离散数学期末知识点汇总 自35 2024.12

命题、联结词与命题公式

命题：非真即假/可明确判真假的陈述句
- **悖论**：[我正在撒谎] 既不为真也不为假
- [长方形是正方形] 既可为真也可为假

真值：命题的判断结果，只取真或假两个值

真命题/假命题：真值为真/假的命题

命题符号化：将命题抽象为取值为 0or1 的 $p,q\dots$

简单命题（原子命题）：不能被分解成更简单的命题的命题

复合命题：由简单命题通过联结词联结而成的命题
- 其真假完全由构成它的简单命题的真假决定
- 简单命题和复合命题的划分是相对的

否定式：复合命题“非 p”称作 p 的否定式，$\neg p$

否定联结词：$\neg$，规定 $\neg p$ 为真当且仅当 p 为假

合取式：复合命题“p 并且 q”称为 p 与 q 的合取式，记作 $p \wedge q$

合取联结词：$\wedge$，规定 $p\wedge q$ 为真当且仅当 p 与 q 同时为真

析取式：复合命题“p 或 q”称作 p 与 q 的析取式，记作 $p \vee q$

析取联结词：$\vee$，规定 $p\vee q$ 为假当且仅当 p 与 q 同时为假
- **相容或与相斥或**：$\vee$ 与 $\overline{\vee}$，$\overline{\vee}$ 为真要满足 p,q 不同时为真；不能看见 p 或 q 就转化为 $p \vee q$

蕴含式：复合命题“如果 p，则 q”称为 p 与 q 的蕴含式，记作 $p \to q$，并称 p 是前件，q 是后件
- 例子：如果 p 则 q；q 每当 p；p 仅当 q；只有 q 才 p；除非 q 才 p；除非 q，否则非 q

蕴含联结词：$\to$，规定 $p \to q$ 为假当且仅当 p 为真而 q 为假（$p \le q$）

等价式：复合命题“p 当且仅当 q”称作 p 与 q 的等价式，记作 $p \leftrightarrow q$

等价联结词：$\leftrightarrow$，规定 $p \leftrightarrow q$ 为真当且仅当 p 与 q 同时为真或同时为假

命题常量：一个特定的命题，真值确定

命题变量/项/元：一个没有赋予具体内容的命题，真值可变

命题公式（命题形式）：由命题变元和联结词按以下规则组成的符号串
1. 任何命题变元都是命题公式，称为原子命题公式
2. 如果 A 是命题公式，则 $\neg A$ 也是命题公式
3. 如果 A、B 是命题公式，则 $(A\vee B)$、$(A\wedge B)$、$(A\to B)$ 和 $(A\leftrightarrow B)$ 都是命题公式

只有有限次地应用 (1)—(3) 构成的符号串才是命题公式
命题公式定义是归纳定义，而不是循环定义，(1) 是奠基，(2)、(3) 是归纳步骤
- 公式中的 0, 1 看作可看作 $(A\wedge(\neg A))$、$(A\vee(\neg A))$

约定运算顺序

省略命题公式最外层括号；$\neg$ 的优先级高于其它的联结词，只作用于紧随其后的命题变元；相同联结词可以省略括号；优先级：(否定) > (合取、析取) > (蕴含、等价)

赋值（解释）：设 $p_1,p_2,\dots,p_n$ 是出现在命题公式 A 中的所有命题变元，对序列 $p_1,p_2,\dots,p_n$ 指定的的任一真值序列，称为对 A 的一个赋值

成真/假赋值：若 $p_1,p_2,\dots,p_n$ 的一个赋值使 A 为真/假，则称此赋值为 A 的一个成真/假赋值

重言式（永真式）/矛盾式（永假式）：A 关于其中出现的命题变元的所有赋值均为成真/假赋值

可满足式：A 对于其中出现的命题变元的某个赋值为成真赋值

哑元：未出现在 A 中的命题变元，A 取值与哑元取值无关

等值式与范式

等值式：若 A,B 构成的等价式 $A\leftrightarrow B$ 为重言式，则称 A 与 B 等值，记作 $A\Leftrightarrow B$，并称 $A\Leftrightarrow B$ 是等值式；等值是一种等价关系

文字：命题变项及其否定的统称

简单析/合取式：仅由有限个文字构成的析/合取式

范式：由有限个简单合/析取式的**析/合**取构成的命题公式称作**析/合**取范式；析取范式与合取范式统称作范式
- 简单合（析）取式既是析取范式又是合取范式

极小/大项：以含 p,q,r 的情况为例
- $m_1 = \neg p \wedge \neg q \wedge r$（下标 = 成真赋值）
- $M_1 = p \vee q \vee \neg r$（下标 = 成假赋值）

