

命题、联结词与命题公式

命题：非真假/可明确判真假的陈述句

- 悖论：[我正在撒谎] 既不为真也不为假
- [长方形是正方形] 既可为真也可作假

真值：命题的判断结果，只取真或假两个值

真命题/假命题：真值为真/假的命题

命题符号化：将命题抽象为取值为 0or1 的  $p, q, \dots$

简单命题（原子命题）：不能被分解成更简单的命题的命题

复合命题：由简单命题通过联结词联结而成的命题

- 其真假完全由构成它的简单命题的真假决定

• 简单命题和复合命题的划分是相对的

否定式：复合命题“非  $p$ ”称作  $p$  的否定式， $\neg p$

否定联结词： $\neg$ ，规定  $\neg p$  为真当且仅当  $p$  为假

合取式：复合命题“ $p$  并且  $q$ ”称为  $p$  与  $q$  的合取式，记作  $p \wedge q$

合取联结词： $\wedge$ ，规定  $p \wedge q$  为真当且仅当  $p$  与  $q$  同时为真

析取式：复合命题“ $p$  或  $q$ ”称作  $p$  与  $q$  的析取式，记作  $p \vee q$

析取联结词： $\vee$ ，规定  $p \vee q$  为假当且仅当  $p$  与  $q$  同时为假

• 相容或与相斥或： $\vee$  与  $\nabla, \overline{\vee}$  为真要满足  $p, q$  不同时为真；不能看见  $p$  或  $q$  就转化为  $p \vee q$

蕴涵式：复合命题“如果  $p$ ，则  $q$ ”称为  $p$  与  $q$  的蕴涵式，记作  $p \rightarrow q$ ，并称  $p$  是前件， $q$  是后件

• 例子：如果  $p$  则  $q$ ； $q$  每当  $p$ ； $p$  仅当  $q$ ；只有  $q$  才  $p$ ；除非  $q$  才  $p$ ；除非  $q$ ，否则  $\neg p$

蕴涵联结词： $\rightarrow$ ，规定  $p \rightarrow q$  为假当且仅当  $p$  为真而  $q$  为假 ( $p \leq q$ )

等价式：复合命题“ $p$  当且仅当  $q$ ”称作  $p$  与  $q$  的等价式，记作  $p \leftrightarrow q$

等价联结词： $\leftrightarrow$ ，规定  $p \leftrightarrow q$  为真当且仅当  $p$  与  $q$  同时为真或同时为假

命题常量：一个特定的命题，真值确定

命题变量/项/元：一个没有赋予具体内容的命题，真值可变

命题公式（命题形式）：由命题变元和联结词按以下规则组成的符号串

1. 任何命题变元都是命题公式，称为原子命题公式

2. 如果  $A$  是命题公式，则  $\neg A$  也是命题公式

3. 如果  $A, B$  是命题公式，则  $(A \vee B)$ 、 $(A \wedge B)$ 、 $(A \rightarrow B)$  和  $(A \leftrightarrow B)$  都是命题公式

只有有限次地应用 (1)–(3) 构成的符号串才是命题公式

命题公式定义是归纳定义，而不是循环定义，(1) 是奠基，(2)、(3) 是归纳步骤

• 公式中的 0, 1 看作可看作  $(A \wedge (\neg A))$ 、 $(A \vee (\neg A))$

约定运算顺序

省略命题公式最外层括号： $\neg$  的优先级高于其它的联结词，只作用于紧随其后的命题变元；相同联结词可以省略括号；优先级：(否定) > (合取、析取) > (蕴涵、等价)

赋值（解释）：设  $p_1, p_2, \dots, p_n$  是出现在命题公式  $A$  中的所有命题变元，对序列  $p_1, p_2, \dots, p_n$  指定的任一真值序列，称为对  $A$  的一个赋值

成真/假赋值：若  $p_1, p_2, \dots, p_n$  的一个赋值使  $A$  为真/假，则称此赋值为  $A$  的一个成真/假赋值

重言式（永真式）/矛盾式（永假式）： $A$  关于其中出现的命题变元的所有赋值均为成真/假赋值

可满足式： $A$  对于其中出现的命题变元的某个赋值为成真赋值

哑元：未出现在  $A$  中的命题变元， $A$  取值与哑元取值无关

等值式与范式

等值式：若  $A, B$  构成的等价式  $A \leftrightarrow B$  为重言式，则称  $A$  与  $B$  等值，记作  $A \equiv B$ ，并称  $A \equiv B$  是等值式；等值是一种等价关系

文字：命题变项及其否定的统称

简单析/合取式：仅由有限个文字构成的析/合取式

范式：由有限个简单析/析取式的析/合取构成的命题公式称作析/合取范式；析取范式与合取范式统称作范式

• 简单合（析）取式既是析取范式又是合取范式

极小/大项：以含  $p, q, r$  的情况为例

•  $m_1 = \neg p \wedge \neg q \wedge r$  (下标 = 成真赋值)

•  $M_1 = p \vee q \vee \neg r$  (下标 = 成假赋值)

