用三线摆、扭摆测量刚体的转动惯量-实验报告

姓名：夏弘宇 学号：2023011004 实验日期：20241105 实验组/台号：M11

【实验目的】

1. 学习质量、长（高）度、摆动周期（时间）等基本物理量测量及其相应仪器的使用

2. 掌握用三线摆和扭摆测量刚体转动惯量的原理和方法；

3. 加深对刚体转动运动的有关概念及定理的理解。

【数据处理】

1. 用三线摆测量转动惯量

摆盘编号	摆盘质量 m_0 g	摆盘半径 R mm	上圆盘半径 r mm	三孔所在圆环半径 R_1 mm
12	77.59	34.20	14.64	21.94
不确定度	$\Delta_{m_0}=0.05g$	$\Delta_R=0.02mm$	$\Delta_r=0.02mm$	$\Delta_{R1}=0.02mm$
相对不确定度	$\frac{\Delta_m}{m_0}=\frac{0.05}{77.59}=6\times10^{-4}$	$\frac{\Delta_R}{R}=\frac{0.02}{34.20}=6\times10^{-4}$	$\frac{\Delta_r}{r}=\frac{0.02}{14.64}=1.4\times10^{-3}$	$\frac{\Delta_{R1}}{R_1}=\frac{0.02}{21.94}=9\times10^{-4}$

(1) 三线摆摆盘转动惯量

测量次序	1	2	3	4	5	6	7	8	平均
距离 H（mm）	416.81								416.81
计时周期数 n	30	30	30	30	30	30	30	30	30
摆动计时 t_0（s）	41.853	42.404	42.473	42.264	42.833	42.299	42.747	42.087	42.370

$$J_0=\frac{m_0gRr}{4\pi^2H}{T_0}^2$$
$$=\frac{77.59\times10^{-3}\times9.8\times34.20\times10^{-3}\times14.64\times10^{-3}}{4\pi^2\times416.81\times10^{-3}}\times\left(\frac{42.370}{30}\right)^2$$
$$=4.615\times10^{-5}kg\cdot m^2$$

其中 $m_0=77.59\times10^{-3}kg,\ g=9.8m/s^2,\ R=34.20\times10^{-3}m,\ r=14.64\times10^{-3}m,$
$H=416.81\times10^{-3}m,\ T_0=42.370\div30=1.4123s$

计算不确定度：注意$\Delta_{T_0}=\frac{\Delta_{t_{仪}}}{n}=\frac{0.05}{30}$

$$\frac{\Delta_{J_0}}{J_0}=\sqrt{\left(\frac{\Delta_{m_0}}{m_0}\right)^2+\left(\frac{\Delta_R}{R}\right)^2+\left(\frac{\Delta_r}{r}\right)^2+\left(\frac{2\Delta_{T_0}}{T_0}\right)^2+\left(\frac{\Delta H}{H}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{0.05}{77.59}\right)^2+\left(\frac{0.02}{34.20}\right)^2+\left(\frac{0.02}{14.64}\right)^2+\left(\frac{2\times0.05}{42.370}\right)^2+\left(\frac{0.5}{416.81}\right)^2}$$

$$\approx 3.10369 \times 10^{-3}$$

$$\Delta_{J_0} = \frac{\Delta_{J_0}}{J_0} J_0 = 3.10369 \times 10^{-3} \times 4.61504 \times 10^{-5} = 1.43237 \times 10^{-7} (kg\ m^2)$$

$$\approx 1.4 \times 10^{-7} (kg\ m^2)$$

则$J_0 = (4.615 \pm 0.014) \times 10^{-5} kg{\cdot}m^2$

思考：根据测量不确定度的估算过程，分析本实验中上下圆盘间竖直距离 H 是否有必要进行多次测量？

答：没有必要，因为不确定度都来自于仪器误差。

(2) 钢球对其质心轴的转动惯量 J_c

测量次序	1	2	3	4	5	6	7	8	平均
千分尺零位读数 mm	-0.028								-0.028
小钢球直径 D_1（mm）	20.000	20.030	20.010	20.020	20.010	20.005			20.013
小钢球质量 m（g）	32.80	32.78	32.78	32.80	32.80	32.78			32.79
距离 H_1（mm）	417.07								417.07
计时周期数 n	30	30	30	30	30	30			30
摆动计时 t_1（s）	36.758	37.496	37.865	36.504	37.819	37.759			37.367

