第五节解析函数与调和函数的关系

调和函数定义：

定义 如果二元实变函数 $\varphi(x, y)$ 在区域D内具有二阶连续偏导数，且满足Lapa l ace方程，

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}=0$$

则称 $\varphi(x, y)$为区域D 内的**调和函数**.

定理 （解析函数与调和函数的关系）

在区域D 内的解析函数, 其实部和虚部都是调和函数.

证明 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ $\quad f'(z)=u_x+iv_x$

$$u_x=v_y, \qquad u_y=-v_x,$$

$$u_{xx}=v_{yx}, \quad u_{yy}=-v_{xy},$$

$$u_{xx}+u_{yy}=v_{yx}-v_{xy}=0.$$

$$u_{xy}=v_{yy}, \qquad u_{yx}=-v_{xx},$$

$$v_{xx}+v_{yy}=u_{yx}-u_{xy}=0.$$

共轭调和函数的定义

定义　设$u(x,y)$为区域D内的调和函数，如果区域D内的另一函数$v(x,y)$,使$u+iv$在D内构成解析函数，则称$v(x,y)$为$u(x,y)$的共轭调和函数.

定理　若调和函数u和v满足C-R方程，则$v(x,y)$为$u(x,y)$的共轭调和函数, $u+iv$在D内构成解析函数.

例1 证明 $u(x,y)=x^3-3xy^2$ 为调和函数，

求其共轭调和函数 $v(x,y)$，使 $f(z)=u+iv$ 解析.

解 (1) $u_x=3x^2-3y^2$, $u_{xx}=6x$,

$u_y=-6xy$, $u_{yy}=-6x$, $u_{xx}+u_{yy}=0.$

(2) $u_x=3x^2-3y^2=v_y$,

$$v=\int(3x^2-3y^2)\mathrm{d}y=3x^2y-y^3+C(x)$$

$v_x=6xy+C'(x)=-u_y=6xy$, $C'(x)=0$, $C(x)=C$.

$$f(z)=u+iv=x^3-3xy^2+i(3x^2y-y^3)+C$$

此法为偏积分法，也可用全微法求.

例2 已知 $u(x,y)=x^3+6x^2y-3xy^2-2y^3$, 求解析函数 $f(z)=u+\mathrm{i}v$

解 **法一** 偏积分法

$$u_x=3x^2+12xy-3y^2,\ u_y=6x^2-6xy-6y^2,$$

$$v_y=u_x \Rightarrow v=\int(3x^2+12xy-3y^2)dy$$

$$\Rightarrow v=3x^2y+6xy^2-y^3+\varphi(x)$$

$$v_x=-u_y \Rightarrow 6xy+6y^2+\varphi'(x)=-6x^2+6xy+6y^2$$

$$\Rightarrow \varphi'(x)=-6x^2 \quad \Rightarrow \varphi(x)=-2x^3+C$$

$$\therefore v=3x^2y+6xy^2-y^3-2x^3+C$$

$$u(x,y)=x^3+6x^2y-3xy^2-2y^3,$$

$$v=3x^2y+6xy^2-y^3-2x^3+C$$

故所求解析函数为

$$f(z)=x^3+6x^2y-3xy^2-2y^3+i\left(3x^2y+6xy^2-y^3-2x^3+C\right),$$

$$=(1-2i)z^3+iC. \quad (x=z,y=0)$$

法二 不定积分法

$$u_x=3x^2+12xy-3y^2,\ u_y=6x^2-6xy-6y^2=-v_x$$

$$f'(z)=u_x+iv_x=3x^2+12xy-3y^2-i\left(6x^2-6xy-6y^2\right),$$

$$=3z^2-i6z^2. \quad (x=z,y=0)\Rightarrow f(z)=z^3-2z^3i+Ci$$