

中国科学技术大学

大学生研究计划结题报告



核聚变中磁流体平衡态演化的数值模拟

作者姓名： 吴越

作者学号： PB19000193

学科专业： 信息与计算科学

院 系： 数学科学学院

导师姓名： 张梦萍 教授

完成时间： 二〇二二年九月二十八日

University of Science and Technology of China
Undergraduate Research Program
Final Project Report



**Numerical simulation of plasma
equilibrium evolution in nuclear
fusion**

Author: Yue Wu
Student ID: PB19000193
Major: Information and Computational Science
Department: School of Mathematical Sciences
Supervisor: Prof. Mengping Zhang
Finished time: September 28, 2022

摘要

可控热核聚变是一种解决能源危机与环境问题的理想选择之一。作为实现磁约束聚变的最可行的装置，托卡马克受到了广泛研究。托卡马克装置中的等离子体的撕裂模不稳定性对聚变反应会造成很大影响，因此其值得研究。在本研究中，为了数值模拟托卡马克中的等离子体平衡态演化过程，我们回顾了不同的 MHD 方程组，从中选择了一种合适的基于扰动量的非守恒电阻 MHD 方程组，开发了三维柱坐标下基于混合有限差分-Fourier 伪谱法的并行程序。我们利用我们的程序模拟了 $(m, n) = (2, 1)$ 的电阻撕裂模不稳定性，并与 CLT 代码和 M3D-C1 代码的计算结果进行比较。结果显示，我们的程序在数值结果在保持磁场数值散度、拟合动能对数增长率与电阻的理论关系、显示线性阶段独立于初始扰动的模结构、到达最终的饱和态等方面都展现出了令人满意的性能。

关键词：MHD 方程组，托卡马克，电阻撕裂模，有限差分方法，科学计算

ABSTRACT

The controlled nuclear fusion is one of the most prospective solution to the energy crisis and environmental problems. The tokamak has been widely investigated as the most feasible magnetically confined fusion device. Tearing mode instabilities have great influence on the fusion reaction thus worth studying. In this research, in order to simulate the evolution process of tokamak plasma equilibrium numerically, we review different formulations of the MHD equations, select a suitable type of nonconservative resistive MHD that is based on perturbation variables, and develop a parallel program using hybrid finite difference-Fourier pseudo spectral method in cylindrical coordinates. Using our program, we simulate the $(m, n) = (2, 1)$ resistive tearing mode instability and compare the results against those obtained from the CLT and M3D-C1 code. The results show that our program exhibits satisfactory performance in conserving numerical divergence of the magnetic field, fitting the theoretical relation between logarithmic growth rate of kinetic energy and resistivity, revealing the mode structure independent of initial perturbation at the linear stage and reaching the final saturation stage.

Key Words: Magnetohydrodynamics(MHD) equations, Tokamak, Resistive tearing mode, Finite difference method, Scientific computing

目 录

第 1 章 引言 ······	1
1.1 研究背景 ······	1
1.1.1、核聚变中的磁流体模型 ······	1
1.1.2、核聚变中的磁流体数值模拟 ······	1
1.2 研究目的与意义 ······	2
1.3 本文结构 ······	2
第 2 章 核聚变中的平衡态演化问题 ······	4
2.1 四种 MHD 方程组 ······	4
2.1.1、第一种 MHD 方程组 ······	5
2.1.2、第二种 MHD 方程组 ······	5
2.1.3、第三种 MHD 方程组 ······	6
2.1.4、第四种 MHD 方程组 ······	7
2.1.5、不同 MHD 方程组的对比 ······	8
2.2 本研究使用的控制方程组 ······	8
2.2.1、基于扰动量的非守恒可压电阻 MHD 方程组 ······	8
2.2.2、初值条件 ······	10
2.2.3、边值条件 ······	11
第 3 章 数值方法与实现 ······	12
3.1 数值方法 ······	12
3.1.1、空间离散 ······	12
3.1.2、时间离散 ······	14
3.1.3、初值条件处理 ······	15
3.1.4、边界条件处理 ······	15
3.2 程序设计 ······	16
3.2.1、计算流程 ······	16
3.2.2、并行加速 ······	16
第 4 章 数值结果与分析 ······	18
4.1 数值结果 ······	18
4.1.1、平衡态初值 ······	18

目 录

4.1.2、极向双周期扰动初值的模拟	18
4.1.3、极向单周期扰动初值的模拟	21
4.2 结果分析	26
第 5 章 总结与展望	33
5.1 总结	33
5.2 展望	33
参考文献	35

符 号 说 明

ρ	密度
\mathbf{m}	动量
\mathbf{u}	速度
\mathbf{B}	磁感应强度
\mathbf{J}	电流密度
\mathbf{E}	电场强度
E	总能量密度
p	流体压强
η	电阻系数
D	扩散系数
ν	粘性系数
κ	导热系数
γ	绝热常数，对于理想气体取 $\frac{5}{3}$

符 号 说 明

第1章 引言

1.1 研究背景

1.1.1 核聚变中的磁流体模型

能源是人类文明进步的基础和动力。随着社会的发展，人类对能源的需求在不断增长，但是目前人类主要使用的煤、石油、天然气等化石能源都属于不可再生能源，储量有限。同时，化石燃料的广泛使用带来了严重的气候和环境问题，例如温室效应、酸雨和热污染。^[1] 为了可持续发展，人们急需寻求储量丰富的清洁能源。风能、水能和太阳能虽然符合这些需求，但是它们总是受到地理、气候等种种限制而不能大规模持续运用。核能可能将是替代化石能源作为下一代主要能源的首选。

人们利用核能主要有两种方式，重核裂变与轻核聚变。重核裂变相较容易，目前大多数核电站都是利用可控裂变，但其原料储量并不丰富，且还会生成放射性废料。相比裂变，聚变反应原料丰富，不产生具有长期放射性的废料，单位质量原料释放能量更多，安全性也更好。聚变供能需要在亿度级的温度下进行，才能使反应自持，且反应物需要被约束在反应容器内。目前主要的高温磁流体约束方式之一就是磁约束，其中，托卡马克 (Tokamak)^[2] 是目前运行最多、表现最好的磁约束聚变装置。

在热核聚变中，反应物在高温下被完全电离成等离子体。等离子体 (plasma) 是包含足够数量的带电粒子，表现出集体行为的多粒子系统。^[3] 描述等离子体主要有单粒子模型、动理学模型和流体模型这三种常用的方法。在研究低频大尺度的等离子体宏观现象时，可以认为等离子体处于局部热平衡状态，从而可以忽略粒子个性，视作连续流体 (磁流体)。基于流体模型描述等离子体的最常用的方程组就是磁流体动力学 (Magnetohydrodynamics，简称 MHD) 方程组。在不同的需求下，它有可压、不可压、电阻等不同具体的模型。

1.1.2 核聚变中的磁流体数值模拟

可控核聚变主要有两大挑战，一是材料和部件在聚变中子照射下性能损失，二是等离子体的不稳定性 (如各种 MHD 不稳定性)。实验、理论和数值模拟是现代物理学研究的三种主要手段，等离子体物理亦然。由于核聚变实验成本高昂，计算机数值模拟就成为了一种经济便利的研究核聚变中等离子体的方法。

等离子体数值模拟主要分为粒子模拟和磁流体模拟这两种。磁流体模拟将等离子体看作流体，主要用于解决随时间变化较慢的大尺度宏观问题，如各种 MHD 不稳定性等，比粒子模拟更加高效经济。由 MHD 方程组出发，磁流体模拟可以看作对偏微分方程组的求解。常见的数值方法有有限差分方法、有限体积方法、谱方法、有限元方法等。

本研究主要采用磁流体模拟，对托卡马克装置中等离子体的电阻撕裂模不稳定性开发代码，进行数值模拟。

1.2 研究目的与意义

在托卡马克等磁约束聚变等离子体中，撕裂模不稳定性的发展往往会破坏磁面结构，减少等离子体旋转，增强等离子体径向运输，使等离子体约束退化，甚至引发等离子体破裂^[4-7]。因此，在磁约束聚变装置中，避免或控制撕裂模不稳定对于维持高比压的良好等离子体约束以及稳态操作都至关重要。大多数研究者都认为 MHD 平衡态和稳定性是使聚变反应堆工作的必要要求。如果等离子体的 MHD 平衡态存在，但是这个平衡态在 MHD 模型下不稳定，那么运行结果几乎是难以令人满意的^[8]。因此，聚变装置的研发需要对等离子体平衡态的稳定性进行研究。

本研究主要采用磁流体模拟，我们使用可压电阻 MHD 方程组（简记为 RMHD 方程组），开发基于偏微分方程求解的数值模拟代码，对托卡马克装置中等离子体平衡态的电阻撕裂模不稳定性进行模拟。

1.3 本文结构

本研究的主要工作是设计与开发圆截面托卡马克的等离子体平衡态演化过程的磁流体模型数值模拟程序。

在第2章中，我们介绍不同的磁流体动力学 (MHD) 方程组，并给出本研究中我们使用的方程组以及使用此方程组的原因，给出初值和边值条件。

第3章介绍我们对控制方程组设计相应的混合有限差分-伪谱法数值格式，程序计算流程以及并行加速方案。

在第4章中，我们给出托卡马克电阻撕裂模的数值模拟结果与分析，包括不同电阻和不同初始扰动模式的数值结构以及动能变化规律拟合结果、与其他代码的对比等。

最后，第5章是总结与展望。

第 2 章 核聚变中的平衡态演化问题

在核聚变中，学术界描述等离子体的磁流体模型最常用的方程组是磁流体动力学 (MHD) 方程组。我们首先对四种不同的 MHD 方程组进行一个回顾，并将它们综合比较，然后给出我们在本研究中使用的基于扰动量的非守恒型 RMHD 方程组。

2.1 四种 MHD 方程组

MHD 模型是描述磁流体的宏观平衡态和稳定性质的流体模型。在众多的 MHD 模型中，最常使用的 MHD 模型之一就是理想可压 MHD 模型，其假设等离子体可以被具有无穷导电性且离子回旋半径为零的单流体模型描述。在低速近似下，理想 MHD 模型的控制方程组为^[8]：

$$\text{Mass: } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (2.1a)$$

$$\text{Momentum: } \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla p \quad (2.1b)$$

$$\text{Energy: } \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0 \quad (2.1c)$$

$$\text{Ohm's law: } \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} = 0 \quad (2.1d)$$

$$\text{Maxwell: } \begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J} \end{cases} \quad (2.1e)$$

由经典电磁理论，磁场 \mathbf{B} 满足 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 的无散度条件，也即磁单极子不存在。而事实上，这一条件只需要被上述控制方程组(2.1)的初值满足，并与边界条件相容，就可以在 $t > 0$ 的时刻也被满足，这是因为上述方程组隐含了：

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (2.2)$$

其中，这里假设了空间和时间的弱导数可交换。因此，这一条件不需要被显式地包含在 MHD 方程组中。

但是在数值模拟时，即使初值条件的磁场是无散度的，磁场的数值解 \mathbf{B}_h 也并不一定能满足无散度条件，这会对数值解的整体产生很大影响，引起显著的误差^[9]并且，就连磁场数值解的数值散度的定义方式都不是唯一的，在不同的意义下满足的数值无散度条件也可能有性能的区别，难以避免所有非物理的模拟结

果^[10]。同时，只要磁场数值解 \mathbf{B}_h 的数值散度非零，就有可能使数值解产生负压强^[11-12]，从而迫使计算停止。因此，在数值模拟时，研究者需要仔细考察磁场散度项 $\nabla \cdot \mathbf{B}$ 在 MHD 方程组中的作用。下面四种可压 MHD 方程组在无散度条件 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 成立时是互相等价的，但是在其不成立时具有差别。

2.1.1 第一种 MHD 方程组

第一种 MHD 方程组的守恒形式和非守恒形式分别如下给出。

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \mathbf{m} \\ \mathbf{B} \\ E \end{pmatrix} + \nabla \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{m} \\ \frac{1}{\rho} \mathbf{m} \mathbf{m}^T + \left(p + \frac{\|\mathbf{B}\|^2}{2} \right) \mathbf{I}_{(3)} - \mathbf{B} \mathbf{B}^T \\ \mathbf{u} \mathbf{B}^T - \mathbf{B} \mathbf{u}^T \\ \left(E + p + \frac{\|\mathbf{B}\|^2}{2} \right) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} \end{pmatrix} + (\nabla \cdot \mathbf{B}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (2.3)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{B} \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \\ (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \frac{1}{\rho} (\mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla p) \\ \nabla \times \mathbf{E} \\ \mathbf{u} \cdot \nabla p + \gamma p \nabla \cdot \mathbf{u} \end{pmatrix} + (\nabla \cdot \mathbf{B}) \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\mathbf{B}}{\rho} \\ 0 \\ (\gamma - 1)(\mathbf{B} \cdot \mathbf{u}) \end{pmatrix} = 0 \\ \mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B} \\ \mathbf{E} = \mathbf{B} \times \mathbf{u} \end{cases} \quad (2.4)$$

第一种 MHD 方程组(2.3)(2.4)是学术界最常讨论的理想 MHD 方程组，它是守恒律方程组，但是它是弱双曲的。其动量方程中的外力项为 $\mathbf{J} \times \mathbf{B} + (\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B}$ ，也即垂直于磁场的洛伦兹力再加上一个非物理的平行于磁场的“力”(parallel force)，它会引起计算中等离子体沿着平行于磁场的方向加速。如果 $\nabla \cdot \mathbf{B} \neq 0$ ，那么第二项会对数值解的精度造成很大影响^[9]。对比非守恒方程组(2.4)和原始的物理控制方程(2.1)就可以发现，守恒性方程组(2.3)是人为加上非物理的项 $(\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B}$ 然后进行等价变形的结果。

