

2024.07.04 数学分析开局测试

约定 \mathbb{N} 表示所有非负整数的集合, \mathbb{N}_+ 表示所有正整数的集合。设 $n, m \in \mathbb{N}_+$, 对于可微映射 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, f' 表示 f 的 Jacobi 矩阵。实值函数 f 在区间 I 上是凸函数, 意思是对于任何 $x, y \in I, \lambda + \mu = 1, \lambda, \mu \geq 0$, 都有 $f(\lambda x + \mu y) \leq \lambda f(x) + \mu f(y)$.

1. 叙述实数系基本定理。

2. 证明 Toeplitz 定理: 设有一族非负实数 $\{t_{n,k}\}_{k=1}^n\}_{n=1}^\infty$ 满足 $\sum_{k=1}^n t_{n,k} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} t_{n,k} = 0$, 另有实数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ 收敛到 $a \in \mathbb{R}$, 那么就有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n t_{n,k} a_k = a.$$

3. 设实数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ 的每一项都大于 0, 试比较

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

的大小关系。

4. 有限区间上的一致连续函数是否一定有界?

5. 设 $-\infty < a < b < \infty, f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 为凸函数。试证明, 如果存在 $c \in (a, b)$ 使得 $f(a) = f(c) = f(b)$, 那么 f 恒取常值。

6. Dirichlet 函数和 Riemann 函数在 $[0, 1]$ 上的 Riemann 可积性如何, Lebesgue 可积性又如何? 可积的情况中, 积分值分别是多少?

7. 导出带积分余项的 Taylor 公式: 设 $n \in \mathbb{N}, f \in C^{n+1}(a, b), x_0 \in (a, b)$, 则有

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt.$$

8. 对于 $n \in \mathbb{N}$ 计算积分

$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^n dx.$$

9. 计算极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)! \sqrt{n}}.$$

10. 写出 Young 不等式、Hölder 不等式和 Minkowski 不等式。

11. 设 $n \in \mathbb{N}_+$. 给出 \mathbb{R}^n 中开集、闭集、导集、闭包、完全集、紧集、列紧集、连通集、道路连通集、凸集、区域的定义。
12. 设 $n \in \mathbb{N}_+$. 在 \mathbb{R}^n 的所有子集中, 是否存在既不是开集又不是闭集的集合? 是否存在既开又闭的集合? 有哪些既开又闭的集合? 这体现了 \mathbb{R}^n 的什么性质?
13. 设 $n \in \mathbb{N}_+$. \mathbb{R}^n 中的区域是否一定是道路连通的?
14. 设 $n, m \in \mathbb{N}_+$. 问: $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 的连续映射
 - (a) 是否一定把开集映成开集?
 - (b) 是否一定把闭集映成闭集?
 - (c) 是否一定把紧集映成紧集?
 - (d) 是否一定把连通集映成连通集?
15. 设 $n, m \in \mathbb{N}_+$. 试用开集来刻画 $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 的连续映射。又问: $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 的 Lebesgue 可测映射有没有类似的刻画?
16. 设

$$\begin{cases} u^2 - v \cos xy + w^2 = 0, \\ u^2 + v^2 - \sin xy + 2w^2 = 2, \\ uv - (\sin x)(\cos y) + w = 0. \end{cases}$$

在 $(x, y) = (\pi/2, 0), (u, v, w) = (1, 1, 0)$ 处计算 Jacobi 矩阵

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y)}.$$

17. (多元函数的中值定理) 设 $n \in \mathbb{N}_+$, 凸区域 $D \subseteq \mathbb{R}^n$, 函数 $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ 可微, 则对任何两点 $a, b \in D$, 在这两点的连线上存在一点 ξ , 使得

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

18. (拟微分平均值定理) 设 $n, m \in \mathbb{N}_+$, 凸区域 $D \subseteq \mathbb{R}^n$, 函数 $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ 可微, 则对任何两点 $a, b \in D$, 在这两点的连线上存在一点 ξ , 使得

$$\|f(b) - f(a)\|_2 \leq \|f'(\xi)\|_F \|(b - a)\|_2,$$

其中 $\|\cdot\|_2$ 表示列向量的 2 范数 (也即由 Euclid 空间上的标准内积诱导的范数), $\|\cdot\|_F$ 表示矩阵的 Frobenius 范数。

19. 叙述 Newton-Leibniz 公式、Green 公式、Gauss 公式和 Stokes 公式。对于有限区间上的 Lebesgue 积分, Newton-Leibniz 公式何时成立?

