



核聚变中磁流体平衡态演化的数值模拟

姓名： 吴越

学号： PB19000193

导师： 张梦萍 教授

中国科学技术大学 少年班学院

2022 年 12 月 30 日



- ① 研究背景
- ② 核聚变中的平衡态演化问题
- ③ 数值方法与实现
- ④ 计算结果
- ⑤ 总结展望



① 研究背景

② 核聚变中的平衡态演化问题

③ 数值方法与实现

④ 计算结果

⑤ 总结展望



核聚变—清洁能源

- ▶ 特点：高效、安全、环保
- ▶ 方式：高温 (等离子体)、
磁约束
- ▶ 装置：托卡马克
(tokamak)、仿星器
(stellarator)
- ▶ 问题：材料；平衡态、稳
定性 (电阻撕裂模)



等离子体的数学建模

核聚变—清洁能源

- ▶ 特点：高效、安全、环保
- ▶ 方式：高温 (等离子体)、磁约束
- ▶ 装置：托卡马克 (tokamak)、仿星器 (stellarator)
- ▶ 问题：材料；平衡态、稳定性 (电阻撕裂模)

- ▶ 单粒子模型 (模拟每个粒子): Klimontovich 方程组
- ▶ 动理学模型 (相空间、微观): Vlasov-Poisson 方程组
- ▶ 磁流体模型 (大尺度、宏观): MHD(magnetohydrodynamics) 方程组



等离子体的数学建模

- ▶ 单粒子模型 (模拟每个粒子): Klimontovich 方程组
- ▶ 动理学模型 (相空间、微观): Vlasov-Poisson 方程组
- ▶ 磁流体模型 (大尺度、宏观): MHD(magnetohydrodynamics) 方程组

等离子体的数值模拟

- ▶ 特点: 高效、安全、环保
- ▶ 方式: 高温 (等离子体)、磁约束
- ▶ 装置: 托卡马克 (tokamak)、仿星器 (stellarator)
- ▶ 问题: 材料; 平衡态、稳定性 (电阻撕裂模)

- ▶ 粒子模拟: PIC(particle in cell) 方法
- ▶ PDE 模拟 (动理学、磁流体): 有限差分、有限体积、(间断) 有限元、谱方法
- ▶ 混合模拟



1 研究背景

2 核聚变中的平衡态演化问题

- MHD 方程组 ■ 初边值条件

3 数值方法与实现

4 计算结果

5 总结展望



1 研究背景

2 核聚变中的平衡态演化问题

- MHD 方程组 ■ 初边值条件

3 数值方法与实现

4 计算结果

5 总结展望



考虑理想可压 MHD 方程组：

Mass: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$ (1a)

Momentum: $\frac{D}{Dt}(\rho \mathbf{u}) = \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla p$ (1b)

Energy (adiabatic): $\frac{D}{Dt} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0$ (1c)

Ohm's law: $\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$ (1d)

Maxwell: $\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J} \end{cases}$ (1e)

div-free: $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ (1f)

其中, $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla$ 是随体时间导数算子。



理论上，磁场的无散度条件 (1f) 只要在 $t = 0$ 满足，就在 $t > 0$ 满足。

数值计算中的散度问题

- ▶ 数值散度的定义？
- ▶ 格式保散度？



理论上，磁场的无散度条件 (1f) 只要在 $t = 0$ 满足，就在 $t > 0$ 满足。

数值计算中的散度问题

- ▶ 数值散度的定义？
- ▶ 格式保散度？

磁场散度影响

- ▶ 导致非物理的结果
- ▶ 引起负压强 (Kailiang WU, 2018)



理论上，磁场的无散度条件 (1f) 只要在 $t = 0$ 满足，就在 $t > 0$ 满足。

数值计算中的散度问题

- ▶ 数值散度的定义？
- ▶ 格式保散度？

磁场散度影响

- ▶ 导致非物理的结果
- ▶ 引起负压强 (Kailiang WU, 2018)

因此，计算时会采用“不同的”MHD 方程组。只有当满足条件 (1f) 时，这些方程组在连续意义下均等价于 (1)。



$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \mathbf{m} \\ \mathbf{B} \\ E \end{pmatrix} + \nabla \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho} \mathbf{m} \mathbf{m}^T + \left(p + \frac{\|\mathbf{B}\|^2}{2} \right) \mathbf{I}_{(3)} - \mathbf{B} \mathbf{B}^T \\ \mathbf{u} \mathbf{B}^T - \mathbf{B} \mathbf{u}^T \\ \left(E + p + \frac{\|\mathbf{B}\|^2}{2} \right) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} \end{pmatrix} + (\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{S}_c = \mathbf{0} \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{B} \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \\ (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \frac{1}{\rho} (\mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla p) \\ \nabla \times \mathbf{E} \\ \mathbf{u} \cdot \nabla p + \gamma p \nabla \cdot \mathbf{u} \end{pmatrix} + (\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{S}_n = \mathbf{0} \\ \mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B} \\ \mathbf{E} = \mathbf{B} \times \mathbf{u} \end{array} \right. \quad (3)$$

$$E = \frac{1}{2} \rho \|\mathbf{u}\|^2 + \frac{p}{\gamma-1} + \frac{1}{2} \|\mathbf{B}\|^2, \quad \mathbf{m} = \rho \mathbf{u}$$



方程组	S_c	S_n
1 (standard)	$(0, \mathbf{0}, \mathbf{0}, 0)^T$	$\left(0, -\frac{\mathbf{B}}{\rho}, \mathbf{0}, (\gamma - 1)(\mathbf{B} \cdot \mathbf{u})\right)^T$
2 (modified)	$(0, \mathbf{B}, \mathbf{0}, 0)^T$	$(0, \mathbf{0}, \mathbf{0}, 0)^T$
3 (Powell)	$(0, \mathbf{B}, \mathbf{u}, \mathbf{B} \cdot \mathbf{u})^T$	$(0, \mathbf{0}, \mathbf{u}, 0)^T$
4 (Janhunen)	$(0, \mathbf{0}, \mathbf{u}, 0)^T$	$\left(0, -\frac{\mathbf{B}}{\rho}, \mathbf{u}, 0\right)^T$

方程组	1	2	3	4
磁场散度 $\nabla \cdot \mathbf{B}$	不变	不变	对流	对流
"parallel force" $(\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B}$	存在	不存在	不存在	存在
动量 \mathbf{m}	守恒	不守恒	不守恒	守恒
能量 E	守恒	守恒	不守恒	守恒
方程分类	弱双曲	弱双曲	对称双曲	弱双曲
伽利略不变性	否	否	是	是
保绝热过程	否	是	是	是



我们采用基于扰动量的非守恒形式的电阻 MHD 方程组，由方程组 2 加入电阻和耗散项得到。

$$\begin{cases}
 \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \tilde{\rho} \\ \tilde{\mathbf{u}} \\ \tilde{\mathbf{B}} \\ \tilde{p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{u} \cdot \nabla \tilde{\rho} + \rho \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} \\ \mathbf{u} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}} + \frac{\nabla \tilde{p}}{\rho} \\ \nabla \times \tilde{\mathbf{E}} \\ \gamma p \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u} \cdot \nabla \tilde{p} \end{pmatrix} \\
 + \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \rho_s + \tilde{\rho} \nabla \cdot \mathbf{u}_s \\ \left(\tilde{\mathbf{u}} + \frac{\tilde{\rho}}{\rho} \mathbf{u}_s \right) \cdot \nabla \mathbf{u}_s + \frac{\tilde{\mathbf{B}} \times \mathbf{J}_s + \mathbf{B} \times \tilde{\mathbf{J}}}{\rho} \\ 0 \\ \gamma \tilde{p} \nabla \cdot \mathbf{u}_s + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla p_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D \Delta \tilde{\rho} \\ \nu \Delta \tilde{\mathbf{u}} \\ 0 \\ \kappa \Delta \tilde{p} \end{pmatrix} \\
 \tilde{\mathbf{J}} = \nabla \times \tilde{\mathbf{B}} \\
 \tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\mathbf{B}} \times \mathbf{u}_s + \mathbf{B} \times \tilde{\mathbf{u}} + \eta \tilde{\mathbf{J}}
 \end{cases} \quad (4)$$