2.1.2 第二种 MHD 方程组

第二种 MHD 方程组的守恒形式和非守恒形式分别如下给出。

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \mathbf{m} \\ \mathbf{B} \\ E \end{pmatrix} + \nabla \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho} \mathbf{m} \mathbf{m}^T + \left(p + \frac{\|\mathbf{B}\|^2}{2} \right) \mathbf{I}_{(3)} - \mathbf{B} \mathbf{B}^T \\ \mathbf{u} \mathbf{B}^T - \mathbf{B} \mathbf{u}^T \\ \left(E + p + \frac{\|\mathbf{B}\|^2}{2} \right) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} \end{pmatrix} + (\nabla \cdot \mathbf{B}) \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{B} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (2.5)$$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \rho \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{B} \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \\ (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \frac{1}{\rho} (\mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla p) \\ \nabla \times \mathbf{E} \\ \mathbf{u} \cdot \nabla p + \gamma p \nabla \cdot \mathbf{u} \end{pmatrix} + (\nabla \cdot \mathbf{B}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \\ \mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B} \\ \mathbf{E} = \mathbf{B} \times \mathbf{u} \end{cases} \quad (2.6)$$

第二种 MHD 方程组(2.5)(2.6)是基于第一种 MHD 方程组，并对其动量方程的外应力项进行了修正，使得外应力项始终正交于磁场方向而得到的方程组，这可以在一定程度上减少数值解的误差。同时，它也可以看作直接把理想 MHD 模型的控制方程组(2.1)组装在一起，且不把隐含的 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 条件代入化简而得到的方程组。

2.1.3 第三种 MHD 方程组

第三种 MHD 方程组的守恒形式和非守恒形式分别如下给出。

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \mathbf{m} \\ \mathbf{B} \\ E \end{pmatrix} + \nabla \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho} \mathbf{m} \mathbf{m}^T + \left(p + \frac{\|\mathbf{B}\|^2}{2} \right) \mathbf{I}_{(3)} - \mathbf{B} \mathbf{B}^T \\ \mathbf{u} \mathbf{B}^T - \mathbf{B} \mathbf{u}^T \\ \left(E + p + \frac{\|\mathbf{B}\|^2}{2} \right) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} \end{pmatrix} + (\nabla \cdot \mathbf{B}) \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} \end{pmatrix} = 0 \quad (2.7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{B} \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \\ \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \frac{1}{\rho} (\mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla p) \\ \nabla \times \mathbf{E} \\ \mathbf{u} \cdot \nabla p + \gamma p \nabla \cdot \mathbf{u} \end{pmatrix} + (\nabla \cdot \mathbf{B}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{u} \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \\ \mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B} \\ \mathbf{E} = \mathbf{B} \times \mathbf{u} \end{array} \right. \quad (2.8)$$

第三种 MHD 方程组(2.7)(2.8)是由 Powell 为了使方程组的 Jacobi 矩阵更加容易分解、Riemann 近似解更加容易推导而提出的八波模型^[13]，它是强双曲的，其 Jacobi 矩阵可以实对角化，且特征分解容易推导^[14]^①。因此，即使实际计算中使用的 MHD 方程组不一定第三种方程组，它的特征分解仍然在数值计算中被使混合使用。它之所以被称作八波模型，是因为除了熵波、四个磁声波、两个 Alfvén 波这七个特征波之外，还存在散度波^[14]，也即磁场散度随着流体一起对流，不会停留其初始位置。散度波的存在具有两个好处，一是使得在具有较快的背景对流速度的数值模拟中，磁场散度可以被运输到计算区域外，从而在合理的数值格式下磁场散度可以被减少；二是使得方程组具有伽利略不变性，这是前两种方程组都不能满足的，因为它们的磁场散度总是停留在原地。它的一个缺点是其非守恒性质，这会给出错误的激波跳跃条件^[10]。

2.1.4 第四种 MHD 方程组

第四种 MHD 方程组的守恒形式和非守恒形式分别如下给出。

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \mathbf{m} \\ \mathbf{B} \\ E \end{pmatrix} + \nabla \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{m} \\ \frac{1}{\rho} \mathbf{m} \mathbf{m}^T + \left(p + \frac{\|\mathbf{B}\|^2}{2} \right) \mathbf{I}_{(3)} - \mathbf{B} \mathbf{B}^T \\ \mathbf{u} \mathbf{B}^T - \mathbf{B} \mathbf{u}^T \\ \left(E + p + \frac{\|\mathbf{B}\|^2}{2} \right) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} \end{pmatrix} + (\nabla \cdot \mathbf{B}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{u} \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (2.9)$$

^①事实上，在我们给出的四种 MHD 方程组中，只有第三种 MHD 方程组的 Jacobi 矩阵具有显式的特征分解

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{B} \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \\ \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \frac{1}{\rho} (\mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla p) \\ \nabla \times \mathbf{E} \\ \mathbf{u} \cdot \nabla p + \gamma p \nabla \cdot \mathbf{u} \end{pmatrix} + (\nabla \cdot \mathbf{B}) \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\mathbf{B}}{\rho} \\ \mathbf{u} \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \\ \mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B} \\ \mathbf{E} = \mathbf{B} \times \mathbf{u} \end{array} \right. \quad (2.10)$$

第四种 MHD 方程组(2.9)(2.10)是由 Janhunen 考虑兼容磁单极子存在, 也即允许磁场散度非零, 使用电磁张量并根据电磁对偶对称性和洛伦兹变换推导而得^[15-16], 它弥补了第一、三种方程组中能量不守恒的问题以及第二、三种方程组中动量不守恒的问题。

2.1.5 不同 MHD 方程组的对比

上述四种 MHD 方程组的主要区别由表格2.1汇总给出。我们发现, 不同的 MHD 方程组在数值计算时具有不同的优缺点, 很难找出一个完美的方案, 因此对于不同的应用需求, 研究者应该根据问题选择最合适 的方程组。

表 2.1 上述四种 MHD 方程组的区别 ($\nabla \cdot \mathbf{B} \neq 0$)

方程组	1	2	3	4
磁场散度 $\nabla \cdot \mathbf{B}$	不变	不变	对流 (速度为 \mathbf{u})	对流 (速度为 \mathbf{u})
”parallel force”($\nabla \cdot \mathbf{B}$) \mathbf{B}	存在	不存在	不存在	存在
动量 \mathbf{m}	守恒	不守恒	不守恒	守恒
能量 E	守恒	守恒	不守恒	守恒
方程分类	弱双曲	弱双曲	对称双曲	弱双曲
伽利略不变性	否	否	是	是
熵守恒性	否	是	是	是

注: 磁场散度不变指的是 $\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$; 磁场散度的对流 (速度为 \mathbf{u}) 指的是 $(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla) \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$; 熵守恒性指的是 $(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla) \frac{p}{\rho'} = 0$

2.2 本研究使用的控制方程组

2.2.1 基于扰动量的非守恒可压电阻 MHD 方程组

当进行磁流体平衡态扰动计算时, 也即在平衡态上施加一个小扰动, 计算扰动随时间演变过程, 出于计算机有限的浮点精度, 学术界常常采用把平衡态和扰动量分开, 单独计算扰动量所满足的方程的方法。我们在本研究中, 使用基于扰动量的非守恒可压 RMHD 方程组, 其由上文中第二种 MHD 方程组的非守恒形

式(2.6)加入电阻效应和数值耗散项得到。选取第二种 MHD 方程组是因为：

1. 第一种 MHD 方程组存在非物理的力 (parallel force)，对计算结果的精度影响很大
2. 在托卡马克的平衡态模拟中，等离子体被束缚在反应区域内，背景对流速度为零，如果使用第三种或者第四种方程组，无法通过散度的对流来消除散度，还会引入其他问题
3. 第一种和第二种 MHD 方程组更容易设计保持磁场数值散度不变的格式

将物理量 \mathbf{w} 写为平衡量 \mathbf{w}_s 与扰动量 $\tilde{\mathbf{w}}$ 的求和：

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{B} \\ p \\ \mathbf{J} \\ \mathbf{E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_s \\ \mathbf{u}_s \\ \mathbf{B}_s \\ p_s \\ \mathbf{J}_s \\ \mathbf{E}_s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{\rho} \\ \tilde{\mathbf{u}} \\ \tilde{\mathbf{B}} \\ \tilde{p} \\ \tilde{\mathbf{J}} \\ \tilde{\mathbf{E}} \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

其中，平衡量是第二种 MHD 方程组(2.6)的平衡态解，其满足对应的平衡态方程组：

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot (\rho_s \mathbf{u}_s) \\ (\mathbf{u}_s \cdot \nabla) \mathbf{u}_s - \frac{1}{\rho_s} (\mathbf{J}_s \times \mathbf{B}_s - \nabla p_s) \\ \nabla \times \mathbf{E}_s \\ \mathbf{u}_s \cdot \nabla p_s + \gamma p_s \nabla \cdot \mathbf{u}_s \\ \mathbf{J}_s = \nabla \times \mathbf{B}_s \\ \mathbf{E}_s = \mathbf{B}_s \times \mathbf{u}_s \end{array} \right\} = 0 \quad (2.12)$$

将平衡量满足的方程组代入第二种 MHD 方程组(2.6)中，并对扰动量加入电

阻效应和数值耗散，得到扰动量满足的方程组：

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \tilde{\rho} \\ \tilde{\mathbf{u}} \\ \tilde{\mathbf{B}} \\ \tilde{p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{u} \cdot \nabla \tilde{\rho} + \rho \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} \\ \mathbf{u} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}} + \frac{\nabla \tilde{p}}{\rho} \\ \nabla \times \tilde{\mathbf{E}} \\ \gamma p \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u} \cdot \nabla \tilde{p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \rho_s + \tilde{\rho} \nabla \cdot \mathbf{u}_s \\ \left(\tilde{\mathbf{u}} + \frac{\tilde{\rho}}{\rho} \mathbf{u}_s \right) \cdot \nabla \mathbf{u}_s + \frac{\tilde{\mathbf{B}} \times \mathbf{J}_s + \mathbf{B} \times \tilde{\mathbf{J}}}{\rho} \\ 0 \\ \gamma \tilde{p} \nabla \cdot \mathbf{u}_s + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla p_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D \Delta \tilde{\rho} \\ v \Delta \tilde{\mathbf{u}} \\ 0 \\ \kappa \Delta \tilde{p} \end{pmatrix} \\ \tilde{\mathbf{J}} = \nabla \times \tilde{\mathbf{B}} \\ \tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\mathbf{B}} \times \mathbf{u}_s + \mathbf{B} \times \tilde{\mathbf{u}} + \eta \tilde{\mathbf{J}} \end{array} \right. \quad (2.13)$$

我们考虑圆截面环几何托卡马克的电阻撕裂模问题。在柱坐标系下，方程组的区域为：

$$(r, \varphi, z) \in \left\{ (r, \varphi, z) \mid (r - R_0)^2 + z^2 < a_0^2, \varphi \in [0, 2\pi] \right\} \quad (2.14)$$

其中 $R_0 = 10$ 是托卡马克环形半径， $a_0 = 1$ 是圆截面半径。记 rOz 截面区域为

$$\Omega = \left\{ (r, z) \mid (r - R_0)^2 + z^2 < a_0^2 \right\} \quad (2.15)$$

2.2.2 初值条件

1. 平衡态初值

在本研究使用的控制方程组中，平衡态不随时间演化。平衡态 $\mathbf{w}_s = (\rho_s, \mathbf{u}_s, \mathbf{B}_s, p_s)^T$ 是线性化的理想 MHD 方程的极向周期数 $m = 2$ ，环向周期数 $n = 2$ 的轴对称特征解，同时也是 Grad-Shafranov 方程组的轴对称解，其中，取 $\rho_s = 1$, $\mathbf{u} = 0$, 安全因子分布为 $q(\psi) = 1.6 \left(1 + \left(\frac{\psi}{0.205} \right)^4 \right)^{\frac{1}{4}}$ 。

平衡态 \mathbf{w}_s 是 MHD 方程组(2.12)的平衡态解，由于 $(m, n) = (2, 1)$ 的位形特性，在平衡态上任意施加小扰动，并对扰动加入电阻系数为 η 的电阻效应后，扰动量 $\tilde{\mathbf{w}}$ 会先经过短暂的非线性阶段，进入线性演化阶段，然后到达饱和阶段。由解析理论^[17]知，在线性增长阶段时，扰动能的对数增长率

$$\gamma = \frac{d}{dt} \ln (E_k) = \frac{d}{dt} \ln \int_{\Omega \times [0, 2\pi]} \frac{1}{2} \rho \|\tilde{\mathbf{u}}\|^2 d\sigma \quad (2.16)$$

满足 $\gamma \propto \eta^{\frac{3}{5}}$ ；同时，在 $q(\psi) = 2$ 的有理磁面附近会出现磁岛结构。这是托卡马克模拟代码最常使用的测试算例^[18]。

2. 扰动初值

根据理论，我们的扰动初值其实可以任意选取。但是为了加快计算，使得扰动量尽快进入我们最关心的线性增长阶段，我们将扰动的初值取在 $q = 2$ 的有理磁面附近。我们只在磁场上施加初始扰动，并取成如下形式：

$$\tilde{\mathbf{B}}|_{t=0} = A \cos(n_0\varphi + m_0\theta) \exp\left(-\left(\frac{\psi - \psi_m}{\delta\psi}\right)^2\right) \mathbf{B}_s \quad (2.17)$$

其中 A 是振幅， ψ 是磁通， ψ_m 是平衡位形 $q = 2$ 面的磁通（安全因子 q 的分布由平衡态决定）， $\delta\psi$ 是特征宽度， \mathbf{B}_s 是初始平衡态磁场， n_0 是初始扰动的环向周期数， m_0 是初始扰动的极向周期数。

2.2.3 边值条件

边界条件只施加在扰动量 $\tilde{\mathbf{w}}$ 上。由于我们考虑的是撕裂内模问题，扰动量在边界处应当充分小，或者说，边界效应需要充分小。因此，我们采用的边界条件是：

在区域边界处，所有扰动量 $\tilde{\mathbf{w}} = (\tilde{\rho}, \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{p})^T$ 都固定为 0 (Dirichlet 边界条件)。

第3章 数值方法与实现

3.1 数值方法

我们采用混合有限差分-Fourier 伪谱法进行方程组的离散。由于计算区域在 φ 方向是周期的，在 rOz 平面上是圆形的，我们在 φ 方向使用 Fourier 伪谱法进行离散，在 rOz 平面上，为了避免使用极坐标时圆心处格点距离过近导致时间步长过小，我们把 rOz 平面上的计算区域 Ω 嵌入方形区域 $[R_0 - a_0, R_0 + a_0] \times [-a_0, a_0]$ ，并使用等距直角网格离散。

