



哈爾濱工業大學  
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

# 分数阶比例延迟方程的几种数值方法的研究

汇报人：李云鹏

导 师：雷 强

2024 年 6 月 28 日



# 目录

- 课题主要研究内容
- 目前已完成的研究工作及结果
- 后期拟完成的研究工作及进度安排
- 存在的困难与问题

- 课题主要研究内容
- 目前已完成的研究工作及结果
- 后期拟完成的研究工作及进度安排
- 存在的困难与问题





# 课题主要研究内容

设  $d \in \mathbb{N}_+$ . 本课题主要研究如下的分数阶比例延迟方程,

$$\begin{cases} {}^C D_{0+}^{\alpha} x(t) = f(t, x(t), x(qt)), & t \geq 0, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1)$$

其中  $x$  是  $\mathbb{R}^d$  值未知函数,  $x_0 \in \mathbb{R}^d$  给定,  $0 < \alpha < 1$ , 函数  $f: [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  连续,  ${}^C D_{0+}^{\alpha} x(t) = \Gamma(1 - \alpha)^{-1} \int_0^t (t - s)^{-\alpha} x'(s) ds$ .

## 定义

如果有函数  $x$ , 使得  $t$  属于  $[0, \infty)$  的某个包含 0 的子区间  $I$  上时满足

$$x(t) = x_0 + \Gamma(\alpha)^{-1} \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} f(s, x(s), x(qs)) ds,$$

那么称  $x$  是方程 (1) 在  $I$  上的一个弱解。

- 课题主要研究内容
- 目前已完成的研究工作及结果
- 后期拟完成的研究工作及进度安排
- 存在的困难与问题





# 弱解的存在性与唯一性

## 定理 1 (Peano 存在性定理)

方程 (1) 总是在某个小区间  $[0, h]$  上存在弱解。

## 定理 2 (Picard 存在唯一性定理)

如果  $f(t, \cdot, \cdot)$  对  $t \in [0, \infty)$  一致地局部 *Lipschitz*, 即对任何  $r > 0$ , 存在不依赖于  $t$  的  $L = L(r) \geq 0$ , 使得

$$\|f(t, x, y) - f(t, u, v)\| \leq L \cdot (\|x - u\| + \|y - v\|)$$

对任何  $t \in [0, \infty)$  以及  $x, y, u, v \in B_r(0)$  成立, 那么方程 (1) 在某个小区间  $[0, h]$  上存在弱解, 并且弱解在存在区间  $I \ni 0$  上唯一。进一步地, 如果  $L$  可以不依赖于  $r$ , 那么在  $[0, \infty)$  上全局存在唯一的弱解。



# Peano 存在性定理的证明概要

取时间序列  $t_n^m := nh/m$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots, m$ , 并构造 Euler 折线  $(x^m)_{m=1}^\infty : [0, h] \rightarrow \mathbb{R}^d$  如下。

$$x_n^m = x_0 + \Gamma(\alpha)^{-1} \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}^m}^{t_k^m} (t_n^m - s)^{\alpha-1} f(s, x_{k-1}^m, x_{q_{k-1}^m}^m) ds, \quad n = 1, 2, \dots, m,$$

$$x^m(t) := \frac{t_n^m - t}{t_n^m - t_{n-1}^m} x_{n-1}^m + \frac{t - t_{n-1}^m}{t_n^m - t_{n-1}^m} x_n^m, \quad t_{n-1}^m \leq t \leq t_n^m,$$

其中  $h > 0$  取充分小, 使得 Euler 折线一致有界。



# Peano 存在性定理的证明概要

可以估计出

$$\|x^m(t) - x^m(s)\| \leq 2M\Gamma(\alpha + 1)^{-1} (2(h/m)^\alpha + (t - s)^\alpha),$$

进而知道  $(x^m)_{m=1}^\infty$  等度连续。

使用 Arzelà-Ascoli 定理,  $(x^m)_{m=1}^\infty$  有一致收敛子列, 仍记为  $(x^m)_{m=1}^\infty$ , 并设其极限函数为  $x \in C([0, h], \mathbb{R}^d)$ .

