

哈 尔 滨 工 业 大 学

硕士学位论文中期报告

题 目：分数阶比例延迟方程的几种数值方法的研究

院 （系） 数学学院

学 科 基础数学

导 师 雷强

研 究 生 李云鹏

学 号 22S012004

中期报告日期 2024 年 6 月 28 日

研究生院制

目 录

1 课题主要研究内容及进度情况	1
2 目前已完成的研究工作及结果	2
3 后期拟完成的研究工作及进度安排	10
4 存在的困难与问题	10
5 如期完成全部论文工作的可能性.....	10
参考文献	10

1 课题主要研究内容及进度情况

设 $d \in \mathbb{N}_+$. 本课题主要研究如下的分数阶比例延迟方程,

$$\begin{cases} {}^C D_{0+}^\alpha x(t) = f(t, x(t), x(qt)), & t \geq 0, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1)$$

其中 x 是 \mathbb{R}^d 值未知函数, $x_0 \in \mathbb{R}^d$ 给定, $0 < \alpha < 1$, 函数 $f: [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ 连续, ${}^C D_{0+}^\alpha x(t) = \Gamma(1 - \alpha)^{-1} \int_0^t (t - s)^{-\alpha} x'(s) ds$. 参考^[1], 我们给出对于方程 (1) 的弱解的定义。

定义 1 如果有函数 x , 使得 t 属于 $[0, \infty)$ 的某个包含 0 的子区间 I 上时满足

$$x(t) = x_0 + \Gamma(\alpha)^{-1} \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} x(s) ds, \quad (2)$$

那么称 x 是方程 (1) 在 I 上的一个弱解。

目前研究了弱解的 Peano 存在性和 Picard 存在唯一性定理, 并对任意步长下的 L1 数值格式的长时间行为做了讨论。

在准确解部分得到的结果见如下的定理定理 1 和 2.

定理 1 (Peano 存在性定理) 方程 (1) 总是在某个小区间 $[0, h]$ 上存在弱解。

定理 2 (Picard 存在唯一性定理) 如果 $f(t, \cdot, \cdot)$ 对 $t \in [0, \infty)$ 一致地局部 Lipschitz, 即对任何 $r > 0$, 存在不依赖于 t 的 $L = L(r) \geq 0$, 使得

$$\|f(t, x, y) - f(t, u, v)\| \leq L \cdot (\|x - u\| + \|y - v\|) \quad (3)$$

对任何 $t \in [0, \infty)$ 以及 $x, y, u, v \in B_r(0)$ 成立, 那么方程 (1) 在某个小区间 $[0, h]$ 上存在弱解, 并且弱解在存在区间 $I \ni 0$ 上唯一。进一步地, 如果 L 可以不依赖于 r , 那么在 $[0, \infty)$ 上全局存在唯一的弱解。

在叙述数值解部分的结果之前, 先给出数值格式。取严格递增趋于正无穷的序列 $(t_n)_{n=0}^\infty$ 作为时间节点, 其中 $t_0 = 0$. 利用在每个小区间上线性插值的办法来近似导数和延迟, 就得到针对方程 (1) 的 L1 数值格式

$$x_n = (t_n - t_{n-1})^\alpha \left(\Gamma(2 - \alpha) f(t_n, x_n, \bar{x}^n) + \sum_{k=0}^{n-1} (a_{n,k+1} - a_{n,k}) x_k \right), \quad (4)$$

其中 $a_{n,k} := \frac{(t_n - t_{k-1})^{1-\alpha} - (t_n - t_k)^{1-\alpha}}{t_k - t_{k-1}}$ ($1 \leq k \leq n$), $a_{n,0} := 0$, \bar{x}^n 是对 $x(qt_n)$ 的近似, 即设 $t_{m_n-1} \leq qt_n < t_{m_n}$, 有

$$\bar{x}^n := \frac{t_{m_n} - qt_n}{t_{m_n} - t_{m_n-1}} x_{m_n-1} + \frac{qt_n - t_{m_n-1}}{t_{m_n} - t_{m_n-1}} x_{m_n}.$$

在数值解部分得到的结果为如下的定理 2 和 3, 其中所描述的数值解的长时间行为与文献 [2] 中得到的准确解在相同条件下的长时间行为相吻合。接下来的定理 3 说明, 在一定条件下, 数值解有界。

定理 3 如果存在常数 $a > 0, a_u > a_v > 0$, 使得

$$\langle u, f(t, u, v) \rangle \leq a - a_u \|u\|^2 + a_v \|v\|^2,$$

那么

$$\|x_n\|^2 \leq (a_u - a_v)^{-1} a + \|x_0\|^2. \quad (5)$$

接下来讨论数值解的稳定性。为此, 把方程 (1) 的初值条件改为 $x(0) = y_0$, 用同样的数值算法 (包括步长) 产生数值解 $(y_n)_{n=0}^\infty$ 和对 “延迟” 的近似 $(\bar{y}_n)_{n=0}^\infty$, 并记 $e_n := y_n - x_n, \bar{e}_n := \bar{y}_n - \bar{x}_n$. 接下来的定理 4 表明, 在一定条件下, 数值解稳定。