主析/合取范式：所有简单析/析取式都是极小/大项的析/合取范式

$n$  元真值函数： $F: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$

联结词的完备集  $S$ ：仅由  $S$  中的联结词构成的公式可表示所有真值函数

• 非、或非： $\uparrow$  表示与非， $\downarrow$  表示或非

命题逻辑推理

推理形式：由前提  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  推出结论  $\beta$

推理正确（有效）：如果对  $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta$  中出现的命题变元的任意赋值，若  $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n$  为假，或若  $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n$  为真时  $\beta$  亦真，则称推理“ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  推出  $\beta$ ”有效，否则是不合理（无效）的

• 注：若出现前提为真结论为假的情况则推理无效！

逻辑蕴涵  $\Rightarrow$ ：前提： $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  结论： $\beta$  推理正确记为  $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n \Rightarrow \beta$

•  $A \rightarrow B$  是命题公式， $A \Rightarrow B$  表示两个命题公式之间的逻辑蕴涵关系

自然推理系统  $P$ ：

• 字母表：命题变元、联结词、括号逗号

• 命题公式：（见上）

• 推理规则：（见定理）

一阶谓词逻辑

个体：独立存在的客体

• 个体常量：表示具体事物， $a, b, c, \dots$

• 个体变元：抽象事物（不确定具体哪个） $x, y, z, \dots$

• 个体域：个体变元的取值范围

• 总个体域：由宇宙间一切事物组成的个体域

谓词：表示个体性质或彼此之间关系  $F, G, H, \dots$

• 谓词常量：表示具体性质或关系

• 谓词变元：表示抽象的或泛指的性质或关系

$n$  元谓词：含  $n$  个【个体变元】的谓词，是定义在个体域上，值域为  $\{0, 1\}$  的  $n$  元函数

• 一元谓词：表示事物的性质

• 多元谓词：表示事物之间的关系

• 0 元谓词：不含个体变元的谓词，就是命题常项或命题变项

注：将  $n$  元谓词中的个体变元都用个体域中具体的个体取代后，就成为一个命题

量词：表示数量的词

全称量词  $\forall$ ：自然语言中“所有的”、“一切的”、“任意的”、“每一个”、“都”等的统称。 $\forall x$  个体域中的所有个体； $\forall x F(x)$  个体域里的所有  $x$  都有性质  $F$

存在量词  $\exists$ ：自然语言中“有一个”、“至少有一个”、“存在着”、“有的”等的统称。 $\exists x$  存在个体域里的  $x$ ； $\exists x F(x)$  在个体域里存在  $x$  具有性质  $F$

有限域下的公示表示法（无穷集下无）

•  $\forall x P(x) = P(1) \wedge P(2) \wedge \dots \wedge P(k)$ ：对任意的  $x, P(x)$  均成立，合取联结词的推广

•  $\exists x P(x) = P(1) \vee P(2) \vee \dots \vee P(k)$ ：有一个  $x$  使得  $P(x)$  成立，析取联结词的推广

特性谓词  $M(x)$ ：用于将个体变元局限在满足该谓词代表的性质或关系的范围之内

命题符号化应注意以下几点：

• 两个基本公式： $\forall x(M(x) \rightarrow F(x))$ ，个体域中所有有性质  $M$  的个体都有性质  $F$ ； $\exists x(M(x) \wedge G(x))$ ，个体域中存在有性质  $M$  同时有性质  $G$  的个体

• 同一命题在不同个体域中符号化形式可能不同

• 同一命题在不同个体域中真值可能不同

• 命题中表示性质和关系的谓词，分别符号化为  $一元$  和  $n$  元谓词

• 多个量词出现时，应同类型量词可交换顺序

• 定理： $(\exists x)(\forall y)P(x, y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)P(x, y)$

函数符号：个体域  $D$  上  $n$  元函数符号  $f(x_1, \dots, x_n)$  是  $D^n \rightarrow D$  的函数（与谓词差异在于值域）

一阶语言  $\mathcal{L}$  的字母表

非逻辑符号：所描述的特定对象中的符号

• 个体常量： $a, b, c, \dots, a_i, b_i, c_i, i \geq 1$

• 函数符号： $f, g, h, \dots, f_i, g_i, h_i, i \geq 1$

• 谓词符号： $F, G, H, \dots, F_i, G_i, H_i, i \geq 1$

逻辑符号：逻辑系统中的符号

• 个体变元： $x, y, z, \dots, x_i, y_i, z_i, i \geq 1$

• 量词符号： $\forall, \exists$

• 联结词符号： $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

• 括号与逗号：( ), ,

$\mathcal{L}$  的项

1. 个体常元和个体变元是项
2. 若  $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$  是  $n$  元函数， $t_1, t_2, \dots, t_n$  是任意的  $n$  个项，则  $\varphi(t_1, t_2, \dots, t_n)$  是项
3. 所有的项都是有有限使用 (1), (2) 得到的

