哈 尔 滨 工 业 大 学

硕士学位论文中期报告

题 目：分数阶比例延迟方程的几种数值方法的研究

院（系）数学学院

学科 基础数学

导师 雷强

研究生 李云鹏

学号 22S012004

中期报告日期 2024 年 6 月 28 日

研究生院制

目　录

1 课题主要研究内容及进度情况

设 $d \in \mathbb{N}_+$. 本课题主要研究如下的分数阶比例延迟方程，

$$\begin{cases} {}^C D_{0^+}^{\alpha} x(t) = f(t, x(t), x(qt)), \quad t \geqslant 0, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{1}$$

其中 x 是 $\mathbb{R}^d$ 值未知函数，定义域是 $[0, \infty)$ 的某个包含 0 的子区间，可能和具体的方程有关，$x_0 \in \mathbb{R}^d$ 给定，$0 < \alpha < 1$, 函数 $f : [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ 连续，${}^C D_{0^+}^{\alpha} x(t) = \Gamma(1-\alpha)^{-1} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} x'(s)\,\mathrm{d}s$ 是 x 的 Caputo 导数. 参考 Webb J. R. L. 的文献 [1], 我们给出对于方程 (1) 的弱解的定义。

定义 1 如果有连续函数 x, 使得 t 属于 $[0, \infty)$ 的某个包含 0 的子区间 I 上时满足

$$x(t) = x_0 + \Gamma(\alpha)^{-1} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s), x(qs))\,\mathrm{d}s, \tag{2}$$

那么称 x 是方程 (1) 在 I 上的一个弱解。

目前研究了弱解的 Peano 存在性和 Picard 存在唯一性定理，并对任意步长下的 L1 数值格式的长时间行为做了讨论。

关于弱解，我们得到的结果见如下的定理 1 和 2.

定理 1 (Peano **存在性定理**) 方程 (1) 总是在某个小区间 $[0, h]$ 上存在弱解。

定理 2 (Picard **存在唯一性定理**) 如果 $f(t, \cdot, \cdot)$ 对 $t \in [0, \infty)$ 一致地局部 Lipschitz, 即对任何 $r > 0$, 存在不依赖于 t 的 $L = L(r) \geqslant 0$, 使得

$$\|f(t, x, y) - f(t, u, v)\| \leqslant L \cdot (\|x - u\| + \|y - v\|) \tag{3}$$

对任何 $t \in [0, \infty)$ 以及 $x, y, u, v \in B_r(0)$ 成立，那么方程 (1) 在某个小区间 $[0, h]$ 上存在弱解，并且弱解在存在区间 $I \ni 0$ 上唯一。进一步地，如果 L 可以不依赖于 r, 那么在 $[0, \infty)$ 上全局存在唯一的弱解。

在叙述数值解部分的结果之前，先给出数值格式。取严格递增趋于正无穷的序列 $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$ 作为时间节点，其中 $t_0 = 0$. 利用在每个小区间上线性插值的办法来近似导数和延迟，就得到针对方程 (1) 的 L1 数值格式

$$x_n = (t_n - t_{n-1})^{\alpha} \Big(\Gamma(2-\alpha) f\left(t_n, x_n, \overline{x}^n\right) + \sum_{k=0}^{n-1} \left(a_{n,k+1} - a_{n,k}\right) x_k \Big), \tag{4}$$

其中 $a_{n,k} := \frac{(t_n - t_{k-1})^{1-\alpha} - (t_n - t_k)^{1-\alpha}}{t_k - t_{k-1}} (1 \leqslant k \leqslant n), a_{n,0} := 0, \overline{x}_n$ 是对 $x(qt_n)$ 的近似，即设

$t_{m_n-1} \leqslant qt_n < t_{m_n}$, 有

$$\overline{x}_n := \frac{t_{m_n} - qt_n}{t_{m_n} - t_{m_n-1}} x_{m_n-1} + \frac{qt_n - t_{m_n-1}}{t_{m_n} - t_{m_n-1}} x_{m_n}.$$

我们在数值解部分得到的结果为如下的定理 3 和 4 , 其中所描述的数值解的长时间行为与文献 [2] 中得到的准确解在相同条件下的长时间行为相吻合，同时也是对文献 [3] 中结果的推广。接下来的定理 3 说明，在一定条件下，数值解有界。

定理 3 如果存在常数 $a > 0, a_u > a_v > 0$, 使得对任何 $t \geqslant 0$ 和 $u, v \in \mathbb{R}^d$ 成立

$$\langle u, f(t,u,v)\rangle \leqslant a - a_u\|u\|^2 + a_v\|v\|^2,$$

那么

$$\|x_n\| \leqslant \max\left\{(a_u - a_v)^{-1/2} a^{1/2}, \|x_0\|\right\}. \tag{5}$$

接下来讨论数值解的稳定性。为此，把方程 (1) 的初值条件改为 $x(0) = y_0$, 用同样的数值算法（包括步长）产生数值解 $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ 和对“延迟”的近似 $\left(\overline{y}_n\right)_{n=0}^{\infty}$, 并记 $e_n := y_n - x_n, \overline{e}_n := \overline{y}_n - \overline{x}_n$. 接下来的定理 4 表明，在一定条件下，数值解稳定。