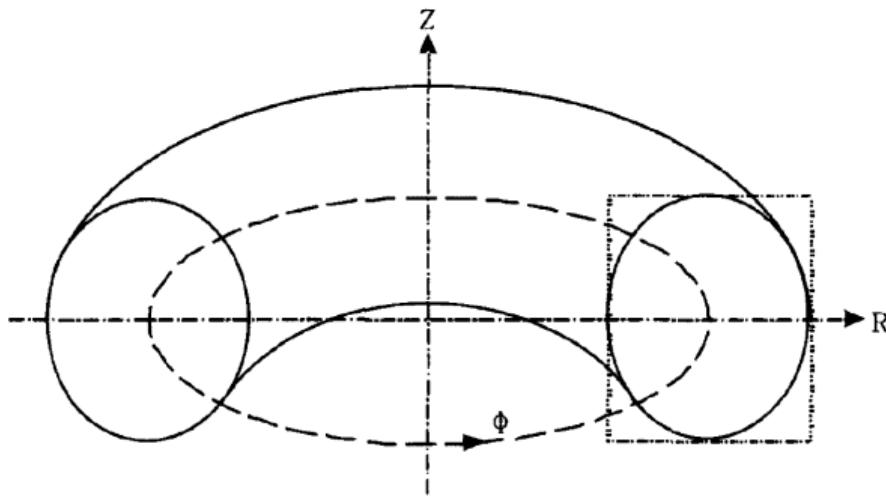
理由

- ▶ 机器精度有限
- ▶ 需要消除 parallel force
- ▶ 背景对流速度为 0
- ▶ 容易设计保持数值散度的格式，如 Yee 格式
- ▶ 守恒形式变量的容许集非凸，非守恒形式变量的容许集凸
- ▶ 撕裂模问题不出现激波



计算区域

$$(r, \varphi, z) \in \left\{ (r, \varphi, z) \mid (r - R_0)^2 + z^2 < a_0^2, \varphi \in [0, 2\pi) \right\} \quad (5)$$



图·计算区域示意图



1 研究背景

2 核聚变中的平衡态演化问题

- MHD 方程组 ■ 初边值条件

3 数值方法与实现

4 计算结果

5 总结展望



平衡态 $\mathbf{w}_s = (\rho_s, \mathbf{u}_s, \mathbf{B}_s, p_s)^T$ 是理想可压 MHD 方程的 $(m_0, n_0) = (2, 1)$ 的轴对称特征解。对此平衡态施加小扰动，并对扰动加入电阻系数为 η 的电阻效应后，扰动量 $\tilde{\mathbf{w}}$ 会先经过短暂的非线性阶段，进入线性演化阶段，然后到达饱和阶段。由解析理论知，在线性增长阶段时，扰动动能的对数增长率

$$\gamma = \frac{d}{dt} \ln(E_k) = \frac{d}{dt} \ln \int_{D \times [0, 2\pi)} \frac{1}{2} \rho \|\tilde{\mathbf{u}}\|^2 d\sigma \quad (6)$$

满足 $\gamma \propto \eta^{\frac{3}{5}}$ ；同时，在 $q(\psi) = 2$ 的有理磁面附近会出现磁岛结构。这是托卡马克模拟代码最常使用的测试算例之一。



扰动初值 (只有磁场) 为如下形式:

$$\tilde{\mathbf{B}}|_{t=0} = A \cos(n_0\varphi + m_0\theta) \exp\left(-\left(\frac{\psi - \psi_m}{\delta\psi}\right)^2\right) \mathbf{B}_s \quad (7)$$

其中 A 是振幅, ψ 是磁通, ψ_m 是平衡位形 $q = 2$ 面的磁通 (安全因子 q 的分布由平衡态决定), $\delta\psi$ 是特征宽度, \mathbf{B}_s 是初始平衡态磁场, n_0 是初始扰动的环向周期数, m_0 是初始扰动的极向周期数。



边界条件只施加在扰动量 $\tilde{\mathbf{w}}$ 上。由于我们考虑的是撕裂内模问题，扰动量在边界处应当充分小，或者说，边界效应需要充分小。因此，我们采用的边界条件是：在区域边界处，所有扰动量 $\tilde{\mathbf{w}} = (\tilde{\rho}, \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{p})^T$ 都固定为 0 (Dirichlet 边界条件)。



1 研究背景

2 核聚变中的平衡态演化问题

3 数值方法与实现

- 数值方法 ■ 并行与加速

4 计算结果

5 总结展望



1 研究背景

2 核聚变中的平衡态演化问题

3 数值方法与实现

- 数值方法 ■ 并行与加速

4 计算结果

5 总结展望



采用混合有限差分-Fourier 伪谱法。在 φ 方向使用 Fourier 伪谱法，在 rOz 平面上，为避免使用极坐标时圆心奇异，把 rOz 平面上的区域 D 嵌入方形区域 $[R_0 - a_0, R_0 + a_0] \times [-a_0, a_0]$ 离散。

$$r_i = R_0 - a_0 + \left(i - \frac{1}{2}\right) \Delta r, \quad \Delta r = \frac{2a_0}{N_r} \quad (8)$$

$$z_j = -a_0 + \left(j - \frac{1}{2}\right) \Delta z, \quad \Delta z = \frac{2a_0}{N_z} \quad (9)$$

$$\varphi_k = k \Delta \varphi, \quad \Delta \varphi = \frac{2\pi}{N_\varphi} \quad (10)$$



将方程组 (4) 等价地简记为如下几个方程组的耦合：

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{\mathbf{U}}}{\partial t} + \mathbf{J}^{(r)}(\mathbf{w}) \frac{\partial \tilde{\mathbf{w}}}{\partial r} + \frac{1}{r} \mathbf{J}^{(\varphi)} \frac{\partial \tilde{\mathbf{w}}}{\partial \varphi} + \mathbf{J}^{(z)}(\mathbf{w}) \frac{\partial \tilde{\mathbf{w}}}{\partial z} + \mathbf{S}(\tilde{\mathbf{w}}, \mathbf{w}_s, \nabla \mathbf{w}_s) = \mu \Delta \tilde{\mathbf{w}} \\ \frac{\partial \tilde{\mathbf{B}}}{\partial t} + \nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{J}} = \nabla \times \tilde{\mathbf{B}} \\ \tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\mathbf{B}} \times \mathbf{u}_s + \mathbf{B} \times \tilde{\mathbf{u}} + \eta \tilde{\mathbf{J}} \end{cases} \quad (11)$$



对方程组 (11) 中的第一个方程中的 $\mathbf{J}^{(r)} \frac{\partial \tilde{\mathbf{w}}}{\partial r} + \mathbf{J}^{(z)} \frac{\partial \tilde{\mathbf{w}}}{\partial z}$, 使用 3 阶 Lax-Friedrichs 离散:

$$\frac{\partial}{\partial x} u_i^- = \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{1}{6} u_{i-2} - u_{i-1} + \frac{1}{2} u_i + \frac{1}{3} u_{i+1} \right) \quad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} u_i^+ = \frac{1}{\Delta x} \left(-\frac{1}{3} u_{i-1} - \frac{1}{2} u_i + u_{i+1} - \frac{1}{6} u_{i+2} \right) \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & \tilde{\mathbf{H}} \left(\frac{\partial}{\partial r} \mathbf{w}^-, \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{w}^+, \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{w}^-, \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{w}^+ \right) \\ &= \mathbf{H} \left(\frac{\frac{\partial}{\partial r} \mathbf{w}^- + \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{w}^+}{2}, \frac{\frac{\partial}{\partial z} \mathbf{w}^- + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{w}^+}{2} \right) \\ &+ \frac{\alpha \left(\frac{\partial}{\partial r} \mathbf{w}^- - \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{w}^+ \right)}{2} + \frac{\beta \left(\frac{\partial}{\partial z} \mathbf{w}^- + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{w}^+ \right)}{2} \end{aligned} \quad (14)$$



其中 $\alpha = \max_{1 \leq l \leq 8, w_{i,j,k}} |\lambda_l^{(r)}|$, $\beta = \max_{1 \leq l \leq 8, w_{i,j,k}} |\lambda_l^{(z)}|$.

