线性代数习题答案

夏海淞

2022 年 9 月 24 日

目录

第一章 矩阵

习题 1.1.

(1) $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 7 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 \\ 6 \\ 49 \end{bmatrix}$

(5)

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ = & \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^3 a_{1i}x_i + \sum_{i=1}^3 a_{2i}x_i + \sum_{i=1}^3 a_{3i}x_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ = & \sum_{1 \leq i < j \leq 3} 2a_{ij}x_ix_j + \sum_{k=1}^3 a_{kk}x_k^2 \end{aligned}$$

习题 1.2.

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\-1&-2&4\\0&5&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&5&8\\0&-5&6\\2&9&0\end{bmatrix}$$

$$3\boldsymbol{AB}-2\boldsymbol{A}=3\begin{bmatrix}0&5&8\\0&-5&6\\2&9&0\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\1&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&13&22\\-2&-17&20\\4&29&-2\end{bmatrix}$$

习题 1.3.

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix}3&1\\1&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&1\\1&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10&0\\0&10\end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{A}^{50}=\left(\boldsymbol{A}^2\right)^{25}=\begin{bmatrix}10&0\\0&10\end{bmatrix}^{25}=\begin{bmatrix}10^{25}&0\\0&10^{25}\end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{A}^{51}=\boldsymbol{A}^{50}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}10^{25}&0\\0&10^{25}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&1\\1&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\cdot10^{25}&10^{25}\\10^{25}&-3\cdot10^{25}\end{bmatrix}$$

习题 1.4.

(1)

$$\boldsymbol{A}\text{为对称矩阵}\Rightarrow\boldsymbol{A}^\top=\boldsymbol{A}$$
$$\left(\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{AB}\right)^\top=\boldsymbol{B}^\top\left(\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{A}\right)^\top=\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{A}^\top\left(\boldsymbol{B}^\top\right)^\top=\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{AB}$$

(2)

- 充分条件：

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}\Rightarrow(\boldsymbol{AB})^\top=\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{A}^\top=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{AB}$$

- 必要条件：

$$\boldsymbol{AB}=(\boldsymbol{AB})^\top\Rightarrow\boldsymbol{AB}=(\boldsymbol{AB})^\top=\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{A}^\top=\boldsymbol{BA}$$

习题 1.5.

必要性显然成立。下面证明充分性。

设矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$。由 $\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 和定义 *1.2.5*，有

$$\left[\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{A}\right]_{ii}=\sum_{k=1}^{m}\left[\boldsymbol{A}^\top\right]_{ik}[\boldsymbol{A}]_{ki}=\sum_{k=1}^{m}a_{ki}^2=0$$

对 $i=1,2,\ldots,n$ 均成立。因此有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$。

习题 1.6.

$$\boldsymbol{A}^5=\begin{bmatrix}a^5&0&0\\0&b&5\\0&0&c^5\end{bmatrix},\boldsymbol{B}^3=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\boldsymbol{C}^n=\begin{bmatrix}\cos n\theta&\sin n\theta\\-\sin n\theta&\cos n\theta\end{bmatrix}$$

数学归纳法格式：

猜想 $\boldsymbol{C}^n=\begin{bmatrix}\cos n\theta&\sin n\theta\\-\sin n\theta&\cos n\theta\end{bmatrix}$ 对 $n\in N^+$ 成立。

当 $n=1$ 时，$\boldsymbol{C}^n=\begin{bmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}$，结论成立。

设当 $n=k$ 时结论成立，则当 $n=k+1$ 时，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}^{k+1}=\boldsymbol{C}^k\boldsymbol{C}&=\begin{bmatrix}\cos k\theta&\sin k\theta\\-\sin k\theta&\cos k\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}\cos(k+1)\theta&\sin(k+1)\theta\\-\sin(k+1)\theta&\cos(k+1)\theta\end{bmatrix}\end{aligned}$$

由归纳公理知 $\boldsymbol{C}^n=\begin{bmatrix}\cos n\theta&\sin n\theta\\-\sin n\theta&\cos n\theta\end{bmatrix}$ 对 $n\in N^+$ 成立。

习题 1.7.

计算矩阵乘法，由等式可得

$$\begin{cases}3a+a-3=b\\9+0\cdot a-3=6\\2a+3=b\end{cases}$$

解线性方程组得 $a=3,b=9$。

习题 1.8.

因为 $\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{O}$，我们得到

$$
\begin{aligned}
&(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})\left(\boldsymbol{I}_n+\sum_{i=1}^{n-1}\boldsymbol{A}^i\right)\\
=&\boldsymbol{I}_n+\sum_{i=1}^{n-1}\boldsymbol{A}^i-\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{A}^i\\
=&\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{I}_n
\end{aligned}
$$

习题 1.9.