接下来证明  $x$  是方程 (1) 在  $[0, h]$  上的一个弱解。





# Peano 存在性定理的证明概要

借助三角不等式, 对任何  $t \in [0, h]$ , 设  $t \in [t_{n-1}^m, t_n^m]$ , 有

$$\begin{aligned} & \left\| x^m(t) - x_0 - \Gamma(\alpha)^{-1} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s), x(qs)) \, ds \right\| \\ & \leq \|x^m(t) - x^m(t_n^m)\| \\ & \quad + \left\| x^m(t_n^m) - x_0 - \Gamma(\alpha)^{-1} \int_0^{t_n^m} (t_n^m - s)^{\alpha-1} f(s, x^m(s), x^m(qs)) \, ds \right\| \\ & \quad + \Gamma(\alpha)^{-1} \left\| \int_0^{t_n^m} (t_n^m - s)^{\alpha-1} (f(s, x^m(s), x^m(qs)) - f(s, x(s), x(qs))) \, ds \right\| \\ & \quad + \Gamma(\alpha)^{-1} \left\| \int_0^{t_n^m} (t_n^m - s)^{\alpha-1} f(s, x(s), x(qs)) \, ds - \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s), x(qs)) \, ds \right\|. \end{aligned}$$



# Peano 存在性定理的证明概要

可以证明, 当  $m$  充分大时, 不等号右边的每一项都可以任意小, 从而

$$x(t) = x_0 + \Gamma(\alpha)^{-1} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s), x(qs)) \, ds, \quad 0 \leq t \leq h.$$

从而  $x \in C([0, h], \mathbb{R}^d)$  是方程 (1) 在  $[0, h]$  上的一个弱解。



# Picard 存在性定理的证明概要

构造 Picard 序列  $(x_n)_{n=0}^{\infty} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^d$  满足

$$\begin{cases} x_{n+1}(t) := x_0 + \Gamma(\alpha)^{-1} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x_n(s), x_n(qs)) \, ds, & n \in \mathbb{N}, \\ x_0(t) := x_0. \end{cases}$$

取  $h$  充分小, 使得  $(x_n)_{n=0}^{\infty}$  一致有界。(这是为了在证明过程中取固定的 Lipschitz 常数。如果  $L$  可以与  $r$  无关, 那么就可以在整个  $[0, \infty)$  上运作下面的证明。) 归纳知

$$\|x_{n+1}(t) - x_n(t)\| \leq \frac{L^n M t^{(n+1)\alpha}}{\Gamma((n+1)\alpha + 1)} \exp \frac{q^\alpha}{1 - q^\alpha}, \quad t \in [0, h].$$

由 Mittag-Leffler 函数的性质知  $(x_n)_{n=0}^{\infty}$  在  $[0, h]$  上一致收敛, 然后容易看出其极限函数即是方程 (1) 在  $[0, h]$  上的一个弱解。



# Picard 唯一性定理的证明概要

先设  $0 < T := \sup I < \infty$ ,  $[0, T]$  中的  $\mathbb{R}^d$  值连续函数  $x, y$  都是方程 (1) 的弱解。记  $L := L(\max(\max_{0 \leq t \leq T} \|x(t)\|, \max_{0 \leq t \leq T} \|y(t)\|))$ ,  $S := \{t \in : x(t) \neq y(t)\}$ ,  $t_* := \inf S$ , 下证  $t_* = \infty$ . 反证, 假设  $0 \leq t_* \leq T$ .

