哈 尔 滨 工 业 大 学

# 硕 士 学 位 论 文 中 期 报 告

## 题 目：一类具一般增长的非齐次分数阶椭圆型方程的 Harnack 不等式


院　　（系）　数学学院

学　　　　科　基础数学

导　　　　师　雷强

研　　究　　生　李云鹏

学　　　　号　22S012004


中期报告日期　2024 年 6 月

研究生院制

# 目　录

# 1 课题主要研究内容及进度情况

$\mathbb{R}, \mathrm{d}x, \int_\Omega u(x)\,\mathrm{d}x,$

$$1+1$$

$$=2.$$

# 2 目前已完成的研究工作及结果

## 2.1 准确解部分

对方程 xx 证明了 Peano 存在性定理和 Picard 存在唯一性定理，如下所示。

$$\begin{cases} {}^C D_{0^+}^{\alpha} x(t) = f(t, x(t), x(qt)), \quad t \geqslant 0, \\ x(0) = x_0 \text{ is given.} \end{cases} \tag{1}$$

**定理** 1 Eq. (1) always has a mild solution on a small interval $[0, h]$.

**证明** 记 $M < \infty$ 是集合 $\left\{\|f(t,u,v)\| : t \in [0,1], u, v \in B_{2\|x_0\|}(0)\right\}$ 的一个上界，并取 $0 < h \leqslant 1$ 充分小，使得 $\Gamma(\alpha+1)^{-1} h^\alpha M \leqslant \|x_0\|$. 对于正整数 $m$，作 $t_n^m := nh/m$, $n = 0, 1, 2, \ldots, m$, 然后按下式构造 $\left(x_n^m\right)_{n=0}^m \subset \mathbb{R}^n$,

$$x_n^m = x_0 + \Gamma(\alpha)^{-1} \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_n - s)^{\alpha-1} f\left(s, x_{k-1}^m, x_{q_{k-1}^m}^m\right) \mathrm{d}s,\ n = 1, 2, \ldots, m, \tag{2}$$

其中 $q_k^m := \lfloor q t_k^m \rfloor$. 利用这些有限长的序列，分段线性插值地构造连续函数 $(x^m)_{m=1}^\infty : [0,h] \to \mathbb{R}^n$，即

$$x^m(t) := \frac{t_n^m - t}{t_n^m - t_{n-1}^m} x_{n-1}^m + \frac{t - t_{n-1}^m}{t_n^m - t_{n-1}^m} x_n^m,\ t_{n-1}^m \leqslant t \leqslant t_n^m.$$

另外，为方便起见，对于 $\delta > 0$, 记 $D(\delta) := \{(s,t) \in [0,h] \times [0,h] : 0 \leqslant t - s < \delta\}$.

现在证明 $\|x^m(t_n)\| \leqslant 2\|x_0\|$, $0 \leqslant t \leqslant h, n = 0, 1, 2, \ldots, m, m \in \mathbb{N}_+$. 施归纳于 $n$. $n = 0$ 时显然。假设对于 $0 \leqslant k < n$ 成立 $\|x^m(t_k)\| \leqslant 2\|x_0\|$, 根据 $M$ 和 $h$ 的定义,

$$\begin{aligned} \|x^m(t_n)\| &\leqslant \|x_0\| + \Gamma(\alpha)^{-1} \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_n - s)^{\alpha-1} \left\|f\left(s, x_{k-1}^m, x_{q_{k-1}^m}^m\right)\right\| \mathrm{d}s \\ &\leqslant \|x_0\| + \Gamma(\alpha)^{-1} \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_n - s)^{\alpha-1} M \,\mathrm{d}s \\ &= \|x_0\| + \Gamma(\alpha)^{-1} M \int_0^{t_n} (t_n - s)^{\alpha-1} \,\mathrm{d}s \\ &= \|x_0\| + \Gamma(\alpha+1)^{-1} M t_n^\alpha \\ &\leqslant \|x_0\| + \Gamma(\alpha+1)^{-1} M h^\alpha \leqslant 2\|x_0\|, \end{aligned}$$