20. 尽可能多地说出数项级数判敛的方法。
21. 尽可能多地说出判断函数项级数是否一致收敛的办法。
22. 尽可能多地说出积分与极限换序的条件，产生的结果是等式或者不等式都可以。
23. 设有函数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C[a, b], \mathbb{R}$. 试证明，如果 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[a, b]$ 内逐点收敛，但 $\{f_n(b)\}_{n=1}^{\infty}$ 发散，那么 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[a, b]$ 上不可能一致收敛。
24. 说说 Fourier 系数定义式的思想。
25. 证明 Riemann-Lebesgue 引理 (的一部分): 设 f 是有限闭区间 $[a, b]$ 上的 (常义) Riemann 可积实值函数，那么

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \cos(\lambda x) dx = 0.$$

2024.07.06 数学分析第一章保温

1. 设 $\{a_n\}_n$ 是等差数列， $\{b_n\}_n$ 是等比数列。计算

$$\sum_{k=1}^n a_k, \quad \sum_{k=1}^n b_k, \quad \sum_{k=1}^n a_k b_k.$$

2. 设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是实数列， a 是一个实数。证明下述两条的等价性。

(a) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+, \forall n > N, |a_n - a| < \varepsilon.$

(b) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+, \forall n > N, |a_n - a| < \varepsilon/2.$

3. 说明下述数列的单调性。

$$\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}_{n=1}^{\infty}, \quad \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \right\}_{n=1}^{\infty}, \quad \left\{ \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right\}_{n=0}^{\infty}.$$

当 n 取相同值时，上述三个数列相应项的大小关系如何？

4. (a) 给出排列数和组合数的排列组合解释，并分别说明其计算公式。
- (b) 写出 $(1+x)^n$ 的二项展开式，其中 x 取实值。
- (c) 计算

$$\sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k}, \quad \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ 2|k}} \binom{n}{k}, \quad \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ 2 \nmid k}} \binom{n}{k}.$$

提示：可适当利用上一问的结果。

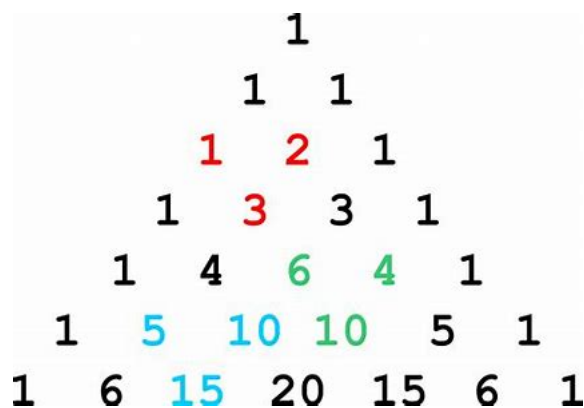


图 1: 杨辉三角 (Pascal 三角)

(d) 将上述二项展开式按 x 的升幂排列, 并将系数排成杨辉三角 (Pascal 三角), 如图 1 所示。对于 $n \in \mathbb{N}_+$, 第 $n+1$ 行为 $(1+x)^{n-1}$ 的系数。杨辉三角是左右对称的, 这体现了组合数的什么规律?

(e) 分别观察杨辉三角中的红色、绿色、蓝色数字, 它们体现了组合数的什么性质?

(f) 对于固定的 $n \in \mathbb{N}_+$, 观察、猜想并证明有限长的组合数序列 $\left\{\binom{k}{n}\right\}_{k=0}^n$ 的增减性规律。

5. 写出立方差公式。

6. (a) 设 E 是 \mathbb{R} 的一个非空子集。证明: 或者 $\inf E \in E$, 或者存在严格减序列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subseteq E$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf E$, 这二者总是至少有一个成立。

(b) 证明自然数集的任何非空子集都有最小值。

7. 设 $a \in \mathbb{R}$. 证明: 数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ 收敛到 a 当且仅当它的上下极限都是 a .