原子公式：设  $R(x_1, x_2, \dots, x_n)$  是  $\mathcal{L}$  任意的  $n$  元谓词， $t_1, t_2, \dots, t_n$  是  $\mathcal{L}$  的任意  $n$  个项，则称  $R(t_1, t_2, \dots, t_n)$  是原子公式

定义  $\mathcal{L}$  的合式公式

1. 原子公式是合式公式
2. 若  $A$  是合式公式，则  $(\neg A)$  也是合式公式
3. 若  $A, B$  是合式公式，则  $(A \wedge B)$ 、 $(A \vee B)$ 、 $(A \rightarrow B)$ 、 $(A \leftrightarrow B)$  也是合式公式
4. 若  $A, B$  是合式公式，则  $(\forall x)A$ 、 $(\exists x)A$  也是合式公式

• 项是（复合）个体；（原子）公式是完整的判断

注 1：一阶语言中的原子公式取代了命题公式

注 2：所有一阶语言中都含有相同的逻辑符号，但所含的非逻辑符号不一定相同

注 3：在定义中没有要求个体  $x$  一定要在  $A$  中出现， $(\forall x_1)F(x_1, x_2)$ 、 $(\forall x_3)F(x_1, x_2)$  都是公式

注 4： $L$  中至少有一个谓词符号，否则  $L$  生成的一阶语言中没有公式

括号省略规则

1. 省略公式最外层的括号
2. 联结词  $\neg$  的优先级高于其他联结词，可以去掉  $(\neg a)$  中的外层括号
3.  $\forall x, \exists x$  优先级高于所有联结词，将  $(\forall x)\alpha$ 、 $(\exists x)\alpha$  记作  $\forall x\alpha$ 、 $\exists x\alpha$ ； $(\forall x_1) \dots (\forall x_n)\alpha$  简记为  $\forall x_1 \dots \forall x_n \alpha$ ， $(\exists x_1) \dots (\exists x_n)\alpha$  简记为  $\exists x_1 \dots \exists x_n \alpha$

辖域：公式  $\forall xA$  和  $\exists xA$  中，称  $x$  为 指导变元， $A$  为相应量词的 辖域

约束出现：在  $\forall x$  和  $\exists x$  的辖域中（包括  $\forall x$  和  $\exists x$  中的  $x$ ）， $x$  的所有出现称为约束出现， $A$  中不是约束出现的其他变元称为 自由出现

约束变元：设个体变元  $x$  在公式  $A$  中出现，若  $x$  在  $A$  中的所有出现【均】为约束出现，则称  $x$  为  $A$  的约束变元；否则称为自由变元

闭式：设  $A$  是任意的公式，若  $A$  中不含自由出现的个体变元，则称  $A$  为封闭的公式，简称闭式

• 要将含  $r$  个自由出现的个体变元的公式变成闭式，至少需要加上  $r$  个量词

解释与赋值

• 设一阶语言  $\mathcal{L}$  个体常元集  $\{a_i\}$ ，函数符号集  $\{f_i\}$ ，谓词符号集  $\{F_i\}$ ， $\mathcal{L}$  的解释  $I$  由下面 4 部分组成：

1. 非空个体域  $D_I$
2. 对每一个个体常量  $a_i, \overline{a_i} \in D_I$ ，称作  $a_i$  在  $I$  中的解释
3. 对每一个函数符号  $f_i$ ，设其为  $m$  元的， $\overline{f_i}$  是  $D_I$  上的  $m$  元函数，称作  $\overline{f_i}$  在  $I$  中的解释
4. 对每一个谓词符号  $F_i$ ，设其为  $n$  元的， $\overline{F_i}$  是一个  $n$  元谓词，称作  $\overline{F_i}$  在  $I$  中的解释

•  $I$  下的赋值  $\sigma$ ：对每一个【自由出现】的个体变元  $x$  指定个体域中的一个值  $\sigma(x)$

注 1：任何公式在给定的解释和赋值下都是命题

注 2：闭式在任何解释下都变成命题（无需赋值）

永真式（逻辑有效式）：无成假解释和赋值

矛盾式（永假式）：无成真解释和赋值

可满足式：至少有一个成真解释和赋值

代换实例：设  $A_0$  是含命题变项  $p_1, p_2, \dots, p_n$  的命题公式， $A_1, A_2, \dots, A_n$  是  $n$  个谓词公式，用  $A_i$  处处代替  $A_0$  中的  $p_i(1 \leq i \leq n)$ ，所得公式  $A$  称为  $A_0$  的代换实例。例如， $F(x) \rightarrow G(x)$ ， $\forall x F(x) \rightarrow \exists y G(y)$  都是  $p \rightarrow q$  的代换实例

等值式：设  $A, B$  是一阶逻辑中任意两个公式，若  $A \leftrightarrow B$  是永真式，则称  $A$  与  $B$  等值，记作  $A \equiv B$ ，并称  $A \equiv B$  为等值式

前束范式：一阶逻辑公式  $A$  具  $Q_1x_1 \dots Q_kx_k B$  的形式。其中  $Q_i = \forall$  或  $\exists$ ， $B$ （母式/基式）不含量