对方程组 (11) 中的二阶导数, 采用 4 阶中心差分格式:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u_i = \frac{-u_{i-2} + 16u_{i-1} - 30u_i + 16u_{i+1} - u_{i+2}}{12\Delta x^2} \quad (15)$$



对于方程组 (11) 中的环向导数 $\frac{\partial}{\partial \varphi} \tilde{w}$ 部分，使用 Fourier 伪谱法进行离散：

设 f 为 2π 周期的函数，其 N_φ 点的 Fourier 系数为 \hat{f}_k ，

$k = -\frac{N_\varphi}{2} + 1, \dots, \frac{N_\varphi}{2} - 1, \frac{N_\varphi}{2}$ ，那么：

1. f' 的 N_φ 点的 Fourier 系数为 $\hat{f}'_k = ik\hat{f}_k$, $k = -\frac{N_\varphi}{2} + 1, \dots, \frac{N_\varphi}{2} - 1$; $\hat{f}'_{\frac{N_\varphi}{2}} = 0$.
2. f'' 的 N_φ 点的 Fourier 系数为 $\hat{f}''_k = -k^2\hat{f}_k$, $k = -\frac{N_\varphi}{2} + 1, \dots, \frac{N_\varphi}{2} - 1, \frac{N_\varphi}{2}$.



对于方程组 (11) 中的第二、三个方程，我们在 r 方向和 z 方向都采用 4 阶中心差分格式：

$$\frac{\partial}{\partial x} u_i = \frac{u_{i-2} - 8u_{i-1} + 8u_{i+1} - u_{i+2}}{12\Delta x} \quad (16)$$

在计算形如 $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rf)$ 的项时，应代入 $u_i = r_i f_i$ 进行计算。这样，磁场扰动量 $\tilde{\mathbf{B}}$ 在点 (r_i, φ_k, z_j) 处的数值时间导数为：

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \tilde{B}_r \\ \tilde{B}_\varphi \\ \tilde{B}_z \end{pmatrix}_{(r_i, \varphi_k, z_j)} = \begin{pmatrix} \mathcal{D}_{z,4} \tilde{E}_{\varphi,(i,k,j)} - \frac{1}{r_i} \mathcal{D}_\varphi \tilde{E}_{z,(i,k,j)} \\ \mathcal{D}_{r,4} \tilde{E}_{z,(i,k,j)} - \mathcal{D}_{z,4} \tilde{E}_{r,(i,k,j)} \\ \frac{1}{r_i} \mathcal{D}_\varphi \tilde{E}_{r,(i,k,j)} - \frac{1}{r_i} \mathcal{D}_{r,4} \left(r \tilde{E}_\varphi\right)_{(i,k,j)} \end{pmatrix} \quad (17)$$

当对格点函数 \mathbf{F} 取数值散度的算子为

$$\tilde{\nabla} \cdot \mathbf{F}_{(r_i, \varphi_k, z_j)} = \frac{1}{r_i} \mathcal{D}_{r,4} (r F_r)_{(r_i, \varphi_k, z_j)} + \frac{1}{r_i} \mathcal{D}_\varphi F_{\varphi,(r_i, \varphi_k, z_j)} + \mathcal{D}_{z,4} F_{z,(r_i, \varphi_k, z_j)} \quad (18)$$

时，上述半离散格式满足 $\tilde{\nabla} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\mathbf{B}} = 0$ 。



时间离散采用标准的 4 阶 Runge Kutta 方法：

$$\begin{aligned}
 u^{(1)} &= u^n + \frac{1}{2} \Delta t L(u^n) & t^{(1)} &= t^n + \frac{1}{2} \Delta t \\
 u^{(2)} &= u^n + \frac{1}{2} \Delta t L(u^{(1)}) & t^{(2)} &= t^n + \frac{1}{2} \Delta t \\
 u^{(3)} &= u^n + \Delta t L(u^{(2)}) & t^{(3)} &= t^n + \Delta t \\
 u^{n+1} &= \frac{1}{3} u^{(1)} + \frac{2}{3} u^{(2)} + \frac{1}{3} u^{(3)} - \frac{1}{3} u^n + \frac{1}{6} \Delta t L(u^{(3)}) & t^{n+1} &= t^n + \Delta t
 \end{aligned} \tag{19}$$

$$\Delta t = \frac{\text{CFL}}{\frac{\alpha}{\Delta r} + \frac{\beta}{\Delta z} + \frac{\xi}{\Delta r^2} + \frac{\xi}{\Delta z^2}} \tag{20}$$

$$\alpha = \max_{1 \leqslant l \leqslant 8, \mathbf{w}_{i,j,k}} |\lambda_l(r)|, \quad \beta = \max_{1 \leqslant l \leqslant 8, \mathbf{w}_{i,j,k}} \left| \lambda_l^{(z)} \right|, \quad \xi = \max \{D, \nu, \eta, \kappa\}, \quad \text{CFL} \in (0, 1.6].$$

易验证，我们的全离散格式保持磁场散度不变。



数值初值

平衡态初值由中科院等离子体所提供，在 (ψ, θ) 的磁面坐标下（环向对称）。使用qshep2d 算法插值到计算网格。

¹模板内陷，由于压强在边界近似线性降低到接近 0



数值初值

平衡态初值由中科院等离子体所提供，在 (ψ, θ) 的磁面坐标下（环向对称）。使用qshep2d 算法插值到计算网格。

数值边界

我们将 rOz 平面上的格点分为 3 类：

- ▶ 外部点：在截面外
- ▶ 内部点：其 4 阶中心差分模板均在截面内¹
- ▶ 边界点：其余

边界处理方法：直接将边界点的扰动量置 0，边界点处的电流 J 采用偏心模板计算。

¹模板内陷，由于压强在边界近似线性降低到接近 0



1 研究背景

2 核聚变中的平衡态演化问题

3 数值方法与实现

■ 数值方法 ■ 并行与加速

4 计算结果

5 总结展望



使用 Fortran 95 编写程序。



使用 Fortran 95 编写程序。

并行加速

在 rOz 截面采用笛卡尔拓扑划分并行区域：设 rOz 网格规模 $N_r \times N_z$ ，在 r 方向分配 $N_{p,r}$ 个进程， z 方向分配 $N_{p,z}$ 个进程时，总进程数为 $N_p = N_{p,r} \times N_{p,z}$ ，各进程的内部网格大小为 $\lceil \frac{N_r}{N_{p,r}} \rceil \times \lceil \frac{N_z}{N_{p,z}} \rceil$ （位于 r 方向和 z 方向的最后一个进程单独调整），并在 r 和 z 方向的每个边界带有 2 层虚拟网格用于数据交换。



使用 Fortran 95 编写程序。

并行加速

在 rOz 截面采用笛卡尔拓扑划分并行区域：设 rOz 网格规模 $N_r \times N_z$ ，在 r 方向分配 $N_{p,r}$ 个进程， z 方向分配 $N_{p,z}$ 个进程时，总进程数为 $N_p = N_{p,r} \times N_{p,z}$ ，各进程的内部网格大小为 $\lceil \frac{N_r}{N_{p,r}} \rceil \times \lceil \frac{N_z}{N_{p,z}} \rceil$ （位于 r 方向和 z 方向的最后一个进程单独调整），并在 r 和 z 方向的每个边界带有 2 层虚拟网格用于数据交换。

数学库

使用 Intel MKL 商业数值库中的 Dfti 子例程加速实现 Fourier 伪谱法中的 FFT 过程。



- 1 研究背景
- 2 核聚变中的平衡态演化问题
- 3 数值方法与实现
- 4 计算结果
- 5 总结展望

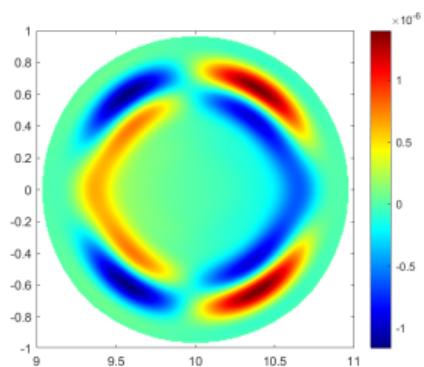


计算参数

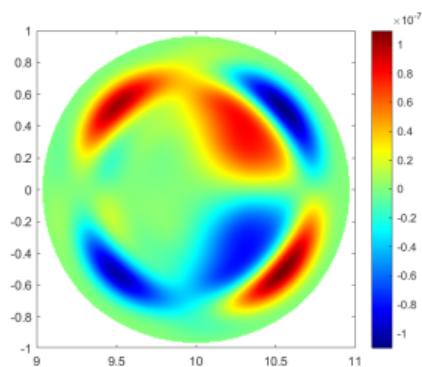
- ▶ 网格数: $N_r = N_z = 256, N_\varphi = 16$
- ▶ 耗散系数: $D = \nu = \kappa = 10^{-8}$
- ▶ 电阻系数: $\eta = 10^{-4.75}, 10^{-5}, 10^{-5.25}, 10^{-5.5}$
- ▶ 初始扰动参数: $(m, n) = (2, 1), (1, 1)$

