第三章

行 列 式

本章主要内容:

① 行列式的定义;

② 行列式的性质;

③ 行列式的计算;

④ 行列式的应用.

第三章 行列式

§3.1 行列式的定义

一、二阶行列式

二、n阶行列式

§ 3.1 行列式的定义

一、二阶行列式

设二阶方阵

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

则称 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 为矩阵A对应的**二阶行列式**,

它代表一个**数**: $a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$, 简记为$|A|$, 或 $\det(A)$, 即

$$|A|=\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}.$$

§3.1 行列式的定义

例3.1.1

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 2\times(-1) - 3\times 5 = -17.$$

例3.1.2 对于线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases}$$

当$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$时，用消元法可求得其解为:

§3.1 行列式的定义

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} = \dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \\ \\ x_2 = \dfrac{a_{11} b_2 - a_{21} b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \end{cases}$$

这是一个公式解！

§ 3.1 行列式的定义

二、n阶行列式

设n阶方阵

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

则称

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为矩阵A对应的**n阶行列式**, 它代表一个**数**, 简记为$|A|$, 或$\det(A)$. 称a_{ij}为n阶行列式的**元素**.

§3.1 行列式的定义

注 行列式与矩阵的区别:

外观上，行列式是正方形，两边是用两条竖线夹起来的；而矩阵可以是矩形，两边是用括号括起来的.

行列式形式上是一个数表，但实质上是一个数；而矩阵形式上是一个数表，实质上也是一个数表.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

§3.1 行列式的定义

定义 在n阶行列式$\det(A)$中，去掉元素a_{ij}所在的行和所在的列，得到一个$n-1$阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称为$\det(A)$中元素a_{ij}或位置(i,j)的**余子式**，记为M_{ij}.

§3.1 行列式的定义

定义3.1.2 n阶($n>1$)行列式$\det(A)$所代表的**数**由以下递归方式计算:

(1) 当$n=2$时，$\det(A)=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$;

(2) 当$n>2$时，

$$\det(A)=a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+\cdots+(-1)^{1+n}a_{1n}M_{1n}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j}.$$

特别地，一阶行列式记为$|a|$，或$\det(a)$，它所代表的**数**就是a本身.

例3.1.3 求三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

中元素a_{11}, a_{12}, a_{13}的余子式, 并计算此三阶行列式.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

§ 3.1 行列式的定义

例3.1.4 计算n阶**下三角行列式**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

例3.1.5 证明 n阶**斜下三角行列式**

$$D_n = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{(n-1)(n+4)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

斜对角行列式

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{(n-1)(n+4)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

§3.1 行列式的定义

作　　业　P60：1(1)(3)，2(1)(3)

回顾

1. 二阶行列式

2. n 阶行列式

3. 余子式

行列式与矩阵的区别

回顾

定义3.1.2 n阶(n>1)行列式det(A)所代表的数由以下递归方式计算:

(1) 当n=2时, $\det(A)=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$;

(2) 当n>2时,

$$\det(A)=a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+\cdots+(-1)^{1+n}a_{1n}M_{1n}$$
$$=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j}.$$

特别地, 一阶行列式记为$|a|$, 或det(a), 它所代表的数就是a本身.

§3.2 行列式的性质

一、行列式的性质

二、行列式的转置

三、行列式性质的分类

§3.2 行列式的性质

一、行列式的性质

设

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为n阶行列式，M_{ij}为元素a_{ij}或位置(i,j)的余子式.

§3.2 行列式的性质

性质3.2.1 交换行列式 $D_n\,(n\geq 2)$ 任意两行，得到的新行列式与 D_n 互为相反数.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明见附录1.

($n=2$时可由行列式的定义直接验证.)

§3.2 行列式的性质

推论3.2.1 若行列式 $D_n\,(n\geq 2)$ 有两行元素完全相同, 则 D_n 等于零.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

定理3.2.1 行列式 $D_n(n\geq 2)$ 可以按任意一行展开计算，即：对任意 $i\ (1\leq i\leq n)$，有

$$D_n=(-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1}+(-1)^{i+2}a_{i2}M_{i2}+\cdots+(-1)^{i+n}a_{in}M_{in}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}.$$

$$\det(A)=a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+\cdots+(-1)^{1+n}a_{1n}M_{1n}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j}.$$

§ 3.2 行列式的性质

证明思路 把行列式D_n的第i行依次与第i-1行, 第i-2行, …, 第1行进行交换, 得到新的行列式:

$$\tilde{D}_n = \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,j} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,j} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

