Introduction

一、复变函数的产生及研究对象

并非来源于生产实际问题的推动，是为了数学自身的发展，解决数学内部矛盾；以复变解析函数为研究对象。

Cauchy,Reiman, Weirestrass 积分角度 几何角度 级数角度

二、用途

已成为流体力学、电磁学、工程力学、热学等领域中研究平面问题的最有效的方法之一.

三、学习方法

类比法

第一章 复数与复变函数

第一节　复数的概念与运算

1.1 复数及其代数运算

$x^2+1=0$ 在实数范围内无解. 为了建立代数方程的普遍理论，引入一个新数 i， 称为**虚数单位**.

对虚数单位的**规定**：

(1) $i^2=-1$.

(2) i 可以和实数在一起按一定的法则进行四则运算.

虚数单位的**特性**：

$i^1=i$, $i^2=-1$, $i^3=i\cdot i^2=-i$, $i^4=i^2\cdot i^2=1$, …

$i^{4n}=1$, $i^{4n+1}=i$, $i^{4n+2}=-1$, $i^{4n+3}=-i$, $i^{4n+4}=1$.

复数 形如$z=x+iy$，其中x和y是任意两个实数.

把这里的x和y分别称为复数z的实部和虚部，记作

$$x=\operatorname{Re} z, \qquad y=\operatorname{Im} z.$$

$x=0, y\neq 0 \Rightarrow z=iy$ 称为纯虚数

$x\neq 0, y=0 \Rightarrow z=x$ 看做实数

$R\subset C$

复数相等充要条件 实部和虚部分别相等

复数为0充要条件 注意：一般情况下，复数不能比较大小

复数的代数运算 设两复数 $z_1=x_1+iy_1$ 和 $z_2=x_2+iy_2$

$$z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+i(y_1\pm y_2)$$

$$z_1\cdot z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_2y_1+x_1y_2)$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^{\,2}+y_2^{\,2}}+i\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^{\,2}+y_2^{\,2}}$$

共轭复数 实部相同、虚部绝对值相同符号相反的**一对复数**

z共轭的复数记作 $\bar{z}$

$$z = x + iy \Rightarrow \bar{z} = x - iy$$

$$z = x - iy \Rightarrow \bar{z} = x + iy$$

共轭复数的性质

(1) $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$； $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$； $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.

(2) $\bar{\bar{z}} = \overline{(\bar{z})} = z$ (3) $z \cdot \bar{z} = [\mathrm{Re}(z)]^2 + [\mathrm{Im}(z)]^2 = |z|^2$.

(4) $z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}(z)$, $z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$.

例1 **将下列复数表示成$x+iy$的形式**

$$(1)\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^7 \qquad (2)\ \frac{i}{1-i}+\frac{1-i}{i}$$

解 $$(1)\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^7=\frac{(1-i)^{14}}{(1+i)^7(1-i)^7}=\frac{\left[(1-i)^2\right]^7}{2^7}=\frac{(-2i)^7}{2^7}=i.$$

$$(2)\ \frac{i}{1-i}+\frac{1-i}{i}=\frac{i(1+i)}{(1-i)(1+i)}+\frac{(1-i)i}{i\cdot i}=\frac{i-1}{2}+\frac{i+1}{-1}$$

$$=-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$$

练习：把$z=\dfrac{i}{(i-1)(i-2)(i-3)}$表示成$x+iy$的形式.

例2 设z_1, z_2是两个复数，证明

$$\mathrm{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right)=\frac{1}{2}(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2)$$

$$\mathrm{Im}\left(z_1\overline{z_2}\right)=\frac{1}{2i}(z_1\overline{z_2}-\overline{z_1}z_2)$$

分析 $z+\overline{z}=2\,\mathrm{Re}(z),\quad z-\overline{z}=2i\,\mathrm{Im}(z).$

证明 $\mathrm{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right)=\frac{1}{2}(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1\overline{z_2}})=\frac{1}{2}(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2)$

同理可证第二个等式.

