5.3 留数在定积分计算上的应用

利用留数理论，可以计算某些类型的定积分或广义积分，其基本思想是把实函数的积分化为复变函数的积分，然后根据留数基本定理，把它归结为留数的计算问题，这样就可以把问题简化.

两个重要工作:

（1） 被积函数的转化;

（2） 积分区域的转化.

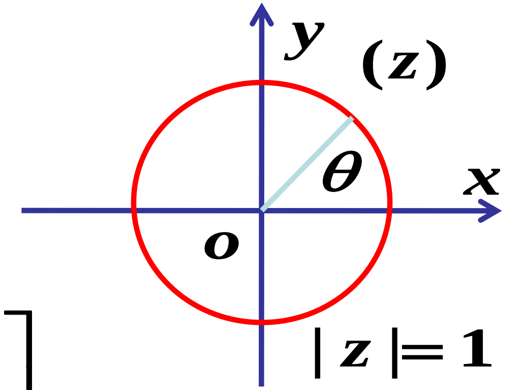
一. 三角有理式的积分

考虑积分 $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta.$

令 $z=e^{i\theta}$，$\mathrm{d}z=ie^{i\theta}\mathrm{d}\theta \longrightarrow \mathrm{d}\theta=\dfrac{\mathrm{d}z}{iz}$，

$$\sin\theta=\frac{1}{2i}\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)=\frac{z^2-1}{2iz},$$

$$\cos\theta=\frac{1}{2}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)=\frac{z^2+1}{2z}.$$



$$R(\cos\theta,\sin\theta)=R\left[\frac{z^2+1}{2z},\frac{z^2-1}{2iz}\right]$$

1. 形如 $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)d\theta$ 的定积分

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta = \oint_{|z|=1} R\left[\frac{z^2+1}{2z},\frac{z^2-1}{2iz}\right]\frac{1}{iz}\mathrm{d}z$$

$$= \oint_{|z|=1} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),z_k].$$

注： 1. 被积函数的转化

2. 积分区域的转化

例1: 求积分$I=\int_0^{2\pi}\frac{1}{5+3sin\theta}d\theta$

解: 令$z=e^{i\theta}$, 则$sin\theta=\frac{z^2-1}{2iz}$, $d\theta=\frac{1}{iz}dz$,则

$$I=\oint_{|z|=1}\frac{1}{5+3\frac{z^2-1}{2iz}}\frac{1}{iz}dz \quad =\oint_{|z|=1}\frac{2}{3z^2+10iz-3}dz$$

$$=2\pi iRes\left[\frac{2}{3z^2+10iz-3},-\frac{1}{3}i\right] \quad =2\pi i\frac{2}{6z+10i}\bigg|_{z=-\frac{1}{3}i}$$

$$=\frac{\pi}{2}$$

2. 形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx$ 的广义积分

定理1： 设 $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, $P(x),Q(x)$为互质多项式，且$Q(x)$的次数至少比$P(x)$高二次，在实轴上，$R(z)$没有孤立奇点，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{\substack{k=1 \\ \mathrm{Im}(z_k)>0}}^{n} \mathrm{Res}[R(z),z_k].$$

其中z_k为$R(z)$在上半平面的孤立奇点

例 2 计算积分： $\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+1}dx;$

解 $$\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+1}dx \quad =\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+1}dx$$

$$=\frac{1}{2}2\pi i\{\mathrm{Re}\,s\left[\frac{z^2}{z^4+1},\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right]+\mathrm{Re}\,s\left[\frac{z^2}{z^4+1},\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)\right]\}$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

例3　计算广义积分

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\mathrm{d}x\ \ (a>b>0).$$

解　$$\operatorname{Res}[f(z),ai]=\lim_{z\to ai}\frac{z^2}{(z+ai)(z^2+b^2)}=\frac{a}{2i(a^2-b^2)}.$$

$$\operatorname{Res}[f(z),bi]=\lim_{z\to bi}\frac{z^2}{(z^2+a^2)(z+bi)}=\frac{b}{2i(b^2-a^2)}.$$

$$I=2\pi i\left[\frac{a}{2i(a^2-b^2)}-\frac{b}{2i(a^2-b^2)}\right]=\frac{\pi(a-b)}{a^2-b^2}=\frac{\pi}{a+b}.$$

3. 形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{aix}dx \quad (a>0)$ 的广义积分

定理2： 设$R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$，$P(x),Q(x)$为互质多项式，且$Q(x)$的次数至少比$P(x)$高一次，在实轴上，$R(z)$没有孤立奇点，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{aix}\mathrm{d}x = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[R(z)e^{aiz},z_k].$$

其中z_k为$R(z)$在上半平面的孤立奇点

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{aix}\mathrm{d}x = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[R(z)e^{aiz},z_k].$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)cosaxdx + i\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)sinaxdx = 2\pi i\sum_{k} Res[R(z)e^{aiz},z_k]$$

所以：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)cosaxdx = Re\left[\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{aix}dx\right] = Re\left\{2\pi i\sum_{k} Res[R(z)e^{aiz},z_k]\right\}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)sinaxdx = Im\left[\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{aix}dx\right] = Im\left\{2\pi i\sum_{k} Res[R(z)e^{aiz},z_k]\right\}$$

其中z_k为$R(z)$在上半平面的孤立奇点

例4: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+4x+5} dx$

先考虑 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+4x+5} dx = 2\pi i \operatorname{Re} s\left[\frac{e^{iz}}{z^2+4z+5}, -2+i\right]$

$$= 2\pi i \lim_{z\to -2+i}\left[(z+2-i)\frac{e^{iz}}{(z+2-i)(z+2+i)}\right]$$

$$= \frac{\pi}{e} e^{-2i} = \frac{\pi}{e}(\cos 2 - i\sin 2)$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+4x+5} dx = \frac{\pi}{e}\cos 2.$$