定理 4 如果存在常数 $b_u > b_v > 0$, 使得对任何 $t \geqslant 0$ 和 $u, v, x, y \in \mathbb{R}^d$ 成立

$$\begin{cases} \langle f(t,u,v) - f(t,x,v), u - x\rangle \leqslant -b_u\|u - x\|^2, \\ \|f(t,u,v) - f(t,u,y)\| \leqslant b_v\|v - y\|, \end{cases}$$

那么

$$\|e_n\| \leqslant \|e_0\|.$$

2 目前已完成的研究工作及结果

这一节来叙述上一节中各定理的证明。

定理 1 的证明 记 $M < \infty$ 是集合 $\left\{\|f(t,u,v)\| : t \in [0,1], u, v \in B_{2\|x_0\|}(0)\right\}$ 的一个上界，并取 $0 < h \leqslant 1$ 充分小，使得 $\Gamma(\alpha+1)^{-1}h^{\alpha}M \leqslant \|x_0\|$. 对于正整数 m，作 $t_n^m := nh/m$, $n = 0, 1, 2, \ldots, m$, 然后按下式构造 $\left(x_n^m\right)_{n=0}^m \subset \mathbb{R}^d$,

$$x_n^m = x_0 + \Gamma(\alpha)^{-1} \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}^m}^{t_k^m} \left(t_n^m - s\right)^{\alpha-1} f\left(s, x_{k-1}^m, x_{q_{k-1}^m}^m\right) \mathrm{d}s,\ n = 1, 2, \ldots, m,$$

其中 $q_k^m := \lfloor qt_k^m \rfloor$. 利用这些有限长的序列，分段线性插值地构造连续函数 $(x^m)_{m=1}^{\infty} : [0,h] \to \mathbb{R}^d$，即

$$x^m(t) := \frac{t_n^m - t}{t_n^m - t_{n-1}^m} x_{n-1}^m + \frac{t - t_{n-1}^m}{t_n^m - t_{n-1}^m} x_n^m,\ t_{n-1}^m \leqslant t \leqslant t_n^m.$$

另外，为方便起见，对于 $\delta>0$, 记 $D(\delta):=\{(s,t)\in[0,h]\times[0,h]: 0\leqslant t-s<\delta\}$.

现在证明 $\|x^m(t_n^m)\|\leqslant 2\|x_0\|$, $0\leqslant t\leqslant h, n=0,1,2,\ldots,m, m\in\mathbb{N}_+$. 施归纳于 n. $n=0$ 时显然。假设对于 $0\leqslant k<n$ 成立 $\|x^m(t_k^m)\|\leqslant 2\|x_0\|$, 根据 M 和 h 的定义,

$$\begin{aligned}
\left\|x^m(t_n^m)\right\| &\leqslant \|x_0\|+\Gamma(\alpha)^{-1}\sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}^m}^{t_k^m}\left(t_n^m-s\right)^{\alpha-1}\left\|f\left(s,x_{k-1}^m,x_{q_{k-1}^m}^m\right)\right\|\mathrm{d}s\\
&\leqslant \|x_0\|+\Gamma(\alpha)^{-1}\sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}^m}^{t_k^m}\left(t_n^m-s\right)^{\alpha-1}M\,\mathrm{d}s\\
&= \|x_0\|+\Gamma(\alpha)^{-1}M\int_0^{t_n^m}\left(t_n^m-s\right)^{\alpha-1}\mathrm{d}s\\
&= \|x_0\|+\Gamma(\alpha+1)^{-1}M\left(t_n^m\right)^{\alpha}\\
&\leqslant \|x_0\|+\Gamma(\alpha+1)^{-1}Mh^{\alpha}\leqslant 2\|x_0\|,
\end{aligned}$$

这样就完成了归纳。而对任何 $t\in[0,h]$, t 必然落在某个形如 $\left[t_{n-1}^m,t_n^m\right]$ 的区间中，从而

$$\|x^m(t)\|\leqslant\frac{t_n^m-t}{t_n^m-t_{n-1}^m}\left\|x_{n-1}^m\right\|+\frac{t-t_{n-1}^m}{t_n^m-t_{n-1}^m}\left\|x_n^m\right\|\leqslant 2\|x_0\|.$$

因此对每个 $t\in[0,h]$ 都有 $(x^m(t))_{m=1}^{\infty}$ 在 $\mathbb{R}^d$ 中相对紧。

然后讨论连续函数列 $(x^m)_{m=1}^{\infty}$ 的等度连续性。首先，对于 $0\leqslant k\leqslant n\leqslant m$, 有

