线性代数习题课

第一章

夏海淞

2022 年 9 月 24 日

1.1

(1) $$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 7 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 \\ 6 \\ 49 \end{bmatrix}$$

1.1

(1) $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 7 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 \\ 6 \\ 49 \end{bmatrix}$

(5)

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{3} a_{1i}x_i + \sum_{i=1}^{3} a_{2i}x_i + \sum_{i=1}^{3} a_{3i}x_i\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{1 \le i < j \le 3} 2a_{ij}x_ix_j + \sum_{k=1}^{3} a_{kk}x_k^2$$

1.2

$$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 8 \\ 0 & -5 & 6 \\ 2 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

1.2

$$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 8 \\ 0 & -5 & 6 \\ 2 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 3\boldsymbol{AB} - 2\boldsymbol{A} &= 3 \begin{bmatrix} 0 & 5 & 8 \\ 0 & -5 & 6 \\ 2 & 9 & 0 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & 13 & 22 \\ -2 & -17 & 20 \\ 4 & 29 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

1.3

$$\boldsymbol{A}^2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{50} = \left(\boldsymbol{A}^2\right)^{25} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}^{25} = \begin{bmatrix} 10^{25} & 0 \\ 0 & 10^{25} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{51} = \boldsymbol{A}^{50}\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 10^{25} & 0 \\ 0 & 10^{25} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 10^{25} & 10^{25} \\ 10^{25} & -3 \cdot 10^{25} \end{bmatrix}$$

1.

$$\boldsymbol{A}\text{为对称矩阵} \Rightarrow \boldsymbol{A}^\top = \boldsymbol{A}$$
$$\left(\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\right)^\top = \boldsymbol{B}^\top\left(\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{A}\right)^\top = \boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{A}^\top\left(\boldsymbol{B}^\top\right)^\top = \boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$$

1.4

1.

$$\boldsymbol{A}\text{为对称矩阵} \Rightarrow \boldsymbol{A}^\top = \boldsymbol{A}$$
$$\left(\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\right)^\top = \boldsymbol{B}^\top\left(\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{A}\right)^\top = \boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{A}^\top\left(\boldsymbol{B}^\top\right)^\top = \boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$$

2.

- 充分条件：

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} \Rightarrow (\boldsymbol{AB})^\top = \boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{A}^\top = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{AB}$$

- 必要条件：

$$\boldsymbol{AB} = (\boldsymbol{AB})^\top \Rightarrow \boldsymbol{AB} = (\boldsymbol{AB})^\top = \boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{A}^\top = \boldsymbol{BA}$$

必要性显然成立。下面证明充分性。

设矩阵 $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]_{m\times n}$。由 $\boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$ 和定义 1.2.5，有

$$\left[\boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{A}\right]_{ii} = \sum_{k=1}^{m} \left[\boldsymbol{A}^\top\right]_{ik} [\boldsymbol{A}]_{ki} = \sum_{k=1}^{m} a_{ki}^2 = 0$$

对 $i = 1, 2, \ldots, n$ 均成立。因此有 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$。

$$\boldsymbol{A}^5 = \begin{bmatrix} a^5 & 0 & 0 \\ 0 & b & 5 \\ 0 & 0 & c^5 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{C}^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$$

数学归纳法格式：

猜想 $\boldsymbol{C}^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$ 对 $n \in N^+$ 成立。

当 $n = 1$ 时，$\boldsymbol{C}^n = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$，结论成立。

设当 $n = k$ 时结论成立，则当 $n = k + 1$ 时，

$$\boldsymbol{C}^{k+1} = \boldsymbol{C}^k \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta \\ -\sin k\theta & \cos k\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(k+1)\theta & \sin(k+1)\theta \\ -\sin(k+1)\theta & \cos(k+1)\theta \end{bmatrix}$$

由归纳公理知 $\boldsymbol{C}^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$ 对 $n \in N^+$ 成立。

