哈 尔 滨 工 业 大 学

硕 士 学 位 论 文 中 期 报 告

题 目：分数阶比例延迟方程的几种数值方法的研究

院　　（系）　数学学院

学　　　　科　基础数学

导　　　　师　雷强

研　究　生　李云鹏

学　　　　号　22S012004

中期报告日期　2024 年 6 月 28 日

研究生院制

目　录

1 课题主要研究内容及进度情况

设 $d \in \mathbb{N}_+$. 本课题主要研究如下的分数阶比例延迟方程，

$$\begin{cases} {}^C D_{0^+}^{\alpha} x(t) = f(t, x(t), x(qt)), \quad t \geqslant 0, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{1}$$

其中 x 是 $\mathbb{R}^d$ 值未知函数，$x_0 \in \mathbb{R}^d$ 给定，$0 < \alpha < 1$, 函数 $f : [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ 连续，${}^C D_{0^+}^{\alpha} x(t) = \Gamma(1-\alpha)^{-1} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} x'(s)\,\mathrm{d}s$. 参考 Webb J. R. L. 的文献 [1], 我们给出对于方程 (1) 的弱解的定义。

定义 1 如果有函数 x, 使得 t 属于 $[0, \infty)$ 的某个包含 0 的子区间 I 上时满足

$$x(t) = x_0 + \Gamma(\alpha)^{-1} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s), x(qs))\,\mathrm{d}s, \tag{2}$$

那么称 x 是方程 (1) 在 I 上的一个弱解。

目前研究了弱解的 Peano 存在性和 Picard 存在唯一性定理，并对任意步长下的 L1 数值格式的长时间行为做了讨论。

在准确解部分得到的结果见如下的定理 1 和 2.

定理 1 **(Peano 存在性定理)** 方程 (1) 总是在某个小区间 $[0, h]$ 上存在弱解。

定理 2 **(Picard 存在唯一性定理)** 如果 $f(t, \cdot, \cdot)$ 对 $t \in [0, \infty)$ 一致地局部 Lipschitz, 即对任何 $r > 0$, 存在不依赖于 t 的 $L = L(r) \geqslant 0$, 使得

$$\|f(t, x, y) - f(t, u, v)\| \leqslant L \cdot (\|x - u\| + \|y - v\|) \tag{3}$$

对任何 $t \in [0, \infty)$ 以及 $x, y, u, v \in B_r(0)$ 成立，那么方程 (1) 在某个小区间 $[0, h]$ 上存在弱解，并且弱解在存在区间 $I \ni 0$ 上唯一。进一步地，如果 L 可以不依赖于 r, 那么在 $[0, \infty)$ 上全局存在唯一的弱解。

在叙述数值解部分的结果之前，先给出数值格式。取严格递增趋于正无穷的序列 $(t_n)_{n=0}^{\infty}$ 作为时间节点，其中 $t_0 = 0$. 利用在每个小区间上线性插值的办法来近似导数和延迟，就得到针对方程 (1) 的 L1 数值格式

$$x_n = (t_n - t_{n-1})^{\alpha} \Big(\Gamma(2-\alpha) f\left(t_n, x_n, \overline{x}^n\right) + \sum_{k=0}^{n-1} \left(a_{n,k+1} - a_{n,k}\right) x_k \Big), \tag{4}$$

其中 $a_{n,k} := \frac{(t_n - t_{k-1})^{1-\alpha} - (t_n - t_k)^{1-\alpha}}{t_k - t_{k-1}} (1 \leqslant k \leqslant n), a_{n,0} := 0, \overline{x}_n$ 是对 $x(qt_n)$ 的近似，即设 $t_{m_n - 1} \leqslant qt_n < t_{m_n}$, 有

$$\overline{x}_n := \frac{t_{m_n} - qt_n}{t_{m_n} - t_{m_n - 1}} x_{m_n - 1} + \frac{qt_n - t_{m_n - 1}}{t_{m_n} - t_{m_n - 1}} x_{m_n}.$$

在数值解部分得到的结果为如下的定理 2 和 3 , 其中所描述的数值解的长时间行为与文献 [2] 中得到的准确解在相同条件下的长时间行为相吻合，同时也是对文献 [3] 中结果的推广。接下来的定理 3 说明，在一定条件下，数值解有界。

定理 3 如果存在常数 $a > 0, a_u > a_v > 0$, 使得对任何 $t \geq 0$ 和 $u, v \in \mathbb{R}^d$ 成立

$$\langle u, f(t,u,v)\rangle \leqslant a - a_u\|u\|^2 + a_v\|v\|^2,$$

那么

$$\|x_n\| \leqslant \max\left((a_u - a_v)^{-1/2} a^{1/2}, \|x_0\|\right). \tag{5}$$

接下来讨论数值解的稳定性。为此，把方程 (1) 的初值条件改为 $x(0) = y_0$, 用同样的数值算法（包括步长）产生数值解 $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ 和对“延迟”的近似 $(\overline{y}_n)_{n=0}^{\infty}$, 并记 $e_n := y_n - x_n, \overline{e}_n := \overline{y}_n - \overline{x}_n$. 接下来的定理 4 表明，在一定条件下，数值解稳定。

