第二章　解析函数

————————复变函数研究的主要内容

第三节 复变初等函数

2.1 指数函数

2.2 对数函数

2.3 乘幂与幂函数

2.4 三角函数

在实变函数中不管是一元还是多元，都是先介绍初等函数，再介绍其连续性和可导性。为什么复变中先处理完导数和解析性之后再介绍初等函数呢?同学们在学习中如果能带着问题来体会，就会明白为什么要这样。

定义复变初等函数是一个创造性的工作，什么叫复指数函数，什么叫做复对数函数？这里既要继承指数函数和对数函数中最本质的东西，又要把实变的东西在复变中加以推广，实现起来是需要一定的基础和技巧的。

因此，将实变函数中的初等函数推广到复变函数，应把实变函数的本质特性作为推广的基础，这样使推广具有了目标和方向。

2.1 指数函数

复习：$f(x)=e^x$ 满足下列条件：

（1）在整个实数集内可导；（2）$(e^x)'=e^x$.

1. 指数函数的定义 当函数$f(z)$在复平面内满足以下条件：

（1）$f(z)$在复平面内处处解析；（2）$f'(z)=f(z)$;

(3) 当$\mathrm{Im}(z)=0$时，$f(z)=e^x$,其中$x=\mathrm{Re}(z)$.

此函数称为复数z的指数函数，记为$\exp z$

由Ch2.1例8知，$\exp z=e^x(\cos y+i\sin y)$

$\exp z = e^{x}(\cos y + i\sin y)$ 指数函数的定义等价于关系式：

$$\left.\begin{array}{l}|\exp z| = e^{x} \\ \operatorname{Arg}(\exp z) = y + 2k\pi\end{array}\right\}$$ 其中k为任意整数 $\exp z = e^{z}$

注意：e^{z} 没有乘幂的含义，只是expz的一个记号.

2. 指数函数的性质：

1）expz是单值函数；且expz≠0.

2）加法定理 $\exp z_1 \cdot \exp z_2 = \exp(z_1 + z_2)$

$$(e^{z})^{n} = e^{nz}, n \in Z^{+}$$

3）周期为 $2k\pi i, k \in Z$ $e^{z+2k\pi i} = e^{z} \cdot e^{2k\pi i} = e^{z}$.

例1 设 $z = x + iy$, 求(1) $\left|e^{i-2z}\right|$; (2) $\left|e^{z^2}\right|$; (3) $\operatorname{Re}\left(e^{\frac{1}{z}}\right)$

解 (1) $e^{i-2z} = e^{i-2(x+iy)} = e^{-2x+i(1-2y)}$, $\quad \therefore \left|e^{i-2z}\right| = e^{-2x}$;

(2) $e^{z^2} = e^{(x+iy)^2} = e^{x^2-y^2+2xyi}$, $\quad \therefore \left|e^{z^2}\right| = e^{x^2-y^2}$;

(3) $e^{\frac{1}{z}} = e^{\frac{1}{x+yi}} = e^{\frac{x}{x^2+y^2}+i\frac{-y}{x^2+y^2}}$,

$$\therefore \operatorname{Re}(e^{\frac{1}{z}}) = e^{\frac{x}{x^2+y^2}} \cos\frac{y}{x^2+y^2}.$$

例2 求$\exp(e^z)$的实部与虚部.

解 $e^z = Z = X + iY \qquad X = e^x\cos y, Y = e^x\sin y$

$$\exp\left(e^z\right) = \exp\left(Z\right) = e^{X+iY} = e^{e^x\cos y + ie^x\sin y}$$

$$\therefore \operatorname{Re}\left(\exp\left(e^z\right)\right) = e^{e^x\cos y}\cos(e^x\sin y),$$

$$\operatorname{Im}\left(\exp\left(e^z\right)\right) = e^{e^x\cos y}\sin(e^x\sin y).$$

例3 求下列复数的辐角主值：$(1)e^{2+i};(2)e^{-3-4i}$.

解 $\because \mathrm{Arg}e^{z}=y+2k\pi \quad (k\in Z)$

$(1)\mathrm{Arg}e^{2+i}=1+2k\pi,\qquad \arg e^{2+i}=1;$

$(2)\mathrm{Arg}e^{-3-4i}=-4+2k\pi,\qquad \arg e^{-3-4i}=-4+2\pi;$

例4 求函数 $f(z)=e^{\frac{z}{5}}$ 的周期.

解 e^{z} 的周期是$2k\pi i$,

$$f(z)=e^{\frac{z}{5}}=e^{\frac{z}{5}+2k\pi i}=e^{\frac{z+10k\pi i}{5}}=f(z+10k\pi i),$$

故函数 $f(z)=e^{\frac{z}{5}}$ 的周期是 $10k\pi i$.

