哈爾濱工業大學
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

分数阶比例延迟方程的几种数值方法的研究

汇报人：李云鹏

导　师：雷　强

2024 年 6 月 28 日

目录

- 课题主要研究内容
- 目前已完成的研究工作及结果
- 后期拟完成的研究工作及进度安排
- 存在的困难与问题

- 课题主要研究内容
- 目前已完成的研究工作及结果
- 后期拟完成的研究工作及进度安排
- 存在的困难与问题

课题主要研究内容

设 $d \in \mathbb{N}_+$. 本课题主要研究如下的分数阶比例延迟方程，

$$\begin{cases} {}^C D_{0+}^{\alpha} x(t) = f(t, x(t), x(qt)), \quad t \geqslant 0, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{1}$$

其中 x 是 $\mathbb{R}^d$ 值未知函数，$x_0 \in \mathbb{R}^d$ 给定，$0 < \alpha < 1$, 函数 $f : [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ 连续，${}^C D_{0+}^{\alpha} x(t) = \Gamma(1-\alpha)^{-1} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} x'(s) \, \mathrm{d}s$.

定义

如果有函数 x, 使得 t 属于 $[0, \infty)$ 的某个包含 0 的子区间 I 上时满足

$$x(t) = x_0 + \Gamma(\alpha)^{-1} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s), x(qs)) \, \mathrm{d}s,$$

那么称 x 是方程 (1) 在 I 上的一个弱解。

- 课题主要研究内容
- 目前已完成的研究工作及结果
- 后期拟完成的研究工作及进度安排
- 存在的困难与问题

弱解的存在性与唯一性

定理 1 (Peano 存在性定理)

方程 (1) 总是在某个小区间 $[0,h]$ 上存在弱解。

定理 2 (Picard 存在唯一性定理)

如果 $f(t,\cdot,\cdot)$ 对 $t\in[0,\infty)$ 一致地局部 *Lipschitz*, 即对任何 $r>0$, 存在不依赖于 t 的 $L=L(r)\geqslant 0$, 使得

$$\|f(t,x,y)-f(t,u,v)\|\leqslant L\cdot(\|x-u\|+\|y-v\|)$$

对任何 $t\in[0,\infty)$ 以及 $x,y,u,v\in B_r(0)$ 成立，那么方程 (1) 在某个小区间 $[0,h]$ 上存在弱解，并且弱解在存在区间 $I\ni 0$ 上唯一。进一步地，如果 L 可以不依赖于 r, 那么在 $[0,\infty)$ 上全局存在唯一的弱解。

Peano 存在性定理的证明概要

取时间序列 $t_n^m := nh/m$, $n = 0, 1, 2, \ldots, m$, 并构造 Euler 折线 $(x^m)_{m=1}^{\infty} : [0, h] \to \mathbb{R}^d$ 如下。

$$x_n^m = x_0 + \Gamma(\alpha)^{-1} \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}^m}^{t_k^m} (t_n^m - s)^{\alpha-1} f\big(s, x_{k-1}^m, x_{q_{k-1}^m}^m\big)\,\mathrm{d}s,\ n = 1, 2, \ldots, m,$$

$$x^m(t) := \frac{t_n^m - t}{t_n^m - t_{n-1}^m} x_{n-1}^m + \frac{t - t_{n-1}^m}{t_n^m - t_{n-1}^m} x_n^m,\ t_{n-1}^m \leqslant t \leqslant t_n^m,$$

其中 $h > 0$ 取充分小, 使得 Euler 折线一致有界。

Peano 存在性定理的证明概要

可以估计出

$$\|x^m(t) - x^m(s)\| \leqslant 2M\Gamma(\alpha+1)^{-1}\left(2(h/m)^\alpha + (t-s)^\alpha\right),$$

进而知道 $(x^m)_{m=1}^\infty$ 等度连续。

使用 Arzelà-Ascoli 定理，$(x^m)_{m=1}^\infty$ 有一致收敛子列，仍记为 $(x^m)_{m=1}^\infty$，并设其极限函数为 $x \in C\left([0,h],\mathbb{R}^d\right)$.

