\dfrac{z}{(1+z^2)(1+e^{\pi z})}$； (3) $e^{\frac{1}{1-z}}$； (4) $\dfrac{1}{\sin z^2}$.

解 （1）z=0，1，-1均是孤立奇点

$$\because \lim_{z\to 0}\frac{(z-5)\sin z}{(z-1)^2 z(z+1)^3}=-5$$

故z=0是可去奇点.

容易得到z=1是二级极点，z=-1是三级极点.

(2)令$(1+z^2)(1+e^{\pi z})$=0，得到

$z=\pm i,(2k+1)i,k=1,\pm2,\pm3,\cdots$ 均是孤立奇点

$$\because \left(1+e^{\pi z}\right)\Big|_{z=\pm i}=0, \left(1+e^{\pi z}\right)'\Big|_{z=\pm i}\neq 0.$$

$\therefore z=\pm i$ 是分母的二级零点，从而是原函数的二级极点.

$$\because \left(1+e^{\pi z}\right)'\Big|_{z=(2k+1)i}\neq 0, \quad k=1,\pm 2,\pm 3,\cdots$$

$$\therefore z=(2k+1)i, k=1,\pm 2,\pm 3,\cdots$$

是分母的一级零点，从而是原函数的一级极点.

$(3)e^{\frac{1}{1-z}}$;

$(3)\because e^{\frac{1}{1-z}} = 1 + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2!(z-1)^2} + \frac{1}{3!(z-1)^3} + \cdots$

可知z=1是函数的本性奇点.

$(4)\frac{1}{\sin z^2}$.

(4)令$\sin z^2 = 0 \Rightarrow z = \pm\sqrt{k\pi}, k = 0,1,2,\cdots$

$\because \left(\sin z^2\right)'\Big|_{z=0} = 2z\cos z^2\Big|_{z=0} = 0$

$\left(\sin z^2\right)''\Big|_{z=0} = (2\cos z^2 - 4z^2\sin z^2)\Big|_{z=0} = 2 \neq 0$

$\therefore z = 0$是$\frac{1}{\sin z^2}$ 的二级极点.

$\because k \neq 0, (\sin z^2)'\Big|_{z=\pm\sqrt{k\pi}} = \pm 2\sqrt{k\pi}\cos k\pi \neq 0$

$\therefore z = \pm\sqrt{k\pi}, k = 1,2,\cdots$ 是函数的一级极点.

例2　证明$z=0$ 是$f(z)=\dfrac{1}{z^3(e^{z^3}-1)}$ 的六级极点.

证　$$\frac{1}{f(z)}=z^3(e^{z^3}-1)=z^3\left(1+z^3+\frac{(z^3)^2}{2!}+\cdots-1\right),$$

$$=z^6+\frac{z^9}{2!}+\frac{z^{12}}{3!}+\cdots$$

因为$z=0$是$\dfrac{1}{f(z)}=z^3(e^{z^3}-1)$的六级零点，

所以$z=0$是$f(z)=\dfrac{1}{z^3(e^{z^3}-1)}$的六级极点.

例3 求下列函数在有限奇点处的留数.

$$(1)\sin\frac{1}{z-1};\quad (2)z^2\sin\frac{1}{z};\quad (3)\frac{1}{z\sin z};\quad (4)\frac{z}{\cos z}$$

解 （1）因为$z=1$是孤立奇点，且

$$\sin\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{3!(z-1)^3}+\frac{1}{5!(z-1)^5}-\cdots$$

$$\therefore \operatorname{Res}[f(z),1]=C_{-1}=1.$$

$$(2)z^2\sin\frac{1}{z}=z^2\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{5!z^5}-\cdots\right)=z-\frac{1}{3!z}+\frac{1}{5!\ z^3}-\cdots$$

$$\therefore \operatorname{Res}[f(z),0]=C_{-1}=-\frac{1}{3!}.$$

$$(1)\sin\frac{1}{z-1};\quad (2)z^2\sin\frac{1}{z};\quad (3)\frac{1}{z\sin z};\quad (4)\frac{z}{\cos z}$$

$$(3)\because (z\sin z)\big|_{z=0}=0,\quad (z\sin z)'\big|_{z=0}=(\sin z+z\cos z)\big|_{z=0}=0,$$

$$(z\sin z)''\big|_{z=0}=(2\cos z-z\sin z)\big|_{z=0}=2\neq 0,$$

$\therefore z=0$是$z\sin z$ 的二级零点，故是 $\dfrac{1}{z\sin z}$ 的二级极点.

