哈 尔 滨 工 业 大 学

硕 士 学 位 论 文 中 期 报 告

题 目：分数阶比例延迟方程的几种数值方法的研究

院　　（系）数学学院

学　　　科 基础数学

导　　　师 雷强

研　究　生 李云鹏

学　　　号 22S012004

中期报告日期 2024 年 6 月 28 日

研究生院制

目　录

1 课题主要研究内容及进度情况

$$\begin{cases} {}^C D_{0+}^{\alpha} x(t) = f(t, x(t), x(qt)), \quad t \geqslant 0, \\ x(0) = x_0 \text{ is given.} \end{cases} \tag{1}$$

2 目前已完成的研究工作及结果

2.1 准确解部分

对方程 xx 证明了 Peano 存在性定理和 Picard 存在唯一性定理，如下所示。

定理 1 Eq. (1) always has a mild solution on a small interval $[0, h]$.

证明 记 $M < \infty$ 是集合 $\left\{\|f(t,u,v)\| : t \in [0,1], u, v \in B_{2\|x_0\|}(0)\right\}$ 的一个上界，并取 $0 < h \leqslant 1$ 充分小，使得 $\Gamma(\alpha+1)^{-1} h^{\alpha} M \leqslant \|x_0\|$. 对于正整数 m，作 $t_n^m := nh/m$, $n = 0, 1, 2, \ldots, m$, 然后按下式构造 $(x_n^m)_{n=0}^m \subset \mathbb{R}^d$,

$$x_n^m = x_0 + \Gamma(\alpha)^{-1} \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_n - s)^{\alpha-1} f\big(s, x_{k-1}^m, x_{q_{k-1}^m}^m\big) \, \mathrm{d}s, \; n = 1, 2, \ldots, m, \tag{2}$$

其中 $q_k^m := \lfloor q t_k^m \rfloor$. 利用这些有限长的序列，分段线性插值地构造连续函数 $(x^m)_{m=1}^{\infty} : [0, h] \to \mathbb{R}^d$，即

$$x^m(t) := \frac{t_n^m - t}{t_n^m - t_{n-1}^m} x_{n-1}^m + \frac{t - t_{n-1}^m}{t_n^m - t_{n-1}^m} x_n^m, \; t_{n-1}^m \leqslant t \leqslant t_n^m.$$

另外，为方便起见，对于 $\delta > 0$, 记 $D(\delta) := \{(s,t) \in [0,h] \times [0,h] \colon 0 \leqslant t - s < \delta\}$.

现在证明 $\|x^m(t_n)\| \leqslant 2\|x_0\|$, $0 \leqslant t \leqslant h, n = 0, 1, 2, \ldots, m, m \in \mathbb{N}_+$. 施归纳于 n. $n = 0$ 时显然。假设对于 $0 \leqslant k < n$ 成立 $\|x^m(t_k)\| \leqslant 2\|x_0\|$, 根据 M 和 h 的定义,

$$\begin{aligned} \|x^m(t_n)\| &\leqslant \|x_0\| + \Gamma(\alpha)^{-1} \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_n - s)^{\alpha-1} \left\| f\big(s, x_{k-1}^m, x_{q_{k-1}^m}^m\big) \right\| \mathrm{d}s \\ &\leqslant \|x_0\| + \Gamma(\alpha)^{-1} \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_n - s)^{\alpha-1} M \, \mathrm{d}s \\ &= \|x_0\| + \Gamma(\alpha)^{-1} M \int_0^{t_n} (t_n - s)^{\alpha-1} \, \mathrm{d}s \\ &= \|x_0\| + \Gamma(\alpha+1)^{-1} M t_n^{\alpha} \\ &\leqslant \|x_0\| + \Gamma(\alpha+1)^{-1} M h^{\alpha} \leqslant 2\|x_0\|, \end{aligned}$$

这样就完成了归纳。于是对任何 $t \in [0, h]$, t 必然落在某个区间 $\left[t_{n-1}^m, t_n^m\right]$ 中，从而

$$\|x^m(t)\| \leqslant \frac{t_n^m - t}{t_n^m - t_{n-1}^m} \left\|x_{n-1}^m\right\| + \frac{t - t_{n-1}^m}{t_n^m - t_{n-1}^m} \|x_n^m\| \leqslant 2\|x_0\|.$$

因此对每个 $t \in [0, h]$ 都有 $(x^m(t))_{m=1}^{\infty}$ 在 $\mathbb{R}^d$ 中相对紧.