这样就完成了归纳。于是对任何 $t \in [0,h]$, $t$ 必然落在某个区间 $\left[t_{n-1}^m, t_n^m\right]$ 中，从而

$$\|x^m(t)\| \leqslant \frac{t_n^m - t}{t_n^m - t_{n-1}^m}\left\|x_{n-1}^m\right\| + \frac{t - t_{n-1}^m}{t_n^m - t_{n-1}^m}\left\|x_n^m\right\| \leqslant 2\|x_0\|.$$

因此对每个 $t \in [0,h]$ 都有 $(x^m(t))_{m=1}^\infty$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中相对紧.

然后讨论连续函数列 $(x^m)_{m=1}^\infty$ 的等度连续性。首先，对于 $0 \leqslant k \leqslant n \leqslant m$, 有

$$\begin{aligned}
&\Gamma(\alpha)\left\|x_n^m - x_k^m\right\| \\
&\leqslant \sum_{j=1}^k \int_{t_{j-1}^m}^{t_j^m} \left(\left(t_k^m - s\right)^{\alpha-1} - \left(t_n^m - s\right)^{\alpha-1}\right) M\,\mathrm{d}s + \sum_{j=k+1}^n \int_{t_{j-1}^m}^{t_j^m} \left(t_n^m - s\right)^{\alpha-1} M\,\mathrm{d}s \\
&= M\cdot\left(\int_0^{t_k^m} \left(\left(t_k^m - s\right)^{\alpha-1} - \left(t_n^m - s\right)^{\alpha-1}\right)\mathrm{d}s + \int_{t_k^m}^{t_n^m} \left(t_n^m - s\right)^{\alpha-1}\mathrm{d}s\right) \\
&= M\alpha^{-1}\cdot\left(\left(t_k^m\right)^\alpha - \left(t_n^m\right)^\alpha + 2\left(t_n^m - t_k^m\right)^\alpha\right) \leqslant 2M\alpha^{-1}\left(t_n^m - t_k^m\right)^\alpha.
\end{aligned}$$

而至于 $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant h$, 不妨设 $s \in \left[t_{k-1}^m, t_k^m\right]$, $t \in \left[t_{n-1}^m, t_n^m\right]$. 如果 $k < n$, 那么

$$\begin{aligned}
&\|x^m(t) - x^m(s)\| \\
&\leqslant \|x^m(t) - x^m(t_{n-1})\| + \left\|x_{n-1}^m - x_k^m\right\| + \|x^m(t_k) - x^m(s)\| \\
&\leqslant \left\|x_n^m - x_{n-1}^m\right\| + \left\|x_{n-1}^m - x_k^m\right\| + \left\|x_k^m - x_{k-1}^m\right\| \\
&\leqslant 2M\Gamma(\alpha+1)^{-1}\left(\left(t_n^m - t_{n-1}^m\right)^\alpha + \left(t_{n-1}^m - t_k^m\right)^\alpha + \left(t_k^m - t_{k-1}^m\right)^\alpha\right) \\
&\leqslant 2M\Gamma(\alpha+1)^{-1}\left(2(h/m)^\alpha + (t-s)^\alpha\right),
\end{aligned}$$

而若是 $k = n$, 则有

$$\begin{aligned}
\|x^m(t) - x^m(s)\| &\leqslant \left\|x_n^m - x_{n-1}^m\right\| \\
&\leqslant 2M\Gamma(\alpha+1)^{-1}\left(t_n^m - t_{n-1}^m\right)^\alpha \\
&\leqslant 2M\Gamma(\alpha+1)^{-1}(h/m)^\alpha,
\end{aligned}$$

总之

$$\|x^m(t) - x^m(s)\| \leqslant 2M\Gamma(\alpha+1)^{-1}\left(2(h/m)^\alpha + (t-s)^\alpha\right). \tag{3}$$