初始极向双周期扰动结果 |

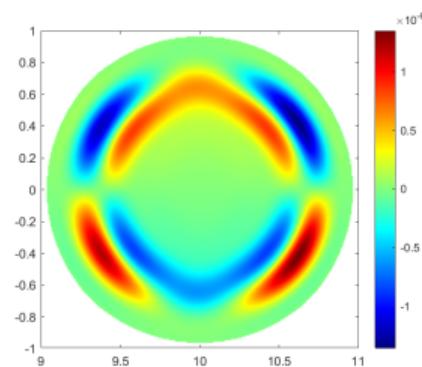
$T = 7000$, $(m, n) = (2, 1)$, $\alpha = 10^{-5}$



(a) \tilde{u}_r



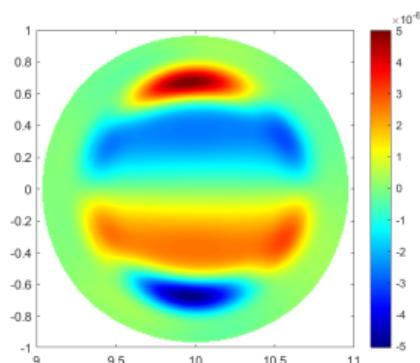
(b) \tilde{u}_φ



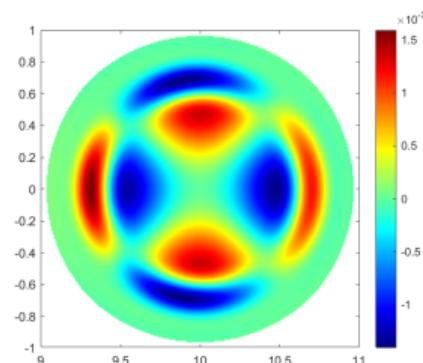
(c) \tilde{u}_z

初始极向双周期扰动结果 II

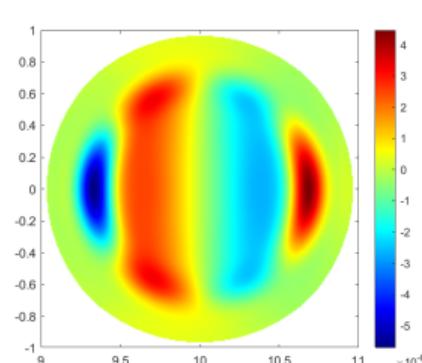
$T = 7000$, $(m, n) = (2, 1)$, $\alpha = 10^{-5}$



(d) \tilde{B}_r



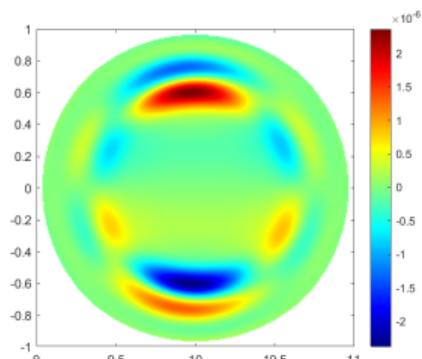
(e) \tilde{B}_φ



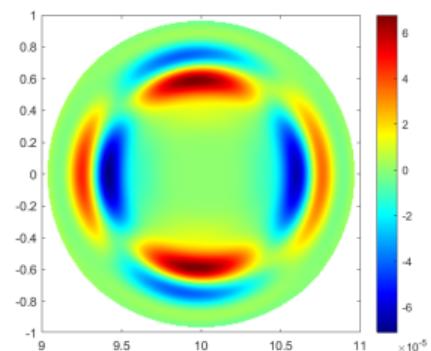
(f) \tilde{B}_z

初始极向双周期扰动结果 III

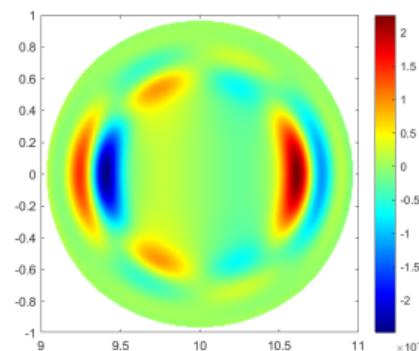
$T = 7000$, $(m, n) = (2, 1)$, $\alpha = 10^{-5}$



(g) \tilde{J}_r



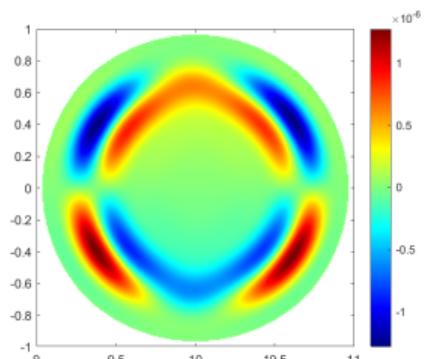
(h) \tilde{J}_φ



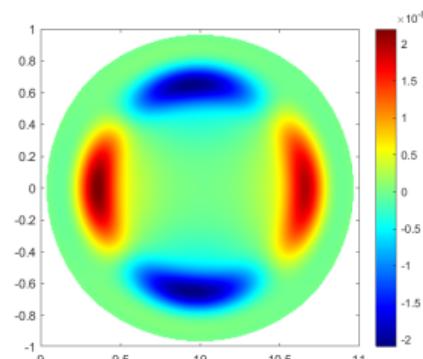
(i) \tilde{J}_z

初始极向双周期扰动结果 IV

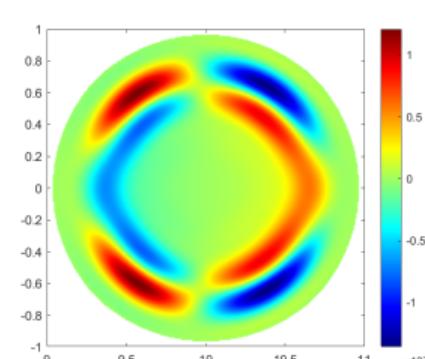
$T = 7000$, $(m, n) = (2, 1)$, $\alpha = 10^{-5}$



(j) \tilde{E}_r



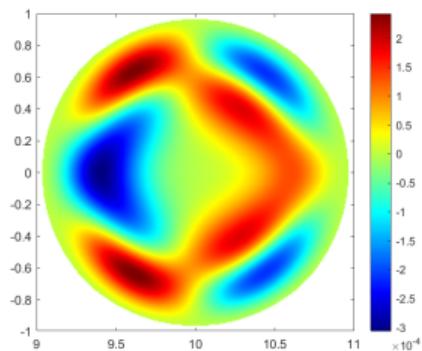
(k) \tilde{E}_φ



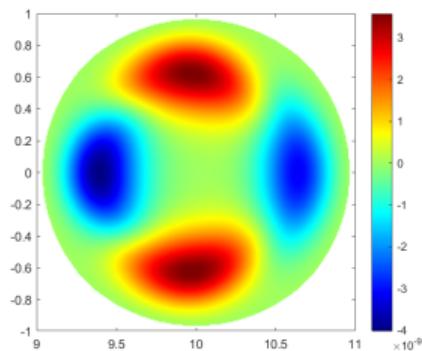
(l) \tilde{E}_z

初始极向双周期扰动结果 V

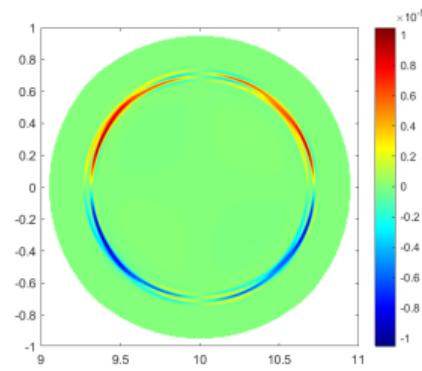
$T = 7000$, $(m, n) = (2, 1)$, $\alpha = 10^{-5}$



