一 随机事件及其运算

(一) 事件间的关系

1. 包含关系: $A \subset B$ —— A 被包含于 B 或 B 包含 A
2. 相等关系: $A = B$ —— 事件 A 与事件 B 相等 (即 $A \subset B$ 且 $B \subset A$)
3. 互不相容: $A \cap B = \varnothing$ —— 事件 A 与事件 B 不可能同时发生

(二) 事件间的运算

1. 事件 A 与 B 的并 —— $A \cup B$
2. 事件 A 与 B 的交 —— $A \cap B$ 或简记为 AB
3. 事件 A 与 B 的差 —— $A - B$ (事件 A 发生而 B 不发生)
4. 对立事件 —— $\overline{A}$, 即为事件 A 的对立事件, 含义为: 由在 Ω 中而不在 A 中的样本点组成的新事件

> 注意:
>
> 1. 对立事件一定是互不相容的事件, 即 $A \cap \overline{A} = \varnothing$. 但互不相容的事件不一定是对立事件
> 2. $A - B$ **可以记为** $A\overline{B}$

(三) 事件的运算性质

1. 交换律

$$A \cup B = B \cup A, \quad AB = BA$$

2. 结合律

$$\begin{gathered}(A \cup \cdot B) \cup C = A \cup (B \cup C) \\ (AB)C = A(BC)\end{gathered}$$

3. 分配律

$$\begin{gathered}(A \cup B) \cap C = AC \cup BC \\ (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)\end{gathered}$$

4. 对偶率 (德摩根公式)

$$\begin{gathered}\text{事件并的对立等于对立的交}: \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \\ \text{事件交的对立等于对立的并}: \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}\end{gathered}$$

二 概率的性质

(一) 概率的可加性

有限可加性: 若有限个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 互不相容, 则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P\left(A_i\right)$$

推论: 对任一事件 A , 有: $P(\overline{A})=1-P(A)$

(二) 概率单调性

1. **性质1**: 若 $A \supset B$, 则 $P(A-B)=P(A)-P(B)$

2. **推论1(单调性)**: 若 $A \supset B$, 则 $P(A) \geqslant P(B)$

3. **性质2**: 对任意事件 A, B, 有:

$$P(A-B)=P(A)-P(AB)$$

(三) 概率的加法公式

1. 概率的加法公式: 对任意事件 A, B, 有

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

2. 推论 (半可加性) : 对任意事件 A, B, 有

$$P(A \cup B) \leqslant P(A)+P(B)$$

三 条件概率

(一) 条件概率的定义

1. 条件概率: 设 A 与 B 是样本空间 Ω 中的两事件, 若 $P(B)>0$, 则称

$$P(A \mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

为"在 B 发生下 A 的条件概率", 简称条件概率

(二) 乘法公式

乘法公式:

- (1) 若 $P(B)>0$, 则 $P(AB)=P(B) P(A \mid B)$
- (2) 若 $P\left(A_1 A_2 \cdots A_{n-1}\right)>0$,
  $P\left(A_1 \cdots A_n\right)=P\left(A_1\right) P\left(A_2 \mid A_1\right) P\left(A_3 \mid A_1 A_2\right) \cdots P\left(A_n \mid A_1 \cdots A_{n-1}\right)$

(二) 全概率公式

1. 全概率公式:

设 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为样本空间 Ω 的一个分割, 即 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 互不相容, 且 $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$, 如果 $P(B_i) > 0, i = 1, 2, \cdots, n$, 则对任一事件 A 有:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) P(A|B_i)$$

> 注: $A = A\Omega = A\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} (AB_i)$, 那么, $P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} (AB_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} P(AB_i)$, 将 $P(AB_i) = P(B_i) P(A|B_i), i = 1, 2, \cdots, n$ 带入即可得到.

全概率的最简单形式:

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(\overline{B})P(A|\overline{B})$$

(三) 贝叶斯公式

贝叶斯公式:

设 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为样本空间 Ω 的一个分割, 即 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 互不相容, 且 $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$, 如果 $P(A) > 0, P(B_i) > 0, i = 1, 2, \cdots, n$, 则有:

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i) P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j) P(A|B_j)}, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

> 注: 根据条件概率的定义:
>
> $$P(B_i|A) = \frac{P(AB_i)}{P(A)}$$
>
> 分子用乘法公式, 分母用全概率公式, 即
>
> $$\begin{aligned} P(AB_i) &= P(B_i) P(A|B_i) \\ P(A) &= \sum_{j=1}^{n} P(B_j) P(A|B_j) \end{aligned}$$
>
> 带入即可得到.

上面的是一般形式, 常见的还有这样的形式:

$$P(B|A) = \frac{P(B)P(A|B)}{P(A)}$$

便于理解:

$$
 P(原因|结果)=\frac {P(原因)P(结果|原因)}{P(结果)}
$$

$$P(\text{原因}|\text{结果}) = \frac{P(\text{原因})P(\text{结果}|\text{原因})}{P(\text{结果})}$$