任给 $\varepsilon > 0$, 取 $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}_+$ 和 $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon) > 0$ 分别满足 $2M\Gamma(\alpha+1)^{-1}\delta_0^\alpha < \varepsilon/2$ 和 $4M\Gamma(\alpha+1)^{-1}(h/N)^\alpha < \varepsilon/2$. 由式(3)可知，$\|x^m(t) - x^m(s)\| < \varepsilon$ 对任何 $m > N$ 及 $(s,t) \in D(\delta_0)$ 成立。至于 $1 \leqslant m \leqslant N$, 由于每个 $x^m$ 都是 $[0,h]$ 上的一致连续函数，故存在有限个只依赖于 $\varepsilon$ 的正数 $(\delta_m)_{m=1}^N$, 使得对于 $(s,t) \in D(\delta_m)$ 成立 $\|x^m(t) - x^m(s)\| < \varepsilon$. 现在取 $\delta = \delta(\varepsilon) := \min_{0\leqslant m\leqslant N}\delta_m > 0$, 那么当 $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant h$ 且 $t - s < \delta$ 时，$\|x^m(t) - x^m(s)\| < \varepsilon$ 对于任何 $m \in \mathbb{N}_+$ 成立。这说明 $(x^m)_{m=1}^\infty$ 是 $C[0,h]$

中的一致等度连续函数列。

使用 Arzelà-Ascoli 定理，我们得到 $\{x^m : m \in \mathbb{N}_+\}$ 在 $C([0,h],\mathbb{R}^n)$ 中相对紧，故有一致收敛子列，这个子列仍记为 $(x^m)_{m=1}^{\infty}$, 并设其极限函数为 $x \in C([0,h],\mathbb{R}^n)$. 任给 $\varepsilon > 0$, 由于 $f$ 在紧集 $[0,h] \times \overline{B_{2\|x_0\|}(0)} \times \overline{B_{2\|x_0\|}(0)} \subset [0,h] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 上一致连续，故存在 $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ 使得 $\|f(t,u,v) - f(t,x,y)\| < \varepsilon\alpha\Gamma(\alpha)h^{-\alpha}/4$ 对 $t \in [0,h]$ 以及满足 $\|u - x\| + \|v - y\| < \delta_1$ 的 $u, v, x, y \in B_{2\|x_0\|}(0)$ 成立。取 $N_1 = N_1(\delta_1) \in \mathbb{N}_+$, 使得当 $m > N_1$ 且 $t \in [0,h]$ 时成立 $\|x^m(t) - x(t)\| < \delta_1/2$, 从而

$$\begin{aligned}&\left\|\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,x^m(s),x^m(qs))\,\mathrm{d}s - \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,x(s),x(qs))\,\mathrm{d}s\right\| \\ &\leqslant \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \frac{\varepsilon\alpha\Gamma(\alpha)h^{-\alpha}}{4}\,\mathrm{d}s = \varepsilon\Gamma(\alpha)h^{-\alpha}t^{\alpha}/4 \leqslant \varepsilon\Gamma(\alpha)/4.\end{aligned} \tag{4}$$

由 $(x^m)_{m=1}^{\infty}$ 的等度连续性，存在 $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$ 使得 $\|x^m(t) - x^m(s)\| < \min(\delta_1/2, \varepsilon/4)$ 对任何 $m \in \mathbb{N}_+$ 及 $(s,t) \in D(\delta_2)$ 成立。取 $N_2 = N_2(\delta_2) \in \mathbb{N}_+$ 使得 $h/N_2 < \delta_2$. 一方面，注意到 $m > N_2$ 时总有 $t_n - t_{n-1} < \delta_2 < \delta_1/2$, $n = 0, 1, 2, \ldots, m$, 于是 $\left\|f\big(t, x^m_{n-1}, x^m_{q^m_{n-1}}\big) - f\big(t, x^m(t), x^m(qt)\big)\right\| < \varepsilon\alpha\Gamma(\alpha)h^{-\alpha}/4$, $t \in \big[t^m_{n-1}, t^m_n\big]$, 从而