词

推理正确（有效）：在一阶逻辑中，从前提  $A_1, \dots, A_k$  推出结论  $B$  正确，若  $A_1 \wedge \dots \wedge A_k \Rightarrow B$  为永真式，记作  $A_1 \wedge \dots \wedge A_k \Rightarrow B$ ，否则称推理不正确

自然推理系统  $N_1$  一阶逻辑自然推理系统包括：

1. 字母表：同一阶语言字母表

2. 合式公式（谓词公式）：（见上）

3. 推理规则：（见定理）

等值式与范式定理

交换律  $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A, A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A, A \leftrightarrow B \Leftrightarrow B \leftrightarrow A$

结合律  $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C), (A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C), (A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C \Leftrightarrow C \leftrightarrow A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)$

分配律  $A \rightarrow (B \rightarrow C) \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$

$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ ，与或可互换

否定律  $A \Leftrightarrow \neg \neg A$

德摩根律  $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B, \neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

幂等律  $A \vee A \Leftrightarrow A, A \wedge A \Leftrightarrow A, A \rightarrow A \Leftrightarrow 1, A \leftrightarrow A \Leftrightarrow 1$

吸收率  $A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A, A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$

零律  $A \vee 1 \Leftrightarrow 1, A \wedge 0 \Leftrightarrow 0, A \rightarrow 1 \Leftrightarrow 1, 0 \rightarrow A \Leftrightarrow 1$

同一律  $A \vee 0 \Leftrightarrow A, A \wedge 1 \Leftrightarrow A, A \rightarrow 0 \Leftrightarrow \neg A, 0 \rightarrow A \Leftrightarrow \neg A$

排中律  $A \vee \neg A \Leftrightarrow 1$

矛盾律  $A \wedge \neg A \Leftrightarrow 0$

蕴涵等值式  $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$

等价等值式  $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

假言易位  $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg A \rightarrow \neg B$

等价否定等值式  $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow A \leftrightarrow \neg \neg B$

归谬律  $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B) \Leftrightarrow \neg A$

其他  $A \rightarrow \neg A \Leftrightarrow \neg A, \neg A \rightarrow A \Leftrightarrow A, A \leftrightarrow \neg A \Leftrightarrow 0, A \rightarrow (B \rightarrow C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \rightarrow C \Leftrightarrow B \rightarrow (A \rightarrow C)$

$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$

$(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \Leftrightarrow (A \vee B) \rightarrow C$

置换规则设  $\phi(A)$  是含公式  $A$  的公式，用公式  $B$

置换  $\phi(A)$  中的  $A$ ，得公式  $\phi(B)$ ，如果  $A \equiv B$ ，则  $\phi(A) \equiv \phi(B)$

证明等值式：真值表法/等值演算

证明不等值式：真值表法/观察一个不等值的赋值/先等值演算再观察

• 一个简单析取式是重言式当且仅当它同时含某个命题变项及它的否定式

• 一个简单合取式是矛盾式当且仅当它同时含某个命题变项及它的否定式

• 一个析取范式是矛盾式当且仅当它的每个简单合取式都是矛盾式

• 一个合取范式是重言式当且仅当它的每个简单析取式都是重言式

范式存在定理：任一命题公式都存在与之等值的析取范式与合取范式

• 方法：利用蕴涵等值式和等价等值式消去；利用双重否定式和德摩根率将  $\neg$  消去或内移；分配律一些联结词的完备集： $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ ， $\{\neg, \downarrow\}$

• 证明：从主析取得  $\{\neg, \wedge, \vee\}$ ，其他通过符号间的表示

• 不考虑与非、或非、2 元素有 3 个完备，3 元素有 6 个完备（含  $\neg$  即可），4 元素有 4 个完备

命题逻辑的推理定理

• 的基本性质

- 若  $A \Rightarrow B$ ， $A$  为重言式，则  $B$  也是重言式
- 若  $A \Rightarrow B, B \Rightarrow A$  同时成立，必有  $A \Leftrightarrow B$
- 若  $A \Rightarrow B, B \Rightarrow C$ ，则  $A \Rightarrow C$
- 若  $A \Rightarrow B, A \Rightarrow C$ ，则  $A \Rightarrow B \wedge C$
- 若  $A \Rightarrow B, B \Rightarrow C$ ，则  $A \vee B \Rightarrow C$

证明推理公式  $A \Rightarrow B$  的方法

• 真值表法；直观解释法【关注前提为真结论为假】

## 集合基础概念

全集：



B
⊆
A
⇔
∀
x
(
x
∈
B
⇒
x
∈
A
)


{\displaystyle B\subseteq A\Leftrightarrow \forall x(x\in B\Rightarrow x\in A)}

非子集：



B
⊈
A
⇔
∃
x
(
x
∈
B
∧
x
∈
A
)


