# 线性代数习题课 第一章

夏海淞

2022年9月24日



(1) 
$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 7 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 \\ 6 \\ 49 \end{bmatrix}$$

(1) 
$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 7 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 \\ 6 \\ 49 \end{bmatrix}$$
 (5)

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^3 a_{1i} x_i + \sum_{i=1}^3 a_{2i} x_i + \sum_{i=1}^3 a_{3i} x_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{1 \le i \le j \le 3} 2a_{ij} x_i x_j + \sum_{k=1}^3 a_{kk} x_k^2$$

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 8 \\ 0 & -5 & 6 \\ 2 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 8 \\ 0 & -5 & 6 \\ 2 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

$$3\mathbf{A}\mathbf{B} - 2\mathbf{A} = 3 \begin{bmatrix} 0 & 5 & 8 \\ 0 & -5 & 6 \\ 2 & 9 & 0 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -2 & 13 & 22 \\ -2 & -17 & 20 \\ 4 & 29 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{split} & \mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \\ & \mathbf{A}^{50} = \left( \mathbf{A}^2 \right)^{25} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}^{25} = \begin{bmatrix} 10^{25} & 0 \\ 0 & 10^{25} \end{bmatrix} \\ & \mathbf{A}^{51} = \mathbf{A}^{50} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10^{25} & 0 \\ 0 & 10^{25} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 10^{25} & 10^{25} \\ 10^{25} & -3 \cdot 10^{25} \end{bmatrix} \end{split}$$



A为对称矩阵 
$$\Rightarrow$$
  $\mathbf{A}^{\top} = \mathbf{A}$   
 $\left(\mathbf{B}^{\top}\mathbf{A}\mathbf{B}\right)^{\top} = \mathbf{B}^{\top}\left(\mathbf{B}^{\top}\mathbf{A}\right)^{\top} = \mathbf{B}^{\top}\mathbf{A}^{\top}\left(\mathbf{B}^{\top}\right)^{\top} = \mathbf{B}^{\top}\mathbf{A}\mathbf{B}$ 

1

A为对称矩阵 
$$\Rightarrow$$
  $\mathbf{A}^{\top} = \mathbf{A}$   $(\mathbf{B}^{\top} \mathbf{A} \mathbf{B})^{\top} = \mathbf{B}^{\top} (\mathbf{B}^{\top} \mathbf{A})^{\top} = \mathbf{B}^{\top} \mathbf{A}^{\top} (\mathbf{B}^{\top})^{\top} = \mathbf{B}^{\top} \mathbf{A} \mathbf{B}$ 

② 充分条件:

$$\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{B}\mathbf{A} \Rightarrow (\mathbf{A}\mathbf{B})^{\top} = \mathbf{B}^{\top}\mathbf{A}^{\top} = \mathbf{B}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{B}$$

• 必要条件:

$$\mathbf{A}\mathbf{B} = (\mathbf{A}\mathbf{B})^{\top} \Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{B} = (\mathbf{A}\mathbf{B})^{\top} = \mathbf{B}^{\top}\mathbf{A}^{\top} = \mathbf{B}\mathbf{A}$$

必要性显然成立。下面证明充分性。

设矩阵  $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m \times n}$ 。由  $\mathbf{A}^{\top} \mathbf{A} = \mathbf{O}$  和定义 1.2.5,有

$$\left[\mathbf{A}^{\top}\mathbf{A}\right]_{ii} = \sum_{k=1}^{m} \left[\mathbf{A}^{\top}\right]_{ik} \left[\mathbf{A}\right]_{ki} = \sum_{k=1}^{m} a_{ki}^{2} = 0$$

对 i = 1, 2, ..., n 均成立。因此有 A = O。

$$\mathbf{A}^{5} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^{5} & 0 & 0 \\ 0 & b & 5 \\ 0 & 0 & \mathbf{c}^{5} \end{bmatrix}, \mathbf{B}^{3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}^{n} = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$$

# 数学归纳法格式:

猜想 
$$\mathbf{C}^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$$
 对  $n \in N^+$  成立。

当 
$$n=1$$
 时,  $\mathbf{C}^n = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ ,结论成立。

设当 n = k 时结论成立,则当 n = k + 1 时,

$$\mathbf{C}^{k+1} = \mathbf{C}^{k} \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta \\ -\sin k\theta & \cos k\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \cos(k+1)\theta & \sin(k+1)\theta \\ -\sin(k+1)\theta & \cos(k+1)\theta \end{bmatrix}$$

