第四节 Laurent级数

1 Laurent级数的概念

2 函数的Laurent级数展开

3 典型例题

3.4.1　Laurent 级数的概念

如果函数$f(z)$在z_0点解析, 则在z_0的某邻域内, 可展开为Taylor级数, 其各项由$z-z_0$的非负幂组成. 如果$f(z)$在圆环域 $R_1 < |z-z_0| < R_2$ 内解析, 则 $f(z)$在这个圆环域内不一定都能展开为$z-z_0$的幂级数.

本节将引进一种在圆环域收敛的双边幂级数, 即Laurent级数. 它将在后面讨论孤立奇点与留数及Z变换理论中起重要作用.

这种双边幂级数的形式为

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n.$$

Laurent级数　　**负幂项部分**　　**正幂项部分**

$$\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n (z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z-z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$$

收敛　　同时收敛

主要部分　　解析部分

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n} \xrightarrow{\text{令}\zeta=(z-z_0)^{-1}} \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\zeta^{n}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^{n}$$

$\downarrow$ 收敛半径R_2

收敛域

$$|z-z_0| < R_2$$

$\downarrow$ 收敛半径R

$|\zeta| < R$时,收敛

$\downarrow$ 收敛域

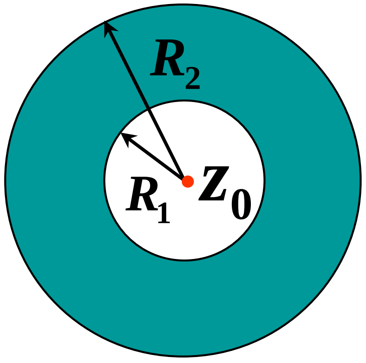
$$|z-z_0| > \frac{1}{R} = R_1$$

若 (1) $R_1 > R_2$： 两收敛域无公共部分,

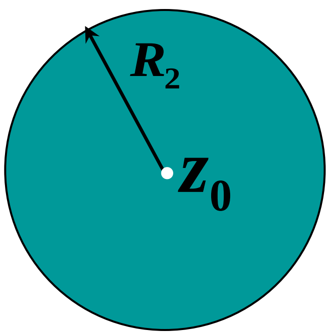
(2) $R_1 < R_2$： 两收敛域有公共部分$R_1 < |z-z_0| < R_2$.

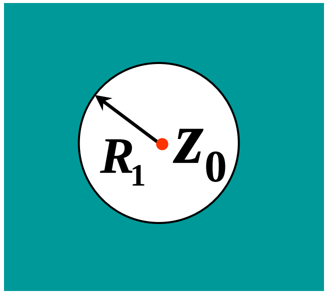
结论： 双边幂级数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ 的收敛区域为

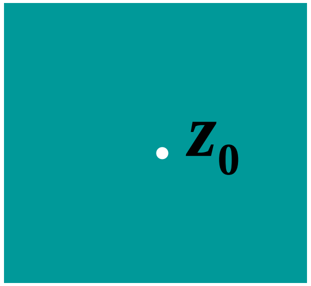
圆环域 $R_1 < |z-z_0| < R_2$.



常见的特殊圆环域:







$0 < |z-z_0| < R_2$ $\quad$ $R_1 < |z-z_0| < \infty$ $\quad$ $0 < |z-z_0| < \infty$

对于通常的幂级数，讨论了下面两个问题：

（1）幂级数的收敛域是圆域, 且和函数在收敛域内解析.

（2）在圆域内的解析函数一定能展开成幂级数.

对于Laurent级数，已经知道：

Laurent级数的收敛域是圆环域，且和函数在圆环域内解析.

问题：在圆环域内解析的函数是否可以展开成**Laurent**级数?

4.1 函数的Laurent级数展开

定理4.1(Laurent展开定理) 设 $0 \le R_1 < R_2 \le +\infty$，函数$f(z)$在圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内解析，则函数$f(z)$在此环域内可展开为Laurent级数

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad \left(R_1 < |z - z_0| < R_2\right),$$

其中 $c_n = \dfrac{1}{2\pi i} \oint_C \dfrac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}z \ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$，$C$是圆周$|z - z_0| = R \ (R_1 < R < R_2)$的正向.