定理 4 如果存在常数 $b_u > b_v > 0$, 使得对任何 $t \geq 0$ 和 $u, v, x, y \in \mathbb{R}^d$ 成立

$$\begin{cases} \langle f(t,u,v) - f(t,x,v), u - x\rangle \leqslant -b_u\|u - x\|^2, \\ \|f(t,u,v) - f(t,u,y)\| \leqslant b_v\|v - y\|, \end{cases}$$

那么

$$\|e_n\| \leqslant \|e_0\|.$$

2 目前已完成的研究工作及结果

这一节来叙述上一节中各定理的证明。

定理 1 的证明 记 $M < \infty$ 是集合 $\left\{\|f(t,u,v)\| : t \in [0,1], u, v \in B_{2\|x_0\|}(0)\right\}$ 的一个上界，并取 $0 < h \leqslant 1$ 充分小，使得 $\Gamma(\alpha+1)^{-1}h^{\alpha}M \leqslant \|x_0\|$. 对于正整数 m，作 $t_n^m := nh/m,\ n = 0, 1, 2, \ldots, m$, 然后按下式构造 $\left(x_n^m\right)_{n=0}^m \subset \mathbb{R}^d$,

$$x_n^m = x_0 + \Gamma(\alpha)^{-1} \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_n - s)^{\alpha-1} f\left(s, x_{k-1}^m, x_{q_{k-1}^m}^m\right) \mathrm{d}s,\ n = 1, 2, \ldots, m, \tag{6}$$

其中 $q_k^m := \lfloor q t_k^m \rfloor$. 利用这些有限长的序列，分段线性插值地构造连续函数 $(x^m)_{m=1}^{\infty} : [0,h] \to \mathbb{R}^d$，即

$$x^m(t) := \frac{t_n^m - t}{t_n^m - t_{n-1}^m} x_{n-1}^m + \frac{t - t_{n-1}^m}{t_n^m - t_{n-1}^m} x_n^m,\ t_{n-1}^m \leqslant t \leqslant t_n^m.$$

另外，为方便起见，对于 $\delta > 0$, 记 $D(\delta) := \{(s,t) \in [0,h] \times [0,h] : 0 \leqslant t - s < \delta\}$.

现在证明 $\|x^m(t_n)\| \leqslant 2\|x_0\|,\ 0 \leqslant t \leqslant h, n = 0, 1, 2, \ldots, m, m \in \mathbb{N}_+$. 施归纳于 n.

$n=0$ 时显然。假设对于 $0 \leqslant k < n$ 成立 $\|x^m(t_k)\| \leqslant 2\|x_0\|$, 根据 M 和 h 的定义,

$$
\begin{aligned}
\|x^m(t_n)\| &\leqslant \|x_0\| + \Gamma(\alpha)^{-1} \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_n - s)^{\alpha-1} \left\| f\left(s, x_{k-1}^m, x_{q_{k-1}^m}^m\right) \right\| \mathrm{d}s \\
&\leqslant \|x_0\| + \Gamma(\alpha)^{-1} \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_n - s)^{\alpha-1} M \,\mathrm{d}s \\
&= \|x_0\| + \Gamma(\alpha)^{-1} M \int_0^{t_n} (t_n - s)^{\alpha-1} \,\mathrm{d}s \\
&= \|x_0\| + \Gamma(\alpha+1)^{-1} M t_n^{\alpha} \\
&\leqslant \|x_0\| + \Gamma(\alpha+1)^{-1} M h^{\alpha} \leqslant 2\|x_0\|,
\end{aligned}
$$

这样就完成了归纳。而对任何 $t \in [0, h]$, t 必然落在某个形如 $\left[t_{n-1}^m, t_n^m\right]$ 的区间中,从而

$$
\|x^m(t)\| \leqslant \frac{t_n^m - t}{t_n^m - t_{n-1}^m} \left\| x_{n-1}^m \right\| + \frac{t - t_{n-1}^m}{t_n^m - t_{n-1}^m} \left\| x_n^m \right\| \leqslant 2\|x_0\|.
$$

因此对每个 $t \in [0, h]$ 都有 $(x^m(t))_{m=1}^{\infty}$ 在 $\mathbb{R}^d$ 中相对紧。

然后讨论连续函数列 $(x^m)_{m=1}^{\infty}$ 的等度连续性。首先，对于 $0 \leqslant k \leqslant n \leqslant m$, 有

$$
\begin{aligned}
&\Gamma(\alpha) \left\| x_n^m - x_k^m \right\| \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{k} \int_{t_{j-1}^m}^{t_j^m} \left(\left(t_k^m - s\right)^{\alpha-1} - \left(t_n^m - s\right)^{\alpha-1} \right) M \,\mathrm{d}s + \sum_{j=k+1}^{n} \int_{t_{j-1}^m}^{t_j^m} \left(t_n^m - s\right)^{\alpha-1} M \,\mathrm{d}s \\
&= M \cdot \left(\int_0^{t_k^m} \left(\left(t_k^m - s\right)^{\alpha-1} - \left(t_n^m - s\right)^{\alpha-1} \right) \mathrm{d}s + \int_{t_k^m}^{t_n^m} \left(t_n^m - s\right)^{\alpha-1} \mathrm{d}s \right) \\
&= M\alpha^{-1} \cdot \left(\left(t_k^m\right)^{\alpha} - \left(t_n^m\right)^{\alpha} + 2\left(t_n^m - t_k^m\right)^{\alpha} \right) \leqslant 2M\alpha^{-1} \left(t_n^m - t_k^m\right)^{\alpha}.
\end{aligned}
$$