§ 3.2 行列式的性质

推论3.2.2 对任意$1\le i, j\le n$, 如果$i\ne j$, 则

$$(-1)^{j+1}a_{i1}M_{j1}+(-1)^{j+2}a_{i2}M_{j2}+\cdots+(-1)^{j+n}a_{in}M_{jn}=0.$$

$$D_n=(-1)^{j+1}a_{j1}M_{j1}+(-1)^{j+2}a_{j2}M_{j2}+\cdots+(-1)^{j+n}a_{jn}M_{jn}$$

推论3.2.2 对任意$1\le i, j\le n$, 如果$i\ne j$, 则

$$(-1)^{j+1}a_{i1}M_{j1}+(-1)^{j+2}a_{i2}M_{j2}+\cdots+(-1)^{j+n}a_{in}M_{jn}=0.$$

$$\tilde{D}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=0.$$

CMCS 深圳大学数学与计算科学学院 College of Mathematics and Computational Science

§3.2 行列式的性质

综合起来，我们有：

$$(-1)^{j+1}a_{i1}M_{j1}+(-1)^{j+2}a_{i2}M_{j2}+\cdots+(-1)^{j+n}a_{in}M_{jn}$$

$$=\begin{cases} D_n, & i=j, \\ 0, & i\neq j. \end{cases}$$

补充：$(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为元素a_{ij}或位置(i,j)的**代数余子式**，记为 A_{ij}，即

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}.$$

展开定理

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases} D_n, & i=j, \\ 0, & i\neq j. \end{cases}$$

§3.2 行列式的性质

性质3.2.2 行列式某行元素的公因子可以提到行列式的符号外，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

注 此性质同时表明：用一个数乘以行列式等于用该数乘以某一行的所有元素，而用一个数乘以矩阵等于用该数乘以矩阵的每个元素.

§3.2 行列式的性质

推论3.2.3 若行列式D_n中某行元素全为零，则 $D_n=0$.

推论3.2.4 若行列式 $D_n\,(n\geq 2)$ 中某两行元素对应成比例，则 $D_n=0$.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

§3.2 行列式的性质

性质3.2.3 若行列式 $D_n(n\geq 2)$ 某行每个元素都可分解成两数的和，即 $a_{ij}=b_{ij}+c_{ij}(j=1,\ldots,n)$，则

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
+
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}.
$$

§3.2 行列式的性质

性质3.2.4(整容手术性质) 将行列式D_n的某一行的任意倍加到另一行上，行列式的值不变.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1}+a_{j1} & ka_{i2}+a_{j2} & \cdots & ka_{in}+a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

在我们计算具体的行列式时，此性质非常有用!

§3.2 行列式的性质

二、行列式的转置

定义 称行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为 D_n 的**转置行列式**，记为 D_n^{T}.

定理3.2.2 $D_n = D_n^{\mathrm{T}}$.

注 此定理表明：对行成立的性质，对列也一样成立，即：行、列"地位"相同.

§ 3.2 行列式的性质

例3.2.1 计算n阶**上三角行列式**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

例3.2.2 计算n阶**斜上三角行列式**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-2} & a_{2,n-1} & \\ a_{31} & \cdots & a_{3,n-2} & & \\ \vdots & ⋰ & & & \\ a_{n1} & & & & \end{vmatrix}.$$

§3.1 行列式的定义

例3.1.5 证明 n阶**斜下三角行列式**

$$D_n = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{(n-1)(n+4)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

§3.2 行列式的性质

三、性质分类

1. 展开定理;
2. 运算性质;
3. 变形性质;
4. 特殊形状行列式的性质.

简化计算

思考: 行列式与矩阵的联系?

1. 与矩阵初等变换的联系?
2. 与矩阵运算的联系?
3. 与初等矩阵的联系?

§ 3.2 行列式的性质

作　　业　P60：3，4(3)

回顾

1. 行列式的转置

2. 行列式的性质

3. 性质分类

简化计算

§3.3 行列式的计算

一、行列式按列展开

二、行列式的计算方法

三、例子

§3.3 行列式的计算

一、行列式按列展开

定理3.3.1 对任意$j(1\le j\le n)$, 有

$$(-1)^{1+j}a_{1i}M_{1j}+(-1)^{2+j}a_{2i}M_{2j}+\cdots+(-1)^{n+j}a_{ni}M_{nj}$$

$$=\begin{cases} D_n, & i=j, \\ 0, & i\ne j. \end{cases}$$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\begin{cases} D_n, & i=j, \\ 0, & i\ne j. \end{cases}$$

§3.3 行列式的计算

二、行列式计算的基本思路

1. 低阶(二阶或三阶)行列式:

直接按照定义进行计算.

2. 高阶行列式:

① 利用性质(特别是整容手术性质)将行列式变形为已学过的特殊形状行列式, 然后利用特殊形状行列式的已知结果进行计算.

② 利用性质(特别是整容手术性质)将行列式的某行或某列变形为有较多零元素, 然后按行或按列展开进行降阶.

