

2024.07.04 数学分析开局测试

约定 \mathbb{N} 表示所有非负整数的集合, \mathbb{N}_+ 表示所有正整数的集合。设 $n, m \in \mathbb{N}_+$, 对于可微映射 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, f' 表示 f 的 Jacobi 矩阵。实值函数 f 在区间 I 上是凸函数, 意思是对于任何 $x, y \in I, \lambda + \mu = 1, \lambda, \mu \geq 0$, 都有 $f(\lambda x + \mu y) \leq \lambda f(x) + \mu f(y)$.

1. 叙述实数系基本定理。

2. 证明 Toeplitz 定理: 设有一族非负实数 $\{t_{n,k}\}_{k=1}^n\}_{n=1}^\infty$ 满足 $\sum_{k=1}^n t_{n,k} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} t_{n,k} = 0$, 另有实数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ 收敛到 $a \in \mathbb{R}$, 那么就有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n t_{n,k} a_k = a.$$

3. 设实数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ 的每一项都大于 0, 试比较

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

的大小关系。

4. 有限区间上的一致连续函数是否一定有界?

5. 设 $-\infty < a < b < \infty$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 为凸函数。试证明, 如果存在 $c \in (a, b)$ 使得 $f(a) = f(c) = f(b)$, 那么 f 恒取常值。

6. Dirichlet 函数和 Riemann 函数在 $[0, 1]$ 上的 Riemann 可积性如何, Lebesgue 可积性又如何? 可积的情况中, 积分值分别是多少?

7. 导出带积分余项的 Taylor 公式: 设 $n \in \mathbb{N}$, $f \in C^{n+1}(a, b)$, $x_0 \in (a, b)$, 则有

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt.$$

8. 对于 $n \in \mathbb{N}$ 计算积分

$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^n dx.$$

9. 计算极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)! \sqrt{n}}.$$

10. 写出 Young 不等式、Hölder 不等式和 Minkowski 不等式。

11. 设 $n \in \mathbb{N}_+$. 给出 \mathbb{R}^n 中开集、闭集、导集、闭包、完全集、紧集、列紧集、连通集、道路连通集、凸集、区域的定义。
12. 设 $n \in \mathbb{N}_+$. 在 \mathbb{R}^n 的所有子集中, 是否存在既不是开集又不是闭集的集合? 是否存在既开又闭的集合? 有哪些既开又闭的集合? 这体现了 \mathbb{R}^n 的什么性质?
13. 设 $n \in \mathbb{N}_+$. \mathbb{R}^n 中的区域是否一定是道路连通的?
14. 设 $n, m \in \mathbb{N}_+$. 问: $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 的连续映射
 - (a) 是否一定把开集映成开集?
 - (b) 是否一定把闭集映成闭集?
 - (c) 是否一定把紧集映成紧集?
 - (d) 是否一定把连通集映成连通集?
15. 设 $n, m \in \mathbb{N}_+$. 试用开集来刻画 $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 的连续映射。又问: $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 的 Lebesgue 可测映射有没有类似的刻画?
16. 设

$$\begin{cases} u^2 - v \cos xy + w^2 = 0, \\ u^2 + v^2 - \sin xy + 2w^2 = 2, \\ uv - (\sin x)(\cos y) + w = 0. \end{cases}$$

在 $(x, y) = (\pi/2, 0), (u, v, w) = (1, 1, 0)$ 处计算 Jacobi 矩阵

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y)}.$$

17. (多元函数的中值定理) 设 $n \in \mathbb{N}_+$, 凸区域 $D \subseteq \mathbb{R}^n$, 函数 $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ 可微, 则对任何两点 $a, b \in D$, 在这两点的连线上存在一点 ξ , 使得

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

18. (拟微分平均值定理) 设 $n, m \in \mathbb{N}_+$, 凸区域 $D \subseteq \mathbb{R}^n$, 函数 $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ 可微, 则对任何两点 $a, b \in D$, 在这两点的连线上存在一点 ξ , 使得

$$\|f(b) - f(a)\|_2 \leq \|f'(\xi)\|_F \|(b - a)\|_2,$$

其中 $\|\cdot\|_2$ 表示列向量的 2 范数 (也即由 Euclid 空间上的标准内积诱导的范数), $\|\cdot\|_F$ 表示矩阵的 Frobenius 范数。

19. 叙述 Newton-Leibniz 公式、Green 公式、Gauss 公式和 Stokes 公式。对于有限区间上的 Lebesgue 积分, Newton-Leibniz 公式何时成立?