而至于 $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant h$, 不妨设 $s \in \left[t_{k-1}^m, t_k^m\right]$, $t \in \left[t_{n-1}^m, t_n^m\right]$. 如果 $k < n$, 那么

$$
\begin{aligned}
\|x^m(t) - x^m(s)\| &\leqslant \|x^m(t) - x^m(t_{n-1})\| + \left\| x_{n-1}^m - x_k^m \right\| + \|x^m(t_k) - x^m(s)\| \\
&\leqslant \left\| x_n^m - x_{n-1}^m \right\| + \left\| x_{n-1}^m - x_k^m \right\| + \left\| x_k^m - x_{k-1}^m \right\| \\
&\leqslant 2M\Gamma(\alpha+1)^{-1} \left(\left(t_n^m - t_{n-1}^m\right)^{\alpha} + \left(t_{n-1}^m - t_k^m\right)^{\alpha} + \left(t_k^m - t_{k-1}^m\right)^{\alpha} \right) \\
&\leqslant 2M\Gamma(\alpha+1)^{-1} \left(2(h/m)^{\alpha} + (t-s)^{\alpha} \right),
\end{aligned}
$$

而若是 $k = n$, 则有

$$
\begin{aligned}
\|x^m(t) - x^m(s)\| &\leqslant \left\| x_n^m - x_{n-1}^m \right\| \\
&\leqslant 2M\Gamma(\alpha+1)^{-1} \left(t_n^m - t_{n-1}^m\right)^{\alpha} \\
&\leqslant 2M\Gamma(\alpha+1)^{-1} (h/m)^{\alpha},
\end{aligned}
$$

总之

$$\|x^m(t)-x^m(s)\| \leqslant 2M\Gamma(\alpha+1)^{-1}\left(2(h/m)^\alpha+(t-s)^\alpha\right). \tag{7}$$

任给 $\varepsilon>0$, 取 $N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N}_+$ 和 $\delta_0=\delta_0(\varepsilon)>0$ 分别满足 $2M\Gamma(\alpha+1)^{-1}\delta_0^\alpha<\varepsilon/2$ 和 $4M\Gamma(\alpha+1)^{-1}(h/N)^\alpha<\varepsilon/2$. 由式 (7) 可知，$\|x^m(t)-x^m(s)\|<\varepsilon$ 对任何 $m>N$ 及 $(s,t)\in D(\delta_0)$ 成立。至于 $1\leqslant m\leqslant N$, 由于每个 x^m 都是 $[0,h]$ 上的一致连续函数，故存在有限个只依赖于 ε 的正数 $(\delta_m)_{m=1}^N$, 使得对于 $(s,t)\in D(\delta_m)$ 成立 $\|x^m(t)-x^m(s)\|<\varepsilon$. 现在取 $\delta=\delta(\varepsilon):=\min_{0\leqslant m\leqslant N}\delta_m>0$, 那么当 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant h$ 且 $t-s<\delta$ 时，$\|x^m(t)-x^m(s)\|<\varepsilon$ 对于任何 $m\in\mathbb{N}_+$ 成立。这说明 $(x^m)_{m=1}^\infty$ 是 $C[0,h]$ 中的一致等度连续函数列。

使用 Arzelà-Ascoli 定理，我们得到 $\{x^m\colon m\in\mathbb{N}_+\}$ 在 $C\left([0,h],\mathbb{R}^d\right)$ 中相对紧，故有一致收敛子列，这个子列仍记为 $(x^m)_{m=1}^\infty$, 并设其极限函数为 $x\in C\left([0,h],\mathbb{R}^d\right)$. 任给 $\varepsilon>0$, 由于 f 在紧集 $[0,h]\times\overline{B_{2\|x_0\|}(0)}\times\overline{B_{2\|x_0\|}(0)}\subset[0,h]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$ 上一致连续，故存在 $\delta_1=\delta_1(\varepsilon)>0$ 使得 $\|f(t,u,v)-f(t,x,y)\|<\varepsilon\alpha\Gamma(\alpha)h^{-\alpha}/4$ 对 $t\in[0,h]$ 以及满足 $\|u-x\|+\|v-y\|<\delta_1$ 的 $u,v,x,y\in B_{2\|x_0\|}(0)$ 成立。取 $N_1=N_1(\delta_1)\in\mathbb{N}_+$, 使得当 $m>N_1$ 且 $t\in[0,h]$ 时成立 $\|x^m(t)-x(t)\|<\delta_1/2$, 从而

$$\begin{aligned}&\left\|\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}f(s,x^m(s),x^m(qs))\,\mathrm{d}s-\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}f(s,x(s),x(qs))\,\mathrm{d}s\right\|\\&\leqslant\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\frac{\varepsilon\alpha\Gamma(\alpha)h^{-\alpha}}{4}\,\mathrm{d}s=\varepsilon\Gamma(\alpha)h^{-\alpha}t^\alpha/4\leqslant\varepsilon\Gamma(\alpha)/4.\end{aligned} \tag{8}$$