定理 4 如果存在常数 $b_u > b_v > 0$, 使得

$$\begin{cases} \langle f(t, u, v) - f(t, x, v), u - x \rangle \leq -b_u \|u - x\|^2, \\ \|f(t, u, v) - f(t, u, y)\| \leq b_v \|v - y\|, \end{cases}$$

那么

$$\|e_n\| \leq \|e_0\|.$$

2 目前已完成的研究工作及结果

这一节来叙述上一节中各定理的证明。

定理 1 的证明 记 $M < \infty$ 是集合 $\{\|f(t, u, v)\| : t \in [0, 1], u, v \in B_{2\|x_0\|}(0)\}$ 的一个上界, 并取 $0 < h \leq 1$ 充分小, 使得 $\Gamma(\alpha + 1)^{-1} h^\alpha M \leq \|x_0\|$. 对于正整数 m , 作 $t_n^m := nh/m, n = 0, 1, 2, \dots, m$, 然后按下式构造 $(x_n^m)_{n=0}^m \subset \mathbb{R}^d$,

$$x_n^m = x_0 + \Gamma(\alpha)^{-1} \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_n - s)^{\alpha-1} f(s, x_{k-1}^m, x_{q_{k-1}}^m) ds, \quad n = 1, 2, \dots, m, \quad (6)$$

其中 $q_k^m := \lfloor qt_k^m \rfloor$. 利用这些有限长的序列, 分段线性插值地构造连续函数 $(x^m)_{m=1}^\infty : [0, h] \rightarrow \mathbb{R}^d$, 即

$$x^m(t) := \frac{t_n^m - t}{t_n^m - t_{n-1}^m} x_{n-1}^m + \frac{t - t_{n-1}^m}{t_n^m - t_{n-1}^m} x_n^m, \quad t_{n-1}^m \leq t \leq t_n^m.$$

另外, 为方便起见, 对于 $\delta > 0$, 记 $D(\delta) := \{(s, t) \in [0, h] \times [0, h] : 0 \leq t - s < \delta\}$.

现在证明 $\|x^m(t_n)\| \leq 2\|x_0\|, 0 \leq t \leq h, n = 0, 1, 2, \dots, m, m \in \mathbb{N}_+$. 施归纳于 n .

$n = 0$ 时显然。假设对于 $0 \leq k < n$ 成立 $\|x^m(t_k)\| \leq 2\|x_0\|$, 根据 M 和 h 的定义,

$$\begin{aligned}
\|x^m(t_n)\| &\leq \|x_0\| + \Gamma(\alpha)^{-1} \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_n - s)^{\alpha-1} \|f(s, x_{k-1}^m, x_{q_{k-1}}^m)\| \, ds \\
&\leq \|x_0\| + \Gamma(\alpha)^{-1} \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_n - s)^{\alpha-1} M \, ds \\
&= \|x_0\| + \Gamma(\alpha)^{-1} M \int_0^{t_n} (t_n - s)^{\alpha-1} \, ds \\
&= \|x_0\| + \Gamma(\alpha + 1)^{-1} M t_n^\alpha \\
&\leq \|x_0\| + \Gamma(\alpha + 1)^{-1} M h^\alpha \leq 2\|x_0\|,
\end{aligned}$$

这样就完成了归纳。于是对任何 $t \in [0, h]$, t 必然落在某个区间 $[t_{n-1}^m, t_n^m]$ 中, 从而

$$\|x^m(t)\| \leq \frac{t_n^m - t}{t_n^m - t_{n-1}^m} \|x_{n-1}^m\| + \frac{t - t_{n-1}^m}{t_n^m - t_{n-1}^m} \|x_n^m\| \leq 2\|x_0\|.$$

因此对每个 $t \in [0, h]$ 都有 $(x^m(t))_{m=1}^\infty$ 在 \mathbb{R}^d 中相对紧。

然后讨论连续函数列 $(x^m)_{m=1}^\infty$ 的等度连续性。首先, 对于 $0 \leq k \leq n \leq m$, 有

$$\begin{aligned}
&\Gamma(\alpha) \|x_n^m - x_k^m\| \\
&\leq \sum_{j=1}^k \int_{t_{j-1}^m}^{t_j^m} \left((t_k^m - s)^{\alpha-1} - (t_n^m - s)^{\alpha-1} \right) M \, ds + \sum_{j=k+1}^n \int_{t_{j-1}^m}^{t_j^m} (t_n^m - s)^{\alpha-1} M \, ds \\
&= M \cdot \left(\int_0^{t_k^m} \left((t_k^m - s)^{\alpha-1} - (t_n^m - s)^{\alpha-1} \right) \, ds + \int_{t_k^m}^{t_n^m} (t_n^m - s)^{\alpha-1} \, ds \right) \\
&= M \alpha^{-1} \cdot \left((t_k^m)^\alpha - (t_n^m)^\alpha + 2(t_n^m - t_k^m)^\alpha \right) \leq 2M \alpha^{-1} (t_n^m - t_k^m)^\alpha.
\end{aligned}$$

