

# 线性代数习题答案

夏海淞

2022 年 9 月 25 日

## 目录

第一章 矩阵

1

## 第一章 矩阵

习题 1.1.

$$(1) \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 7 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 \\ 6 \\ 49 \end{bmatrix}$$

(5)

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= \left[ \sum_{i=1}^3 a_{1i}x_i + \sum_{i=1}^3 a_{2i}x_i + \sum_{i=1}^3 a_{3i}x_i \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq 3} 2a_{ij}x_i x_j + \sum_{k=1}^3 a_{kk}x_k^2 \end{aligned}$$

习题 1.2.

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 8 \\ 0 & -5 & 6 \\ 2 & 9 & 0 \end{bmatrix} \\ 3\mathbf{AB} - 2\mathbf{A} &= 3 \begin{bmatrix} 0 & 5 & 8 \\ 0 & -5 & 6 \\ 2 & 9 & 0 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 13 & 22 \\ -2 & -17 & 20 \\ 4 & 29 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

习题 1.3.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^2 &= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}^{50} &= (\mathbf{A}^2)^{25} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}^{25} = \begin{bmatrix} 10^{25} & 0 \\ 0 & 10^{25} \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}^{51} &= \mathbf{A}^{50} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10^{25} & 0 \\ 0 & 10^{25} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 10^{25} & 10^{25} \\ 10^{25} & -3 \cdot 10^{25} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

习题 1.4.

(1)

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \text{ 为对称矩阵} &\Rightarrow \mathbf{A}^\top = \mathbf{A} \\ (\mathbf{B}^\top \mathbf{AB})^\top &= \mathbf{B}^\top (\mathbf{B}^\top \mathbf{A})^\top = \mathbf{B}^\top \mathbf{A}^\top (\mathbf{B}^\top)^\top = \mathbf{B}^\top \mathbf{AB} \end{aligned}$$

(2) • 充分条件:

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} \Rightarrow (\mathbf{AB})^\top = \mathbf{B}^\top \mathbf{A}^\top = \mathbf{BA} = \mathbf{AB}$$

• 必要条件:

$$\mathbf{AB} = (\mathbf{AB})^\top \Rightarrow \mathbf{AB} = (\mathbf{AB})^\top = \mathbf{B}^\top \mathbf{A}^\top = \mathbf{BA}$$

习题 1.5.

必要性显然成立。下面证明充分性。

设矩阵  $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m \times n}$ 。由  $\mathbf{A}^\top \mathbf{A} = \mathbf{O}$  和定义 1.2.5, 有

$$[\mathbf{A}^\top \mathbf{A}]_{ii} = \sum_{k=1}^m [\mathbf{A}^\top]_{ik} [\mathbf{A}]_{ki} = \sum_{k=1}^m a_{ki}^2 = 0$$

对  $i = 1, 2, \dots, n$  均成立。因此有  $\mathbf{A} = \mathbf{O}$ 。

## 习题 1.6.

$$A^5 = \begin{bmatrix} a^5 & 0 & 0 \\ 0 & b & 5 \\ 0 & 0 & c^5 \end{bmatrix}, B^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$$

数学归纳法格式:

猜想  $C^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$  对  $n \in N^+$  成立。

当  $n = 1$  时,  $C^n = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ , 结论成立。

设当  $n = k$  时结论成立, 则当  $n = k + 1$  时,

$$\begin{aligned} C^{k+1} &= C^k C = \begin{bmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta \\ -\sin k\theta & \cos k\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(k+1)\theta & \sin(k+1)\theta \\ -\sin(k+1)\theta & \cos(k+1)\theta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

由归纳公理知  $C^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$  对  $n \in N^+$  成立。

## 习题 1.7.

计算矩阵乘法, 由等式可得

$$\begin{cases} 3a + a - 3 = b \\ 9 + 0 \cdot a - 3 = 6 \\ 2a + 3 = b \end{cases}$$

解线性方程组得  $a = 3, b = 9$ 。

## 习题 1.8.

因为  $A^n = O$ , 我们得到

$$\begin{aligned}
& (I_n - A) \left( I_n + \sum_{i=1}^{n-1} A^i \right) \\
&= I_n + \sum_{i=1}^{n-1} A^i - \sum_{i=1}^n A^i \\
&= I_n - A^n = I_n
\end{aligned}$$

习题 1.9.