由 $(x^m)_{m=1}^\infty$ 的等度连续性，存在 $\delta_2=\delta_2(\varepsilon)>0$ 使得 $\|x^m(t)-x^m(s)\|<\min\left(\delta_1/2,\varepsilon/4\right)$ 对任何 $m\in\mathbb{N}_+$ 及 $(s,t)\in D\left(\delta_2\right)$ 成立。取 $N_2=N_2(\delta_2)\in\mathbb{N}_+$ 使得 $h/N_2<\delta_2$. 一方面，注意到 $m>N_2$ 时总有 $t_n-t_{n-1}<\delta_2<\delta_1/2$, $n=0,1,2,\ldots,m$, 于是 $\left\|f\left(t,x_{n-1}^m,x_{q_{n-1}^m}^m\right)-f\left(t,x^m(t),x^m(qt)\right)\right\|<\varepsilon\alpha\Gamma(\alpha)h^{-\alpha}/4$, $t\in\left[t_{n-1}^m,t_n^m\right]$, 从而

$$\begin{aligned}&\Gamma(\alpha)\left\|x^m(t_n)-x_0-\Gamma(\alpha)^{-1}\int_0^{t_n}(t_n-s)^{\alpha-1}f(s,x^m(s),x^m(qs))\,\mathrm{d}s\right\|\\&\leqslant\sum_{k=1}^n\int_{t_{k-1}}^{t_k}(t_n-s)^{\alpha-1}\left\|f\left(s,x_{k-1}^m,x_{q_{k-1}^m}^m\right)-f\left(s,x^m(s),x^m(qs)\right)\right\|\mathrm{d}s\\&\leqslant\sum_{k=1}^n\int_{t_{k-1}}^{t_k}(t_n-s)^{\alpha-1}\frac{\varepsilon\alpha\Gamma(\alpha)h^{-\alpha}}{4}\,\mathrm{d}s\\&=\int_0^{t_n}(t_n-s)^{\alpha-1}\frac{\varepsilon\alpha\Gamma(\alpha)h^{-\alpha}}{4}\,\mathrm{d}s\leqslant\varepsilon\Gamma(\alpha)/4.\end{aligned} \tag{9}$$

另一方面，任取 $t\in[0,h]$, 设 $t\in[t_{n-1},t_n]$, 则对任何 $m\in\mathbb{N}_+$ 成立

$$\|x^m(t)-x^m(t_n)\|<\varepsilon/4. \tag{10}$$

根据文献 [4] 中的性质 3.2(3), 在 f 和 x 都连续时，$t \mapsto \Gamma(\alpha)^{-1}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}f(s,x(s),x(qs))\,\mathrm{d}s$ 也是连续的, 因此可取 $N_3 = N_3(\varepsilon) \in \mathbb{N}_+$ 充分大（从而 $h/N_3 > 0$ 足够小），使得 $m > N_3$ 且 $(s,t) \in D(h/N_3)$ 时，$\Gamma(\alpha)^{-1}\left\|\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau,x(\tau),x(q\tau))\,\mathrm{d}\tau - \int_0^s(s-\tau)^{\alpha-1}f(\tau,x(\tau),x(q\tau))\,\mathrm{d}\tau\right\| < \varepsilon/4$. 于是当 $t \in [0,h]$ 时，设 $t \in [t_{n-1},t_n]$, 有

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha)^{-1}\bigg\|&\int_0^{t_n}(t_n-s)^{\alpha-1}f(s,x(s),x(qs))\,\mathrm{d}s\\ &-\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}f(s,x(s),x(qs))\,\mathrm{d}s\bigg\| < \varepsilon/4.\end{aligned} \tag{11}$$

现在取 $N = N(\varepsilon) := \max(N_1,N_2,N_3)$, 根据式 (8)–(11) 以及三角不等式，当 $m > N, t \in [0,h]$ 时，设 $t \in [t_{n-1},t_n]$, 那么可以估计

$$\begin{aligned}&\left\|x^m(t)-x_0-\Gamma(\alpha)^{-1}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}f(s,x(s),x(qs))\,\mathrm{d}s\right\|\\ \leqslant{}&\|x^m(t)-x^m(t_n)\|\\ &+\left\|x^m(t_n)-x_0-\Gamma(\alpha)^{-1}\int_0^{t_n}(t_n-s)^{\alpha-1}f(s,x^m(s),x^m(qs))\,\mathrm{d}s\right\|\\ &+\bigg\|x_0+\Gamma(\alpha)^{-1}\int_0^{t_n}(t_n-s)^{\alpha-1}f(s,x^m(s),x^m(qs))\,\mathrm{d}s\\ &\qquad -x_0-\Gamma(\alpha)^{-1}\int_0^{t_n}(t_n-s)^{\alpha-1}f(s,x(s),x(qs))\,\mathrm{d}s\bigg\|\\ &+\bigg\|x_0+\Gamma(\alpha)^{-1}\int_0^{t_n}(t_n-s)^{\alpha-1}f(s,x(s),x(qs))\,\mathrm{d}s\\ &\qquad -x_0-\Gamma(\alpha)^{-1}\int_0^{t}(t-s)^{\alpha-1}f(s,x(s),x(qs))\,\mathrm{d}s\bigg\| < \varepsilon,\end{aligned}$$