$$\begin{aligned}
&\Gamma(\alpha)\left\|x_n^m-x_k^m\right\|\\
&\leqslant\sum_{j=1}^{k}\int_{t_{j-1}^m}^{t_j^m}\left(\left(t_k^m-s\right)^{\alpha-1}-\left(t_n^m-s\right)^{\alpha-1}\right)M\,\mathrm{d}s+\sum_{j=k+1}^{n}\int_{t_{j-1}^m}^{t_j^m}\left(t_n^m-s\right)^{\alpha-1}M\,\mathrm{d}s\\
&=M\cdot\left(\int_0^{t_k^m}\left(\left(t_k^m-s\right)^{\alpha-1}-\left(t_n^m-s\right)^{\alpha-1}\right)\mathrm{d}s+\int_{t_k^m}^{t_n^m}\left(t_n^m-s\right)^{\alpha-1}\mathrm{d}s\right)\\
&=M\alpha^{-1}\cdot\left(\left(t_k^m\right)^{\alpha}-\left(t_n^m\right)^{\alpha}+2\left(t_n^m-t_k^m\right)^{\alpha}\right)\leqslant 2M\alpha^{-1}\left(t_n^m-t_k^m\right)^{\alpha}.
\end{aligned}$$

而至于 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant h$, 不妨设 $s\in\left[t_{k-1}^m,t_k^m\right]$, $t\in\left[t_{n-1}^m,t_n^m\right]$. 如果 $k<n$, 那么

$$\begin{aligned}
\|x^m(t)-x^m(s)\| &\leqslant\left\|x^m(t)-x^m(t_{n-1}^m)\right\|+\left\|x_{n-1}^m-x_k^m\right\|+\left\|x^m(t_k^m)-x^m(s)\right\|\\
&\leqslant\left\|x_n^m-x_{n-1}^m\right\|+\left\|x_{n-1}^m-x_k^m\right\|+\left\|x_k^m-x_{k-1}^m\right\|\\
&\leqslant 2M\Gamma(\alpha+1)^{-1}\left(\left(t_n^m-t_{n-1}^m\right)^{\alpha}+\left(t_{n-1}^m-t_k^m\right)^{\alpha}+\left(t_k^m-t_{k-1}^m\right)^{\alpha}\right)\\
&\leqslant 2M\Gamma(\alpha+1)^{-1}\left(2(h/m)^{\alpha}+(t-s)^{\alpha}\right),
\end{aligned}$$

而若是 $k=n$, 则有

$$\|x^m(t)-x^m(s)\|\leqslant\left\|x_n^m-x_{n-1}^m\right\|$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant 2M\Gamma(\alpha+1)^{-1}\left(t_n^m - t_{n-1}^m\right)^{\alpha} \\
&\leqslant 2M\Gamma(\alpha+1)^{-1}(h/m)^{\alpha},
\end{aligned}
$$

总之

$$
\|x^m(t) - x^m(s)\| \leqslant 2M\Gamma(\alpha+1)^{-1}\left(2(h/m)^{\alpha} + (t-s)^{\alpha}\right). \tag{6}
$$

任给 $\varepsilon > 0$, 取 $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}_+$ 和 $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon) > 0$ 分别满足 $2M\Gamma(\alpha+1)^{-1}\delta_0^{\alpha} < \varepsilon/2$ 和 $4M\Gamma(\alpha+1)^{-1}(h/N)^{\alpha} < \varepsilon/2$. 由式 (6) 可知，$\|x^m(t) - x^m(s)\| < \varepsilon$ 对任何 $m > N$ 及 $(s,t) \in D(\delta_0)$ 成立。至于 $1 \leqslant m \leqslant N$, 由于每个 x^m 都是 $[0,h]$ 上的一致连续函数，故存在有限个只依赖于 ε 的正数 $\{\delta_m\}_{m=1}^N$, 使得对于 $(s,t) \in D(\delta_m)$ 成立 $\|x^m(t) - x^m(s)\| < \varepsilon$. 现在取 $\delta = \delta(\varepsilon) := \min_{0 \leqslant m \leqslant N} \delta_m > 0$, 那么当 $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant h$ 且 $t - s < \delta$ 时，$\|x^m(t) - x^m(s)\| < \varepsilon$ 对于任何 $m \in \mathbb{N}_+$ 成立。这说明 $(x^m)_{m=1}^{\infty}$ 是 $C[0,h]$ 中的一致等度连续函数列。

使用 Arzelà-Ascoli 定理，我们得到 $\{x^m : m \in \mathbb{N}_+\}$ 在 $C\left([0,h], \mathbb{R}^d\right)$ 中相对紧，故有一致收敛子列，这个子列仍记为 $\{x^m\}_{m=1}^{\infty}$, 并设其极限函数为 $x \in C\left([0,h], \mathbb{R}^d\right)$. 任给 $\varepsilon > 0$, 由于 f 在紧集 $[0,h] \times \overline{B_{2\|x_0\|}(0)} \times \overline{B_{2\|x_0\|}(0)} \subset [0,h] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ 上一致连续，故存在 $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ 使得 $\|f(t,u,v) - f(t,x,y)\| < \varepsilon\alpha\Gamma(\alpha)h^{-\alpha}/4$ 对 $t \in [0,h]$ 以及满足 $\|u - x\| + \|v - y\| < \delta_1$ 的 $u, v, x, y \in B_{2\|x_0\|}(0)$ 成立。取 $N_1 = N_1(\delta_1) \in \mathbb{N}_+$, 使得当 $m > N_1$ 且 $t \in [0,h]$ 时成立 $\|x^m(t) - x(t)\| < \delta_1/2$, 从而

$$
\begin{aligned}
&\left\|\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x^m(s), x^m(qs))\,\mathrm{d}s - \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s), x(qs))\,\mathrm{d}s\right\| \\
\leqslant &\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \frac{\varepsilon\alpha\Gamma(\alpha)h^{-\alpha}}{4}\,\mathrm{d}s = \varepsilon\Gamma(\alpha)h^{-\alpha}t^{\alpha}/4 \leqslant \varepsilon\Gamma(\alpha)/4.
\end{aligned} \tag{7}
$$