$$\begin{aligned}&\Gamma(\alpha)\left\|x^m(t_n) - x_0 - \Gamma(\alpha)^{-1}\int_0^{t_n} (t_n-s)^{\alpha-1} f(s,x^m(s),x^m(qs))\,\mathrm{d}s\right\| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_n-s)^{\alpha-1}\left\|f\big(s,x^m_{k-1},x^m_{q^m_{k-1}}\big) - f\big(s,x^m(s),x^m(qs)\big)\right\|\mathrm{d}s \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_n-s)^{\alpha-1}\frac{\varepsilon\alpha\Gamma(\alpha)h^{-\alpha}}{4}\,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^{t_n} (t_n-s)^{\alpha-1}\frac{\varepsilon\alpha\Gamma(\alpha)h^{-\alpha}}{4}\,\mathrm{d}s \leqslant \varepsilon\Gamma(\alpha)/4.\end{aligned} \tag{5}$$

另一方面，任意 $t \in [0,h]$, 设 $t \in [t_{n-1}, t_n]$, 则对任何 $m \in \mathbb{N}_+$ 成立

$$\|x^m(t) - x^m(t_n)\| < \varepsilon/4. \tag{6}$$

根据[?] Proposition 3.2，$x, f \in C([0,h],\mathbb{R}^n)$ 蕴涵 $t \mapsto \Gamma(\alpha)^{-1}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,x(s),x(qs))\,\mathrm{d}s \in C([0,h],\mathbb{R}^n)$, 因此可取 $N_3 = N_3(\varepsilon) \in \mathbb{N}_+$ 充分大（从而 $h/N_3 > 0$ 足够小），使得 $m > N_3$ 且 $(s,t) \in D(h/N_3)$ 时，$\Gamma(\alpha)^{-1} \left\|\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau,x(\tau),x(q\tau))\,\mathrm{d}\tau - \int_0^s (s-\tau)^{\alpha-1} f(\tau,x(\tau),x(q\tau))\,\mathrm{d}\tau\right\| < \varepsilon/4$. 于是当 $t \in [0,h]$ 时，设 $t \in [t_{n-1}, t_n]$, 有

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha)^{-1}\Bigg\|&\int_0^{t_n} (t_n-s)^{\alpha-1} f(s,x(s),x(qs))\,\mathrm{d}s \\ &- \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,x(s),x(qs))\,\mathrm{d}s\Bigg\| < \varepsilon/4.\end{aligned} \tag{7}$$

现在取 $N = N(\varepsilon) := \max\{N_1, N_2, N_3\}$, 根据 Eqs. (4) to (7) 以及三角不等式，当 $m > N, t \in [0, h]$ 时，设 $t \in [t_{n-1}, t_n]$, 那么可以估计

$$\begin{aligned}
&\left\|x^m(t) - x_0 - \Gamma(\alpha)^{-1}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s), x(qs))\,\mathrm{d}s\right\| \\
\leqslant\ & \|x^m(t) - x^m(t_n)\| \\
&+ \left\|x^m(t_n) - x_0 - \Gamma(\alpha)^{-1}\int_0^{t_n} (t_n-s)^{\alpha-1} f(s, x^m(s), x^m(qs))\,\mathrm{d}s\right\| \\
&+ \left\|x_0 + \Gamma(\alpha)^{-1}\int_0^{t_n} (t_n-s)^{\alpha-1} f(s, x^m(s), x^m(qs))\,\mathrm{d}s\right. \\
&\qquad \left. -x_0 - \Gamma(\alpha)^{-1}\int_0^{t_n} (t_n-s)^{\alpha-1} f(s, x(s), x(qs))\,\mathrm{d}s\right\| \\
&+ \left\|x_0 + \Gamma(\alpha)^{-1}\int_0^{t_n} (t_n-s)^{\alpha-1} f(s, x(s), x(qs))\,\mathrm{d}s\right. \\
&\qquad \left. -x_0 - \Gamma(\alpha)^{-1}\int_0^{t} (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s), x(qs))\,\mathrm{d}s\right\| < \varepsilon,
\end{aligned}$$