即 $\lim_{m\to\infty}x^m(t) = x_0+\Gamma(\alpha)^{-1}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}f(s,x(s),x(qs))\,\mathrm{d}s$, $0 \leqslant t \leqslant h$. 而极限的唯一性导致

$$x(t) = \Gamma(\alpha)^{-1}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}f(s,x(s),x(qs))\,\mathrm{d}s,\ 0 \leqslant t \leqslant h,$$

从而 $x \in C([0,h],\mathbb{R}^d)$ 是方程 (1) 在 $[0,h]$ 上的一个弱解。 □

定理 2 的证明（存在性）构造 Picard 序列 $(x_n)_{n=0}^{\infty} : [0,\infty) \to \mathbb{R}^d$ 满足

$$\begin{cases}x_{n+1}(t) := x_0+\Gamma(\alpha)^{-1}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}f(s,x_n(s),x_n(qs))\,\mathrm{d}s, & n \in \mathbb{N},\\ x_0(t) := x_0,\end{cases}$$

为方便，这里用 $x_0 \in C([0,\infty),\mathbb{R}^d)$ 表达恒取 $x_0 \in \mathbb{R}^d$ 的常值函数，通常不会引起混淆。记 $M < \infty$ 是集合 $\left\{\|f(t,u,v)\| : t \in [0,1], u,v \in B_{2\|x_0\|}(0)\right\}$ 的一个上界，并

取 $0 < h \leqslant 1$ 充分小，使得 $\Gamma(\alpha+1)^{-1}h^\alpha M \leqslant \|x_0\|$. 可以归纳地证明 $\|x_n(t)\| \leqslant 2\|x_0\|$, $t \in [0,h], n \in \mathbb{N}$. 取 $L := L(2\|x_0\|)$, 那么对于 $t \in [0,h], n \in \mathbb{N}_+$,

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}(t) - x_n(t)\| \leqslant L\Gamma(\alpha)^{-1}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}& \\ \big(\|x_n(s) - x_{n-1}(s)\| + \|x_n(qs) - x_{n-1}(qs)\|\big)\,\mathrm{d}s&.\end{aligned} \tag{12}$$

现在归纳地说明

$$\|x_{n+1}(t) - x_n(t)\| \leqslant \frac{L^n M}{\Gamma(\alpha)^{n+1}\alpha} t^{(n+1)\alpha} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + q^{k\alpha}\right) \mathrm{B}(\alpha, k\alpha+1),\ t \in [0,h], n \in \mathbb{N}. \tag{13}$$

当 $n = 0$ 时，

$$\begin{aligned}\|x_1(t) - x_0(t)\| &= \|x_1(t) - x_0\| \\ &= \Gamma(\alpha)^{-1}\left\|\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x_0, x_0)\,\mathrm{d}s\right\| \\ &\leqslant \Gamma(\alpha)^{-1}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} M\,\mathrm{d}s \\ &= \Gamma(\alpha)^{-1}\alpha^{-1}t^\alpha M.\end{aligned}$$

假定式 (13) 在 n 取 $n-1$ 时成立，然后

$$\begin{aligned}&\|x_{n+1}(t) - x_n(t)\| \\ \leqslant{}& \frac{L}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\big(\|x_n(s) - x_{n-1}(s)\| + \|x_n(qs) - x_{n-1}(qs)\|\big)\,\mathrm{d}s \\ \leqslant{}& \frac{L^n M}{\Gamma(\alpha)^{n+1}\alpha}\left(\prod_{k=1}^{n-1}\left(1 + q^{k\alpha}\right)\mathrm{B}(\alpha, k\alpha+1)\right)\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left(s^{n\alpha} + (qs)^{n\alpha}\right)\mathrm{d}s \\ ={}& \frac{L^n M}{\Gamma(\alpha)^{n+1}\alpha}\left(\prod_{k=1}^{n-1}\left(1 + q^{k\alpha}\right)\mathrm{B}(\alpha, k\alpha+1)\right)\left(1 + q^{n\alpha}\right)\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}s^{n\alpha}\,\mathrm{d}s \\ ={}& \frac{L^n M}{\Gamma(\alpha)^{n+1}\alpha}\left(\prod_{k=1}^{n-1}\left(1 + q^{k\alpha}\right)\mathrm{B}(\alpha, k\alpha+1)\right)\left(1 + q^{n\alpha}\right)t^{n\alpha+\alpha}\mathrm{B}(\alpha, n\alpha+1) \\ ={}& \frac{L^n M}{\Gamma(\alpha)^{n+1}\alpha}t^{(n+1)\alpha}\prod_{k=1}^{n}\left(1 + q^{k\alpha}\right)\mathrm{B}(\alpha, k\alpha+1).\end{aligned}$$

