第 四 章　　级 数

CH4 § 4.1 复数项级数

- 1. 复数列的极限
- 2. 级数的概念

1. 复数列的极限

定义 设复数列: $\{\alpha_n\}(n=1,2,\cdots)$, 其中 $\alpha_n = a_n + ib_n$,

又设复常数: $\alpha = a + ib$,

若 $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \ni n > N$, 恒有 $|\alpha_n - \alpha| < \varepsilon$,

那么 α 称为复数列 $\{\alpha_n\}$ 当 $n \to \infty$ 时的极限,

记作 $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$, 或当 $n \to \infty$ 时, $\alpha_n \to \alpha$,

此时, 也称复数列 $\{\alpha_n\}$ 收敛于 α.

定理1 $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \quad \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b.$

2. 级数的概念

定义 ▪设复数列: $\{\alpha_n\}=\{a_n+ib_n\}(n=1,2,\cdots,)$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n+\cdots$$ ---无穷级数

▪级数的前面n项的和

$$s_n=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$$ ---级数的部分和

▪若部分和数列 $\{s_n\}$ $\begin{cases} \text{收敛} - \text{级数} \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n \text{称为收敛} \\ \qquad \lim_{n\to\infty} s_n = s \text{称为级数的和} \\ \text{不收敛} - \text{级数} \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n \text{称为发散} \end{cases}$

例1 判别$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3i}{2^n}$的敛散性。

解 $\because s_n=\sum_{j=1}^{n}\frac{3i}{2^j}=3i(1-\frac{1}{2^n})$, 又$\lim_{n\to\infty}s_n=3i$

$\therefore$ 级数收敛, 且和为 $3i$.

定理2 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$收敛 $\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}a_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$都收敛。

性质 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$收敛的必要条件: $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0.$

定义 若 $\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$ 收敛，则称 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 为绝对收敛；

若 $\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$ 发散，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 收敛，则称 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 为条件收敛．

定理3 若 $\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 收敛，且 $\left|\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$.

定理4 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$ 收敛 $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$ 都收敛。

复数项级数的收敛问题可归之为两个实数项级数的收敛问题。

例2 下列级数是否收敛？是否绝对收敛？

$$(1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(1+\frac{i}{n}) \quad (2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(8i)^n}{n!} \quad (3)\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{(-1)^n}{n}+\frac{i}{2^n})$$

解 (1) $\because \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(1+\frac{i}{n})$发散.

(3) $\because \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$收敛，$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{(-1)^n}{n}+\frac{i}{2^n})$收敛.

又 $\because \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$条件收敛，$\therefore$ 原级数非绝对收敛 .

(2) $\because \sum_{n=0}^{\infty}\frac{|8i|^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{8^n}{n!}$收敛，$\therefore \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(8i)^n}{n!}$绝对收敛。

例3 讨论$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$的敛散性。

解 令$|z|=r$, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|z|^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^n}{n!}=e^r$

$\therefore \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$在复平面上处处绝对收敛。

练习：

讨论$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos in}{2^n}$的敛散性。

§ 4.2 幂级数

- 1. 幂级数的概念
- 2. 收敛定理
- 3. 收敛圆与收敛半径
- 4. 收敛半径的求法
- 5. 幂级数的运算和性质

1. 幂级数的概念

定义

- 设复变函数列：$\{f_n(z)\}\quad z\in D,\quad n=1,2,\cdots$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)=f_1(z)+f_2(z)+\cdots+f_n(z)+\cdots \qquad (1)$$

---称为复变函数项级数

- 级数的最前面n项的和

$$s_n(z)=f_1(z)+f_2(z)+\cdots+f_n(z)=\sum_{k=1}^{n} f_k(z)$$

---级数的部分和

- 若$\forall z_0\in D\quad \lim\limits_{n\to\infty} s_n(z_0)\overset{\exists}{=}s(z_0)$,称级数(1)在$z_0$收敛,

其和为$s(z_0)$, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(z_0)$不存在，称级数(1)发散,

若级数(1)在D内处处收敛，其和为z的函数

$$s(z)=f_1(z)+f_2(z)+\cdots+f_n(z)+\cdots$$ ---级数(1)的和函数

特殊情况，在级数(1)中 $f_n(z)=c_n(z-z_0)^n$ 得

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n \quad (2) \qquad \text{当} z_0=0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty}c_n z^n \quad (3)}_{\text{称为幂级数}}$$

$\because$ 在(2)中令 $z-z_0=\xi$ $\quad$ (2) $\Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty}c_n\xi^k$

$\therefore$ 研究级数 (3)并不失一般性。

2. 收敛定理

同实变函数一样，复变幂级数也有所谓的收敛定理：

定理1 (阿贝尔(Able)定理）

(1)若级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ 在 $z = z_0 (\neq 0)$ 收敛，则对满足 $|z| < |z_0|$ 的 z，级数必绝对收敛.