主析/合取范式：所有简单合/析取式都是极小/大项的析/合取范式

n 元真值函数：$F:\{0,1\}^n \to \{0,1\}$

联结词的完备集 S：仅由 S 中的联结词构成的公式可表示所有真值函数

与非、或非：$\uparrow$ 表示与非，$\downarrow$ 表示或非

命题逻辑推理

推理形式：由前提 α_1，α_2，$\cdots$，α_n 推出结论 β

推理正确（有效）：如果对 α_1，$\cdots,\alpha_n$，β 中出现的命题变元的任意赋值，若 $\alpha_1\wedge\alpha_2\wedge\cdots\wedge\alpha_n$ 为假，或若 $\alpha_1\wedge\alpha_2\wedge\cdots\wedge\alpha_n$ 为真时 β 亦真，则称推理 "α_1，α_2，$\cdots$，α_n 推出 β" 有效，否则是不合理（无效）的。
- 注：若出现**前提为真结论为假**的情况则推理无效！

逻辑蕴含 $\Rightarrow$：前提：α_1，α_2，$\cdots$，α_n 结论：β 推理正确记为 $\alpha_1\wedge\alpha_2\wedge\cdots\wedge\alpha_n \Rightarrow \beta$
- $A\to B$ 是命题公式，$A\Rightarrow B$ 表示两个命题公式之间的逻辑蕴含关系

自然推理系统 P：
- 字母表：命题变元、联结词、括号逗号
- 命题公式：（见上）
- 推理规则：（见定理）

一阶谓词逻辑

个体：独立存在的客体
- 个体常元：表示具体事物，$a,b,c,\dots$
- 个体变元：抽象事物（不确定具体哪个）$x,y,z,\dots$

个体域：个体变元的取值范围
- 全总个体域：由宇宙间一切事物组成的个体域

谓词：表示个体性质或彼此之间关系 $F,G,H,\dots$
- 谓词常元：表示具体性质或关系
- 谓词变元：表示抽象的或泛指的性质或关系

n 元谓词：含 n 个【个体变元】的谓词，是定义在个体域上，值域为 $\{0,1\}$ 的 n 元函数
- 一元谓词：表示事物的性质
- 多元谓词：表示事物之间的关系
- 0 元谓词：不含个体变元的谓词，就是命题常项或命题变项

注：将 n 元谓词中的个体变元都用个体域中具体的个体取代后，就成为一个命题

量词：表示数量的词
全称量词 $\forall$：自然语言中“所有的”、“一切的”、“任意的”、“每一个”、“都”等的统称。$\forall x$ 个体域中的所有个体；$\forall xF(x)$ 个体域里的所有 x 都有性质 F
存在量词 $\exists$：自然语言中“有一个”、“至少有一个”、“存在着”、“有的”等的统称。$\exists x$ 存在个体域里的 x；$\exists xF(x)$ 在个体域里存在 x 具有性质 F

有限域下的公示表示法（无穷集下无）
- $\forall xP(x) = P(1)\wedge P(2)\wedge\dots\wedge P(k)$：对任意的 x，$P(x)$ 均成立，合取联结词的推广
- $\exists xP(x) = P(1)\vee P(2)\vee\dots\vee P(k)$：有一个 x 使得 $P(x)$ 成立，析取联结词的推广

特性谓词 $M(x)$：用于将个体变元局限在满足该谓词代表的性质或关系的范围之内

命题符号化应注意以下几点：
- 两个基本公式：$\forall x(M(x)\to F(x))$，个体域中所有有性质 M 的个体都有性质 F；$\exists x(M(x)\wedge G(x))$，个体域中存在有性质 M 同时有性质 G 的个体
- 同一命题在不同个体域中符号化形式可能不同
- 同一命题在不同个体域中真值可能不同
- 命题中表示性质和关系的谓词，分别符号化为一元和 n 元谓词
- 多个量词出现时，仅同类量词可交换顺序
- 定理：$(\exists x)(\forall y)P(x,y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)P(x,y)$

函数符号：个体域 D 上，n 元函数符号 $f(x_1,\dots,x_n)$ 是 $D^n\to D$ 的函数（与谓词差异在于定义域）

一阶语言 $\mathcal{L}$ 的字母表

非逻辑符号：所描述的特定对象中的符号
- 个体常元：$a,b,c,\dots,a_i,b_i,c_i,i\ge 1$
- 函数符号：$f,g,h,\dots,f_i,g_i,h_i,\dots,i\ge 1$
- 谓词符号：$F,G,H,\dots,F_i,G_i,H_i,i\ge 1$

