2 傅里叶级数

胥昊天

2025-04-01 10:16:30

正交向量

在介绍正交函数之前，我们先回顾一下正交向量。这有助于我们理解正交函数。

如果两个向量 $\vec{A}_1$ 和 $\vec{A}_2$ 相互垂直，则称 $\vec{A}_1$ 和 $\vec{A}_2$ 为正交向量，记作 $\vec{A}_1 \perp \vec{A}_2$ 。

接着，我们考虑平面上任意两个向量 $\vec{A}_1$ 和 $\vec{A}_2$ ，当我们想用 $\vec{A}_2$ 来近似表示 $\vec{A}_1$ 时，我们就只能用 $\vec{A}_1$ 在 $\vec{A}_2$ 上的投影来表示，但这不可避免地会带来误差。

设它们的夹角为 θ ，$\vec{A}_1$ 在 $\vec{A}_2$ 上的投影为 $c_{12}\vec{A}_2$ 。则误差为：

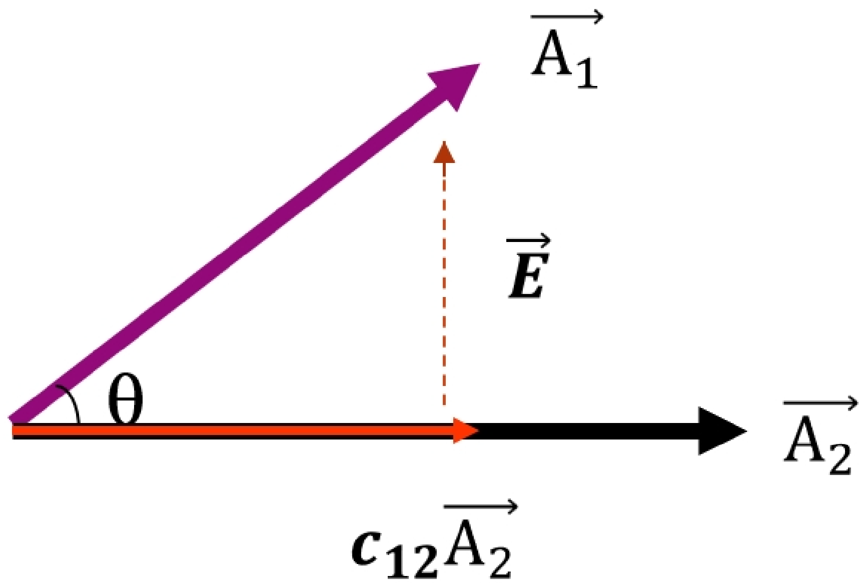
$$\vec{E} = \vec{A}_1 - c_{12}\vec{A}_2$$

我们期望误差 $\vec{E}$ 最小化，即：$\|\vec{E}\|^2$ 最小化。为取到最小值，我们可以计算出 c_{12} 的值：

$$\frac{d|\vec{E}|^2}{dc_{12}} = 0 \implies c_{12} = \frac{\vec{A}_1 \cdot \vec{A}_2}{\|\vec{A}_2\|^2}$$

所以，系数 c_{12} 表征着两个向量 $\vec{A}_1$ 和 $\vec{A}_2$ 的相似程度。

如果 $\vec{A}_1$ 和 $\vec{A}_2$ 是正交的，则它们的夹角为 90° ，此时 $c_{12} = 0$ ，即 $\vec{A}_1$ 和 $\vec{A}_2$ 之间最不相似。



正交函数

正交函数与正交向量类似。我们可以**把函数看作是一个向量空间中的向量**：一个函数在时间轴上是一个向量，函数的值是这个向量的坐标。

我们考虑两个函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ ，在时间区间 $[t_1, t_2]$ 上。

我们希望用 $f_2(t)$ 来近似表示 $f_1(t)$ ，即：

$$f_1(t) \approx c_{12} f_2(t) \quad t_1 < t < t_2$$

类似的，我们可以定义误差函数为：

$$\epsilon(t) = f_1(t) - c_{12} f_2(t)$$

为了使 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 之间的误差最小化，我们使用**均方误差**：

$$\overline{\epsilon^2(t)} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \epsilon^2(t) dt = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f_1(t) - c_{12} f_2(t)]^2 dt$$

我们对 c_{12} 求导数并令其为零：

$$\frac{d\overline{\epsilon^2(t)}}{dc_{12}} = 0 \implies c_{12} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f_1(t)f_2(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2} f_2^2(t)dt}$$

与正交向量类似，系数 c_{12} 表征着两个函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的相似程度，称为 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的**相关系数**。

当 $c_{12} = 0$ 时，函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 是**正交**的。

