线性代数习题答案

夏海淞

2022 年 9 月 22 日

目录

第一章　矩阵

习题 1.1.

(1) $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 7 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 \\ 6 \\ 49 \end{bmatrix}$

(5)

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\
=&\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{3} a_{1i}x_i + \sum_{i=1}^{3} a_{2i}x_i + \sum_{i=1}^{3} a_{3i}x_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\
=&\sum_{1 \le i < j \le 3} 2a_{ij}x_ix_j + \sum_{k=1}^{3} a_{kk}x_k^2
\end{aligned}
$$

习题 1.2.

$$
\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\-1&-2&4\\0&5&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&5&8\\0&-5&6\\2&9&0\end{bmatrix}
$$
$$
3\boldsymbol{AB}-2\boldsymbol{A}=3\begin{bmatrix}0&5&8\\0&-5&6\\2&9&0\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\1&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&13&22\\-2&-17&20\\4&29&-2\end{bmatrix}
$$

习题 1.3.

$$
\boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix}3&1\\1&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&1\\1&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10&0\\0&10\end{bmatrix}
$$
$$
\boldsymbol{A}^{50}=\left(\boldsymbol{A}^2\right)^{25}=\begin{bmatrix}10&0\\0&10\end{bmatrix}^{25}=\begin{bmatrix}10^{25}&0\\0&10^{25}\end{bmatrix}
$$
$$
\boldsymbol{A}^{51}=\boldsymbol{A}^{50}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}10^{25}&0\\0&10^{25}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&1\\1&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\cdot10^{25}&10^{25}\\10^{25}&-3\cdot10^{25}\end{bmatrix}
$$

习题 1.4.

(1)

$$
\boldsymbol{A}\text{为对称矩阵}\Rightarrow\boldsymbol{A}^\top=\boldsymbol{A}
$$
$$
\left(\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{AB}\right)^\top=\boldsymbol{B}^\top\left(\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{A}\right)^\top=\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{A}^\top\left(\boldsymbol{B}^\top\right)^\top=\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{AB}
$$

(2)
- 充分条件：

$$
\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}\Rightarrow(\boldsymbol{AB})^\top=\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{A}^\top=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{AB}
$$

- 必要条件：

$$
\boldsymbol{AB}=(\boldsymbol{AB})^\top\Rightarrow\boldsymbol{AB}=(\boldsymbol{AB})^\top=\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{A}^\top=\boldsymbol{BA}
$$

习题 1.5.

必要性显然成立。下面证明充分性。

设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{m\times n}$，$\operatorname{entry}(\boldsymbol{A},i,j)=a_{ij}$。

由 $\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 和定义 *1.2.5*，有

$$\left[\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{A}\right]_{ii}=\sum_{k=1}^{m}\left[\boldsymbol{A}^\top\right]_{ik}[\boldsymbol{A}]_{ki}=\sum_{k=1}^{m}a_{ki}^2=0$$

对 $i=1,2,\ldots,n$ 均成立。因此有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$。

习题 1.6.

$$\boldsymbol{A}^5=\begin{bmatrix}a^5&0&0\\0&b&5\\0&0&c^5\end{bmatrix},\boldsymbol{B}^3=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\boldsymbol{C}^n=\begin{bmatrix}\cos n\theta&\sin n\theta\\-\sin n\theta&\cos n\theta\end{bmatrix}$$

数学归纳法格式：

猜想 $\boldsymbol{C}^n=\begin{bmatrix}\cos n\theta&\sin n\theta\\-\sin n\theta&\cos n\theta\end{bmatrix}$ 对 $n\in N^+$ 成立。

当 $n=1$ 时，$\boldsymbol{C}^n=\begin{bmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}$，结论成立。

设当 $n=k$ 时结论成立，则当 $n=k+1$ 时，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}^{k+1}=\boldsymbol{C}^k\boldsymbol{C}&=\begin{bmatrix}\cos k\theta&\sin k\theta\\-\sin k\theta&\cos k\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}\cos(k+1)\theta&\sin(k+1)\theta\\-\sin(k+1)\theta&\cos(k+1)\theta\end{bmatrix}\end{aligned}$$

由归纳公理知 $\boldsymbol{C}^n=\begin{bmatrix}\cos n\theta&\sin n\theta\\-\sin n\theta&\cos n\theta\end{bmatrix}$ 对 $n\in N^+$ 成立。

习题 1.7.

习题 1.8.

习题 1.9.

(3)

(4)

习题 1.10.

习题 1.11.

习题 1.12.

习题 1.13.

习题 1.14.

习题 1.15.

习题 1.16.

习题 1.17.

习题 1.19.

习题 1.22.

习题 1.23.

习题 1.24.