而至于 $0 \leq s \leq t \leq h$, 不妨设 $s \in [t_{k-1}^m, t_k^m]$, $t \in [t_{n-1}^m, t_n^m]$. 如果 $k < n$, 那么

$$\begin{aligned}
\|x^m(t) - x^m(s)\| &\leq \|x^m(t) - x^m(t_{n-1})\| + \|x_{n-1}^m - x_k^m\| + \|x^m(t_k) - x^m(s)\| \\
&\leq \|x_n^m - x_{n-1}^m\| + \|x_{n-1}^m - x_k^m\| + \|x_k^m - x_{k-1}^m\| \\
&\leq 2M \Gamma(\alpha + 1)^{-1} \left((t_n^m - t_{n-1}^m)^\alpha + (t_{n-1}^m - t_k^m)^\alpha + (t_k^m - t_{k-1}^m)^\alpha \right) \\
&\leq 2M \Gamma(\alpha + 1)^{-1} (2(h/m)^\alpha + (t - s)^\alpha),
\end{aligned}$$

而若是 $k = n$, 则有

$$\begin{aligned}
\|x^m(t) - x^m(s)\| &\leq \|x_n^m - x_{n-1}^m\| \\
&\leq 2M \Gamma(\alpha + 1)^{-1} (t_n^m - t_{n-1}^m)^\alpha \\
&\leq 2M \Gamma(\alpha + 1)^{-1} (h/m)^\alpha,
\end{aligned}$$

总之

$$\|x^m(t) - x^m(s)\| \leq 2M\Gamma(\alpha + 1)^{-1} (2(h/m)^\alpha + (t-s)^\alpha). \quad (7)$$

任给 $\varepsilon > 0$, 取 $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}_+$ 和 $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon) > 0$ 分别满足 $2M\Gamma(\alpha + 1)^{-1}\delta_0^\alpha < \varepsilon/2$ 和 $4M\Gamma(\alpha + 1)^{-1}(h/N)^\alpha < \varepsilon/2$. 由式 (7) 可知, $\|x^m(t) - x^m(s)\| < \varepsilon$ 对任何 $m > N$ 及 $(s, t) \in D(\delta_0)$ 成立. 至于 $1 \leq m \leq N$, 由于每个 x^m 都是 $[0, h]$ 上的一致连续函数, 故存在有限个只依赖于 ε 的正数 $(\delta_m)_{m=1}^N$, 使得对于 $(s, t) \in D(\delta_m)$ 成立 $\|x^m(t) - x^m(s)\| < \varepsilon$. 现在取 $\delta = \delta(\varepsilon) := \min_{0 \leq m \leq N} \delta_m > 0$, 那么当 $0 \leq s \leq t \leq h$ 且 $t - s < \delta$ 时, $\|x^m(t) - x^m(s)\| < \varepsilon$ 对于任何 $m \in \mathbb{N}_+$ 成立. 这说明 $(x^m)_{m=1}^\infty$ 是 $C[0, h]$ 中的一致等度连续函数列.

使用 Arzelà-Ascoli 定理, 我们得到 $\{x^m: m \in \mathbb{N}_+\}$ 在 $C([0, h], \mathbb{R}^d)$ 中相对紧, 故有一致收敛子列, 这个子列仍记为 $(x^m)_{m=1}^\infty$, 并设其极限函数为 $x \in C([0, h], \mathbb{R}^d)$. 任给 $\varepsilon > 0$, 由于 f 在紧集 $[0, h] \times \overline{B_{2\|x_0\|}(0)} \times \overline{B_{2\|x_0\|}(0)} \subset [0, h] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ 上一致连续, 故存在 $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ 使得 $\|f(t, u, v) - f(t, x, y)\| < \varepsilon\alpha\Gamma(\alpha)h^{-\alpha}/4$ 对 $t \in [0, h]$ 以及满足 $\|u - x\| + \|v - y\| < \delta_1$ 的 $u, v, x, y \in B_{2\|x_0\|}(0)$ 成立. 取 $N_1 = N_1(\delta_1) \in \mathbb{N}_+$, 使得当 $m > N_1$ 且 $t \in [0, h]$ 时成立 $\|x^m(t) - x(t)\| < \delta_1/2$, 从而