即 $\lim_{m\to\infty} x^m(t) = x_0 + \Gamma(\alpha)^{-1}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s), x(qs))\,\mathrm{d}s,\ 0 \leqslant t \leqslant h$. 而极限的唯一性导致

$$x(t) = \Gamma(\alpha)^{-1}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s), x(qs))\,\mathrm{d}s,\ 0 \leqslant t \leqslant h,$$

从而 $x \in C([0, h], \mathbb{R}^n)$ 是方程(1)在 $[0, h]$ 上的一个弱解。 □

**定理** 2 如果 $f(t, \cdot, \cdot)$ 对 $t \in [0, \infty)$ 一致地局部 Lipschitz, 即对任何 $r > 0$, 存在不依赖于 $t$ 的 $L = L(r) \geqslant 0$, 使得

$$\|f(t, x, y) - f(t, u, v)\| \leqslant L \cdot (\|x - u\| + \|y - v\|) \tag{8}$$

对任何 $t \in [0, \infty)$ 以及 $x, y, u, v \in B_r(0)$ 成立，那么方程(1)的弱解局部存在，并在存在区间上唯一。

**证明**（存在性）构造 Picard 序列 $(x_n)_{n=0}^{\infty} : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ 满足

$$\begin{cases} x^{n+1}(t) := x_0 + \Gamma(\alpha)^{-1}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x^n(s), x^n(qs))\,\mathrm{d}s, \quad n \in \mathbb{N}, \\ x^0(t) := x_0. \end{cases}$$

记 $M < \infty$ 是集合 $\left\{\|f(t, u, v)\| : t \in [0, 1], u, v \in B_{2\|x_0\|}(0)\right\}$ 的一个上界，并取 $0 < h \leqslant 1$ 充分小，使得 $\Gamma(\alpha+1)^{-1} h^{\alpha} M \leqslant \|x_0\|$. 可以归纳地证明 $\|x^n(t)\| \leqslant 2\|x_0\|$, $t \in$

$[0,h], n\in\mathbb{N}$. 取 $L:=L(2\|x_0\|)$, 那么对于 $t\in[0,h], n\in\mathbb{N}_+$,

$$\begin{aligned}\left\|x^{n+1}(t)-x^n(t)\right\| \leqslant L\Gamma(\alpha)^{-1}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \\ \left(\left\|x^n(s)-x^{n-1}(s)\right\|+\left\|x^n(qs)-x^{n-1}(qs)\right\|\right)\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{9}$$

现在归纳地说明

$$\left\|x^{n+1}(t)-x^n(t)\right\| \leqslant \frac{L^nM}{\Gamma(\alpha)^{n+1}\alpha}t^{(n+1)\alpha}\prod_{k=1}^{n}\left(1+q^{k\alpha}\right)\mathrm{B}(\alpha,k\alpha+1),\ t\in[0,h], n\in\mathbb{N}. \tag{10}$$

当 $n=0$ 时，

$$\begin{aligned}\left\|x^1(t)-x^0(t)\right\| &= \|x^1(t)-x_0\| \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left\|\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(s,x_0,x_0)\,\mathrm{d}s\right\| \\ &\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}M\,\mathrm{d}s \\ &= \Gamma(\alpha)^{-1}\alpha^{-1}t^{\alpha}M.\end{aligned}$$