由 $(x^m)_{m=1}^{\infty}$ 的等度连续性，存在 $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$ 使得 $\|x^m(t) - x^m(s)\| < \min\{\delta_1/2, \varepsilon/4\}$ 对任何 $m \in \mathbb{N}_+$ 及 $(s,t) \in D(\delta_2)$ 成立。取 $N_2 = N_2(\delta_2) \in \mathbb{N}_+$ 使得 $h/N_2 < \delta_2$. 一方面，注意到 $m > N_2$ 时总有 $t_n^m - t_{n-1}^m < \delta_2 < \delta_1/2$, $n = 0, 1, 2, \ldots, m$,

于是对 $t \in \left[t_{n-1}^m, t_n^m\right]$ 成立 $\left\|f\left(t, x_{n-1}^m, x_{q_{n-1}^m}^m\right) - f\left(t, x^m(t), x^m(qt)\right)\right\| < \varepsilon\alpha\Gamma(\alpha)h^{-\alpha}/4$, 故

$$\begin{aligned}
&\Gamma(\alpha)\left\|x^m(t_n^m) - x_0 - \Gamma(\alpha)^{-1}\int_0^{t_n^m}\left(t_n^m - s\right)^{\alpha-1} f(s, x^m(s), x^m(qs))\,\mathrm{d}s\right\| \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}^m}^{t_k^m}\left(t_n^m - s\right)^{\alpha-1}\left\|f\left(s, x_{k-1}^m, x_{q_{k-1}^m}^m\right) - f\left(s, x^m(s), x^m(qs)\right)\right\|\mathrm{d}s \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}^m}^{t_k^m}\left(t_n^m - s\right)^{\alpha-1}\frac{\varepsilon\alpha\Gamma(\alpha)h^{-\alpha}}{4}\,\mathrm{d}s \\
&= \int_0^{t_n^m}\left(t_n^m - s\right)^{\alpha-1}\frac{\varepsilon\alpha\Gamma(\alpha)h^{-\alpha}}{4}\,\mathrm{d}s \leqslant \varepsilon\Gamma(\alpha)/4.
\end{aligned} \tag{8}$$

另一方面，任取 $t \in [0, h]$, 设 $t \in \left[t_{n-1}^m, t_n^m\right]$, 则对任何 $m \in \mathbb{N}_+$ 成立

$$\left\|x^m(t) - x^m(t_n^m)\right\| < \varepsilon/4. \tag{9}$$

根据文献 [4] 中的性质 3.2(3), 在 f 和 x 都连续时，$t \mapsto \Gamma(\alpha)^{-1}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s), x(qs))\,\mathrm{d}s$ 也是连续的, 因此可取 $N_3 = N_3(\varepsilon) \in \mathbb{N}_+$ 充分大（从而 $h/N_3 > 0$ 足够小），使得 $m > N_3$ 且 $(s,t) \in D(h/N_3)$ 时，$\Gamma(\alpha)^{-1}\left\|\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, x(\tau), x(q\tau))\,\mathrm{d}\tau - \int_0^s (s-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, x(\tau), x(q\tau))\,\mathrm{d}\tau\right\| < \varepsilon/4$. 于是当 $t \in [0, h]$ 时，设 $t \in \left[t_{n-1}^m, t_n^m\right]$, 有

$$\begin{aligned}
\Gamma(\alpha)^{-1}\Bigg\|&\int_0^{t_n^m} (t_n^m - s)^{\alpha-1} f(s, x(s), x(qs))\,\mathrm{d}s \\
&- \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s), x(qs))\,\mathrm{d}s\Bigg\| < \varepsilon/4.
\end{aligned} \tag{10}$$

现在取 $N = N(\varepsilon) := \max\{N_1, N_2, N_3\}$, 根据式 (7)–(10) 以及三角不等式，当 $m > N, t \in [0, h]$ 时，设 $t \in \left[t_{n-1}^m, t_n^m\right]$, 那么可以估计

$$\begin{aligned}
&\left\|x^m(t) - x_0 - \Gamma(\alpha)^{-1}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s), x(qs))\,\mathrm{d}s\right\| \\
&\leqslant \left\|x^m(t) - x^m(t_n^m)\right\| \\
&\quad + \left\|x^m(t_n^m) - x_0 - \Gamma(\alpha)^{-1}\int_0^{t_n^m} (t_n^m - s)^{\alpha-1} f(s, x^m(s), x^m(qs))\,\mathrm{d}s\right\| \\
&\quad + \Bigg\|x_0 + \Gamma(\alpha)^{-1}\int_0^{t_n^m} (t_n^m - s)^{\alpha-1} f(s, x^m(s), x^m(qs))\,\mathrm{d}s \\
&\qquad - x_0 - \Gamma(\alpha)^{-1}\int_0^{t_n^m} (t_n^m - s)^{\alpha-1} f(s, x(s), x(qs))\,\mathrm{d}s\Bigg\| \\
&\quad + \Bigg\|x_0 + \Gamma(\alpha)^{-1}\int_0^{t_n^m} (t_n^m - s)^{\alpha-1} f(s, x(s), x(qs))\,\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

$$-x_0 - \Gamma(\alpha)^{-1} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s), x(qs))\,\mathrm{d}s \Bigg\| < \varepsilon,$$