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x^m(s), x^m(qs)) ds - \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s), x(qs)) ds \right\| \\ & \leq \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \frac{\varepsilon\alpha\Gamma(\alpha)h^{-\alpha}}{4} ds = \varepsilon\Gamma(\alpha)h^{-\alpha}t^\alpha/4 \leq \varepsilon\Gamma(\alpha)/4. \end{aligned} \quad (8)$$

由 $(x^m)_{m=1}^\infty$ 的等度连续性, 存在 $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$ 使得 $\|x^m(t) - x^m(s)\| < \min(\delta_1/2, \varepsilon/4)$ 对任何 $m \in \mathbb{N}_+$ 及 $(s, t) \in D(\delta_2)$ 成立. 取 $N_2 = N_2(\delta_2) \in \mathbb{N}_+$ 使得 $h/N_2 < \delta_2$. 一方面, 注意到 $m > N_2$ 时总有 $t_n - t_{n-1} < \delta_2 < \delta_1/2$, $n = 0, 1, 2, \dots, m$, 于是 $\left\| f(t, x_{n-1}^m, x_{q_{n-1}}^m) - f(t, x^m(t), x^m(qt)) \right\| < \varepsilon\alpha\Gamma(\alpha)h^{-\alpha}/4$, $t \in [t_{n-1}^m, t_n^m]$, 从而

$$\begin{aligned} & \Gamma(\alpha) \left\| x^m(t_n) - x_0 - \Gamma(\alpha)^{-1} \int_0^{t_n} (t_n - s)^{\alpha-1} f(s, x^m(s), x^m(qs)) ds \right\| \\ & \leq \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_n - s)^{\alpha-1} \left\| f(s, x_{k-1}^m, x_{q_{k-1}}^m) - f(s, x^m(s), x^m(qs)) \right\| ds \\ & \leq \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_n - s)^{\alpha-1} \frac{\varepsilon\alpha\Gamma(\alpha)h^{-\alpha}}{4} ds \\ & = \int_0^{t_n} (t_n - s)^{\alpha-1} \frac{\varepsilon\alpha\Gamma(\alpha)h^{-\alpha}}{4} ds \leq \varepsilon\Gamma(\alpha)/4. \end{aligned} \quad (9)$$

另一方面, 任意 $t \in [0, h]$, 设 $t \in [t_{n-1}, t_n]$, 则对任何 $m \in \mathbb{N}_+$ 成立

$$\|x^m(t) - x^m(t_n)\| < \varepsilon/4. \quad (10)$$

根据文献 [3] 中的性质 3.2, x 和 $f \in C([0, h], \mathbb{R}^d)$ 蕴涵 $t \mapsto \Gamma(\alpha)^{-1} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s), x(qs)) ds \in C([0, h], \mathbb{R}^d)$, 因此可取 $N_3 = N_3(\varepsilon) \in \mathbb{N}_+$ 充分大 (从而 $h/N_3 > 0$ 足够小), 使得 $m > N_3$ 且 $(s, t) \in D(h/N_3)$ 时, $\Gamma(\alpha)^{-1} \left\| \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, x(\tau), x(q\tau)) d\tau - \int_0^s (s-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, x(\tau), x(q\tau)) d\tau \right\| < \varepsilon/4$. 于是当 $t \in [0, h]$ 时, 设 $t \in [t_{n-1}, t_n]$, 有

$$\begin{aligned} & \Gamma(\alpha)^{-1} \left\| \int_0^{t_n} (t_n - s)^{\alpha-1} f(s, x(s), x(qs)) ds \right. \\ & \quad \left. - \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} f(s, x(s), x(qs)) ds \right\| < \varepsilon/4. \end{aligned} \quad (11)$$

现在取 $N = N(\varepsilon) := \max(N_1, N_2, N_3)$, 根据式 (8)-(11) 以及三角不等式, 当 $m > N, t \in [0, h]$ 时, 设 $t \in [t_{n-1}, t_n]$, 那么可以估计

$$\begin{aligned} & \left\| x^m(t) - x_0 - \Gamma(\alpha)^{-1} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s), x(qs)) ds \right\| \\ & \leq \|x^m(t) - x^m(t_n)\| \\ & \quad + \left\| x^m(t_n) - x_0 - \Gamma(\alpha)^{-1} \int_0^{t_n} (t_n - s)^{\alpha-1} f(s, x^m(s), x^m(qs)) ds \right\| \\ & \quad + \left\| x_0 + \Gamma(\alpha)^{-1} \int_0^{t_n} (t_n - s)^{\alpha-1} f(s, x^m(s), x^m(qs)) ds \right. \\ & \quad \quad \left. - x_0 - \Gamma(\alpha)^{-1} \int_0^{t_n} (t_n - s)^{\alpha-1} f(s, x(s), x(qs)) ds \right\| \\ & \quad + \left\| x_0 + \Gamma(\alpha)^{-1} \int_0^{t_n} (t_n - s)^{\alpha-1} f(s, x(s), x(qs)) ds \right. \\ & \quad \quad \left. - x_0 - \Gamma(\alpha)^{-1} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s), x(qs)) ds \right\| < \varepsilon, \end{aligned}$$