由规则3，得

$$\operatorname{Res}\left[f(z),0\right]=\lim_{z\to 0}[z^2\frac{1}{z\sin z}]'=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z-z\cos z}{\sin^2 z}=0.$$

(4)易知 $z=k\pi+\dfrac{\pi}{2},k=0,\pm1,\pm2,\cdots$是$\dfrac{z}{\cos z}$ 的一级极点.

由规则2，得

$$\operatorname{Res}\left[f(z),k\pi+\frac{\pi}{2}\right]=\frac{z}{(\cos z)'}\bigg|_{z=k\pi+\frac{\pi}{2}}=\frac{k\pi+\frac{\pi}{2}}{-\sin\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)}=(-1)^{k+1}\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi.$$

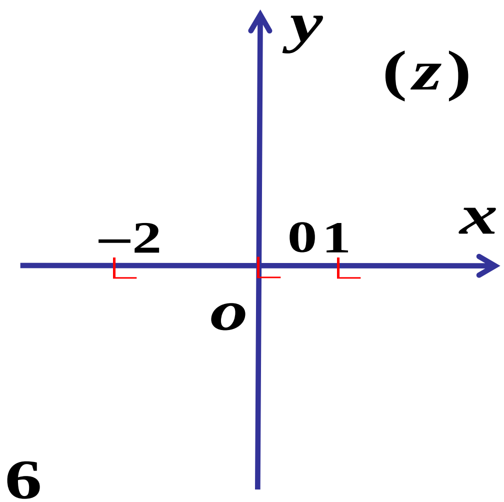
例4　计算下列函数奇点处的留数

$$1)\ f(z)=\frac{z+1}{z^2+2z};\qquad 2)\ f(z)=\frac{z^4}{(z-1)^3},$$

解　$$1)\ \mathrm{Res}\left[\frac{z+1}{z^2+2z},0\right]=\lim_{z\to 0}\frac{z+1}{z+2}=\frac{1}{2}$$

$$\mathrm{Res}\left[\frac{z+1}{z^2+2z},-2\right]=\lim_{z\to -2}\frac{z+1}{z}=\frac{1}{2}$$

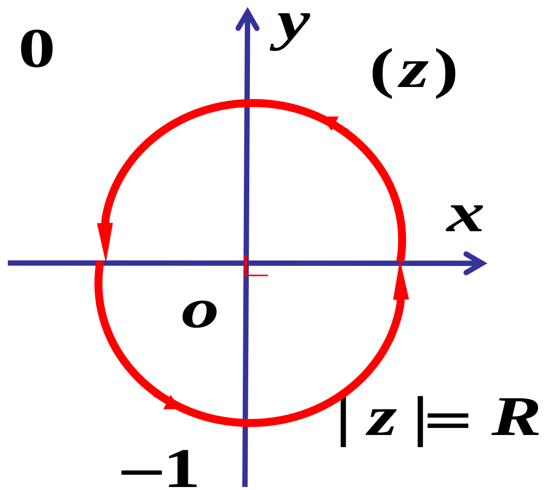
$$2)\ \mathrm{Res}\left[\frac{z^4}{(z-1)^3},1\right]=\lim_{z\to 1}\frac{1}{2}(z^4)''=6$$



例5　计算下列积分

$$1)\ \oint_{|z|=1} \frac{\sin z}{z}\mathrm{d}z; \qquad 2)\ \oint_{|z|=1} \frac{1-\cos z}{z^5}\mathrm{d}z.$$

解　$$1)\ \oint_{|z|=1} \frac{\sin z}{z}\mathrm{d}z = 2\pi i\,\mathrm{Res}[\frac{\sin z}{z},0] = 0$$



$$2)\ \oint_{|z|=1} \frac{1-\cos z}{z^5}\mathrm{d}z$$

$$= 2\pi i\,\mathrm{Res}[\frac{1-\cos z}{z^5},0] = -\frac{\pi i}{12}$$

$$\mathrm{Res}[\frac{1-\cos z}{z^5},0] = \frac{1}{4!}(1-\cos z)^{(4)}\Big|_{z=0} = \frac{-1}{4!}$$

例6　计算下列积分

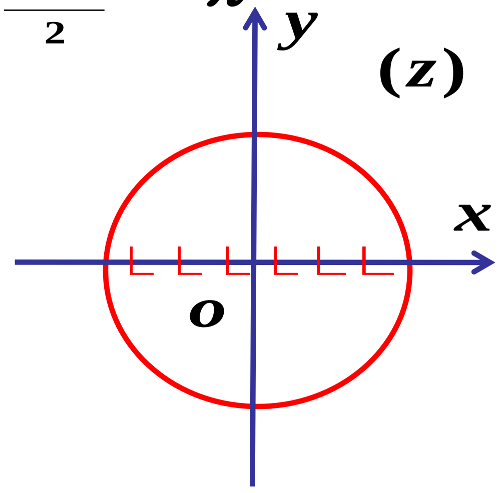
$$1)\ \oint_{|z|=3} \tan \pi z\,\mathrm{d}z; \qquad 2)\ \oint_{|z|=3} \sin \frac{1}{1-z}\,\mathrm{d}z$$