由归纳公理知  $\mathbf{C}^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$  对  $n \in N^+$  成立。

# 计算矩阵乘法, 由等式可得

$$\begin{cases} 3a + a - 3 = b \\ 9 + 0 \cdot a - 3 = 6 \\ 2a + 3 = b \end{cases}$$

解线性方程组得 a = 3, b = 9。

# 因为 $\mathbf{A}^n = \mathbf{O}$ , 我们得到

$$(\mathbf{I}_n - \mathbf{A}) \left( \mathbf{I}_n + \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{A}^i \right)$$

$$= \mathbf{I}_n + \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{A}^i - \sum_{i=1}^n \mathbf{A}^i$$

$$= \mathbf{I}_n - \mathbf{A}^n = \mathbf{I}_n$$

# 1.9 I

# (3) 容易发现

$$m{\mathcal{C}}^2 = egin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \ 0 & 4 & 0 & 0 \ 0 & 0 & 4 & 0 \ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = 4 m{I}_4$$

因此根据奇偶性讨论,有

$$\mathbf{C}^{n} = \begin{cases} 2^{n-1}\mathbf{C} & n = 2k-1 \\ 2^{n}\mathbf{I}_{4} & n = 2k \end{cases} (k \in \mathbf{N}^{+})$$

### 1.9 II

(4) 记 
$$\mathbf{D}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
, 容易发现  $\mathbf{D}'^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{D}'^n = \mathbf{O}(n \ge 3)$ 。 因此有

$$\mathbf{D}^{n} = (\mathbf{I} + \mathbf{D}')^{n} = \mathbf{I} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \mathbf{D}'^{i}$$

$$= \mathbf{I} + n\mathbf{D}' + \binom{n}{2} \mathbf{D}'^{2} = \begin{bmatrix} 1 & n & n(n-1)/2 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

① 设矩阵  $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n \times n}$  为对角阵, 矩阵  $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{n \times n}$ 。则有

$$[\mathbf{A}\mathbf{B}]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{ii} b_{ij}$$
  
 $[\mathbf{B}\mathbf{A}]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kj} = a_{jj} b_{ij}$ 

由题设知  $[{\it AB}]_{ij} = [{\it BA}]_{ij}$  对任意  $i,j \in \{1,2,\ldots,n\}$  成立。 当 i=j 时,等式成立;当  $i \neq j$  时,由  ${\it A}$  的任意性知  $b_{ij}=0$ ,即  ${\it B}$  为对角阵。

① 设矩阵  $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n \times n}$  为对角阵, 矩阵  $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{n \times n}$ 。则有

$$[\mathbf{A}\mathbf{B}]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{ii} b_{ij}$$
  
 $[\mathbf{B}\mathbf{A}]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kj} = a_{jj} b_{ij}$ 

由题设知  $[\mathbf{AB}]_{ij} = [\mathbf{BA}]_{ij}$  对任意  $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$  成立。 当 i = j 时,等式成立;当  $i \neq j$  时,由  $\mathbf{A}$  的任意性知  $b_{ij} = 0$ ,即  $\mathbf{B}$  为对角阵。

② 由 (1) 知,满足要求的矩阵为对角阵。 设矩阵  $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n \times n}$  为对角阵,矩阵  $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{n \times n}$ 。 同 (1) 理,可得  $a_{ii}b_{ij} = a_{jj}b_{ij}$  对任意  $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$  成立。由  $\mathbf{B}$  的任意性可知  $a_{ii} = a_{jj}$  对任意  $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ 成立,即  $\mathbf{A}$  为纯量阵。

设矩阵  $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n \times n}$ , 矩阵  $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{n \times n}$ 。 则有  $[\mathbf{A}\mathbf{B}]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} b_{kj} + a_{ii} b_{ij} + \sum_{t=i+1}^{n} a_{it} b_{tj}$ 。 当 i > j 时,因为  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  均为上三角矩阵,因此有  $a_{ik} = b_{tj} = 0(k < i, t >= i)$ ,代入上式可得  $[\mathbf{A}\mathbf{B}]_{ij} = 0$ ; 当 i = j 时,因为  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  均为对角元为 1 的上三角矩阵,因此有  $a_{ik} = b_{tj} = 0(k < i, t > i)$ ,代入上式可得  $[\mathbf{A}\mathbf{B}]_{ij} = a_{ii} b_{ij} = 1$ 。 综上, $\mathbf{A}\mathbf{B}$  为对角元为 1 的上三角矩阵。