先计算整体的值

$$J_1 = \frac{(m_0 + m) gRr}{4\pi^2 H_1} {T_1}^2$$

$$= \frac{(77.59 + 32.79) \times 10^{-3} \times 9.8 \times 34.20 \times 10^{-3} \times 14.64 \times 10^{-3}}{4\pi^2 \times 417.07 \times 10^{-3}} \times \left(\frac{37.367}{30}\right)^2$$

$$= 5.10327 \times 10^{-5} kg \cdot m^2$$

计算不确定度：

$$\frac{\Delta_{J_1}}{J_1} = \sqrt{\left(\frac{\Delta_{m_0}}{m_0}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta_{T_0}}{T_0}\right)^2 + \left(\frac{\Delta H}{H}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{0.05}{77.59 + 32.79}\right)^2 + \left(\frac{0.02}{34.20}\right)^2 + \left(\frac{0.02}{14.64}\right)^2 + \left(\frac{2 \times 0.05}{37.367}\right)^2 + \left(\frac{0.5}{417.07}\right)^2}$$

$$\approx 3.31851 \times 10^{-3}$$

$$\Delta_{J_1} = \frac{\Delta_{J_1}}{J_1} J_1 = 3.31851 \times 10^{-3} \times 5.10327 \times 10^{-5} = 1.69353 \times 10^{-7} (kg\ m^2)$$

$$\approx 1.7 \times 10^{-7} (kg\ m^2)$$

则$J_1 = (5.103 \pm 0.017) \times 10^{-5} kg{\cdot}m^2$

再计算小钢球的转动惯量

$$J_c = J_1 - J_0 = 5.10327 \times 10^{-5} - 4.61504 \times 10^{-5} = 4.8823 \times 10^{-6} kg \cdot m^2$$

$$\triangle J_c = \sqrt{{\Delta_{J_1}}^2 + {\Delta_{J_0}}^2} = \sqrt{(1.69353 \times 10^{-7})^2 + (1.43237 \times 10^{-7})^2}$$

$$= 2.21805 \times 10^{-7} kg \cdot m^2 \approx 2.2 \times 10^{-7} kg \cdot m^2$$

则$J_c=(4.88\pm0.22)\times10^{-6}kg\cdot m^2$

理论值$J_{ct}=\frac{1}{10}mD_1^2=0.1\times32.79\times10^{-3}\times((20.013+0.028)\times10^{-3})^2=1.31698\times10^{-6}kg\cdot m^2$

则相对误差为$\eta=\frac{J_c-J_{ct}}{J_{ct}}=\frac{4.8823-1.31698}{1.31698}=270.7\%>5\%$

2. 验证平行轴定理

测量次序	1	2	3	4	5	6	平均
距离 H_2（mm）	417.31						417.31
计时周期数 n	30	30	30	30	30	30	30
摆动计时 t_2（s）	42.029	41.135	42.290	41.165	42.045	41.777	41.740

$$J_2=\frac{(m_0+3m)gRr}{4\pi^2H_1}T_1{}^2=\frac{(77.59+3\times32.79)\times10^{-3}\times9.8\times34.20\times10^{-3}\times14.64\times10^{-3}}{4\pi^2\times417.31\times10^{-3}}\times\left(\frac{41.740}{30}\right)^2=1.0145\times10^{-4}kg\cdot m^2$$

