2024.11.25

0. 遗留问题。

1. 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$ 是 Lebesgue 可测集。是否存在 $L(E)$ 的可数子集 A，使得对于任何 $f \in L(E)$，都存在 A 中的函数列 $(f_n)_n$ 满足 $\lim_n \int_E |f_n - f| = 0$?

2. 设 $f \in L(0,1)$ 使得 $\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ 对任何非负整数 n 都成立，证明 $f = 0$ $a.e.$ 于 (0,1).

3. 求解所有的实数 a, 使得 $Z[a] := \{ma + n \colon m, n \in \mathbb{Z}\}$ 稠于 $\mathbb{R}$.

4. 证明
$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} < \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}} < \frac{\pi}{2}.$$

5. 求和
$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{n^2}{2^n}.$$

6. 设 $(a_n)_{n\geqslant 1} \subset (0,\infty)$, $\alpha \in (1,\infty)$, 并记 $S_n := \sum_{k=1}^n a_k$, 证明 $\sum_{n\geqslant 1} a_n S_n^{-\alpha}$ 收敛。

7. 设 $(a_n)_n$ 是有界实数列，且 $\lim_n (a_{n+1} - a_n) = 0$, 证明 $(a_n)_n$ 的极限点构成闭区间。

8. 求心形线 $r = a(1 + \cos\theta), a > 0$ 的切线与切点向径的夹角。

9. 证明：在 $\mathbb{R}^n$（标准内积）中存在非零的线性变换 φ, 使得 $\varphi(x) \perp x, \forall x \in \mathbb{R}^n$; 但是在 $\mathbb{C}^n$（标准内积）中不存在这样的线性变换。

10. 设 A, B 是同阶实对称正定矩阵，问 AB 的特征值（在 $\mathbb{C}$ 上考虑）是否一定都是正数。

11. 求如下 $n(n > 1)$ 阶的行列式的值：
$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & b \\ b & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{vmatrix}.$$

12. 设 $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, $a, b \in \mathbb{C}$, $AB - BA = aA + bB$, 证明 A, B 可以同时相似上三角化。

13. 证明矩阵特征值的 Gerschgorin 圆盘第一定理：$A=(a_{ij})_{i,j=1}^n\in M_n(\mathbb{C})$ 的所有特征值都属于

$$\bigcup_{k=1}^{n}\Big\{z\in\mathbb{C}\colon |z-a_{kk}|\leqslant\sum_{i\neq k}|a_{ik}|\Big\}.$$

14. 设 $\mathbb{K}$ 是某一数域，$f(x),g(x)$ 是 $\mathbb{K}[x]$ 中的互素多项式，$A\in M_n(\mathbb{K})$, 证明 $f(A)g(A)=0$ 当且仅当 $\operatorname{rank} f(A)+\operatorname{rank} g(A)=n$.