(m) $\tilde{\rho}$



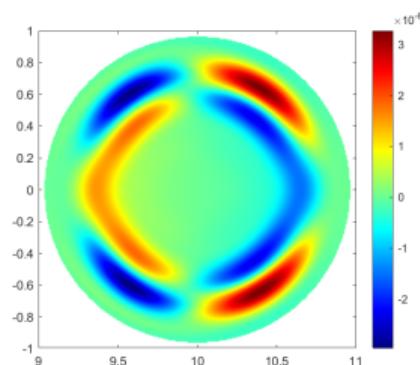
(n) \tilde{p}



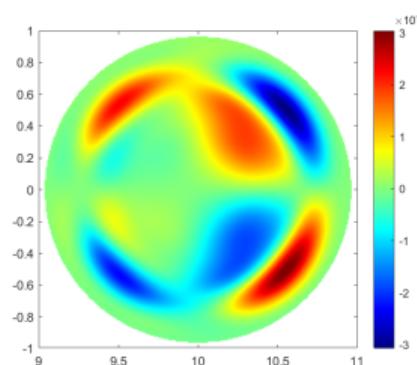
(o) $\nabla \cdot \tilde{\mathbf{B}}$

初始极向单周期扰动结果 I

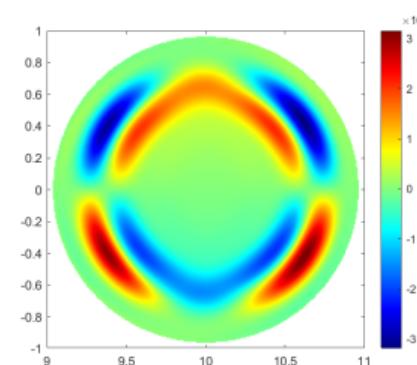
$T = 17020$, $(m, n) = (1, 1)$, $n = 10^{-5}$



(a) \tilde{u}_r



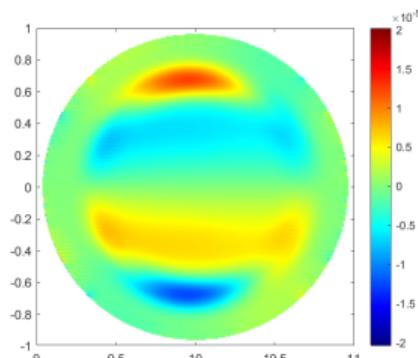
(b) \tilde{u}_φ



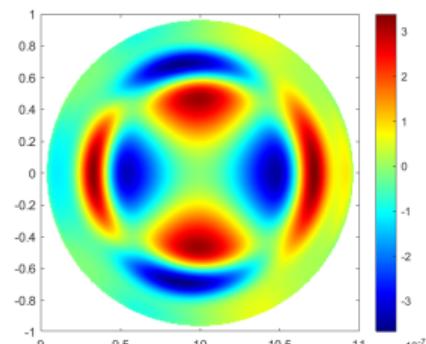
(c) \tilde{u}_z

初始极向单周期扰动结果 II

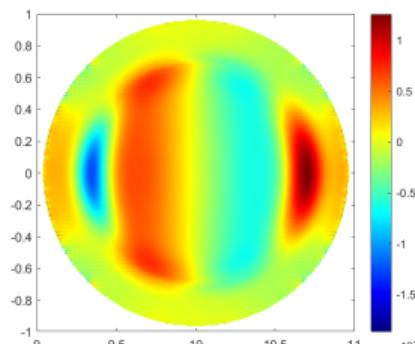
$T = 17020$, $(m, n) = (1, 1)$, $\eta = 10^{-5}$



(d) \tilde{B}_r



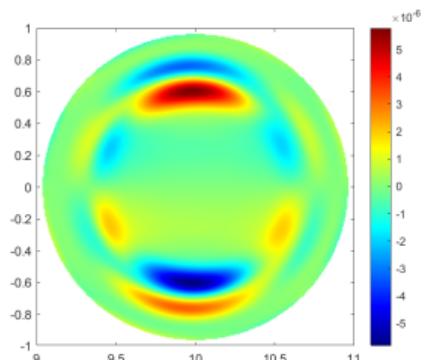
(e) \tilde{B}_φ



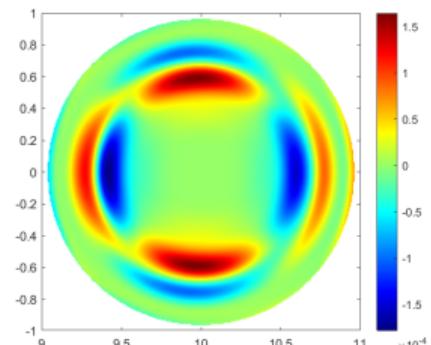
(f) \tilde{B}_z

初始极向单周期扰动结果 III

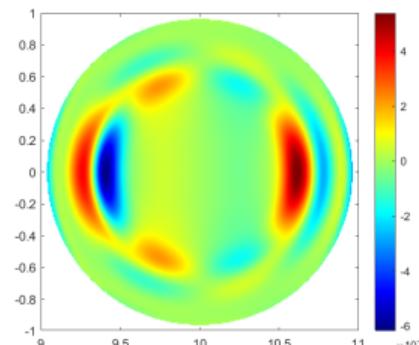
$T = 17020$, $(m, n) = (1, 1)$, $n = 10^{-5}$



(g) \tilde{J}_r



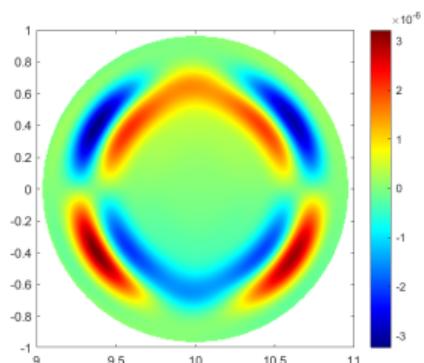
(h) \tilde{J}_φ



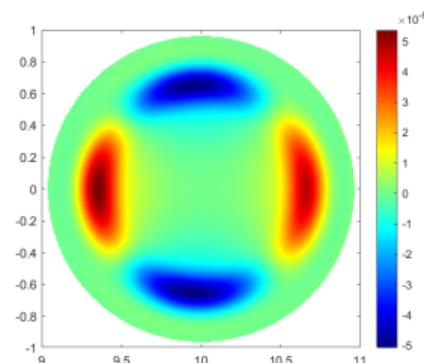
(i) \tilde{J}_z

初始极向单周期扰动结果 IV

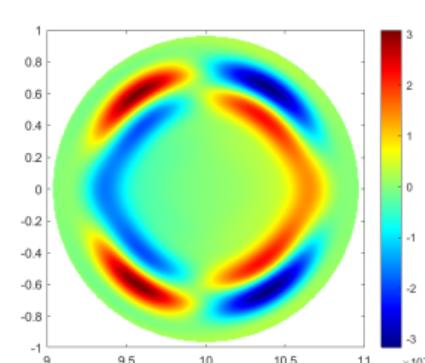
$T = 17020$, $(m, n) = (1, 1)$, $n = 10^{-5}$