即 $\lim_{m\to\infty} x^m(t) = x_0 + \Gamma(\alpha)^{-1} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s), x(qs))\,\mathrm{d}s$, $0 \leqslant t \leqslant h$. 而极限的唯一性导致

$$x(t) = \Gamma(\alpha)^{-1} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s), x(qs))\,\mathrm{d}s,\ 0 \leqslant t \leqslant h,$$

从而 $x \in C([0,h], \mathbb{R}^d)$ 是方程 (1) 在 $[0,h]$ 上的一个弱解。 □

定理 2 的证明（存在性）构造 Picard 序列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} : [0,\infty) \to \mathbb{R}^d$ 满足

$$\begin{cases} x_{n+1}(t) := x_0 + \Gamma(\alpha)^{-1} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x_n(s), x_n(qs))\,\mathrm{d}s, & n \in \mathbb{N}, \\ x_0(t) := x_0, \end{cases} \tag{11}$$

为方便，这里用 $x_0 \in C([0,\infty), \mathbb{R}^d)$ 表达恒取 $x_0 \in \mathbb{R}^d$ 的常值函数，通常不会引起混淆。记 $M < \infty$ 是集合 $\left\{\|f(t,u,v)\| : t \in [0,1], u, v \in B_{2\|x_0\|}(0)\right\}$ 的一个上界，并取 $0 < h \leqslant 1$ 充分小，使得 $\Gamma(\alpha+1)^{-1} h^\alpha M \leqslant \|x_0\|$. 可以归纳地证明 $\|x_n(t)\| \leqslant 2\|x_0\|$, $t \in [0,h], n \in \mathbb{N}$. 取 $L := L(2\|x_0\|)$, 那么对于 $t \in [0,h], n \in \mathbb{N}_+$,

$$\begin{aligned} \|x_{n+1}(t) - x_n(t)\| \leqslant L\Gamma(\alpha)^{-1} \int_0^t & (t-s)^{\alpha-1} \\ & \big(\|x_n(s) - x_{n-1}(s)\| + \|x_n(qs) - x_{n-1}(qs)\|\big)\,\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{12}$$

现在归纳地说明

$$\|x_{n+1}(t) - x_n(t)\| \leqslant \frac{L^n M}{\Gamma(\alpha)^{n+1}\alpha} t^{(n+1)\alpha} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + q^{k\alpha}\right) \mathrm{B}(\alpha, k\alpha+1),\ t \in [0,h], n \in \mathbb{N}. \tag{13}$$

当 $n = 0$ 时，

$$\begin{aligned} \|x_1(t) - x_0(t)\| &= \|x_1(t) - x_0\| \\ &= \Gamma(\alpha)^{-1} \left\| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x_0, x_0)\,\mathrm{d}s \right\| \\ &\leqslant \Gamma(\alpha)^{-1} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} M\,\mathrm{d}s \\ &= \Gamma(\alpha)^{-1} \alpha^{-1} t^\alpha M. \end{aligned}$$

假定式 (13) 在 n 取 $n-1$ 时成立，然后

$$\begin{aligned} & \|x_{n+1}(t) - x_n(t)\| \\ \leqslant\ & \frac{L}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \big(\|x_n(s) - x_{n-1}(s)\| + \|x_n(qs) - x_{n-1}(qs)\|\big)\,\mathrm{d}s \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \frac{L^n M}{\Gamma(\alpha)^{n+1}\alpha}\Big(\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+q^{k\alpha}\right)\mathrm{B}(\alpha,k\alpha+1)\Big)\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left(s^{n\alpha}+(qs)^{n\alpha}\right)\mathrm{d}s\\
&=\frac{L^n M}{\Gamma(\alpha)^{n+1}\alpha}\Big(\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+q^{k\alpha}\right)\mathrm{B}(\alpha,k\alpha+1)\Big)\left(1+q^{n\alpha}\right)\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}s^{n\alpha}\,\mathrm{d}s\\
&=\frac{L^n M}{\Gamma(\alpha)^{n+1}\alpha}\Big(\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+q^{k\alpha}\right)\mathrm{B}(\alpha,k\alpha+1)\Big)\left(1+q^{n\alpha}\right)t^{n\alpha+\alpha}\mathrm{B}(\alpha,n\alpha+1)\\
&=\frac{L^n M}{\Gamma(\alpha)^{n+1}\alpha}t^{(n+1)\alpha}\prod_{k=1}^{n}\left(1+q^{k\alpha}\right)\mathrm{B}(\alpha,k\alpha+1).
\end{aligned}
$$