{\displaystyle B\not\subseteq A\Leftrightarrow \exists x(x\in B\wedge x\in A)}

相等：



A
=
B
⇔
∀
x
(
x
∈
B
↔
x
∈
A
)
⇔
A
⊆
B
∧
B
⊆
A


{\displaystyle A=B\Leftrightarrow \forall x(x\in B\Leftrightarrow x\in A)\Leftrightarrow A\subseteq B\wedge B\subseteq A}

真子集：



A
⊂
B
⇔
A
⊆
B
∧
A
≠
B


{\displaystyle A\subset B\Leftrightarrow A\subseteq B\wedge A\neq B}

非真子集：



A
⊄
B
⇔
∃
x
(
x
∈
A
∧
x
∈
B
)
∨
A
=
B


{\displaystyle A\not\subset B\Leftrightarrow \exists x(x\in A\wedge x\in B)\veq A=B}

空集：



∅
=
{
x
|
x
≠
x
}
，是一切集合的子集；唯一全集 *E*：



E
=
{
x
|
x
=
x
}
，与具体问题相关，不唯一

幂集：



P
(
A
)
=

2

A


=
{
x
|
x
⊆
A
}
，易知 |*P*(*A*)| = 2<sup>*n*</sup>

*n* 元集：*A* 有 *n* 个元素，记作 |*A*| = *n*

有穷集（有限集）：*A* 的元素个数有限

并集：



A
∪
B
=
{
x
|
x
∈
A
∨
x
∈
B
}


{\displaystyle A\cup B=\{x|x\in A\vee x\in B\}}

初级并：




A

1


∪

A

2


∪
…
∪

A

n


=
{
x
|
∃
i
(
1
≤
i
≤
n
∧
x
∈

A

i


)
}
,

⋃

i
=
1


n


A

i


=

A

1


∪

A

2


∪
…
∪

A

n


,

⋃

i
=
1


n


A

i


=

A

1


∪

A

2


∪
…


{\displaystyle A\_{1}\cup A\_{2}\cup \ldots \cup A\_{n}=\{x|\exists i(1\leq i\leq n\wedge x\in A\_{i})\},\bigcup \_{i=1}^{n}A\_{i}=A\_{1}\cup A\_{2}\cup \ldots \cup A\_{n},\bigcup \_{i=1}^{n}A\_{i}=A\_{1}\cup A\_{2}\cup \ldots }

交集：



A
∩
B
=
{
x
|
x
∈
A
∧
x
∈
B
}


{\displaystyle A\cap B=\{x|x\in A\wedge x\in B\}}

初级交：




A

1


∩

A

2


∩
…
∩

A

n


=
{
x
|
∀
i
(
1
≤
i
≤
n
⇒
x
∈

A

i


)
}
,

⋂

i
=
1


n


A

i


=

A

1


∩

A

2


∩
…
∩

A

n


=

A

1


∩

A

2


∩
…


{\displaystyle A\_{1}\cap A\_{2}\cap \ldots \cap A\_{n}=\{x|\forall i(1\leq i\leq n\Rightarrow x\in A\_{i})\},\bigcap \_{i=1}^{n}A\_{i}=A\_{1}\cap A\_{2}\cap \ldots \cap A\_{n}=\cap \_{i=1}^{n}A\_{i}=A\_{1}\cap A\_{2}\cap \ldots }

不相交：设 *A*<sub>1</sub>,*A*<sub>2</sub>,... 是可数多个集合，对于任意的 *i* ≠ *j*，都有 *A*<sub>*i*</sub> ∩ *A*<sub>*j*</sub> = ∅，则称 *A*<sub>1</sub>,*A*<sub>2</sub>,... 是互不相交的

相对补集：只属于 *A* 而不属于 *B* 的全体元素组成的集合为 *B* 对 *A* 的相对补集。



A
−
B
=
{
x
|
x
∈
A
∧
x
∈
B
}
=
A
∩

B

c




{\displaystyle A-B=\{x|x\in A\wedge x\notin B\}=A\cap B^{c}}

绝对补集：



∼
A
=
{
x
|
x
∈
E
∧
x
∈
A
}
=
E
−
A
=
{
x
|
x
∈
A
}


{\displaystyle \sim A=\{x|x\in E\wedge x\notin A\}=E-A=\{x|x\in A\}}

广义并：



⋃
A
=
{
x
|
∃
z
(
x
∈
z
∧
z
∈
A
)
}
，*A* 是族族（即 *A* 的元素是集合）：



⋃
∅
=
∅


{\displaystyle \bigcup \varnothing =\varnothing }

广义交：



⋂
A
=
{
x
|
∀
z
(
z
∈
A
⇒
x
∈
z
)
}
，*A* 是族族且非空——理论上 



⋂
∅


{\displaystyle \bigcap \varnothing }

包含任意元素，即包含所有集合，这在集合论中无意义

• {



x
|
∀
z
(
z
∈
A
⇒
x
∈
P
(
z
)
)
}
=
∩
{
P
(
z
)
|
z
∈
A
}


{\displaystyle \{x|\forall z(z\in A\Rightarrow x\in P(z))\}=\cap \{P(z)|z\in A\}}