(j) \tilde{E}_r



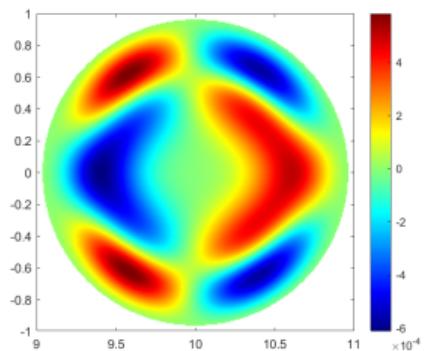
(k) \tilde{E}_φ



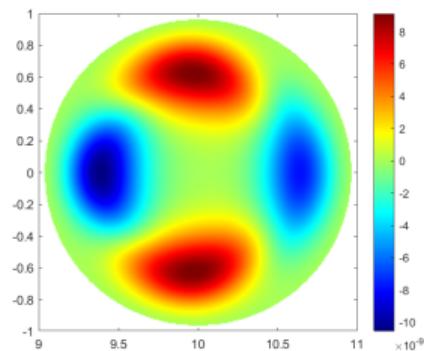
(l) \tilde{E}_z

初始极向单周期扰动结果 V

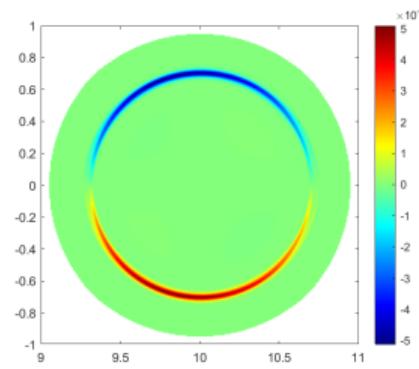
$T = 17020$, $(m, n) = (1, 1)$, $\eta = 10^{-5}$



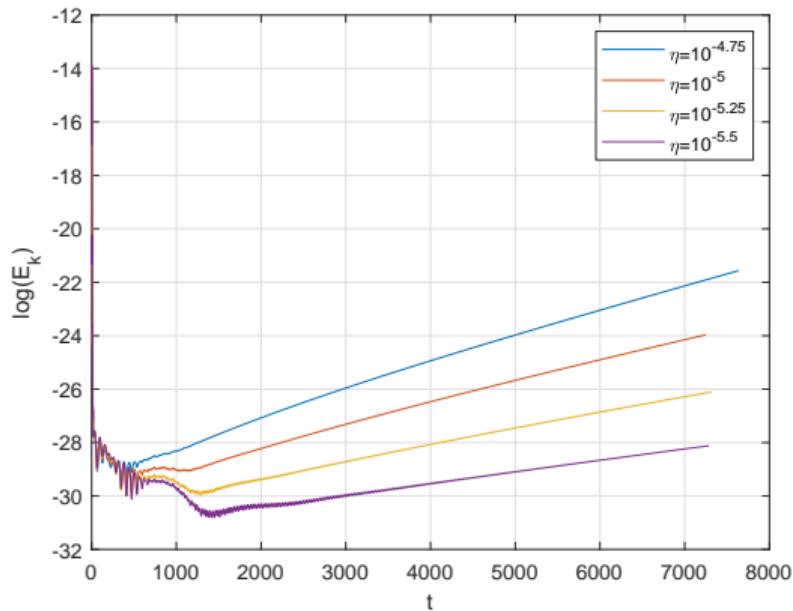
(m) $\tilde{\rho}$



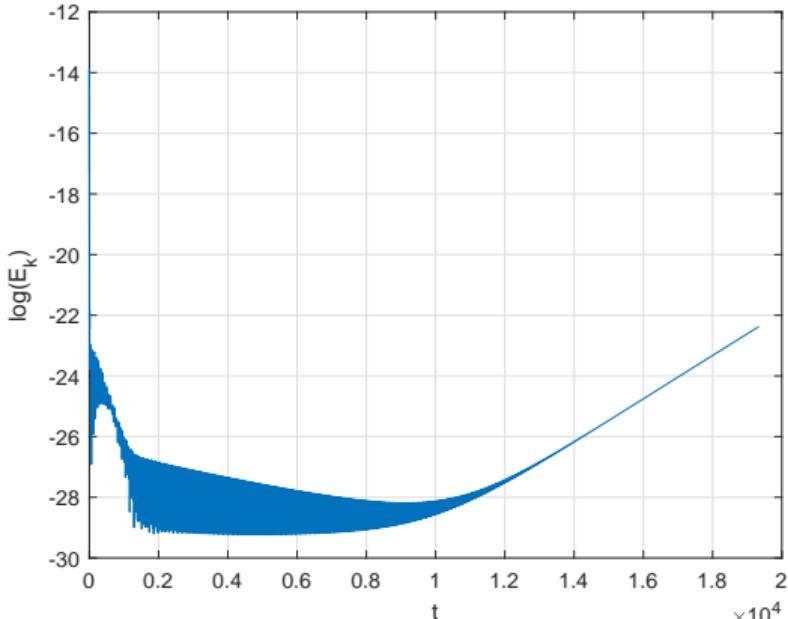
(n) \tilde{p}



(o) $\nabla \cdot \tilde{\mathbf{B}}$



(a) $(m, n) = (2, 1)$,
 $\eta = 10^{-4.75}, 10^{-5}, 10^{-5.25}, 10^{-5.5}$

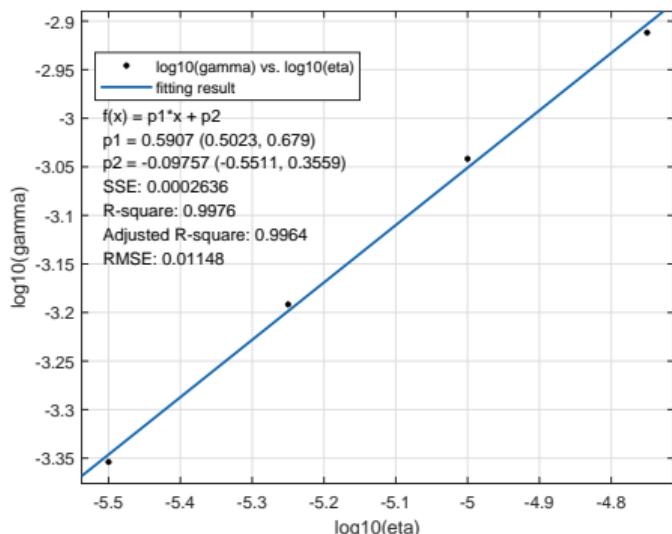


(b) $(m, n) = (1, 1)$, $\eta = 10^{-5}$

动能对数增长率拟合

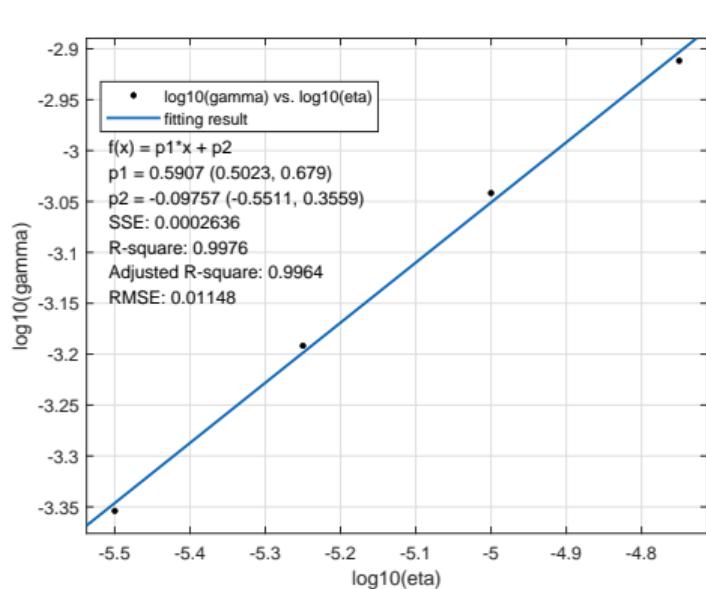


电阻 η	选用时间	拟合 $\log_{10} \gamma$
$10^{-4.75}$	$T \in [1500, 2000]$	-2.911737223516729
$10^{-5.00}$	$T \in [2000, 3000]$	-3.041737304475744
$10^{-5.25}$	$T \in [3000, 4000]$	-3.191693315601624
$10^{-5.50}$	$T \in [4000, 5000]$	-3.353982947563726