3.1.1 空间离散

取均匀网格为：

$$r_i = R_0 - a_0 + (i - \frac{1}{2})\Delta r, \quad \Delta r = \frac{2a_0}{N_r} \quad (3.1)$$

$$z_j = -a_0 + (j - \frac{1}{2})\Delta z, \quad \Delta z = \frac{2a_0}{N_z} \quad (3.2)$$

$$\varphi_k = k\Delta\varphi, \quad \Delta\varphi = \frac{2\pi}{N_\varphi} \quad (3.3)$$

将方程组(2.13)等价地简记为如下几个方程组的耦合：

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + \mathbf{J}^{(r)}(\mathbf{w}) \frac{\partial \tilde{\mathbf{w}}}{\partial r} + \frac{1}{r} \mathbf{J}^{(\varphi)} \frac{\partial \tilde{\mathbf{w}}}{\partial \varphi} + \mathbf{J}^{(z)}(\mathbf{w}) \frac{\partial \tilde{\mathbf{w}}}{\partial z} + \mathbf{S}(\tilde{\mathbf{w}}, \mathbf{w}_s, \nabla \mathbf{w}_s) = \boldsymbol{\mu} \Delta \tilde{\mathbf{w}} \\ \frac{\partial \tilde{\mathbf{B}}}{\partial t} + \nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = 0 \\ \tilde{\mathbf{J}} = \nabla \times \tilde{\mathbf{B}} \\ \tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\mathbf{B}} \times \mathbf{u}_s + \mathbf{B} \times \tilde{\mathbf{u}} + \eta \tilde{\mathbf{J}} \end{cases} \quad (3.4)$$

其中 $\mathbf{U} = (\rho, \mathbf{u}, p)^T$, $\mathbf{w} = (\rho, \mathbf{u}, \mathbf{B}, p)^T$, $\boldsymbol{\mu}$ 是数值耗散系数向量, $\mathbf{J}^{(\cdot)}$ 分别是 r, φ, z 方向的 Jacobi 矩阵。

我们在 rOz 截面区域 Ω 采用有限差分方法，在 $\varphi \in [0, 2\pi]$ 采用 Fourier 伪谱法。

1. 偏心差分方法

对方程组(3.4)中的第一个方程中的 $\mathbf{J}^{(r)} \frac{\partial \tilde{\mathbf{w}}}{\partial r} + \mathbf{J}^{(z)} \frac{\partial \tilde{\mathbf{w}}}{\partial z}$ 部分，将其视作 Hamilton-Jacobi 方程进行离散。对 r 和 z 方向的空间一阶导数使用 3 阶 Lax-Friedrichs 分

裂:

$$\frac{\partial}{\partial x} u_i^- = \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{1}{6} u_{i-2} - u_{i-1} + \frac{1}{2} u_i + \frac{1}{3} u_{i+1} \right) \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} u_i^+ = \frac{1}{\Delta x} \left(-\frac{1}{3} u_{i-1} - \frac{1}{2} u_i + u_{i+1} - \frac{1}{6} u_{i+2} \right) \quad (3.6)$$

取 (r, z) 平面上的数值 Hamilton 函数为 Lax-Friedrichs 型的单调 Hamilton 函数:

$$\begin{aligned} & \widetilde{H} \left(\frac{\partial \mathbf{w}^-}{\partial r}, \frac{\partial \mathbf{w}^+}{\partial r}, \frac{\partial \mathbf{w}^-}{\partial z}, \frac{\partial \mathbf{w}^+}{\partial z} \right) \\ &= H \left(\frac{\frac{\partial \mathbf{w}^-}{\partial r} + \frac{\partial \mathbf{w}^+}{\partial r}}{2}, \frac{\frac{\partial \mathbf{w}^-}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{w}^+}{\partial z}}{2} \right) + \frac{\alpha \left(\frac{\partial \mathbf{w}^-}{\partial r} - \frac{\partial \mathbf{w}^+}{\partial r} \right)}{2} + \frac{\beta \left(\frac{\partial \mathbf{w}^-}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{w}^+}{\partial z} \right)}{2} \end{aligned} \quad (3.7)$$

其中 $\alpha = \max_{1 \leq l \leq 8, \mathbf{w}_{i,j,k}} |\lambda_l^{(r)}|$, $\beta = \max_{1 \leq l \leq 8, \mathbf{w}_{i,j,k}} |\lambda_l^{(z)}|$, 这里 $\lambda_l^{(\cdot)}$ 和 $\lambda_l^{(z)}$ 分别是 $\mathbf{J}^{(r)}$ 和 $\mathbf{J}^{(z)}$ 的第 l 个特征值。

对方程组(3.4)中的二阶导数, 也即数值耗散项, 采用 4 阶中心差分近似:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u_i = \frac{-u_{i-2} + 16u_{i-1} - 30u_i + 16u_{i+1} - u_{i+2}}{12\Delta x^2} \quad (3.8)$$

2. Fourier 伪谱法

对于方程组(3.4)中的 $\frac{\partial}{\partial \varphi} \tilde{\mathbf{w}}$ 部分, 使用 Fourier 伪谱法进行离散:

设 f 为 2π 周期的函数, 其 N_φ 点的 Fourier 系数为 \hat{f}_k , $k = -\frac{N_\varphi}{2} + 1, \dots, \frac{N_\varphi}{2} - 1, \frac{N_\varphi}{2}$, 那么:

1. f' 的 N_φ 点的 Fourier 系数为 $\hat{f}'_k = ik\hat{f}_k$, $k = -\frac{N_\varphi}{2} + 1, \dots, \frac{N_\varphi}{2} - 1$; $\hat{f}'_{\frac{N_\varphi}{2}} = 0$.

2. f'' 的 N_φ 点的 Fourier 系数为 $\hat{f}''_k = -k^2\hat{f}_k$, $k = -\frac{N_\varphi}{2} + 1, \dots, \frac{N_\varphi}{2} - 1, \frac{N_\varphi}{2}$.

使用 FFT 和 IFFT 完成其中的变换。

3. 四阶中心差分方法

对方程组(3.4)中的第二和第三个方程, 在 r 方向和 z 方向都采用四阶中心差分格式:

$$\frac{\partial}{\partial x} u_i = \frac{u_{i-2} - 8u_{i-1} + 8u_{i+1} - u_{i+2}}{12\Delta x} \quad (3.9)$$

特别地, 在柱坐标系下, 旋度和散度公式为:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F} &= \mathbf{e}_r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} F_z - \frac{\partial}{\partial z} F_\varphi \right) + \mathbf{e}_\varphi \left(\frac{\partial}{\partial z} F_r - \frac{\partial}{\partial r} F_z \right) + \mathbf{e}_z \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r F_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (r F_r) \right) \\ \nabla \cdot \mathbf{F} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r F_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} F_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} F_z \end{aligned} \quad (3.11)$$

在计算上面形如 $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rf)$ 的项时，应代入 $u_i = r_i f_i$ 进行计算。这样，磁场扰动量 $\tilde{\mathbf{B}}$ 在点 (r_i, φ_k, z_j) 处的数值时间导数为：

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \tilde{B}_r \\ \tilde{B}_\varphi \\ \tilde{B}_z \end{pmatrix}_{(r_i, \varphi_k, z_j)} = \begin{pmatrix} D_{z,4} \tilde{E}_{\varphi,(i,k,j)} - \frac{1}{r_i} D_\varphi \tilde{E}_{z,(i,k,j)} \\ D_{r,4} \tilde{E}_{z,(i,k,j)} - D_{z,4} \tilde{E}_{r,(i,k,j)} \\ \frac{1}{r_i} D_\varphi \tilde{E}_{r,(i,k,j)} - \frac{1}{r_i} D_{r,4} (r \tilde{E}_\varphi)_{(i,k,j)} \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

其中， $D_{r,4}$ 和 $D_{z,4}$ 分别为 r 和 z 方向上的 4 阶中心差分算子， D_φ 是 φ 方向上的 Fourier 伪谱法求导算子，它们都是线性算子。由于上述这三个算子的交换性，不难验证，当对格点函数 \mathbf{F} 取数值散度算子为

$$\nabla \cdot \mathbf{F}_{(r_i, \varphi_k, z_j)} = \frac{1}{r_i} D_{r,4} (r F_r)_{(r_i, \varphi_k, z_j)} + \frac{1}{r_i} D_\varphi F_{\varphi, (r_i, \varphi_k, z_j)} + D_{z,4} F_{z, (r_i, \varphi_k, z_j)} \quad (3.13)$$

时，按照上述格式得到的磁场的数值时间导数 $\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\mathbf{B}}$ 满足 $\nabla \cdot \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\mathbf{B}} = 0$ 。这样，磁场的数值散度增长就可以被控制在机器精度量级，而非与网格尺度有关。

3.1.2 时间离散

时间离散采用标准的 4 阶 Runge Kutta 方法：

$$u^{(1)} = u^n + \frac{1}{2} \Delta t L(u^n, t^n) \quad t^{(1)} = t^n + \frac{1}{2} \Delta t \quad (3.14)$$

$$u^{(2)} = u^n + \frac{1}{2} \Delta t L(u^{(1)}, t^n + \frac{1}{2} \Delta t) \quad t^{(2)} = t^n + \frac{1}{2} \Delta t \quad (3.15)$$

$$u^{(3)} = u^n + \Delta t L(u^{(2)}, t^n + \frac{1}{2} \Delta t) \quad t^{(3)} = t^n + \Delta t \quad (3.16)$$

$$u^{n+1} = \frac{1}{3} u^{(1)} + \frac{2}{3} u^{(2)} + \frac{1}{3} u^{(3)} - \frac{1}{3} u^n + \frac{1}{6} \Delta t L(u^{(3)}, t^n + \Delta t) \quad t^{n+1} = t^n + \Delta t \quad (3.17)$$

时间步长：

$$\Delta t = \frac{\text{CFL}}{\frac{\alpha}{\Delta r} + \frac{\beta}{\Delta z} + \frac{\xi}{\Delta r^2} + \frac{\xi}{\Delta z^2}} \quad (3.18)$$

其中 $\alpha = \max_{1 \leq l \leq 8, \mathbf{w}_{i,j,k}} |\lambda_l(r)|$, $\beta = \max_{1 \leq l \leq 8, \mathbf{w}_{i,j,k}} |\lambda_l^{(z)}|$, $\xi = \max \{D, \nu, \eta, \kappa\}$, CFL $\in (0, 1]$.

具体地，我们给出 r 方向和 z 方向 Jacobian 矩阵的谱半径：

$$\sigma(\mathbf{J}^{(r)}) = |u_r| + \sqrt{\frac{\gamma p + \|\mathbf{B}\|^2 + \sqrt{(\gamma p + \|\mathbf{B}\|^2)^2 - 4\gamma p B_r^2}}{2\rho}} \quad (3.19)$$

$$\sigma(\mathbf{J}^{(z)}) = |u_z| + \sqrt{\frac{\gamma p + \|\mathbf{B}\|^2 + \sqrt{(\gamma p + \|\mathbf{B}\|^2)^2 - 4\gamma p B_z^2}}{2\rho}} \quad (3.20)$$

由上文说明的散度处理的性质，我们不难发现：不考虑浮点误差时，按照前文的数值散度的定义(3.13)求得的磁场扰动量散度 $\nabla \cdot \tilde{\mathbf{B}}$ 不随时间变化。因此，我们的格式保持磁场散度不变。

3.1.3 初值条件处理

1. 平衡态初值

因为平衡态是特征周期数为 $(m, n) = (2, 1)$ 的特征平衡态解，所以平衡态的初值使用 NOVA^[19] 代码计算得到，选用的安全因子分布为 $q(\psi) = 1.6 \left(1 + \left(\frac{\psi}{0.205}\right)^4\right)^{\frac{1}{4}}$ 。平衡态的各物理量在 φ 方向是对称的（也即只需要 rOz 平面的数据）。我们使用 qshep2d(Quadratic Shepard 2D)^[20] 算法，把读入的数据（磁面坐标 (ψ, θ) ）插值到直角网格格点上。

2. 扰动初值

初值的扰动施加在磁场上：

$$\tilde{\mathbf{B}}|_{t=0} = A \cos(n_0\varphi + m_0\theta) \exp\left(-\left(\frac{\psi - \psi_m}{\delta\psi}\right)^2\right) \mathbf{B}_s \quad (3.21)$$

其中 $A = 10^{-3}$ 是振幅， ψ 是磁通， ψ_m 是平衡位形 $q = 2$ 面的磁通， $\delta\psi$ 是特征宽度， \mathbf{B}_s 是初始平衡态磁场， n_0 是环向周期数， m_0 是极向周期数。

在数值计算时，我们只需要对于每一个格点，把参数和平衡态磁场点值代入上面的公式，就可以得到扰动点值。

这里，我们分别取极向单周期扰动 $(m_0, n_0) = (1, 1)$ 以及极向双周期扰动 $(m_0, n_0) = (2, 1)$ ，以验证上述 $(m, n) = (2, 1)$ 的平衡态上的小扰动在进入线性演化阶段之后的演化方式与具体的初值无关，同时观察不同的初值进入线性演化阶段的时间先后的差别。

3.1.4 边界条件处理

由于每一个格点在 r 和 z 方向需要半径为 2 的模板，我们将圆截面 Ω 上的直角网格点分为 3 类：

1. 外部点：在圆截面 Ω 外的点（不参与计算）。
2. 内部点：其 r 和 z 方向的差分模板都在圆截面 Ω 内的点。
3. 边界点：其余的点（在圆截面 Ω 内，但没有完整的模板）。

注 由于平衡态的压强 p_s 在边界附近呈线性降低到 0，插值圆截面 Ω 外部的虚拟点可能引起边界负压，且边界处无法进行特征分解（Jacobi 矩阵的特征系统在 $p \rightarrow 0^+$ 时具有不可去奇点）。因此，我们将虚拟点选在 Ω 内。

我们通过时间步进，只更新内部点上的点值；边界点的主要变量 $\tilde{\mathbf{w}} = (\tilde{\rho}, \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{p})^T$ 通过下文的插值过程得到；边界点的辅助变量 $\tilde{\mathbf{J}}$ 通过偏心的四阶中心差分得到， $\tilde{\mathbf{E}}$ 可以直接由边界点处的其他物理量的值计算得到。

我们在下面给出两个不同的插值过程，它们的实现方法不同，但是因为我们计算的问题中，边界附近的扰动量 $\tilde{\mathbf{w}}$ 迅速衰减到零，所以它们在实际数值计算时的表现相同。

1. 插值过程 1

直接把边界点的扰动置零，也即在边界点上 $\tilde{\mathbf{w}} = 0$.

