

第三章 复变函数的积分

教学要求

1. **了解**复变函数积分的定义及性质.
2. **会求**复变函数的积分.
3. **理解**柯西积分定理.
4. **掌握**柯西积分公式和解析函数的高阶导数公式.
5. **了解**解析函数无限次可导的性质.
6. **掌握**解析函数与调和函数的关系

一、积分存在的条件及计算

设 $C: z=z(t) \quad \alpha \leq t \leq \beta$, 是分段光滑(或可求长)的有向曲线,

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在 C 上连续, 则

$\int_C f(z) dz$ 存在, 并且

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_C u dx - v dy + i \int_C v dx + u dy. \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} f[z(t)] z'(t) dt \end{aligned}$$

二、积分模估值性质

设曲线 C 的长度为 L , 函数 $f(z)$ 在 C 上满足

$$|f(z)| \leq M, \text{ 则 } \left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| ds \leq ML.$$

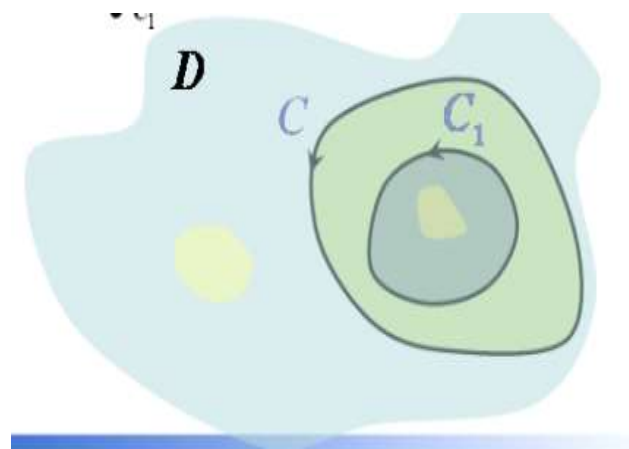
三、柯西-古萨基本定理

(Cauchy积分定理) 设 $f(z)$ 是在单连通区域 D 内解析, C 为 D 内任一条闭曲线, 则 $\oint_C f(z)dz = 0$.

四、闭路变形原理

在给定区域内的解析函数 $f(z)$ 沿闭曲线的积分, 不因闭曲线在区域内作连续变形而改变它的值, 只要在变形过程中曲线不经过 $f(z)$ 的不解析点.

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz$$



五、复合闭路定理

若 f 在正向闭曲线 C 内除有限个点外解析, C_1, C_2, \dots, C_n 分别为 C 内包含 z_1, z_2, \dots, z_n 的正向简单闭曲线, 则

$$\oint_C f(z) dz = \sum_{k=1}^n \oint_{C_k} f(z) dz,$$

六、柯西积分公式和高阶导数公式

设 $f(z)$ 在区域 D 内处处解析, C 为 D 内任意一条正向简单闭曲线, 它的内部完全含于 D , z_0 为 C 内任意一点, 则

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

- (1) 高阶导数公式说明了一个解析函数的导数仍然是解析函数.
- (2) 高阶导数公式的作用: 不在于通过积分来求导, 而在于通过求导来求积分. 故可以解决围线积分问题.

总结复变函数积分的计算方法

- (1) 如果只知道被积函数 $f(z)=u+iv$ 在曲线 C 上连续, 且

$$c: z = z(t) = x(t) + iy(t) \quad (\alpha \text{ 对应起点}, \beta \text{ 对应终点})$$

$$\int_c f(z)dz = \int_{\alpha}^{\beta} f[z(t)]z'(t)dt$$

- (2) 如果被积函数 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析,

$$\int f(z)dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z)dz = F(z)\Big|_{\alpha}^{\beta} = F(\beta) - F(\alpha) \quad (\text{N-L公式})$$

$$\oint_C f(z)dz = 0 \quad (\text{柯西古萨基本定理})$$

(3) 如果被积函数在区域 D 内解析有单个奇点, c 为包含奇点的任意光滑简单闭曲线的正向,

$$(a) \oint_c \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \begin{cases} 2\pi i, & n=0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \quad (\text{明星公式})$$

$$(b) \oint_c \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i f(z_0) \quad (\text{柯西积分公式})$$

说明: 如果被积函数不符合上述形式, 要通过拆项等方法, 使之符合上述形式

$$(c) \oint_c \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0) \quad (\text{高阶导数公式})$$

(4) 如果被积函数在曲线 C 所包围的区域内有多个奇点, 根据复合闭路定理, 在封闭曲线 C 上的积分可以转化为包含各个奇点的小圆周闭曲线上的积分和.

七、解析函数与调和函数的关系

1.任何在区域 D 内的解析函数，它的实部和虚部都是调和函数。即 u 和 v 都满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} = 0 \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 v}{\partial^2 y} = 0$$

2.已知解析函数的实部或虚部，求解析函数的方法有：

(1) 偏积分法； (2) 不定积分法.

例1 计算 $\int_C \operatorname{Im}(z) dz$, 其中 C 为:

(1) 以 O 为起点, 以 $B(2,1)$ 为终点的线段;

(2) 从 O 点到 $A(2,0)$, 再到 $B(2,1)$ 的折线段.

解 (1) $C : z = (2+i)t, \quad 0 \leq t \leq 1$

$$\int_C \operatorname{Im}(z) dz = \int_0^1 t d(2+i)t = (2+i) \frac{1}{2} t^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2} (2+i).$$

(2) $C = OA + AB \quad OA : z = 2t, \quad 0 \leq t \leq 1;$

$AB : z = 2+it, \quad 0 \leq t \leq 1;$

$$\int_C \operatorname{Im}(z) dz = \int_0^1 0 d 2t + \int_0^1 t d(2+it) = \frac{1}{2} i.$$

例2 设 C 为圆周 $|z-1|=2$ ，证明不等式 $\left| \int_C \frac{z+1}{z-1} dz \right| \leq 8\pi$.

