2024.07.04 数学分析开局测试

约定 $\mathbb{N}$ 表示所有非负整数的集合，$\mathbb{N}_+$ 表示所有正整数的集合。设 $n, m \in \mathbb{N}_+$, 对于可微映射 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, f' 表示 f 的 Jacobi 矩阵。实值函数 f 在区间 I 上是凸函数，意思是对于任何 $x, y \in I, \lambda + \mu = 1, \lambda, \mu \geqslant 0$, 都有 $f(\lambda x + \mu y) \leqslant \lambda f(x) + \mu f(y)$.

1. 叙述实数系基本定理。

2. 证明 Toeplitz 定理：设有一族非负实数 $\{\{t_{n,k}\}_{k=1}^{n}\}_{n=1}^{\infty}$ 满足 $\sum_{k=1}^{n} t_{n,k} = 1, \lim_{n\to\infty} t_{n,k} = 0$, 另有实数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛到 $a \in \mathbb{R}$, 那么就有
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} t_{n,k} a_k = a.$$

3. 设实数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的每一项都大于 0, 试比较
$$\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}, \qquad \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}, \qquad \liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}, \qquad \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$
的大小关系。

4. 有限区间上的一致连续函数是否一定有界？

5. 设 $-\infty < a < b < \infty$, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ 为凸函数。试证明，如果存在 $c \in (a,b)$ 使得 $f(a) = f(c) = f(b)$, 那么 f 恒取常值。

6. Dirichlet 函数和 Riemann 函数在 $[0,1]$ 上的 Riemann 可积性如何，Lebesgue 可积性又如何？可积的情况中，积分值分别是多少？

7. 导出带积分余项的 Taylor 公式：设 $n \in \mathbb{N}$, $f \in C^{n+1}(a,b)$, $x_0 \in (a,b)$, 则有
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

8. 对于 $n \in \mathbb{N}$ 计算积分
$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^n \,\mathrm{d}x.$$

9. 计算极限
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n}}.$$

10. 写出 Young 不等式、Hölder 不等式和 Minkowski 不等式。

11. 设 $n \in \mathbb{N}_+$. 给出 $\mathbb{R}^n$ 中开集、闭集、导集、闭包、完全集、紧集、列紧集、连通集、道路连通集、凸集、区域的定义。

12. 设 $n \in \mathbb{N}_+$. 在 $\mathbb{R}^n$ 的所有子集中，是否存在既不是开集又不是闭集的集合？是否存在既开又闭的集合？有哪些既开又闭的集合？这体现了 $\mathbb{R}^n$ 的什么性质？

13. 设 $n \in \mathbb{N}_+$. $\mathbb{R}^n$ 中的区域是否一定是道路连通的？

14. 设 $n, m \in \mathbb{N}_+$. 问：$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 的连续映射
    (a) 是否一定把开集映成开集？
    (b) 是否一定把闭集映成闭集？
    (c) 是否一定把紧集映成紧集？
    (d) 是否一定把连通集映成连通集？

15. 设 $n, m \in \mathbb{N}_+$. 试用开集来刻画 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 的连续映射。又问：$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 的 Lebesgue 可测映射有没有类似的刻画？

16. 设
$$\begin{cases} u^2 - v\cos xy + w^2 = 0, \\ u^2 + v^2 - \sin xy + 2w^2 = 2, \\ uv - (\sin x)(\cos y) + w = 0. \end{cases}$$
在 $(x, y) = (\pi/2, 0), (u, v, w) = (1, 1, 0)$ 处计算 Jacobi 矩阵
$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y)}.$$

17.（多元函数的中值定理）设 $n \in \mathbb{N}_+$, 凸区域 $D \subseteq \mathbb{R}^n$, 函数 $f\colon D \to \mathbb{R}$ 可微，则对任何两点 $a, b \in D$, 在这两点的连线上存在一点 ξ, 使得
$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

18.（拟微分平均值定理）设 $n, m \in \mathbb{N}_+$, 凸区域 $D \subseteq \mathbb{R}^n$, 函数 $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ 可微，则对任何两点 $a, b \in D$, 在这两点的连线上存在一点 ξ, 使得
$$\|f(b) - f(a)\|_2 \leqslant \|f'(\xi)\|_F \|(b - a)\|_2 ,$$
其中 $\|\cdot\|_2$ 表示列向量的 2 范数（也即由 Euclid 空间上的标准内积诱导的范数），$\|\cdot\|_F$ 表示矩阵的 Frobenius 范数。