1.7

计算矩阵乘法，由等式可得

$$\begin{cases} 3a + a - 3 = b \\ 9 + 0 \cdot a - 3 = 6 \\ 2a + 3 = b \end{cases}$$

解线性方程组得 $a = 3, b = 9$。

因为 $\boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{O}$，我们得到

$$
\begin{aligned}
&(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A})\left(\boldsymbol{I}_n + \sum_{i=1}^{n-1} \boldsymbol{A}^i\right) \\
=&\boldsymbol{I}_n + \sum_{i=1}^{n-1} \boldsymbol{A}^i - \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{A}^i \\
=&\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{I}_n
\end{aligned}
$$

(3) 容易发现

$$\boldsymbol{C}^2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = 4\boldsymbol{I}_4$$

因此根据奇偶性讨论，有

$$\boldsymbol{C}^n = \begin{cases} 2^{n-1}\boldsymbol{C} & n = 2k-1 \\ 2^n \boldsymbol{I}_4 & n = 2k \end{cases} \quad (k \in N^+)$$

(4) 记 $\boldsymbol{D}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，容易发现

$\boldsymbol{D}'^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{D}'^n = \boldsymbol{O}(n \geq 3)$。因此有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D}^n &= (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{D}')^n = \boldsymbol{I} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \boldsymbol{D}'^i \\ &= \boldsymbol{I} + n\boldsymbol{D}' + \binom{n}{2} \boldsymbol{D}'^2 = \begin{bmatrix} 1 & n & n(n-1)/2 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

1.10

1. 设矩阵 $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]_{n\times n}$ 为对角阵，矩阵 $\boldsymbol{B} = [b_{ij}]_{n\times n}$。则有

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{AB}]_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{ii} b_{ij} \\ [\boldsymbol{BA}]_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kj} = a_{jj} b_{ij} \end{aligned}$$

由题设知 $[\boldsymbol{AB}]_{ij} = [\boldsymbol{BA}]_{ij}$ 对任意 $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ 成立。当 $i = j$ 时，等式成立；当 $i \neq j$ 时，由 $\boldsymbol{A}$ 的任意性知 $b_{ij} = 0$，即 $\boldsymbol{B}$ 为对角阵。

1. 设矩阵 $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]_{n\times n}$ 为对角阵，矩阵 $\boldsymbol{B} = [b_{ij}]_{n\times n}$。则有

$$[\boldsymbol{AB}]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{ii}b_{ij}$$
$$[\boldsymbol{BA}]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj} = a_{jj}b_{ij}$$

   由题设知 $[\boldsymbol{AB}]_{ij} = [\boldsymbol{BA}]_{ij}$ 对任意 $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ 成立。当 $i = j$ 时，等式成立；当 $i \neq j$ 时，由 $\boldsymbol{A}$ 的任意性知 $b_{ij} = 0$，即 $\boldsymbol{B}$ 为对角阵。

2. 由 (1) 知，满足要求的矩阵为对角阵。
   设矩阵 $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]_{n\times n}$ 为对角阵，矩阵 $\boldsymbol{B} = [b_{ij}]_{n\times n}$。
   同 (1) 理，可得 $a_{ii}b_{ij} = a_{jj}b_{ij}$ 对任意 $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ 成立。由 $\boldsymbol{B}$ 的任意性可知 $a_{ii} = a_{jj}$ 对任意 $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ 成立，即 $\boldsymbol{A}$ 为纯量阵。

1.11

设矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{n\times n}$，矩阵 $\boldsymbol{B}=[b_{ij}]_{n\times n}$。则有
$[\boldsymbol{AB}]_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}=\sum_{k=1}^{i-1}a_{ik}b_{kj}+a_{ii}b_{ij}+\sum_{t=i+1}^{n}a_{it}b_{tj}$。

当 $i>j$ 时，因为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为上三角矩阵，因此有
$a_{ik}=b_{tj}=0(k<i,t>=i)$，代入上式可得 $[\boldsymbol{AB}]_{ij}=0$；