§3.3 行列式的计算

三、例子

例3.3.1 计算下面行列式的值:

$$D_4 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & -5 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 6 & -3 \\ 0 & 5 & -2 & 4 \end{vmatrix}.$$

§3.3 行列式的计算

例3.3.2 计算n阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

的值.

§ 3.3 行列式的计算

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (n-1)a+x & (n-1)a+x & (n-1)a+x & \cdots & (n-1)a+x \\ a & x & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

§3.3 行列式的计算

$$=[(n-1)a+x]\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$=[(n-1)a+x]\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$=[(n-1)a+x](x-a)^{n-1}.$$

§3.3 行列式的计算

例3.3.3 计算n阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & x & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x & x & \cdots & 1 & 2 \\ 1 & x & x & \cdots & x & 1 \end{vmatrix}$$

的值.

§ 3.3 行列式的计算

$$D_n=\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&n\\1&1&2&\cdots&n-2&n-1\\1&x&1&\cdots&n-3&n-2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&x&x&\cdots&1&2\\1&x&x&\cdots&x&1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}0&1&1&\cdots&1&1\\0&1-x&1&\cdots&1&1\\0&0&1-x&\cdots&1&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1-x&1\\1&x&x&\cdots&x&1\end{vmatrix}$$

$$
=\begin{vmatrix}
0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\
0 & 1-x & 1 & \cdots & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1-x & \cdots & 1 & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x & 1 \\
1 & x & x & \cdots & x & 1
\end{vmatrix}
$$

$$
=(-1)^{n+1}\begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\
1-x & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\
0 & 1-x & 1 & \cdots & 1 & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x & 1
\end{vmatrix}
$$

§ 3.3 行列式的计算

$$= (-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1-x & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1-x & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n+1}\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1-x & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n+1} x^{n-2}.$$

§3.3 行列式的计算

例3.3.4 证明：若$a_1, a_2, \cdots, a_n$均不为零，则

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_{n-1} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix}$$

$$= a_1 a_2 \cdots a_n \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \right).$$

§3.3 行列式的计算

证明思路 对行列式的阶用数学归纳法.

$n=1$时, 直接验证可知定理成立.

假设$n=k-1$时定理成立.

当$n=k$时, 借助行列式的性质得到递推关系式, 然后利用归纳假设就可得到所需结果.

§3.3 行列式的计算

例3.3.5 计算范德蒙行列式

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

§3.3 行列式的计算

课堂练习 P60-61：5(1), 7(1)

作 业 P60-61：5(2), 6(2), 7(3)

思 考 题 P61：6(1), 7(2)

回顾

行列式计算的基本思路

1. 低阶(二阶或三阶)行列式:

直接按照定义进行计算.

2. 高阶行列式:

① 利用性质(特别是整容手术性质)将行列式变形为已学过的特殊形状行列式, 然后利用特殊形状行列式的已知结果进行计算.

② 利用性质(特别是整容手术性质)将行列式的某行或某列变形为有较多零元素, 然后按行或按列展开进行降阶.

第三章 行列式

§3.4 行列式的应用

一、矩阵可逆的新充要条件

二、求逆矩阵的新方法

三、克莱姆(Cramer)法则

§2.4 矩阵可逆的充要条件

定理2.4.1 设A是一个n阶方阵，则下列条件等价:

(1) A是可逆的;

(2) 齐次线性方程组$AX=O$仅有零解;

(3) A行等价于单位矩阵I（最简型）;

(4) A等于若干初等矩阵的乘积.

§3.4 行列式的应用

一、矩阵可逆的新充要条件

定义3.4.1 设n阶方阵$A=[a_{ij}]_{n\times n}$，M_{ij}为行列式$\det(A)$中元素a_{ij}的余子式，$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$为a_{ij}的**代数余子式**，则称矩阵

$$A^*=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}=\left[A_{ij}\right]^T$$

为A的**伴随矩阵**.

§3.4 行列式的应用

例3.4.1 求矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

的伴随矩阵.

$$A^*=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 & -2 & -2 \\ 12 & 8 & -3 \\ 6 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

§3.4 行列式的应用

引理3.4.1 设矩阵 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$, 则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = \det(\boldsymbol{A})\boldsymbol{I}.$$

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} \det(\boldsymbol{A}), & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

$$a_{1j}A_{1i} + a_{2j}A_{2i} + \cdots + a_{nj}A_{ni} = \begin{cases} \det(\boldsymbol{A}), & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

§3.4 行列式的应用

引理3.4.2 设矩阵A和B为两个n阶方阵，则

$$\det(AB)=\det(A)\det(B).$$

证明见附录2.

