

## 2024.07.04 数学分析开局测试

约定  $\mathbb{N}$  表示所有非负整数的集合,  $\mathbb{N}_+$  表示所有正整数的集合。设  $n, m \in \mathbb{N}_+$ , 对于可微映射  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $f'$  表示  $f$  的 Jacobi 矩阵。实值函数  $f$  在区间  $I$  上是凸函数, 意思是对于任何  $x, y \in I, \lambda + \mu = 1, \lambda, \mu \geq 0$ , 都有  $f(\lambda x + \mu y) \leq \lambda f(x) + \mu f(y)$ .

1. 叙述实数系基本定理。
2. 证明 Toeplitz 定理: 设有一族非负实数  $\{t_{n,k}\}_{k=1}^n$  满足  $\sum_{k=1}^n t_{n,k} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} t_{n,k} = 0$ , 另有实数列  $\{a_n\}_{n=1}^\infty$  收敛到  $a \in \mathbb{R}$ , 那么就有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n t_{n,k} a_k = a.$$

3. 设实数列  $\{a_n\}_{n=1}^\infty$  的每一项都大于 0, 试比较

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

的大小关系。

4. 有限区间上的一致连续函数是否一定有界?
5. 设  $-\infty < a < b < \infty, f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  为凸函数。试证明, 如果存在  $c \in (a, b)$  使得  $f(a) = f(c) = f(b)$ , 那么  $f$  恒取常值。
6. 设  $I$  是一个开区间,  $f$  是  $I$  上的凸函数。试证明:
  - (a) 在  $I$  上存在递增的左导函数  $f'_-$  和右导函数  $f'_+$ , 并且在  $I$  上逐点地有  $f'_- \leq f'_+$ .
  - (b) 设  $x \in I$ . 若  $f'_+$  在  $x$  处左连续, 或  $f'_-$  在  $x$  处右连续, 则  $f$  在  $x$  处可导。
  - (c)  $f$  在  $I$  上局部 Lipschitz, 即在任何  $I$  的紧子集上 Lipschitz.
7. Dirichlet 函数和 Riemann 函数在  $[0, 1]$  上的 Riemann 可积性如何, Lebesgue 可积性又如何? 可积的情况中, 积分值分别是多少?
8. 导出带积分余项的 Taylor 公式: 设  $n \in \mathbb{N}, f \in C^{n+1}(a, b), x_0 \in (a, b)$ , 则有

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt.$$

9. 对于  $n \in \mathbb{N}$  计算积分

$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^n dx.$$

10. 计算极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)! \sqrt{n}}.$$

11. 写出 Young 不等式、Hölder 不等式和 Minkowski 不等式。

12. 设  $n \in \mathbb{N}_+$ . 给出  $\mathbb{R}^n$  中开集、闭集、导集、闭包、完全集、紧集、列紧集、连通集、道路连通集、凸集、区域的定义。

13. 设  $n \in \mathbb{N}_+$ . 在  $\mathbb{R}^n$  的所有子集中, 是否存在既不是开集又不是闭集的集合? 是否存在既开又闭的集合? 有哪些既开又闭的集合?

14. 设  $n \in \mathbb{N}_+$ .  $\mathbb{R}^n$  中的区域是否一定是道路连通的?

15. 设  $n, m \in \mathbb{N}_+$ . 问:  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  的连续映射

(a) 是否一定把开集映成开集?

(b) 是否一定把闭集映成闭集?

(c) 是否一定把紧集映成紧集?

(d) 是否一定把连通集映成连通集?

16. 设  $n, m \in \mathbb{N}_+$ . 试用开集来刻画  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  的连续映射。又问:  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  的 Lebesgue 可测映射有没有类似的刻画?

17. 设

$$\begin{cases} u^2 - v \cos xy + w^2 = 0, \\ u^2 + v^2 - \sin xy + 2w^2 = 2, \\ uv - (\sin x)(\cos y) + w = 0. \end{cases}$$

在  $(x, y) = (\pi/2, 0)$ ,  $(u, v, w) = (1, 1, 0)$  处计算 Jacobi 矩阵

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y)}.$$

18. (多元函数的中值定理) 设  $n \in \mathbb{N}_+$ , 凸区域  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ , 函数  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  可微, 则对任何两点  $a, b \in D$ , 在这两点的连线上存在一点  $\xi$ , 使得

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

19. (拟微分平均值定理) 设  $n, m \in \mathbb{N}_+$ , 凸区域  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ , 函数  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$  可微, 则对任何两点  $a, b \in D$ , 在这两点的连线上存在一点  $\xi$ , 使得

$$\|f(b) - f(a)\|_2 = \|f'(\xi)\|_F \|b - a\|_2,$$

其中  $\|\cdot\|_2$  表示列向量的 2 范数 (也即由 Euclid 空间上的标准内积诱导的范数),  $\|\cdot\|_F$  表示矩阵的 Frobenius 范数。

20. 叙述 Newton-Leibniz 公式、Green 公式、Gauss 公式和 Stokes 公式。对于有限区间上的 Lebesgue 积分，Newton-Leibniz 公式何时成立？
21. 尽可能多地说出数项级数判敛的方法。
22. 尽可能多地说出积分与极限换序的条件。
23. 设有连续函数列  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . 试证明，如果  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  在  $[a, b)$  内逐点收敛，但  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(b)$  发散，那么  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  在  $[a, b)$  上不可能一致收敛。
24. 说说 Fourier 系数定义式的思想。
25. 证明 Riemann-Lebesgue 引理：设  $f$  是有限闭区间  $[a, b]$  上的（常义）Riemann 可积实值函数，那么

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \cos(\lambda x) dx = 0.$$