2024.11.14

如无特别说明，所有函数均取实值。

1. 设有正数列 $(a_n)_n$, 且存在 $\alpha > 0$ 使得 $\sum_n a_n^\alpha$ 收敛，问：$\sum_n a_n/n$ 是否一定收敛？
2. 设 $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, 存在函数 $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 作为函数列 $\left\{f^{(n)}\right\}_n$ 在任何有限区间上的一致极限，求解 φ.
3. 求和 $\sum_{n=1}^\infty \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right) x^n$.
4. Maclaurin 展开 $x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.
5. 用幂级数的乘法说明 $\exp(x+y) = (\exp x)(\exp y)$.
6. 求 S 在 $\mathbb{R}^2$ 中的导集 S' 与闭包 $\overline{S}$, 其中 $S := \{(x, \sin(1/x)) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 < x \leqslant 1\}$.
   $\overline{S}$ 是赫赫有名的“拓扑学家的正弦曲线”，试说明它在 $\mathbb{R}^2$ 中是连通但不道路连通的。
7. 设 $f \in C([a,b] \times [c,d])$，函数列 $(\varphi_n)_n$ 于 $[a,b]$ 上一致收敛，且在 $[a,b]$ 上逐点成立 $c \leqslant \varphi_n \leqslant d$. 试证明 $\left\{x \mapsto f(x, \varphi_n(x))\right\}_n$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛。
8. 证明：$\mathbb{R}^n$ 中的有界开集 G 上的一致连续函数一定可以延拓成 $\overline{G}$ 上的一致连续函数。
9. 证明单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 和锥面 $x^2+y^2=cz^2$ 正交（在任何交点处的切平面相互垂直），其中 $c>0$ 是常数。试几何地解释这个现象。
10. 用尽可能多的方法解 $\sup_A f$ 和 $\inf_A f$, 其中 $A\colon x+y-1=0$.
11. 用尽可能多的方法解 n 元实二次型在 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球面（l_2 范数意义下）上的最值。计算 $x^2+xy+y^2 \leqslant 1$ 的面积。
12. 计算 $\int_L \sqrt{2y^2+z^2}\,\mathrm{d}s$, 其中 L 是 $\mathbb{R}^3$ 中 $x=y$ 和 $x^2+y^2+z^2=a^2 (a>0)$ 的交线.
13. 在平面直角右手坐标系中，原点处有一质量为 M 的质点 A，并有一个质量为 m 的质点 B 沿 $\{(x,y) \in [0,\infty)^2 \colon (x/a)^2+(y/b)^2=1\}$ 从 $(a,0)$ 无折返地运动到 $(0,b)$，问在这一过程中 A 对 B 的万有引力所做的功。A 对 B 的万有引力的方向为平面向量 $\overrightarrow{BA}$ 的方向，大小为 $GMmr^{-2}$, 其中 G 是正常量，r 是 A 与 B 之间的距离。
14. 计算 $\{(a(\cos t)^3, a(\sin t)^3) \in \mathbb{R}^2\}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上所围图形的面积，其中 $a>0$。
15. 求边长为 a、密度均匀（设为 ρ）的立方体关于其任意棱边的转动惯量。
16. 已知 $a + \sqrt{a^2-y^2} = y\mathrm{e}^u$, $au = x + \sqrt{a^2-y^2}$, $a>0$, 求 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2$.

17. 把偏微分方程 $(x+y)z_x-(x-y)z_y=0$ 换成以 u,v 为自变量的形式，其中 $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$, $v=\arctan(y/x)$.

18. 求曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 的切平面，使它平行于平面 $x+4y+6z=0$.

19. 计算 $\iint_D xy^2\,\mathrm{d}\sigma$, 其中 D 是由 $y^2=4x$, $x-y=1$, $x+y=1$ 所围成的 $\mathbb{R}^2$ 中的有界区域。

20. 计算 $\iiint_V \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{(1+x+y+z)^3}$, 其中 V 是由 $x+y+z=1$ 与三个坐标面所围成的体积。