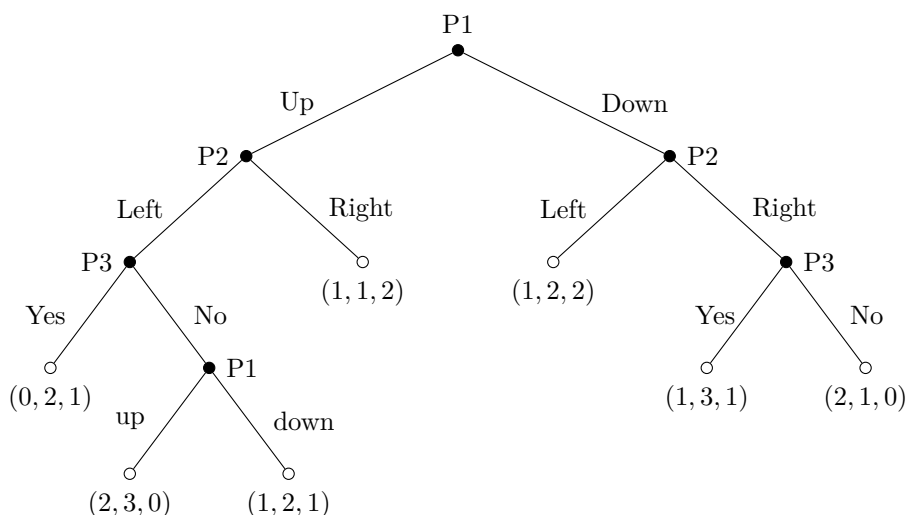


## 博弈论作业二

截止日期：2022 年 3 月 27 日（周日）

- 要求：写清楚求解过程，字迹工整可辨认
- 提交方式：QQ 群作业

**第一题：博弈树** 请用逆向递归法求解以下博弈：



**第二题：海盗分金** 5 个海盗抢得 100 枚金币，他们按抽签的顺序依次提方案：首先由 1 号提出分配方案，然后 5 人表决，投票要超过半数同意方案才被通过，否则他将被扔入大海喂鲨鱼，依此类推。请问，第 1 个海盗提出怎样的分配方案才能够使得自己避免被扔入大海，并获得最多的宝石呢？

**第三题：讨价还价 (Sequential Bargaining)** 此题对应课上讲解的三期讨价还价模型。不同之处仅为玩家一和玩家二的贴现因子（即 discount factor  $\delta$ ）不同。

玩家一和玩家二以讨价还价的形式瓜分 1 元钱。其中，玩家一的贴现因子为  $\delta_1 < 1$ ，玩家二的贴现因子为  $\delta_2 < 1$ 。讨价还价最多进行三轮，具体情形如下：

1. 第一轮，玩家一是提议者。她提出瓜分方案  $(s_1, 1 - s_1)$ ，即玩家一得  $s_1$ ，玩家二得  $1 - s_1$ 。
  - 若玩家二接受此提议，则讨价还价过程结束，两位玩家的最终受益为  $(s_1, 1 - s_1)$ 。
  - 若玩家二拒绝此提议，则讨价还价进入第二轮。

2. 第二轮，玩家二是提议者。他提出瓜分方案  $(s_2, 1 - s_2)$ ，即玩家一得  $s_2$ ，玩家二得  $1 - s_2$ 。

- 若玩家一接受此提议，则讨价还价过程结束，两位玩家的最终受益为  $(s_2, 1 - s_2)$ 。
- 若玩家一拒绝此提议，则讨价还价进入第三轮。

3. 第三轮，玩家一是提议者。她提出瓜分方案  $(s_3, 1 - s_3)$ ，即玩家一得  $s_3$ ，玩家二得  $1 - s_3$ 。

- 若玩家二接受此提议，则讨价还价过程结束，两位玩家的最终受益为  $(s_3, 1 - s_3)$ 。
- 若玩家二拒绝此提议，则讨价还价过程结束，两位玩家的最终受益为  $(0, 0)$ 。

请用逆向递归法求解此博弈。

**第四题：消耗战 (Wars of Attrition)** 此题对应课上讲解的两期消耗战模型。不同之处仅为  $c > v$ 。

消耗战最多进行两期。在每一期，两个玩家可选择 “Fight (F)” 或者 “Quit (Q)”。消耗战在任何一方选择 Q 时结束。不考虑贴现（即贴现因子  $\delta = 1$ ）。两个玩家的收益如下：

- 若本人选择 F 而对手选择 Q，则获得  $v$ ；
- 若本人选择 Q 而对手选择 F，则获得 0；
- 若本人和对手均选择 Q，则获得 0；
- 若本人和对手均选择 F，则需付出成本  $c$ 。假设  $c > v$ 。

请找出此博弈的所有子博弈精炼纳什均衡 (SPE)。

注意：存在第一期采用混合策略，第二期采用纯策略的 SPE。

**选做题：矩形点阵** 该游戏涉及一个  $N$  行  $M$  列的矩形点阵（不考虑  $N = M = 1$  的情况）。游戏有两个玩家，玩家轮流行动。每一轮，行动玩家选择一个未被移除的点，则该点以及该点右上方（包括右侧和上方）所有未被移除的点都被移除。最终移除最后一个点的玩家输。

以 3 行 4 列点阵为例。

```

. . . .
. . . .
. . . .

```

1. 若玩家一选择 (1,3) 点，则移除点后的点阵变为

```

      . .
      . . . .
      . . . .
    
```

2. 若玩家二选择 (2,2) 点，则移除点后的点阵变为

```

      .
      .
      . . . .
    
```

3. 若玩家一选择 (3,3) 点，则移除点后的点阵变为

```

      .
      .
      . .
    
```

4. 若玩家二选择 (3,1) 点，则所有点被移除。玩家二输。

由于该游戏不存在平局，根据 Zermelo's Theorem, 玩家一或者玩家二存在必胜策略。

你能说明哪位玩家有必胜策略吗？（注：不用描绘完整的策略）