(3) 容易发现

$$C^2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = 4I_4$$

因此根据奇偶性讨论, 有

$$C^n = \begin{cases} 2^{n-1}C & n = 2k - 1 \\ 2^n I_4 & n = 2k \end{cases} \quad (k \in N^+)$$

(4) 记  $D' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ , 容易发现

$$D'^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D'^n = O(n \geq 3)$$

因此有

$$\begin{aligned}
 D^n &= (I + D')^n \\
 &= I + \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} D'^i \\
 &= I + nD' + \binom{n}{2} D'^2 \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & n & n(n-1)/2 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

### 习题 1.10.

(1) 设矩阵  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  为对角阵, 矩阵  $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ 。则有

$$\begin{aligned}
 [AB]_{ij} &= \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = a_{ii} b_{ij} \\
 [BA]_{ij} &= \sum_{k=1}^n b_{ik} a_{kj} = a_{jj} b_{ij}
 \end{aligned}$$

由题设知  $[AB]_{ij} = [BA]_{ij}$  对任意  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$  成立。

当  $i = j$  时, 等式成立; 当  $i \neq j$  时, 由  $A$  的任意性知  $b_{ij} = 0$ , 即  $B$  为对角阵。

(2) 由 (1) 知, 满足要求的矩阵为对角阵。

设矩阵  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  为对角阵, 矩阵  $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ 。

同 (1) 理, 可得  $a_{ii} b_{ij} = a_{jj} b_{ij}$  对任意  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$  成立。由  $B$  的任意性可知  $a_{ii} = a_{jj}$  对任意  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$  成立, 即  $A$  为纯量阵。

### 习题 1.11.

设矩阵  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ , 矩阵  $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ 。则有  $[AB]_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} b_{kj} + a_{ii} b_{ij} + \sum_{t=i+1}^n a_{it} b_{tj}$ 。

当  $i > j$  时, 因为  $A, B$  均为上三角矩阵, 因此有  $a_{ik} = b_{tj} = 0 (k < i, t \geq i)$ , 代入上式可得  $[AB]_{ij} = 0$ ;

当  $i = j$  时, 因为  $A, B$  均为对角元为 1 的上三角矩阵, 因此有  $a_{ik} = b_{tj} = 0 (k < i, t > i)$ , 代入上式可得  $[AB]_{ij} = a_{ii} b_{ij} = 1$ 。

综上,  $AB$  为对角元为 1 的上三角矩阵。

习题 1.12.

$$A = \mathbf{y}\mathbf{x}^\top = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_2y_1 & \cdots & x_ny_1 \\ x_1y_2 & x_2y_2 & \cdots & x_ny_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1y_n & x_2y_n & \cdots & x_ny_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}^\top \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

因此有

$$\begin{aligned} A^k &= \underbrace{(\mathbf{y}\mathbf{x}^\top)(\mathbf{y}\mathbf{x}^\top) \cdots (\mathbf{y}\mathbf{x}^\top)}_k \\ &= \mathbf{y} \underbrace{(\mathbf{x}^\top \mathbf{y})(\mathbf{x}^\top \mathbf{y}) \cdots (\mathbf{x}^\top \mathbf{y})}_{k-1} \mathbf{x}^\top \\ &= (\mathbf{x}^\top \mathbf{y})^{k-1} \mathbf{y}\mathbf{x}^\top = \left( \sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^{k-1} \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_2y_1 & \cdots & x_ny_1 \\ x_1y_2 & x_2y_2 & \cdots & x_ny_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1y_n & x_2y_n & \cdots & x_ny_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

习题 1.13.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^\top \mathbf{x} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^\top = \frac{1}{2} \\ AB &= (\mathbf{I}_n - \mathbf{x}\mathbf{x}^\top)(\mathbf{I}_n + 2\mathbf{x}\mathbf{x}^\top) \\ &= \mathbf{I}_n + \mathbf{x}\mathbf{x}^\top - 2\mathbf{x}(\mathbf{x}^\top \mathbf{x})\mathbf{x}^\top \\ &= \mathbf{I}_n + \mathbf{x}\mathbf{x}^\top - \mathbf{x}\mathbf{x}^\top = \mathbf{I}_n \end{aligned}$$

习题 1.14.