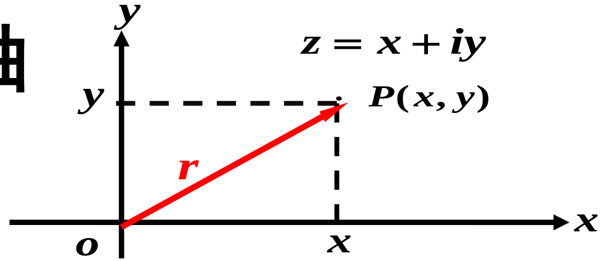
1.2 复数的几何表示

复平面

$$z = x + iy \longleftrightarrow (x, y) \longleftrightarrow P(x, y)$$

x轴为实轴， y轴为虚轴

$$z = x + iy \longleftrightarrow \overrightarrow{OP}$$



复数的模 向量的长度

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

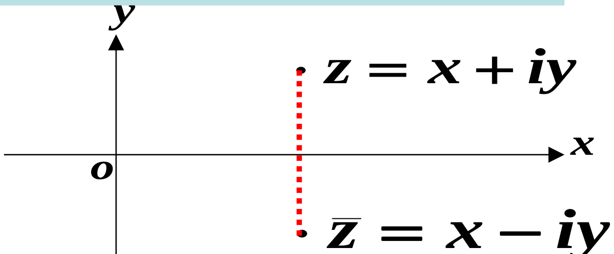
$$|x| \le |z|, \quad |y| \le |z|$$

$$|z| \le |x| + |y|$$

$$z \square \overline{z} = |z|^2 = |z^2|$$

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|, |z_1 - z_2| \ge \big||z_1| - |z_2|\big|$$

z与$\overline{z}$ 关于实轴对称



复数的辐角 以x轴的正向为始边，以向量$\overrightarrow{OP}$为终边的角θ称为z的辐角，记做Arg$z$. $\mathrm{Arg}z = \theta_1 + 2k\pi \ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

$z = 0$ 辐角不确定

辐角的主值 满足$-\pi < \theta \leq \pi$的复数z的辐角称为辐角的主值. 记做 $\theta_0 = \arg z$ $\tan(\arg z) = y/x$

$$\arg z = \begin{cases} \arctan \dfrac{y}{x} & x > 0 \\ \pm \dfrac{\pi}{2} & x = 0, y \neq 0 \\ \arctan \dfrac{y}{x} \pm \pi & x < 0, y \neq 0 \\ \pi & x < 0, y = 0 \end{cases}$$

$$-\frac{\pi}{2} < \arctan \frac{y}{x} < \frac{\pi}{2}$$

$$\mathrm{Arg}z = \arg z + 2k\pi$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

复数的三角表示和指数表示

利用直角坐标与极坐标之间的关系 $x = r\cos\theta,$

$y = r\sin\theta,$

$$z = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$$ 三角表示式

再利用Euler公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$$z = re^{i\theta}$$ 指数表示式

其中$r=|z|$, θ =Argz

例3 把复数 $z = 1 - \cos\alpha + i\sin\alpha, 0 \le \alpha \le \pi$

化为三角表示与指数表示并求辐角的主值.

解 $z = 1 - \cos\alpha + i\sin\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}i$

$$= 2\sin\frac{\alpha}{2}\left[\sin\frac{\alpha}{2} + i\cos\frac{\alpha}{2}\right] = 2\sin\frac{\alpha}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)\right]$$

$$z = 2\sin\frac{\alpha}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$\arg z = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$$

练习：写出复数$z=-2-3i$的辐角.

练习：求复数$z=\frac{3+i}{2-i}$的模、辐角、共轭复数.

练习：给出复数$z=sin\frac{\pi}{3}-icos\frac{\pi}{3}$的三角表示形式.

例4 证明 $|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+2\operatorname{Re}(z_1\overline{z}_2)$，并由此证明

$$|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|.$$

证明 $|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)\overline{z_1+z_2}\quad=z_1\overline{z}_1+z_2\overline{z}_2+z_1\overline{z}_2+\overline{z}_1z_2$

