# 3 傅里叶变换

xht03

2025-04-12 11:27:30

## 傅里叶变换

傅里叶变换是一个重要的数学工具，它可以把一个**非周期函数**表示为一组正弦和余弦函数的**连续积分**。

对于一个周期信号 $f(t)$ ，设其周期为 $T$ ，则其角频率为 $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ，此时 $f(t)$ 包含的频率分量为 $\omega$ 的整数倍，在频谱上表现为一个个离散的谱线。当 $T \to \infty$ 时，$\omega \to 0$ ，频率分量变为连续的，频谱上表现为一个个连续的谱线。同时，当 $T \to \infty$ 时，$f(t)$ 变为一个**非周期信号**。

$f(t)$ 的谱系数（即各个频率分量的系数）为：

$$F(n\omega) = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-jn\omega t} \, dt$$

显然，当 $T \to \infty$ 时，$F(n\omega)$ 趋于 $0$ 。所以，如果我们对非周期函数 $f(t)$ 进行傅里叶变换，能得到连续谱，但其幅度无限小。虽然各个频率分量的幅度无限小，但它们之间仍存在相对大小。所以我们引入**频谱密度函数**。

我们考虑：

$$TF(n\omega) = \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-jn\omega t} \, dt$$

而且，

$$TF(n\omega) = \frac{F(n\omega)}{\frac{1}{T}} = \frac{F(n\omega)}{f}$$

由此可见，$TF(n\omega)$ 表征着单位频带上的频谱值。因此我们可以把 $TF(n\omega)$ 看作是一个**频谱密度函数**，并记 $F(jn\omega) = TF(n\omega)$。

由傅里叶级数的定义，我们可以得到：

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega) e^{jn\omega t} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{F(jn\omega)}{T} e^{jn\omega t}
\end{aligned}
$$

当 $T \to \infty$ 时，$\Delta(n\omega) = \omega \to d\omega$ ，$(n\omega) \to \omega$ ，所以：

$$
\begin{aligned}
\lim_{T\to\infty} f(t) &= \lim_{T\to\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(jn\omega) \frac{\omega}{2\pi} e^{jn\omega t} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega
\end{aligned}
$$

至此，我们就推导出了**傅里叶变换**的公式：

$$
F(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt
$$

**傅里叶逆变换**的公式为：

$$
f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega
$$

$F(j\omega)$ 有时也简写为 $F(\omega)$ 。

---

## 傅里叶变换的物理意义

由于 $f(t)$ 是实函数，所以 $F(\omega)$ 的虚部为零。

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)| cos(\omega t + \phi(\omega)) d\omega + j \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)| sin(\omega t + \phi(\omega)) d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)| cos(\omega t + \phi(\omega)) d\omega
\end{aligned}
$$

所以我们得到：

$$f(t)=\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}}_{\text{求和}}\underbrace{\frac{|F(\omega)|}{\pi}\mathrm{d}\,\omega}_{\text{振幅}}\underbrace{\cos[\omega t+\varphi(\omega)]}_{\text{正弦信号}}$$

这表明：一个非周期信号 $f(t)$ 可以看作是无穷多个振幅无穷小的连续余弦信号之和。

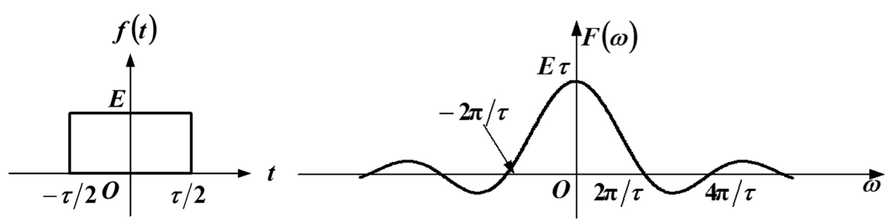
---

## 常见信号的傅里叶变换

### 矩形信号

$$
\begin{aligned}
F(\omega) &= \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} Ee^{-j\omega t}dt \\
&= \frac{E}{-j\omega}e^{-j\omega t}\Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \\
&= \frac{E}{-j\omega}\left(e^{j\frac{-\omega\tau}{2}} - e^{j\frac{\omega\tau}{2}}\right) \\
&= \frac{E}{j\omega}\cdot 2j\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \\
&= \frac{2E}{\omega}\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \\
&= E\tau\cdot\frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\frac{\omega\tau}{2}} \\
&= E\tau\cdot Sa(\frac{\omega\tau}{2})
\end{aligned}
$$