设  $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{e}_i$  表示第  $i$  个分量为 1, 其余分量为 0 的  $n$  阶列向量。由题设可知

$$A\mathbf{e}_i = \mathbf{a}_i = \mathbf{0}$$

对  $i = 1, 2, \dots, n$  均成立。因此有  $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2 = \cdots = \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$ , 即  $A = O$ 。

习题 1.15.

根据  $A^2 = A, B^2 = B$ , 可将  $(A+B)^2$  展开:

$$\begin{aligned}(A+B)^2 &= A^2 + B^2 + AB + BA \\ &= A + B + AB + BA\end{aligned}$$

又因为  $(A+B)^2 = A+B$ , 可得

$$AB + BA = O \quad (1)$$

将(1)式左乘  $A$ , 得到  $AB + ABA = O$ ; 将(1)式左右各乘  $A$ , 得到  $2ABA = O$ 。将上述两式联立解得  $AB = O$ 。

习题 1.16.

因为  $A^n - 2A^{n-1} = A^{n-1}(A - 2I)$ , 容易发现

$$A(A - 2I) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = O$$

因此当  $n \geq 2$  时,  $A^n - 2A^{n-1} = A^{n-2}A(A - 2I) = O$ 。

习题 1.17.

根据  $A^2 = -A, B^2 = -B$ , 可将  $(A+B)^2$  展开:

$$\begin{aligned}(A+B)^2 &= A^2 + B^2 + AB + BA \\ &= -A - B + AB + BA\end{aligned}$$

又因为  $(A+B)^2 = -A-B$ , 可得

$$AB + BA = O \quad (2)$$

将(2)式左乘  $A$ , 得到  $AB + ABA = O$ ; 将(2)式左右各乘  $A$ , 得到  $2ABA = O$ 。将上述两式联立解得  $AB = O$ 。

习题 1.19.

- 首先证明充分性：因为  $\alpha^\top \alpha = 1$ ，因此有

$$\begin{aligned} A^2 &= (I - \alpha \alpha^\top)^2 \\ &= I - 2\alpha \alpha^\top + \alpha (\alpha^\top \alpha) \alpha^\top \\ &= I - \alpha \alpha^\top = A \end{aligned}$$

充分性得证。

- 随后证明必要性：因为  $A^2 = A$ ，因此有

$$\begin{aligned} A^2 - A &= [I - 2\alpha \alpha^\top + \alpha (\alpha^\top \alpha) \alpha^\top] - (I - \alpha \alpha^\top) \\ &= (\alpha^\top \alpha - 1) \alpha \alpha^\top = O \end{aligned}$$

因为  $\alpha \neq 0$ ，因此  $\alpha^\top \alpha - 1 = 0$ ，即  $\alpha^\top \alpha = 1$ 。

习题 1.22.

(1) 记  $A' = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ，容易发现

$$A'^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A'^n = O (n \geq 3)$$

因此有

$$\begin{aligned} A^k &= (I + A')^k \\ &= I + \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} A'^i \\ &= I + kA' + \binom{k}{2} A'^2 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & ka & \frac{k(k-1)}{2} a^2 \\ 0 & 1 & ka \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



(2) 记  $\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ,  $\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ 。容易发现  $A = \alpha\beta^\top$ , 因此有

$$\begin{aligned} A^k &= (\alpha\beta^\top)^k = \alpha(\beta^\top\alpha)^{k-1}\beta^\top \\ &= (17)^{k-1}\alpha\beta^\top = (17)^{k-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 12 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

### 习题 1.23.

令  $C = e_i e_j$ , 其中  $e_i$  表示第  $i$  个分量为 1, 其余分量为 0 的  $n$  阶列向量。因此有

$$\begin{aligned} [ABC]_{tt} &= \sum_{k=1}^n [AB]_{tk} [C]_{kt} = \begin{cases} [AB]_{ji} & t = j \\ 0 & t \neq j \end{cases} \\ [CBA]_{tt} &= \sum_{k=1}^n [C]_{tk} [BA]_{kt} = \begin{cases} [BA]_{ji} & t = i \\ 0 & t \neq i \end{cases} \end{aligned}$$

因为  $\text{Tr}(ABC) = \text{Tr}(CBA)$ , 因此有  $[AB]_{ji} = [BA]_{ji}$  对  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$  成立, 即  $AB = BA$ 。

### 习题 1.24.

定义子矩阵如下:

$$A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, B_4 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

则有

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} I & O \\ A_3 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 & I \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} B_1 & I \\ A_3 B_1 + B_3 & A_3 + B_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$