(2)若级数在 $z = z_0$ 发散，则对满足 $|z| > |z_0|$ 的 z，级数必发散.

3. 收敛圆与收敛半径

由*Able*定理，幂级数的收敛范围不外乎下述三种情况：

(*i*)若对所有正实数都收敛，级数**(3)**在复平面上处处收敛。

(*ii*)除z**=0**外，对所有的正实数都是发散的，这时，级数**(3)**在复平面上除z**=0**外处处发散。

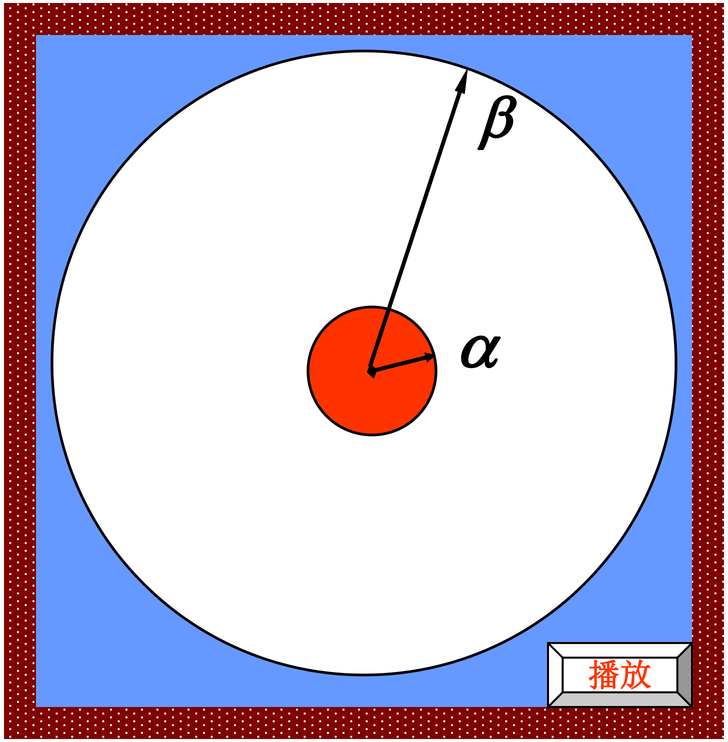
$(iii)\exists\alpha>0$, 使得$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}c_n\alpha^n$收敛，