理论值$J_{2t}=J_0+3mR_1{}^2=4.615\times10^{-5}+3\times32.79\times10^{-3}\times(21.94\times10^{-3})^2=9.35017\times10^{-5}kg\cdot m^2$

相对误差为$\eta=\frac{J_2-J_{2t}}{J_{2t}}=\frac{10.145-9.35017}{9.35017}=8.50\%>5\%$

3. 用扭摆测定转动惯量及金属丝的切变模量

测量次序	1	2	3	4	5	6	平均
圆环质量 m（g）	99.63	99.65	99.64	99.65	99.65	99.64	99.64
圆环内径 D_1（mm）	72.06	72.00	72.16	72.00	72.06	72.16	72.07
圆环外径 D_1（mm）	84.02	84.08	84.00	84.00	84.08	84.02	84.03

测量次序	1	2	3	4	5	6	平均
千分尺零位读数（mm）	-0.028	-0.028	-0.028	-0.028	-0.028	-0.028	-0.028
钢丝直径 D（mm）	0.512	0.512	0.512	0.512	0.512	0.512	0.512
悬丝长度 L（mm）	302.34						302.34
三爪盘计时周期数 n	20	20	20				20
三爪盘摆动计时 t_0（s）	19.087	19.886	19.882				19.618
复合体计时周期数 n	20	20	20				20
复合体摆动计时 t（s）	41.032	41.064	41.009				41.035

测量次序	1	2	3	4	5	6	平均
圆环质量 m（g）	60.73	60.74	60.73	60.73	60.72	60.73	60.73
圆环内径 D_1（mm）	64.00	64.06	64.06	64.06	64.06	64.06	64.05
圆环外径 D_1（mm）	71.64	71.62	71.66	71.62	71.64	71.66	71.64
复合体计时周期数 n	20	20	20				20
复合体摆动计时 t（s）	31.379	31.361	31.367				31.369

(1)大圆环转动惯量

加大环时，大环对悬线的转动惯量为：

$$J_1=\frac{m_1}{8}(d_{1内}{}^2+d_{1外}{}^2)=\frac{99.64\times10^{-3}}{8}((72.07\times10^{-3})^2+(83.98\times10^{-3})^2)=1.52533\times10^{-4}(kg\cdot m^2)$$

$$\frac{\Delta_{J_1}}{J_1}=\sqrt{\left(\frac{\Delta_m}{m}\right)^2+\left(\frac{\Delta_R}{R}\right)^2+\left(\frac{\Delta_r}{r}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{0.05}{99.64}\right)^2+\left(\frac{0.02}{34.20}\right)^2+\left(\frac{0.02}{14.64}\right)^2}=0.00156846$$

$$\Delta_{J_1}=\frac{\Delta_{J_1}}{J_1}J_1=1.52533\times10^{-4}\times0.00156846=2.39242\times10^{-7}kg\cdot m^2$$

则$J_1=(1.5253\pm0.0024)\times10^{-4}kg\cdot m^2$

(2)扭摆转动惯量和金属丝的切变模量

$$J_{01}=\frac{{T_0}^2}{T^2-{T_0}^2}J_1=\frac{\left(\frac{19.618}{20}\right)^2}{\left(\frac{41.035}{20}\right)^2-\left(\frac{19.618}{20}\right)^2}\times1.5253\times10^{-4}=4.51912\times10^{-5}kg\cdot m^2$$