8. 设有数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}, \{b_n\}_{n=1}^\infty \subset [0, \infty)$, 且 $a^* := \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \in \mathbb{R}, \{b_n\}_{n=1}^\infty$ 收敛到一个有限实数 b . 证明

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = a^* b.$$

9. 说明 Cauchy 命题的逆命题一般不成立, 即对于实数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, 不能从 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k = a \in [-\infty, +\infty]$ 推知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

10. 设有实数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$. 比较下面四式的大小关系并证明。

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k.$$

11. 设实数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的每一项都大于 0. 比较下面四式的大小关系并证明。

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

2024.08.13 不限时测验

如无特殊说明, 设 \mathbb{K} 是数域, m, n 是正整数。

1. (a) 对于正实数 a_1, \dots, a_n , 证明

$$n / \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} \leq \left(\prod_{k=1}^n a_k \right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k.$$

(b) 设 $0 < a, b, p < \infty$. 证明: 存在只依赖于 p 的正常数 $c = c(p), C = C(p)$, 使得

$$c \cdot (a + b)^p \leq a^p + b^p \leq C \cdot (a + b)^p.$$

(c) 设 $a, b > 0, 1 < p, q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 试证明如下形式的 Young 不等式:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

提示: 可以利用指数或对数函数的凹凸性。

2. 计算

$$\frac{d}{dx} \int_0^x e^t \sin((x-t)^2) dt.$$

3. 设实数列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 满足递推关系 $a_{n+1} = f(a_n), n = 1, 2, 3, \dots$. 试证明:

(a) 如果 f 单调递增, 那么 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 单调。

(b) 如果 f 单调递减, 那么 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 的奇偶子列各自都是单调的, 但具有相反的单调性。

4. 给定正数 a_0, b_0 , 然后按照递推式

$$a_n = (a_{n-1} + b_{n-1})/2, b_n = (a_{n-1}b_{n-1})^{1/2}, n = 1, 2, 3, \dots$$

定义数列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty}$. 证明 $(a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty}$ 收敛到同一个极限值。

5. 设有正数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, 试证明

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

6. 设非负值函数 $f \in C[a, b]$. 试证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_a^b f(x)^n dx \right)^{1/n} = \max_{a \leq x \leq b} f(x).$$

7. 设有映射 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. 试证明: f 连续当且仅当对于任意 \mathbb{R}^m 中的开集 O , 都有 $f^{-1}(O)$ 是 \mathbb{R}^n 中的开集。

8. 设 $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$. 证明: $\text{rank } A \leq r$ 当且仅当存在 $u \in M_{m \times r}(\mathbb{K}), v \in M_{r \times n}(\mathbb{K})$, 使得 $A = uv$.

9. 设 $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$. 证明: 如果 $\text{rank } A^m = \text{rank } A^{m+1}$, 那么 $(\text{rank } A^k)_{k=m}^{\infty}$ 为常值序列。

10. 设 $A \in M_{4 \times 4}(\mathbb{K})$.

(a) 如果 $\text{tr } A^k = k, k = 1, 2, 3, 4$, 求 $\det A$.

(b) 试证明: $A^4 = 0$ 等价于 $\text{tr } A^k = 0, k = 1, 2, 3, 4$.

11. 设 $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K}), \text{rank } A = 1, \text{tr } A =: t$.