集合运算的优先级：一元运算优先于二元运算

• 第一类运算/一元运算（从右向左）：绝对补、幂集、广义交/并

• 第二类运算/二元运算（从左向右）：初级并/交、相对补、对称差

### 二元关系

有序对：由两个元素 *x* 和 *y*（允许 *x* = *y*）按照一定顺序排列而成的二元组称作一个有序对，记作 (*x*,*y*) := {|*a*},{*a*,*b*|}

• *x* = *y* ⇔ (*x*,*y*) = (*y*,*x*)

• (*a*,*b*) = (*c*,*d*) ⇔ *a* = *c* ∧ *b* = *d*

笛卡尔积（**卡式积**）：设 *A*,*B* 为集合，用 *A* 中元素为第一个元素，*B* 中元素为第二元素构成有序对。所有这样的有序对组成的集合称作 *A* 和 *B* 的笛卡尔积，记作 *A* × *B* := {(*x*,*y*)|*x* ∈ *A* ∧ *y* ∈ *B*}

笛卡积性质

•非交换 *A* × *B* ≠ *B* × *A*【除非 *A* = ∅ ∨ *B* = ∅ ∨ *A* = *B*】

•非结合 (*A* × *B*) × *C* ≠ *A* × (*B* × *C*)【除非 *A* = ∅ ∨ *B* = ∅ ∨ *C* = ∅】

•对并和交满足分配律：

• *A* × (*B* ∪ *C*) = (*A* × *B*) ∪ (*A* × *C*)

• (*B* ∪ *C*) × *A* = (*B* × *A*) ∪ (*C* × *A*)

• *A* × (*B* ∩ *C*) = (*A* × *B*) ∩ (*A* × *C*)

• (*B* ∩ *C*) × *A* = (*B* × *A*) ∩ (*C* × *A*)

• *A* × ∅ = ∅, ∅ × *A* = ∅

• *A* × *B* = ∅ ⇔ *A* = ∅ ∨ *B* = ∅

•若 *A* ≠ ∅，则 *A* × *B* ⊆ *A* × *C* ⇔ *B* ⊆ *C*

• *A* ⊆ *C* ∧ *B* ⊆ *D* ⇒ *A* × *B* ⊆ *C* × *D*【当 (*A* = *B* = ∅) ∨ (*A* ≠ ∅ ∧ *B* ≠ ∅) 时，逆命题成立】

*n* 元关系：元素全是有序 *n* 元组【或为空集】的集合

二元关系（关系）：*n* = 2 的情形，记作 *R*

• 记号：(<*x*,*y*) ∈ *R* ⇔ *R*(*x*,*y*), *R**x**y* ⇔ *xRy*

• 若 (<*x*,*y*) ∈ *R*，记作 *x* ~ *Ry*。

*A* 到 *B* 的二元关系：*A* × *B* 的任何子集（含空集）⇔ *R* ⊆ *A* × *B* ⇔ *R* ∈ *P*(*A* × *B*)

• *A* 到 *B* 不同的二元关系有 2<sup>|*A*|·|*B*|</sup> 个

• 当 *A* = *B* 时称作 *A* 上的二元关系

特殊关系：对于任何集合 *A*：

• 空关系：∅

• 全域关系：




E

A


=
{
⟨
x
,
y
⟩
|
x
∈
A
∧
y
∈
A
}
=
A
×
A


{\displaystyle E\_{A}=\{\langle x,y\rangle |x\in A\wedge y\in A\}=A\times A}

• 恒等关系：




I

A


=
{
⟨
x
,
x
⟩
|
x
∈
A
}


{\displaystyle I\_{A}=\{\langle x,x\rangle |x\in A\}}

• 小于等于关系：




L

E

A


=
{
⟨
x
,
y
⟩
|
x
∈
A
,
x
≤
y
}


{\displaystyle LE\_{A}=\{\langle x,y\rangle |x\in A,x\leq y\}}

• 整除关系：




D

A


=
{
⟨
x
,
y
⟩
|
y
∈
A
,
x
|
y
}


{\displaystyle D\_{A}=\{\langle x,y\rangle |y\in A,x|y\}}

• 包含关系：




R

C


=
{
⟨
x
,
y
⟩
|
x
∈
A
,
x
⊆
y
}


{\displaystyle R\_{C}=\{\langle x,y\rangle |x\in A,x\subseteq y\}}

• 真包含关系：




R

C


=
{
⟨
x
,
y
⟩
|
x
,
y
∈
A
,
x
⊂
y
}


{\displaystyle R\_{C}=\{\langle x,y\rangle |x,y\in A,x\subset y\}}

关系矩阵：*M*(*R*) = [*r*<sub>*ij*</sub>]<sub>*m* × *n*</sub>，若 *x*<sub>*i*</sub> 与 *x*<sub>*j*</sub> 有关系则 *r*<sub>*ij*</sub> = 1，否则为 0

关系图：(<*x*<sub>*i*</sub>,*x*<sub>*j*</sub>) ∈ *R* 对应图 *G*<sub>*R*</sub> 中 *x*<sub>*i*</sub> 到 *x*<sub>*j*</sub> 的有向边