夏海淞

### 1.12 I

$$\mathbf{A} = \mathbf{y} \mathbf{x}^{\top} = \begin{bmatrix} x_1 y_1 & x_2 y_1 & \cdots & x_n y_1 \\ x_1 y_2 & x_2 y_2 & \cdots & x_n y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 y_n & x_2 y_n & \cdots & x_n y_n \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{x}^{\top} \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

#### 1.12 II

### 因此有

$$\mathbf{A}^{k} = \underbrace{\left(\mathbf{y}\mathbf{x}^{\top}\right)\left(\mathbf{y}\mathbf{x}^{\top}\right)\cdots\left(\mathbf{y}\mathbf{x}^{\top}\right)}_{k}$$

$$= \mathbf{y}\underbrace{\left(\mathbf{x}^{\top}\mathbf{y}\right)\left(\mathbf{x}^{\top}\mathbf{y}\right)\cdots\left(\mathbf{x}^{\top}\mathbf{y}\right)}_{k-1}\mathbf{x}^{\top}$$

$$= \left(\mathbf{x}^{\top}\mathbf{y}\right)^{k-1}\mathbf{y}\mathbf{x}^{\top} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_{i}y_{i}\right)^{k-1}\begin{bmatrix} x_{1}y_{1} & x_{2}y_{1} & \cdots & x_{n}y_{1} \\ x_{1}y_{2} & x_{2}y_{2} & \cdots & x_{n}y_{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1}y_{n} & x_{2}y_{n} & \cdots & x_{n}y_{n} \end{bmatrix}$$

夏海淞

$$\mathbf{x}^{\top}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^{\top} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{n} - \mathbf{x}\mathbf{x}^{\top} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{n} + 2\mathbf{x}\mathbf{x}^{\top} \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{I}_{n} + \mathbf{x}\mathbf{x}^{\top} - 2\mathbf{x} \begin{pmatrix} \mathbf{x}^{\top}\mathbf{x} \end{pmatrix} \mathbf{x}^{\top}$$

$$= \mathbf{I}_{n} + \mathbf{x}\mathbf{x}^{\top} - \mathbf{x}\mathbf{x}^{\top} = \mathbf{I}_{n}$$

设  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{e}_i$  表示第 i 个分量为 1, 其余分量为 0 的 n 阶列向量。由题设可知

$$Ae_i = a_i = 0$$

对  $i=1,2,\ldots,n$  均成立。因此有  $a_1=a_2=\cdots=a_n=0$ ,即 A=O。

夏海淞

根据  $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}, \mathbf{B}^2 = \mathbf{B}, \ \text{可将} (\mathbf{A} + \mathbf{B})^2$  展开:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2 + \mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{B}\mathbf{A}$$
$$= \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{B}\mathbf{A}$$

又因为  $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ ,可得

$$\mathbf{AB} + \mathbf{BA} = \mathbf{O} \tag{1}$$

将(1)式左乘 A, 得到 AB + ABA = O; 将(1)式式左右各乘 A, 得到 2ABA = O。将上述两式联立解得 AB = O。

因为 
$$\mathbf{A}^{n} - 2\mathbf{A}^{n-1} = \mathbf{A}^{n-1}(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})$$
, 容易发现

$$\mathbf{A}(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \mathbf{O}$$

因此当 
$$n \ge 2$$
 时,  $\mathbf{A}^n - 2\mathbf{A}^{n-1} = \mathbf{A}^{n-2}\mathbf{A}(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}) = \mathbf{O}_{\bullet}$ 

根据  $\mathbf{A}^2 = -\mathbf{A}, \mathbf{B}^2 = -\mathbf{B}, \ \text{可将} (\mathbf{A} + \mathbf{B})^2$  展开:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2 + \mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{B}\mathbf{A}$$
$$= -\mathbf{A} - \mathbf{B} + \mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{B}\mathbf{A}$$

又因为  $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 = -\mathbf{A} - \mathbf{B}$ ,可得

$$\mathbf{AB} + \mathbf{BA} = \mathbf{O} \tag{2}$$

将(2)式左乘 A, 得到 AB + ABA = O; 将(2)式左右各乘 A, 得到 2ABA = O。 将上述两式联立解得 AB = O。

• 首先证明充分性:因为  $\alpha^{\mathsf{T}}\alpha=1$ ,因此有

$$egin{aligned} oldsymbol{A}^2 &= \left( oldsymbol{I} - oldsymbol{lpha} oldsymbol{lpha}^ op + oldsymbol{lpha} \left( oldsymbol{lpha}^ op oldsymbol{lpha} 
ight)^2 \ &= oldsymbol{I} - oldsymbol{lpha} oldsymbol{lpha}^ op = oldsymbol{A} \end{aligned}$$