由例2知,

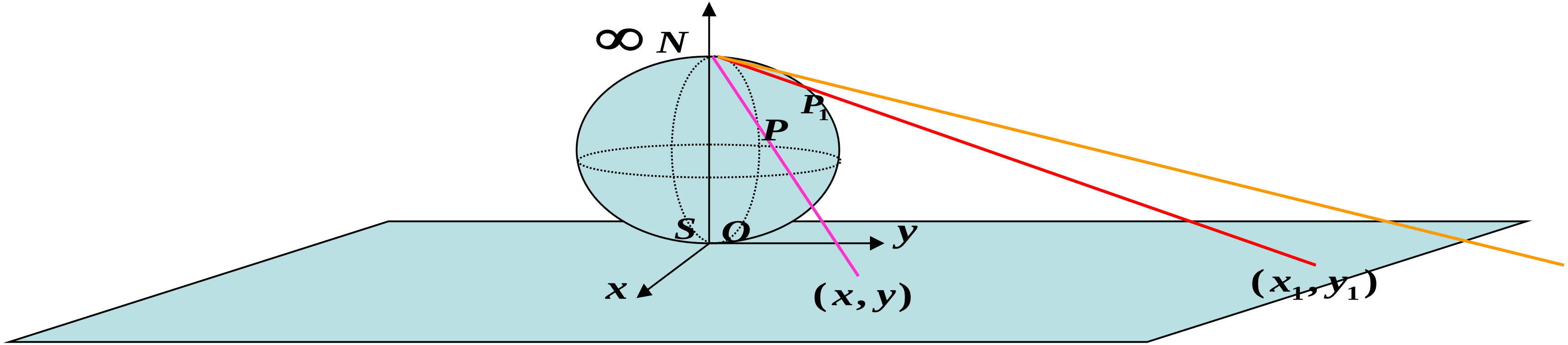
$$|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+2\operatorname{Re}(z_1\overline{z}_2)$$

$$\le|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1\overline{z}_2|$$

$$=|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2|=(|z_1|+|z_2|)^2$$

复球面与无穷大

复数可以用平面上的点表示，这是复数的几何表示法的一种，另外还可以用球面上的点表示复数.



球面上的点, 除去北极N外, 与复平面内的点之间存在着一一对应的关系. 我们用球面上的点来表示复数.

∞ 扩充复平面.

对于复数的无穷远点而言，它的实部、虚部、辐角等概念均无意义，规定它的模为正无穷大.

■关于∞的四则运算法则如下：

(1) 加法 $\alpha+\infty=\infty+\alpha=\infty \quad (\alpha\neq\infty);$

(2) 减法 $\alpha-\infty=\infty-\alpha=\infty \quad (\alpha\neq\infty);$

(3) 乘法 $\alpha\cdot\infty=\infty\cdot\alpha=\infty \quad (\alpha\neq 0);$

(4) 除法 $\dfrac{\alpha}{\infty}=0,\quad \dfrac{\infty}{\alpha}=\infty\ (\alpha\neq\infty),\quad \dfrac{\alpha}{0}=\infty(\alpha\neq 0).$

1.3 复数的乘幂与方根

复数乘积和商的模与辐角

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) = r_1 e^{i\theta_1}$$

$$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = r_2 e^{i\theta_2}$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)].$$

$$|z_1 z_2| = r_1 \cdot r_2 = |z_1| \cdot |z_2| \qquad \mathrm{Arg}(z_1 z_2) = \mathrm{Arg}z_1 + \mathrm{Arg}z_2.$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}.$$

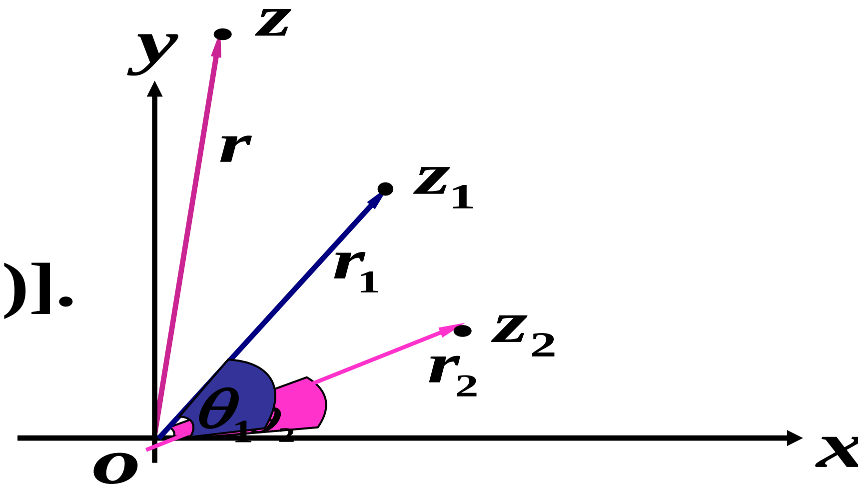
注意：集合意义下的相等

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \qquad \mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Arg}z_1 - \mathrm{Arg}z_2.$$