- 如果  $t_* = T$ , 那么  $x(T) = y(T)$ , 此时容易看出矛盾。
- 如果  $0 < t_* < T$ , 那么对于充分小的  $\delta > 0$ , 当  $t \in [0, t_* + \delta]$  时有  $x(t) = y(t)$ , 从而

$$\|x(t) - y(t)\| \leq L\Gamma(\alpha)^{-1} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|x(s) - y(s)\| ds,$$

然后利用分数阶 Gronwall 不等式就推出矛盾。



# Picard 唯一性定理的证明概要

- 如果  $t_* = 0$ , 那么对于充分小的  $\delta > 0$ , 当  $t \in [0, \delta]$  时,

$$\|x(t) - y(t)\| \leq 2L\Gamma(\alpha + 1)^{-1}t^\alpha \max_{0 \leq s \leq t} \|x(s) - y(s)\|,$$

两边对  $t \in [0, \delta]$  取最大值, 得到

$$\max_{0 \leq t \leq \delta} \|x(t) - y(t)\| \leq 2L\Gamma(\alpha + 1)^{-1}\delta^\alpha \max_{0 \leq t \leq \delta} \|x(t) - y(t)\|,$$

因此只要选取  $2L\Gamma(\alpha + 1)^{-1}\delta^\alpha < 1$  就能看出在  $[0, \delta]$  上成立  $x = y$ , 这也导致矛盾。  
综合以上各种情况知  $x$  和  $y$  在整个  $I$  上相等。

如若  $x, y$  是  $[0, \infty)$  上方程 (1) 的弱解, 上述结果表明它们在任何有限区间  $[0, T]$  上相等, 因而在  $[0, \infty)$  上相等。唯一性证毕。



# L1 格式

在叙述数值解部分的结果之前, 先给出数值格式。取严格递增趋于正无穷的序列  $(t_n)_{n=0}^{\infty}$  作为时间节点, 其中  $t_0 = 0$ . 利用在每个小区间上线性插值的办法来近似导数和延迟, 就得到针对方程 (1) 的 L1 数值格式

$$x_n = (t_n - t_{n-1})^\alpha \left( \Gamma(2 - \alpha) f(t_n, x_n, \bar{x}^n) + \sum_{k=0}^{n-1} (a_{n,k+1} - a_{n,k}) x_k \right),$$

其中  $a_{n,k} := \frac{(t_n - t_{k-1})^{1-\alpha} - (t_n - t_k)^{1-\alpha}}{t_k - t_{k-1}} (1 \leq k \leq n)$ ,  $a_{n,0} := 0$ ,  $\bar{x}_n$  是对  $x(qt_n)$  的近似, 即设  $t_{m_n-1} \leq qt_n < t_{m_n}$ , 有

$$\bar{x}_n := \frac{t_{m_n} - qt_n}{t_{m_n} - t_{m_n-1}} x_{m_n-1} + \frac{qt_n - t_{m_n-1}}{t_{m_n} - t_{m_n-1}} x_{m_n}.$$



# 数值解的长时间有界性

## 定理 3

如果存在常数  $a > 0, a_u > a_v > 0$ , 使得对任何  $t \geq 0$  和  $u, v \in \mathbb{R}^d$  成立

$$\langle u, f(t, u, v) \rangle \leq a - a_u \|u\|^2 + a_v \|v\|^2,$$

那么

$$\|x_n\| \leq \max \left( (a_u - a_v)^{-1/2} a^{1/2}, \|x_0\| \right).$$

在 L1 数值格式两边与  $x_n$  作内积并结合 Cauchy-Schwarz 不等式得到

$$\begin{aligned} \|x_n\|^2 &\leqslant (t_n - t_{n-1})^\alpha \left( \Gamma(2 - \alpha) (a - a_u \|x_n\|^2 + a_v \|\bar{x}_n\|^2) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=0}^{n-1} (a_{n,k+1} - a_{n,k}) \frac{\|x_k\|^2 + \|x_n\|^2}{2} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

注意到  $\sum_{k=0}^{n-1} (a_{n,k+1} - a_{n,k}) = a_{n,n} = (t_n - t_{n-1})^{-\alpha}$ , 有

$$(t_n - t_{n-1})^\alpha \sum_{k=0}^{n-1} (a_{n,k+1} - a_{n,k}) \frac{\|x_k\|^2 + \|x_n\|^2}{2} \leqslant \frac{1}{2} \left( \max_{0 \leqslant k < n} \|x_k\|^2 + \|x_n\|^2 \right). \quad (3)$$