2. 插值过程 2

我们在边界给予所有扰动量 Dirichlet 边界条件: $\tilde{\mathbf{w}}|_{\partial\Omega} = 0$. 然后进行插值。

按照以下步骤，由内部点的点值插值边界点的点值：

1. 对于每一个边界点 P , 找到距其最近的 $P_0 \in \partial\Omega$ 使得 $\overline{PP_0} \perp \partial\Omega$ (在 P_0 点处).
2. 若 $\overline{PP_0}$ 与 r 方向夹角更小, 那么:
 - (a) 延长射线 $\overline{P_0P}$, 使得其与 z 线相交于 $P_i (i = 1, 2, \dots, m)$, 且该射线上 $P_0, P, P_1, P_2, \dots, P_m$ 为依次排列.
 - (b) 使用内部点构造 z 方向的 $m - 1$ 次插值多项式, 插值 $P_i (i = 1, \dots, m)$ 的值.
 - (c) 利用 P_i 处的点值和 P_0 处的边界条件, 构造 $m - 1$ 次插值多项式, 得到 P 点的值。
3. 若 $\overline{PP_0}$ 与 z 方向夹角更小, 那么类似对称地处理。

3.2 程序设计

3.2.1 计算流程

本程序使用的计算流程如算法3.1所示。

3.2.2 并行加速

由于数值求解 MHD 方程组的计算开销较大，如果仅使用单个 CPU 计算，单个任务的计算时间很长，因此我们编写了适用于集群的，支持 MPI 和 OpenMP 混合并行或纯 MPI 并行的 Fortran 代码，在 Linux 集群上运行。

计算区域划分在 rOz 截面内进行，我们采用笛卡尔虚拟拓扑排布 MPI 进程。当 rOz 平面的网格规模为 $N_r \times N_z$, r 方向分配 $N_{p,r}$ 个进程, z 方向分配 $N_{p,z}$ 个进程时, 总进程数为 $N_p = N_{p,r} \times N_{p,z}$, 每个进程的内部网格大小为 $\lceil \frac{N_r}{N_{p,r}} \rceil \times \lceil \frac{N_z}{N_{p,z}} \rceil$ (位于最后一行和最后一列的进程会适当减小网格大小), 并在 r 和 z 方向的每个

算法 3.1 RMHD 方程组平衡态扰动模拟的计算流程

```

Input: equilibrium  $\mathbf{w}_s = (\rho_s, \mathbf{u}_s, \mathbf{B}_s, p_s)^T$ , initial perturbation  $\tilde{\mathbf{w}}_0 = (\tilde{\rho}_0, \tilde{\mathbf{u}}_0, \tilde{\mathbf{B}}_0, \tilde{p}_0)^T$ 
Output: perturbation  $\tilde{\mathbf{w}}(t)$  at check points, kinetic energy  $E_k(t)$  at each time step
    /* initialization */
```

1 initialize mesh and MPI ;
 2 use qshep2d to interpolate equilibrium \mathbf{w}_s at mesh points ;
 3 apply perturbation $\tilde{\mathbf{w}}_0$;
 4 $t \leftarrow 0$;
 /* main loop for time marching */
 5 **while** $t < T_{\max}$ **do**
 6 output current time t and kinetic energy $E_k(t)$;
 7 **if** at check point **then**
 8 | output data $\tilde{\mathbf{w}}(t)$;
 9 **end**
 10 compute time step Δt using $\tilde{\mathbf{w}}(t)$;
 /* inner loop for Runge Kutta procedure, m_{RK} is the
 number of steps in RK */
 11 $\tilde{\mathbf{w}}^{(0)} \leftarrow \tilde{\mathbf{w}}$;
 12 **for** $i = 0$ to $m_{\text{RK}} - 1$ **do**
 13 | interpolate $\tilde{\mathbf{w}}^{(i)}$ at boundary points ;
 14 | compute spatial derivatives of $\tilde{\mathbf{w}}^{(i)}$;
 15 | compute $\tilde{\mathbf{J}}^{(i)}$ and $\tilde{\mathbf{E}}^{(i)}$ (including at boundary points);
 16 | compute spatial derivatives of $\tilde{\mathbf{J}}^{(i)}$ and $\tilde{\mathbf{E}}^{(i)}$;
 17 | compute time derivatives $\tilde{\mathbf{p}}^{(i)} = \tilde{L}(\tilde{\mathbf{w}}^{(i)}, \tilde{\mathbf{J}}^{(i)}, \tilde{\mathbf{E}}^{(i)})$;
 18 | $\tilde{\mathbf{w}}^{(i+1)} \leftarrow \sum_{k=0}^i (\alpha_{ik} \tilde{\mathbf{w}}^{(k)} + \Delta t \beta_{ik} \tilde{\mathbf{p}}^{(k)})$;
 19 **end**
 20 $\tilde{\mathbf{w}} \leftarrow \tilde{\mathbf{w}}^{(m_{\text{RK}})}$, $t \leftarrow t + \Delta t$;
 21 **end**

边界带有 2 层虚拟网格用于和附近的进程进行数据交换。混合 MPI 和 OpenMP 并行的策略是，为每个物理 CPU 分配一个 MPI 进程；在每个 CPU 内，使用基于共享内存的 OpenMP 并行加速；纯 MPI 并行的策略是，为每个物理核心分配一个 MPI 进程。

本算法的有限差分部分计算过程简单，直接手动实现这部分代码即可达到较高的效率。对于较复杂的 φ 方向的 Fourier 伪谱法求导过程，由于 φ 方向没有并行化分，我们使用 Intel MKL 商业数值库的 Dfti 系列子例程实现，其内部采用的是高度优化的 FFT 算法。

在实际的计算中，我们使用的集群 CPU 为 Intel(R) Xeon(R) E5-2680 v4，主频 2.40GHz，14 核 28 线程。当只使用单个 CPU，且 FFT 采用简单的 DFT 过程实现时，完成 $T = 7000$ 的计算大概需要 10 天的时间；当使用双 CPU 并行，且 FFT 过程采用 MKL 库的 Dfti 时，完成 $T = 7000$ 的计算大概需要 3 天的时间。因此，采用有效的数值库以及并行，可以大大提高计算效率。

第4章 数值结果与分析

4.1 数值结果

我们分别给出平衡态初值、极向双周期初始扰动的结果、极向单周期初始扰动的结果以及动能对数增长率拟合的结果，以观察不同的电阻和扰动初值下，动能对数增长率、进入线性演化阶段的时间以及线性演化阶段的扰动量的图像。这里，我们给出的扰动量的图像都是 $\varphi = 0$ 的截面的图像。

在下面的计算中，取网格规模为 $N_r = 256$, $N_z = 256$, $N_\varphi = 16$, 取数值耗散系数为 $D = \nu = \kappa = 10^{-8}$.

4.1.1 平衡态初值

我们给出使用 qshep2d 算法，对轴对称的平衡态的磁面格点数据在直角格点上插值的数值结果，如图4.1所示。

4.1.2 极向双周期扰动初值的模拟

我们取 $(m_0, n_0) = (2, 1)$ 作为初始扰动的参数，也即在极向 2 个周期，在环向 1 个周期，这样可以使得扰动量较快地进入线性演化阶段。我们分别取电阻系数 $\eta = 10^{-4.75}, 10^{-5.00}, 10^{-5.25}, 10^{-5.50}$ 进行求解，以拟合线性演化阶段的动能对数增长率 $\gamma = \frac{d}{dt} \ln E_k$ 与 η 的关系，并给出在 $T = 7000$ 时各物理量的扰动量的图像^①。

图4.2给出了在 $(m_0, n_0) = (2, 1)$ 的初始扰动下，初始的扰动量的散度。

1. 不同的电阻下扰动动能的演化

我们计算数值扰动动能的公式为：

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\int_D \rho \|\tilde{\mathbf{u}}\|^2 dr dz \right) r d\varphi \\ &\approx \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N_\varphi} \sum_{\substack{i,j \\ (r_i, z_j) \in D}} \rho_{i,j,k} \|\tilde{\mathbf{u}}_{i,j,k}\|^2 r_i \Delta r \Delta z \Delta \varphi \end{aligned} \quad (4.1)$$

初值扰动为 $(m_0, n_0) = (2, 1)$ 的 4 个算例的动能对数随时间变化如图4.3所示。由于数值耗散的存在，在长时间演化下，动能增长率会缓慢下降（在图4.3中也可以发现），所以对于每一个算例，我们只取其刚进入线性增长阶段的一个较短的时间段来进行增长率的最小二乘拟合，拟合选取的时间段和该时间段中利用最

^①我们取 $T = 7000$ 是因为此时刻下这 4 个算例都处于线性增长阶段

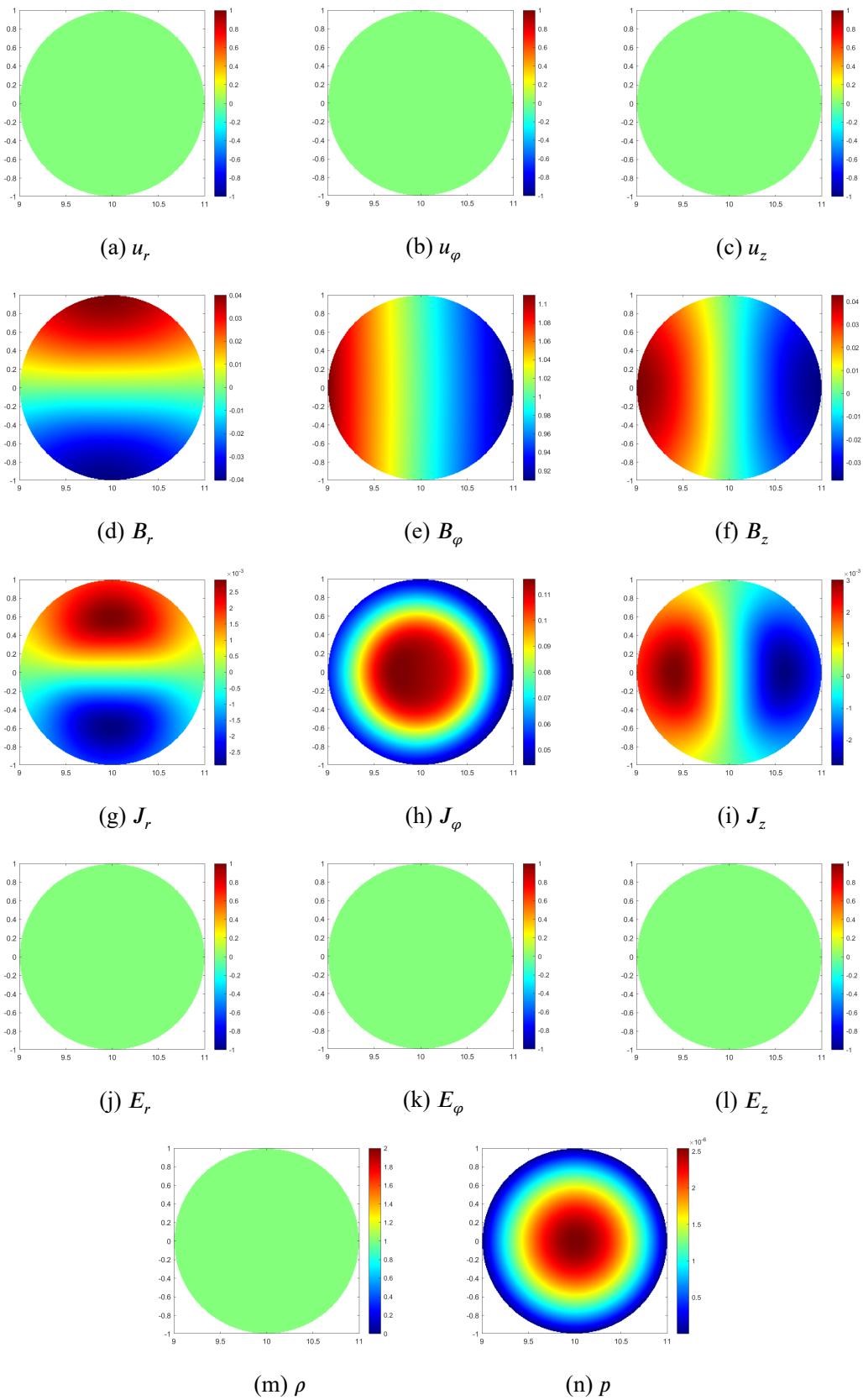
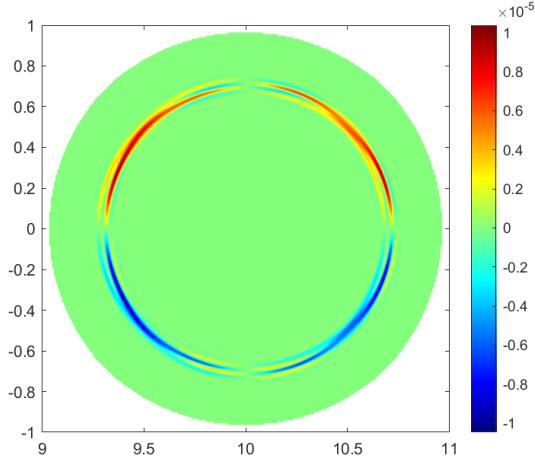


图 4.1 平衡态初值插值结果

图 4.2 初始磁场扰动量的散度 $\nabla \cdot \tilde{\mathbf{B}}|_{t=0}$

小二乘拟合得到的对数增长率如表4.1所示，动能对数增长率和电阻的关系拟合如图4.3所示，斜率拟合结果为 0.590677273306749.