然后讨论连续函数列 $(x^m)_{m=1}^{\infty}$ 的等度连续性。首先，对于 $0 \leqslant k \leqslant n \leqslant m$, 有

$$
\begin{aligned}
&\Gamma(\alpha)\left\|x_n^m - x_k^m\right\| \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{k} \int_{t_{j-1}^m}^{t_j^m} \left(\left(t_k^m - s\right)^{\alpha-1} - \left(t_n^m - s\right)^{\alpha-1}\right) M \,\mathrm{d}s + \sum_{j=k+1}^{n} \int_{t_{j-1}^m}^{t_j^m} \left(t_n^m - s\right)^{\alpha-1} M \,\mathrm{d}s \\
&= M \cdot \left(\int_0^{t_k^m} \left(\left(t_k^m - s\right)^{\alpha-1} - \left(t_n^m - s\right)^{\alpha-1}\right) \mathrm{d}s + \int_{t_k^m}^{t_n^m} \left(t_n^m - s\right)^{\alpha-1} \mathrm{d}s\right) \\
&= M\alpha^{-1} \cdot \left(\left(t_k^m\right)^\alpha - \left(t_n^m\right)^\alpha + 2\left(t_n^m - t_k^m\right)^\alpha\right) \leqslant 2M\alpha^{-1}\left(t_n^m - t_k^m\right)^\alpha .
\end{aligned}
$$

而至于 $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant h$, 不妨设 $s \in \left[t_{k-1}^m, t_k^m\right], t \in \left[t_{n-1}^m, t_n^m\right]$. 如果 $k < n$, 那么

$$
\begin{aligned}
&\left\|x^m(t) - x^m(s)\right\| \\
&\leqslant \left\|x^m(t) - x^m(t_{n-1})\right\| + \left\|x_{n-1}^m - x_k^m\right\| + \left\|x^m(t_k) - x^m(s)\right\| \\
&\leqslant \left\|x_n^m - x_{n-1}^m\right\| + \left\|x_{n-1}^m - x_k^m\right\| + \left\|x_k^m - x_{k-1}^m\right\| \\
&\leqslant 2M\Gamma(\alpha+1)^{-1}\left(\left(t_n^m - t_{n-1}^m\right)^\alpha + \left(t_{n-1}^m - t_k^m\right)^\alpha + \left(t_k^m - t_{k-1}^m\right)^\alpha\right) \\
&\leqslant 2M\Gamma(\alpha+1)^{-1}\left(2(h/m)^\alpha + (t-s)^\alpha\right),
\end{aligned}
$$

而若是 $k = n$, 则有

$$
\begin{aligned}
\left\|x^m(t) - x^m(s)\right\| &\leqslant \left\|x_n^m - x_{n-1}^m\right\| \\
&\leqslant 2M\Gamma(\alpha+1)^{-1}\left(t_n^m - t_{n-1}^m\right)^\alpha \\
&\leqslant 2M\Gamma(\alpha+1)^{-1}(h/m)^\alpha,
\end{aligned}
$$

总之

$$
\left\|x^m(t) - x^m(s)\right\| \leqslant 2M\Gamma(\alpha+1)^{-1}\left(2(h/m)^\alpha + (t-s)^\alpha\right). \tag{3}
$$

任给 $\varepsilon > 0$, 取 $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}_+$ 和 $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon) > 0$ 分别满足 $2M\Gamma(\alpha+1)^{-1}\delta_0^\alpha < \varepsilon/2$ 和 $4M\Gamma(\alpha+1)^{-1}(h/N)^\alpha < \varepsilon/2$. 由式(3)可知，$\|x^m(t) - x^m(s)\| < \varepsilon$ 对任何 $m > N$ 及 $(s,t) \in D(\delta_0)$ 成立。至于 $1 \leqslant m \leqslant N$, 由于每个 x^m 都是 $[0,h]$ 上的一致连续函数，故存在有限个只依赖于 ε 的正数 $(\delta_m)_{m=1}^N$, 使得对于 $(s,t) \in D(\delta_m)$ 成立 $\|x^m(t) - x^m(s)\| < \varepsilon$. 现在取 $\delta = \delta(\varepsilon) := \min_{0 \leqslant m \leqslant N} \delta_m > 0$, 那么当 $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant h$ 且 $t - s < \delta$ 时，$\|x^m(t) - x^m(s)\| < \varepsilon$ 对于任何 $m \in \mathbb{N}_+$ 成立。这说明 $(x^m)_{m=1}^{\infty}$ 是 $C[0,h]$ 中的一致等度连续函数列。