将式 (3) 代入式 (2) 得到

$$\begin{aligned}\|x_n\|^2 &\leq a_n \left( a - a_u \|x_n\|^2 + a_v \|\bar{x}_n\|^2 \right) + \max_{0 \leq k < n} \|x_k\|^2 \\ &\leq a_n \left( a - a_u \|x_n\|^2 + a_v \max_{0 \leq k \leq n} \|x_k\|^2 \right) + \max_{0 \leq k < n} \|x_k\|^2,\end{aligned}$$

其中  $a_n := 2(t_n - t_{n-1})^\alpha \Gamma(2 - \alpha)$ . 现在易证

$$\|x_n\|^2 \leq \max\left((a_u - a_v)^{-1}a, \max_{0 \leq k < n} \|x_k\|^2\right), \quad n \in \mathbb{N}_+,$$

最后归纳即得结论。



# 数值解的稳定性

把方程 (1) 的初值条件改为  $x(0) = y_0$ , 用同样的数值算法 (包括步长) 产生数值解  $(y_n)_{n=0}^{\infty}$  和对“延迟”的近似  $(\bar{y}_n)_{n=0}^{\infty}$ , 并记  $e_n := y_n - x_n, \bar{e}_n := \bar{y}_n - \bar{x}_n$ .

## 定理 4

如果存在常数  $b_u > b_v > 0$ , 使得对任何  $t \geq 0$  和  $u, v, x, y \in \mathbb{R}^d$  成立

$$\begin{cases} \langle f(t, u, v) - f(t, x, v), u - x \rangle \leq -b_u \|u - x\|^2, \\ \|f(t, u, v) - f(t, u, y)\| \leq b_v \|v - y\|, \end{cases}$$

那么

$$\|e_n\| \leq \|e_0\|.$$

写出  $(e_n)_{n=0}^{\infty}$  满足的等式为

$$e_n = (t_n - t_{n-1})^{\alpha} \left( \sum_{k=0}^{n-1} (a_{n,k+1} - a_{n,k}) e_k + \Gamma(2 - \alpha) (f(t_n, y_n, \bar{y}_n) - f(t_n, x_n, \bar{x}_n)) \right),$$

两边同  $e_n$  取内积并放缩得到

$$\|e_n\|^2 \leq \max_{0 \leq k < n} \|e_k\|^2 + a_n \left( -b_u \|e_n\|^2 + b_v \max_{0 \leq k \leq n} \|e_k\|^2 \right).$$

其中  $a_n := 2(t_n - t_{n-1})^{\alpha} \Gamma(2 - \alpha)$ . 由此容易得到

$$\|e_n\| \leq \max_{0 \leq k < n} \|e_k\|, \quad n \in \mathbb{N}_+.$$

最后归纳即得结论。

- 课题主要研究内容
- 目前已完成的研究工作及结果
- 后期拟完成的研究工作及进度安排
- 存在的困难与问题





## 后期拟完成的研究工作及进度安排

- 2024 年 7 月，整理现有工作，并考虑向带有 Caputo 导数的弱奇性方程推广。
- 2024 年 8-11 月，涉猎关于分数阶数值方法收敛性的文章，并考虑方程 (1) 的  $L_1$  格式的收敛性。
- 2024 年 12 月-2025 年 2 月，考虑更多类型的方程和数值算法。
- 2025 年 3 月-2025 年 5 月，撰写毕业论文，准备毕业答辩。

- 课题主要研究内容
- 目前已完成的研究工作及结果
- 后期拟完成的研究工作及进度安排
- 存在的困难与问题





# 存在的困难与问题

分数阶导数的记忆性导致数值方法的收敛性难以分析。

这里数值方法收敛指的是在时间步长趋于 0 时，数值解和弱解的差距也会趋于 0.



哈爾濱工業大學  
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

感谢倾听！