即 $\lim_{m \rightarrow \infty} x^m(t) = x_0 + \Gamma(\alpha)^{-1} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s), x(qs)) ds, 0 \leq t \leq h$. 而极限的唯一性导致

$$x(t) = \Gamma(\alpha)^{-1} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s), x(qs)) ds, 0 \leq t \leq h,$$

从而 $x \in C([0, h], \mathbb{R}^d)$ 是方程 (1) 在 $[0, h]$ 上的一个弱解。 \square

定理 2 的证明 (存在性) 构造 Picard 序列 $(x_n)_{n=0}^\infty : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^d$ 满足

$$\begin{cases} x_{n+1}(t) := x_0 + \Gamma(\alpha)^{-1} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x_n(s), x_n(qs)) ds, & n \in \mathbb{N}, \\ x^0(t) := x_0. \end{cases}$$

记 $M < \infty$ 是集合 $\{\|f(t, u, v)\| : t \in [0, 1], u, v \in B_{2\|x_0\|}(0)\}$ 的一个上界, 并取 $0 < h \leq 1$ 充分小, 使得 $\Gamma(\alpha+1)^{-1} h^\alpha M \leq \|x_0\|$. 可以归纳地证明 $\|x_n(t)\| \leq 2\|x_0\|, t \in$

$[0, h], n \in \mathbb{N}$. 取 $L := L(2\|x_0\|)$, 那么对于 $t \in [0, h], n \in \mathbb{N}_+$,

$$\begin{aligned} \|x_{n+1}(t) - x_n(t)\| &\leq L\Gamma(\alpha)^{-1} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \\ &\quad (\|x_n(s) - x_{n-1}(s)\| + \|x_n(qs) - x_{n-1}(qs)\|) \, ds. \end{aligned} \quad (12)$$

现在归纳地说明

$$\|x_{n+1}(t) - x_n(t)\| \leq \frac{L^n M}{\Gamma(\alpha)^{n+1} \alpha} t^{(n+1)\alpha} \prod_{k=1}^n (1 + q^{k\alpha}) \mathbf{B}(\alpha, k\alpha + 1), \quad t \in [0, h], n \in \mathbb{N}. \quad (13)$$

当 $n = 0$ 时,

$$\begin{aligned} \|x_1(t) - x_0(t)\| &= \|x_1(t) - x_0\| \\ &= \Gamma(\alpha)^{-1} \left\| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x_0, x_0) \, ds \right\| \\ &\leq \Gamma(\alpha)^{-1} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} M \, ds \\ &= \Gamma(\alpha)^{-1} \alpha^{-1} t^\alpha M. \end{aligned}$$

假定式 (13) 在 n 取 $n-1$ 时成立, 然后

$$\begin{aligned} &\|x_{n+1}(t) - x_n(t)\| \\ &\leq \frac{L}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} (\|x_n(s) - x_{n-1}(s)\| + \|x_n(qs) - x_{n-1}(qs)\|) \, ds \\ &\leq \frac{L^n M}{\Gamma(\alpha)^{n+1} \alpha} \left(\prod_{k=1}^{n-1} (1 + q^{k\alpha}) \mathbf{B}(\alpha, k\alpha + 1) \right) \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} (s^{n\alpha} + (qs)^{n\alpha}) \, ds \\ &= \frac{L^n M}{\Gamma(\alpha)^{n+1} \alpha} \left(\prod_{k=1}^{n-1} (1 + q^{k\alpha}) \mathbf{B}(\alpha, k\alpha + 1) \right) (1 + q^{n\alpha}) \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} s^{n\alpha} \, ds \\ &= \frac{L^n M}{\Gamma(\alpha)^{n+1} \alpha} \left(\prod_{k=1}^{n-1} (1 + q^{k\alpha}) \mathbf{B}(\alpha, k\alpha + 1) \right) (1 + q^{n\alpha}) t^{n\alpha+\alpha} \mathbf{B}(\alpha, n\alpha + 1) \\ &= \frac{L^n M}{\Gamma(\alpha)^{n+1} \alpha} t^{(n+1)\alpha} \prod_{k=1}^n (1 + q^{k\alpha}) \mathbf{B}(\alpha, k\alpha + 1). \end{aligned}$$

由归纳原理, 式 (13) 成立. 注意到

$$\prod_{k=1}^n (1 + q^{k\alpha}) \leq \prod_{k=1}^n \exp(q^{k\alpha}) = \exp \sum_{k=1}^n (q^\alpha)^k \leq \exp \frac{q^\alpha}{1 - q^\alpha}$$