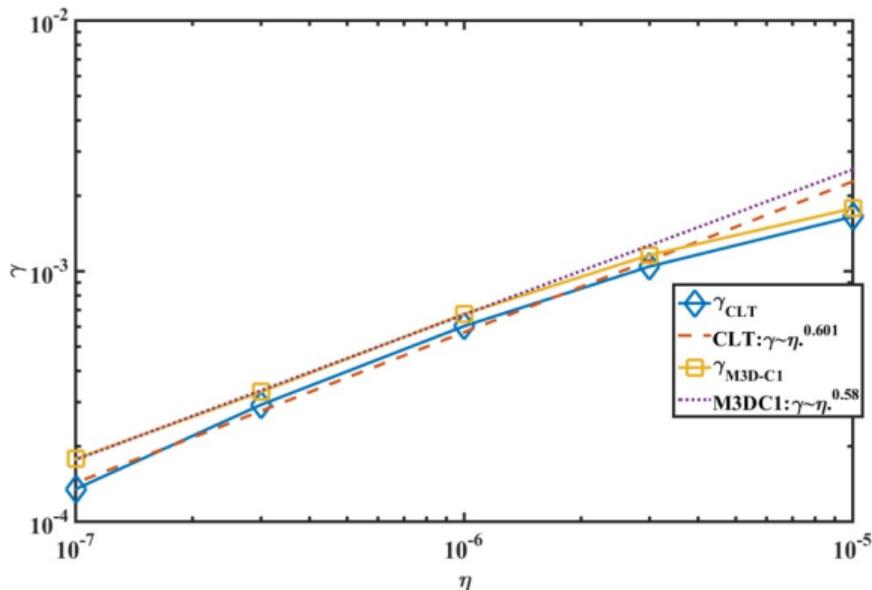


拟合斜率 0.5907
理论斜率 0.6
相对误差 1.55%

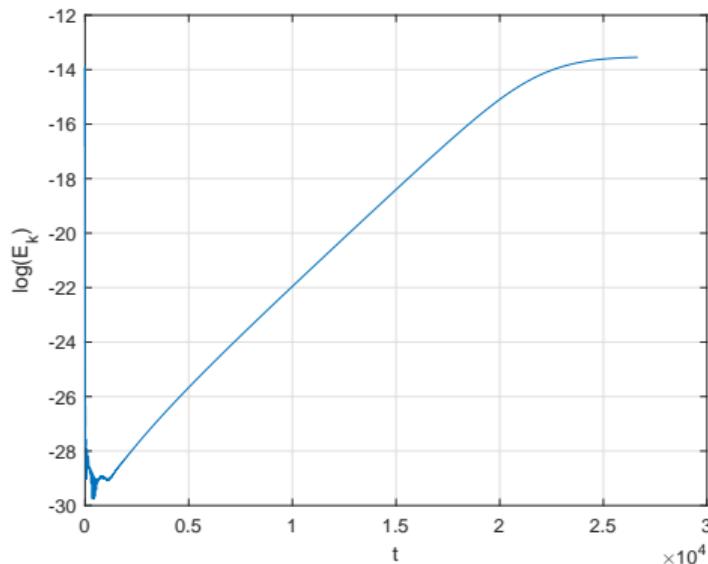
动能对数增长率对比



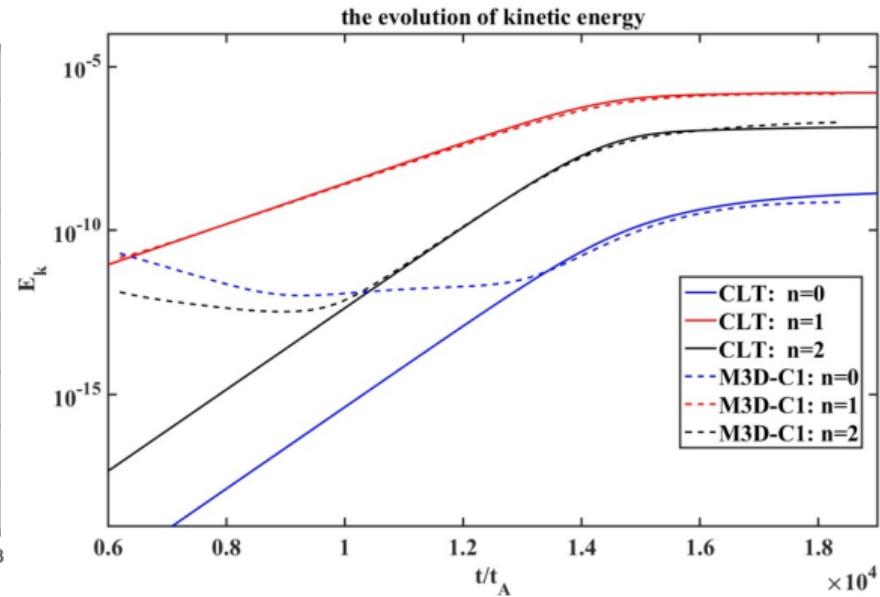
(a) 我们的结果 (0.5907)



(b) CLT 及 M3D-C1 的结果 (0.601, 0.58)



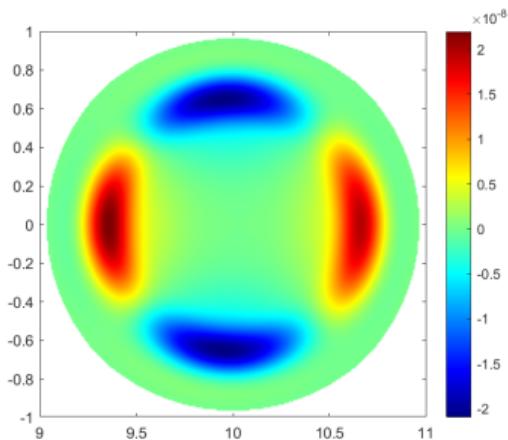
(a) 我们的结果



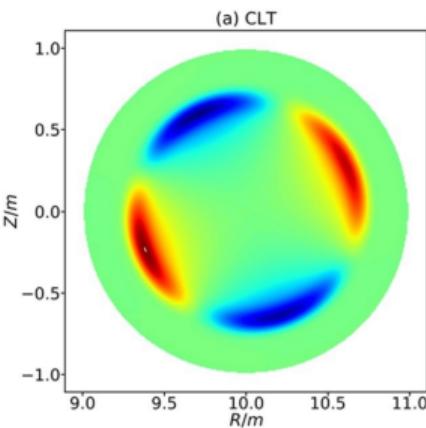
(b) CLT 及 M3D-C1 的结果

模结构对比 (按 \tilde{E}_φ)

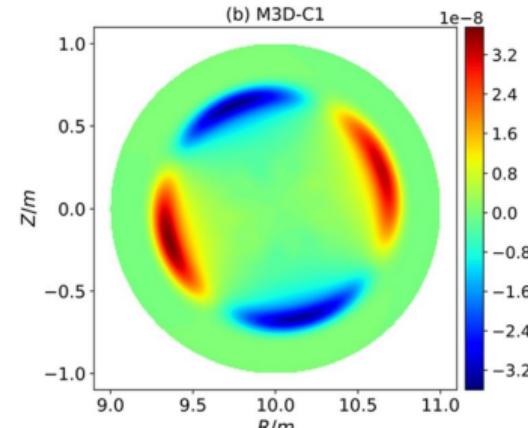
线性阶段



(a) 本研究 (线性阶段)

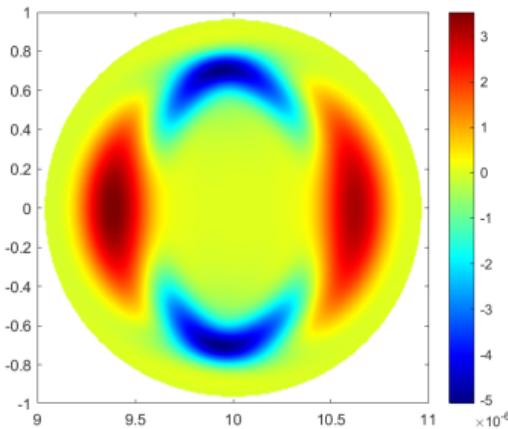


(b) CLT(线性阶段)

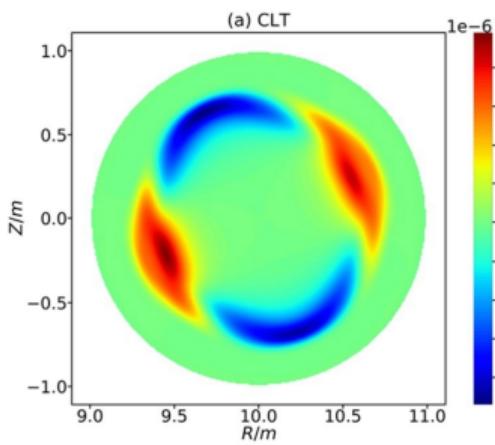


(c) M3D-C1(线性阶段)