其中 $Sa(x)=\frac{\sin(x)}{x}$ 。

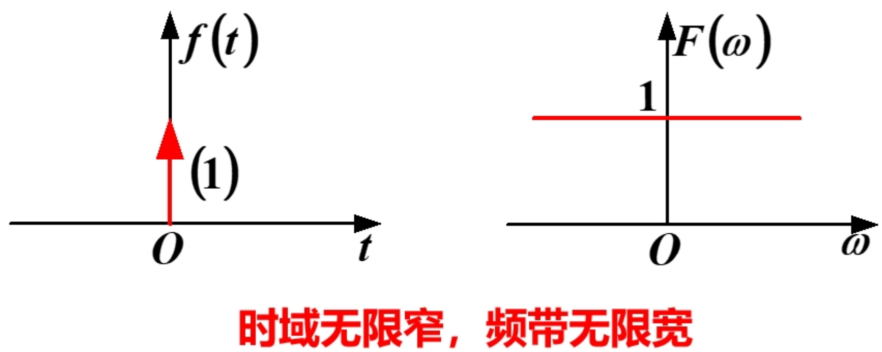



---

**单位冲激信号**

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1$$

实际上，$\delta(t)$ 可以看作 $\tau \times \frac{1}{\tau}$ 的矩形脉冲，且 $\tau \to 0$ 。



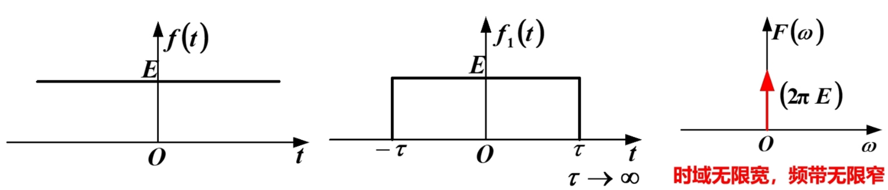

---

**直流信号**

直流信号可以看作是一个矩形脉冲，只不过 $\tau \to \infty$ 。

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} E\delta(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \lim_{\tau \to \infty} \int_{-\tau}^{tau} E e^{-j\omega t} dt \\ &= E \lim_{\tau \to \infty} \frac{2sin(\omega\tau)}{\omega} \\ &= 2\pi E \delta(\omega) \end{aligned}$$

这里我们用到了 $\lim_{\tau \to \infty} \frac{\sin(\omega\tau)}{\pi\omega} = \delta(\omega)$ ，这里我们就不加证明的使用了。




---

### 傅里叶变换的性质

当 $f(t)$ 为**实函数**时：

$$
\begin{aligned}
F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(\cos(\omega t) - j\sin(\omega t)\right)dt \\
&= R(\omega) - jI(\omega)
\end{aligned}
$$

我们记：$F(\omega) = |F(\omega)|e^{j\phi(\omega)}$ 。

那么不难得到：

- $|F(\omega)|$ 是关于 $\omega$ 的偶函数。
- $\phi(\omega) = -arctan\frac{I(\omega)}{R(\omega)}$ 是关于 $\omega$ 的奇函数。

除此以外，傅里叶变换还具有以下基本性质：

- 线性性质

$$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \leftrightarrow a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega)$$

- 时移性质

  若 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ ，则：$f(t - t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0}F(\omega)$

- 频移性质

  若 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ ，则：$f(t)e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow F(\omega - \omega_0)$

- 频域缩放性质

  若 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ ，则：$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$