19. 叙述 Newton-Leibniz 公式、Green 公式、Gauss 公式和 Stokes 公式。对于有限区间上的 Lebesgue 积分，Newton-Leibniz 公式何时成立？

20. 尽可能多地说出数项级数判敛的方法。

21. 尽可能多地说出判断函数项级数是否一致收敛的办法。

22. 尽可能多地说出积分与极限换序的条件，产生的结果是等式或者不等式都可以。

23. 设有函数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C[a,b], \mathbb{R}$. 试证明，如果 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[a,b)$ 内逐点收敛，但 $\{f_n(b)\}_{n=1}^{\infty}$ 发散，那么 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[a,b)$ 上不可能一致收敛。

24. 说说 Fourier 系数定义式的思想。

25. 证明 Riemann-Lebesgue 引理（的一部分）：设 f 是有限闭区间 $[a,b]$ 上的（常义）Riemann 可积实值函数，那么
$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(x)\cos(\lambda x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

2024.07.06 数学分析第一章保温

1. 设 $\{a_n\}_n$ 是等差数列，$\{b_n\}_n$ 是等比数列。计算
$$\sum_{k=1}^{n} a_k, \qquad \sum_{k=1}^{n} b_k, \qquad \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

2. 设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是实数列，a 是一个实数。证明下述两条的等价性。
   (a) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+, \forall n > N, |a_n - a| < \varepsilon.$
   (b) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+, \forall n > N, |a_n - a| < \varepsilon/2.$

3. 说明下述数列的单调性。
$$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}, \qquad \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}, \qquad \left\{\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right\}_{n=0}^{\infty}.$$
当 n 取相同值时，上述三个数列相应项的大小关系如何？

4. (a) 给出排列数和组合数的排列组合解释，并分别说明其计算公式。
   (b) 写出 $(1+x)^n$ 的二项展开式，其中 x 取实值。
   (c) 计算
$$\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \binom{n}{k}, \qquad \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ 2 \mid k}} \binom{n}{k}, \qquad \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ 2 \nmid k}} \binom{n}{k}.$$
   提示：可适当利用上一问的结果。

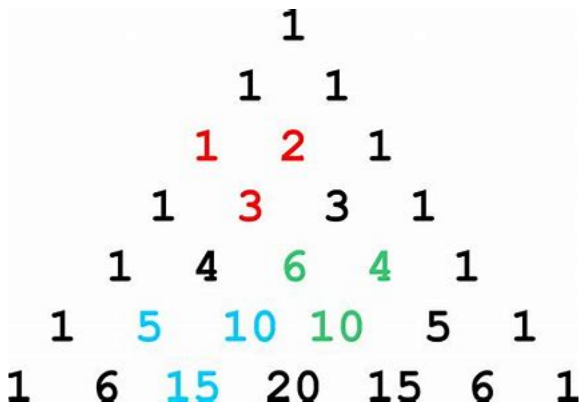

图 1: 杨辉三角（Pascal 三角）

(d) 将上述二项展开式按 x 的升幂排列，并将系数排成杨辉三角（Pascal 三角），如图 **??** 所示。对于 $n \in \mathbb{N}_+$, 第 $n+1$ 行为 $(1+x)^{n-1}$ 的系数。杨辉三角是左右对称的，这体现了组合数的什么规律？

(e) 分别观察杨辉三角中的红色、绿色、蓝色数字，它们体现了组合数的什么性质？

(f) 对于固定的 $n \in \mathbb{N}_+$, 观察、猜想并证明有限长的组合数序列 $\left\{\binom{k}{n}\right\}_{k=0}^{n}$ 的增减性规律。

5. 写出立方差公式。

6. (a) 设 E 是 $\mathbb{R}$ 的一个非空子集。证明：或者 $\inf E \in E$, 或者存在严格减序列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq E$ 满足 $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf E$, 这二者总是至少有一个成立。

   (b) 证明自然数集的任何非空子集都有最小值。

7. 设 $a \in \mathbb{R}$. 证明：数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛到 a 当且仅当它的上下极限都是 a.