和

$$\prod_{k=1}^n \mathbf{B}(\alpha, k\alpha + 1) = \prod_{k=1}^n \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(k\alpha + 1)}{\Gamma((k+1)\alpha + 1)} = \Gamma(\alpha)^n \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma((n+1)\alpha + 1)},$$

我们有

$$\|x_{n+1}(t) - x_n(t)\| \leq \frac{L^n M t^{(n+1)\alpha}}{\Gamma((n+1)\alpha + 1)} \exp \frac{q^\alpha}{1 - q^\alpha}, t \in [0, h]. \quad (14)$$

由 Cauchy-Hadamard 公式和 Stirling 公式易知 Mittag-Leffler 函数^[4] $E_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma(\alpha n + 1)^{-1} z^n$ 对于任何 $z \in \mathbb{C}$ 收敛, 然后根据 Weierstrass M 判别法就得到函数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (x_{n+1} - x_n)$ 在 $[0, h]$ 上绝对一致收敛, 于是函数列 $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ 在 $[0, h]$ 上存在一致极限 x . 这说明任取 $\varepsilon > 0$, 存在 $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, 使得 $\|x_n(t) - x(t)\| < \varepsilon$ 对于 $n > N$ 和 $t \in [0, h]$ 成立. 这样一来, 当 $t \in [0, h]$ 时,

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x_n(s), x_n(qs)) ds - \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s), x(qs)) ds \right\| \\ & \leq \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} L \cdot (\|x_n(s) - x(s)\| + \|x_n(qs) - x(qs)\|) ds \\ & \leq 2\varepsilon L \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds = 2\varepsilon L \alpha^{-1} t^\alpha, \end{aligned}$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x_n(s), x_n(qs)) ds = \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s), x(qs)) ds.$$

现在在式 (6) 中命 $n \rightarrow \infty$ 就得到

$$x(t) = x_0 + \Gamma(\alpha)^{-1} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s), x(qs)) ds, \quad 0 \leq t \leq h.$$

利用文献 [3] 中的性质 3.2, 容易归纳地得到 $(x_n)_{n=0}^{\infty} \subseteq C^{0,\alpha} \cap AC[0, h] \subseteq C[0, h]$, 于是其一致极限 $x \in C[0, h]$. 这样 x 就是方程 (1) 在 $[0, h]$ 上的一个弱解。

如果 L 可以不依赖于 r , 那么式 (12) 对于一切 $t \in [0, \infty)$ 成立, 由此可见方程 (1) 的弱解将在 $[0, \infty)$ 上全局存在。

(唯一性) 设 $0 < T := \sup I < \infty$, x 和 $y \in C[0, T]$ 都是方程 (1) 的弱解. 记 $L := L(\max(\max_{0 \leq t \leq T} \|x(t)\|, \max_{0 \leq t \leq T} \|y(t)\|))$, 并作 $S := \{t \in [0, T] : x(t) \neq y(t)\}$, $t_* := \inf S$, 下证 $t_* = \infty$. 反证, 假设 $0 \leq t_* \leq T$, 分三种情况讨论。

1. 如果 $t_* = T$, 此时必有 $T \in I$, 且在 $[0, T)$ 上 $x = y$, 而 x, y 都是连续的, 因此必在闭区间 $[0, T]$ 上处处相等, 此时 $S = \emptyset, t_* = \infty$, 矛盾。
2. 如果 $0 < t_* < T$, 那么在 $[0, t_*)$ 上有 $x = y$. 选取 $\delta > 0$ 充分小, 使得 $t_* + \delta \leq T$ 且 $q \cdot (t_* + \delta) < t_*$, 然后就有 $x(qt) = y(qt)$, $0 \leq t \leq t_* + \delta$. 当 $t \in [0, t_* + \delta]$ 时,

$$\|x(t) - y(t)\| \leq L \Gamma(\alpha)^{-1} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} (\|x(s) - y(s)\| + \|x(qs) - y(qs)\|) ds$$

$$= L\Gamma(\alpha)^{-1} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|x(s) - y(s)\| ds,$$

然后利用分数阶 Gronwall 不等式^[1] 就得到在 $[0, t_* + \delta]$ 上都有 $x = y$, 故 $t_* \geq t_* + \delta$, 而这是不可能的。

3. 如果 $t_* = 0$, 选取 $\delta \in (0, T]$ 充分小, 使得 $2L\Gamma(\alpha+1)^{-1}\delta^\alpha < 1$. 当 $t \in [0, \delta]$ 时,

$$\begin{aligned} & \|x(t) - y(t)\| \\ & \leq L\Gamma(\alpha)^{-1} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} (\|x(s) - y(s)\| + \|x(qs) - y(qs)\|) ds \\ & \leq 2L\Gamma(\alpha)^{-1} \left(\max_{0 \leq s \leq t} \|x(s) - y(s)\| \right) \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds \\ & = 2L\Gamma(\alpha+1)^{-1} t^\alpha \max_{0 \leq s \leq t} \|x(s) - y(s)\|. \end{aligned}$$

上式两边对 $t \in [0, \delta]$ 取最大值, 得到

$$\max_{0 \leq t \leq \delta} \|x(t) - y(t)\| \leq 2L\Gamma(\alpha+1)^{-1}\delta^\alpha \max_{0 \leq t \leq \delta} \|x(t) - y(t)\|,$$

结合 δ 的选取知道只可能有 $\max_{0 \leq s \leq \delta} \|x(s) - y(s)\| = 0$, 即等式 $x = y$ 至少在 $[0, \delta]$ 上成立, 故 $t_* \geq \delta$, 矛盾.