使用 Arzelà-Ascoli 定理，我们得到 $\{x^m \colon m \in \mathbb{N}_+\}$ 在 $C\left([0,h], \mathbb{R}^d\right)$ 中相对紧，故有一致收敛子列，这个子列仍记为 $(x^m)_{m=1}^{\infty}$, 并设其极限函数为 $x \in C\left([0,h], \mathbb{R}^d\right)$. 任给 $\varepsilon > 0$, 由于 f 在紧集 $[0,h] \times \overline{B_{2\|x_0\|}(0)} \times \overline{B_{2\|x_0\|}(0)} \subset [0,h] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ 上一致连

续，故存在 $\delta_1=\delta_1(\varepsilon)>0$ 使得 $\|f(t,u,v)-f(t,x,y)\|<\varepsilon\alpha\Gamma(\alpha)h^{-\alpha}/4$ 对 $t\in[0,h]$ 以及满足 $\|u-x\|+\|v-y\|<\delta_1$ 的 $u,v,x,y\in B_{2\|x_0\|}(0)$ 成立。取 $N_1=N_1(\delta_1)\in\mathbb{N}_+$, 使得当 $m>N_1$ 且 $t\in[0,h]$ 时成立 $\|x^m(t)-x(t)\|<\delta_1/2$, 从而

$$\begin{aligned}&\left\|\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}f(s,x^m(s),x^m(qs))\,\mathrm{d}s-\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}f(s,x(s),x(qs))\,\mathrm{d}s\right\|\\ \leqslant&\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\frac{\varepsilon\alpha\Gamma(\alpha)h^{-\alpha}}{4}\,\mathrm{d}s=\varepsilon\Gamma(\alpha)h^{-\alpha}t^{\alpha}/4\leqslant\varepsilon\Gamma(\alpha)/4.\end{aligned}\tag{4}$$

由 $(x^m)_{m=1}^{\infty}$ 的等度连续性，存在 $\delta_2=\delta_2(\varepsilon)>0$ 使得 $\|x^m(t)-x^m(s)\|<\min(\delta_1/2,\varepsilon/4)$ 对任何 $m\in\mathbb{N}_+$ 及 $(s,t)\in D(\delta_2)$ 成立。取 $N_2=N_2(\delta_2)\in\mathbb{N}_+$ 使得 $h/N_2<\delta_2$. 一方面，注意到 $m>N_2$ 时总有 $t_n-t_{n-1}<\delta_2<\delta_1/2$, $n=0,1,2,\dots,m$, 于是 $\left\|f\big(t,x_{n-1}^m,x_{q_{n-1}^m}^m\big)-f\big(t,x^m(t),x^m(qt)\big)\right\|<\varepsilon\alpha\Gamma(\alpha)h^{-\alpha}/4$, $t\in\big[t_{n-1}^m,t_n^m\big]$, 从而

$$\begin{aligned}&\Gamma(\alpha)\left\|x^m(t_n)-x_0-\Gamma(\alpha)^{-1}\int_0^{t_n}(t_n-s)^{\alpha-1}f(s,x^m(s),x^m(qs))\,\mathrm{d}s\right\|\\ \leqslant&\sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k}(t_n-s)^{\alpha-1}\left\|f\big(s,x_{k-1}^m,x_{q_{k-1}^m}^m\big)-f\big(s,x^m(s),x^m(qs)\big)\right\|\mathrm{d}s\\ \leqslant&\sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k}(t_n-s)^{\alpha-1}\frac{\varepsilon\alpha\Gamma(\alpha)h^{-\alpha}}{4}\,\mathrm{d}s\\ =&\int_0^{t_n}(t_n-s)^{\alpha-1}\frac{\varepsilon\alpha\Gamma(\alpha)h^{-\alpha}}{4}\,\mathrm{d}s\leqslant\varepsilon\Gamma(\alpha)/4.\end{aligned}\tag{5}$$

另一方面，任意 $t\in[0,h]$, 设 $t\in[t_{n-1},t_n]$, 则对任何 $m\in\mathbb{N}_+$ 成立

$$\|x^m(t)-x^m(t_n)\|<\varepsilon/4.\tag{6}$$

根据[1] Proposition 3.2，$x,f\in C([0,h],\mathbb{R}^d)$ 蕴涵 $t\mapsto\Gamma(\alpha)^{-1}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}f(s,x(s),x(qs))\,\mathrm{d}s\in C([0,h],\mathbb{R}^d)$, 因此可取 $N_3=N_3(\varepsilon)\in\mathbb{N}_+$ 充分大（从而 $h/N_3>0$ 足够小），使得 $m>N_3$ 且 $(s,t)\in D(h/N_3)$ 时，$\Gamma(\alpha)^{-1}\left\|\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau,x(\tau),x(q\tau))\,\mathrm{d}\tau-\int_0^s(s-\tau)^{\alpha-1}f(\tau,x(\tau),x(q\tau))\,\mathrm{d}\tau\right\|<\varepsilon/4$. 于是当 $t\in[0,h]$ 时，设 $t\in[t_{n-1},t_n]$, 有