(a) 试表达出 A 的特征多项式。

(b) 说明 A 在 \mathbb{K} 上一定有 Jordan 标准形 (即一定相似于某个 Jordan 形矩阵), 并讨论 A 在 \mathbb{K} 上的 Jordan 标准形。

(c) 试给出 A 的最小多项式。

12. 设 $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ 没有公共特征值。试证明:

(a) 如果某个 $X \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ 满足 $AX = XB$, 那么对于任何 $f(x) \in \mathbb{C}[x]$, 都有

$$f(A)X = Xf(B).$$

(b) 对于任何 $C \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$, 关于 X 的矩阵方程

$$AX - XB = C$$

都在 $M_{n \times n}(\mathbb{C})$ 中存在唯一解。

13. 设 $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$. 记 $C(A) := \{B \in M_{n \times n}(\mathbb{K}): AB = BA\}, \mathbb{K}[A] := \{f(A) \in M_{n \times n}(\mathbb{K}): f(x) \in \mathbb{K}[x]\}$. A 的特征多项式设为 $f(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda_{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 \in \mathbb{K}[\lambda]$, 最小多项式设为 $m(\lambda) = \lambda^s + b_{s-1}\lambda_{s-1} + \cdots + b_1\lambda + b_0 \in \mathbb{K}[\lambda]$, 其中 s 是一个正整数。

(a) 验证 $C(A)$ 和 $\mathbb{K}[A]$ 都是 \mathbb{K} 上的线性空间。

(b) 求 $\dim \mathbb{K}[A]$.

(c) 证明: 如果 $m(\lambda)$ 在 $\mathbb{K}[\lambda]$ 上不可约, 那么 $\mathbb{K}[A]$ 中的任一非零矩阵都可逆。

2024.11.14

如无特别说明, 所有函数均取实值。

1. 设有正数列 $(a_n)_n$, 且存在 $\alpha > 0$ 使得 $\sum_n a_n^\alpha$ 收敛, 问: $\sum_n a_n/n$ 是否一定收敛?
2. 设 $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, 存在函数 $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 作为函数列 $\{f^{(n)}\}_n$ 在任何有限区间上的一致极限, 求解 φ .
3. 求和 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) x^n$.
4. Maclaurin 展开 $x \mapsto \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.
5. 用幂级数的乘法说明 $\exp(x+y) = (\exp x)(\exp y)$.
6. 求 S 在 \mathbb{R}^2 中的导集 S' 与闭包 \bar{S} , 其中 $S := \{(x, \sin(1/x)) \in \mathbb{R}^2: 0 < x \leq 1\}$.
 \bar{S} 是赫赫有名的“拓扑学家的正弦曲线”, 试说明它在 \mathbb{R}^2 中是连通但不道路连通的。
7. 设 $f \in C([a, b] \times [c, d])$, 函数列 $(\varphi_n)_n$ 于 $[a, b]$ 上一致收敛, 且在 $[a, b]$ 上逐点成立 $c \leq \varphi_n \leq d$. 试证明 $\{x \mapsto f(x, \varphi_n(x))\}_n$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛。
8. 证明: \mathbb{R}^n 中的有界开集 G 上的一致连续函数一定可以延拓成 \bar{G} 上的一致连续函数。
9. 证明单位球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 和锥面 $x^2 + y^2 = cz^2$ 正交 (在任何交点处的切平面相互垂直), 其中 $c > 0$ 是常数。试几何地解释这个现象。
10. 用尽可能多的方法解 $\sup_A f$ 和 $\inf_A f$, 其中 $f(x, y) = x^2 + y^2$, $A: x + y - 1 = 0$.
11. 用尽可能多的方法解 n 元实二次型在 \mathbb{R}^n 中的单位球面 (l_2 范数意义下) 上的最值。计算 $x^2 + xy + y^2 \leq 1$ 的面积。
12. 计算 $\int_L \sqrt{2y^2 + z^2} ds$, 其中 L 是 \mathbb{R}^3 中 $x = y$ 和 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (a > 0)$ 的交线。
13. 在平面直角右手坐标系中, 原点处有一质量为 M 的质点 A, 并有一个质量为 m 的质点 B 沿 $\{(x, y) \in [0, \infty)^2: (x/a)^2 + (y/b)^2 = 1\}$ 从 $(a, 0)$ 无折返地运动到 $(0, b)$, 问在这一过程中 A 对 B 的万有引力所做的功。A 对 B 的万有引力的方向为平面向量 \overrightarrow{BA} 的方向, 大小为 $GMmr^{-2}$, 其中 G 是正常量, r 是 A 与 B 之间的距离。
14. 计算 $\{(a(\cos t)^3, a(\sin t)^3) \in \mathbb{R}^2\}$ 在 \mathbb{R}^2 上所围图形的面积, 其中 $a > 0$ 。
15. 求边长为 a 、密度均匀 (设为 ρ) 的立方体关于其任意棱边的转动惯量。
16. 已知 $a + \sqrt{a^2 - y^2} = ye^u$, $au = x + \sqrt{a^2 - y^2}$, $a > 0$, 求 dy/dx 和 d^2y/dx^2 。