当 $i=j$ 时，因为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为对角元为 1 的上三角矩阵，因此有
$a_{ik}=b_{tj}=0(k<i,t>i)$，代入上式可得 $[\boldsymbol{AB}]_{ij}=a_{ii}b_{ij}=1$。

综上，$\boldsymbol{AB}$ 为对角元为 1 的上三角矩阵。

$$A = yx^\top = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_2y_1 & \cdots & x_ny_1 \\ x_1y_2 & x_2y_2 & \cdots & x_ny_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1y_n & x_2y_n & \cdots & x_ny_n \end{bmatrix}$$

$$x^\top y = \sum_{i=1}^n x_iy_i$$

因此有

$$\boldsymbol{A}^k = \underbrace{\left(\boldsymbol{y}\boldsymbol{x}^\top\right)\left(\boldsymbol{y}\boldsymbol{x}^\top\right)\cdots\left(\boldsymbol{y}\boldsymbol{x}^\top\right)}_{k}$$

$$= \boldsymbol{y}\underbrace{\left(\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{y}\right)\left(\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{y}\right)\cdots\left(\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{y}\right)}_{k-1}\boldsymbol{x}^\top$$

$$= \left(\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{y}\right)^{k-1}\boldsymbol{y}\boldsymbol{x}^\top = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^{k-1}\begin{bmatrix} x_1y_1 & x_2y_1 & \cdots & x_ny_1 \\ x_1y_2 & x_2y_2 & \cdots & x_ny_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1y_n & x_2y_n & \cdots & x_ny_n \end{bmatrix}$$

1.13

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{x} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^\top = \frac{1}{2} \\
\boldsymbol{AB} &= \left(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^\top\right)\left(\boldsymbol{I}_n + 2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^\top\right) \\
&= \boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^\top - 2x\left(\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{x}\right)\boldsymbol{x}^\top \\
&= \boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^\top - \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^\top = \boldsymbol{I}_n
\end{aligned}
$$

1.14

设 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{e}_i$ 表示第 i 个分量为 1，其余分量为 0 的 n 阶列向量。由题设可知

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{a}_i = \mathbf{0}$$

对 $i = 1, 2, \ldots, n$ 均成立。因此有 $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{a}_2 = \cdots = \boldsymbol{a}_n = \mathbf{0}$，即 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$。

1.15

根据 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B}$，可将 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2$ 展开：

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2&=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2+\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}\\&=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}\end{aligned}$$

又因为 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，可得

$$\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O} \tag{1}$$

将(1)式左乘 $\boldsymbol{A}$，得到 $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{ABA}=\boldsymbol{O}$；将(1)式式左右各乘 $\boldsymbol{A}$，得到 $2\boldsymbol{ABA}=\boldsymbol{O}$。将上述两式联立解得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$。

1.16

因为 $\boldsymbol{A}^n - 2\boldsymbol{A}^{n-1} = \boldsymbol{A}^{n-1}(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})$，容易发现

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{O}$$

因此当 $n \geq 2$ 时，$\boldsymbol{A}^n - 2\boldsymbol{A}^{n-1} = \boldsymbol{A}^{n-2}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I}) = \boldsymbol{O}$。

1.17

根据 $\boldsymbol{A}^2=-\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}^2=-\boldsymbol{B}$，可将 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2$ 展开：

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2&=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2+\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}\\&=-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}+\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}\end{aligned}$$

又因为 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$，可得

$$\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O} \tag{2}$$

将(2)式左乘 $\boldsymbol{A}$，得到 $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{ABA}=\boldsymbol{O}$；将(2)式左右各乘 $\boldsymbol{A}$，得到 $2\boldsymbol{ABA}=\boldsymbol{O}$。将上述两式联立解得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$。

- 首先证明充分性：因为 $\alpha^\top\alpha = 1$，因此有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^2 &= \left(\boldsymbol{I} - \alpha\alpha^\top\right)^2 \\ &= \boldsymbol{I} - 2\alpha\alpha^\top + \alpha\left(\alpha^\top\alpha\right)\alpha^\top \\ &= \boldsymbol{I} - \alpha\alpha^\top = \boldsymbol{A}\end{aligned}$$

