2024.11.28

1. 固定 $x>0$, 给出
$$a_n := \prod_{k=1}^{n}(x+k)$$
在 $n\to\infty$ 时的一个渐进估计，并判敛
$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{n!}{a_n}.$$

2. 给出
$$a_n := \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2n+1}$$
在 $n\to\infty$ 时的一个渐进估计，并判敛
$$\sum_{n\geqslant 1} a_n.$$

3. 设连续函数 $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 以 p 为周期，证明
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f = \frac{1}{p}\int_0^p f.$$

4. 计算
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ -3 & x & 3 \\ -2 & -3 & x+1 \end{vmatrix}.$$

5. 将正切函数 Maclaurin 展开到 5 次项，带 Peano 余项即可。

6. 讨论如下 $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 的函数的连续性：
$$(x,y)\mapsto\begin{cases} y^2\ln(x^2+y^2), & x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & x^2+y^2=0. \end{cases}\quad \text{和}\quad (x,y)\mapsto \exp\bigl(-\frac{x}{y}\bigr).$$

7. 设 $r(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 求
$$\mathbf{grad}\, r \qquad \text{和} \qquad \mathbf{grad}\,\frac{1}{r}.$$

8. 证明
$$\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ y\mapsto\int_0^1 \operatorname{sgn}(x-y)\,\mathrm{d}x$$
在 $\mathbb{R}$ 上连续。

9. 计算

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x} \frac{1-\cos(xy)}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

10. 求

$$\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \int_1^3 (a+bx-x^2)^2\,\mathrm{d}x.$$

11. 求质量分布均匀的摆线

$$x=t-\sin t,\ y=1-\cos t \quad (0\leqslant t\leqslant \pi)$$

的质心。

12. 设 $a>0, k>0$, 对于 $L\colon r=a\mathrm{e}^{k\theta}, r\leqslant a$, 计算

$$\int_L x\,\mathrm{d}s.$$

13. 对于 $V\colon x\geqslant 0, y\geqslant 0, 0\leqslant z\leqslant 1, x^2+y^2\leqslant 1$, 计算

$$\iiint_V xy+yz+zx\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

14. 设 $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是连续函数，$D:=\{(\theta,\varphi)\colon 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, 0\leqslant\varphi\leqslant\pi\}$, m,n,p 不同时为 0, 证明

$$\iint_D f(m\sin\varphi\cos\theta+n\sin\varphi\sin\theta+p\cos\varphi)\sin\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi=2\pi\int_{-1}^{1} f\big(u\sqrt{m^2+n^2+p^2}\big)\,\mathrm{d}u.$$

15. 记 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, V 是 $\mathbb{R}^3$ 中的区域，$\boldsymbol{n}$ 是 ∂V 的外法向量，证明

$$\iiint_V \frac{1}{r}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\oiint_{\partial V}\cos(\widehat{\boldsymbol{r},\boldsymbol{n}})\,\mathrm{d}S.$$

16. 设 $f, f_n (n\in\mathbb{N})$ 都是可测集 E 上的几乎处处有限的函数，并且 $mE(f_n\neq f)<2^{-n}$, 试证明在 $n\to\infty$ 时 f_n 几乎处处收敛到 f.

17. 设 $f\in L(\mathbb{R})$ 且 $\int_{\mathbb{R}} f\neq 0$, a 是一个确定的实数，证明

$$x\mapsto \frac{1}{2x}\int_{a-x}^{a+x} f \quad \notin L(\mathbb{R}).$$

18. 设 $f\in L(\mathbb{R})$, $a>0$，证明

$$\lim_{n\to\infty} n^{-a} f(nx)=0,\quad \text{a.e. } x\in\mathbb{R}.$$

19. 已知曲面 $2x^2+ay^2+2z^2+2xy+2xz+2yz=3$ 经正交变换可化为椭球面 $u^2+v^2+bw^2=3$, 求 a,b 的值。

20. 证明复矩阵的 Jordan-Chevalley 分解：任何 $A \in M_n(\mathbb{C})$ 都可以分解为 $B+C$ 的形式，其中

    (a) B 可对角化，

    (b) C 幂零，

    (c) $BC=CB$,

    (d) B,C 都是 A 的多项式，

    并且满足 (a)-(c) 的分解是唯一的。