假定式(10)在 $n$ 取 $n-1$ 时成立，然后

$$\begin{aligned}&\left\|x^{n+1}(t)-x^n(t)\right\| \\ \leqslant\ & \frac{L}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left(\left\|x^n(s)-x^{n-1}(s)\right\|+\left\|x^n(qs)-x^{n-1}(qs)\right\|\right)\mathrm{d}s \\ \leqslant\ & \frac{L^nM}{\Gamma(\alpha)^{n+1}\alpha}\left(\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+q^{k\alpha}\right)\mathrm{B}(\alpha,k\alpha+1)\right)\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left(s^{n\alpha}+(qs)^{n\alpha}\right)\mathrm{d}s \\ =\ & \frac{L^nM}{\Gamma(\alpha)^{n+1}\alpha}\left(\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+q^{k\alpha}\right)\mathrm{B}(\alpha,k\alpha+1)\right)\left(1+q^{n\alpha}\right)\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}s^{n\alpha}\,\mathrm{d}s \\ =\ & \frac{L^nM}{\Gamma(\alpha)^{n+1}\alpha}\left(\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+q^{k\alpha}\right)\mathrm{B}(\alpha,k\alpha+1)\right)\left(1+q^{n\alpha}\right)t^{n\alpha+\alpha}\mathrm{B}(\alpha,n\alpha+1) \\ =\ & \frac{L^nM}{\Gamma(\alpha)^{n+1}\alpha}t^{(n+1)\alpha}\prod_{k=1}^{n}\left(1+q^{k\alpha}\right)\mathrm{B}(\alpha,k\alpha+1).\end{aligned}$$

由数学归纳原理，式(10)成立。注意到

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+q^{k\alpha}\right) \leqslant \prod_{k=1}^{n}\exp\left(q^{k\alpha}\right) = \exp\sum_{k=1}^{n}(q^{\alpha})^k \leqslant \exp\frac{q^{\alpha}}{1-q^{\alpha}}$$

和

$$\prod_{k=1}^{n}\mathrm{B}(\alpha,k\alpha+1) = \prod_{k=1}^{n}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(k\alpha+1)}{\Gamma((k+1)\alpha+1)} = \Gamma(\alpha)^n\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma((n+1)\alpha+1)},$$

我们有

$$\left\|x^{n+1}(t)-x^{n}(t)\right\| \leqslant \frac{L^{n} M t^{(n+1) \alpha}}{\Gamma((n+1) \alpha+1)} \exp \frac{q^{\alpha}}{1-q^{\alpha}},\ t \in[0, h]. \tag{11}$$

由 Cauchy-Hadamard 公式和 Stirling 公式易知 Mittag-Leffler 函数 $E_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\Gamma(\alpha n+1)^{-1}z^n$ 对于任何 $z\in\mathbb{C}$ 收敛，然后根据 Weierstrass M 判别法就得到函数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\left(x^{n+1}-x^n\right)$ 在 $[0,h]$ 上绝对一致收敛，于是函数列 $(x^n)_{n=0}^{\infty}$ 在 $[0,h]$ 上存在一致极限 $x$. 这说明任取 $\varepsilon>0$, 存在 $N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, 使得 $\|x^n(t)-x(t)\|<\varepsilon$ 对于 $n>N$ 和 $t\in[0,h]$ 成立。这样一来，当 $t\in[0,h]$ 时，

$$\begin{aligned}
&\left\|\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x^n(s), x^n(qs))\,\mathrm{d}s - \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s), x(qs))\,\mathrm{d}s\right\| \\
\leqslant &\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} L\cdot\left(\|x^n(s)-x(s)\|+\|x^n(qs)-x(qs)\|\right)\mathrm{d}s \\
\leqslant &\ 2\varepsilon L\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}s = 2\varepsilon L\alpha^{-1}t^{\alpha},
\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x^n(s), x^n(qs))\,\mathrm{d}s = \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s), x(qs))\,\mathrm{d}s.$$

现在在式(2)中命 $n\to\infty$ 就得到

$$x(t)=x_0+\Gamma(\alpha)^{-1}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s), x(qs))\,\mathrm{d}s,\ 0\leqslant t\leqslant h.$$

On the other hand, with the help of[? ] Proposition 3.2, one can deduce by induction that $(x^n)_{n=0}^{\infty}\subseteq C^{0,\alpha}\cap AC[0,h]\subseteq C[0,h]$. Then $x$, as the uniform limit of $(x^n)_{n=0}^{\infty}$, is also continuous on $[0,h]$. Now we can say $x$ is a mild solution of Eq. (1) on $[0,h]$, and the proof of existence is complete.