17. 把偏微分方程 $(x+y)z_x - (x-y)z_y = 0$ 换成以 u, v 为自变量的形式, 其中 $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, $v = \arctan(y/x)$.
18. 求曲面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ 的切平面, 使它平行于平面 $x + 4y + 6z = 0$.
19. 计算 $\iint_D xy^2 d\sigma$, 其中 D 是由 $y^2 = 4x$, $x - y = 1$, $x + y = 1$ 所围成的 \mathbb{R}^2 中的有界区域。
20. 计算 $\iiint_V \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3}$, 其中 V 是由 $x + y + z = 1$ 与三个坐标面所围成的体积。

2024.11.18

1. 求和

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)} \quad \text{和} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n^2+1)((n+1)^2+1)}.$$

2. 设 $0 < x < 2\pi, \alpha > 0$. 问级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

绝对收敛、条件收敛还是发散。

3. 重排级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}/n$, 使它发散。

4. 设 $a_n \leq b_n \leq c_n (n = 1, 2, \dots)$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 同敛散, 能否通过其敛散性断言 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 的敛散性?

5. 证明级数的 Hölder 不等式和 Minkowski 不等式。(原题是指数为 2 的。)

6. 把 $\ln x$ 展开成 $(x-1)/(x+1)$ 的幂级数。

7. 以周期 2π 对 $\operatorname{sgn} \circ \cos$ 进行 Fourier 展开。

8. 分别在 $[-\pi, \pi]$ 和 $[0, 2\pi)$ 上对 $x \mapsto x^2$ 进行 Fourier 展开, 并求和 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-4}$ 。

9. 计算

$$\lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} (x+y) \sin((x^2+y^2)^{-1}) \quad \text{和} \quad \lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} (\exp(x) - \exp(y)) \csc(xy).$$

10. 求曲面 $z = (x^2 + y^2)/4$ 与平面 $y = 4$ 的交线在 $x = 2$ 处的切线与 Ox 轴的夹角。

11. 叙述 \mathbb{R}^n 中区域的定义。设 D 是 \mathbb{R}^2 上的区域。

(a) 二元函数 f 满足 $f'_1 = 0$ 在 D 上恒成立, 问 f 的取值是否只由第二变元 (自变元的第二个分量) 决定。

(b) 二元函数 f 的 Jacobi 矩阵在 D 上恒取 0, 问 f 在 D 上是否恒取常值。

(c) 对以上两问, 如果回答为 “不能”, 试附加一充分条件使之成立。

12. 设 $b > a > 0$, 计算积分

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} \sin\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right) dx \quad \text{和} \quad \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} \cos\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right) dx.$$

13. 设 n 取正整数, $a > 0$, 计算

$$\int_0^\infty (x^2 + a^2)^{-n} dx.$$

14. 计算

$$\int_{x^2+y^2=1} (x^2 + 2y^2)^{1/2} ds.$$

15. 计算

$$\int_L xyz \, dz,$$

其中 L 是单位球面与 $y = z$ 相交的圆, 其方向按曲线依次经过第 1, 2, 7, 8 卦限。

16. 计算

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{x^2+y^2=r^2} \frac{ydx - xdy}{(x^2 + xy + y^2)^2}.$$

17. 设二元函数 u, v 在由封闭的光滑曲线 L 所围的区域 D 具有 2 阶连续偏导数, 证明

$$\iint_D v \Delta u \, d\sigma = - \iint_D (\nabla u) \cdot (\nabla v) \, d\sigma + \oint_L v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \, ds$$