$$\begin{aligned}\Delta_{(T_1^2-{T_0}^2)}&=\frac{\Delta_{(T_1^2-{T_0}^2)}}{T_1^2-{T_0}^2}(T_1^2-{T_0}^2)\\&=\sqrt{(2T_1\Delta_{T_1})^2+(2T_0\Delta_{T_0})^2}\\&=\sqrt{\left(2\times\left(\frac{19.618}{20}\right)\times\frac{0.05}{20}\right)^2+\left(2\times\left(\frac{41.035}{20}\right)\times\frac{0.05}{20}\right)^2}\\&=0.0113708s^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta_{J_{01}}}{J_{01}}&=\sqrt{\left(\frac{2\Delta_{T_0}}{T_0}\right)^2+\left(\frac{-\Delta_{(T_1^2-{T_0}^2)}}{T_1^2-{T_0}^2}\right)^2+\left(\frac{\Delta_{J_1}}{J_1}\right)^2}\\&=\sqrt{\left(\frac{2\times0.0025}{19.618/20}\right)^2+\left(\frac{-0.0113708}{\left(\frac{41.035}{20}\right)^2-\left(\frac{19.618}{20}\right)^2}\right)^2+\left(\frac{2.39242\times10^{-7}}{1.52533\times10^{-4}}\right)^2}\\&=0.00637988\end{aligned}$$

$$\Delta_{J_{01}}=\frac{\Delta_{J_{01}}}{J_{01}}J_{01}=0.00637988\times4.51912\times10^{-5}=2.88314\times10^{-7}kg\cdot m^2$$

$$J_{01}=(4.519\pm0.029)\times10^{-5}kg\cdot m^2$$

又因为$K=\frac{4\pi^2}{T^2-{T_0}^2}J_1=\frac{\pi Gd^4}{32L}$，所以切变模量

$$\begin{aligned}G_1&=\frac{128\pi L}{({T_1}^2-{T_0}^2)d^4}J_1\\&=\frac{128\pi\times302.38\times10^{-3}}{\left(\left(\frac{41.035}{20}\right)^2-\left(\frac{19.618}{20}\right)^2\right)\times(0.540\times10^{-3})^4}\times1.5253\times10^{-4}\\&=6.71649\times10^{10}kg\cdot m^{-1}\cdot s^{-2}\end{aligned}$$

$$\Delta_{G_1}=\frac{\Delta_{G_1}}{G_1}G_1=\sqrt{\left(\frac{\Delta_{J_1}}{J_1}\right)^2+\left(\frac{\Delta_{T_1{}^2-T_0{}^2}}{T_1{}^2-T_0{}^2}\right)^2+\left(\frac{\Delta_L}{L}\right)^2+\left(\frac{\Delta_d}{d}\right)^2}\times G_1$$

$$=\sqrt{\left(\frac{2.39242\times10^{-7}}{1.52533\times10^{-4}}\right)^2+\left(\frac{0.0113708}{\left(\frac{41.035}{20}\right)^2-\left(\frac{19.618}{20}\right)^2}\right)+\left(\frac{5\times10^{-4}}{0.30234}\right)^2+\left(\frac{4\times10^{-6}}{0.000540}\right)^2}\times6.71649\times10^{10}$$

$$=4.00826\times10^{9}$$

$$\therefore G_1=(6.72\pm0.4)\times10^{10}kg\cdot m^{-1}\cdot s$$

(3)含小圆环转动惯量

$$J_2=\frac{m_2}{8}(d_{2内}{}^2+d_{2外}{}^2)=\frac{60.73\times10^{-3}}{8}((64.05\times10^{-3})^2+(71.64\times10^{-3})^2)=7.01029\times10^{-5}(kg\cdot m^2)$$

$$\frac{\Delta_{J_2}}{J_2}=\sqrt{\left(\frac{\Delta_m}{m}\right)^2+\left(\frac{\Delta_R}{R}\right)^2+\left(\frac{\Delta_r}{r}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{0.05}{60.73}\right)^2+\left(\frac{0.02}{34.20}\right)^2+\left(\frac{0.02}{14.64}\right)^2}=0.00169886$$

$$\Delta_{J_2}=\frac{\Delta_{J_2}}{J_2}J_1=7.01029\times10^{-5}\times0.00169886=1.19095\times10^{-7}kg\cdot m^2$$

则测出的三爪盘的转动惯量为:

$$J_{02}=\frac{T_0{}^2}{T_2^2-T_0{}^2}J_2$$
$$=\frac{19.618^2}{31.369^2-19.618^2}\times7.01029\times10^{-5}$$
$$=4.5031\times10^{-5}kg\cdot m^2$$