解　$$1)\ \mathrm{Res}\left[\tan \pi z, \pm\frac{2k+1}{2}\right] = \left.\frac{\sin \pi z}{(\cos \pi z)'}\right|_{z=\pm\frac{2k+1}{2}} = \frac{-1}{\pi}$$

$$\oint_{|z|=3} \tan \pi z\,\mathrm{d}z = 2\pi i \times 6 \times \left(\frac{-1}{\pi}\right) = -12i$$

$$2)\ \sin\frac{1}{1-z} = \frac{-1}{z-1} + \frac{1}{3!(z-1)^3} - \cdots,$$

$$\oint_{|z|=3} \sin \frac{1}{1-z}\,\mathrm{d}z = -2\pi i$$

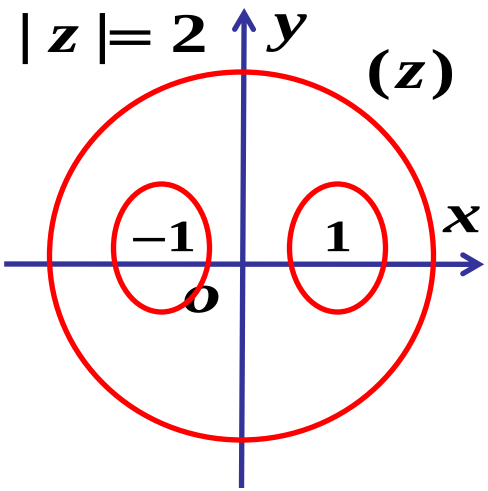


例7 计算积分 $\oint_{|z|=2} \dfrac{ze^z}{z^2-1}dz$

解 $\operatorname{Res}\left[\dfrac{ze^z}{z^2-1},-1\right]=\left.\dfrac{e^z}{2}\right|_{z=-1}=\dfrac{1}{2e}$

$\operatorname{Res}\left[\dfrac{ze^z}{z^2-1},1\right]=\left.\dfrac{e^z}{2}\right|_{z=-1}=\dfrac{e}{2}$

$\oint_{|z|=2} \dfrac{ze^z}{z^2-1}dz=2\pi i\left[\dfrac{1}{2e}+\dfrac{e}{2}\right]$



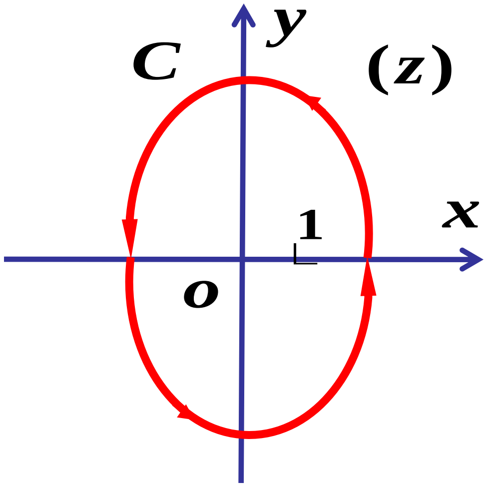
例8 计算积分$\oint_C \frac{e^z}{(z-1)^3}dz,$

其中$C: z = 2\cos t + i4\sin t, 0 \le t \le 2\pi$

解 $\oint_C \frac{e^z}{(z-1)^3}dz$

$= 2\pi i \operatorname{Res}[\frac{e^z}{(z-1)^3}, 1]$

$= 2\pi i \lim_{z\to 1} \frac{(e^z)''}{2} = \pi e i$



例9 计算积分 $\oint_{|z|=1} \frac{z-\sin z}{z^6} dz.$

解1 $\oint_{|z|=1} \frac{z-\sin z}{z^6} dz = 2\pi i \operatorname{Res}[\frac{z-\sin z}{z^6}, 0]$

$$\operatorname{Res}[\frac{z-\sin z}{z^6}, 0] = \frac{1}{5!}\lim_{z\to 0}(z-\sin z)^{(5)} = \frac{1}{5!}\lim_{z\to 0}(-\cos z) \quad = -\frac{1}{5!}$$