两个复数相乘的几何意义

$$z_1 \cdot z_2 =$$

$$r_1 \cdot r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)].$$



复数的乘幂

$$z_k = r_k(\cos\theta_k + i\sin\theta_k)$$

$$(k=1,2,\cdots,n),$$

$$z_1z_2\cdots z_n = r_1r_2\cdots r_n[\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)$$
$$+i\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)].$$

$$z_1 = z_2 = \cdots = z_n = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta).$$ r=1,**De Movie公式**

补例：设$z_1 = 1 + \sqrt{3}i, z_2 = \sqrt{3} + i$，求$z_1 \cdot z_2$及$\frac{z_1}{z_2}$，并说明其几何意义.

补例：求$\frac{(\cos\varphi - i\sin\varphi)^2}{(\sin\varphi + i\cos\varphi)^3}$.

练习：设$\dfrac{(1+i)^2(\cos\sqrt{3}-i)^3}{(1-i)^2(\cos\sqrt{3}+i)^3}$,求$|\bar{z}|$.

复数的n次方根 对给定的复数z，方程$w^n=z$的解w称为z的n次方根 记作 $\sqrt[n]{z}$ or $z^{\frac{1}{n}}$

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta),\qquad w=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

$$\rho^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)=r(\cos\theta+i\sin\theta).$$

$$\rho^n=r,\ \cos n\varphi=\cos\theta,\quad \sin n\varphi=\sin\theta.$$

$$\rho=r^{\frac{1}{n}},\quad n\varphi=\theta+2k\pi\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots),$$

$$w_k=\sqrt[n]{z}=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

$$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

$$w_k = \sqrt[n]{z} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

当取k=0,1,2,⋯,n-1时，可得n个相异根如下

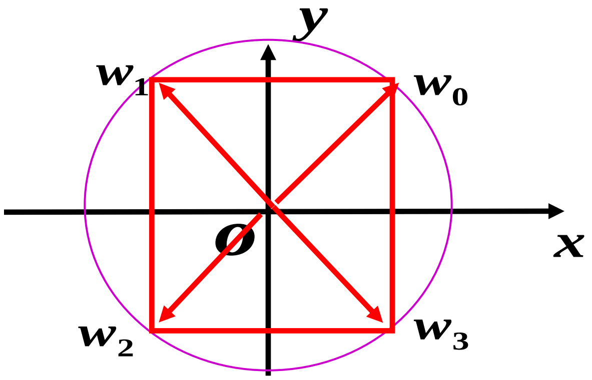
$$w_0, w_1, \cdots, w_{n-1} \qquad w_k = r^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i(\theta+2k\pi)}{n}}$$

例5 求方程 $w^4+16=0$ 的四个根.

解 $$w_k = \sqrt[4]{z} = 16^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right) \qquad k=0,1,2,3$$

$$w_0 = \sqrt{2}(1+i), \quad w_1 = \sqrt{2}(-1+i),$$

$$w_2 = -\sqrt{2}(1+i), \quad w_3 = \sqrt{2}(1-i).$$



一般情况下, $\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}}$

n个根就是以原点为中心、半径为$r^{\frac{1}{n}}$的圆的内接正多边形的n个顶点所表示的复数.

例7：求$\sqrt[4]{1+i}$.

练习：求方程$z^2-(3-i)z-3i=0$的根.

1.4 复数在几何上的应用举例

例6 用复数形式的方程来表示连接两点

$z_1 = x_1 + iy_1$与$z_2 = x_2 + iy_2$ 的直线和直线段.

$$z - z_1 = t(z_2 - z_1), t \in (-\infty, +\infty)$$

$$z - z_1 = t(z_2 - z_1), t \in [0,1]$$

例7 说明下列方程所表示的平面图形.

$(1)|z + i| = 2$ $(2)|z - 2i| = |z + 2|$ $(3)|z| > 1, \mathrm{Im}(z) > 0$