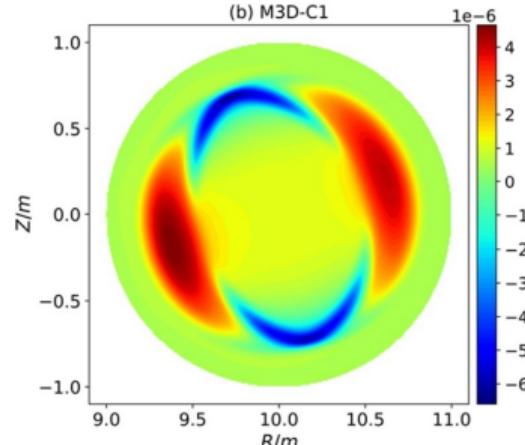
模结构对比 (按 \tilde{E}_φ) 饱和阶段



(a) 本研究 (饱和阶段)



(b) CLT(饱和阶段)



(c) M3D-C1(饱和阶段)



- 1 研究背景
- 2 核聚变中的平衡态演化问题
- 3 数值方法与实现
- 4 计算结果
- 5 总结展望



取得了一定的成功

- ▶ 格式保磁场散度
- ▶ 模拟“非线性阶段—线性阶段—饱和阶段”趋势
- ▶ 拟合线性阶段动能对数增长率与电阻的关系
- ▶ 模态与初始扰动无关
- ▶ 物理图像与现有代码接近



存在的问题

取得了一定的成功

- ▶ 格式保磁场散度
- ▶ 模拟“非线性阶段—线性阶段—饱和阶段”趋势
- ▶ 拟合线性阶段动能对数增长率与电阻的关系
- ▶ 模态与初始扰动无关
- ▶ 物理图像与现有代码接近

- ▶ 边界处理粗糙，不支持其他边界条件
- ▶ 方程组和格式不守恒
- ▶ 不支持间断解（激波）



存在的问题

取得了一定的成功

- ▶ 格式保磁场散度
- ▶ 模拟“非线性阶段—线性阶段—饱和阶段”趋势
- ▶ 拟合线性阶段动能对数增长率与电阻的关系
- ▶ 模态与初始扰动无关
- ▶ 物理图像与现有代码接近

进一步提升

- ▶ 使用守恒型方程、守恒的格式
- ▶ 使用 GLM-MHD 或者 CT 消除散度
- ▶ 使用保正格式
- ▶ 更多边界处理



谢谢!



- [1] RENKA R J. Algorithm 660: QSHEP2D: Quadratic Shepard Method for Bivariate Interpolation of Scattered Data. *ACM Trans. Math. Softw.*, 1988, 14(2): 149–150.
- [2] WEI C C. Finite-Resistivity Instabilities of a Sheet Pinch. *Chinese Journal of Physics*, 1968, 6(2): 88.
- [3] FURTH H P, RUTHERFORD P H, SELBERG H. Tearing mode in the cylindrical tokamak. *Physics of Fluids*, 1973, 16(7): 1054-1063.
- [4] RUTHERFORD P H. Nonlinear growth of the tearing mode. *Physics of Fluids*, 1973, 16(11): 1903-1908.
- [5] CHANG Z, FREDRICKSON E D, CALLEN J D, Transport effects of low (m,n) MHD modes on TFTR supershots. *Nuclear Fusion*, 1994, 34(10): 1309-1336.



- [6] GÜNTER S, GUDE A, MARASCHEK M, Influence of neoclassical tearing modes on energy confinement. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 1999, 41(6): 767-774.
- [7] 王胜. 托卡马克中电阻撕裂模不稳定性数值模拟. *浙江大学*, 2016.
- [8] BRACKBILL J U BARNES D C. The Effect of Nonzero $\nabla \cdot \mathbf{B}$ on the numerical solution of the magnetohydrodynamic equations. *Journal of Computational Physics*, 1980, 35(3): 426-430.
- [9] CHENG C Z CHANCE M S. NOVA: A nonvariational code for solving the MHD stability of axisymmetric toroidal plasmas. *Journal of Computational Physics*, 1987, 71(1): 124-146.
- [10] CHRISTLIEB A J, ROSSMANITH J A, TANG Q. Finite difference weighted essentially non-oscillatory schemes with constrained transport for ideal magnetohydrodynamics. *Journal of Computational Physics*, 2014, 268: 302-325.



- [11] DELLAR P J. A Note on Magnetic Monopoles and the One-Dimensional MHD Riemann Problem. *Journal of Computational Physics*, 2001, 172(1): 392-398.
- [12] DERIGS D, WINTERS A R, GASSNER G J, Ideal GLM-MHD: About the entropy consistent nine-wave magnetic field divergence diminishing ideal magnetohydrodynamics equations. *Journal of Computational Physics*, 2018, 364: 420-467.
- [13] WANG S MA Z W. Influence of toroidal rotation on resistive tearing modes in tokamaks. *Physics of Plasmas*, 2015, 22(12): 122504.
- [14] WU K. doi:10.1137/18M1168017. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2018, 56(4): 2124-2147.
- [15] WU K SHU C W. A Provably Positive Discontinuous Galerkin Method for Multidimensional Ideal Magnetohydrodynamics. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2018, 40(5): B1302-B1329.



- [16] SUN Z SHU C W. Strong Stability of Explicit Runge–Kutta Time Discretizations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2019, 57(3): 1158-1182.
- [17] ROE P L BALSARA D S. Notes on the Eigensystem of Magnetohydrodynamics. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 1996, 56(1): 57-67.
- [18] GODUNOV S K. Symmetric form of the equations of magnetohydrodynamics. 1998.
- [19] FREIDBERG J P. Ideal MHD. Cambridge University Press, 2014.
- [20] JANHUNEN P. A Positive Conservative Method for Magnetohydrodynamics Based on HLL and Roe Methods. *Journal of Computational Physics*, 2000, 160(2): 649-661.
- [21] JARDIN S C, FERRARO N, LUO X, The M3D-C1 approach to simulating 3D 2-fluid magnetohydrodynamics in magnetic fusion experiments. *Journal of Physics: Conference Series*, 2008, 125: 012044.



- [22] CARRERAS B, WADDELL B V, HICKS H R, Comments on "Simulation of large magnetic islands: A possible mechanism for a major tokamak disruption". *Phys. Rev. A*, 1978, 18: 2732-2734.
- [23] FREIDBERG J P. *Plasma Physics and Fusion Energy*. Cambridge: Cambridge University Press, 2007.
- [24] POWELL K G. An Approximate Riemann Solver for Magnetohydrodynamics (That Works in More than One Dimension) // HUSSAINI M Y, van LEER B, VAN ROSENDALE J. *Upwind and High-Resolution Schemes*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1997: 570-583.
- [25] SHU C W. Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes. *Acta Numerica*, 2020, 29: 701–762.
- [26] SJOGREEN B YEE H C. Efficient Low Dissipative High Order Schemes for Multiscale MHD Flows, I: Basic Theory // *16th AIAA CFD Conference*: 2003-4118. Orlando, Florida, 2003.





- [27] SNIPES J A, CAMPBELL D J, HENDER T C. Plasma stored energy and momentum losses during large MHD activity in JET. *Nuclear Fusion*, 1990, 30(2): 205-218.
- [28] 郑坚.等离子体物理理论. 中国科学技术大学, 2009.
- [29] WESSON J. Tokamaks. 4th ed. Oxford University Press, 2011.
- [30] TÓTH G. The $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ Constraint in Shock-Capturing Magnetohydrodynamics Codes. *Journal of Computational Physics*, 2000, 161(2): 605-652.
- [31] FAN C, ZHANG X, QIU J. Positivity-preserving high order finite difference WENO schemes for the compressible Navier-Stokes equations.
- [32] ZHANG X, SHU C W. Positivity-preserving high order finite difference WENO schemes for compressible Euler equations. *Journal of Computational Physics*, 2012, 231(5): 2245-2258.



- [33] ZHANG W, JARDIN S C, MA Z W, Linear and nonlinear benchmarks between the CLT code and the M3D-C1 code for the 2/1 resistive tearing mode and the 1/1 resistive kink mode. *Computer Physics Communications*, 2021, 269: 108134.