和

$$\iint_D (u \Delta v - v \Delta u) \, d\sigma = \oint_L \left(u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) \, ds,$$

其中 \mathbf{n} 是 L 的单位外法向量。

18. 设 $\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \neq 0$, $h_i > 0 (i = 1, 2, 3)$, 求由平面 $a_i x + b_i y + c_i z = \pm h_i (i = 1, 2, 3)$ 所界平行六面体的体积。

19. (不是原题) 设平面直角右手坐标系 xOy 上有一位于 $(0,1)$ 处的电荷量为 q 的带正电的点电荷 A , 并在 $([1, \infty) \times \{0\}) \cup ((-\infty, -1] \times \{0\})$ 上带正电, 其他地方不带电, $(x,0)$ 处电荷的线密度等于 $1/|x|(|x| \geq 1)$, 求 A 所受的 Coulomb (库仑) 力。
两个电荷 (带电量分别设为 Q, q) 之间的 Coulomb 力总是沿二者的连线方向, 遵循“同性相斥、异性相吸”的规律, 大小等于 $kQqr^{-2}$, 其中 k 是正常量, r 为两电荷的距离。
20. 设球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2x$ 上各点的密度等于该点到坐标原点的距离, 求该球体的质量、质心和形心。

2024.11.25

0. 遗留问题。

1. 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$ 是 Lebesgue 可测集。是否存在 $L(E)$ 的可数子集 A , 使得对于任何 $f \in L(E)$, 都存在 A 中的函数列 $(f_n)_n$ 满足 $\lim_n \int_E |f_n - f| = 0$?
2. 设 $f \in L(0,1)$ 使得 $\int_0^1 x^n f(x) dx = 0$ 对任何非负整数 n 都成立, 证明 $f = 0$ a.e. 于 $(0,1)$.
3. 求解所有的实数 a , 使得 $Z[a] := \{ma + n : m, n \in \mathbb{Z}\}$ 稠于 \mathbb{R} .

4. 证明

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} < \frac{\pi}{2}.$$

5. 求和

$$\sum_{n \geq 1} \frac{n^2}{2^n}.$$

6. 设 $(a_n)_{n \geq 1} \subset (0, \infty)$, $\alpha \in (1, \infty)$, 并记 $S_n := \sum_{k=1}^n a_k$, 证明 $\sum_{n \geq 1} a_n S_n^{-\alpha}$ 收敛。
7. 设 $(a_n)_n$ 是有界实数列, 且 $\lim_n (a_{n+1} - a_n) = 0$, 证明 $(a_n)_n$ 的极限点构成闭区间。
8. 求心形线 $r = a(1 + \cos \theta)$, $a > 0$ 的切线与切点向径的夹角。
9. 证明: 在 \mathbb{R}^n (标准内积) 中存在非零的线性变换 φ , 使得 $\varphi(x) \perp x, \forall x \in \mathbb{R}^n$; 但是在 \mathbb{C}^n (标准内积) 中不存在这样的线性变换。
10. 设 A, B 是同阶实对称正定矩阵, 问 AB 的特征值 (在 \mathbb{C} 上考虑) 是否一定都是正数。

11. 求如下 $n(n > 1)$ 阶的行列式的值:

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & b \\ b & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{vmatrix}.$$

12. 设 $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, $a, b \in \mathbb{C}$, $AB - BA = aA + bB$, 证明 A, B 可以同时相似上三角化。

13. 证明矩阵特征值的 Gerschgorin 圆盘第一定理: $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in M_n(\mathbb{C})$ 的所有特征值都属于

$$\bigcup_{k=1}^n \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{kk}| \leq \sum_{i \neq k} |a_{ik}| \right\}.$$

14. 设 \mathbb{K} 是某一数域, $f(x), g(x)$ 是 $\mathbb{K}[x]$ 中的互素多项式, $A \in M_n(\mathbb{K})$, 证明 $f(A)g(A) = 0$ 当且仅当 $\text{rank } f(A) + \text{rank } g(A) = n$.