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha)^{-1}\bigg\|&\int_0^{t_n}(t_n-s)^{\alpha-1}f(s,x(s),x(qs))\,\mathrm{d}s\\ &-\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}f(s,x(s),x(qs))\,\mathrm{d}s\bigg\|<\varepsilon/4.\end{aligned}\tag{7}$$

现在取 $N=N(\varepsilon):=\max\{N_1,N_2,N_3\}$, 根据 Eqs. (4) to (7) 以及三角不等式，

当 $m > N, t \in [0,h]$ 时，设 $t \in [t_{n-1}, t_n]$, 那么可以估计

$$\begin{aligned}
&\left\| x^m(t) - x_0 - \Gamma(\alpha)^{-1} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s), x(qs))\,\mathrm{d}s \right\| \\
\leqslant\ & \|x^m(t) - x^m(t_n)\| \\
&+ \left\| x^m(t_n) - x_0 - \Gamma(\alpha)^{-1} \int_0^{t_n} (t_n - s)^{\alpha-1} f(s, x^m(s), x^m(qs))\,\mathrm{d}s \right\| \\
&+ \Bigg\| x_0 + \Gamma(\alpha)^{-1} \int_0^{t_n} (t_n - s)^{\alpha-1} f(s, x^m(s), x^m(qs))\,\mathrm{d}s \\
&\qquad - x_0 - \Gamma(\alpha)^{-1} \int_0^{t_n} (t_n - s)^{\alpha-1} f(s, x(s), x(qs))\,\mathrm{d}s \Bigg\| \\
&+ \Bigg\| x_0 + \Gamma(\alpha)^{-1} \int_0^{t_n} (t_n - s)^{\alpha-1} f(s, x(s), x(qs))\,\mathrm{d}s \\
&\qquad - x_0 - \Gamma(\alpha)^{-1} \int_0^{t} (t - s)^{\alpha-1} f(s, x(s), x(qs))\,\mathrm{d}s \Bigg\| < \varepsilon,
\end{aligned}$$

即 $\lim_{m\to\infty} x^m(t) = x_0 + \Gamma(\alpha)^{-1} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s), x(qs))\,\mathrm{d}s,\ 0 \leqslant t \leqslant h$. 而极限的唯一性导致

$$x(t) = \Gamma(\alpha)^{-1} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s), x(qs))\,\mathrm{d}s,\ 0 \leqslant t \leqslant h,$$

从而 $x \in C([0,h], \mathbb{R}^d)$ 是方程(1)在 $[0,h]$ 上的一个弱解。 □

定理 2 如果 $f(t,\cdot,\cdot)$ 对 $t \in [0,\infty)$ 一致地局部 Lipschitz, 即对任何 $r > 0$, 存在不依赖于 t 的 $L = L(r) \geqslant 0$, 使得

$$\|f(t,x,y) - f(t,u,v)\| \leqslant L \cdot (\|x-u\| + \|y-v\|) \tag{8}$$

对任何 $t \in [0,\infty)$ 以及 $x,y,u,v \in B_r(0)$ 成立，那么方程(1)的弱解局部存在，并在存在区间上唯一。

证明（存在性）构造 Picard 序列 $(x_n)_{n=0}^{\infty} : [0,\infty) \to \mathbb{R}^d$ 满足

$$\begin{cases} x^{n+1}(t) := x_0 + \Gamma(\alpha)^{-1} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x_n(s), x_n(qs))\,\mathrm{d}s, \quad n \in \mathbb{N}, \\ \quad x^0(t) := x_0. \end{cases}$$

记 $M < \infty$ 是集合 $\{\|f(t,u,v)\| : t \in [0,1], u,v \in B_{2\|x_0\|}(0)\}$ 的一个上界，并取 $0 < h \leqslant 1$ 充分小，使得 $\Gamma(\alpha+1)^{-1} h^\alpha M \leqslant \|x_0\|$. 可以归纳地证明 $\|x^n(t)\| \leqslant 2\|x_0\|,\ t \in$