由归纳原理，式 (13) 成立。进一步地，注意到

$$
\prod_{k=1}^{n}\left(1+q^{k\alpha}\right)\leqslant\prod_{k=1}^{n}\exp\left(q^{k\alpha}\right)=\exp\sum_{k=1}^{n}(q^{\alpha})^k\leqslant\exp\frac{q^\alpha}{1-q^\alpha}
$$

和

$$
\prod_{k=1}^{n}\mathrm{B}(\alpha,k\alpha+1)=\prod_{k=1}^{n}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(k\alpha+1)}{\Gamma((k+1)\alpha+1)}=\Gamma(\alpha)^n\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma((n+1)\alpha+1)},
$$

我们有

$$
\|x_{n+1}(t)-x_n(t)\|\leqslant\frac{L^n M t^{(n+1)\alpha}}{\Gamma((n+1)\alpha+1)}\exp\frac{q^\alpha}{1-q^\alpha},\ t\in[0,h].
$$

由 Cauchy-Hadamard 公式和 Stirling 公式易知 Mittag-Leffler 函数[5] $E_\alpha(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\Gamma(\alpha n+1)^{-1}z^n$ 对于任何 $z\in\mathbb{C}$ 收敛，然后根据 Weierstrass M 判别法就得到函数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 在 $[0,h]$ 上绝对一致收敛，于是函数列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 在 $[0,h]$ 上存在一致极限 x. 这说明任取 $\varepsilon>0$, 总存在 $N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, 使得 $\|x_n(t)-x(t)\|<\varepsilon$ 在 $n>N$ 且 $t\in[0,h]$ 时成立。这样一来，当 $t\in[0,h]$ 时，

$$
\begin{aligned}
&\left\|\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(s,x_n(s),x_n(qs))\,\mathrm{d}s-\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(s,x(s),x(qs))\,\mathrm{d}s\right\|\\
&\leqslant\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}L\cdot(\|x_n(s)-x(s)\|+\|x_n(qs)-x(qs)\|)\,\mathrm{d}s\\
&\leqslant 2\varepsilon L\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}s=2\varepsilon L\alpha^{-1}t^\alpha,
\end{aligned}
$$

因此

$$
\lim_{n\to\infty}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(s,x_n(s),x_n(qs))\,\mathrm{d}s=\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(s,x(s),x(qs))\,\mathrm{d}s.
$$

现在在式 (11) 中命 $n\to\infty$ 就得到

$$
x(t)=x_0+\Gamma(\alpha)^{-1}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(s,x(s),x(qs))\,\mathrm{d}s,\ 0\leqslant t\leqslant h.
$$

利用文献 [4] 中的性质 3.2(3)(6), 容易归纳地得到 $(x_n)_{n=0}^{\infty} \subseteq C^{0,\alpha} \cap AC[0,h] \subseteq C[0,h]$, 于是其一致极限 $x \in C[0,h]$. 这样 x 就是方程 (1) 在 $[0,h]$ 上的一个弱解。

如果 L 可以不依赖于 r, 那么式 (12) 对于一切 $t \in [0,\infty)$ 成立，由此可见方程 (1) 的弱解将在 $[0,\infty)$ 上全局存在。

（**唯一性**）先设 $0 < T := \sup I < \infty$, $[0,T]$ 中的 $\mathbb{R}^d$ 值连续函数 x, y 都是方程 (1) 的弱解。记 $L := L\left(\max\left\{\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|x(t)\|,\ \max_{0\leqslant t\leqslant T}\|y(t)\|\right\}\right)$, 并作 $S := \{t \in [0,T] : x(t) \neq y(t)\}$, $t_* := \inf S$, 下证 $t_* = \infty$. 反证，假设 $0 \leqslant t_* \leqslant T$, 分 3 种情况讨论。

1. 如果 $t_* = T$, 此时必有 $T \in I$, 且在 $[0,T)$ 上 $x = y$, 而 x, y 都是连续的，因此必在闭区间 $[0,T]$ 上处处相等，此时 $S = \varnothing, t_* = \infty$, 矛盾。

2. 如果 $0 < t_* < T$, 那么在 $[0,t_*)$ 上有 $x = y$. 选取 $\delta > 0$ 充分小，使得 $t_* + \delta \leqslant T$ 且 $q \cdot (t_* + \delta) < t_*$, 然后就有 $x(qt) = y(qt)$, $0 \leqslant t \leqslant t_* + \delta$. 当 $t \in [0, t_* + \delta]$ 时，
$$\begin{aligned}\|x(t) - y(t)\| &\leqslant L\Gamma(\alpha)^{-1}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\big(\|x(s) - y(s)\| + \|x(qs) - y(qs)\|\big)\,\mathrm{d}s\\ &= L\Gamma(\alpha)^{-1}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|x(s) - y(s)\|\,\mathrm{d}s,\end{aligned}$$
然后利用分数阶 Gronwall 不等式[1] 就得到在 $[0, t_* + \delta]$ 上都有 $x = y$, 故 $t_* \geqslant t_* + \delta$, 而这是不可能的。