所以，正交函数的严格定义如下：

在区间 $[t_1, t_2]$ 上，两个函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 是正交的，当且仅当：

$$\int_{t_1}^{t_2} f_1(t)f_2(t)dt = 0$$

这里我们也可以看出，正交函数与正交向量的相似。如果把时间轴看作一个连续的“基底”（类似于向量空间中的坐标轴），那么一个函数 $f(t)$ 可以被看作在这个“基底”上定义的一个向量。在每个时间点 t 上，$f(t)$ 的值可以看作这个“向量”的一个分量。因为时间轴是连续的，这个“向量”的分量是无穷多的（对应于 t 的每个可能取值），而不是有限个。

正交函数集

在区间 $[t_1, t_2]$ 上的 n 个函数 $f_1(t)$、$f_2(t)$、$\cdots$、$f_n(t)$ 称为正交函数集，当且仅当：

$$\begin{cases} \int_{t_1}^{t_2} f_i(t)f_j(t)dt = 0 \quad (i \neq j) \\ \int_{t_1}^{t_2} f_i^2(t)dt = k_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \end{cases}$$

这里 $k_i \neq 0$ 是常数。

正交函数的线性组合

任意一个函数 $g(t)$ 在区间 $[t_1, t_2]$ 上都可以用 n 个正交函数的线性组合来近似表示：

$$g(t) \approx c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + \cdots + c_n f_n(t)$$

在均方误差最小的情况下，可求解系数 c_i ：

$$\begin{cases} \overline{\epsilon^2(t)} = \dfrac{1}{t_2 - t_1} \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} [g(t) - \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(t)]^2 dt \\ \dfrac{d\overline{\epsilon^2(t)}}{dc_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \end{cases}$$

则系数 c_i 为:

$$c_i = \frac{\int_{t_1}^{t_2} g(t) f_i(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} f_i^2(t) dt} = \frac{1}{k_i} \int_{t_1}^{t_2} g(t) f_i(t) dt$$

这里 c_i 是函数 $g(t)$ 在正交函数集 $\{f_1(t), f_2(t), \cdots, f_n(t)\}$ 上的投影系数。

完备正交函数集

在区间 $[t_1, t_2]$ 上，正交函数集 $\{f_1(t), f_2(t), \cdots, f_n(t)\}$ 近似表示任意一个函数 $g(t)$，如果:

$$\lim_{n \to \infty} \overline{\epsilon^2(t)} = 0$$

则称 $\{f_1(t), f_2(t), \cdots, f_n(t)\}$ 为**完备正交函数集**。其中 $\overline{\epsilon^2(t)}$ 是均方误差。

正交分解

上面我们介绍了完备正交函数集。所谓完备是指对任意函数 $g(t)$ 都可以用一个无穷级数表示:

$$g(t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i f_i(t)$$

这个级数收敛于 $g(t)$ ，上式也就是 $g(t)$ 的正交分解。

在实际应用中，我们通常只需要有限个正交函数就可以近似表示任意函数 $g(t)$。这就是正交分解的意义所在。

三角函数集

三角函数集是一个常用的完备正交函数集。

$$\{cos(n\omega t),\ sin(n\omega t) \mid n = 0, 1, 2, \cdots\}$$

在区间 $[t_0, t_0 + T]$ 上，上述无限个三角函数组成一个完备正交函数集。这里 T 是周期，$T = \frac{2\pi}{\omega}$ 。

证明：

1. 正交性：我们下面证明，

- 当 $i \neq j$ 时，$\int_{t_0}^{t_0+T} f_i(t) f_j(t)\, dt = 0$
- 当 $i = j$ 时，$\int_{t_0}^{t_0+T} f_i^2(t)\, dt \neq 0$

我们考虑（其余情况类似）：

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \cos(n\omega t) \cos(m\omega t)\, dt$$

使用和差化积公式：

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \cos(n\omega t) \cos(m\omega t)\, dt = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_0+T} \left[\cos((n+m)\omega t) + \cos((n-m)\omega t)\right]\, dt$$

又有：

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \cos((n+m)\omega t)\, dt = 0, \quad \int_{t_0}^{t_0+T} \cos((n-m)\omega t)\, dt = 0 \quad (n \neq m)$$

因此：

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \cos(n\omega t) \cos(m\omega t)\, dt = 0 \quad (n \neq m)$$

且不难证明，当 $n = m$ 时：

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \cos^2(n\omega t)\, dt = \frac{T}{2}$$

2. 完备性

完备性是指：对于任意**平方可积**函数 $f(t)$ （即 $\int_{t_0}^{t_0+T} |f(t)|^2 \, dt < \infty$ ），都可以用三角函数集的线性组合来表示。

