2024.07.04 数学分析开局测试

约定 $\mathbb{N}$ 表示所有非负整数的集合，$\mathbb{N}_+$ 表示所有正整数的集合。设 $n, m \in \mathbb{N}_+$, 对于可微映射 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, f' 表示 f 的 Jacobi 矩阵。实值函数 f 在区间 I 上是凸函数，意思是对于任何 $x, y \in I, \lambda + \mu = 1, \lambda, \mu \geqslant 0$, 都有 $f(\lambda x + \mu y) \leqslant \lambda f(x) + \mu f(y)$.

1. 叙述实数系基本定理。
2. 证明 Toeplitz 定理：设有一族非负实数 $\{\{t_{n,k}\}_{k=1}^{n}\}_{n=1}^{\infty}$ 满足 $\sum_{k=1}^{n} t_{n,k} = 1, \lim_{n\to\infty} t_{n,k} = 0$, 另有实数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛到 $a \in \mathbb{R}$, 那么就有
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} t_{n,k} a_k = a.$$
3. 设实数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的每一项都大于 0, 试比较
$$\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}, \qquad \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}, \qquad \liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}, \qquad \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$
的大小关系。
4. 有限区间上的一致连续函数是否一定有界？
5. 设 $-\infty < a < b < \infty$, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ 为凸函数。试证明，如果存在 $c \in (a,b)$ 使得 $f(a) = f(c) = f(b)$, 那么 f 恒取常值。
6. Dirichlet 函数和 Riemann 函数在 $[0,1]$ 上的 Riemann 可积性如何，Lebesgue 可积性又如何？可积的情况中，积分值分别是多少？
7. 导出带积分余项的 Taylor 公式：设 $n \in \mathbb{N}$, $f \in C^{n+1}(a,b)$, $x_0 \in (a,b)$, 则有
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{n+1}(t)\,\mathrm{d}t.$$
8. 对于 $n \in \mathbb{N}$ 计算积分
$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^n \,\mathrm{d}x.$$
9. 计算极限
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n}}.$$
10. 写出 Young 不等式、Hölder 不等式和 Minkowski 不等式。

11. 设 $n \in \mathbb{N}_+$. 给出 $\mathbb{R}^n$ 中开集、闭集、导集、闭包、完全集、紧集、列紧集、连通集、道路连通集、凸集、区域的定义。

12. 设 $n \in \mathbb{N}_+$. 在 $\mathbb{R}^n$ 的所有子集中，是否存在既不是开集又不是闭集的集合？是否存在既开又闭的集合？有哪些既开又闭的集合？这体现了 $\mathbb{R}^n$ 的什么性质？

13. 设 $n \in \mathbb{N}_+$. $\mathbb{R}^n$ 中的区域是否一定是道路连通的？

14. 设 $n, m \in \mathbb{N}_+$. 问：$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 的连续映射
    (a) 是否一定把开集映成开集？
    (b) 是否一定把闭集映成闭集？
    (c) 是否一定把紧集映成紧集？
    (d) 是否一定把连通集映成连通集？

15. 设 $n, m \in \mathbb{N}_+$. 试用开集来刻画 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 的连续映射。又问：$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 的 Lebesgue 可测映射有没有类似的刻画？

16. 设

$$\begin{cases} u^2 - v\cos xy + w^2 = 0, \\ u^2 + v^2 - \sin xy + 2w^2 = 2, \\ uv - (\sin x)(\cos y) + w = 0. \end{cases}$$

在 $(x, y) = (\pi/2, 0), (u, v, w) = (1, 1, 0)$ 处计算 Jacobi 矩阵

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y)}.$$

17.（多元函数的中值定理）设 $n \in \mathbb{N}_+$, 凸区域 $D \subseteq \mathbb{R}^n$, 函数 $f\colon D \to \mathbb{R}$ 可微，则对任何两点 $a, b \in D$, 在这两点的连线上存在一点 ξ, 使得

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

18.（拟微分平均值定理）设 $n, m \in \mathbb{N}_+$, 凸区域 $D \subseteq \mathbb{R}^n$, 函数 $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ 可微，则对任何两点 $a, b \in D$, 在这两点的连线上存在一点 ξ, 使得

$$\|f(b) - f(a)\|_2 \leqslant \|f'(\xi)\|_F \, \|(b - a)\|_2\,,$$

其中 $\|\cdot\|_2$ 表示列向量的 2 范数（也即由 Euclid 空间上的标准内积诱导的范数），$\|\cdot\|_F$ 表示矩阵的 Frobenius 范数。

19. 叙述 Newton-Leibniz 公式、Green 公式、Gauss 公式和 Stokes 公式。对于有限区间上的 Lebesgue 积分，Newton-Leibniz 公式何时成立？

20. 尽可能多地说出数项级数判敛的方法。

21. 尽可能多地说出判断函数项级数是否一致收敛的办法。

22. 尽可能多地说出积分与极限换序的条件，产生的结果是等式或者不等式都可以。

23. 设有连续函数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. 试证明，如果 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[a,b)$ 内逐点收敛，但 $\{f_n(b)\}_{n=1}^{\infty}$ 发散，那么 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[a,b)$ 上不可能一致收敛。

24. 说说 Fourier 系数定义式的思想。

25. 证明 Riemann-Lebesgue 引理（的一部分）：设 f 是有限闭区间 $[a,b]$ 上的（常义）Riemann 可积实值函数，那么
$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos(\lambda x)\,\mathrm{d}x = 0.$$