由归纳原理，式 (13) 成立。进一步地，注意到

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1 + q^{k\alpha}\right) \leqslant \prod_{k=1}^{n}\exp\left(q^{k\alpha}\right) = \exp\sum_{k=1}^{n}(q^\alpha)^k \leqslant \exp\frac{q^\alpha}{1 - q^\alpha}$$

和

$$\prod_{k=1}^{n}\mathrm{B}(\alpha,k\alpha+1)=\prod_{k=1}^{n}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(k\alpha+1)}{\Gamma((k+1)\alpha+1)}=\Gamma(\alpha)^n\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma((n+1)\alpha+1)},$$

我们有

$$\|x_{n+1}(t)-x_n(t)\|\leqslant\frac{L^nMt^{(n+1)\alpha}}{\Gamma((n+1)\alpha+1)}\exp\frac{q^\alpha}{1-q^\alpha},\ t\in[0,h]. \tag{14}$$

由 Cauchy-Hadamard 公式和 Stirling 公式易知 Mittag-Leffler 函数[5]$E_\alpha(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\Gamma(\alpha n+1)^{-1}z^n$ 对于任何 $z\in\mathbb{C}$ 收敛，然后根据 Weierstrass M 判别法就得到函数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 在 $[0,h]$ 上绝对一致收敛，于是函数列 $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ 在 $[0,h]$ 上存在一致极限 x. 这说明任取 $\varepsilon>0$, 总存在 $N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, 使得 $\|x_n(t)-x(t)\|<\varepsilon$ 在 $n>N$ 且 $t\in[0,h]$ 时成立。这样一来，当 $t\in[0,h]$ 时，

$$\begin{aligned}&\left\|\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}f(s,x_n(s),x_n(qs))\,\mathrm{d}s-\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}f(s,x(s),x(qs))\,\mathrm{d}s\right\|\\&\leqslant\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}L\cdot(\|x_n(s)-x(s)\|+\|x_n(qs)-x(qs)\|)\,\mathrm{d}s\\&\leqslant 2\varepsilon L\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}s=2\varepsilon L\alpha^{-1}t^\alpha,\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}f(s,x_n(s),x_n(qs))\,\mathrm{d}s=\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}f(s,x(s),x(qs))\,\mathrm{d}s.$$

现在在式 (6) 中命 $n\to\infty$ 就得到

$$x(t)=x_0+\Gamma(\alpha)^{-1}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}f(s,x(s),x(qs))\,\mathrm{d}s,\ 0\leqslant t\leqslant h.$$

利用文献 [4] 中的性质 3.2(3)(6), 容易归纳地得到 $(x_n)_{n=0}^{\infty}\subseteq C^{0,\alpha}\cap AC[0,h]\subseteq C[0,h]$, 于是其一致极限 $x\in C[0,h]$. 这样 x 就是方程 (1) 在 $[0,h]$ 上的一个弱解。

如果 L 可以不依赖于 r, 那么式 (12) 对于一切 $t\in[0,\infty)$ 成立，由此可见方程 (1) 的弱解将在 $[0,\infty)$ 上全局存在。

（唯一性）设 $0<T:=\sup I<\infty$, x 和 $y\in C[0,T]$ 都是方程 (1) 的弱解。记 $L:=L(\max(\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|x(t)\|,\ \max_{0\leqslant t\leqslant T}\|y(t)\|))$, 并作 $S:=\{t\in[0,T]\colon x(t)\neq y(t)\}$, $t_*:=\inf S$, 下证 $t_*=\infty$. 反证，假设 $0\leqslant t_*\leqslant T$, 分三种情况讨论。

1. 如果 $t_*=T$, 此时必有 $T\in I$, 且在 $[0,T)$ 上 $x=y$, 而 x,y 都是连续的，因此必在闭区间 $[0,T]$ 上处处相等，此时 $S=\varnothing$, $t_*=\infty$, 矛盾。

2. 如果 $0 < t_* < T$, 那么在 $[0, t_*)$ 上有 $x = y$. 选取 $\delta > 0$ 充分小，使得 $t_* + \delta \leqslant T$ 且 $q \cdot (t_* + \delta) < t_*$, 然后就有 $x(qt) = y(qt)$, $0 \leqslant t \leqslant t_* + \delta$. 当 $t \in [0, t_* + \delta]$ 时，

$$\begin{aligned}\|x(t) - y(t)\| &\leqslant L\Gamma(\alpha)^{-1} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \big(\|x(s) - y(s)\| + \|x(qs) - y(qs)\|\big)\,\mathrm{d}s \\ &= L\Gamma(\alpha)^{-1} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|x(s) - y(s)\|\,\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

然后利用分数阶 Gronwall 不等式[1] 就得到在 $[0, t_* + \delta]$ 上都有 $x = y$, 故 $t_* \geqslant t_* + \delta$, 而这是不可能的。