(3) 容易发现

$$
\boldsymbol{C}^2=\begin{bmatrix}4&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&4&0\\0&0&0&4\end{bmatrix}=4\boldsymbol{I}_4
$$

因此根据奇偶性讨论，有

$$
\boldsymbol{C}^n=\begin{cases}2^{n-1}\boldsymbol{C} & n=2k-1\\ 2^n\boldsymbol{I}_4 & n=2k\end{cases}(k\in N^+)
$$

(4) 记 $\boldsymbol{D}'=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$，容易发现

$$
\boldsymbol{D}'^2=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\boldsymbol{D}'^n=\boldsymbol{O}(n\geq 3)
$$

因此有

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{D}^n&=\left(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{D}'\right)^n\\
&=\boldsymbol{I}+\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\boldsymbol{D}'^i\\
&=\boldsymbol{I}+n\boldsymbol{D}'+\binom{n}{2}\boldsymbol{D}'^2\\
&=\begin{bmatrix}1&n&n(n-1)/2\\0&1&n\\0&0&1\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

习题 1.10.

(1) 设矩阵 $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]_{n\times n}$ 为对角阵，矩阵 $\boldsymbol{B} = [b_{ij}]_{n\times n}$。则有

$$[\boldsymbol{AB}]_{ij} = \textstyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{ii}b_{ij}$$
$$[\boldsymbol{BA}]_{ij} = \textstyle\sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj} = a_{jj}b_{ij}$$

由题设知 $[\boldsymbol{AB}]_{ij} = [\boldsymbol{BA}]_{ij}$ 对任意 $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ 成立。

当 $i = j$ 时，等式成立；当 $i \neq j$ 时，由 $\boldsymbol{A}$ 的任意性知 $b_{ij} = 0$，即 $\boldsymbol{B}$ 为对角阵。

(2) 由 *(1)* 知，满足要求的矩阵为对角阵。

设矩阵 $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]_{n\times n}$ 为对角阵，矩阵 $\boldsymbol{B} = [b_{ij}]_{n\times n}$。

同 *(1)* 理，可得 $a_{ii}b_{ij} = a_{jj}b_{ij}$ 对任意 $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ 成立。由 $\boldsymbol{B}$ 的任意性可知 $a_{ii} = a_{jj}$ 对任意 $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ 成立，即 $\boldsymbol{A}$ 为纯量阵。

习题 1.11.

设矩阵 $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]_{n\times n}$，矩阵 $\boldsymbol{B} = [b_{ij}]_{n\times n}$。则有 $[\boldsymbol{AB}]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}b_{kj} + a_{ii}b_{ij} + \sum_{t=i+1}^{n} a_{it}b_{tj}$。

当 $i > j$ 时，因为 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为上三角矩阵，因此有 $a_{ik} = b_{tj} = 0(k < i, t >= i)$，代入上式可得 $[\boldsymbol{AB}]_{ij} = 0$；

当 $i = j$ 时，因为 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为对角元为 1 的上三角矩阵，因此有 $a_{ik} = b_{tj} = 0(k < i, t > i)$，代入上式可得 $[\boldsymbol{AB}]_{ij} = a_{ii}b_{ij} = 1$。

综上，$\boldsymbol{AB}$ 为对角元为 1 的上三角矩阵。

习题 1.12.

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{y}\boldsymbol{x}^\top = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_2y_1 & \cdots & x_ny_1 \\ x_1y_2 & x_2y_2 & \cdots & x_ny_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1y_n & x_2y_n & \cdots & x_ny_n \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{y} = \textstyle\sum_{i=1}^{n} x_iy_i$$

因此有

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}^k &= \underbrace{\left(\boldsymbol{y}\boldsymbol{x}^\top\right)\left(\boldsymbol{y}\boldsymbol{x}^\top\right)\cdots\left(\boldsymbol{y}\boldsymbol{x}^\top\right)}_{k} \\
&= \boldsymbol{y}\underbrace{\left(\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{y}\right)\left(\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{y}\right)\cdots\left(\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{y}\right)}_{k-1}\boldsymbol{x}^\top \\
&= \left(\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{y}\right)^{k-1}\boldsymbol{y}\boldsymbol{x}^\top = \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^{k-1}\begin{bmatrix} x_1y_1 & x_2y_1 & \cdots & x_ny_1 \\ x_1y_2 & x_2y_2 & \cdots & x_ny_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1y_n & x_2y_n & \cdots & x_ny_n \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

习题 1.13.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{x} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^\top = \frac{1}{2} \\
\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} &= \left(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^\top\right)\left(\boldsymbol{I}_n + 2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^\top\right) \\
&= \boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^\top - 2\boldsymbol{x}\left(\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{x}\right)\boldsymbol{x}^\top \\
&= \boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^\top - \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^\top = \boldsymbol{I}_n
\end{aligned}
$$

习题 1.14.

设 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{e}_i$ 表示第 i 个分量为 1，其余分量为 0 的 n 阶列向量。由题设可知

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{0}$$

对 $i = 1, 2, \ldots, n$ 均成立。因此有 $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{a}_2 = \cdots = \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$。

习题 1.15.

