2024.08.13 不限时测验

如无特殊说明，设 $\mathbb{K}$ 是数域，m, n 是正整数。

1. (a) 对于正实数 $a_1, \ldots, a_n$, 证明

$$n/\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k} \leqslant \Big(\prod_{k=1}^{n} a_k\Big)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k.$$

   (b) 设 $0 < a, b, p < \infty$. 证明：存在只依赖于 p 的正常数 $c = c(p), C = C(p)$, 使得

$$c \cdot (a+b)^p \leqslant a^p + b^p \leqslant C \cdot (a+b)^p.$$

   (c) 设 $a, b > 0, 1 < p, q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 试证明如下形式的 Young 不等式：

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

   提示：可以利用指数或对数函数的凹凸性。

2. 计算

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x \mathrm{e}^t \sin\left((x-t)^2\right)\mathrm{d}t.$$

3. 设实数列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 满足递推关系 $a_{n+1} = f(a_n), n = 1, 2, 3, \ldots$. 试证明：

   (a) 如果 f 单调递增，那么 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 单调。

   (b) 如果 f 单调递减，那么 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 的奇偶子列各自都是单调的，但具有相反的单调性。

4. 给定正数 a_0, b_0, 然后按照递推式

$$a_n = (a_{n-1} + b_{n-1})/2, b_n = (a_{n-1}b_{n-1})^{1/2}, n = 1, 2, 3, \ldots$$

   定义数列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty}$. 证明 $(a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty}$ 收敛到同一个极限值。

5. 设有正数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, 试证明

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \liminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}.$$

6. 设非负值函数 $f \in C[a,b]$. 试证明

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\int_a^b f(x)^n\,\mathrm{d}x\Big)^{1/n} = \max_{a\leqslant x\leqslant b} f(x).$$

7. 设有映射 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. 试证明：$f$ 连续当且仅当对于任意 $\mathbb{R}^m$ 中的开集 O, 都有 $f^{-1}(O)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集。

8. 设 $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. 证明：$\operatorname{rank} A \leqslant r$ 当且仅当存在 $u \in M_{m\times r}(\mathbb{K}), v \in M_{r\times n}(\mathbb{K})$, 使得 $A = uv$.

9. 设 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. 证明：如果 $\operatorname{rank} A^m = \operatorname{rank} A^{m+1}$, 那么 $\left(\operatorname{rank} A^k\right)_{k=m}^{\infty}$ 为常值序列。

10. 设 $A \in M_{4\times 4}(\mathbb{K})$.
    (a) 如果 $\operatorname{tr} A^k = k, k = 1,2,3,4$, 求 $\det A$.
    (b) 试证明：$A^4 = 0$ 等价于 $\operatorname{tr} A^k = 0, k = 1,2,3,4$.

11. 设 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, $\operatorname{rank} A = 1$, $\operatorname{tr} A = t$.
    (a) 试表达出 A 的特征多项式。
    (b) 说明 A 在 $\mathbb{K}$ 上一定有 Jordan 标准形（即一定相似于某个 Jordan 形矩阵），并讨论 A 在 $\mathbb{K}$ 上的 Jordan 标准形。
    (c) 试给出 A 的最小多项式。

12. 设 $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ 没有公共特征值。试证明：
    (a) 如果某个 $X \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ 满足 $AX = XB$, 那么对于任何 $f(x) \in \mathbb{C}[x]$, 都有
    $$f(A)X = Xf(B).$$
    (b) 对于任何 $C \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, 关于 X 的矩阵方程
    $$AX - XB = C$$
    都在 $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ 中存在唯一解。

13. 设 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. 记 $C(A) := \{B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})\colon AB = BA\}, \mathbb{K}[A] := \{f(A) \in M_{n\times n}(\mathbb{K})\colon f(x) \in \mathbb{K}[x]\}$. A 的特征多项式设为 $f(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda_{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 \in \mathbb{K}[\lambda]$, 最小多项式设为 $m(\lambda) = \lambda^s + b_{s-1}\lambda_{s-1} + \cdots + b_1\lambda + b_0 \in \mathbb{K}[\lambda]$, 其中 s 是一个正整数。
    (a) 验证 $C(A)$ 和 $\mathbb{K}[A]$ 都是 $\mathbb{K}$ 上的线性空间。
    (b) 求 $\dim \mathbb{K}[A]$.
    (c) 证明：如果 $m(\lambda)$ 在 $\mathbb{K}[\lambda]$ 上不可约，那么 $\mathbb{K}[A]$ 中的任一非零矩阵都可逆。