$[0,h], n\in\mathbb{N}$. 取 $L:=L(2\|x_0\|)$, 那么对于 $t\in[0,h], n\in\mathbb{N}_+$,

$$\begin{aligned}\left\|x^{n+1}(t)-x_n(t)\right\| \leqslant L\Gamma(\alpha)^{-1}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}& \\ \left(\left\|x_n(s)-x^{n-1}(s)\right\|+\left\|x_n(qs)-x^{n-1}(qs)\right\|\right)\mathrm{d}s.&\end{aligned} \tag{9}$$

现在归纳地说明

$$\left\|x^{n+1}(t)-x_n(t)\right\| \leqslant \frac{L^n M}{\Gamma(\alpha)^{n+1}\alpha}t^{(n+1)\alpha}\prod_{k=1}^{n}\left(1+q^{k\alpha}\right)\mathrm{B}(\alpha,k\alpha+1),\ t\in[0,h], n\in\mathbb{N}. \tag{10}$$

当 $n=0$ 时，

$$\begin{aligned}\left\|x^1(t)-x^0(t)\right\| &= \|x^1(t)-x_0\| \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left\|\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(s,x_0,x_0)\,\mathrm{d}s\right\| \\ &\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}M\,\mathrm{d}s \\ &= \Gamma(\alpha)^{-1}\alpha^{-1}t^{\alpha}M.\end{aligned}$$

假定式(10)在 n 取 $n-1$ 时成立，然后

$$\begin{aligned}&\left\|x^{n+1}(t)-x_n(t)\right\| \\ \leqslant& \frac{L}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left(\left\|x_n(s)-x^{n-1}(s)\right\|+\left\|x_n(qs)-x^{n-1}(qs)\right\|\right)\mathrm{d}s \\ \leqslant& \frac{L^n M}{\Gamma(\alpha)^{n+1}\alpha}\left(\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+q^{k\alpha}\right)\mathrm{B}(\alpha,k\alpha+1)\right)\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left(s^{n\alpha}+(qs)^{n\alpha}\right)\mathrm{d}s \\ =& \frac{L^n M}{\Gamma(\alpha)^{n+1}\alpha}\left(\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+q^{k\alpha}\right)\mathrm{B}(\alpha,k\alpha+1)\right)\left(1+q^{n\alpha}\right)\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}s^{n\alpha}\,\mathrm{d}s \\ =& \frac{L^n M}{\Gamma(\alpha)^{n+1}\alpha}\left(\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+q^{k\alpha}\right)\mathrm{B}(\alpha,k\alpha+1)\right)\left(1+q^{n\alpha}\right)t^{n\alpha+\alpha}\mathrm{B}(\alpha,n\alpha+1) \\ =& \frac{L^n M}{\Gamma(\alpha)^{n+1}\alpha}t^{(n+1)\alpha}\prod_{k=1}^{n}\left(1+q^{k\alpha}\right)\mathrm{B}(\alpha,k\alpha+1).\end{aligned}$$

由归纳原理，式(10)成立。注意到

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+q^{k\alpha}\right) \leqslant \prod_{k=1}^{n}\exp\left(q^{k\alpha}\right) = \exp\sum_{k=1}^{n}\left(q^{\alpha}\right)^k \leqslant \exp\frac{q^{\alpha}}{1-q^{\alpha}}$$

和

$$\prod_{k=1}^{n}\mathrm{B}(\alpha,k\alpha+1)=\prod_{k=1}^{n}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(k\alpha+1)}{\Gamma((k+1)\alpha+1)}=\Gamma(\alpha)^n\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma((n+1)\alpha+1)},$$

我们有

$$\left\|x^{n+1}(t)-x_n(t)\right\|\leqslant\frac{L^nMt^{(n+1)\alpha}}{\Gamma((n+1)\alpha+1)}\exp\frac{q^\alpha}{1-q^\alpha},\ t\in[0,h].\tag{11}$$

由 Cauchy-Hadamard 公式和 Stirling 公式易知 Mittag-Leffler 函数 $E_\alpha(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\Gamma(\alpha n+1)^{-1}z^n$ 对于任何 $z\in\mathbb{C}$ 收敛，然后根据 Weierstrass M 判别法就得到函数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(x^{n+1}-x_n)$ 在 $[0,h]$ 上绝对一致收敛，于是函数列 $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ 在 $[0,h]$ 上存在一致极限 x. 这说明任取 $\varepsilon>0$, 存在 $N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, 使得 $\|x_n(t)-x(t)\|<\varepsilon$ 对于 $n>N$ 和 $t\in[0,h]$ 成立。这样一来，当 $t\in[0,h]$ 时，

$$\begin{aligned}&\left\|\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}f(s,x_n(s),x_n(qs))\,\mathrm{d}s-\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}f(s,x(s),x(qs))\,\mathrm{d}s\right\|\\&\leqslant\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}L\cdot(\|x_n(s)-x(s)\|+\|x_n(qs)-x(qs)\|)\,\mathrm{d}s\\&\leqslant 2\varepsilon L\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}s=2\varepsilon L\alpha^{-1}t^\alpha,\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}f(s,x_n(s),x_n(qs))\,\mathrm{d}s=\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}f(s,x(s),x(qs))\,\mathrm{d}s.$$