• 集合表达式、关系矩阵、关系图三者可唯一互相确定。

逆关系：




R

−
1


=
{
⟨
y
,
x
⟩
|
⟨
x
,
y
⟩
∈
R
}


{\displaystyle R^{-1}=\{\langle y,x\rangle |{\langle x,t\rangle \in F\wedge \langle t,y\rangle \in G\}}

右复合：




F

∘
G


=
{
⟨
x
,
y
⟩
|
∃
t
(
⟨
x
,
t
⟩
∈
F
∧
⟨
t
,
y
⟩
∈
G
)
}


{\displaystyle F\circ G=\{\langle x,y\rangle |{\exists t(\langle x,t\rangle \in F\wedge \langle t,y\rangle \in G)\}}

定义域：*R* 中所有有序对的第一元素构成的集合称作 *R* 的定义域，记作 dom*R*，即 dom*R* = {*x* | ∃*y*(*x*,*y*) ∈ *R*}

值域：*R* 中所有有序对的第二元素构成的集合称作 *R* 的值域，记作 ran*R*，即 ran*R* = {*y* | ∃*x*(*x*,*y*) ∈ *R*}

域：*R* 的定义域和值域的并集为域，记作 fld*R*，即 fld*R* = dom*R* ∪ ran*R*

限制：*R* 在 *A* 上的限制记作 *R* ↑ *A*，即 *R* ↑ *A* = {(<*x*,*y*) | *xRy* ∧ *x* ∈ *A*} ⊆ *R*

像：*A* 在 *R* 上的像记作 *R*[*A*]，即 *R*[*A*] = ran(*R* ↑ *A*) = {*y* | ∃*x*(*x* ∈ *A* ∧ *xRy*)} ⊆ ran*R*

幂运算：*R* 的 *n* 次幂

• *R*<sup>0</sup> = {(<*x*,*x*) | *x* ∈ *A*} = *I*<sub>*A*</sub>

• *R*<sup>*n*+1</sup> = *R*<sup>*n*</sup> ∘ *R*

关系运算的顺序

• 逆运算优先于其他运算

• 关系运算（逆、合成、限制、像）优先于集合运算（交并补、相对补、对称差等）

• 没有规定优先权的运算以括号决定运算顺序

自反：设 *R* 为 *A* 上的关系，*R* 在 *A* 上是自反的 ⇔ ∀*x*(*x* ∈ *A* ⇒ (<*x*,*x*) ∈ *R*) ⇔ (∀*x* ∈ *A*)*xRx*

非自反：自反的否定，定义空关系非自反

反对称：称 *R* 在 *A* 上是反对称的，若 ∀*x*(*x* ∈ *A* ⇒ (<*x*,*x*) ∈ *R*)

对称：若 ∀*x*∀*y*(*x*,*y* ∈ *A* ∧ (<*x*,*y*) ∈ *R* ⇒ (<*y*,*x*) ∈ *R*)，则称 *R* 为 *A* 上对称的关系

反对称：若 ∀*x*∀*y*(*x*,*y* ∈ *A* ∧ (<*x*,*y*) ∈ *R* ∧ (<*y*,*x*) ∈ *R* ⇒ *x* = *y*)，则称 *R* 为 *A* 上反对称的关系

传递：∀*x*∀*y*∀*z*(*x*,*y*,*z* ∈ *A* ∧ (<*x*,*y*) ∈ *R* ∧ (<*y*,*z*) ∈ *R* ⇒ (<*x*,*z*) ∈ *R*)【若两步能到，一步一定能到】

自反/对称/传递闭包：要求 *A* 非空，*R* 的 ×× 闭包是 *A* 上的关系 *R*<sup>'</sup> 满足 *R* ⊆ *R*<sup>'</sup>、×× 性、极小性：分别记作 *r*(*R*)、*s*(*R*)、*t*(*R*)

• 极小性的表示：∀*S*(*R* ⊆ *S* ∧ 自反) ⇒ *r*(*R*) ⊆ *S*)

等价关系：设 *R* 为非空集合 *A* 上的关系，若 *R* 是自反、对称、传递的，则称 *R* 为 *A* 上的等价关系。设 *R* 为一个等价关系，若 (<*x*,*y*) ∈ *R*，则称 *x* 等价于 *y*，记作 *x* ~ *y*。空关系不是等价关系。

等价类：设 *R* 为非空集合 *A* 上的等价关系,∀*x* ∈ *A*，令 [*x*]<sub>*R*</sub> = {*y* | *y* ∈ *A* ∧ *xRy*}，称 [*x*]<sub>*R*</sub> 为 *x* 关于 *R* 的等价类，简记为 [*x*]

商集：设 *R* 为非空集合 *A* 上的等价关系，*R* 的所有等价类组成的集合是 *A* 关于 *R* 的商集，记作 *A*/*R*，即 *A*/*R* = {[*x*]<sub>*R*</sub> | *x* ∈ *A*}（是一个族集）