（唯一性）设 $0<T<\infty$, $x,y\in C[0,T]$ 都是方程(1)的弱解。记 $L := L\left(\max\left(\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|x(t)\|,\ \max_{0\leqslant t\leqslant T}\|y(t)\|\right)\right)$, 并作 $S:=\{t\in[0,T]: x(t)\neq y(t)\}$, $t_* := \inf S$, 下证 $t_*=\infty$. 反证，假设 $0\leqslant t_*\leqslant T$, 分三种情况讨论。

如果 $t_*=T$. 那么在 $[0,T)$ 上有 $x=y$, 而 $x,y$ 都是连续的，因此必在闭区间 $[0,T]$ 上处处相等，此时 $S=\varnothing$, $t_*=\infty$, 矛盾。

如果 $0<t_*<T$. 那么在 $[0,t_*)$ 上有 $x=y$. 选取 $\delta>0$ 充分小，使得 $t_*+\delta\leqslant T$ 且

$q \cdot (t_* + \delta) < t_*$, 然后就有 $x(qt) = y(qt)$, $0 \leqslant t \leqslant t_* + \delta$. 于是当 $t \in [0, t_* + \delta]$ 时，

$$\begin{aligned}\|x(t) - y(t)\| &\leqslant L\Gamma(\alpha)^{-1} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \\ &\qquad \big(\|x(s) - y(s)\| + \|x(qs) - y(qs)\|\big)\,\mathrm{d}s \\ &= L\Gamma(\alpha)^{-1} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|x(s) - y(s)\|\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

此时利用分数阶的 Gronwall 不等式??就得到在 $[0, t_* + \delta]$ 上都有 $x = y$, 故 $t_* \geqslant t_* + \delta$, 而这是不可能的。

如果 $t_* = 0$. 选取 $\delta \in (0, T]$ 充分小，使得 $2L\Gamma(\alpha+1)^{-1}\delta^\alpha < 1$. 当 $t \in [0, \delta]$ 时，

$$\begin{aligned}&\|x(t) - y(t)\| \\ \leqslant\ & \frac{L}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \big(\|x(s) - y(s)\| + \|x(qs) - y(qs)\|\big)\,\mathrm{d}s \\ \leqslant\ & \frac{2L}{\Gamma(\alpha)} \Big(\max_{0 \leqslant s \leqslant t} \|x(s) - y(s)\|\Big) \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}s \\ =\ & 2L\Gamma(\alpha+1)^{-1} t^\alpha \max_{0 \leqslant s \leqslant t} \|x(s) - y(s)\|.\end{aligned}$$

上式两边对 $t \in [0, \delta]$ 取最大值，得到

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant \delta} \|x(t) - y(t)\| \leqslant 2L\Gamma(\alpha+1)^{-1}\delta^\alpha \max_{0 \leqslant t \leqslant \delta} \|x(t) - y(t)\|,$$

结合 $\delta$ 的选取知道只可能有 $\max_{0 \leqslant s \leqslant \delta} \|x(s) - y(s)\| = 0$, 即等式 $x = y$ 至少在 $[0, \delta]$ 上成立, 故 $t_* \geqslant \delta$, 矛盾.

综合以上各种情况知 $t_* \notin [0, T]$，只可能是 $t_* = \infty$, 此时必有 $S = \varnothing$, 故而 $x$ 和 $y$ 在整个 $[0, T]$ 上相等。而如若 $x, y$ 是 $[0, \infty)$ 上方程(1)的弱解，上述结果则表明它们在任何有限区间 $[0, T]$ 上相等，因而在 $[0, \infty)$ 上相等。唯一性证毕。 □

## 3 后期拟完成的研究工作及进度安排

## 4 存在的困难与问题

## 5 如期完成全部论文工作的可能性

## 6 参考文献