接下来证明 x 是方程 (1) 在 $[0,h]$ 上的一个弱解。

Peano 存在性定理的证明概要

借助三角不等式，对任何 $t \in [0,h]$，设 $t \in \left[t_{n-1}^m, t_n^m\right]$，有

$$
\begin{aligned}
&\left\| x^m(t) - x_0 - \Gamma(\alpha)^{-1} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s), x(qs))\, \mathrm{d}s \right\| \\
\leqslant\ & \| x^m(t) - x^m(t_n^m) \| \\
&+ \left\| x^m(t_n^m) - x_0 - \Gamma(\alpha)^{-1} \int_0^{t_n^m} (t_n^m - s)^{\alpha-1} f(s, x^m(s), x^m(qs))\, \mathrm{d}s \right\| \\
&+ \Gamma(\alpha)^{-1} \left\| \int_0^{t_n^m} (t_n^m - s)^{\alpha-1} \left(f(s, x^m(s), x^m(qs)) - f(s, x(s), x(qs)) \right) \mathrm{d}s \right\| \\
&+ \Gamma(\alpha)^{-1} \left\| \int_0^{t_n^m} (t_n^m - s)^{\alpha-1} f(s, x(s), x(qs))\, \mathrm{d}s - \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s), x(qs))\, \mathrm{d}s \right\|.
\end{aligned}
$$

Peano 存在性定理的证明概要

可以证明，当 m 充分大时，不等号右边的每一项都可以任意小，从而

$$x(t) = x_0 + \Gamma(\alpha)^{-1} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s), x(qs))\,\mathrm{d}s,\ 0 \leqslant t \leqslant h.$$

从而 $x \in C([0,h], \mathbb{R}^d)$ 是方程 (1) 在 $[0,h]$ 上的一个弱解。

Picard 存在性定理的证明概要

构造 Picard 序列 $(x_n)_{n=0}^{\infty} : [0,\infty) \to \mathbb{R}^d$ 满足

$$\begin{cases} x_{n+1}(t) := x_0 + \Gamma(\alpha)^{-1} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x_n(s), x_n(qs))\,\mathrm{d}s, & n \in \mathbb{N}, \\ x_0(t) := x_0. \end{cases}$$

取 h 充分小，使得 $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ 一致有界。(这是为了在证明过程中取固定的 Lipschitz 常数。如果 L 可以与 r 无关，那么就可以在整个 $[0,\infty)$ 上运作下面的证明。）归纳知

$$\|x_{n+1}(t) - x_n(t)\| \leqslant \frac{L^n M t^{(n+1)\alpha}}{\Gamma((n+1)\alpha+1)} \exp\frac{q^\alpha}{1-q^\alpha}, \ t \in [0,h].$$

由 Mittag-Leffler 函数的性质知 $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ 在 $[0,h]$ 上一致收敛，然后容易看出其极限函数即是方程 (1) 在 $[0,h]$ 上的一个弱解。

Picard 唯一性定理的证明概要

先设 $0 < T := \sup I < \infty$, $[0, T]$ 中的 $\mathbb{R}^d$ 值连续函数 x, y 都是方程 (1) 的弱解。记 $L := L\left(\max\left(\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|x(t)\|,\quad \max_{0\leqslant t\leqslant T}\|y(t)\|\right)\right)$, $S := \{t \in: x(t) \neq y(t)\}, t_* := \inf S$, 下证 $t_* = \infty$. 反证，假设 $0 \leqslant t_* \leqslant T$.

