2024.07.06 数学分析第一章保温

1. 设 $\{a_n\}_n$ 是等差数列，$\{b_n\}_n$ 是等比数列。计算

$$\sum_{k=1}^{n} a_k, \qquad \sum_{k=1}^{n} b_k, \qquad \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

2. 设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是实数列，a 是一个实数。证明下述两条的等价性。

   (a) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+, \forall n > N, |a_n - a| < \varepsilon.$

   (b) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+, \forall n > N, |a_n - a| < \varepsilon/2.$

3. 说明下述数列的单调性。

$$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}, \qquad \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}, \qquad \left\{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right\}_{n=0}^{\infty}.$$

4. 证明实数列的 Cauchy 收敛准则。

5. (a) 给出排列数和组合数的排列组合解释，并分别说明其计算公式。

   (b) 只用一个组合数来表达 $\binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m}$.

   (c) 写出 $(1+x)^n$ 的二项展开式，其中 x 取实值。

   (d) 计算

$$\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \binom{n}{k}, \qquad \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ 2 \mid k}} \binom{n}{k}, \qquad \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ 2 \nmid k}} \binom{n}{k}.$$

   提示：可适当利用上一问的结果。

6. 写出立方差公式。

7. (a) 设 E 是 $\mathbb{R}$ 的一个非空子集。证明：或者 $\inf E \in E$, 或者存在严格减序列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq E$ 满足 $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf E$, 这二者总是至少有一个成立。

   (b) 证明自然数集的任何非空子集都有最小值。

8. 设 $a \in \mathbb{R}$. 证明：数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛到 a 当且仅当它的上下极限都是 a.

9. 设有数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [0,\infty)$, 且 $a^* := \limsup_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛到一个有限实数 b. 证明

$$\limsup_{n\to\infty} a_n b_n = a^* b.$$

10. 说明 Cauchy 命题的逆命题一般不成立,即对于实数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, 不能从 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = a \in [-\infty, +\infty]$ 推知 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

11. 设有实数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. 比较下面四式的大小关系并证明。

$$\liminf_{n\to\infty} a_n, \qquad \limsup_{n\to\infty} a_n, \qquad \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k, \qquad \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k.$$

12. 设实数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的每一项都大于 0. 比较下面四式的大小关系并证明。

$$\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}, \qquad \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}, \qquad \liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}, \qquad \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$