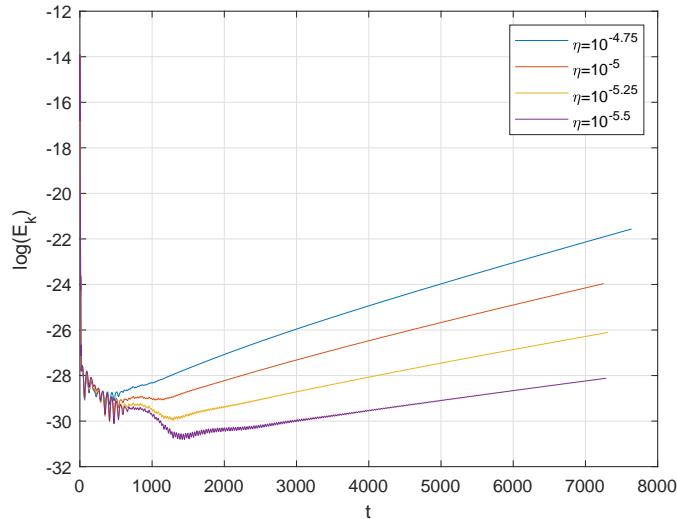


图 4.3 不同电阻的动能对数演化图像

表 4.1 拟合选取的时间段和该时间段的对数增长率

电阻 η	选用的时间段	最小二乘拟合的对数增长率 γ
$10^{-4.75}$	$T \in [1500, 2000]$	-2.911737223516729
$10^{-5.00}$	$T \in [2000, 3000]$	-3.041737304475744
$10^{-5.25}$	$T \in [3000, 4000]$	-3.191693315601624
$10^{-5.50}$	$T \in [4000, 5000]$	-3.353982947563726

2. $\eta = 10^{-4.75}, (m_0, n_0) = (2, 1), T = 7000$ 的扰动量

$\eta = 10^{-4.75}, (m_0, n_0) = (2, 1), T = 7000$ 的扰动量的物理图像以及磁场扰动量的散度由图4.5给出。

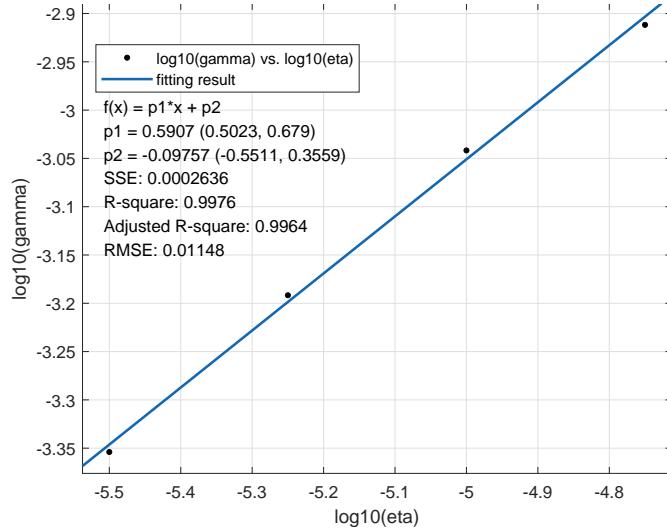


图 4.4 动能对数增长率与电阻关系的拟合结果

3. $\eta = 10^{-5.00}$, $(m_0, n_0) = (2, 1)$, $T = 7000$ 的扰动量

$\eta = 10^{-5.00}$, $(m_0, n_0) = (2, 1)$, $T = 7000$ 的扰动量的物理图像以及磁场扰动量的散度由图4.6给出。

4. $\eta = 10^{-5.25}$, $(m_0, n_0) = (2, 1)$, $T = 7000$ 的扰动量

$\eta = 10^{-5.25}$, $(m_0, n_0) = (2, 1)$, $T = 7000$ 的扰动量的物理图像以及磁场扰动量的散度由图4.7给出。

5. $\eta = 10^{-5.50}$, $(m_0, n_0) = (2, 1)$, $T = 7000$ 的扰动量

$\eta = 10^{-5.50}$, $(m_0, n_0) = (2, 1)$, $T = 7000$ 的扰动量的物理图像以及磁场扰动量的散度由图4.8给出。

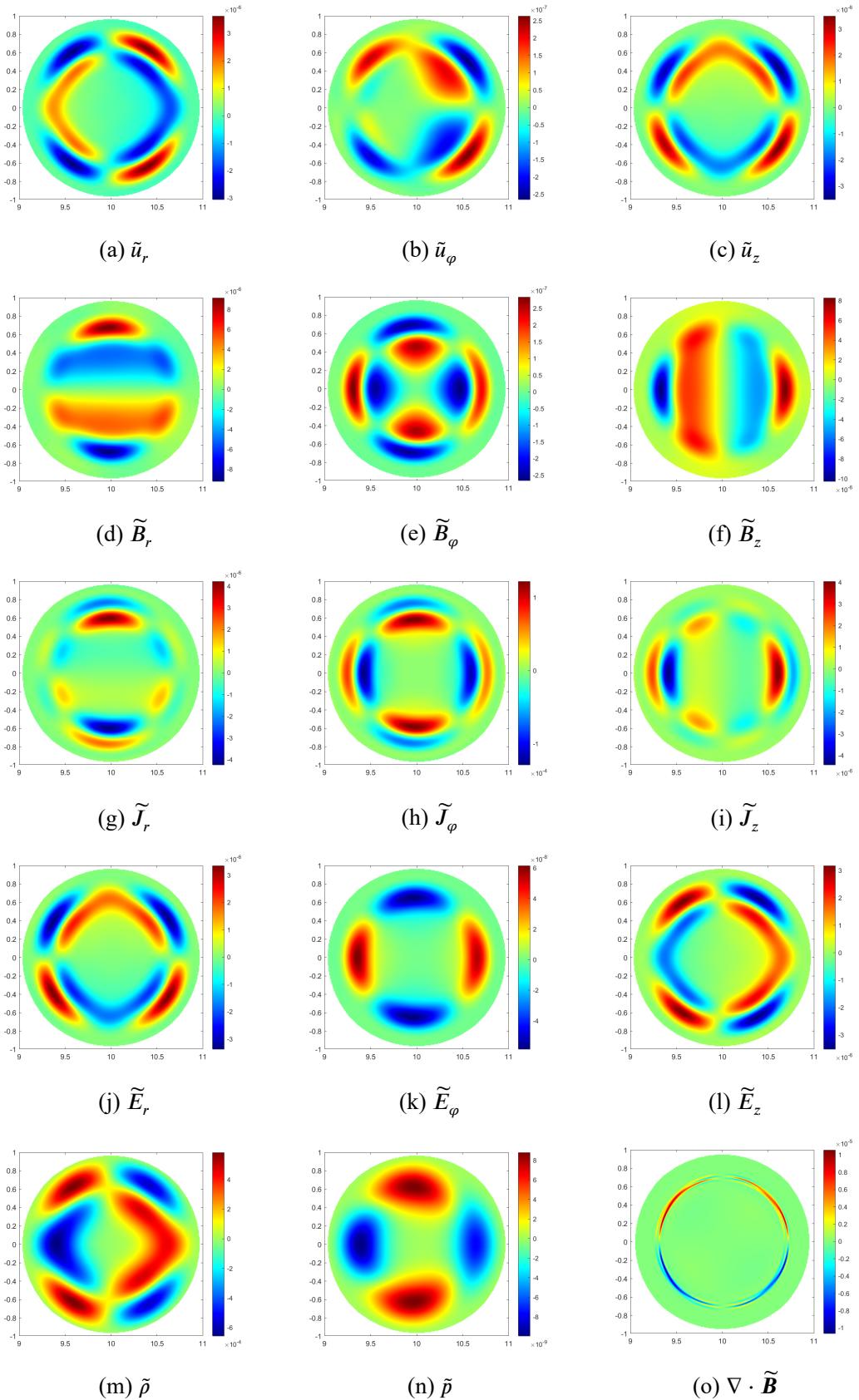
6. 长时间演化以达到饱和态

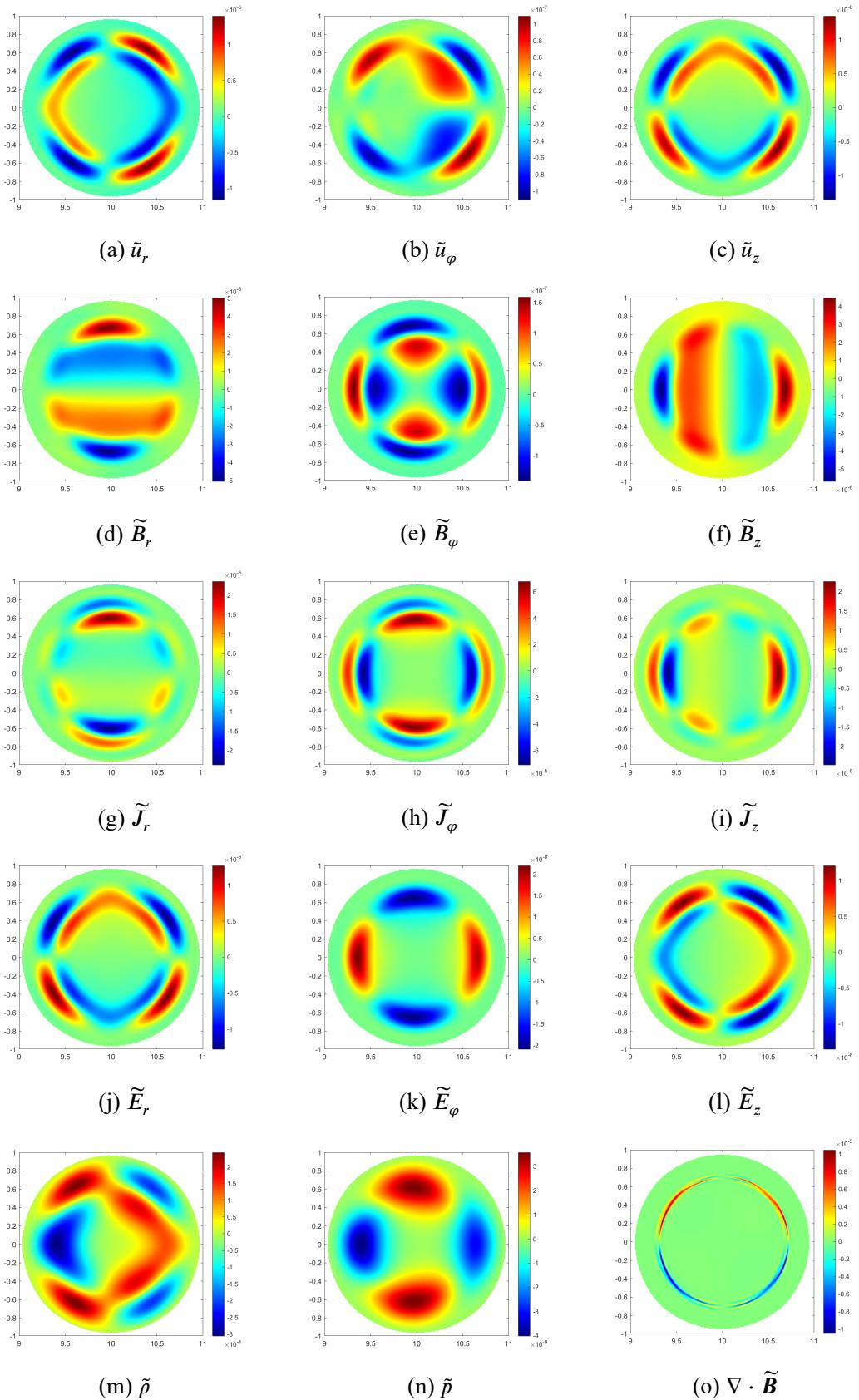
我们取 $\eta = 10^{-5.00}$, $(m_0, n_0) = (2, 1)$, 进行长时间求解, 取终止时间为 $T = 26653$ 进行输出。如图4.9所示, 在足够长时期的演化过后, 等离子体结束了线性演化阶段, 进入饱和态, 动能逐渐停止增长, 图4.10给出了终止时间下的各物理量饱和态的扰动量。