充分性得证。

1.19

- 首先证明充分性：因为 $\alpha^\top\alpha = 1$，因此有

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}^2 &= \left(\boldsymbol{I} - \alpha\alpha^\top\right)^2 \\
&= \boldsymbol{I} - 2\alpha\alpha^\top + \alpha\left(\alpha^\top\alpha\right)\alpha^\top \\
&= \boldsymbol{I} - \alpha\alpha^\top = \boldsymbol{A}
\end{aligned}$$

充分性得证。
- 随后证明必要性：因为 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$，因此有

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A} &= \left[\boldsymbol{I} - 2\alpha\alpha^\top + \alpha\left(\alpha^\top\alpha\right)\alpha^\top\right] - \left(\boldsymbol{I} - \alpha\alpha^\top\right) \\
&= \left(\alpha^\top\alpha - 1\right)\alpha\alpha^\top = \boldsymbol{O}
\end{aligned}$$

因为 $\alpha \neq \mathbf{0}$，因此 $\alpha^\top\alpha - 1 = 0$，即 $\alpha^\top\alpha = 1$。

1. 记 $\boldsymbol{A}' = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，容易发现

$$\boldsymbol{A}'^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{A}'^n = \boldsymbol{O}(n \geq 3)$$

因此有

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}^k &= \left(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}'\right)^k \\
&= \boldsymbol{I} + \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} \boldsymbol{A}'^i \\
&= \boldsymbol{I} + k\boldsymbol{A}' + \binom{k}{2} \boldsymbol{A}'^2 \\
&= \begin{bmatrix} 1 & ka & \frac{k(k-1)}{2}a^2 \\ 0 & 1 & ka \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

❷ 记 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix}$。容易发现 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\top}$，因此有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^{k}&=\left(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\top}\right)^{k}=\boldsymbol{\alpha}\left(\boldsymbol{\beta}^{\top}\boldsymbol{\alpha}\right)^{k-1}\boldsymbol{\beta}^{\top}\\&=(17)^{k-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\top}=(17)^{k-1}\begin{bmatrix}1&2&4\\2&4&8\\3&6&12\end{bmatrix}\end{aligned}$$

1.23

令 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j$，其中 $\boldsymbol{e}_i$ 表示第 i 个分量为 1，其余分量为 0 的 n 阶列向量。因此有

$$[\boldsymbol{ABC}]_{tt} = \sum_{k=1}^{n} [\boldsymbol{AB}]_{tk} [\boldsymbol{C}]_{kt} = \begin{cases} [\boldsymbol{AB}]_{ji} & t = j \\ 0 & t \neq j \end{cases}$$

$$[\boldsymbol{CBA}]_{tt} = \sum_{k=1}^{n} [\boldsymbol{C}]_{tk} [\boldsymbol{BA}]_{kt} = \begin{cases} [\boldsymbol{BA}]_{ji} & t = i \\ 0 & t \neq i \end{cases}$$

因为 $\mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{ABC}) = \mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{CBA})$，因此有 $[\boldsymbol{AB}]_{ji} = [\boldsymbol{BA}]_{ji}$ 对 $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ 成立，即 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$。

1.24

定义子矩阵如下：

$$\boldsymbol{A}_3=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}, \boldsymbol{B}_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{bmatrix}, \boldsymbol{B}_3=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & -1\end{bmatrix}, \boldsymbol{B}_4=\begin{bmatrix}4 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}$$

则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{AB}&=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{A}_3 & \boldsymbol{I}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{B}_3 & \boldsymbol{B}_4\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{A}_3\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_3 & \boldsymbol{A}_3+\boldsymbol{B}_4\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 0 & 1\\ -2 & 4 & 3 & 3\\ -1 & 1 & 3 & 1\end{bmatrix}\end{aligned}$$