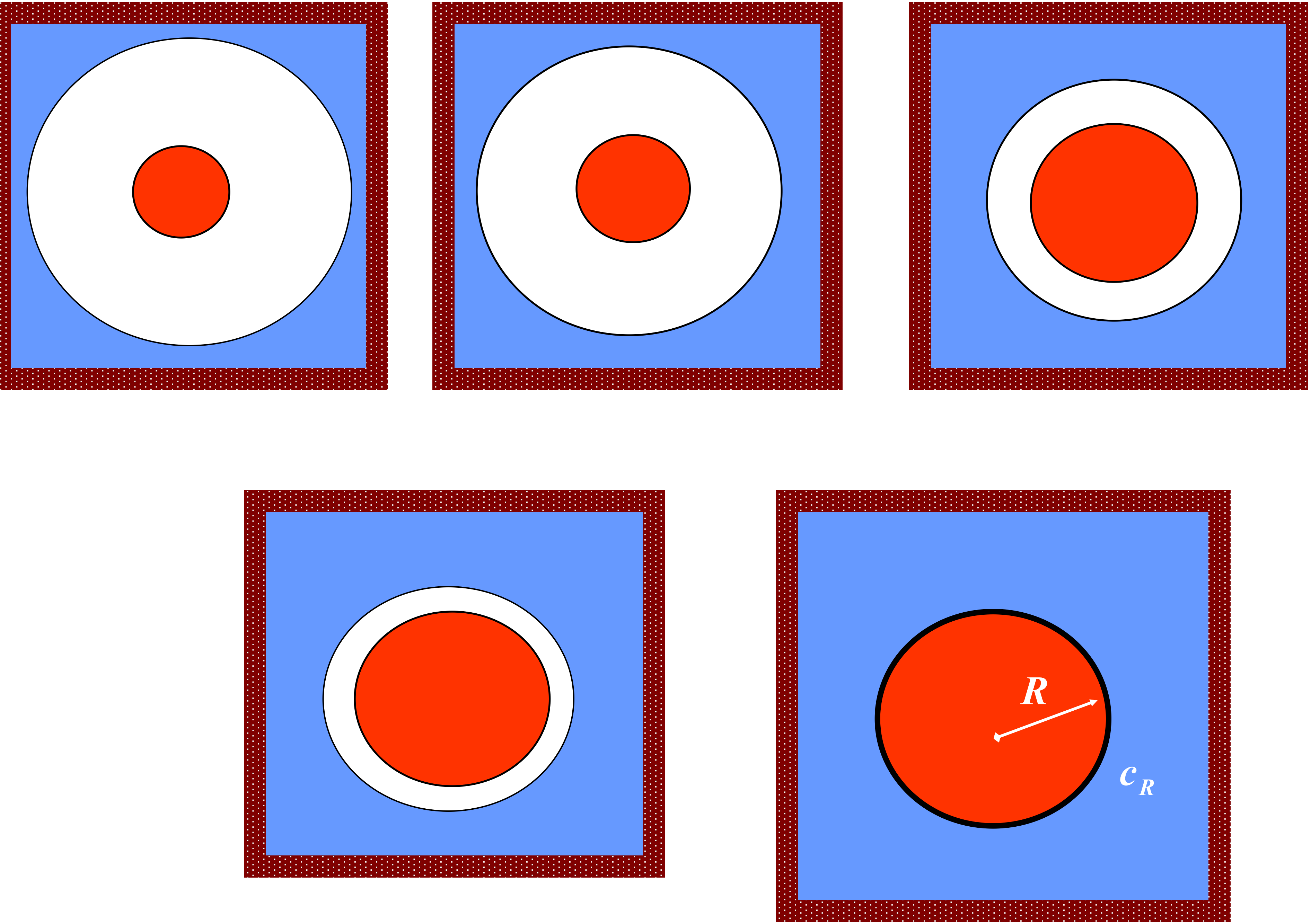
$\exists\beta>0$, 使得$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}c_n\beta^n$发散.

由*Able*定理，在圆周 c_α : $|z|=\alpha$内，级数 (3)收敛；在圆周 c_β : $|z|=\beta$外，级数(3)发散. 显然，$\alpha<\beta$

否则，级数(3)将在α处发散。

将收敛部分染成红色，发散部分染成蓝色，α逐渐变大，在c_α内部都是红色，β逐渐变小，在c_β外部都是蓝色，红、蓝色不会交错。故一定$\exists$ $\boxed{c_R:|z|=R}$，为红、蓝两色的分界线。





R
c_R

定义　这个红蓝两色的分界圆周c_R叫做幂级数的收敛圆；这个圆的半径R叫做幂级数的收敛半径。

(*i*) 幂级数在收敛圆内部收敛，在收敛圆外部发散，在圆周上可能收敛可能发散，具体问题要具体分析。

(*ii*)幂级数(3)的收敛范围是以0为中心，半径为R的圆域；幂级数(2)的收敛范围是以z_0为中心,半径为R的圆域.

4. 收敛半径的求法

关于幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ (3)的收敛半径求法，有

定理2 (比值法) 若 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lambda$，则 $R = \begin{cases} 1/\lambda & 0 < \lambda < +\infty \\ +\infty & \lambda = 0 \\ 0 & \lambda = +\infty \end{cases}$

定理3 (根值法) 若 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|} = \mu$，则 $R = \begin{cases} 1/\mu & 0 < \mu < +\infty \\ +\infty & \mu = 0 \\ 0 & \mu = +\infty \end{cases}$

例1 求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots$ 的收敛范围及和函数。

解 $\because \lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = 1 \quad \therefore R = 1$

又$s_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \dfrac{1-z^n}{1-z}$

$\because$ 当$|z| < 1$时，$\lim_{n\to\infty} z^n = 0, \therefore \lim_{n\to\infty} s_n = \dfrac{1}{1-z}.$

$\because$ 当$|z| = 1$时，$\lim_{n\to\infty} z^n \neq 0, \therefore$ 级数发散 .