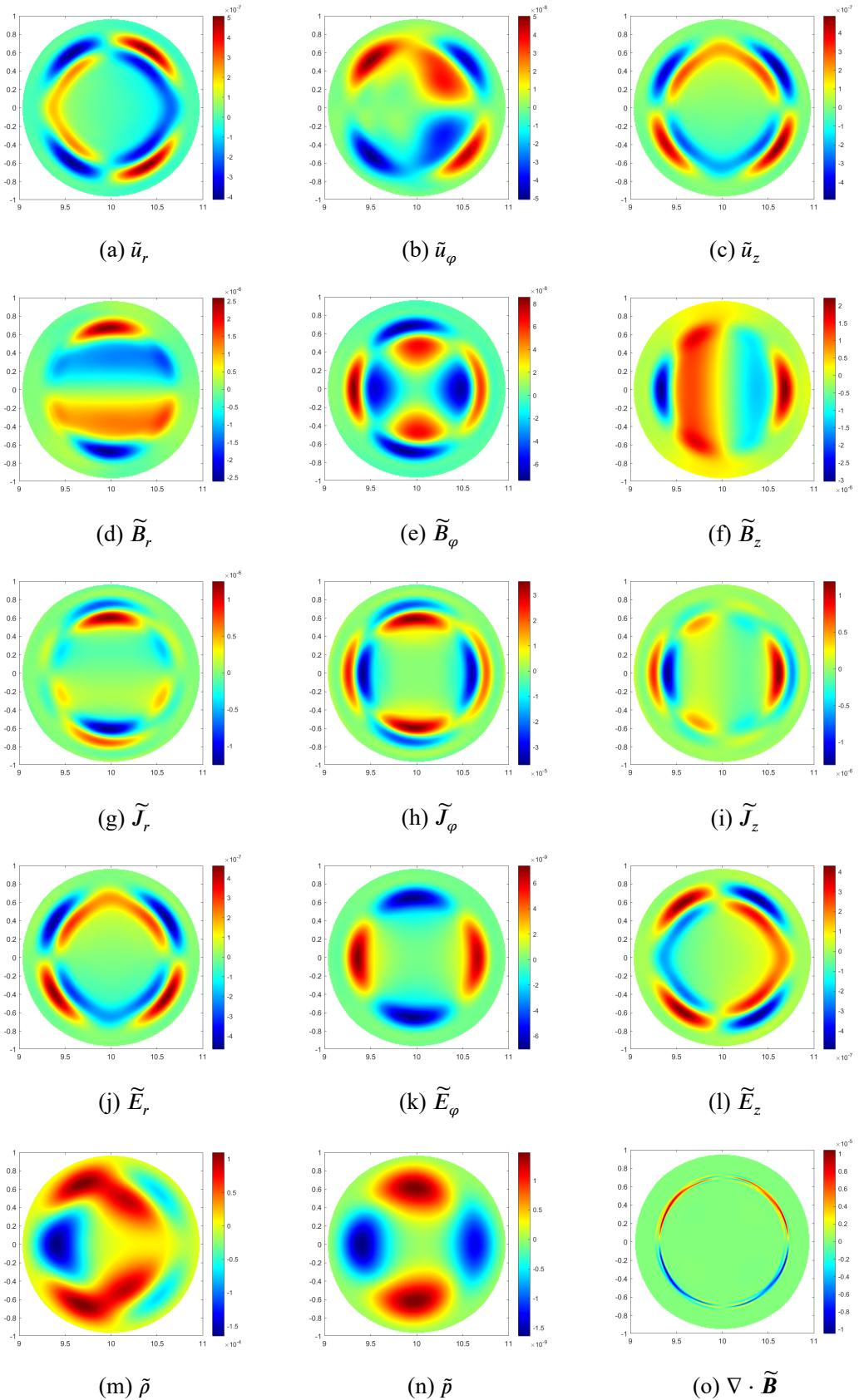
4.1.3 极向单周期扰动初值的模拟

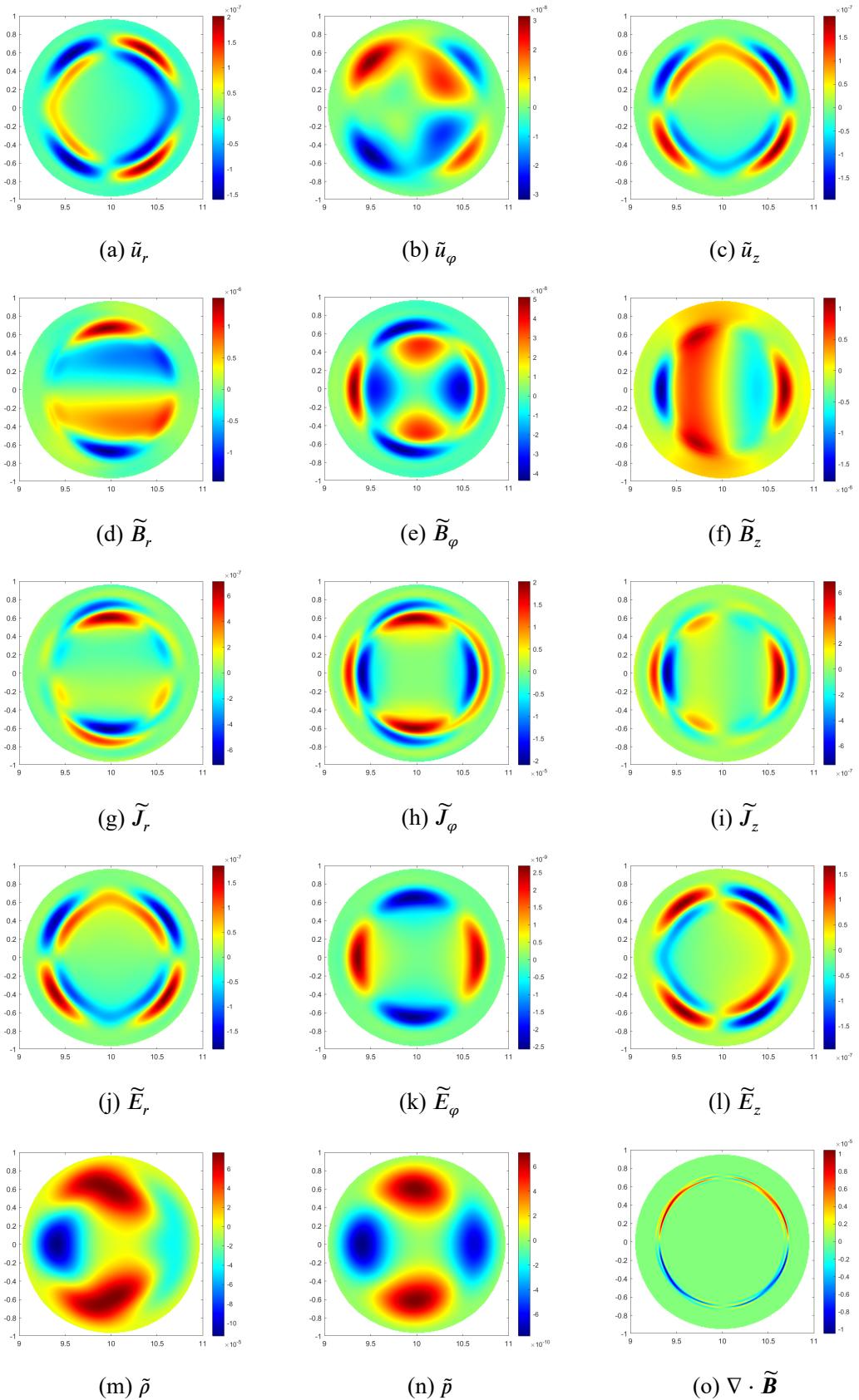
我们取 $(m_0, n_0) = (1, 1)$ 作为初始扰动的参数, 也即在极向 1 个周期, 在环向 1 个周期。取电阻系数 $\eta = 10^{-5.00}$ 进行求解, 用来与 $(m_0, n_0) = (2, 1)$ 的算例进行对比, 观察扰动的演化过程与扰动初始值之间的关系。

该算例的动能对数演化图像如图4.11所示。

图 4.5 $T = 7000$ 时电阻 $\eta = 10^{-4.75}$ 的扰动量计算结果

图 4.6 $T = 7000$ 时电阻 $\eta = 10^{-5.00}$ 的扰动量计算结果

图 4.7 $T = 7000$ 时电阻 $\eta = 10^{-5.25}$ 的扰动量计算结果

图 4.8 $T = 7000$ 时电阻 $\eta = 10^{-5.50}$ 的扰动量计算结果

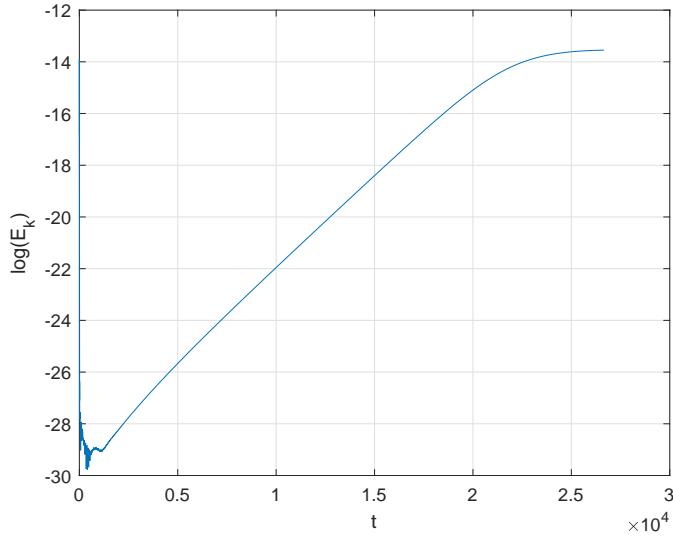


图 4.9 长时间演化的动能对数变化

1. $\eta = 10^{-5.00}$, $(m_0, n_0) = (1, 1)$, $T = 7000$ 的扰动量

$\eta = 10^{-5.00}$, $(m_0, n_0) = (1, 1)$, $T = 7000$ 的扰动量的物理图像以及磁场扰动量的散度由图4.12给出。

2. $\eta = 10^{-5.00}$, $(m_0, n_0) = (1, 1)$, $T = 17020$ 的扰动量

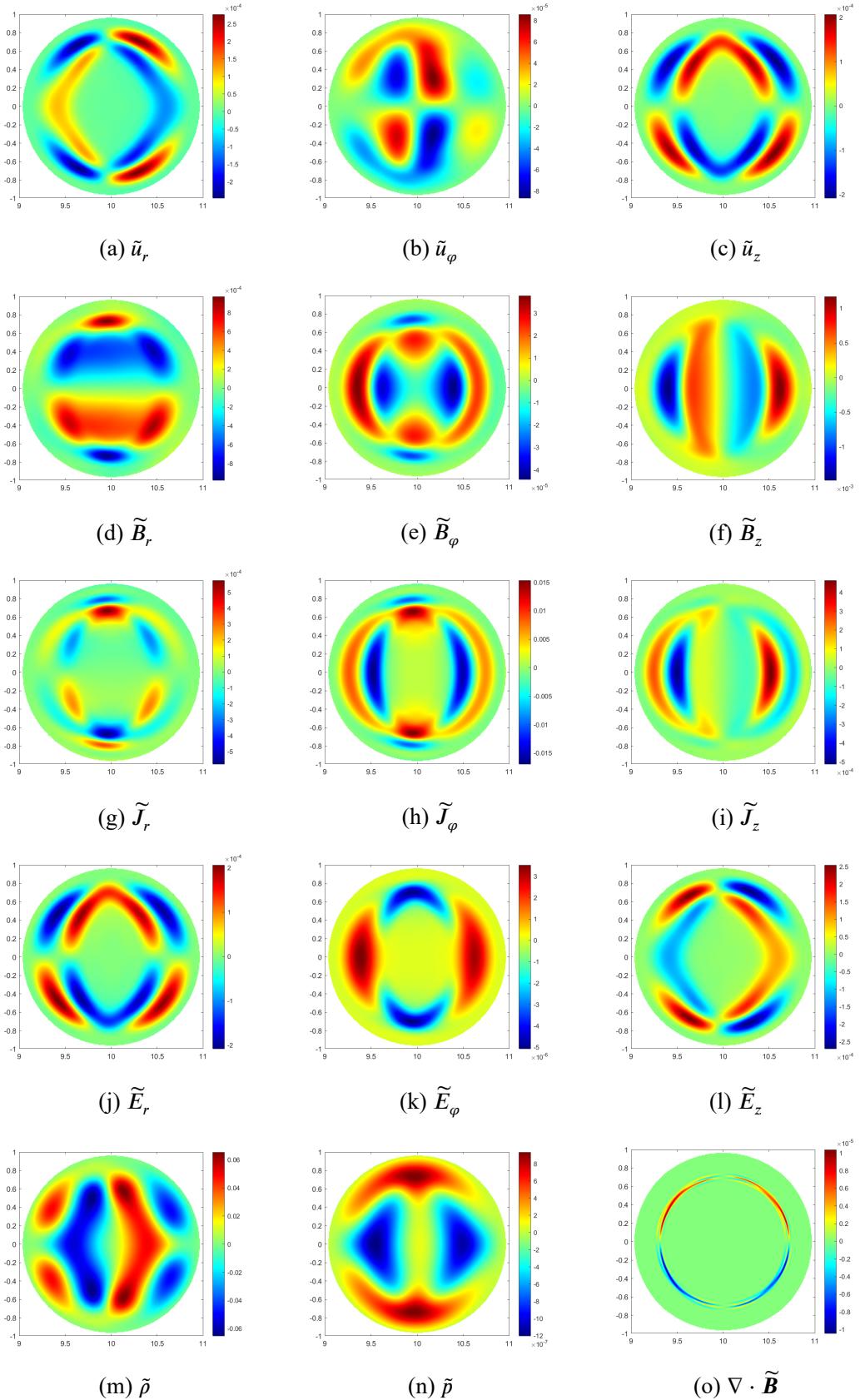
$\eta = 10^{-5.00}$, $(m_0, n_0) = (1, 1)$, $T = 7000$ 的扰动量的物理图像以及磁场扰动量的散度由图4.13给出。

4.2 结果分析

通过数值计算，我们可以观察到等离子体总体的趋势是先经过短暂的非线性期，进入线性演化期，最后进入饱和态。

首先，由于磁场数值散度在 MHD 计算中的重要性，我们考察我们代码对于磁场数值散度的保持效果。结合磁场扰动散度的数值结果图4.5o, 4.6o, 4.7o, 4.8o, 4.10o 以及初始的磁场散度图4.2进行对比，我们可以发现，磁场扰动量的数值解的散度在不同的电阻参数下、在不同的计算时长下，都与初始时刻保持相同。这说明了我们的代码成功实现了磁场散度不变性的保持。接下来，我们对结果的演化规律进行分析。

在最初的非线性阶段，如初始扰动极向单周期的算例在 $T = 7000$ 时的扰动图像4.12所示，扰动量依旧受到一部分已经显现极向双周期的特性（如 \tilde{u}_z , \tilde{B}_r , \tilde{B}_z , \tilde{J}_r , \tilde{E}_r ），剩下一部分仍然受到初始扰动周期数的影响。总体来说，扰动量正由初始扰动模式向该平衡态对应的特征扰动模式演化。同时，对于不同的初始扰动模式和不同的电阻参数，扰动量的非线性阶段的时间长短具有明显区别。对于相