8. 设有数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [0,\infty)$, 且 $a^* := \limsup_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛到一个有限实数 b. 证明

$$\limsup_{n\to\infty} a_n b_n = a^* b.$$

9. 说明 Cauchy 命题的逆命题一般不成立，即对于实数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, 不能从 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = a \in [-\infty, +\infty]$ 推知 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

10. 设有实数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. 比较下面四式的大小关系并证明。

$$\liminf_{n\to\infty} a_n, \qquad \limsup_{n\to\infty} a_n, \qquad \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k, \qquad \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k.$$

11. 设实数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的每一项都大于 0. 比较下面四式的大小关系并证明。

$$\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}, \qquad \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}, \qquad \liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}, \qquad \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

2024.08.13 不限时测验

如无特殊说明，设 $\mathbb{K}$ 是数域，m, n 是正整数。

1. (a) 对于正实数 $a_1, \ldots, a_n$, 证明

$$n/\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k.$$

(b) 设 $0 < a, b, p < \infty$. 证明：存在只依赖于 p 的正常数 $c = c(p), C = C(p)$, 使得

$$c \cdot (a+b)^p \leqslant a^p + b^p \leqslant C \cdot (a+b)^p.$$

(c) 设 $a, b > 0, 1 < p, q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 试证明如下形式的 Young 不等式：

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

提示：可以利用指数或对数函数的凹凸性。

2. 计算

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x \mathrm{e}^t \sin\left((x-t)^2\right) \mathrm{d}t.$$

3. 设实数列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 满足递推关系 $a_{n+1} = f(a_n), n = 1, 2, 3, \ldots$. 试证明：

(a) 如果 f 单调递增，那么 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 单调。

(b) 如果 f 单调递减，那么 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 的奇偶子列各自都是单调的，但具有相反的单调性。

4. 给定正数 a_0, b_0, 然后按照递推式

$$a_n = (a_{n-1} + b_{n-1})/2, b_n = (a_{n-1}b_{n-1})^{1/2}, n = 1, 2, 3, \ldots$$

定义数列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty}$. 证明 $(a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty}$ 收敛到同一个极限值。

5. 设有正数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, 试证明

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

6. 设非负值函数 $f \in C[a,b]$. 试证明

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\int_a^b f(x)^n \,\mathrm{d}x\Big)^{1/n} = \max_{a\leqslant x\leqslant b} f(x).$$

7. 设有映射 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. 试证明：$f$ 连续当且仅当对于任意 $\mathbb{R}^m$ 中的开集 O, 都有 $f^{-1}(O)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集。

8. 设 $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. 证明：$\operatorname{rank} A \leqslant r$ 当且仅当存在 $u \in M_{m\times r}(\mathbb{K}), v \in M_{r\times n}(\mathbb{K})$, 使得 $A = uv$.

9. 设 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. 证明：如果 $\operatorname{rank} A^m = \operatorname{rank} A^{m+1}$, 那么 $\big(\operatorname{rank} A^k\big)_{k=m}^{\infty}$ 为常值序列。

10. 设 $A \in M_{4\times 4}(\mathbb{K})$.

    (a) 如果 $\operatorname{tr} A^k = k, k = 1,2,3,4$, 求 $\det A$.

    (b) 试证明：$A^4 = 0$ 等价于 $\operatorname{tr} A^k = 0, k = 1,2,3,4$.

11. 设 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, $\operatorname{rank} A = 1$, $\operatorname{tr} A =: t$.

    (a) 试表达出 A 的特征多项式。

    (b) 说明 A 在 $\mathbb{K}$ 上一定有 Jordan 标准形（即一定相似于某个 Jordan 形矩阵），并讨论 A 在 $\mathbb{K}$ 上的 Jordan 标准形。

    (c) 试给出 A 的最小多项式。

12. 设 $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ 没有公共特征值。试证明：

    (a) 如果某个 $X \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ 满足 $AX = XB$, 那么对于任何 $f(x) \in \mathbb{C}[x]$, 都有

    $$f(A)X = Xf(B).$$

    (b) 对于任何 $C \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, 关于 X 的矩阵方程

    $$AX - XB = C$$

    都在 $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ 中存在唯一解。

13. 设 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. 记 $C(A) := \{B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})\colon AB = BA\}, \mathbb{K}[A] := \{f(A) \in M_{n\times n}(\mathbb{K})\colon f(x) \in \mathbb{K}[x]\}$. A 的特征多项式设为 $f(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda_{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 \in \mathbb{K}[\lambda]$, 最小多项式设为 $m(\lambda) = \lambda^s + b_{s-1}\lambda_{s-1} + \cdots + b_1\lambda + b_0 \in \mathbb{K}[\lambda]$, 其中 s 是一个正整数。

    (a) 验证 $C(A)$ 和 $\mathbb{K}[A]$ 都是 $\mathbb{K}$ 上的线性空间。

    (b) 求 $\dim \mathbb{K}[A]$.