充分性得证。

• 首先证明充分性: 因为  $\alpha^{\mathsf{T}}\alpha = 1$ , 因此有

$$egin{aligned} oldsymbol{A}^2 &= \left( oldsymbol{I} - oldsymbol{lpha} oldsymbol{lpha}^ op 
ight)^2 \ &= oldsymbol{I} - 2oldsymbol{lpha} oldsymbol{lpha}^ op + oldsymbol{lpha} \left( oldsymbol{lpha}^ op oldsymbol{lpha} 
ight) oldsymbol{lpha}^ op \ &= oldsymbol{I} - oldsymbol{lpha} oldsymbol{lpha}^ op = oldsymbol{A} \end{aligned}$$

充分性得证。

• 随后证明必要性:因为  $A^2 = A$ ,因此有

$$\mathbf{A}^2 - \mathbf{A} = \left[ \mathbf{I} - 2\alpha\alpha^\top + \alpha \left( \alpha^\top \alpha \right) \alpha^\top \right] - \left( \mathbf{I} - \alpha\alpha^\top \right)$$
$$= \left( \alpha^\top \alpha - 1 \right) \alpha\alpha^\top = \mathbf{0}$$

因为  $\alpha \neq \mathbf{0}$ , 因此  $\alpha^{\top} \alpha - 1 = 0$ , 即  $\alpha^{\top} \alpha = 1$ .

### 1.22 I

① 记 
$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
, 容易发现

$$\mathbf{A}'^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{a}^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{A}'^n = \mathbf{O}(n \ge 3)$$

### 1.22 II

### 因此有

$$\mathbf{A}^{k} = (\mathbf{I} + \mathbf{A}')^{k}$$

$$= \mathbf{I} + \sum_{i=1}^{k} {k \choose i} \mathbf{A}'^{i}$$

$$= \mathbf{I} + k\mathbf{A}' + {k \choose 2} \mathbf{A}'^{2}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & ka & \frac{k(k-1)}{2} a^{2} \\ 0 & 1 & ka \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 1.22 III

② 记 
$$\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$
,  $\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ 。容易发现  $\mathbf{A} = \alpha \beta^{\top}$ ,因此有

$$\mathbf{A}^{k} = \left(\alpha \boldsymbol{\beta}^{\top}\right)^{k} = \alpha \left(\boldsymbol{\beta}^{\top} \boldsymbol{\alpha}\right)^{k-1} \boldsymbol{\beta}^{\top}$$
$$= (17)^{k-1} \alpha \boldsymbol{\beta}^{\top} = (17)^{k-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 12 \end{bmatrix}$$

令  $C = e_i e_j$ , 其中  $e_i$  表示第 i 个分量为 1, 其余分量为 0 的 n 阶列向量。因此有

$$[\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{C}]_{tt} = \sum_{k=1}^{n} [\mathbf{A}\mathbf{B}]_{tk} [\mathbf{C}]_{kt} = \begin{cases} [\mathbf{A}\mathbf{B}]_{ji} & t = j \\ 0 & t \neq j \end{cases}$$
$$[\mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{A}]_{tt} = \sum_{k=1}^{n} [\mathbf{C}]_{tk} [\mathbf{B}\mathbf{A}]_{kt} = \begin{cases} [\mathbf{B}\mathbf{A}]_{ji} & t = i \\ 0 & t \neq i \end{cases}$$

因为  $\operatorname{Tr}(\boldsymbol{ABC}) = \operatorname{Tr}(\boldsymbol{CBA})$ , 因此有  $[\boldsymbol{AB}]_{ji} = [\boldsymbol{BA}]_{ji}$  对  $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$  成立,即  $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$ 。

### 定义子矩阵如下:

$$\mathbf{\textit{A}}_{3} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{\textit{B}}_{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{\textit{B}}_{3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{\textit{B}}_{4} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

则有

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{A}_3 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{I} \\ \mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_4 \end{bmatrix} \\
= \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{I} \\ \mathbf{A}_3 \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_3 & \mathbf{A}_3 + \mathbf{B}_4 \end{bmatrix} \\
= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$