2024.11.28

1. 固定 $x > 0$, 给出

$$a_n := \prod_{k=1}^n (x + k)$$

在 $n \rightarrow \infty$ 时的一个渐进估计, 并判敛

$$\sum_{n \geq 1} \frac{n!}{a_n}.$$

2. 给出

$$a_n := \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{2n+1}$$

在 $n \rightarrow \infty$ 时的一个渐进估计, 并判敛

$$\sum_{n \geq 1} a_n.$$

3. 设连续函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 以 p 为周期, 证明

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f = \frac{1}{p} \int_0^p f.$$

4. 计算

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ -3 & x & 3 \\ -2 & -3 & x+1 \end{vmatrix}.$$

5. 将正切函数 Maclaurin 展开到 5 次项, 带 Peano 余项即可。

6. 讨论如下 $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 的函数的连续性:

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} y^2 \ln(x^2 + y^2), & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases} \quad \text{和} \quad (x, y) \mapsto \exp\left(-\frac{x}{y}\right).$$

7. 设 $r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 求

$$\mathbf{grad} r \quad \text{和} \quad \mathbf{grad} \frac{1}{r}.$$

8. 证明

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto \int_0^1 \operatorname{sgn}(x-y) \, \mathrm{d}x$$

在 \mathbb{R} 上连续。

9. 计算

$$\int_0^\infty e^{-x} \frac{1 - \cos(xy)}{x^2} \, \mathrm{d}x.$$

10. 求

$$\inf_{a, b \in \mathbb{R}} \int_1^3 (a + bx - x^2)^2 \, \mathrm{d}x.$$

11. 求质量分布均匀的摆线

$$x = t - \sin t, y = 1 - \cos t \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

的质心。

12. 设 $a > 0, k > 0$, 对于 $L: r = ae^{k\theta}, r \leq a$, 计算

$$\int_L x \, \mathrm{d}s.$$

13. 对于 $V: x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 \leq 1$, 计算

$$\iiint_V xy + yz + zx \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$$

14. 设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续函数, $D := \{(\theta, \varphi): 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi\}$, m, n, p 不同时为 0, 证明

$$\iint_D f(m \sin \varphi \cos \theta + n \sin \varphi \sin \theta + p \cos \varphi) \sin \varphi \, d\theta \, d\varphi = 2\pi \int_{-1}^1 f(u \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}) \, du.$$

15. 记 $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, V 是 \mathbb{R}^3 中的区域, \mathbf{n} 是 ∂V 的外法向量, 证明

$$\iiint_V \frac{1}{r} \, dx \, dy \, dz = \frac{1}{2} \oint_{\partial V} \cos(\widehat{\mathbf{r}, \mathbf{n}}) \, dS.$$

16. 设 $f, f_n (n \in \mathbb{N})$ 都是可测集 E 上的几乎处处有限的函数, 并且 $mE(f_n \neq f) < 2^{-n}$, 试证明在 $n \rightarrow \infty$ 时 f_n 几乎处处收敛到 f .

17. 设 $f \in L(\mathbb{R})$ 且 $\int_{\mathbb{R}} f \neq 0$, a 是一个确定的实数, 证明

$$x \mapsto \frac{1}{2x} \int_{a-x}^{a+x} f \notin L(\mathbb{R}).$$

18. 设 $f \in L(\mathbb{R})$, $a > 0$, 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-a} f(nx) = 0, \quad \text{a.e. } x \in \mathbb{R}.$$

19. 已知曲面 $2x^2 + ay^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = 3$ 经正交变换可化为椭球面 $u^2 + v^2 + bw^2 = 3$, 求 a, b 的值。

20. 证明复矩阵的 Jordan-Chevalley 分解: 任何 $A \in M_n(\mathbb{C})$ 都可以分解为 $B + C$ 的形式, 其中

(a) B 可对角化,

(b) C 幂零,

(c) $BC = CB$,

(d) B, C 都是 A 的多项式,

并且满足 (a)-(c) 的分解是唯一的。