Laurent展开式的唯一性定理

定理4.2 设函数$f(z)$在圆环域 $R_1 < |z-z_0| < R_2$ 内解析, 并且可以展开成双边幂级数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n'(z-z_0)^n,$$

则 $c_n' = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z \quad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$, 其中$C$

是圆周 $|z-z_0| = R \ (R_1 < R < R_2)$ 的正向.

注 函数在圆环域内Laurent展开式是唯一的. 因此为函数展开成Laurent级数的间接方法奠定了基础.

将函数在圆环域内展开成Laurent级数, 理论上应该有两种方法: **直接方法与间接方法.**

(1) 直接方法 直接计算展开式系数

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots),$$

然后写出Laurent展开式 $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n.$

这种方法只有理论意义, 而没有实用价值. 就是说, 只有在进行理论推导时, 才使用这种表示方法.

(2) 间接方法

根据解析函数 Laurent 级数展开式的唯一性，可运用代数运算、代换、求导和积分等方法去将函数展开成Laurent 级数.

这是将函数展开成Laurent 级数的常用方法.

给定函数 $f(z)$ 与复平面内的一点 z_0 以后，函数在各个不同的圆环域中有不同的Laurent展开式(包括Taylor展开式作为特例). 这与Laurent展开式的唯一性并不矛盾, 在同一圆环域内的展开式唯一.

4.3 典型例题

例4.1 将函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在圆环域

(1) $0<|z|<1$; (2) $1<|z|<2$;

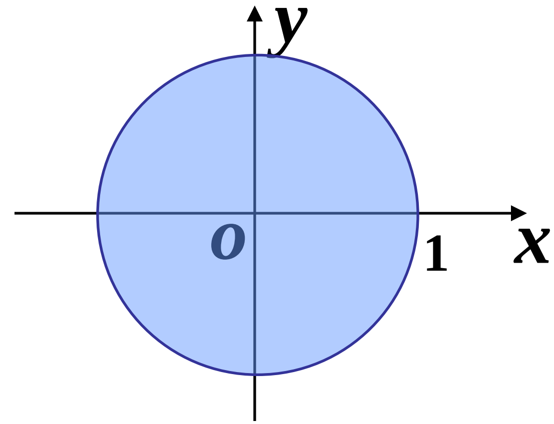
(3) $2<|z|<+\infty$; (4) $0<|z-1|<1$

内展开成Laurent级数.

解 函数$f(z)$在$z=1$和$z=2$处不解析，在其它点处都解析，并且可分解为

$$f(z)=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z}.$$

(1) 在 $|z|<1$ 内, 有 $\left|\dfrac{z}{2}\right|<1$, 则



$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots,$$

$$\frac{1}{2-z}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{1-\dfrac{z}{2}}=\frac{1}{2}+\frac{z}{2^2}+\frac{z^2}{z^3}+\cdots+\frac{z^n}{2^{n+1}}+\cdots.$$

于是在 $0<|z|<1$内,

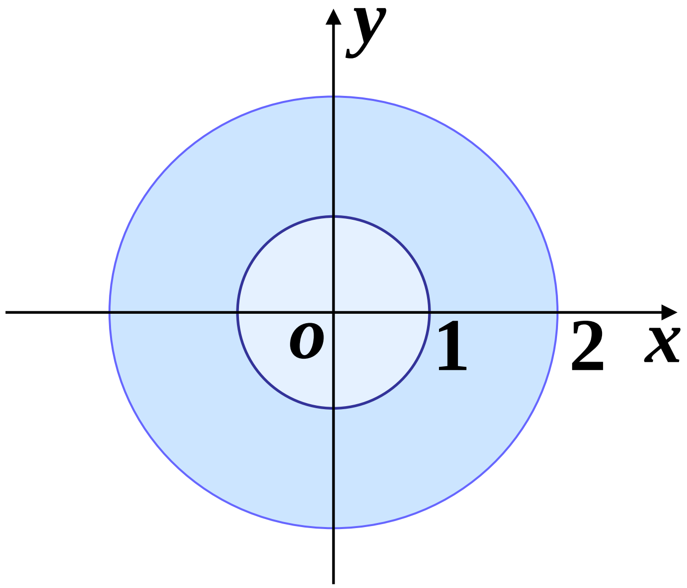
$$f(z)=(1+z+z^2+\cdots)-\left(\frac{1}{2}+\frac{z}{2^2}+\frac{z^2}{2^3}+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}z+\frac{7}{8}z^2+\cdots.$$