综上 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n \begin{cases} 收敛,且和函数为\dfrac{1}{1-z} & 当|z| < 1时; \\ 发散 & 当|z| \geq 1时. \end{cases}$

例2 求下列幂级数的收敛半径并讨论收敛圆周上的情形:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^p}(p>0)$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{z}{\ln in})^n$.

解 (1) $\because \lambda=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| =\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n+1})^p=1 \quad \therefore R=1$

$\boxed{p=1}$ 当$z=1$时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, 该级数发散

当$z=-1$时, 级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, 该级数收敛

$\boxed{p=2}$ 在圆周$|z|=1$上, $\because \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{z^n}{n^2}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$是收敛的 ,

$\therefore$该级数在收敛圆上是处处收敛的。

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{\ln in}\right)^n$.

(2) $\because \ln(in)=\ln|in|+i\arg(in)=\ln n+\frac{\pi}{2}i$

其中：$|\ln in|=\sqrt{\ln^2 n+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}$

$$\therefore |c_n|=\frac{1}{|\ln in|^n}=\left[1\Big/\ln^2 n+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}}$$

$$\text{故}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left[\frac{1}{\ln^2 n+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}\right]^{\frac{n}{2}}}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\ln^2 n+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}\right]^{\frac{1}{2}}=0$$

$\therefore R=+\infty$

故该级数在复平面上是处处收敛的.

5. 幂级数的运算和性质

□ 代数运算

设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = f(z) \quad R = r_1 \qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = g(z) \quad R = r_2$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) z^n = f(z) \pm g(z) \quad |z| < R$$

---幂级数的加、减运算

$$(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n) \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_n b_0) z^n$$

$$= f(z) g(z), \quad |z| < R$$

其中：$R = \min(r_1, r_2)$

---幂级数的乘法运算

设$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n \quad |z|<r$,

$g(z)$在$|z|<R$内解析，且 $|g(z)|<r$

$$\Rightarrow f[g(z)]=\sum_{n=0}^{\infty}a_n[g(z)]^n \quad |z|<R$$

---幂级数的代换(复合)运算

幂级数的代换运算在函数展成幂级数中很有用.

例3 把$\dfrac{1}{z-b}$表成形如$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$的幂级数，

这里，复常数 $b\neq a$.

解 $$\frac{1}{z-b}=\frac{1}{(z-a)-(b-a)}=-\frac{1}{b-a}\frac{1}{1-\boxed{\dfrac{z-a}{b-a}}}=\frac{1}{1-g(z)}\left(-\frac{1}{b-a}\right)$$

代换

解 $$\frac{1}{z-b}=\frac{1}{(z-a)-(b-a)}=-\frac{1}{b-a}\frac{1}{1-\boxed{\dfrac{z-a}{b-a}}}=\frac{1}{1-g(z)}\left(-\frac{1}{b-a}\right)$$

代换

展开

$$\because \frac{1}{1-g(z)}=1+g(z)+[g(z)]^2+\cdots+[g(z)]^n+\cdots \quad ,|g(z)|<1$$

$$=1+\frac{z-a}{b-a}+\left[\frac{z-a}{b-a}\right]^2+\cdots+\left[\frac{z-a}{b-a}\right]^n+\cdots \quad ,|z-a|<|b-a|=R$$

还原

$$\therefore \frac{1}{z-b}=-\frac{1}{b-a}\frac{1}{1-g(z)}=-\frac{1}{b-a}-\frac{1}{(b-a)^2}(z-a)$$

$$-\frac{1}{(b-a)^3}(z-a)^2-\cdots\frac{1}{(b-a)^{n+1}}(z-a)^n-\cdots \quad |z-a|<R$$

□ 分析运算

定理4 设$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = f(z) \quad |z| < R$

$\Rightarrow (i) \quad f(z)$在$|z| < R$内解析.

$(ii) \quad f'(z) = (\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n z^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1} \quad |z| < R$

---幂级数的逐项求导运算

$(iii) \quad \int_c f(z) dz = \int_c \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n dz = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_c z^n dz$

或 $\int_0^z f(\varsigma) d\varsigma = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n z^{n+1}}{n+1} \quad |z| < R, C \subset |z-a| < R$

---幂级数的逐项积分运算