• 显然 *A*/*R* = { [*x*]<sub>*R*</sub> | *x* ∈ *A* }

划分：*A* ≠ ∅ 的一个划分是 *A* 的子族族 *A* ⊆ *P*(*A*) 满足：∅ ∉ *A*，∀*x*∀*y*(*x*,*y* ∈ *A* ∧ *x* ≠ *y* ⇒ *x* ∩ *y* = ∅)，⋃ *A* = *A*，称 *A* 中的元素为 *A* 的划分块。

• *R* 是*A* 上的等价关系 ⇒ 商集 *A*/*R* 是 *A* 的划分

• *A* 是*A* 的划分 ⇔ 同伙关系 *R*<sub>*A*</sub> 是 *A* 上的等价关系

注：求所有等价关系时并上 *I*<sub>*A*</sub>（自反性）

Stirling子集数：记 *f*[*n*][*k*]为*n* 个不同元素划分为 *k* 组的方法数，*f*[*n*][0] = 0, *f*[*n*][1] = 1, *f*[*n*][2] = 2<sup>*n*−1</sup> − 1, *f*[*n*][*n* − 1] = *C*<sub>*n*</sub><sup>2</sup>, *f*[*n*][*n*] = 1, *f*[*n*][*k*] = *k*!*f*[*n* − 1][*k*] + *f*[*n* − 1][*k* − 1]

• Σ*f*[3][*k*] = 5, Σ*f*[4][*k*] = 15

偏序关系：设 *A* ≠ ∅, *R* ⊆ *A* × *A*，若 *R* 是自反、反对称、传递的，则称 *R* 为 *A* 的偏序关系，记作 ≤。设 ≤ 为偏序关系，如果 (<*x*,*y*) ∈ ≤，则记作 *x* ≤ *y*

• 自反时证反对称：*xRy* ∧ *yRx* ⇒ *x* = *y*

偏序集：≤是*A* 上的偏序关系，称 (<*A*, ≤) 为偏序集 设 (<*A*, ≤) 为偏序集，*x*,*y* ∈ *A*，定义：

• *x*与*y* 可比：若 *x* ≤ *y* ∨ *y* ≤ *x*

• 严格小于：*x* < *y* ⇔ *x* ≤ *y* ∧ *x* ≠ *y*

• 覆盖：称 *y* 覆盖 *x*，若 *x* < *y*，且不存在 *z*，使得 *x* < *z* < *y*

• 对任意两个元素 *x*,*y*，有四种情况必发生其中恰好一种：*x* < *y*，*y* < *x*，*x* = *y*，*x* 与 *y* 不是可比的

哈斯图：∀*x*,*y* ∈ *A*，若 *x* < *y*，则将 *x* 画在 *y* 下方；对于 *A* 中两个不同的元素 *x* 和 *y*，若 *y* 覆盖 *x*，就用一条线段连接 *x* 和 *y*

• 省略自反性、传递性及反对称性的箭头

全序关系（线性序）：设 (<*A*, ≤) 为偏序集，若 ∀*x*,*y* ∈ *A*，*x* 与 *y* 都是可比的，则 *R* 为 *A* 上的全序关系（哈斯图是一根线）

拟序关系：设 *R* 为非空集合 *A* 上的关系。若 *R* 是反自反、传递的，则称 *R* 为 *A* 上的拟序关系，常用 < 表示拟序关系，(<*A*, <) 为拟序集。

• 反自反性与传递性蕴涵反对称性

最/极大/小/元：设 (<*A*, ≤) 为偏序集，*B* ⊆ *A*,*y* ∈ *B*

• 若 ∀*x*(*x* ∈ *B* ⇒ *y* ≤ *x*) 成立，则称 *y*为*B* 的最小元【可以无必唯一】

• 若 ∀*x*(*x* ∈ *B* ∧ *x* ≤ *y* ⇒ *x* = *y*) 成立，则称*y*为*B* 的极大元【必存在不唯一，不大于任何元】

上/下界：设 (<*A*, ≤) 为偏序集，*B* ⊆ *A*,*y* ∈ *A*

• 若 ∀*x*(*x* ∈ *B* ⇒ *x* ≤ *y*) 成立，则称 *y*为*B* 的上界【可以无不唯一】

• 令 *C* = {*y* | *y*为*B*的上界}，则称 *C* 的最小元为 *B* 的最小上界或上确界【可以无必唯一】

• 上界与下界不一定存在集合之中

• 集合的最小元素是它的下确界，最大元素就是它的上确界；反之不对

函数（映射）：单值的二元关系 *F*，若 ∀*x* ∈ dom*F* 都存在唯一的 *y* ∈ ran*F* 使得 *xFy* 成立（单值）

• 记号：*F*(*x*) = *y* ⇔ (<*x*,*y*) ∈ *F* ⇔ *xFy*

• 证单值：∀*x* ∈ dom*F*,∀*y*,*z* ∈ ran*F*,*xFy* ∧ *xFz* ⇒ *y*