分析 $\left| \int_C \frac{z+1}{z-1} dz \right| \leq \int_C \left| \frac{z+1}{z-1} \right| ds \leq \frac{1}{2} \int_C |z+1| ds$

解 $\because 2 = |z-1| = |z+1-2| = |z+1-2| \geq |z+1| - 2$

$$\therefore |z+1| \leq 4.$$

$$\left| \int_C \frac{z+1}{z-1} dz \right| \leq \frac{1}{2} \int_C |z+1| ds \leq \frac{1}{2} 4 \cdot 2\pi \cdot 2 = 8\pi.$$

例3 计算下列积分

$$(1) \oint_{|z|=1} \frac{\cos(z^{100} + z + 1)}{z^2 + 2z + 4} dz; \quad (2) \oint_{|z|=2} \frac{z}{(9 - z^2)(z + 1)} dz.$$

解 (1) 因为被积函数的不解析点 $z = -1 \pm \sqrt{3}i$ 均不在 $|z|=1$ 内,

$$\therefore \oint_{|z|=1} \frac{\cos(z^{100} + z + 1)}{z^2 + 2z + 4} dz = 0.$$

$$(2) \oint_{|z|=2} \frac{z}{(9 - z^2)(z + 1)} dz = \oint_{|z|=2} \frac{\frac{z}{9 - z^2}}{z + 1} dz = 2\pi i \frac{z}{9 - z^2} \Big|_{z=-1} = -\frac{\pi i}{4}.$$

例4 计算下列积分

$$(1) \oint_C \frac{e^z}{z(z^2+1)} dz \quad C: |z-i| = \frac{3}{2};$$

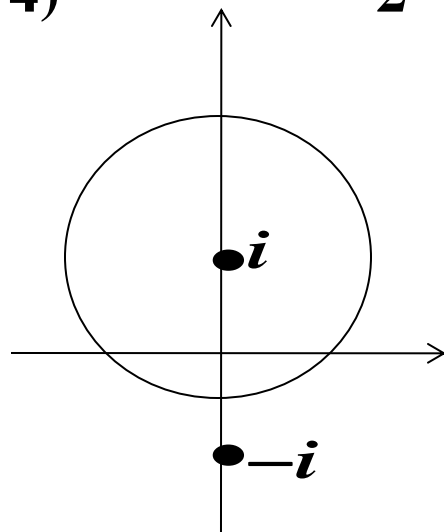
$$(2) \oint_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)} dz \quad C: |z| = \frac{3}{2};$$

$$(3) \oint_{|z|=2} \frac{\sin z}{(z - \frac{\pi}{2})^2} dz \quad C: |z| = 2.$$

解

$$\begin{aligned} (1) \oint_C \frac{e^z}{z(z^2+1)} dz &= \oint_{|z|=\frac{1}{8}} \frac{e^z}{z} dz + \oint_{|z-i|=\frac{1}{8}} \frac{e^z}{z-i} dz \\ &= 2\pi i \frac{e^z}{z^2+1} \Big|_{z=0} + 2\pi i \frac{e^z}{z(z+i)} \Big|_{z=i} \end{aligned}$$

$$= \pi [\sin 1 + (2 - \cos 1)i]$$



$$\begin{aligned}
 (2) \oint_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)} dz &= \oint_{|z-i|=\frac{1}{4}} \frac{\overline{(z+i)(z^2+4)}}{z-i} dz + \oint_{|z+i|=\frac{1}{4}} \frac{\overline{(z-i)(z^2+4)}}{z+i} dz \\
 &= 2\pi i \left[\frac{1}{(z+i)(z^2+4)} \right]_{z=i} + 2\pi i \left[\frac{1}{(z-i)(z^2+4)} \right]_{z=-i} = 2\pi i \left[\frac{1}{6i} - \frac{1}{6i} \right] = 0.
 \end{aligned}$$

$$(3) \oint_{|z|=2} \frac{\sin z}{\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^3} dz = \frac{2\pi i}{(3-1)!} (\sin z)'' \bigg|_{z=\frac{\pi}{2}} = -\pi i.$$

例2 已知调和函数 $v = e^x \sin y$, 试求一解析函数

$$f(z) = u + iv, \text{ 使 } f(0) = 0.$$

解 **法一** 偏积分法

$$u_x = v_y = e^x \cos y,$$

$$u = \int v_y dx = \int e^x \cos y dx = e^x \cos y + C(y)$$

$$u_y = -e^x \sin y + C'(y) = -v_x = -e^x \sin y,$$

$$C'(y) = 0, \quad C(y) = C.$$

$$f(z) = u + iv = e^x \cos y + ie^x \sin y + C$$

$$f(0) = 1 + C = 0, \quad C = -1.$$

$$f(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y - 1 = e^z - 1$$

法二 不定积分法 $v = e^x \sin y,$

$$u_x = v_y = e^x \cos y, \quad v_x = e^x \sin y,$$

$$f'(z) = u_x + iv_x$$

$$= e^x \cos y + ie^x \sin y,$$

$$= e^z. \quad (x = z, y = 0)$$

$$\Rightarrow f(z) = e^z + C$$

$$f(0) = 1 + C = 0, \quad C = -1.$$

$$f(z) = e^z - 1$$