2024.11.18

1. 求和
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)} \qquad \text{和} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(n^2+1)((n+1)^2+1)}.$$

2. 设 $0<x<2\pi,\alpha>0$. 问级数
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^{\alpha}}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{n}$$
绝对收敛、条件收敛还是发散。

3. 重排级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}/n$, 使它发散。

4. 设 $a_n\leqslant b_n\leqslant c_n(n=1,2,\dots)$, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ 同敛散，能否通过其敛散性断言 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 的敛散性？

5. 证明级数的 Hölder 不等式和 Minkowski 不等式。（原题是指数为 2 的。）

6. 把 $\ln x$ 展开成 $(x-1)/(x+1)$ 的幂级数。

7. 以周期 2π 对 $\operatorname{sgn}\circ\cos$ 进行 Fourier 展开。

8. 分别在 $[-\pi,\pi]$ 和 $[0,2\pi)$ 上对 $x\mapsto x^2$ 进行 Fourier 展开，并求和 $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-2}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-4}$.

9. 计算
$$\lim_{x\to 0,y\to 0}(x+y)\sin((x^2+y^2)^{-1}) \qquad \text{和} \qquad \lim_{x\to 0,y\to 0}(\exp(x)-\exp(y))\csc(xy).$$

10. 求曲面 $z=(x^2+y^2)/4$ 与平面 $y=4$ 的交线在 $x=2$ 处的切线与 Ox 轴的夹角。

11. 叙述 $\mathbb{R}^n$ 中区域的定义。设 D 是 $\mathbb{R}^2$ 上的区域。
    (a) 二元函数 f 满足 $f_1'=0$ 在 D 上恒成立，问 f 的取值是否只由第二变元（自变元的第二个分量）决定。
    (b) 二元函数 f 的 Jacobi 矩阵在 D 上恒取 0，问 f 在 D 上是否恒取常值。
    (c) 对以上两问，如果回答为“不能”，试附加一充分条件使之成立。

12. 设 $b>a>0$, 计算积分
$$\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}\sin\Big(\ln\big(\frac{1}{x}\big)\Big)\,\mathrm{d}x \qquad \text{和} \qquad \int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}\cos\Big(\ln\big(\frac{1}{x}\big)\Big)\,\mathrm{d}x.$$

13. 设 n 取正整数，$a>0$, 计算

$$\int_0^{\infty}(x^2+a^2)^{-n}\,\mathrm{d}x.$$

14. 计算

$$\int_{x^2+y^2=1}(x^2+2y^2)^{1/2}\,\mathrm{d}s.$$

15. 计算

$$\int_L xyz\,\mathrm{d}z,$$

其中 L 是单位球面与 $y=z$ 相交的园，其方向按曲线依次经过第 1,2,7,8 卦限。

16. 计算

$$\lim_{r\to+\infty}\int_{x^2+y^2=r^2}\frac{ydx-xdy}{(x^2+xy+y^2)^2}.$$

17. 设二元函数 u,v 在由封闭的光滑曲线 L 所围的区域 D 具有 2 阶连续偏导数，证明

$$\iint_D v\Delta u\,\mathrm{d}\sigma=-\iint_D(\nabla u)\cdot(\nabla v)\,\mathrm{d}\sigma+\oint_L v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\,\mathrm{d}s$$

和

$$\iint_D(u\Delta v-v\Delta u)\,\mathrm{d}\sigma=\oint_L\left(u\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}-v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)\mathrm{d}s,$$

其中 $\mathbf{n}$ 是 L 的单位外法向量。

18. 设 $\det\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{pmatrix}\neq 0$, $h_i>0(i=1,2,3)$, 求由平面 $a_ix+b_iy+c_iz=\pm h_i(i=1,2,3)$ 所界平行六面体的体积。

19.（不是原题）设平面直角右手坐标系 xOy 上有一位于 $(0,1)$ 处的电荷量为 q 的带正电的点电荷 A，并在 $([1,\infty)\times\{0\})\cup((-\infty,-1]\times\{0\})$ 上带正电，其他地方不带电，$(x,0)$ 处电荷的线密度等于 $1/|x|(|x|\geqslant 1)$, 求 A 所受的 Coulomb（库仑）力。
两个电荷（带电量分别设为 Q,q）之间的 Coulomb 力总是沿二者的连线方向，遵循“同性相斥、异性相吸”的规律，大小等于 $kQqr^{-2}$, 其中 k 是正常量，r 为两电荷的距离。

20. 设球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant 2x$ 上各点的密度等于该点到坐标原点的距离，求该球体的质量、质心和形心。