逻辑符号：逻辑系统中的符号
- 个体变元：$x,y,z,\dots,x_i,y_i,z_i,\dots,i\ge 1$
- 量词符号：$\forall,\exists$
- 联结词符号：$\neg,\wedge,\vee,\to,\leftarrow$
- 括号与逗号：$()$,

$\mathcal{L}$ 的项
1. 个体常元和个体变元是项
2. 若 $\varphi(x_1,x_2,\dots,x_n)$ 是 n 元函数，$t_1,t_2,\dots,t_n$ 是任意的 n 个项，则 $\varphi(t_1,t_2,\dots,t_n)$ 是项
3. 所有的项都是有限次使用 (1), (2) 得到的

原子公式：设 $R(x_1,x_2,\dots,x_n)$ 是 $\mathcal{L}$ 任意的 n 元谓词，$t_1,t_2,\dots,t_n$ 是 $\mathcal{L}$ 的任意 n 个项，则称 $R(t_1,t_2,\dots,t_n)$ 是原子公式

定义 $\mathcal{L}$ 的合式公式
1. 原子公式是合式公式
2. 若 A 是合式公式，则 $(\neg A)$ 也是合式公式
3. 若 A, B 是合式公式，则 $(A\wedge B),(A\vee B),(A\to B),(A\leftrightarrow B)$ 也是合式公式
4. 若 A, B 是合式公式，则 $(\forall x)A,(\exists x)A$ 也是合式公式
- 项是（复合）个体；（原子）公式是完整的判断

注 1：一阶语言中的原子公式取代了命题公式

注 2：所有一阶语言中都含有相同的逻辑符号，但所含的非逻辑符号不一定相同

注 3：在定义中没有要求个体 x 一定要在 A 中出现，$(\forall x_1)F(x_1,x_2),(\forall x_3)F(x_1,x_2)$ 都是公式

注 4：L 中至少有一个谓词符号，否则 L 生成的一阶语言中没有公式

括号省略规则
1. 省略公式最外层的括号
2. 联结词 $\neg$ 的优先级高于其他联结词，可以去掉 $(\neg\alpha)$ 中的外层括号
3. $\forall x,\exists x$ 优先级高于所有联结词，将 $(\forall x)\alpha,(\exists x)\alpha$ 记作 $\forall x\alpha,\exists x\alpha$；$(\forall x_1)\cdots(\forall x_n)\alpha$ 简记为 $\forall x_1\cdots\forall x_n\alpha$，$(\exists x_1)\cdots(\exists x_n)\alpha$ 简记为 $\exists x_1\cdots\exists x_n\alpha$

辖域：公式 $\forall xA$ 和 $\exists xA$ 中，称 x 为 **指导变元**，A 为相应量词的 **辖域**

约束出现：在 $\forall x$ 和 $\exists x$ 的辖域中（包括 $\forall x$ 和 $\exists x$ 中的 x），x 的所有出现称为约束出现，A 中不是约束出现的其他变元称为 **自由出现**

约束变元：设个体变元 x 在公式 α 中出现，若 x 在 α 中的所有出现【均】为约束出现，则称 x 为 α 的约束变元；否则称为**自由变元**

闭式：设 A 是任意的公式，若 A 中不含自由出现的个体变元，则称 A 为封闭的公式，简称闭式
- 要将含 r 个自由出现的个体变元的公式变成闭式，至少需要加上 r 个量词

解释与赋值
- 设一阶语言 $\mathcal{L}$ 个体常元集 $\{a_i\}$，函数符号集 $\{f_i\}$，谓词符号集 $\{F_i\}$，$\mathcal{L}$ 的解释 I 由下面 4 部分组成：
1. 非空个体域 D_I
2. 对每一个个体常元 $a_i,\overline{a_i}\in D_I$，称作 a_i 在 I 中的解释
3. 对每一个函数符号 f_i，设其为 m 元的，$\overline{f_i}$ 是 D_I 上的 m 元函数，称作 $\overline{f_i}$ 在 I 中的解释
4. 对每一个谓词符号 F_i，设其为 n 元的，$\overline{F_i}$ 是一个 n 元谓词，称作 F_i 在 I 中的解释
- I 下的**赋值** σ：对每一个【自由出现】的个体变元 x 指定个体域中的一个值 $\sigma(x)$