20. 尽可能多地说出数项级数判敛的方法。
21. 尽可能多地说出判断函数项级数是否一致收敛的办法。
22. 尽可能多地说出积分与极限换序的条件，产生的结果是等式或者不等式都可以。
23. 设有函数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C[a, b], \mathbb{R}$. 试证明，如果 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[a, b]$ 内逐点收敛，但 $\{f_n(b)\}_{n=1}^{\infty}$ 发散，那么 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[a, b]$ 上不可能一致收敛。
24. 说说 Fourier 系数定义式的思想。
25. 证明 Riemann-Lebesgue 引理 (的一部分): 设 f 是有限闭区间 $[a, b]$ 上的 (常义) Riemann 可积实值函数，那么

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \cos(\lambda x) dx = 0.$$

2024.07.06 数学分析第一章保温

1. 设 $\{a_n\}_n$ 是等差数列， $\{b_n\}_n$ 是等比数列。计算

$$\sum_{k=1}^n a_k, \quad \sum_{k=1}^n b_k, \quad \sum_{k=1}^n a_k b_k.$$

2. 设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是实数列， a 是一个实数。证明下述两条的等价性。

(a) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+, \forall n > N, |a_n - a| < \varepsilon.$

(b) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+, \forall n > N, |a_n - a| < \varepsilon/2.$

3. 说明下述数列的单调性。

$$\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}_{n=1}^{\infty}, \quad \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \right\}_{n=1}^{\infty}, \quad \left\{ \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right\}_{n=0}^{\infty}.$$

当 n 取相同值时，上述三个数列相应项的大小关系如何？

4. (a) 给出排列数和组合数的排列组合解释，并分别说明其计算公式。
- (b) 写出 $(1+x)^n$ 的二项展开式，其中 x 取实值。
- (c) 计算

$$\sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k}, \quad \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ 2|k}} \binom{n}{k}, \quad \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ 2 \nmid k}} \binom{n}{k}.$$

提示：可适当利用上一问的结果。

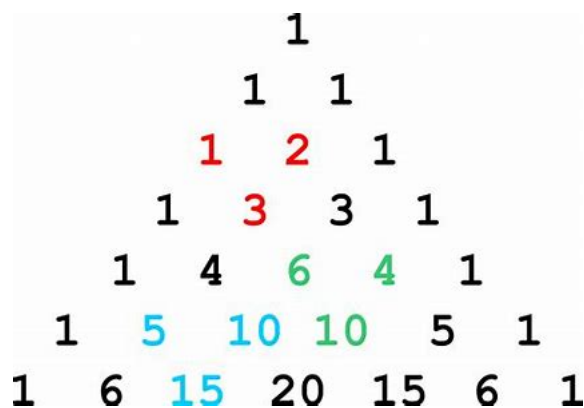


图 1: 杨辉三角 (Pascal 三角)

(d) 将上述二项展开式按 x 的升幂排列, 并将系数排成杨辉三角 (Pascal 三角), 如图 1 所示。对于 $n \in \mathbb{N}_+$, 第 $n+1$ 行为 $(1+x)^{n-1}$ 的系数。杨辉三角是左右对称的, 这体现了组合数的什么规律?

(e) 分别观察杨辉三角中的红色、绿色、蓝色数字, 它们体现了组合数的什么性质?

(f) 对于固定的 $n \in \mathbb{N}_+$, 观察、猜想并证明有限长的组合数序列 $\left\{\binom{k}{n}\right\}_{k=0}^n$ 的增减性规律。

5. 写出立方差公式。

6. (a) 设 E 是 \mathbb{R} 的一个非空子集。证明: 或者 $\inf E \in E$, 或者存在严格减序列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subseteq E$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf E$, 这二者总是至少有一个成立。

(b) 证明自然数集的任何非空子集都有最小值。

7. 设 $a \in \mathbb{R}$. 证明: 数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ 收敛到 a 当且仅当它的上下极限都是 a .

8. 设有数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}, \{b_n\}_{n=1}^\infty \subset [0, \infty)$, 且 $a^* := \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \in \mathbb{R}, \{b_n\}_{n=1}^\infty$ 收敛到一个有限实数 b . 证明

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = a^* b.$$

9. 说明 Cauchy 命题的逆命题一般不成立, 即对于实数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, 不能从 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k = a \in [-\infty, +\infty]$ 推知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

10. 设有实数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$. 比较下面四式的大小关系并证明。

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k.$$

11. 设实数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的每一项都大于 0. 比较下面四式的大小关系并证明。

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$