


第五章 留数

§ 5.1 孤立奇点

 1. 定义

 2. 分类

 3. 性质

 4. 零点与极点的关系

1. 定义

定义 若 $f(z)$ 在 z_0 处不解析,但在 z_0 的某个去心邻域
 $0 < |z - z_0| < \delta$ 内解析,则称 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点.

例如 $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ ---- $z=0$ 为孤立奇点

$f(z) = \frac{1}{z-1}$ ---- $z=1$ 为孤立奇点

$$f(z) = \frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$$

---- $z=0$ 及 $z=1/n\pi$ ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$)都是它的奇点

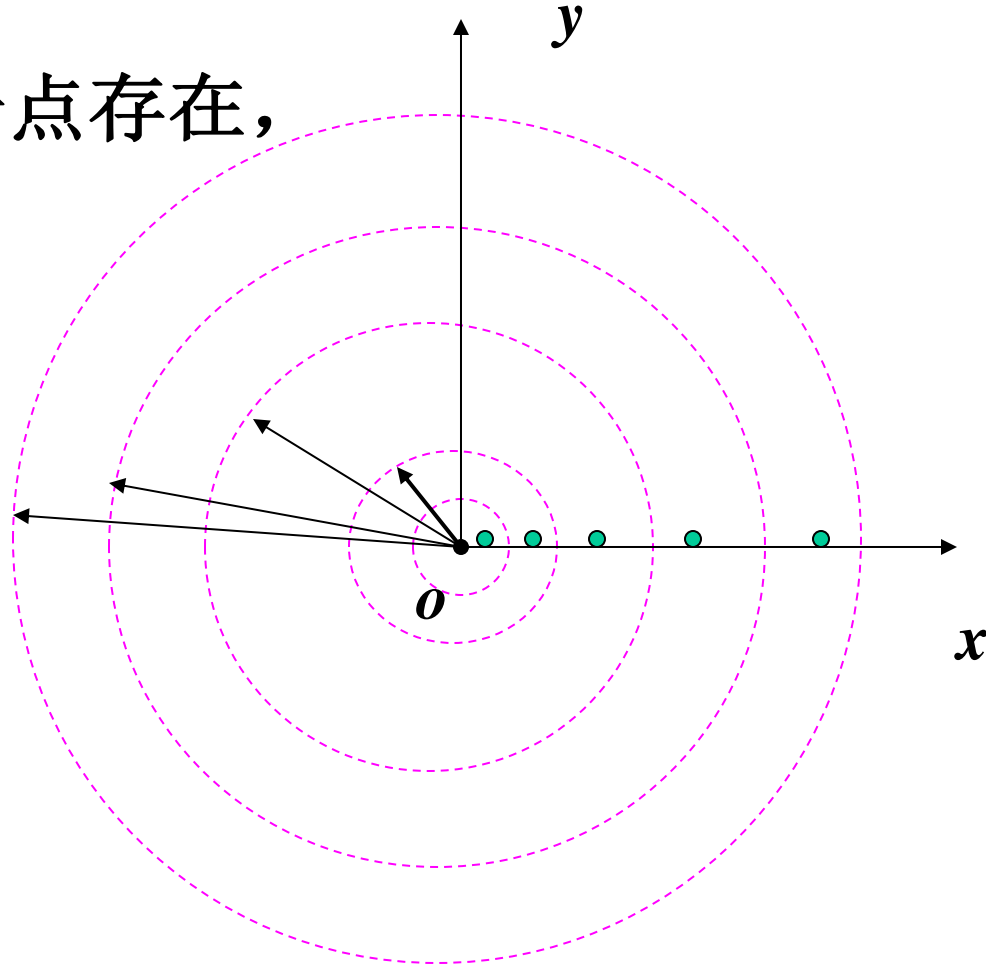
但 $\because \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\pi} = 0, \therefore$ 在 $z = 0$ 不论多么小的去心

邻域内, 总有 $f(z)$ 的奇点存在,

故 $z = 0$ 不是 $\frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$

的孤立奇点。

这说明奇点未必是孤立的。



2. 分类

以下将 $f(z)$ 在孤立奇点的邻域内展成洛朗级数，根据展开式的不同情况，将孤立点进行分类。考察：

$$(1) \frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!} + \cdots$$

特点：没有负幂次项

$$(2) \frac{e^z}{z} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{n-1}}{n!} = \frac{1}{z} + 1 + \frac{z}{2!} + \cdots + \frac{z^{n-1}}{n!} + \cdots$$

特点：只有有限多个负幂次项

$$(3) e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z}\right)^n = 1 + z^{-1} + \frac{1}{2!} z^{-2} + \cdots + \frac{1}{n!} z^{-n} + \cdots$$

特点：有无穷多个负幂次项

定义 设 z_0 是 $f(z)$ 的一个孤立奇点, 在 z_0 的去心邻域内,
若 $f(z)$ 的洛朗级数

$$(i) f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

没有负幂次项, 称 $z=z_0$ 为可去奇点;

$$(ii) f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} c_n (z - z_0)^n (c_{-m} \neq 0, m \geq 1)$$

只有有限多个负幂次项, 称 $z=z_0$ 为 m 级极点;

$$(iii) f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

有无穷多个负幂次项, 称 $z=z_0$ 为本性奇点。

3. 性质

□ 若 z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点

$$\Leftrightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = c_0$$

补充定义: $f(z_0) = c_0$ $f(z)$ 在 z_0 解析.

