2024.11.25

- 0. 遗留问题。
- 1. 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$ 是 Lebesgue 可测集。是否存在 L(E) 的可数子集 A,使得对于任何 $f \in L(E)$,都存在 A 中的函数列 $(f_n)_n$ 满足 $\lim_n \int_E |f_n f| = 0$?
- 2. 设 $f \in L(0,1)$ 使得 $\int_0^1 x^n f(x) dx = 0$ 对任何非负整数 n 都成立, 证明 f = 0 a.e. 于 (0,1).
- 3. 求解所有的实数 a, 使得 $Z[a] := \{ma + n : m, n \in \mathbb{Z}\}$ 稠于 \mathbb{R} .
- 4. 证明

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} < \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^4}} < \frac{\pi}{2}.$$

5. 求和

$$\sum_{n\geq 1} \frac{n^2}{2^n}.$$

- 6. 设 $(a_n)_{n\geqslant 1}\subset (0,\infty),\ \alpha\in (1,\infty),\$ 并记 $S_n:=\sum_{k=1}^n a_k,\$ 证明 $\sum_{n\geqslant 1}a_nS_n^{-\alpha}$ 收敛。
- 7. 设 $(a_n)_n$ 是有界实数列,且 $\lim_n (a_{n+1} a_n) = 0$, 证明 $(a_n)_n$ 的极限点构成闭区间。
- 8. 求心形线 $r = a(1 + \cos \theta), a > 0$ 的切线与切点向径的夹角。
- 9. 证明:在 \mathbb{R}^n (标准内积)中存在非零的线性变换 φ , 使得 $varphi(x) \perp x, \forall x \in \mathbb{R}^n$; 但是在 \mathbb{C}^n (标准内积)中不存在这样的线性变换。
- 10. 设 A, B 是同阶实对称正定矩阵,问 AB 的特征值(在 \mathbb{C} 上考虑)是否一定都是正数。
- 11. 求如下 n(n > 1) 阶的行列式的值:

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & b \\ b & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{vmatrix}.$$

12. 设 $A, B \in M_n(\mathbb{C}), a, b \in \mathbb{C}, AB - BA = aA + bB$, 证明 A, B 可以同时相似上三角化。

13. 证明矩阵特征值的 Gerschgorin 圆盘第一定理: $A=(a_{ij})_{i,j=1}^n\in M_n(\mathbb{C})$ 的所有特征值都属于

$$\bigcup_{k=1}^{n} \left\{ z \in \mathbb{C} \colon |z - a_{kk}| \leqslant \sum_{i \neq k} |a_{ik}| \right\}.$$

14. 设 \mathbb{K} 是某一数域, f(x),g(x) 是 $\mathbb{K}[x]$ 中的互素多项式, $A\in M_n(\mathbb{K})$,证明 f(A)g(A)=0 当且仅当 $\mathrm{rank}\, f(A)+\mathrm{rank}\, g(A)=n$.