注 1：任何公式在给定的解释和赋值下都是命题
注 2：闭式在任何解释下都变成命题（无需赋值）

永真式（逻辑有效式）：无成假解释和赋值
矛盾式（永假式）：无成真解释和赋值
可满足式：至少有一个成真解释和赋值

代换实例：设 A_0 是含命题变项 $p_1,p_2,\dots,p_n$ 的命题公式，$A_1,A_2,\dots,A_n$ 是 n 个谓词公式，用 A_i 处处代替 A_0 中的 $p_i(1\le i\le n)$，所得公式 A 称为 A_0 的代换实例。例如，$F(x)\to G(x)$，$\forall xF(x)\to\exists yG(y)$ 都是 $p\to q$ 的代换实例

等值式：设 A,B 是一阶逻辑中任意两个公式，若 $A\leftrightarrow B$ 是永真式，则称 A 与 B 等值，记作 $A\Leftrightarrow B$，并称 $A\Leftrightarrow B$ 为等值式

前束范式：一阶逻辑公式 A 具 $Q_1x_1\dots Q_kx_kB$ 的形式。其中 $Q_i=\forall$ 或 $\exists$，B（母式/基式）不含量词

推理正确（有效）：在一阶逻辑中，从前提 $A_1,\dots,A_k$ 推出结论 B 正确，若 $A_1\wedge\dots\wedge A_k\to B$ 为永真式，记作 $A_1\wedge\dots\wedge A_k\Rightarrow B$，否则称推理不正确

自然推理系统 N_L 一阶逻辑自然推理系统包括：
1. 字母表：同一阶语言字母表
2. 合式公式（谓词公式）：（见上）
3. 推理规则：（见定理）

等值式与范式定理

交换律 $A\vee B\Leftrightarrow B\vee A, A\wedge B\Leftrightarrow B\wedge A, A\leftrightarrow B\Leftrightarrow B\leftrightarrow A$

结合律 $(A\vee B)\vee C\Leftrightarrow A\vee(B\vee C)$，$(A\wedge B)\wedge C\Leftrightarrow A\wedge(B\wedge C)$，$(A\leftrightarrow B)\leftrightarrow C\Leftrightarrow A\leftrightarrow(B\leftrightarrow C)$

分配律 $A\to(B\to C)\Leftrightarrow(A\to B)\to(A\to C)$

$A\vee(B\wedge C)\Leftrightarrow(A\vee B)\wedge(A\vee C)$，与或可互换

否定律 $A\Leftrightarrow\neg\neg A$

德摩根律 $\neg(A\vee B)\Leftrightarrow\neg A\wedge\neg B,\neg(A\wedge B)\Leftrightarrow\neg A\vee\neg B$

幂等律 $A\vee A\Leftrightarrow A, A\wedge A\Leftrightarrow A, A\to A\Leftrightarrow 1, A\leftrightarrow A\Leftrightarrow 1$

吸收率 $A\vee(A\wedge B)\Leftrightarrow A, A\wedge(A\vee B)\Leftrightarrow A$

零律 $A\vee 1\Leftrightarrow 1, A\wedge 0\Leftrightarrow 0, A\to 1\Leftrightarrow 1, 0\to A\Leftrightarrow 1$

同一律 $A\vee 0\Leftrightarrow A, A\wedge 1\Leftrightarrow A, A\to 0\Leftrightarrow\neg A, 0\leftrightarrow A\Leftrightarrow\neg A$

排中律 $A\vee\neg A\Leftrightarrow 1$

矛盾律 $A\wedge\neg A\Leftrightarrow 0$

蕴含等值式 $A\to B\Leftrightarrow\neg A\vee B$

等价等值式 $A\leftrightarrow B\Leftrightarrow(A\to B)\wedge(B\to A)$

假言易位 $A\to B\Leftrightarrow\neg B\to\neg A$

等价否定等值式 $A\leftrightarrow B\Leftrightarrow\neg A\leftrightarrow\neg B$

归谬律 $(A\to B)\wedge(A\to\neg B)\Leftrightarrow\neg A$

其他 $A\to\neg A\Leftrightarrow\neg A,\neg A\to A\Leftrightarrow A, A\leftrightarrow\neg A\Leftrightarrow 0$

$A\to(B\to C)\Leftrightarrow(A\wedge B)\to C\Leftrightarrow B\to(A\to C)$

$A\leftrightarrow B\Leftrightarrow(A\wedge B)\vee(\neg A\wedge\neg B)\Leftrightarrow(\neg A\vee B)\wedge(A\vee\neg B)$