□ 若 z_0 为 $f(z)$ 的 m ($m \geq 1$) 级极点

$$\Leftrightarrow f(z) = \sum_{n=-m}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n \quad (c_{-m} \neq 0, m \geq 1)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty \Leftrightarrow f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^m} g(z)$$

其中： $g(z) = c_{-m} + c_{-m+1}(z - z_0) + c_{-m+2}(z - z_0)^2 + \cdots$ ，
 $g(z)$ 在 $|z - z_0| < \delta$ 内是解析函数且 $g(z_0) \neq 0$.

例如： $f(z) = \frac{z^2 - 3z + 2}{(z^2 + 1)(z - 1)^4}$

$z=1$ 为 $f(z)$ 的一个三级极点， $z=\pm i$ 为 $f(z)$ 的一级极点。

□ 若 z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点

$\Leftrightarrow f(z)$ 的洛朗级数有无穷多项负幂次项

$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(z)$ 不存在，也不为 ∞

综上所述:

孤立奇点	Laurent级数的特点	$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$
可去奇点	无负幂项	存在且为有限值
m 级极点	含有有限个负幂项 关于 $(z - z_0)^{-1}$ 的最高幂为 $(z - z_0)^{-m}$	∞
本性奇点	含无穷多个负幂项	不存在 且不为 ∞

例 证明 $z = 0$ 是 $e^{\frac{1}{z}}$ 和 $\sin \frac{1}{z}$ 的本性奇点.

解
$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \cdots + \frac{1}{n!z^n} + \cdots \quad (0 < |z| < +\infty),$$

$$\sin \frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \cdots \quad (0 < |z| < +\infty).$$

无穷多负幂项

4. 零点与极点的关系

定义 不恒等于0的解析函数 $f(z)$ 如果能表示成

$$f(z) = (z - z_0)^m \varphi(z)$$

其中： $\varphi(z_0) \neq 0$, $\varphi(z)$ 在 z_0 点解析, $m \in \mathbb{N}$

则称 $z=z_0$ 为 $f(z)$ 的 m 级零点。

例如： $z=0$ 与 $z=1$ 分别是 $f(z) = z(z-1)^3$ 的一级与三级零点。

定理 $f(z) = (z - z_0)^m \varphi(z)$

$(\varphi(z_0) \neq 0, \varphi(z) \text{ 在 } z_0 \text{ 点解析, } m \in \mathbb{N})$

$\Leftrightarrow f^{(n)}(z_0) = 0 (n = 0, 1, 2, \dots, m-1) \quad f^{(m)}(z_0) \neq 0.$

例如 $z = 0$ 与 $z = 1$ 均为 $f(z) = z(z-1)^3$ 的零点。

$$\text{又 } f'(z) = (z-1)^3 + 3z(z-1)^2$$

$$f''(z) = 6(z-1)^2 + 6z(z-1)$$

$$f'''(z) = 12(z-1) + 6(z-1) + 6z$$

$$\therefore f'(0) = (-1)^3 \neq 0$$

$\therefore z = 0$ 为一级零点

$$\therefore f'(1) = 0 \quad f''(1) = 0 \quad f'''(1) = 6 \neq 0$$

$\therefore z = 1$ 为三级零点

定理: 若 z_0 是 $f(z)$ 的 m 级极点 $\Leftrightarrow z_0$ 是 $\frac{1}{f(z)}$ 的 m 级零点.

例 求 $f(z) = \frac{1}{e^z + 1}$ 的孤立奇点, 并指出奇点的类型.

解 $z_k = (2k + 1)\pi i$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 是 $e^z + 1$ 的零点,

但是 $(e^z + 1)' = e^z$, $e^{(2k+1)\pi i} = -1 \neq 0$,

故 z_k ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 是 $e^z + 1$ 的1级零点.

因此, z_k ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 是 $f(z)$ 的1级极点 .

例 求 $f(z) = \frac{z}{(1+z^2)(1+e^{\pi z})}$ 的奇点,

如果是极点指出它的级。

解 显然, $z=\pm i$ 是 $(1+z^2)$ 的一级零点

$$\because e^{\pi z} + 1 = 0, \quad \text{即 } e^{\pi z} = -1$$

$$\therefore \pi z = \operatorname{Ln}(-1) = i(\pi + 2k\pi) = (2k+1)\pi i$$

故奇点为: $z_k = (2k+1)i \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$\because (1+e^{\pi z})' \Big|_{z=i(2k+1)} = \pi e^{\pi z} \Big|_{z=i(2k+1)}$$

$$= \pi [\cos \pi(2k+1) + i \sin \pi(2k+1)] = -\pi \neq 0$$

$\therefore z_k = i(2k+1) \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 是 $1+e^{\pi z}$ 的一级零点

综合 $z = \pm i$ 为 $f(z)$ 的二级极点;

$z_k = i(2k + 1) \quad (k = 1, \pm 2, \dots)$ 为 $f(z)$ 的一级极点.

推论 设 $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$,

z_0 是 $P(z)$ 的 m 级零点, 是 $Q(z)$ 的 n 级零点,

则当 $n > m$ 时, z_0 是 $f(z)$ 的 $n-m$ 级极点;

而当 $n \leq m$ 时, z_0 是 $f(z)$ 的可去奇点.

例 考虑函数 $f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^5}$.



不是5
级极点