2.2 对数函数

1. 对数函数的定义 指数函数的反函数称为对数函数.

即把满足方程 $e^w = z(z \neq 0)$ 的函数 $w = f(z)$ 称为对数函数.

记作 $w = \mathrm{Ln}z$.

2. 对数函数的性质 令 $w = u + iv,\ z = re^{i\theta}$,

则由 $e^w = z\ (z \neq 0)$, 可以得到, $u = \ln|z|, v = Argz$

$$w = \ln|z| + iArgz = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi) \quad (k = 0, \pm1, \pm2, \cdots).$$

1）w=Lnz是多值函数（是由于指数函数的周期性引起的）

若辐角取主值，且记 $\ln z = \ln|z| + i\arg z$ 称为Lnz的主值

$$\mathrm{Ln}z = \ln z + 2ik\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

对于每个固定的k，上式确定一个单值函数，称为Lnz的一个分支.

2）$z = x > 0$ 时，Lnz的主值lnz=ln$x$就是实变对数函数.

例4 求Ln2,Ln(-1)以及与它们相应的主值.

解 $\mathrm{Ln}2 = \ln 2 + 2k\pi i$，Ln2的主值就是ln2.

$$\mathrm{Ln}(-1) = \ln 1 + i\mathrm{Arg}(-1) = (2k+1)\pi i \quad (k\text{为整数})$$

Ln(-1)的主值就是 πi.

2. 对数函数的性质：

(1) $\mathrm{Ln}(z_1 z_2) = \mathrm{Ln} z_1 + \mathrm{Ln} z_2$， 是集合意义下的相等

$\mathrm{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Ln} z_1 - \mathrm{Ln} z_2 \ (z_1, z_2 \neq 0, z_1, z_2 \neq \infty)$.

(2) Lnz的各个分支在除去原点与负实轴的复平面内处处连续、处处解析. 且 $(\mathrm{Ln} z)' = \frac{1}{z}$， $(\ln z)' = \frac{1}{z}$

证明 （2）设 $z = x + iy$， $\ln z = \ln|z| + i\arg z$ 当 $x < 0$ 时，

$\lim\limits_{y \to 0^-} \arg z = -\pi$， $\lim\limits_{y \to 0^+} \arg z = \pi$，

所以除去原点与负实轴，在复平面内其它点处处连续

$z=e^w$在区域$-\pi<\arg z<\pi$内的反函数$w=\ln z$是单值的,

$$\frac{d\ln z}{dz}=\frac{1}{\frac{de^w}{dw}}=\frac{1}{z}.$$

故lnz在除去原点及负实轴的平面内是处处解析的.

Lnz的各个分支也具有与lnz同样的解析性质.

注意： (1) 在实变函数中，负数不存在对数；但在复变函数中，负数的对数是有意义的；复变中正实数的对数也是无穷多值的.

(2) $\mathrm{Ln}z^n \neq n\mathrm{Ln}z \quad \mathrm{Ln}\sqrt[n]{z} \neq \frac{1}{n}\mathrm{Ln}z$

例5 求$Ln((-1-i)(1-i))$ 的值.

解 $Ln\left(\left(-1-i\right)\left(1-i\right)\right)=Ln\left(-2\right)=\ln 2+i\left(\pi+2k\pi\right),k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

例6 解方程 $e^z-1-\sqrt{3}i=0.$

解 $e^z=1+\sqrt{3}i \qquad z=Ln\left(1+\sqrt{3}i\right)$

$$=\ln 2+i\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right),k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

2.3 乘幂与幂函数

1. 乘幂的定义

设a为非0复数，b为任意一个复数，乘幂 a^b 定义为$e^{b\mathrm{Ln}a}$

$$a^b = e^{b\mathrm{Ln}a}$$

注意：

由于 $\mathrm{Ln}a = \ln|a| + i(\arg a + 2k\pi)$ 是多值的，因而 a^b 也是多值的

(1) 当b为整数时,

$$a^b = e^{b\mathrm{Ln}a} = e^{b[\ln|a|+i(\arg a+2k\pi)]}$$

$$= e^{b(\ln|a|+i\arg a)+2kb\pi i} = e^{b\ln a},\qquad a^b\text{具有单一的值}.$$

(2) 当$b = \dfrac{p}{q}$ (p与q为互质的整数, $q > 0$)时,

$$a^b = e^{\frac{p}{q}[\ln|a|+i(\arg a+2k\pi)]} = e^{\frac{p}{q}\ln|a|+i\frac{p}{q}(\arg a+2k\pi)}$$

$$= e^{\frac{p}{q}\ln|a|}\left[\cos\frac{p}{q}(\arg a+2k\pi)+i\sin\frac{p}{q}(\arg a+2k\pi)\right]$$

a^b 具有q个不同的值, 即取 $k = 0,1,2,\cdots,(q-1)$时相应的值.