(2) 在 $1<|z|<2$ 内, 有

$$|z|>1 \longrightarrow \left|\frac{1}{z}\right|<1,$$

$$|z|<2 \longrightarrow \left|\frac{z}{2}\right|<1.$$



$$\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right),$$

$$\frac{1}{2-z}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}+\cdots+\frac{z^n}{2^n}+\cdots\right).$$

于是在 $1<|z|<2$ 内,

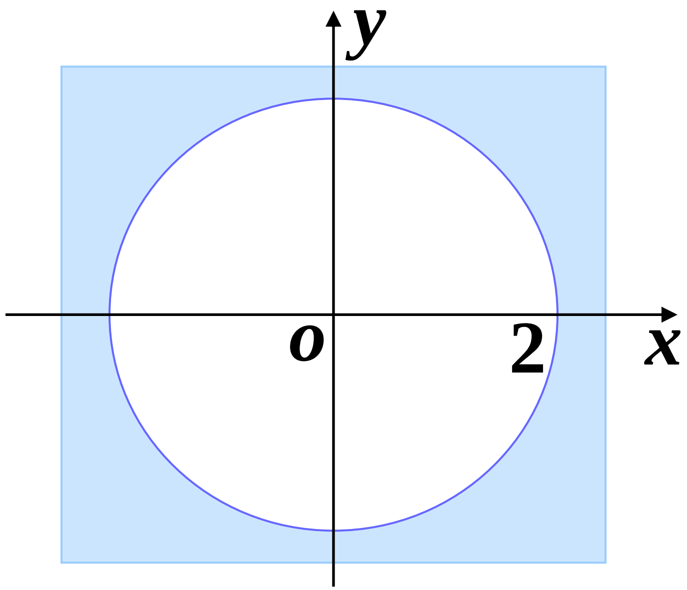
$$f(z)=-\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)-\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}+\cdots\right)$$

$$=\cdots-\frac{1}{z^n}-\frac{1}{z^{n-1}}-\cdots-\frac{1}{z}-\frac{1}{2}-\frac{z}{2^2}-\cdots-\frac{z^n}{2^{n+1}}-\cdots.$$

(3) 在 $|z|>2$ 内, 有

$$|z|>2 \longrightarrow \left|\frac{1}{z}\right|<1,$$

$$|z|>2 \longrightarrow \left|\frac{2}{z}\right|<1.$$



$$\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{z}\times\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}-\cdots,$$

$$\frac{1}{2-z}=\frac{-1}{z}\times\frac{1}{1-\frac{2}{z}}=-\frac{1}{z}\left(1+\frac{2}{z}+\frac{4}{z^2}+\cdots\right).$$

于是在 $2<|z|<+\infty$ 内,

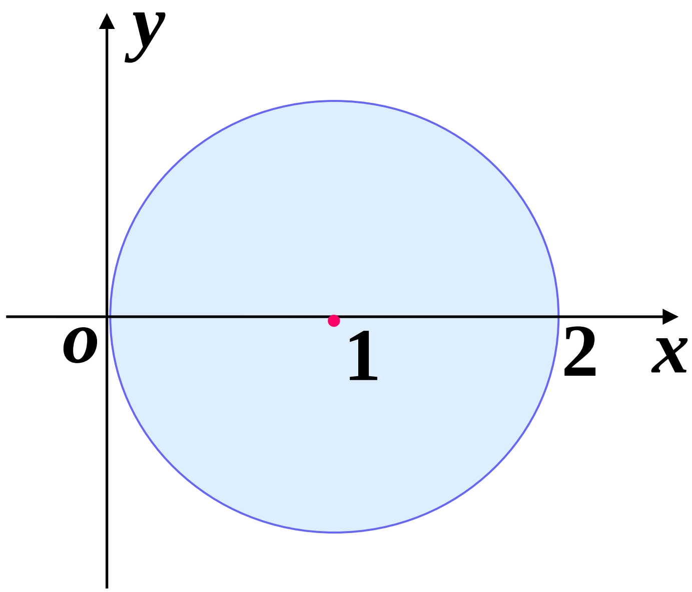
$$f(z)=\left(\frac{1}{z}+\frac{2}{z^2}+\frac{4}{z^3}+\cdots\right)-\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{z^2}+\frac{3}{z^3}+\frac{7}{z^4}+\cdots.$$

(4) 由 $0<|z-1|<1$ 知,

$z_0=1$, 展开的级数形式应为

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-1)^n,$$



所以在 $0<|z-1|<1$ 内,

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z-1-1}-\frac{1}{z-1}$$

$$=-\frac{1}{1-(z-1)}-\frac{1}{z-1}=-\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n-\frac{1}{z-1}.$$

例4.2　将函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-2)(z-3)^2}$ 在区域 $0<|z-2|<1$ 内展开成Laurent级数.