现在在式(2)中命 $n\to\infty$ 就得到

$$x(t)=x_0+\Gamma(\alpha)^{-1}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}f(s,x(s),x(qs))\,\mathrm{d}s,\ 0\leqslant t\leqslant h.$$

另一方面，利用文献 [1] 中的性质 3.2, 容易归纳地得到 $(x_n)_{n=0}^{\infty}\subseteq C^{0,\alpha}\cap AC[0,h]\subseteq C[0,h]$, 于是其一致极限 $x\in C[0,h]$. 这样 x 就是方程(1)在 $[0,h]$ 上的一个弱解。

（**唯一性**）设 $0<T<\infty$, $x,y\in C[0,T]$ 都是方程(1)的弱解。记 $L:=L\left(\max\left(\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|x(t)\|,\ \max_{0\leqslant t\leqslant T}\|y(t)\|\right)\right)$, 并作 $S:=\{t\in[0,T]\colon x(t)\neq y(t)\}$, $t_*:=\inf S$, 下证 $t_*=\infty$. 反证，假设 $0\leqslant t_*\leqslant T$, 分三种情况讨论。

如果 $t_*=T$. 那么在 $[0,T)$ 上有 $x=y$, 而 x,y 都是连续的，因此必在闭区间 $[0,T]$ 上处处相等，此时 $S=\varnothing, t_*=\infty$, 矛盾。

如果 $0<t_*<T$. 那么在 $[0,t_*)$ 上有 $x=y$. 选取 $\delta>0$ 充分小，使得 $t_*+\delta\leqslant T$ 且 $q\cdot(t_*+\delta)<t_*$, 然后就有 $x(qt)=y(qt)$, $0\leqslant t\leqslant t_*+\delta$. 于是当 $t\in[0,t_*+\delta]$

时，

$$\begin{aligned}\|x(t)-y(t)\| &\leqslant L\Gamma(\alpha)^{-1}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \\ &\qquad \big(\|x(s)-y(s)\|+\|x(qs)-y(qs)\|\big)\,\mathrm{d}s \\ &= L\Gamma(\alpha)^{-1}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|x(s)-y(s)\|\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

此时利用分数阶的 Gronwall 不等式??就得到在 $[0,t_*+\delta]$ 上都有 $x=y$, 故 $t_*\geqslant t_*+\delta$, 而这是不可能的。

如果 $t_*=0$. 选取 $\delta\in(0,T]$ 充分小，使得 $2L\Gamma(\alpha+1)^{-1}\delta^\alpha<1$. 当 $t\in[0,\delta]$ 时，

$$\begin{aligned}&\|x(t)-y(t)\| \\ \leqslant\ & \frac{L}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\big(\|x(s)-y(s)\|+\|x(qs)-y(qs)\|\big)\,\mathrm{d}s \\ \leqslant\ & \frac{2L}{\Gamma(\alpha)}\Big(\max_{0\leqslant s\leqslant t}\|x(s)-y(s)\|\Big)\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}s \\ =\ & 2L\Gamma(\alpha+1)^{-1}t^\alpha\max_{0\leqslant s\leqslant t}\|x(s)-y(s)\|.\end{aligned}$$

上式两边对 $t\in[0,\delta]$ 取最大值，得到

$$\max_{0\leqslant t\leqslant\delta}\|x(t)-y(t)\|\leqslant 2L\Gamma(\alpha+1)^{-1}\delta^\alpha\max_{0\leqslant t\leqslant\delta}\|x(t)-y(t)\|,$$

结合 δ 的选取知道只可能有 $\max_{0\leqslant s\leqslant\delta}\|x(s)-y(s)\|=0$, 即等式 $x=y$ 至少在 $[0,\delta]$ 上成立, 故 $t_*\geqslant\delta$, 矛盾.