特殊情况：

1）当$b=n$（n为正整数）时

$$a^n = e^{n\mathrm{Ln}a} = e^{\mathrm{Ln}a+\mathrm{Ln}a+\cdots\mathrm{Ln}a} = e^{\mathrm{Ln}a}\cdot e^{\mathrm{Ln}a}\cdots e^{\mathrm{Ln}a} = a\cdot a\cdots a$$

2）当$b=1/n$（n为正整数）时，$a^{\frac{1}{n}}$有n个不同的值.

$$a^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\mathrm{Ln}a} = e^{\frac{1}{n}\ln|a|}\left[\cos\frac{\arg a+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\arg a+2k\pi}{n}\right]$$

$$=|a|^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\arg a+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\arg a+2k\pi}{n}\right]=\sqrt[n]{a},$$

其中$k=0,1,2,\cdots,(n-1)$.

如果 $a=z$ 为一复变数,就得到一般的幂函数

$w=z^b;$

当 $b=n$ 与 $\frac{1}{n}$ 时,就分别得到通常的幂函数 $w=z^n$

及 $z=w^n$ 的反函数 $w=z^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{z}.$

3）当b为无理数或复数时, z^b 为无穷多值函数.

例7 求 $1^{\sqrt{2}}$ 和 i^{i} 的值.

解 $$1^{\sqrt{2}}=e^{\sqrt{2}Ln1}=e^{\sqrt{2}(\ln 1+2k\pi i)}\left(k=0,\pm1,\pm2,\cdots\right)$$

$$=e^{2\sqrt{2}k\pi i}\left(k=0,\pm1,\pm2,\cdots\right)$$

$$i^{i}=e^{iLni}=e^{i\left(\ln|i|+i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\right)}\left(k=0,\pm1,\pm2,\cdots\right)$$

$$=e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}\left(k=0,\pm1,\pm2,\cdots\right)$$

2. 幂函数的解析性

(1) 幂函数z^n在复平面内是单值解析的，且 $\left(z^n\right)' = nz^{n-1}$

(2) 幂函数 $z^{1/n}$是多值函数，具有n个分支. 它的各个分支

在除去原点和负实轴的复平面内是解析的，且

$$\left(z^{\frac{1}{n}}\right)' = \left(\sqrt[n]{z}\right)' = \left(e^{\frac{1}{n}\mathrm{Lnz}}\right)' = e^{\frac{1}{n}\mathrm{Lnz}} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{z} = \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n}-1}$$

(3) 幂函数 $w = z^b$ (除去 $b = n$ 与 $\frac{1}{n}$ 两种情况外) 也是一个多值函数，当 b 为无理数或负数时,是无穷多值的. 它的各个分支在除去原点和负实轴的复平面内是处处解析的. $\left(z^b\right)' = bz^{b-1}$

2.4 三角函数

1. 三角函数的定义

余弦函数 $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$； **偶函数**

正弦函数 $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$； **奇函数**

周期函数，周期为 2π

2. 三角函数的性质

1）当$z=x$时，与实函数一致；

2）正弦函数和余弦函数在复平面内是**解析函数**，且

$$(\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z$$

3）奇偶性、周期性与实函数一致

4）无界性

当z为纯虚数yi时，$\cos yi = \dfrac{e^{-y}+e^{y}}{2}$ $\sin yi = \dfrac{e^{-y}-e^{y}}{2i}$

当 $y \to \infty$时，$|\sin yi| \to \infty$，$|\cos yi| \to \infty$.

注意：这一点是与实变函数完全不同的.

5）三角恒等式与实变函数一致

$$(1)\quad \begin{cases} \cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2, \\ \sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2, \\ \sin^2 z+\cos^2 z=1. \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} \cos(x+yi)=\cos x\cos yi-\sin x\sin yi, \\ \sin(x+yi)=\sin x\cos yi+\cos x\sin yi. \end{cases}$$

3. 其他复变数三角函数的定义（类似可讨论周期、奇偶、解析

$$\tan z=\frac{\sin z}{\cos z},\quad \cot z=\frac{\cos z}{\sin z},\quad \sec z=\frac{1}{\cos z},\quad \csc z=\frac{1}{\sin z}.$$

例8 求 $\cos(1+i)$ 的值.

解 $\cos(1+i)=\dfrac{e^{i(1+i)}+e^{-i(1+i)}}{2}=\dfrac{e^{-1+i}+e^{1-i}}{2}$

$$=\frac{1}{2}[e^{-1}(\cos 1+i\sin 1)+e(\cos 1-i\sin 1)]$$

$$=\frac{1}{2}(e^{-1}+e)\cos 1+\frac{1}{2}(e^{-1}-e)i\sin 1$$