我们需要证明任意平方可积的 $f(t)$ 可以写成：

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)]$$

接下来，我们试着确定 $f(t)$ 系数 a_n 和 b_n 的值。

$$\int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \, dt = \frac{a_0}{2} \cdot T + \sum_{n=1}^{N} \left[a_n \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} \cos(n\omega t) \, dt + b_n \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} \sin(n\omega t) \, dt \right]$$

由于 $\int_{t_0}^{t_0+T} \cos(n\omega t) \, dt = 0$ 和 $\int_{t_0}^{t_0+T} \sin(n\omega t) \, dt = 0$ ，所以：

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \, dt$$

类似的，我们可以求出 a_n 和 b_n 的值：

$$\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos(n\omega t) \, dt \\
&= \frac{a_0}{2} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} \cos(n\omega t) \, dt + \sum_{m=1}^{N} \left[a_m \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} \cos(n\omega t) \cos(m\omega t) \, dt + b_m \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} \cos(n\omega t) \sin(m\omega t) \, dt \right] \\
&= a_n \int_{t_0}^{t_0+T} \cos^2(n\omega t) \, dt \\
&= \frac{T}{2} a_n
\end{aligned}$$

则有：

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos(n\omega t) \, dt$$

类似的，我们有：

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\sin(n\omega t)\,dt$$

这里得到的 $f(t)$ 的展开式，其实就是之后我们要介绍的**傅里叶级数**。

设函数 $s_N(t)$ 为:

$$s_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}[a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)]$$

考虑 $f(t)$ 和 $s_N(t)$ 的平方误差:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \left|f(t) - s_N(t)\right|^2\,dt$$

展开后:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \left|f(t) - s_N(t)\right|^2\,dt = \int_{t_0}^{t_0+T} f^2(t)\,dt - 2\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)s_N(t)\,dt + \int_{t_0}^{t_0+T} s_N^2(t)\,dt$$

第一项: $\int_{t_0}^{t_0+T} f^2(t)\,dt$ 是 $f(t)$ 的 L^2 范数的平方。

第二项:

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)s_N(t)\,dt &= \int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}\left[a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)\right]\right)\,dt \\
&= \frac{a_0}{2}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\,dt + \sum_{n=1}^{N}\left[a_n\cdot\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos(n\omega t)\,dt + b_n\cdot\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\sin(n\omega t)\,dt\right] \\
&= \frac{T}{4}a_0^2 + \frac{T}{2}\sum_{n=1}^{N}(a_n^2 + b_n^2)
\end{aligned}$$

第三项：注意到，只有平方项积分后的结果不为零。

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t_0+T} s_N^2(t)\,dt &= \int_{t_0}^{t_0+T}\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}[a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)]\right)^2 dt \\
&= \frac{T}{4}a_0^2 + \frac{T}{2}\sum_{n=1}^{N}(a_n^2 + b_n^2)
\end{aligned}$$

综上，我们得到：

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \left| f(t) - s_N(t) \right|^2 \, dt = \int_{t_0}^{t_0+T} f^2(t) \, dt - \left(\frac{T}{4} a_0^2 + \frac{T}{2} \sum_{n=1}^{N} (a_n^2 + b_n^2) \right)$$

注意到，上式的左边本质是一个平方求和，是非负的。因此，我们可以得到 Bessel 不等式：

$$\int_{t_0}^{t_0+T} f^2(t) \, dt \geq \frac{T}{4} a_0^2 + \frac{T}{2} \sum_{n=1}^{N} (a_n^2 + b_n^2)$$

回到我们的证明，我们还需要证明：

$$\lim_{N \to \infty} \int_{t_0}^{t_0+T} \left| f(t) - s_N(t) \right|^2 \, dt = 0$$

由于 $f(t)$ 是平方可积的，所以：$\int_{t_0}^{t_0+T} f^2(t) \, dt$ 是有极限的。

而随着 N 的增大，$\frac{T}{4} a_0^2 + \frac{T}{2} \sum_{n=1}^{N} (a_n^2 + b_n^2)$ 也会增大。

由于：单调有界，必有极限，所以得证。

傅里叶级数

傅里叶级数是一个重要的数学工具，它可以把一个周期函数表示为一组正弦和余弦函数的线性组合。傅里叶级数的基本思想是：任何一个周期函数都可以用一组正交函数（正弦和余弦函数）来表示。

傅里叶级数的形式为：

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \right]$$

这里 a_0、a_n 和 b_n 是傅里叶系数，ω 是角频率。其中：

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos(n\omega t) \, dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin(n\omega t) \, dt$$

根据欧拉公式：

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$$

我们可以把傅里叶级数写成**复数形式**：

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega t}$$

其中：

$$F_n = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)e^{-jn\omega t}\,dt$$

这里，复指数函数集 $\{e^{jn\omega t} \mid n = 0, \pm1, \pm2, \cdots\}$ 是一个完备正交函数集。我们就不加证明了。