线性代数笔记

夏海淞

2022 年 9 月 17 日

目录

第一章 矩阵

1.1 矩阵和向量的基本概念

矩阵的基本概念

向量的基本概念

1.2 矩阵与向量的运算

矩阵（向量）的线性运算

向量的内积与矩阵的乘法

性质 1.2.1. 设矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times l},\boldsymbol{B}_{l\times n}$，则 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^\top=\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{A}^\top$。

性质 1.2.2. 设矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n},\boldsymbol{B}_{n\times m}$，则 $\mathrm{Tr}\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\right)=\mathrm{Tr}\left(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}\right)$。

性质 1.2.3. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{I}_m$ 和 $\boldsymbol{I}_n$ 分别为 m 阶单位阵和 n 阶单位阵，则 $\boldsymbol{I}_m\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{I}_n=\boldsymbol{A}$。

性质 1.2.4. 设 $\boldsymbol{A}=\operatorname{diag}(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, $\boldsymbol{B}=\operatorname{diag}(b_1,b_2,\ldots,b_n)$, 则 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\operatorname{diag}(a_1b_1,a_2b_2,\ldots,a_nb_n)$。

性质 1.2.5. 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶上（下）三角阵，则 $\boldsymbol{AB}$ 是上（下）三角阵。

方阵的幂

1.3　分块矩阵及其运算

分块矩阵

分块矩阵的基本运算

1.4　矩阵的初等变换与秩

矩阵的初等变换

定理 1.4.1. 对矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 作一次初等行变换，相当于在 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 的左边乘上一个相应的 m 阶初等矩阵；对矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 作一次初等列变换，相当于在 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 的右边乘上一个相应的 n 阶初等矩阵。

矩阵的标准形与秩

引理 1.4.1. 设两个 $m\times n$ 矩阵的标准形如下所示

$$\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_{r_1} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix},\boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_{r_2} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix},$$

如果 $r_1\neq r_2$，则 $\boldsymbol{P}_2$ 不能由 $\boldsymbol{P}_1$ 经过初等变换得到。

定理 1.4.2. 任一非零矩阵经有限次初等变换可化为标准形

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$$

且对于给定的矩阵，其标准形中 r 的值是唯一确定的。

推论 1.4.1. 矩阵经过初等变换后其秩不变。

定理 1.4.3. 设 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，下列三个命题等价：

1. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的秩相等；
2. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 具有相同的标准形；
3. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经有限次初等变换可化为矩阵 $\boldsymbol{B}$。

定理 1.4.4. $\operatorname{rank}\left(\boldsymbol{A}^{\top}\right)=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$。

定理 1.4.5. 任一非零矩阵只经初等行变换可化为（最简）阶梯型矩阵。

推论 1.4.2. 非零矩阵的秩等于其（最简）阶梯型矩阵中主元列的个数。

第二章　线性方程组

2.1　横看线性方程组

齐次线性方程组的解