3. 如果 $t_* = 0$, 选取 $\delta \in (0,T]$ 充分小，使得 $2L\Gamma(\alpha+1)^{-1}\delta^{\alpha} < 1$. 当 $t \in [0,\delta]$ 时，
$$\begin{aligned}\|x(t) - y(t)\| &\leqslant L\Gamma(\alpha)^{-1}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\big(\|x(s) - y(s)\| + \|x(qs) - y(qs)\|\big)\,\mathrm{d}s\\ &\leqslant 2L\Gamma(\alpha)^{-1}\Big(\max_{0\leqslant s\leqslant t}\|x(s) - y(s)\|\Big)\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}s\\ &= 2L\Gamma(\alpha+1)^{-1}t^{\alpha}\max_{0\leqslant s\leqslant t}\|x(s) - y(s)\|.\end{aligned}$$
上式两边对 $t \in [0,\delta]$ 取最大值，得到
$$\max_{0\leqslant t\leqslant\delta}\|x(t) - y(t)\| \leqslant 2L\Gamma(\alpha+1)^{-1}\delta^{\alpha}\max_{0\leqslant t\leqslant\delta}\|x(t) - y(t)\|,$$
结合 δ 的选取知道只可能有 $\max_{0\leqslant s\leqslant\delta}\|x(s) - y(s)\| = 0$, 即等式 $x = y$ 至少在 $[0,\delta]$ 上成立, 故 $t_* \geqslant \delta$, 矛盾.

综合以上各种情况知 $t_* \notin [0,T]$, 这只可能是 $t_* = \infty$, 此时必有 $S = \varnothing$, 故而 x 和 y 在整个 I 上相等。而如若 x, y 是 $[0,\infty)$ 上方程 (1) 的弱解，上述结果则表明它们在任何有限区间 $[0,T]$ 上相等，因而在 $[0,\infty)$ 上相等。唯一性证毕。 □

定理 3 的证明 式 (4) 两边与 x_n 作内积并结合 Cauchy-Schwarz 不等式得到

$$\begin{aligned}\|x_n\|^2 \leqslant (t_n - t_{n-1})^\alpha \Big(&\Gamma(2-\alpha)\left(a - a_u\|x_n\|^2 + a_v\|\overline{x}_n\|^2\right) \\ &+ \sum_{k=0}^{n-1}\left(a_{n,k+1} - a_{n,k}\right)\frac{\|x_k\|^2 + \|x_n\|^2}{2}\Big).\end{aligned} \tag{14}$$

注意到 $\sum_{k=0}^{n-1}\left(a_{n,k+1} - a_{n,k}\right) = a_{n,n} = (t_n - t_{n-1})^{-\alpha}$, 有

$$(t_n - t_{n-1})^\alpha \sum_{k=0}^{n-1}\left(a_{n,k+1} - a_{n,k}\right)\frac{\|x_k\|^2 + \|x_n\|^2}{2} \leqslant \frac{1}{2}\Big(\max_{0\leqslant k<n}\|x_k\|^2 + \|x_n\|^2\Big). \tag{15}$$

将式 (15) 代入式 (14) 得到

$$\begin{aligned}\|x_n\|^2 &\leqslant a_n\left(a - a_u\|x_n\|^2 + a_v\|\overline{x}_n\|^2\right) + \max_{0\leqslant k<n}\|x_k\|^2 \\ &\leqslant a_n\Big(a - a_u\|x_n\|^2 + a_v \max_{0\leqslant k\leqslant n}\|x_k\|^2\Big) + \max_{0\leqslant k<n}\|x_k\|^2,\end{aligned}$$

其中 $a_n := 2\,(t_n - t_{n-1})^\alpha\,\Gamma(2-\alpha)$. 如果 $\|x_n\| = \max_{0\leqslant k\leqslant n}\|x_k\|$, 那么 $\|x_n\|^2 \leqslant a_n\left(a - a_u\|x_n\|^2 + a_v\|x_n\|^2\right) + \|x_n\|^2$, 此时 $\|x_n\|^2 \leqslant (a_u - a_v)^{-1}a$; 否则 $\|x_n\| < \max_{0\leqslant k<n}\|x_k\|$. 因此，无论如何总有

$$\|x_n\|^2 \leqslant \max\big\{(a_u - a_v)^{-1}a, \max_{0\leqslant k<n}\|x_k\|^2\big\},\ n \in \mathbb{N}_+.$$

最后只需归纳即可得到想要的结论。 □

定理 4 的证明 写出 $\{e_n\}_{n=0}^\infty$ 满足的等式为

$$e_n = (t_n - t_{n-1})^\alpha\Big(\sum_{k=0}^{n-1}\left(a_{n,k+1} - a_{n,k}\right)e_k + \Gamma(2-\alpha)\left(f\left(t_n, y_n, \overline{y}_n\right) - f\left(t_n, x_n, \overline{x}_n\right)\right)\Big),$$