推论 设n阶方阵A可逆，则$\det(A)\neq 0$，且

$$\det(A^{-1})=\frac{1}{\det(A)}.$$

§ 3.4 行列式的应用

定理3.4.1 n阶方阵A可逆的充要条件是

$$\det(A) \neq 0.$$

此时,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^{*}.$$

$$AA^{*} = A^{*}A = \det(A)I.$$

$$A\left(\frac{1}{\det(A)} A^{*}\right) = \left(\frac{1}{\det(A)} A^{*}\right) A = I.$$

§3.4 行列式的应用

推论3.4.1 设A是n阶方阵. 若存在n阶方阵B, 使得$AB=I$ (或$BA=I$), 则A可逆, 且$A^{-1}=B$.

§3.4 行列式的应用

二、求逆矩阵的新方法

1. 伴随矩阵法

当 $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$ 时,

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\boldsymbol{A})}\boldsymbol{A}^{*}.$$

§3.4 行列式的应用

例3.4.1 设矩阵

$$A=\begin{bmatrix}2&0&1\\-3&2&0\\0&-2&4\end{bmatrix}.$$

判断A是否可逆, 若可逆, 求A^{-1}.

$$\det(A)=22$$

$$A^*=\begin{bmatrix}8&-2&-2\\12&8&-3\\6&4&4\end{bmatrix}\qquad A^{-1}=\frac{1}{22}\begin{bmatrix}8&-2&-2\\12&8&-3\\6&4&4\end{bmatrix}$$

2. 寻找满足定义中的单方向条件的矩阵

推论3.4.1 设A是n阶方阵. 若存在n阶方阵B, 使得$AB=I$ (或$BA=I$), 则A可逆, 且 $A^{-1}=B$.

例3.4.2 设

$$f(x)=a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1 x+a_0$$

是一个实系数m次多项式. 又设B是一个方阵, 记

$$f(B)=a_m B^m + a_{m-1}B^{m-1}+\cdots+a_1 B+a_0 I.$$

证明: 若$f(B)$是零矩阵且$a_0\neq 0$, 则B可逆. 求B^{-1}.

§3.4 行列式的应用

例3.4.3 设

$$M=\begin{bmatrix} B & O \\ H & C \end{bmatrix}$$

是一分块矩阵，其中B, C分别是s阶和t阶可逆矩阵.
证明M可逆，并求M^{-1}.

$$T=\begin{bmatrix} X & Z \\ W & Y \end{bmatrix} \qquad MT=I$$

$$M^{-1}=\begin{bmatrix} B^{-1} & O \\ -C^{-1}HB^{-1} & C^{-1} \end{bmatrix}$$

三、克莱姆(Cramer)法则

n个方程n个变元的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n. \end{cases} \tag{3.4.5}$$

若令

$$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{n\times n},\ \boldsymbol{X}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\beta}=(b_1, b_2, \cdots, b_n)^{\mathrm{T}},$$

则(3.4.5)的矩阵形式为

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}.$$

§3.4 行列式的应用

定理3.4.2 (Cramer法则) 设A是线性方程组(3.4.5)的系数矩阵，则方程组(3.4.5)有惟一解的充分必要条件是

$$\det(A)\neq 0,$$

此时，这个惟一解为

$$x_j=\frac{\det(A_j)}{\det(A)} \qquad (j=1,\cdots,n).$$

$$A_j=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

§ 3.4 行列式的应用

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\beta} = \frac{1}{\det(\boldsymbol{A})}\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{\beta}$$

$$x_j = \frac{1}{\det(\boldsymbol{A})}(b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \cdots + b_n A_{nj})$$

$$= \frac{1}{\det(\boldsymbol{A})}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\det(\boldsymbol{A}_j)}{\det(\boldsymbol{A})} \qquad (j = 1, \cdots, n).$$

这是一个公式解！

§3.4 行列式的应用

例3.4.4 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 = -1, \\ -3x_1 + 2x_2 = 2, \\ -2x_2 + 4x_3 = 2. \end{cases}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \qquad \det(\boldsymbol{A}) = 22 \neq 0$$

$$\det(\boldsymbol{A}_1) = -16 \qquad x_1 = -8/11$$

$$\det(\boldsymbol{A}_2) = -2 \qquad x_2 = -1/11$$

$$\det(\boldsymbol{A}_3) = 10 \qquad x_3 = 5/11$$

§3.4 行列式的应用

n个方程n个变元的齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \tag{3.4.7}$$

推论3.4.2 设齐次线性方程组(3.4.7)的系数矩阵为A, 则(3.4.7)只有零解的充分必要条件是

$$\det(A) \neq 0.$$

(3.4.7)有非零解的充分必要条件是

$$\det(A) = 0.$$

§3.4 行列式的应用

课堂练习 P61-62：10，11，13

作　　业 P61-62：8，9，12(1)，14