又因为$K=\frac{4\pi^2}{T^2-T_0{}^2}J_1=\frac{\pi Gd^4}{32L}$，所以切变模量

$$G_2=\frac{128\pi L}{(T_2{}^2-T_0{}^2)d^4}J_2$$
$$=\frac{128\pi\times302.38\times10^{-3}}{\left(\left(\frac{31.369}{20}\right)^2-\left(\frac{19.618}{20}\right)^2\right)\times(0.540\times10^{-3})^4}\times7.01029\times10^{-5}$$
$$=6.69267\times10^{10}kg\cdot m^{-1}\cdot s^{-2}$$

在本实验中，约定小环测出的值作为理论值，以此计算大环测出的值的相对误差。三爪盘的转动惯量的相对误差为:

$$\eta_3=\frac{J_{01}-J_{02}}{J_{02}}=\frac{4.519\times10^{-5}-4.5031\times10^{-5}}{4.5031\times10^{-5}}=0.035\%<5\%$$

悬线的切变模量的相对误差为：

$$\eta_4=\frac{G_1-G_2}{G_2}=\frac{6.71649\times10^{10}-6.69267\times10^{10}}{6.69267\times10^{10}}=0.036\%<5\%$$

【实验总结】

经测量得到三线摆和扭摆空摆的转动惯量，并且以之为标定计算带负载时的情况，得出刚体转动惯量的理论值，并与测量值进行比较。分析测量相对误差，对照实验结果，在误差范围内进行理论验证，并讨论误差的可能来源。

误差分析：各种仪器精度误差、摆在开始摆动时可能存在水平运动分量、可能存在风等环境因素印象、实验者测量产生偶然误差、实验器材固有问题，如球不是完美圆球，并且可能出现生锈等情况。

这里着重说明一下小球转动惯量出现非常大实验误差的情况：由于小球的转动惯量比摆盘小一个数量级，相对于小球的测量误差可能会更大，如果将代入的 t=37.367s 改成最小值 36.504s，就能使得误差减小到 100%以下，而如此短的时间差极可能产生于各种随机扰动、水平运动分量的影响等，因此该处产生较大误差合乎情理。要想减小误差，需要提高仪器精度，减少外部扰动影响等。

验证平行轴定理时，实验误差也超过了 5%，参考上述误差分析过程。

其余数据都与理论值差异较小，满足 5%的要求。总之本次实验总体顺利，感谢助教的悉心指导！

【思考题】

1. 三线摆在摆动过程中要受到空气的阻尼，振幅会越来越小，它的周期是否会随时间而变化？

• 根据阻尼振动的结论，当阻尼系数 **β** 小于固有角频率 **ω₀** 时，周期 $T=\frac{2\pi}{\sqrt{{\omega_0}^2-\beta^2}}$ 不变。

2. 在三线摆下圆盘上加上待测物体后的摆动周期是否一定比不加物体时的周期大？

• 三线摆下盘质量与转动惯量的关系：$J=\frac{mgRr}{4\pi^2H}T^2 \Rightarrow \left(\frac{T_1}{T_0}\right)^2=\frac{J_1/m_1}{J_0/m_0}$，由此式不难发现周期是否增大，要看转动惯量与质量的比值是否增大。

3. 证明三线摆的机械能为 $\frac{1}{2}J_0\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}\frac{m_0gRr}{H}\theta^2$，并求出运动的微分方程，