- **卷积定理**

  若 $f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega)$ ，$f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$ ，则：

$$f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$$

$$f_1(t) \cdot f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}F_1(\omega) * F_2(\omega)$$

---

## 离散时间傅里叶变换

上述考虑的是连续时间下的傅里叶变换。我们现在考虑**离散时间**下的傅里叶变换。

对于**非周期信号** $x(n)$ 的离散时间傅里叶变换（DTFT）为:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

这里 $X(e^{j\omega})$ 是一个复数函数，称为**频谱**。它是一个周期为 $2\pi$ 的周期函数。

离散时间傅里叶变换的**逆变换**为:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

---

## DTFT 性质

离散时间傅里叶变换具有以下性质（与连续时间傅里叶变换类似）:

- 线性性质

$$a_1x_1(n) + a_2x_2(n) \leftrightarrow a_1X_1(e^{j\omega}) + a_2X_2(e^{j\omega})$$

- 时移性质

  若 $x(n) \leftrightarrow X(e^{j\omega})$ ，则: $x(n-n_0) \leftrightarrow e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega})$

- 频移性质

  若 $x(n) \leftrightarrow X(e^{j\omega})$ ，则: $x(n)e^{j\omega_0 n} \leftrightarrow X(e^{j(\omega-\omega_0)})$

- 卷积性质

  若 $x_1(n) \leftrightarrow X_1(e^{j\omega})$ ，$x_2(n) \leftrightarrow X_2(e^{j\omega})$ ，则:

$$x_1(n) * x_2(n) \leftrightarrow X_1(e^{j\omega}) \cdot X_2(e^{j\omega})$$

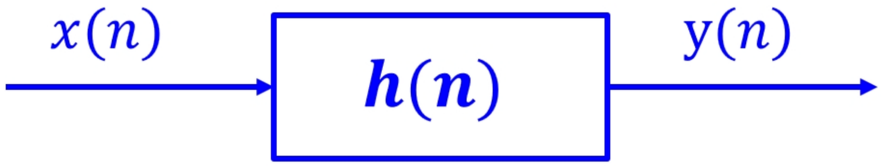
$$x_1(n) \cdot x_2(n) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}X_1(e^{j\omega}) * X_2(e^{j\omega})$$

---

### 频率响应

傅里叶变换将一个信号从时域变换到频域。在时域上，我们用**冲激响应**来描述一个系统的特性；在频域上，我们用**频率响应**来描述一个系统的特性。

这么做的原因（与时域上的冲激响应类似）是：通过傅里叶变化，一个信号可以看作是无穷多个正弦信号的叠加。所以对于**线性时不变系统**，我们只需要知道系统对正弦信号的响应，就可以知道系统对任意信号的响应。




我们考虑输入信号 $x(n)$ 和输出信号 $y(n)$ ，且 $x(n) = e^{j\omega n}$ 。

那么系统的输出信号为：

$$
\begin{aligned}
y(n) &= h(n) * x(n) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{j\omega(n-k)} \\
&= e^{j\omega n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k} \\
&= e^{j\omega n} H(e^{j\omega}) \\
&= H(e^{j\omega})x(n)
\end{aligned}
$$

这里 $H(e^{j\omega})$ 称为**频率响应**。它定义了一个复指数信号 $e^{j\omega n}$ 经过系统后的幅值变化。

$$
\begin{aligned}
H(e^{j\omega}) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k} \\
&= |H(e^{j\omega})|e^{j\phi(\omega)}
\end{aligned}
$$

