2024.07.04 数学分析开局测试

约定 $\mathbb{N}$ 表示所有非负整数的集合，$\mathbb{N}_+$ 表示所有正整数的集合。设 $n, m \in \mathbb{N}_+$, 对于可微映射 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, f' 表示 f 的 Jacobi 矩阵。实值函数 f 在区间 I 上是凸函数，意思是对于任何 $x, y \in I, \lambda + \mu = 1, \lambda, \mu \geqslant 0$, 都有 $f(\lambda x + \mu y) \leqslant \lambda f(x) + \mu f(y)$.

1. 叙述实数系基本定理。

2. 证明 Toeplitz 定理：设有一族非负实数 $\{\{t_{n,k}\}_{k=1}^n\}_{n=1}^\infty$ 满足 $\sum_{k=1}^n t_{n,k} = 1, \lim_{n\to\infty} t_{n,k} = 0$, 另有实数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ 收敛到 $a \in \mathbb{R}$, 那么就有
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n t_{n,k} a_k = a.$$

3. 设实数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ 的每一项都大于 0, 试比较
$$\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}, \qquad \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}, \qquad \liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}, \qquad \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$
的大小关系。

4. 有限区间上的一致连续函数是否一定有界？

5. 设 $-\infty < a < b < \infty$, $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ 为凸函数。试证明，如果存在 $c \in (a, b)$ 使得 $f(a) = f(c) = f(b)$, 那么 f 恒取常值。

6. Dirichlet 函数和 Riemann 函数在 $[0, 1]$ 上的 Riemann 可积性如何，Lebesgue 可积性又如何？可积的情况中，积分值分别是多少？

7. 导出带积分余项的 Taylor 公式：设 $n \in \mathbb{N}$, $f \in C^{n+1}(a, b)$, $x_0 \in (a, b)$, 则有
$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

8. 对于 $n \in \mathbb{N}$ 计算积分
$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^n \,\mathrm{d}x.$$

9. 计算极限
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n}}.$$

10. 写出 Young 不等式、Hölder 不等式和 Minkowski 不等式。

11. 设 $n \in \mathbb{N}_+$. 给出 $\mathbb{R}^n$ 中开集、闭集、导集、闭包、完全集、紧集、列紧集、连通集、道路连通集、凸集、区域的定义。

12. 设 $n \in \mathbb{N}_+$. 在 $\mathbb{R}^n$ 的所有子集中，是否存在既不是开集又不是闭集的集合？是否存在既开又闭的集合？有哪些既开又闭的集合？这体现了 $\mathbb{R}^n$ 的什么性质？

13. 设 $n \in \mathbb{N}_+$. $\mathbb{R}^n$ 中的区域是否一定是道路连通的？

14. 设 $n, m \in \mathbb{N}_+$. 问：$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 的连续映射
    (a) 是否一定把开集映成开集？
    (b) 是否一定把闭集映成闭集？
    (c) 是否一定把紧集映成紧集？
    (d) 是否一定把连通集映成连通集？

15. 设 $n, m \in \mathbb{N}_+$. 试用开集来刻画 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 的连续映射。又问：$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 的 Lebesgue 可测映射有没有类似的刻画？

16. 设

$$\begin{cases} u^2 - v\cos xy + w^2 = 0, \\ u^2 + v^2 - \sin xy + 2w^2 = 2, \\ uv - (\sin x)(\cos y) + w = 0. \end{cases}$$

在 $(x, y) = (\pi/2, 0), (u, v, w) = (1, 1, 0)$ 处计算 Jacobi 矩阵

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y)}.$$

17.（多元函数的中值定理）设 $n \in \mathbb{N}_+$, 凸区域 $D \subseteq \mathbb{R}^n$, 函数 $f \colon D \to \mathbb{R}$ 可微，则对任何两点 $a, b \in D$, 在这两点的连线上存在一点 ξ, 使得