从而导出转动惯量公式。

- 下盘旋转θ时，增加高度$h=\frac{Rr}{2H}\theta^2$

机械能：$E_M=E_K+E_P=0.5J_0\dot{\theta}^2+m_0gh=0.5J_0\dot{\theta}^2+1/2(m_0gRr\theta^2)/H$

$$\text{运动方程}(dE_M)/dt=0\Rightarrow J_0\ddot{\theta}+\frac{m_0gRr}{H}\theta=0$$

【原始数据记录】

三线摆和扭摆测转动惯量实验数据记录

实验题目：三线摆

姓名：夏弘宇 学号 2023011024 实验组号：M 实验台号：11 实验日期 2024.1105

1.用三线摆测量转动惯量

查表记录：

摆盘编号	摆盘质量 m（g）	摆盘半径 R（mm）	上圆盘半径 r（mm）	三孔所在圆环半径 R_1（mm）
12	77.59	34.20	14.64	21.94

(1)三线摆摆盘转动惯量

测量次序	1	2	3	4	5	6	7	8	平均
距离 H（mm）	416.81								416.81
计时周期数 n	30	30	30	30	30	30	30	30	30
摆动计时 t_0（s）	~~44.181~~ 41.853	42.404	42.473	42.264	42.833	42.289	42.747	42.087	42.370

(2)小钢球对其质心轴的转动惯量

测量次序	1	2	3	4	5	6	7	8	平均
千分尺零位读数(mm)	-0.028								-0.028
小钢球直径 D_1（mm）	20.000	20.030	20.010	20.020	20.010	20.005	~~20.012~~	~~20.022~~	20.017
小钢球质量 m（g）	32.80	32.78	32.78	32.80	32.80	32.78			32.79
距离 H_1（mm）	417.07								417.07
计时周期数 n	30	30	30	30	30	30			30
摆动计时 t_1（s）	36.758	37.496	37.865	36.504	37.819	37.759			37.367

(3)大钢球对其质心轴的转动惯量

测量次序	1	2	3	4	5	6	7	8	平均
千分尺零位读数（ ）									
小钢球直径 D_1（ ）									
小钢球质量 m（ ）	110.88								
距离 H_1（ ）									
计时周期数 n									
摆动计时 t_1（ ）									

2.验证平行轴定理

测量次序	1	2	3	4	5	6	7	8	平均
距离 H_2（mm）	417.31								417.31
计时周期数 n	30	30	30	30	30	30			30
摆动计时 t_2（s）	42.029	41.135	42.290	41.165	~~44.185~~ 42.045	41.777			41.740

3.用扭摆测定转动惯量及金属丝的切变模量

(1)大圆环转动惯量

测量次序	1	2	3	4	5	6	7	8	平均
圆环质量 m（g）	99.63	99.65	99.64	99.65	99.65	99.64			99.64
圆环内径 D_1（mm）	72.06	72.00	72.16	72.00	72.06	72.16			72.07
圆环外径 D_1（mm）	84.02	84.08	84.00	84.00	84.08	84.02			84.03

(2)扭摆转动惯量和金属丝的切变模量

测量次序	1	2	3	4	5	6	7	8	平均
千分尺零位读数 mm	-0.028	-0.028	-0.028	-0.028	-0.028	-0.028			-0.028
钢丝直径 D（mm）	0.512	0.512	0.512	0.512	0.512	0.512			0.512
悬丝长度 L（mm）	302.34								302.34
三爪盘计时周期数 n	20	20	20						20
三爪盘摆动计时 t_0（s）	19.087	19.886	19.882						19.618
复合体计时周期数 n	20	20	20						20
复合体摆动计时 t（s）	41.032	41.064	41.009						41.035

(3)小圆环转动惯量

测量次序	1	2	3	4	5	6	7	8	平均
圆环质量 m（g）	60.73	60.74	60.73	60.73	60.72	60.73			60.73
圆环内径 D_1（mm）	~~64.00~~ 64.00	64.06	64.06	~~71.62~~ 64.06	64.06	64.06			64.05
圆环外径 D_1（mm）	71.64	71.62	71.66	71.62	71.64	71.66			71.64
复合体计时周期数 n	20	20	20						20
复合体摆动计时 t（s）	31.379	31.361	31.367						31.369

刘洁 11

2024.11.5