图 4.10 $T = 26653$ 时电阻 $\eta = 10^{-5.00}$ 的扰动量计算结果

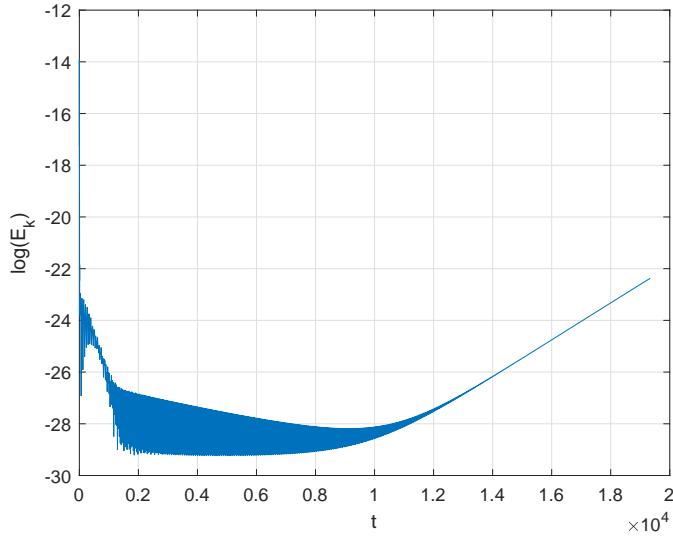


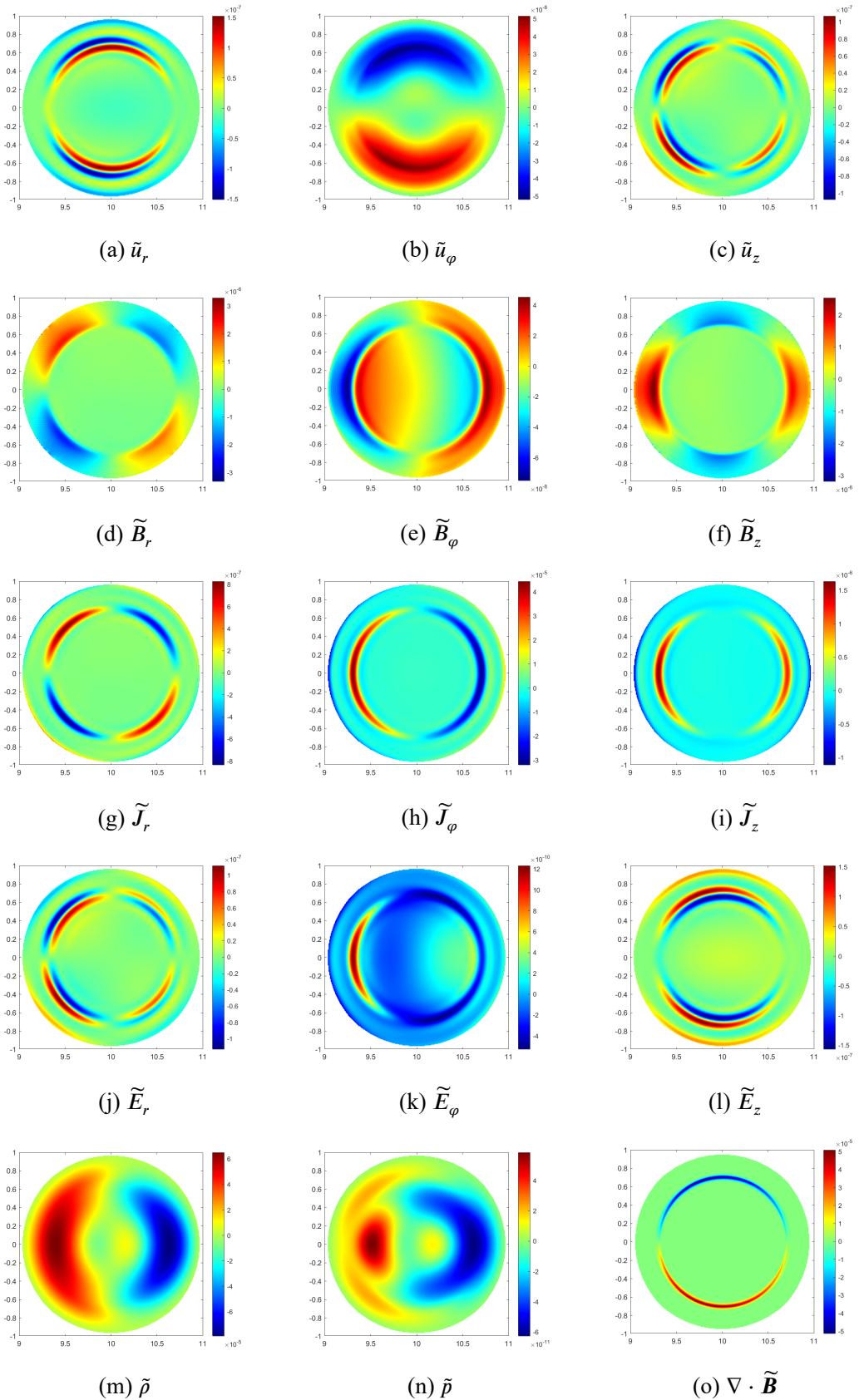
图 4.11 极向单周期扰动初值的动能对数演化图像

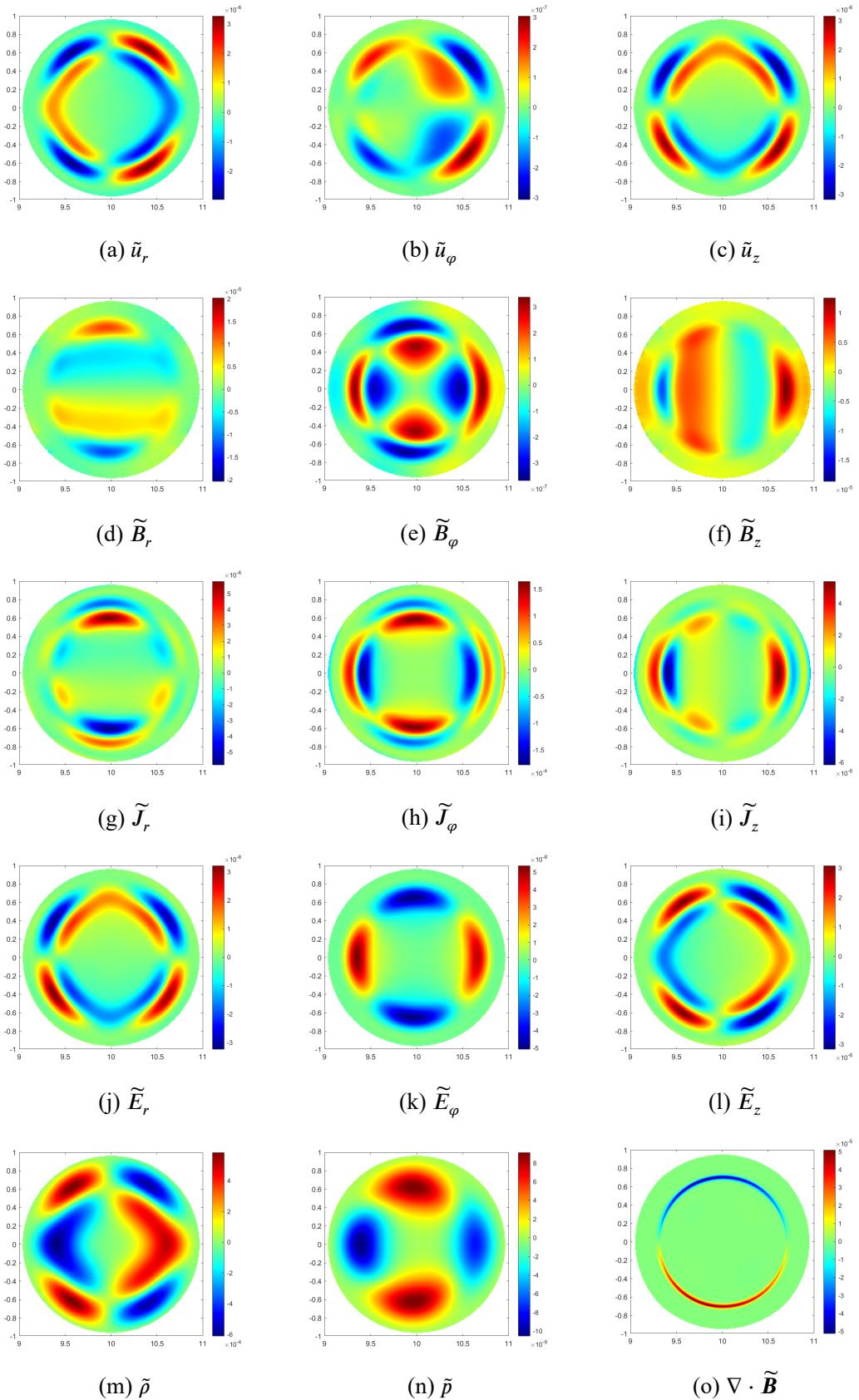
同的电阻系数 η , $(m_0, n_0) = (2, 1)$ 的初始扰动的非线性阶段比 $(m_0, n_0) = (1, 1)$ 的初始扰动的非线性阶段明显时间更短, 这与平衡态的特征模式为 $(2, 1)$ 的特性相符; 对于相同的初始扰动模式, 电阻系数 η 越小, 非线性阶段越长, 这与电阻撕裂模的电阻效应相符。

在进入线性演化阶段之后, 如图4.5, 4.6, 4.7, 4.8, 4.13所示, 扰动量都明显呈现极向双周期的特性, 扰动发展的模式相同, 扰动量的物理图像差别不大, 且与初始扰动的模式以及电阻参数选取无关, 这与 $(m, n) = (2, 1)$ 的平衡态的特性相符。在线性阶段中, 对于相同的初始扰动, 在同一时刻, 电阻越大的扰动量的双周期特性越明显; 对于电阻相同的算例, 时间越久, 扰动量的双周期特性越明显。同时, 线性增长阶段的动能对数增长率的拟合结果和理论结果 $\frac{3}{5}$ 的相对误差仅为 1.55%.

通过选取刚进入线性增长阶段的演化时间段, 进行动能对数增长率拟合, 如表4.3和表4.4, 我们给出的结果为 $\gamma \propto \eta^{0.5907}$, 指数值与理论值 $\frac{3}{5}$ [17,21-22] 的相对误差仅为 1.55%, 这部分的误差可能是数值耗散引起的。

最后, 我们把扰动模结构和扰动动能的计算结果和 CLT 代码^[23]以及 M3D-C1 代码^[24]的结果进行对比, 这两个代码的计算结果来自于文章^[18]。这里, 这三个代码使用了相同的平衡态, 特征为 $(m, n) = (2, 1)$, 也使用了相同的电阻系数 $\eta = 10^{-5}$, 但是 CLT 和 M3D-C1 代码的初始扰动表达式作者都没有显式给出, 而且作者说明了 CLT 和 M3D-C1 使用的初始扰动是不同的, 在这种情况下, 这三个代码得到的结果都几乎相同, 这验证了这三个代码优异的性能。线性增长阶段

图 4.12 $T = 7000$ 时电阻 $\eta = 10^{-5.00}$ 的扰动量计算结果

图 4.13 $T = 17020$ 时电阻 $\eta = 10^{-5.00}$ 的扰动量计算结果

的模结构 \tilde{E}_φ 对比由图4.14给出；饱和态的模结构 \tilde{E}_φ 对比由图4.15给出^①；动能增长率拟合的结果对比由图4.16给出；计算达到饱和态的过程的动能结果对比由图4.17给出^②。由对比结果可以发现，我们的模拟结果和 CLT 代码以及 M3D-C1 代码都非常接近，这验证了我们代码的有效性与正确性。