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

18.（拟微分平均值定理）设 $n, m \in \mathbb{N}_+$, 凸区域 $D \subseteq \mathbb{R}^n$, 函数 $f \colon D \to \mathbb{R}^m$ 可微，则对任何两点 $a, b \in D$, 在这两点的连线上存在一点 ξ, 使得

$$\|f(b) - f(a)\|_2 \leqslant \|f'(\xi)\|_F \|(b - a)\|_2,$$

其中 $\|\cdot\|_2$ 表示列向量的 2 范数（也即由 Euclid 空间上的标准内积诱导的范数），$\|\cdot\|_F$ 表示矩阵的 Frobenius 范数。

19. 叙述 Newton-Leibniz 公式、Green 公式、Gauss 公式和 Stokes 公式。对于有限区间上的 Lebesgue 积分，Newton-Leibniz 公式何时成立？

20. 尽可能多地说出数项级数判敛的方法。

21. 尽可能多地说出判断函数项级数是否一致收敛的办法。

22. 尽可能多地说出积分与极限换序的条件，产生的结果是等式或者不等式都可以。

23. 设有函数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C[a,b],\mathbb{R}$. 试证明，如果 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[a,b)$ 内逐点收敛，但 $\{f_n(b)\}_{n=1}^{\infty}$ 发散，那么 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[a,b)$ 上不可能一致收敛。

24. 说说 Fourier 系数定义式的思想。

25. 证明 Riemann-Lebesgue 引理（的一部分）：设 f 是有限闭区间 $[a,b]$ 上的（常义）Riemann 可积实值函数，那么

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(x) \cos(\lambda x) \, \mathrm{d}x = 0.$$

2024.07.06 数学分析第一章保温

1. 设 $\{a_n\}_n$ 是等差数列，$\{b_n\}_n$ 是等比数列。计算

$$\sum_{k=1}^{n} a_k, \qquad \sum_{k=1}^{n} b_k, \qquad \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

2. 设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是实数列，a 是一个实数。证明下述两条的等价性。

   (a) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+, \forall n > N, |a_n - a| < \varepsilon.$

   (b) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+, \forall n > N, |a_n - a| < \varepsilon/2.$

3. 说明下述数列的单调性。

$$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}, \qquad \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}, \qquad \left\{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right\}_{n=0}^{\infty}.$$

4. 证明实数列的 Cauchy 收敛准则。

5. (a) 给出排列数和组合数的排列组合解释，并分别说明其计算公式。

   (b) 只用一个组合数来表达 $\binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m}$.

   (c) 写出 $(1+x)^n$ 的二项展开式，其中 x 取实值。

(d) 计算

$$\sum_{0\leqslant k\leqslant n}\binom{n}{k},\qquad \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ 2\mid k}}\binom{n}{k},\qquad \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ 2\nmid k}}\binom{n}{k}.$$

提示：可适当利用上一问的结果。

6. 写出立方差公式。

7. (a) 设 E 是 $\mathbb{R}$ 的一个非空子集。证明：或者 $\inf E\in E$，或者存在严格减序列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq E$ 满足 $\lim_{n\to\infty}a_n=\inf E$，这二者总是至少有一个成立。

   (b) 证明自然数集的任何非空子集都有最小值。

8. 设 $a\in\mathbb{R}$. 证明：数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛到 a 当且仅当它的上下极限都是 a.

9. 设有数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{R},\{b_n\}_{n=1}^{\infty}\subset[0,\infty)$，且 $a^*:=\limsup_{n\to\infty}a_n\in\mathbb{R}$，$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛到一个有限实数 b. 证明

$$\limsup_{n\to\infty}a_nb_n=a^*b.$$

10. 说明 Cauchy 命题的逆命题一般不成立，即对于实数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$，不能从 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k=a\in[-\infty,+\infty]$ 推知 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$.

11. 设有实数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. 比较下面四式的大小关系并证明。

$$\liminf_{n\to\infty}a_n,\qquad \limsup_{n\to\infty}a_n,\qquad \liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k,\qquad \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k.$$

12. 设实数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的每一项都大于 0. 比较下面四式的大小关系并证明。

$$\liminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n},\qquad \limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n},\qquad \liminf_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n},\qquad \limsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}.$$