    (c) 证明：如果 $m(\lambda)$ 在 $\mathbb{K}[\lambda]$ 上不可约，那么 $\mathbb{K}[A]$ 中的任一非零矩阵都可逆。

2024.11.14

如无特别说明，所有函数均取实值。

1. 设有正数列 $(a_n)_n$, 且存在 $\alpha > 0$ 使得 $\sum_n a_n^\alpha$ 收敛，问：$\sum_n a_n/n$ 是否一定收敛？
2. 设 $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, 存在函数 $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 作为函数列 $\left\{f^{(n)}\right\}_n$ 在任何有限区间上的一致极限，求解 φ.
3. 求和 $\sum_{n=1}^\infty \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right) x^n$.
4. Maclaurin 展开 $x \mapsto \ln\bigl(x + \sqrt{1+x^2}\bigr)$.
5. 用幂级数的乘法说明 $\exp(x+y) = (\exp x)(\exp y)$.
6. 求 S 在 $\mathbb{R}^2$ 中的导集 S' 与闭包 $\overline{S}$, 其中 $S := \{(x, \sin(1/x)) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 < x \leqslant 1\}$.
   $\overline{S}$ 是赫赫有名的“拓扑学家的正弦曲线”，试说明它在 $\mathbb{R}^2$ 中是连通但不道路连通的。
7. 设 $f \in C([a,b] \times [c,d])$，函数列 $(\varphi_n)_n$ 于 $[a,b]$ 上一致收敛，且在 $[a,b]$ 上逐点成立 $c \leqslant \varphi_n \leqslant d$. 试证明 $\left\{x \mapsto f(x, \varphi_n(x))\right\}_n$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛。
8. 证明：$\mathbb{R}^n$ 中的有界开集 G 上的一致连续函数一定可以延拓成 $\overline{G}$ 上的一致连续函数。
9. 证明单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 和锥面 $x^2+y^2=cz^2$ 正交（在任何交点处的切平面相互垂直），其中 $c>0$ 是常数。试几何地解释这个现象。
10. 用尽可能多的方法解 $\sup_A f$ 和 $\inf_A f$, 其中 $A\colon x+y-1=0$.
11. 用尽可能多的方法解 n 元实二次型在 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球面（l_2 范数意义下）上的最值。计算 $x^2+xy+y^2 \leqslant 1$ 的面积。
12. 计算 $\int_L \sqrt{2y^2+z^2}\,\mathrm{d}s$, 其中 L 是 $\mathbb{R}^3$ 中 $x=y$ 和 $x^2+y^2+z^2=a^2 (a>0)$ 的交线.
13. 在平面直角右手坐标系中，原点处有一质量为 M 的质点 A，并有一个质量为 m 的质点 B 沿 $\{(x,y) \in [0,\infty)^2 \colon (x/a)^2+(y/b)^2=1\}$ 从 $(a,0)$ 无折返地运动到 $(0,b)$，问在这一过程中 A 对 B 的万有引力所做的功。A 对 B 的万有引力的方向为平面向量 $\overrightarrow{BA}$ 的方向，大小为 $GMmr^{-2}$, 其中 G 是正常量，r 是 A 与 B 之间的距离。
14. 计算 $\{(a(\cos t)^3, a(\sin t)^3) \in \mathbb{R}^2\}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上所围图形的面积，其中 $a>0$。
15. 求边长为 a、密度均匀（设为 ρ）的立方体关于其任意棱边的转动惯量。
16. 已知 $a+\sqrt{a^2-y^2} = y\mathrm{e}^u$, $au = x+\sqrt{a^2-y^2}$, $a>0$, 求 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2$.

17. 把偏微分方程 $(x+y)z_x-(x-y)z_y=0$ 换成以 u,v 为自变量的形式，其中 $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$, $v=\arctan(y/x)$.

18. 求曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 的切平面，使它平行于平面 $x+4y+6z=0$.

19. 计算 $\iint_D xy^2\,\mathrm{d}\sigma$, 其中 D 是由 $y^2=4x$, $x-y=1$, $x+y=1$ 所围成的 $\mathbb{R}^2$ 中的有界区域。

20. 计算 $\iiint_V \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{(1+x+y+z)^3}$, 其中 V 是由 $x+y+z=1$ 与三个坐标面所围成的体积。