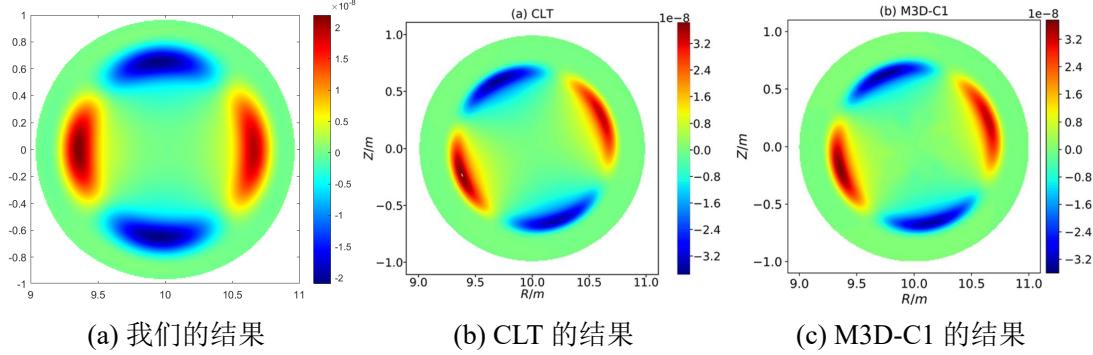


图 4.14 线性演化阶段的模结构对比

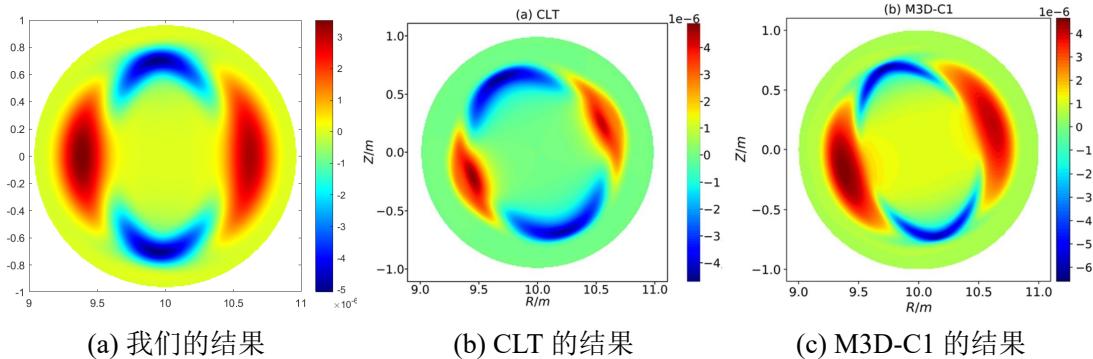


图 4.15 饱和阶段的模结构对比

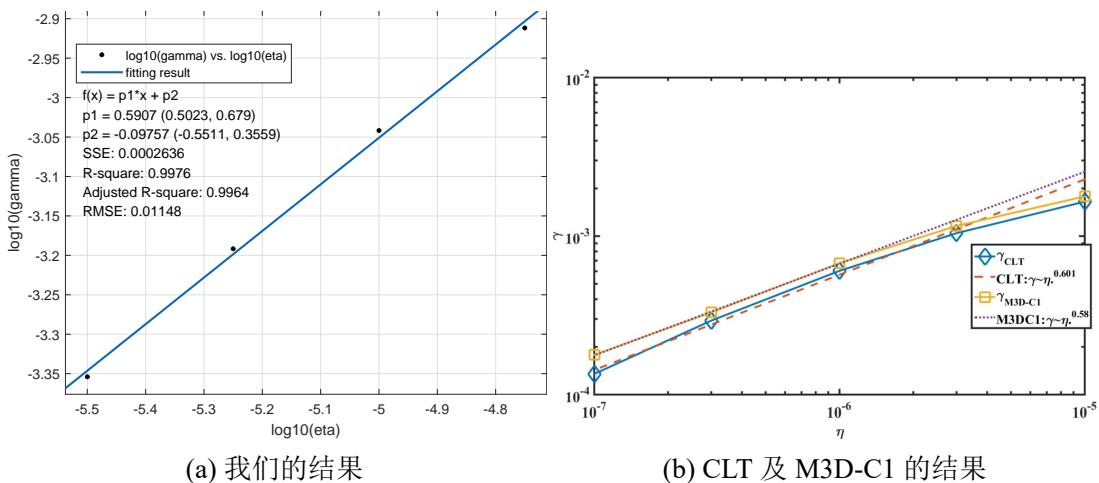


图 4.16 动能对数增长率拟合对比

^①这里 CLT 和 M3D-C1 给出的结果选取的 φ 截面与我们不同，所以与我们的结果相差一个旋转角。

^②由于初始扰动不同，这里三个代码进入饱和态的实际时间是不同的，M3D-C1 的结果被原文作者在时间上进行了平移。

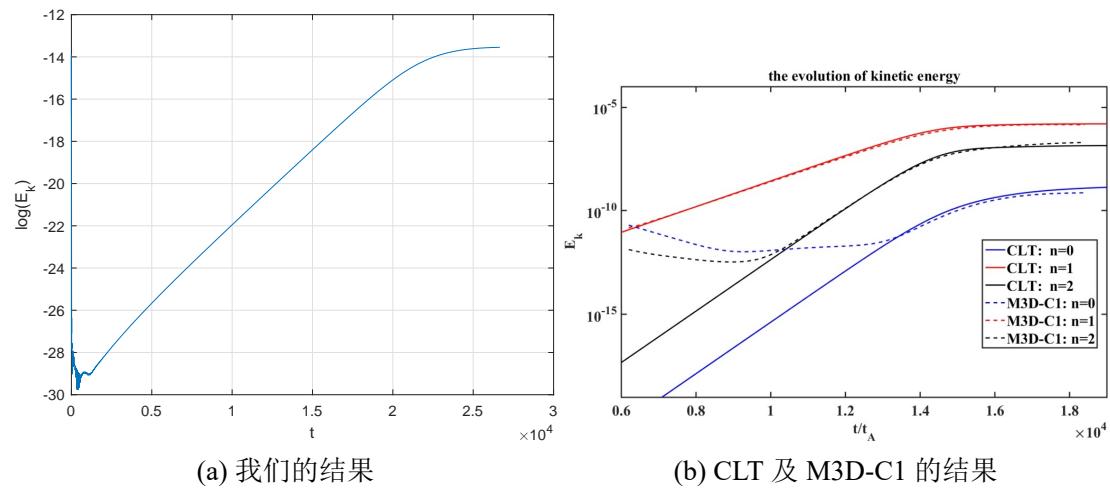


图 4.17 进入饱和态的动能对比

第 5 章 总结与展望

5.1 总结

对于环几何托卡马克聚变装置中的等离子体平衡态演化问题，我们采用磁流体动力学 (MHD) 模型进行数值模拟。首先，我们回顾了不同的 MHD 方程组，并分析了它们各自在数值计算中的优缺点。随后，我们对于托卡马克等离子体的 RMHD 不稳定性问题，选择合适的 MHD 方程组，基于其非守恒形式的带电阻效应的扰动方程组，开发了一套在柱坐标系下的混合有限差分-Fourier 伪谱法的 MPI-OpenMP 并行计算代码，其在 rOz 平面使用有限差分方法并且进行并行计算区域分割，在 φ 方向使用 Fourier 伪谱法，时间离散使用显式 RK4 方法，并且它可以保持磁场数值散度不变。最后，我们使用托卡马克数值模拟的最经典的算例之一—电阻撕裂模算例对我们的代码进行测试。我们选用了 $(m, n) = (2, 1)$ 特征的平衡态，并施加了不同的扰动模式和不同的电阻系数以观察动能对数增长率和电阻的关系，以及不同的初始扰动对于线性阶段扰动演化模式的影响。我们的代码保持了磁场数值散度不变，其动能对数增长率拟合结果与解析理论结果相符，线性增长阶段的扰动模式与初始扰动无关，都能到达最终的饱和态。同时，通过与 CLT 和 M3D-C1 代码模拟结果的对比，我们的代码在线性阶段和饱和态的模结构上和上述两个代码高度一致。这些都验证了我们代码的有效性和正确性。

5.2 展望

我们目前的代码有进一步的发展空间。

在磁场数值散度上，目前我们的代码采用中心差分方法使得数值散度不变，今后我们希望改进我们的代码，使其能够在计算时有效降低磁场的散度，例如使用广义拉格朗日乘子 (GLM-MHD) 方法^[25]，抑或是直接消去磁场数值散度，例如使用受限运输 (CT) 方法^[26]。这些都可以使得模拟更加稳定、更加精准。

在空间离散上，目前我们基于非守恒形式进行开发，守恒量的守恒性没有保证，未来可以把代码转为基于守恒型方程组，并采用 WENO 系列格式^[27]进行离散，从而保持守恒性，提高长时间计算精度，并允许间断解的出现。同时，如何在 MHD 方程组的守恒有限差分方法中保持正压强和正密度也是一个极具挑战

性的问题。目前 Euler 方程组和 Navier-Stokes 方程组的高阶保正守恒有限差分方法(主要是使用的限制器)及其证明已经被提出^[28-29],但是高维 MHD 方程组目前只有间断有限元和有限体积方法存在可证明的保正方法(除了限制器,还必须使用特定的多项式空间以及方程形式)^[12]—据我们的调研,MHD 方程组的守恒有限差分方法到目前为止在除了一维的情形下没有可证明的保正方法。因此,开发 MHD 方程组的高维守恒型高阶有限差分格式是一个有价值而又有挑战的问题,值得我们研究。

在时间离散上,目前使用的标准的 4 阶 Runge Kutta 方法不是单步 Euler 方法的凸组合,不能保持强稳定性。未来我们可以将其替换为强稳定性保持的 Runge Kutta(SSPRK) 系列方法^[30],在提高精度的同时保持各种(半)范数的稳定性(例如 TVD)、保持正压强和正密度等等。

在代码的程序实现上,由于我们的代码中逻辑运算较少,为了大幅提高计算效率,未来我们可能会将代码由 CPU 集群计算改为 GPU 集群计算,利用 GPU 优异的浮点性能提升计算效率。

在模拟的问题上,我们的代码目前只有宏观磁流体现象的模拟,不能描述微观和高频现象。因此我们可以向代码中加入粒子模型的部分,形成混合模拟方法。对背景等离子采用磁流体模拟,对快粒子采用粒子动理学模拟。

总之,我们的代码还有很大的提升空间,我们相信未来它的性能将会更加优异,应用范围将会更加广阔。

参 考 文 献

- [1] FREIDBERG J P. Plasma physics and fusion energy[M/OL]. Cambridge: Cambridge University Press, 2007. DOI: 10.1017/CBO9780511755705.
- [2] WESSON J. International series of monographs on physics, 149: Tokamaks[M]. 4th ed. Oxford University Press, 2011.
- [3] 郑坚. 等离子体物理理论[Z]. 中国科学技术大学, 2009.
- [4] CHANG Z, FREDRICKSON E D, CALLEN J D, et al. Transport effects of low (m,n) mhd modes on tftr supershots[J/OL]. Nuclear Fusion, 1994, 34(10): 1309-1336. DOI: 10.1088/0029-5515/34/10/I03.
- [5] GÜNTER S, GUDE A, MARASCHEK M, et al. Influence of neoclassical tearing modes on energy confinement[J/OL]. Plasma Physics and Controlled Fusion, 1999, 41(6): 767-774. DOI: 10.1088/0741-3335/41/6/306.
- [6] SNIPES J A, CAMPBELL D J, HENDER T C, et al. Plasma stored energy and momentum losses during large MHD activity in JET[J/OL]. Nuclear Fusion, 1990, 30(2): 205-218. https://doi.org/10.1088/0029-5515/30/2/002.
- [7] CARRERAS B, WADDELL B V, HICKS H R, et al. Comments on "simulation of large magnetic islands: A possible mechanism for a major tokamak disruption"[J/OL]. Phys. Rev. A, 1978, 18: 2732-2734. https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.18.2732.
- [8] FREIDBERG J P. Ideal mhd[M/OL]. Cambridge University Press, 2014. DOI: 10.1017/CBO9780511795046.
- [9] BRACKBILL J U, BARNES D C. The effect of nonzero $\nabla \cdot \mathbf{b}$ on the numerical solution of the magnetohydrodynamic equations[J/OL]. Journal of Computational Physics, 1980, 35(3): 426-430. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0021999180900790. DOI: https://doi.org/10.1016/0021-9991(80)90079-0.
- [10] TÓTH G. The $\nabla \cdot \mathbf{b} = 0$ constraint in shock-capturing magnetohydrodynamics codes[J/OL]. Journal of Computational Physics, 2000, 161(2): 605-652. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999100965197. DOI: https://doi.org/10.1006/jcph.2000.6519.
- [11] WU K. doi:10.1137/18m1168017[J/OL]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2018, 56(4): 2124-2147. https://doi.org/10.1137/18M1168017.
- [12] WU K, SHU C W. A provably positive discontinuous galerkin method for multidimensional ideal magnetohydrodynamics[J/OL]. SIAM Journal on Scientific Computing, 2018, 40(5): B1302-B1329. https://doi.org/10.1137/18M1168042.
- [13] GODUNOV S K. Symmetric form of the equations of magnetohydrodynamics[Z]. 1998.

- [14] ROE P L, BALSARA D S. Notes on the eigensystem of magnetohydrodynamics[J/OL]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 1996, 56(1): 57-67. <https://doi.org/10.1137/S003613999427084X>.
- [15] JANHUNEN P. A positive conservative method for magnetohydrodynamics based on hll and roe methods[J/OL]. Journal of Computational Physics, 2000, 160(2): 649-661. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999100964799>. DOI: <https://doi.org/10.1006/jcph.2000.6479>.
- [16] DELLAR P J. A note on magnetic monopoles and the one-dimensional mhd riemann problem [J/OL]. Journal of Computational Physics, 2001, 172(1): 392-398. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999101968159>. DOI: <https://doi.org/10.1006/jcph.2001.6815>.
- [17] RUTHERFORD P H. Nonlinear growth of the tearing mode[J/OL]. Physics of Fluids, 1973, 16(11): 1903-1908. DOI: [10.1063/1.1694232](https://doi.org/10.1063/1.1694232).
- [18] ZHANG W, JARDIN S C, MA Z W, et al. Linear and nonlinear benchmarks between the clt code and the m3d-c1 code for the 2/1 resistive tearing mode and the 1/1 resistive kink mode [J/OL]. Computer Physics Communications, 2021, 269: 108134. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0010465521002460>. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2021.108134>.
- [19] CHENG C Z, CHANCE M S. Nova: A nonvariational code for solving the mhd stability of axisymmetric toroidal plasmas[J/OL]. Journal of Computational Physics, 1987, 71(1): 124-146. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0021999187900234>. DOI: [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(87\)90023-4](https://doi.org/10.1016/0021-9991(87)90023-4).
- [20] RENKA R J. Algorithm 660: Qshep2d: Quadratic shepard method for bivariate interpolation of scattered data[J/OL]. ACM Trans. Math. Softw., 1988, 14(2): 149-150. <https://doi.org/10.1145/45054.356231>.
- [21] FURTH H P, RUTHERFORD P H, SELBERG H. Tearing mode in the cylindrical tokamak [J/OL]. Physics of Fluids, 1973, 16(7): 1054-1063. DOI: [10.1063/1.1694467](https://doi.org/10.1063/1.1694467).
- [22] WEI C C. Finite-resistivity instabilities of a sheet pinch[J]. Chinese Journal of Physics, 1968, 6(2): 88.
- [23] WANG S, MA Z W. Influence of toroidal rotation on resistive tearing modes in tokamaks [J/OL]. Physics of Plasmas, 2015, 22(12): 122504. <https://doi.org/10.1063/1.4936977>.
- [24] JARDIN S C, FERRARO N, LUO X, et al. The m3d-c1 approach to simulating 3d 2-fluid magnetohydrodynamics in magnetic fusion experiments[J/OL]. Journal of Physics: Conference Series, 2008, 125: 012044. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/125/1/012044>.
- [25] DERIGS D, WINTERS A R, GASSNER G J, et al. Ideal glm-mhd: About the entropy consistent nine-wave magnetic field divergence diminishing ideal magnetohydrodynamics equations

- [J/OL]. Journal of Computational Physics, 2018, 364: 420-467. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999118301463>. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2018.03.002>.
- [26] CHRISTLIEB A J, ROSSMANITH J A, TANG Q. Finite difference weighted essentially non-oscillatory schemes with constrained transport for ideal magnetohydrodynamics[J/OL]. Journal of Computational Physics, 2014, 268: 302-325. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999114001703>. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2014.03.001>.
- [27] SHU C W. Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes [J/OL]. Acta Numerica, 2020, 29: 701–762. DOI: 10.1017/S0962492920000057.
- [28] ZHANG X, SHU C W. Positivity-preserving high order finite difference weno schemes for compressible euler equations[J/OL]. Journal of Computational Physics, 2012, 231(5): 2245-2258. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999111006759>. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2011.11.020>.
- [29] FAN C, ZHANG X, QIU J. Positivity-preserving high order finite difference weno schemes for the compressible navier-stokes equations[EB/OL]. <https://www.math.purdue.edu/~zhan1966/research/paper/WENOFDNS.pdf>.
- [30] SUN Z, SHU C W. Strong stability of explicit runge–kutta time discretizations[J/OL]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2019, 57(3): 1158-1182. <https://doi.org/10.1137/18M122892X>.