综合以上各种情况知 $t_*\notin[0,T]$，只可能是 $t_*=\infty$, 此时必有 $S=\varnothing$, 故而 x 和 y 在整个 $[0,T]$ 上相等。而如若 x,y 是 $[0,\infty)$ 上方程(1)的弱解，上述结果则表明它们在任何有限区间 $[0,T]$ 上相等，因而在 $[0,\infty)$ 上相等。唯一性证毕。 □

2.2 数值解部分

取严格递增趋于正无穷的序列 $(t_n)_{n=0}^\infty$ 作为时间节点，其中 $t_0=0$，利用在每个小区间上线性插值的办法来近似导数和延迟，就得到针对方程(1)的 L1 数值格式

$$x_n=(t_n-t_{n-1})^\alpha\left(\Gamma(2-\alpha)f\left(t_n,x_n,\overline{x}^n\right)+\sum_{k=0}^{n-1}\left(a_{n,k+1}-a_{n,k}\right)x_k\right), \tag{12}$$

其中 $a_{n,k}:=\frac{(t_n-t_{k-1})^{1-\alpha}-(t_n-t_k)^{1-\alpha}}{t_k-t_{k-1}}(1\leqslant k\leqslant n), a_{n,0}:=0, \overline{x}_n$ 是对 $x(qt_n)$ 的近似。

下面这个定理所描述的数值解的长时间行为与 [2] 中得到的准确解的长时间行为一致。

定理 3 如果存在常数 $a>0, a_u>a_v>0$, 使得

$$\langle u, f(t,u,v)\rangle \leqslant a - a_u\|u\|^2 + a_v\|v\|^2,$$

那么

$$\|x_n\|^2 \leqslant (a_u-a_v)^{-1}\,a + \|x_0\|^2. \tag{13}$$

证明 式(12)两边与 x_n 作内积并结合 Cauchy-Schwarz 不等式得到

$$\begin{aligned}\|x_n\|^2 \leqslant (t_n-t_{n-1})^{\alpha}\Big(&\Gamma(2-\alpha)\left(a-a_u\|x_n\|^2+a_v\|\overline{x}_n\|^2\right)\\ &+\sum_{k=0}^{n-1}(a_{n,k+1}-a_{n,k})\,\frac{\|x_k\|^2+\|x_n\|^2}{2}\Big).\end{aligned} \tag{14}$$

注意到 $\sum_{k=0}^{n-1}(a_{n,k+1}-a_{n,k}) = a_{n,n} = (t_n-t_{n-1})^{-\alpha}$, 有

$$(t_n-t_{n-1})^{\alpha}\sum_{k=0}^{n-1}(a_{n,k+1}-a_{n,k})\,\frac{\|x_k\|^2+\|x_n\|^2}{2} \leqslant \frac{1}{2}\Big(\max_{0\leqslant k<n}\|x_k\|^2+\|x_n\|^2\Big). \tag{15}$$

将(15)代入式(14)得到

$$\begin{aligned}\|x_n\|^2 &\leqslant a_n\left(a-a_u\|x_n\|^2+a_v\|\overline{x}_n\|^2\right)+\max_{0\leqslant k<n}\|x_k\|^2\\ &\leqslant a_n\Big(a-a_u\|x_n\|^2+a_v\max_{0\leqslant k\leqslant n}\|x_k\|^2\Big)+\max_{0\leqslant k<n}\|x_k\|^2,\end{aligned}$$

其中 $a_n := 2\,(t_n-t_{n-1})^{\alpha}\,\Gamma(2-\alpha)$. 如果 $\|x_n\| = \max_{0\leqslant k\leqslant n}$, 那么

$$\|x_n\|^2 \leqslant a_n\left(a-a_u\|x_n\|^2+a_v\|x_n\|^2\right)+\|x_n\|^2, \tag{16}$$

否则

$$\|x_n\|^2 \leqslant a_n\Big(a-a_u\|x_n\|^2+a_v\max_{0\leqslant k<n}\|x_k\|^2\Big)+\max_{0\leqslant k<n}\|x_k\|^2, \tag{17}$$

两种情形分别导致

$$\|x_n\|^2 \leqslant \frac{a}{a_u-a_v} \quad 和 \quad \|x_n\|^2 \leqslant \frac{a_n a+(a_n a_v+1)\max_{0\leqslant k<n}\|x_k\|^2}{1+a_n a_u},$$

因此，无论如何总有

$$\|x_n\|^2 \leqslant \max\Big(\frac{a}{a_u-a_v}, \frac{a_n a+(a_n a_v+1)\max_{0\leqslant k<n}\|x_k\|^2}{1+a_n a_u}\Big).$$

现在归纳地证明式(13)。$n=0$ 时平凡。假定 $0\leqslant n<N$ 时成立，然后有

$$\begin{aligned}\|x_N\|^2 &\leqslant \max\Big(\frac{a}{a_u-a_v}, \frac{a_N a+(a_N a_v+1)\left(\frac{a}{a_u-a_v}+\|x_0\|^2\right)}{1+a_N a_u}\Big)\\ &=\max\Big(\frac{a}{a_u-a_v}, \frac{a}{a_u-a_v}+\frac{1+a_N a_v}{1+a_N a_u}\|x_0\|^2\Big)\\ &\leqslant (a_u-a_v)^{-1}a+\|x_0\|^2.\end{aligned}$$