或 $\frac{z-\sin z}{z^6} = \frac{1}{z^6}(\frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} - \cdots) \qquad c_{-1} = -\frac{1}{5!}$

$$\oint_{|z|=1} \frac{z-\sin z}{z^6} dz = 2\pi i[-\frac{1}{5!}] \quad = -\frac{\pi i}{60}$$

例10 计算积分$\oint_{|z|=2}\frac{\sin(z+i)}{z(z+i)^8}\mathrm{d}z.$

解 $z=0$ 为一级极点，$z=-i$ 为七级极点.

$$\mathrm{Res}[f(z),0]=\lim_{z\to 0} zf(z)=\lim_{z\to 0}\frac{\sin(z+i)}{(z+i)^8}=\sin i;$$

$$f(z)=\frac{\sin(z+i)}{(z+i)^8}\cdot\frac{1}{(z+i)-i}=\frac{\sin(z+i)}{(z+i)^8}\cdot i\frac{1}{1-\frac{z+i}{i}}$$

$$=\left\{\frac{1}{(z+i)^7}-\frac{1}{3!(z+i)^5}+\frac{1}{5!(z+i)^3}-\frac{1}{7!(z+i)}+\cdots\right\}$$

$$\cdot i\left\{1+\frac{1}{i}(z+i)+\frac{1}{i^2}(z+i)^2+\cdots\right\}$$

$$=\cdots+i\left(\frac{-1}{7!}+\frac{-1}{5!}+\frac{-1}{3!}+\frac{-1}{1!}\right)\frac{1}{z+i}+\cdots$$

所以 $\operatorname{Res}[f(z),-i]=-i\left(1+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{7!}\right)$

由留数定理得

$$\oint_{|z|=2}\frac{\sin(z+i)}{z(z+i)^8}dz=2\pi i\{\operatorname{Res}[f(z),0]+\operatorname{Res}[f(z),-i]\}$$

$$=2\pi i\left\{\sin i-i\left(1+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{7!}\right)\right\}.$$

例11　计算积分$I=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^4+a^4}\ (a>0)$.

解　$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^4+a^4}$.

$z_0=ae^{\frac{\pi}{4}i}$,

$z_1=ae^{\frac{3\pi}{4}i}$.

$$=\pi i\,\mathrm{Res}[f,z_0]+\pi i\,\mathrm{Res}[f,z_1]$$

$$=\pi i\left(\left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z=z_0}+\left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z=z_1}\right)=\pi i\left(-\frac{ae^{\frac{\pi}{4}i}}{4a^4}-\frac{ae^{\frac{3\pi}{4}i}}{4a^4}\right)$$

$$=-\frac{\pi i}{4a^3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\frac{\pi}{2\sqrt{2}a^3}.$$

例12　计算积分$\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+1}\mathrm{d}x$.

解　$$\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$$

因为$R(z)=\frac{z^2}{(z^4+1)}$在实轴上解析，

在上半平面内有一级极点 $z_1=e^{\pi i/4}$，　$z_2=e^{3\pi i/4}$.

所以$$\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\pi i\cdot\sum\mathrm{Res}[R(z),z_k]$$

$$\mathrm{Res}[R(z),e^{\frac{\pi i}{4}}]=\lim_{z\to e^{\frac{\pi i}{4}}}\left(z-e^{\frac{\pi i}{4}}\right)\frac{z^2}{1+z^4}=\frac{\sqrt{2}}{8}(1-i),$$

$$\mathrm{Res}[R(z),e^{\frac{3\pi i}{4}}]=\lim_{z\to e^{\frac{3\pi i}{4}}}\left(z-e^{\frac{3\pi i}{4}}\right)\frac{z^2}{1+z^4}=-\frac{\sqrt{2}}{8}(1+i).$$

故 $$\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+1}\mathrm{d}x=\frac{2\pi i}{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{8}(1-i)-\frac{\sqrt{2}}{8}(1+i)\right]$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi.$$

例13　计算积分$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin 2x}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x$.

解　$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{ze^{2zi}}{z^2+2z+5}\mathrm{d}z=2\pi i\,\mathrm{Res}\left[\frac{ze^{2zi}}{z^2+2z+5},-1+2i\right]$

$$=2\pi i\left.\frac{ze^{2zi}}{2z+2}\right|_{z=-1+2i}=\frac{\pi i(-1+2i)e^{2i(-1+2i)}}{2i}$$

$$=\frac{\pi(-1+2i)(\cos 2+i\sin 2)}{2e^4}$$

$$I=\frac{\pi(2\cos 2-\sin 2)}{2e^4}$$