- 如果 $t_* = T$, 那么 $x(T) = y(T)$, 此时容易看出矛盾。
- 如果 $0 < t_* < T$, 那么对于充分小的 $\delta > 0$, 当 $t \in [0, t_* + \delta]$ 时有 $x(qs) = y(qs)$, 从而

$$\|x(t) - y(t)\| \leqslant L\Gamma(\alpha)^{-1} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|x(s) - y(s)\| \, \mathrm{d}s,$$

然后利用分数阶 Gronwall 不等式就推出矛盾。

Picard 唯一性定理的证明概要

- 如果 $t_* = 0$, 那么对于充分小的 $\delta > 0$, 当 $t \in [0, \delta]$ 时,

$$\|x(t) - y(t)\| \leqslant 2L\Gamma(\alpha+1)^{-1} t^{\alpha} \max_{0 \leqslant s \leqslant t} \|x(s) - y(s)\|,$$

  两边对 $t \in [0, \delta]$ 取最大值，得到

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant \delta} \|x(t) - y(t)\| \leqslant 2L\Gamma(\alpha+1)^{-1} \delta^{\alpha} \max_{0 \leqslant t \leqslant \delta} \|x(t) - y(t)\|,$$

  因此只要选取 $2L\Gamma(\alpha+1)^{-1}\delta^{\alpha} < 1$ 就能看出在 $[0, \delta]$ 上成立 $x = y$, 这也导致矛盾。

综合以上各种情况知 x 和 y 在整个 I 上相等。

如若 x, y 是 $[0, \infty)$ 上方程 (1) 的弱解，上述结果表明它们在任何有限区间 $[0, T]$ 上相等，因而在 $[0, \infty)$ 上相等。唯一性证毕。

L1 格式

在叙述数值解部分的结果之前，先给出数值格式。取严格递增趋于正无穷的序列 $(t_n)_{n=0}^{\infty}$ 作为时间节点，其中 $t_0 = 0$. 利用在每个小区间上线性插值的办法来近似导数和延迟，就得到针对方程 (1) 的 L1 数值格式

$$x_n = (t_n - t_{n-1})^{\alpha}\left(\Gamma(2-\alpha) f\left(t_n, x_n, \overline{x}^n\right) + \sum_{k=0}^{n-1}\left(a_{n,k+1} - a_{n,k}\right) x_k\right),$$

其中 $a_{n,k} := \frac{(t_n - t_{k-1})^{1-\alpha} - (t_n - t_k)^{1-\alpha}}{t_k - t_{k-1}} (1 \leqslant k \leqslant n), a_{n,0} := 0, \overline{x}_n$ 是对 $x(qt_n)$ 的近似，即设 $t_{m_n-1} \leqslant qt_n < t_{m_n}$，有

$$\overline{x}_n := \frac{t_{m_n} - qt_n}{t_{m_n} - t_{m_n-1}} x_{m_n-1} + \frac{qt_n - t_{m_n-1}}{t_{m_n} - t_{m_n-1}} x_{m_n}.$$

数值解的长时间有界性

定理 3

如果存在常数 $a > 0, a_u > a_v > 0$, 使得对任何 $t \geqslant 0$ 和 $u, v \in \mathbb{R}^d$ 成立

$$\langle u, f(t,u,v) \rangle \leqslant a - a_u \|u\|^2 + a_v \|v\|^2,$$

那么

$$\|x_n\| \leqslant \max \left((a_u - a_v)^{-1/2} a^{1/2}, \|x_0\| \right).$$

证明概要

在 L1 数值格式两边与 x_n 作内积并结合 Cauchy-Schwarz 不等式得到

$$\begin{aligned}\|x_n\|^2 \leqslant (t_n - t_{n-1})^\alpha \Bigg(&\Gamma(2-\alpha)\left(a - a_u\|x_n\|^2 + a_v\|\overline{x}_n\|^2\right) \\ &+ \sum_{k=0}^{n-1}(a_{n,k+1} - a_{n,k})\frac{\|x_k\|^2 + \|x_n\|^2}{2}\Bigg).\end{aligned} \tag{2}$$