根据 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{B}$，可将 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2$ 展开：

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2 &= \boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{B}^2 + \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{A} \\
&= \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}
\end{aligned}
$$

又因为 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2 = \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，可得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O} \tag{1}$$

将(1)式左乘 $\boldsymbol{A}$，得到 $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{ABA}=\boldsymbol{O}$；将(1)式式左右各乘 $\boldsymbol{A}$，得到 $2\boldsymbol{ABA}=\boldsymbol{O}$。将上述两式联立解得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$。

习题 1.16.

因为 $\boldsymbol{A}^n-2\boldsymbol{A}^{n-1}=\boldsymbol{A}^{n-1}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})$，容易发现

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\1&0&-1\end{bmatrix}=\boldsymbol{O}$$

因此当 $n\geq 2$ 时，$\boldsymbol{A}^n-2\boldsymbol{A}^{n-1}=\boldsymbol{A}^{n-2}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})=\boldsymbol{O}$。

习题 1.17.

根据 $\boldsymbol{A}^2=-\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}^2=-\boldsymbol{B}$，可将 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2$ 展开：

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2&=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2+\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}\\&=-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}+\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}\end{aligned}$$

又因为 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$，可得

$$\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}\tag{2}$$

将(2)式左乘 $\boldsymbol{A}$，得到 $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{ABA}=\boldsymbol{O}$；将(2)式左右各乘 $\boldsymbol{A}$，得到 $2\boldsymbol{ABA}=\boldsymbol{O}$。将上述两式联立解得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$。

习题 1.19.

- 首先证明充分性：因为 $\boldsymbol{\alpha}^\top\boldsymbol{\alpha}=1$，因此有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^2&=\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^\top\right)^2\\&=\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^\top+\boldsymbol{\alpha}\left(\boldsymbol{\alpha}^\top\boldsymbol{\alpha}\right)\boldsymbol{\alpha}^\top\\&=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^\top=\boldsymbol{A}\end{aligned}$$

  充分性得证。

- 随后证明必要性：因为 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，因此有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}&=\left[\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^\top+\boldsymbol{\alpha}\left(\boldsymbol{\alpha}^\top\boldsymbol{\alpha}\right)\boldsymbol{\alpha}^\top\right]-\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^\top\right)\\&=\left(\boldsymbol{\alpha}^\top\boldsymbol{\alpha}-1\right)\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^\top=\boldsymbol{O}\end{aligned}$$

因为 $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$，因此 $\boldsymbol{\alpha}^\top\boldsymbol{\alpha} - 1 = 0$，即 $\boldsymbol{\alpha}^\top\boldsymbol{\alpha} = 1$。

习题 1.22.

(1) 记 $\boldsymbol{A}' = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，容易发现

$$\boldsymbol{A}'^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{A}'^n = \boldsymbol{O}(n \geq 3)$$

因此有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}^k &= \left(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}'\right)^k \\ &= \boldsymbol{I} + \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} \boldsymbol{A}'^i \\ &= \boldsymbol{I} + k\boldsymbol{A}' + \binom{k}{2} \boldsymbol{A}'^2 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & ka & \frac{k(k-1)}{2}a^2 \\ 0 & 1 & ka \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(2) 记 $\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$。容易发现 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^\top$，因此有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}^k &= \left(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^\top\right)^k = \boldsymbol{\alpha}\left(\boldsymbol{\beta}^\top\boldsymbol{\alpha}\right)^{k-1}\boldsymbol{\beta}^\top \\ &= (17)^{k-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^\top = (17)^{k-1}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 12 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

习题 1.23.

令 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$，其中 $\boldsymbol{e}_i$ 表示第 i 个分量为 1，其余分量为 0 的 n 阶列

向量。因此有

$$[\boldsymbol{ABC}]_{tt} = \sum_{k=1}^{n} [\boldsymbol{AB}]_{tk} [\boldsymbol{C}]_{kt} = \begin{cases} [\boldsymbol{AB}]_{ji} & t = j \\ 0 & t \neq j \end{cases}$$

$$[\boldsymbol{CBA}]_{tt} = \sum_{k=1}^{n} [\boldsymbol{C}]_{tk} [\boldsymbol{BA}]_{kt} = \begin{cases} [\boldsymbol{BA}]_{ji} & t = i \\ 0 & t \neq i \end{cases}$$

因为 $\mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{ABC}) = \mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{CBA})$，因此有 $[\boldsymbol{AB}]_{ji} = [\boldsymbol{BA}]_{ji}$ 对 $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ 成立，即 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$。

习题 1.24.

定义子矩阵如下：

$$\boldsymbol{A}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B}_4 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

则有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{AB} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{A}_3 & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{B}_3 & \boldsymbol{B}_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{A}_3\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{B}_3 & \boldsymbol{A}_3 + \boldsymbol{B}_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$