两边同 e_n 取内积，得

$$\begin{aligned}\|e_n\|^2 \leqslant (t_n - t_{n-1})^\alpha \Big(&\sum_{k=0}^{n-1}\left(a_{n,k+1} - a_{n,k}\right)\frac{\|e_k\|^2 + \|e_n\|^2}{2} + \Gamma(2-\alpha) \\ &\left(\left\langle f\left(t_n, y_n, \overline{y}_n\right) - f\left(t_n, x_n, \overline{y}_n\right), e_n\right\rangle + \left\|f\left(t_n, x_n, \overline{y}_n\right) - f\left(t_n, x_n, \overline{x}_n\right)\right\|\|e_n\|\right)\Big) \\ \leqslant 2^{-1}\Big(&\max_{0\leqslant k<n}\|e_k\|^2 + \|e_n\|^2\Big) + 2^{-1}a_n\left(-b_u\|e_n\|^2 + b_v\|\overline{e}_n\|^2\right),\end{aligned}$$

其中 $a_n := 2\,(t_n - t_{n-1})^\alpha\,\Gamma(2-\alpha)$. 注意到 $\|\overline{e}_n\| \leqslant \max_{0\leqslant k\leqslant n}\|e_k\|$, 我们有

$$\|e_n\|^2 \leqslant \max_{0\leqslant k<n}\|e_k\|^2 + a_n\Big(-b_u\|e_n\|^2 + b_v\max_{0\leqslant k\leqslant n}\|e_k\|^2\Big).$$

一种情况是 $\|e_n\| = \max_{0\leqslant k\leqslant n}\|e_k\|$, 此时 $\max_{0\leqslant k<n}\|e_k\|^2 \geqslant \|e_n\|^2(1 + a_n(b_u - b_v)) \geqslant \|e_n\|^2 = \max_{0\leqslant k\leqslant n}\|e_k\|^2 \geqslant \max_{0\leqslant k<n}\|e_k\|^2$, 这个不等式链的最左端和最右端一样，因此其中的不等号全取等，特别地有 $\|e_n\| = \max_{0\leqslant k<n}\|e_k\|$. 而另一种情况是 $\|e_n\| <$

$\max_{0\leqslant k\leqslant n}\|e_k\|$, 此时显然有 $\|e_n\| < \max_{0\leqslant k<n}\|e_k\|$. 总之，

$$\|e_n\| \leqslant \max_{0\leqslant k<n}\|e_k\|,\ n\in\mathbb{N}_+.$$

最后归纳即得结论。 □

3 后期拟完成的研究工作及进度安排

2024 年 7 月，整理现有工作，并考虑向带有 Caputo 导数的弱奇性方程推广。

2024 年 8-11 月，涉猎关于分数阶数值方法收敛性的文章，并考虑方程 (1) 的 L1 格式 (4) 的收敛性。

2024 年 12 月-2025 年 2 月，考虑更多类型的方程和数值算法。

2025 年 3 月-2025 年 5 月，撰写毕业论文，准备毕业答辩。

4 存在的困难与问题

分数阶导数的记忆性导致数值方法的收敛性难以分析。针对这一问题尚未找到有效的解决办法。给定区间 $[0,T]$, 其中 $0<T<\infty$, 设 x 是这一区间上方程的准确解（弱解），并记由 L1 格式 (4) 在时间序列 $\{t_k\}_{k=0}^n$ 下产生的数值解为 $\{x_k\}_{k=0}^n$, 其中 $0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=T$, 而考察收敛性实际上是考察 $\max_{1\leqslant k\leqslant n}(t_k-t_{k-1})$ 趋于 0 时是否有 $x(T)-x_n$ 趋于 0, 注意这里必定伴随着 $n\to\infty$. 分数阶导数的记忆性导致累积误差难以控制。我会继续查阅相关资料，并积极与老师同学讨论、交流思路和成果；也会从其他一些问题中寻求灵感，比如导数阶数大于 1 的情形。

5 如期完成全部论文工作的可能性

通过一年多的学习和积累，我对课题所在领域有了一定的了解，课题本身也已取得可观的进展，如期完成论文工作的可能性较大。

参考文献

[1] Webb J. Weakly singular Gronwall inequalities and applications to fractional differential equations[J/OL]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2019, 471(1): 692-711 [2018-11-06]. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2018.11.004.

[2] Wang D. Dissipativity and stability analysis for fractional functional differential equations[J/OL]. Fractional Calculus and Applied Analysis, 2015, 18: 1399-1422 [2015-12-05]. https://doi.org/10.1515/fca-2015-0081.

[3] Li D, Zhang C. Long time numerical behaviors of fractional pantograph equations[J/OL]. Mathematics and Computers in Simulation, 2020, 172: 244-257 [2019-12-16]. https://doi.org/10.1016/j.matcom.2019.12.004.

[4] Webb J R L. Initial value problems for Caputo fractional equations with singular nonlinearities[C/OL] // Electronic journal of differential equations. 2020 [2019-10-30].

https://ejde.math.txstate.edu.

[5] Jin B. Mittag-Leffler and Wright functions[M/OL] // Fractional differential equations: An approach via fractional derivatives. Cham: Springer International Publishing, 2021: 59-94 [2021-07-23]. https://doi.org/10.1007/978-3-030-76043-4_3.