其中，

$$\phi(\omega) = -arctan\frac{I(H(e^{j\omega}))}{R(H(e^{j\omega}))}$$

$$\tau(\omega) = \frac{d\phi(\omega)}{d\omega}\text{称为群延迟}$$

---

## 离散傅里叶变换

当我们使用计算机进行数字信号处理时：

- 计算机只能处理有限个数据点。
- 计算机只能处理有限个频率分量。

所以，在实际应用中，我们一定是对**离散时间**，且**有限长度**的信号进行傅里叶变换。我们称之为**离散傅里叶变换**（DFT）。

需要先指出的是，离散傅里叶变换（DFT）是对离散时间傅里叶变换（DTFT）的一个近似。DFT 是对 DTFT 的一个有限采样。

DTFT 是一个连续的函数，而无限多个频率分量无法被计算机存储。而 DFT 是一个离散的函数。

---

DFT 的定义为：

1. 将有限长序列 $x(n)$ ，$n = 0, 1, \cdots, N-1$ ，拓展成**周期函数** $\tilde{x}(n)$ 。

$$\tilde{x}(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n + rN) = x((n))_N \ , \quad ((n))_N = n \mod N$$

2. 计算 DFT：

$$\begin{aligned} X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \quad (k = 0, 1, \cdots, N-1) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} \quad (W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}} \text{ 为 N 阶单位根}) \end{aligned}$$

3. 计算 IDFT：

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \quad (n = 0, 1, \cdots, N-1) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-nk} \end{aligned}$$

---

## DFT 性质

DFT 具有以下性质：

1. 线性

$$ax_1(n) + bx_2(n) \leftrightarrow aX_1[k] + bX_2[k]$$

2. 对称性

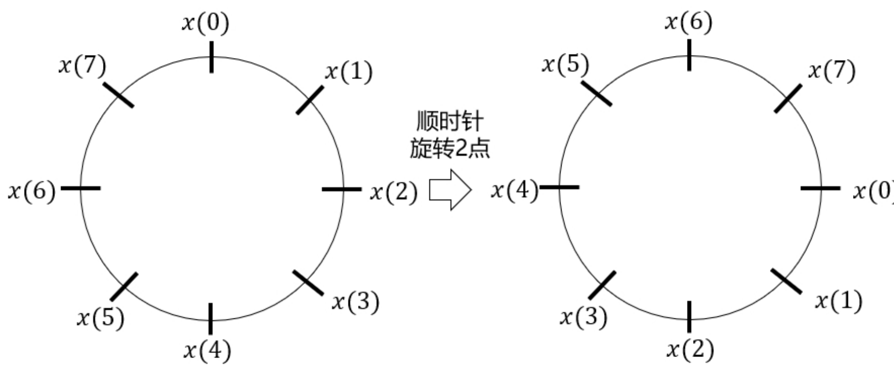
设 $x(n)$ 是长度为 $N$ 的是序列，则:

$$X[k] = X^*[N-k] \quad (k = 0, 1, \cdots, N-1)$$

其中 $X^*$ 是 $X$ 的共轭。

3. 圆周移位

$$x((n-n_0))_N \leftrightarrow X[k]W_N^{-kn_0} \quad (n_0 = 0, 1, \cdots, N-1)$$




4. 圆周卷积

设 $x(n)$ 和 $h(n)$ 是长度为 $N$ 的序列，则:

$$y(n) = x(n) * h(n) = \left[\sum_{m=0}^{N-1} \tilde{h}(m)\tilde{x}(n-m)\right] R_N(n)$$

其中 $R_N(n)$ 是长度为 $N$ 的矩形波。

---

## 总结

在此，我们对各种傅里叶级数、变换做个总结。

- 傅里叶级数用于处理**周期信号**，可以分为
  - 连续时间傅里叶级数（CTFS）
  - 离散时间傅里叶级数（DTFS）

- 傅里叶变换用于处理**非周期信号**，可以分为
  - 连续时间傅里叶变换（CTFT）
  - 离散时间傅里叶变换（DTFT）

那么，聪明如你可能会问：离散傅里叶变换（DFT）是什么呢？

离散傅里叶变换（DFT）在延拓后是一个周期信号，所以 **DFT 本质上是 DFS**
。

由于：周期函数分解的正弦波线性组合，各个频率分量都是 $\omega$ 的整数倍，所以：

- 傅里叶级数的结果是**离散的**。（或者说，周期函数的频谱是离散的）
- 傅里叶变换的结果是**连续的**。（或者说，非周期函数的频谱是连续的）

---