3. 如果 $t_* = 0$, 选取 $\delta \in (0, T]$ 充分小，使得 $2L\Gamma(\alpha+1)^{-1}\delta^\alpha < 1$. 当 $t \in [0, \delta]$ 时，

$$\begin{aligned}&\|x(t) - y(t)\| \\ \leqslant\ & L\Gamma(\alpha)^{-1} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \big(\|x(s) - y(s)\| + \|x(qs) - y(qs)\|\big)\,\mathrm{d}s \\ \leqslant\ & 2L\Gamma(\alpha)^{-1} \Big(\max_{0 \leqslant s \leqslant t} \|x(s) - y(s)\|\Big) \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}s \\ =\ & 2L\Gamma(\alpha+1)^{-1} t^\alpha \max_{0 \leqslant s \leqslant t} \|x(s) - y(s)\|.\end{aligned}$$

上式两边对 $t \in [0, \delta]$ 取最大值，得到

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant \delta} \|x(t) - y(t)\| \leqslant 2L\Gamma(\alpha+1)^{-1}\delta^\alpha \max_{0 \leqslant t \leqslant \delta} \|x(t) - y(t)\|,$$

结合 δ 的选取知道只可能有 $\max_{0 \leqslant s \leqslant \delta} \|x(s) - y(s)\| = 0$, 即等式 $x = y$ 至少在 $[0, \delta]$ 上成立, 故 $t_* \geqslant \delta$, 矛盾.

综合以上各种情况知 $t_* \notin [0, T]$, 这只可能是 $t_* = \infty$, 此时必有 $S = \varnothing$, 故而 x 和 y 在整个 I 上相等。而如若 x, y 是 $[0, \infty)$ 上方程 (1) 的弱解，上述结果则表明它们在任何有限区间 $[0, T]$ 上相等，因而在 $[0, \infty)$ 上相等。唯一性证毕。 □

定理 3 的证明 式 (4) 两边与 x_n 作内积并结合 Cauchy-Schwarz 不等式得到

$$\begin{aligned}\|x_n\|^2 \leqslant (t_n - t_{n-1})^\alpha \Big(&\Gamma(2-\alpha)\left(a - a_u\|x_n\|^2 + a_v\|\overline{x}_n\|^2\right) \\ &+ \sum_{k=0}^{n-1} \left(a_{n,k+1} - a_{n,k}\right) \frac{\|x_k\|^2 + \|x_n\|^2}{2}\Big).\end{aligned} \tag{15}$$

注意到 $\sum_{k=0}^{n-1} \left(a_{n,k+1} - a_{n,k}\right) = a_{n,n} = (t_n - t_{n-1})^{-\alpha}$, 有

$$(t_n - t_{n-1})^\alpha \sum_{k=0}^{n-1} \left(a_{n,k+1} - a_{n,k}\right) \frac{\|x_k\|^2 + \|x_n\|^2}{2} \leqslant \frac{1}{2}\Big(\max_{0 \leqslant k < n} \|x_k\|^2 + \|x_n\|^2\Big). \tag{16}$$

将 (16) 代入式 (15) 得到

$$\begin{aligned}\|x_n\|^2 &\leqslant a_n\left(a - a_u\|x_n\|^2 + a_v\|\overline{x}_n\|^2\right) + \max_{0\leqslant k<n}\|x_k\|^2\\ &\leqslant a_n\Big(a - a_u\|x_n\|^2 + a_v\max_{0\leqslant k\leqslant n}\|x_k\|^2\Big) + \max_{0\leqslant k<n}\|x_k\|^2,\end{aligned}$$

其中 $a_n := 2\left(t_n - t_{n-1}\right)^\alpha \Gamma(2-\alpha)$. 如果 $\|x_n\| = \max_{0\leqslant k\leqslant n}\|x_k\|$, 那么 $\|x_n\|^2 \leqslant a_n\left(a - a_u\|x_n\|^2 + a_v\|x_n\|^2\right) + \|x_n\|^2$, 此时 $\|x_n\|^2 \leqslant (a_u - a_v)^{-1}a$; 否则 $\|x_n\| < \max_{0\leqslant k<n}\|x_k\|$. 因此，无论如何总有

$$\|x_n\|^2 \leqslant \max\big((a_u - a_v)^{-1}a, \max_{0\leqslant k<n}\|x_k\|^2\big),\ n\in\mathbb{N}_+.$$

最后只需归纳即可得到想要的结论。 □

定理 4 的证明 写出 $(e_n)_{n=0}^\infty$ 满足的等式为

$$e_n = (t_n - t_{n-1})^\alpha\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(a_{n,k+1} - a_{n,k}\right)e_k + \Gamma(2-\alpha)\left(f\left(t_n, y_n, \overline{y}_n\right) - f\left(t_n, x_n, \overline{x}_n\right)\right)\right),$$