这就完成了证明。 □

接下来讨论数值解的稳定性。为此，把方程(1)的初值条件改为 $x(0)=y_0$, 用同样的数值算法（包括步长）产生数值解 $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ 和对“延迟”的近似 $(\overline{y}_n)_{n=0}^{\infty}$, 并记 $e_n:=y_n-x_n, \overline{e}_n:=\overline{y}_n-\overline{x}_n$.

定理 4 如果存在常数 $b_u>b_v>0$, 使得

$$\begin{cases}\langle u-x, f(t,u,v)-f(t,x,v)\rangle \leqslant -b_u\|u-x\|^2,\\ \|f(t,u,v)-f(t,u,y)\|\leqslant b_v\|v-y\|,\end{cases}$$

那么

$$\|e_n\|\leqslant\|e_0\|.$$

证明 写出 $(e_n)_{n=0}^{\infty}$ 满足的等式：

$$e_n=(t_n-t_{n-1})^{\alpha}\Big(\sum_{k=0}^{n-1}(a_{n,k+1}-a_{n,k})\,e_k+\Gamma(2-\alpha)\left(f\left(t_n,y_n,\overline{y}_n\right)-f\left(t_n,x_n,\overline{x}_n\right)\right)\Big).$$

上式两边同 e_n 取内积，得

$$\begin{aligned}\|e_n\|^2\leqslant{}&(t_n-t_{n-1})^{\alpha}\Big(\sum_{k=0}^{n-1}(a_{n,k+1}-a_{n,k})\frac{\|e_k\|^2+\|e_n\|^2}{2}+\Gamma(2-\alpha)\\ &\left(\|f\left(t_n,y_n,\overline{y}_n\right)-f\left(t_n,x_n,\overline{y}_n\right)\|+\|f\left(t_n,x_n,\overline{y}_n\right)-f\left(t_n,x_n,\overline{x}_n\right)\|\right)\Big)\\ \leqslant{}&2^{-1}\Big(\max_{0\leqslant k<n}\|e_k\|^2+\|e_n\|^2\Big)+2^{-1}a_n\left(-b_u\|e_n\|^2+b_v\|\overline{e}_n\|^2\right),\end{aligned}$$

其中 $a_n:=2\left(t_n-t_{n-1}\right)^{\alpha}\Gamma(2-\alpha)$. 注意到 $\|\overline{e}_n\|\leqslant\max_{0\leqslant k\leqslant n}\|e_k\|$, 我们有

$$\|e_n\|^2\leqslant\max_{0\leqslant k<n}\|e_k\|^2+a_n\Big(-b_u\|e_n\|^2+b_v\max_{0\leqslant k\leqslant n}\|e_k\|^2\Big).$$

一种情况是 $\|e_n\|=\max_{0\leqslant k\leqslant n}\|e_k\|$, 此时 $\max_{0\leqslant k<n}\|e_k\|^2\geqslant\|e_n\|^2(1+a_n(b_u-b_v))\geqslant\|e_n\|^2=\max_{0\leqslant k\leqslant n}\|e_k\|^2\geqslant\max_{0\leqslant k<n}\|e_k\|^2$, 而上式最左端和最右端一样，因此其中的不等号全取等，特别地，$\|e^n\|=\max_{0\leqslant k<n}\|e_k\|$. 而另一种情况是 $\|e_n\|<$

$\max_{0\leqslant k\leqslant n}\|e_k\|$, 此时显然有 $\|e_n\| < \max_{0\leqslant k<n}\|e_k\|$. 总之，

$$\|e_n\| \leqslant \max_{0\leqslant k<n}\|e_k\|,\ n\in\mathbb{N}_+.$$

最后归纳即得结论。 □

3 后期拟完成的研究工作及进度安排

4 存在的困难与问题

5 如期完成全部论文工作的可能性

参考文献

[1] Webb J R L. INITIAL VALUE PROBLEMS FOR CAPUTO FRACTIONAL EQUATIONS WITH SINGULAR NONLINEARITIES[C/OL] // . 2020. https://api.semanticscholar.org/CorpusID:221088567.

[2] Wang D. Dissipativity and stability analysis for fractional functional differential equations.[J]. Fractional Calculus and Applied Analysis, 2015, 18: 1399-1422.