解　因为在 $0<|z-2|<1$ 内展开, 所以 $z_0=2$, 展开的级数形式应为 $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-2)^n$. 因为

$$\frac{1}{z-3}=\frac{1}{(z-2)-1}=-\frac{1}{1-(z-2)}$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}(z-2)^n\ \left(|z-2|<1\right),$$

$$\frac{1}{(z-3)^2}=-\left(\frac{1}{z-3}\right)'=\left[\sum_{n=0}^{\infty}(z-2)^n\right]'$$

$$=1+2(z-2)+\cdots+n(z-2)^{n-1}+\cdots\quad\left(|z-2|<1\right),$$

所以在 $0<|z-2|<1$ 内,

$$f(z)=\frac{1}{(z-2)(z-3)^2}$$

$$=\frac{1}{z-2}\left[1+2(z-2)+\cdots+n(z-2)^{n-1}+\cdots\right]$$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}n(z-2)^{n-2}.$$

例4.3　将 $f(z)=z^2e^{\frac{1}{z}}$ 在 $0<|z|<+\infty$ 内展开为Laurent级数.

解　除z=0点之外，$f(z)$在复平面内处处解析，对任何复数ζ,

$$e^{\zeta}=1+\zeta+\frac{\zeta^2}{2!}+\cdots+\frac{\zeta^n}{n!}+\cdots,$$

于是在 $0<|z|<+\infty$ 内,

$$f(z)=z^2e^{\frac{1}{z}}=z^2\left(1+z^{-1}+\frac{z^{-2}}{2!}+\cdots+\frac{z^{-n}}{n!}+\cdots\right)$$

$$=z^2+z+\frac{1}{2!}+\frac{z^{-1}}{3!}+\cdots+\frac{z^{-n}}{n!}+\cdots.$$

例4. 4　将　$f(z)=\dfrac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$ 在圆环域

(1) $1<|z|<2$;　(2) $0<|z-2|<\sqrt{5}$

内展开成Laurent级数.

解　$f(z)=\dfrac{1}{z-2}-\dfrac{2}{z^2+1}$.

(1) 当 $1<|z|<2$ 时,

$$f(z)=\frac{1}{2\left(\frac{z}{2}-1\right)}-\frac{2}{z^2\left(1+\frac{1}{z^2}\right)}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}-\frac{2}{z^2}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{z^2}\right)}$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^{n}-\frac{2}{z^{2}}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\left(\frac{1}{z^{2}}\right)^{n}$$

$$=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{z^{2n+2}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n}}{2^{n+1}}.$$

(2) 在 $0<|z-2|<\sqrt{5}$ 内，

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{2}{z^{2}+1}=\frac{1}{z-2}-i\left(\frac{1}{z+i}-\frac{1}{z-i}\right)$$

$$=\frac{1}{z-2}-i\left[\frac{1}{(z-2)+(2+i)}-\frac{1}{(z-2)+(2-i)}\right]$$

$$= \frac{1}{z-2} + i\left[\frac{1}{(2-i)\left(1+\frac{z-2}{2-i}\right)} - \frac{1}{(2+i)\left(1+\frac{z-2}{2+i}\right)}\right]$$

$$= \frac{1}{z-2} + i\left[\frac{1}{2-i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-2}{2-i}\right)^n - \frac{1}{2+i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-2}{2+i}\right)^n\right]$$

$$= \frac{1}{z-2} + i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n\left[\frac{1}{(2-i)^{n+1}} - \frac{1}{(2+i)^{n+1}}\right]$$

$$= \frac{1}{z-2} + i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[(2+i)^{n+1} - (2-i)^{n+1}\right]\frac{(z-2)^n}{5^{n+1}}.$$