综合以上各种情况知 $t_* \notin [0, T]$, 只可能是 $t_* = \infty$, 此时必有 $S = \emptyset$, 故而 x 和 y 在整个 $[0, T]$ 上相等。而如若 x, y 是 $[0, \infty)$ 上方程 (1) 的弱解, 上述结果则表明它们在任何有限区间 $[0, T]$ 上相等, 因而在 $[0, \infty)$ 上相等。唯一性证毕。 \square

定理 3 的证明 式 (4) 两边与 x_n 作内积并结合 Cauchy-Schwarz 不等式得到

$$\begin{aligned} \|x_n\|^2 & \leq (t_n - t_{n-1})^\alpha \left(\Gamma(2-\alpha) (a - a_u \|x_n\|^2 + a_v \|\bar{x}_n\|^2) \right. \\ & \quad \left. + \sum_{k=0}^{n-1} (a_{n,k+1} - a_{n,k}) \frac{\|x_k\|^2 + \|x_n\|^2}{2} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

注意到 $\sum_{k=0}^{n-1} (a_{n,k+1} - a_{n,k}) = a_{n,n} = (t_n - t_{n-1})^{-\alpha}$, 有

$$(t_n - t_{n-1})^\alpha \sum_{k=0}^{n-1} (a_{n,k+1} - a_{n,k}) \frac{\|x_k\|^2 + \|x_n\|^2}{2} \leq \frac{1}{2} \left(\max_{0 \leq k < n} \|x_k\|^2 + \|x_n\|^2 \right). \quad (16)$$

将 (16) 代入式 (15) 得到

$$\begin{aligned} \|x_n\|^2 & \leq a_n (a - a_u \|x_n\|^2 + a_v \|\bar{x}_n\|^2) + \max_{0 \leq k < n} \|x_k\|^2 \\ & \leq a_n \left(a - a_u \|x_n\|^2 + a_v \max_{0 \leq k \leq n} \|x_k\|^2 \right) + \max_{0 \leq k < n} \|x_k\|^2, \end{aligned}$$

其中 $a_n := 2(t_n - t_{n-1})^\alpha \Gamma(2 - \alpha)$. 如果 $\|x_n\| = \max_{0 \leq k \leq n} \|x_k\|$, 那么

$$\|x_n\|^2 \leq a_n (a - a_u \|x_n\|^2 + a_v \|x_n\|^2) + \|x_n\|^2, \quad (17)$$

否则

$$\|x_n\|^2 \leq a_n \left(a - a_u \|x_n\|^2 + a_v \max_{0 \leq k < n} \|x_k\|^2 \right) + \max_{0 \leq k < n} \|x_k\|^2, \quad (18)$$

两种情形分别导致

$$\|x_n\|^2 \leq \frac{a}{a_u - a_v} \quad \text{和} \quad \|x_n\|^2 \leq \frac{a_n a + (a_n a_v + 1) \max_{0 \leq k < n} \|x_k\|^2}{1 + a_n a_u},$$

因此, 无论如何总有

$$\|x_n\|^2 \leq \max \left(\frac{a}{a_u - a_v}, \frac{a_n a + (a_n a_v + 1) \max_{0 \leq k < n} \|x_k\|^2}{1 + a_n a_u} \right).$$

现在归纳地证明式 (5)。 $n = 0$ 时平凡。假定 $0 \leq n < N$ 时成立, 然后有

$$\begin{aligned} \|x_N\|^2 &\leq \max \left(\frac{a}{a_u - a_v}, \frac{a_N a + (a_N a_v + 1) \left(\frac{a}{a_u - a_v} + \|x_0\|^2 \right)}{1 + a_N a_u} \right) \\ &= \max \left(\frac{a}{a_u - a_v}, \frac{a}{a_u - a_v} + \frac{1 + a_N a_v}{1 + a_N a_u} \|x_0\|^2 \right) \\ &\leq (a_u - a_v)^{-1} a + \|x_0\|^2. \end{aligned}$$