注意到 $\sum_{k=0}^{n-1}(a_{n,k+1} - a_{n,k}) = a_{n,n} = (t_n - t_{n-1})^{-\alpha}$, 有

$$(t_n - t_{n-1})^\alpha \sum_{k=0}^{n-1}(a_{n,k+1} - a_{n,k})\frac{\|x_k\|^2 + \|x_n\|^2}{2} \leqslant \frac{1}{2}\left(\max_{0\leqslant k<n}\|x_k\|^2 + \|x_n\|^2\right). \tag{3}$$

证明概要

将式 (3) 代入式 (2) 得到

$$\begin{aligned}\|x_n\|^2 &\leqslant a_n\left(a - a_u\|x_n\|^2 + a_v\|\overline{x}_n\|^2\right) + \max_{0\leqslant k<n}\|x_k\|^2\\ &\leqslant a_n\left(a - a_u\|x_n\|^2 + a_v\max_{0\leqslant k\leqslant n}\|x_k\|^2\right) + \max_{0\leqslant k<n}\|x_k\|^2,\end{aligned}$$

其中 $a_n := 2\left(t_n - t_{n-1}\right)^{\alpha}\Gamma(2-\alpha)$. 现在易证

$$\|x_n\|^2 \leqslant \max\left((a_u - a_v)^{-1}a, \max_{0\leqslant k<n}\|x_k\|^2\right), \ n \in \mathbb{N}_+,$$

最后归纳即得结论。

数值解的稳定性

把方程 (1) 的初值条件改为 $x(0)=y_0$, 用同样的数值算法（包括步长）产生数值解 $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ 和对 “延迟” 的近似 $(\overline{y}_n)_{n=0}^{\infty}$, 并记 $e_n := y_n - x_n, \overline{e}_n := \overline{y}_n - \overline{x}_n$.

定理 4

如果存在常数 $b_u > b_v > 0$, 使得对任何 $t \geqslant 0$ 和 $u, v, x, y \in \mathbb{R}^d$ 成立

$$\begin{cases} \langle f(t,u,v) - f(t,x,v), u - x \rangle \leqslant -b_u \|u - x\|^2, \\ \|f(t,u,v) - f(t,u,y)\| \leqslant b_v \|v - y\|, \end{cases}$$

那么

$$\|e_n\| \leqslant \|e_0\|.$$

证明概要

写出 $(e_n)_{n=0}^{\infty}$ 满足的等式为

$$e_n = (t_n - t_{n-1})^{\alpha}\left(\sum_{k=0}^{n-1}(a_{n,k+1} - a_{n,k})\, e_k + \Gamma(2-\alpha)\left(f\left(t_n, y_n, \overline{y}_n\right) - f\left(t_n, x_n, \overline{x}_n\right)\right)\right),$$

两边同 e_n 取内积并放缩得到

$$\|e_n\|^2 \leqslant \max_{0\leqslant k<n}\|e_k\|^2 + a_n\left(-b_u\|e_n\|^2 + b_v\max_{0\leqslant k\leqslant n}\|e_k\|^2\right).$$

其中 $a_n := 2\,(t_n - t_{n-1})^{\alpha}\,\Gamma(2-\alpha)$. 由此容易得到

$$\|e_n\| \leqslant \max_{0\leqslant k<n}\|e_k\|,\ n \in \mathbb{N}_+.$$

最后归纳即得结论。

- 课题主要研究内容
- 目前已完成的研究工作及结果
- **后期拟完成的研究工作及进度安排**
- 存在的困难与问题

后期拟完成的研究工作及进度安排

- 2024 年 7 月，整理现有工作，并考虑向带有 Caputo 导数的弱奇性方程推广。
- 2024 年 8-11 月，涉猎关于分数阶数值方法收敛性的文章，并考虑方程 (1) 的 L1 格式的收敛性。
- 2024 年 12 月-2025 年 2 月，考虑更多类型的方程和数值算法。
- 2025 年 3 月-2025 年 5 月，撰写毕业论文，准备毕业答辩。

存在的困难与问题

分数阶导数的记忆性导致数值方法的收敛性难以分析。

这里数值方法收敛指的是在时间步长趋于 0 时，数值解和弱解的差距也会趋于 0.

HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

感谢倾听！