两边同 e_n 取内积，得

$$\begin{aligned}\|e_n\|^2 \leqslant{}& (t_n - t_{n-1})^\alpha\Bigg(\sum_{k=0}^{n-1}\left(a_{n,k+1} - a_{n,k}\right)\frac{\|e_k\|^2 + \|e_n\|^2}{2} + \Gamma(2-\alpha)\\ &\left(\left\langle f\left(t_n, y_n, \overline{y}_n\right) - f\left(t_n, x_n, \overline{y}_n\right), e_n\right\rangle + \left\|f\left(t_n, x_n, \overline{y}_n\right) - f\left(t_n, x_n, \overline{x}_n\right)\right\|\|e_n\|\right)\Bigg)\\ \leqslant{}& 2^{-1}\Big(\max_{0\leqslant k<n}\|e_k\|^2 + \|e_n\|^2\Big) + 2^{-1}a_n\left(-b_u\|e_n\|^2 + b_v\|\overline{e}_n\|^2\right),\end{aligned}$$

其中 $a_n := 2\left(t_n - t_{n-1}\right)^\alpha \Gamma(2-\alpha)$. 注意到 $\|\overline{e}_n\| \leqslant \max_{0\leqslant k\leqslant n}\|e_k\|$, 我们有

$$\|e_n\|^2 \leqslant \max_{0\leqslant k<n}\|e_k\|^2 + a_n\Big(-b_u\|e_n\|^2 + b_v\max_{0\leqslant k\leqslant n}\|e_k\|^2\Big).$$

一种情况是 $\|e_n\| = \max_{0\leqslant k\leqslant n}\|e_k\|$, 此时 $\max_{0\leqslant k<n}\|e_k\|^2 \geqslant \|e_n\|^2(1 + a_n(b_u - b_v)) \geqslant \|e_n\|^2 = \max_{0\leqslant k\leqslant n}\|e_k\|^2 \geqslant \max_{0\leqslant k<n}\|e_k\|^2$, 这个不等式链的最左端和最右端一样，因此其中的不等号全取等，特别地有 $\|e_n\| = \max_{0\leqslant k<n}\|e_k\|$. 而另一种情况是 $\|e_n\| < \max_{0\leqslant k\leqslant n}\|e_k\|$, 此时显然有 $\|e_n\| < \max_{0\leqslant k<n}\|e_k\|$. 总之，

$$\|e_n\| \leqslant \max_{0\leqslant k<n}\|e_k\|,\ n\in\mathbb{N}_+.$$

最后归纳即得结论。 □

3 后期拟完成的研究工作及进度安排

2024 年 7 月，整理现有工作，并考虑向带有 Caputo 导数的弱奇性方程推广。

2024 年 8-11 月，涉猎关于分数阶数值方法收敛性的文章，并考虑方程 (1) 的 L1 格式 (4) 的收敛性。

2024 年 12 月-2025 年 2 月，考虑更多类型的方程和数值算法。

2025 年 3 月-2025 年 5 月，撰写毕业论文，准备毕业答辩。

4 存在的困难与问题

分数阶导数的记忆性导致数值解的收敛性难以分析。针对这一问题尚未找到有效的解决办法。给定区间 $[0, T]$, 其中 $0 < T < \infty$, 设 x 是这一区间上方程的准确解（弱解），并记由 L1 格式 (4) 在时间序列 $(t_k)_{k=0}^n$ 下产生的数值解为 $(x_k)_{k=0}^n$, 其中 $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = T$, 而考察收敛性实际上是考察 $\max_{1\leqslant k\leqslant n}(t_k - t_{k-1})$ 趋于 0 时是否有 $x(T) - x_n$ 趋于 0, 注意这里必定伴随着 $n \to \infty$. 分数阶导数的记忆性导致累积误差难以控制。我会继续查阅相关资料，并积极与老师同学讨论、交流思路和成果；也会从其他一些问题中寻求灵感，比如导数阶数大于 1 的情形。

5 如期完成全部论文工作的可能性

通过一年多的学习和积累，我对课题所在领域有了一定的了解，课题本身也已取得可观的进展，如期完成论文工作的可能性较大。

参考文献

[1] Webb J. Weakly singular Gronwall inequalities and applications to fractional differential equations[J/OL]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2019, 471(1): 692-711 [2018-11-06]. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2018.11.004.

[2] Wang D. Dissipativity and stability analysis for fractional functional differential equations[J/OL]. Fractional Calculus and Applied Analysis, 2015, 18: 1399-1422 [2015-12-05]. https://doi.org/10.1515/fca-2015-0081.

[3] Li D, Zhang C. Long time numerical behaviors of fractional pantograph equations[J/OL]. Mathematics and Computers in Simulation, 2020, 172: 244-257 [2019-12-16]. https://doi.org/10.1016/j.matcom.2019.12.004.

[4] Webb J R L. Initial value problems for Caputo fractional equations with singular nonlinearities[C/OL] // Electronic journal of differential equations. 2020 [2019-10-30]. https://ejde.math.txstate.edu.

[5] Jin B. Mittag-Leffler and Wright functions[M/OL] // Fractional differential equations: An approach via fractional derivatives. Cham: Springer International Publishing, 2021: 59-94 [2021-07-23]. https://doi.org/10.1007/978-3-030-76043-4_3.