这就完成了证明。 □

定理 4 的证明 写出 $(e_n)_{n=0}^\infty$ 满足的等式:

$$e_n = (t_n - t_{n-1})^\alpha \left(\sum_{k=0}^{n-1} (a_{n,k+1} - a_{n,k}) e_k + \Gamma(2 - \alpha) (f(t_n, y_n, \bar{y}_n) - f(t_n, x_n, \bar{x}_n)) \right).$$

上式两边同 e_n 取内积, 得

$$\begin{aligned} \|e_n\|^2 &\leq (t_n - t_{n-1})^\alpha \left(\sum_{k=0}^{n-1} (a_{n,k+1} - a_{n,k}) \frac{\|e_k\|^2 + \|e_n\|^2}{2} + \Gamma(2 - \alpha) \right. \\ &\quad \left. (\langle f(t_n, y_n, \bar{y}_n) - f(t_n, x_n, \bar{y}_n), e_n \rangle + \|f(t_n, x_n, \bar{y}_n) - f(t_n, x_n, \bar{x}_n)\| \|e_n\|) \right) \\ &\leq 2^{-1} \left(\max_{0 \leq k < n} \|e_k\|^2 + \|e_n\|^2 \right) + 2^{-1} a_n (-b_u \|e_n\|^2 + b_v \|\bar{e}_n\|^2), \end{aligned}$$

其中 $a_n := 2(t_n - t_{n-1})^\alpha \Gamma(2 - \alpha)$. 注意到 $\|\bar{e}_n\| \leq \max_{0 \leq k \leq n} \|e_k\|$, 我们有

$$\|e_n\|^2 \leq \max_{0 \leq k < n} \|e_k\|^2 + a_n (-b_u \|e_n\|^2 + b_v \max_{0 \leq k \leq n} \|e_k\|^2).$$

一种情况是 $\|e_n\| = \max_{0 \leq k \leq n} \|e_k\|$, 此时 $\max_{0 \leq k < n} \|e_k\|^2 \geq \|e_n\|^2 (1 + a_n (b_u - b_v)) \geq \|e_n\|^2 = \max_{0 \leq k \leq n} \|e_k\|^2 \geq \max_{0 \leq k < n} \|e_k\|^2$, 这个不等式链的最左端和最右端一样, 因

此其中的不等号全取等，特别地有 $\|e_n\| = \max_{0 \leq k < n} \|e_k\|$. 而另一种情况是 $\|e_n\| < \max_{0 \leq k \leq n} \|e_k\|$, 此时显然有 $\|e_n\| < \max_{0 \leq k < n} \|e_k\|$. 总之，

$$\|e_n\| \leq \max_{0 \leq k < n} \|e_k\|, n \in \mathbb{N}_+.$$

最后归纳即得结论。 □

3 后期拟完成的研究工作及进度安排

2024 年 7 月，整理现有工作。

2024 年 8-11 月，涉猎关于分数阶数值方法收敛性的文章，并考虑方程 (1) 的 L1 格式 (4) 的收敛性。

2024 年 12 月-2025 年 2 月，考虑更多类型的方程和数值算法。

2025 年 3 月-2025 年 5 月，撰写毕业论文，准备毕业答辩。

4 存在的困难与问题

分数阶导数的记忆性导致数值解的收敛性难以分析。针对这一问题尚未找到有效的解决办法。给定区间 $[0, T]$, 其中 $0 < T < \infty$, 设 x 是这一区间上方程的准确解（弱解），并记由 L1 格式 (4) 在时间序列 $(t_k)_{k=0}^n$ 产生的数值解为 $(x_k)_{k=0}^n$, 其中 $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = T$, 而考察收敛性实际上是考察 $\max_{1 \leq k \leq n} (t_k - t_{k-1})$ 趋于 0 时是否有 $x(T) - x_n$ 趋于 0, 注意这里必定伴随着 $n \rightarrow \infty$. 分数阶导数的记忆性导致累积误差难以控制。我会继续查阅相关资料，并积极与老师同学讨论、交流思路和成果；也会从其他一些问题中寻求灵感，比如导数阶数大于 1 的情形。

5 如期完成全部论文工作的可能性

通过一年多的学习和积累，我对课题所在领域有了一定的了解，课题本身也已取得可观的进展，如期完成论文工作的可能性较大。

参考文献

- [1] Webb J. Weakly singular Gronwall inequalities and applications to fractional differential equations[J/OL]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2019, 471(1): 692-711. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022247X18309399>.
- [2] Wang D. Dissipativity and stability analysis for fractional functional differential equations.[J]. Fractional Calculus and Applied Analysis, 2015, 18: 1399-1422.
- [3] Webb J R L. Initial value problems for caputo fractional equations with singular nonlinearities[C/OL] // . 2020. <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:221088567>.
- [4] Jin B. Fractional differential equations, an approach via fractional derivatives[M/OL]. Switzerland: Springer Cham, 2021: 59-61. <http://dx.doi.org/10.1007/>

978-3-030-76043-4.