$(A\to C)\wedge(B\to C)\Leftrightarrow(A\vee B)\to C$

置换规则设 $\phi(A)$ 是含公式 A 的公式，用公式 B 置换 $\phi(A)$ 中的 A，得公式 $\phi(B)$，如果 $A\Leftrightarrow B$，则 $\phi(A)\Leftrightarrow\phi(B)$

证明等值式：真值表法/等值演算

证明不等值式：真值表法/观察出一个不等值的赋值/先等值演算再观察
- 一个简单**析取式是重言式**当且仅当它同时含某个命题变项及它的否定式
- 一个简单**合取式是矛盾式**当且仅当它同时含某个命题变项及它的否定式
- 一个析取范式是矛盾式当且仅当它的**每个简单合取式**都是**矛盾式**
- 一个合取范式是重言式当且仅当它的**每个简单析取式**都是**重言式**

范式存在定理：任一命题公式都存在与之等值的析取范式与合取范式
- 方法：利用蕴含等值式和等价等值式消去；利用双重否定式和德摩根率将 $\neg$ 消去或内移；分配律

一些联结词的完备集：$\{\neg,\wedge\},\{\neg,\vee\},\{\neg,\to\},\{\uparrow\},\{\downarrow\}$
- 证明：从主析取出发得 $\{\neg,\wedge,\vee\}$，其他通过符号间的表示
- 不考虑与非、或非，2 元素有 3 个完备，3 元素有 6 个完备（含 $\neg$ 即可），4 元素有 4 个完备

命题逻辑的推理定律

$\Rightarrow$ 的基本性质
- 若 $A\Rightarrow B$，A 为重言式，则 B 也是重言式
- 若 $A\Rightarrow B$，$B\Rightarrow A$ 同时成立，必有 $A\Leftrightarrow B$
- 若 $A\Rightarrow B$，$B\Rightarrow C$，则 $A\Rightarrow C$
- 若 $A\Rightarrow B$，$A\Rightarrow C$，则 $A\Rightarrow B\wedge C$
- 若 $A\Rightarrow C$，$B\Rightarrow C$，则 $A\vee B\Rightarrow C$

证明推理公式 $A\Rightarrow B$ 的方法
- 真值表法；直观解释法【关注前提为真结论为假】
- 主析取/合取范式法；等值演算法【根据充要条件 $A\to B$ 为永真式或 $A\wedge\neg B$ 为矛盾式】
- 若 $\neg B\Rightarrow\neg A$，则 $A\Rightarrow B$

附加律：$A\Rightarrow(A\vee B)$

化简律：$(A\wedge B)\Rightarrow A$

假言推理：$(A\to B)\wedge A\Rightarrow B$

拒取式：$(A\to B)\wedge\neg B\Rightarrow\neg A$

析取三段论：$(A\vee B)\wedge\neg A\Rightarrow B$，$(A\vee B)\wedge\neg B\Rightarrow A$

假言三段论：$(A\to B)\wedge(B\to C)\Rightarrow(A\to C)$

等价三段论：$(A\leftrightarrow B)\wedge(B\leftrightarrow C)\Rightarrow(A\leftrightarrow C)$

构造性二难：$(A\to B)\wedge(C\to D)\wedge(A\vee C)\Rightarrow(B\vee D)$

构造性二难（特殊形式）：$(A\to B)\wedge(\neg A\to B)\Rightarrow B$

破坏性二难：$(A\to B)\wedge(C\to D)\wedge(\neg B\vee\neg D)\Rightarrow(\neg A\vee\neg C)$

推理定律 10：$\neg A\Rightarrow(A\to B)$；$B\Rightarrow(A\to B)$；$\neg(A\to B)\Rightarrow A$；$\neg(A\to B)\Rightarrow\neg B$

推理定律 11：$(B\to C)\Rightarrow(A\to B)\to(A\to C)$；$(B\to C)\Rightarrow(A\vee B)\to(A\vee C)$

利用自然推理系统 P 构造推理的证明：
- **推理规则**：前提引入规则、结论引入规则、置换规则、合取引入规则（$A,B\Rightarrow A\wedge B$）

1. **直接证明法**
2. **附加前提证明法**：如果推理的结构有如下形式：$(A_1\wedge A_2\wedge\dots\wedge A_k)\to(C\to B)$，则可以将结构改写为：$(A_1\wedge A_2\wedge\dots\wedge A_k\wedge C)\to B$[附加前提引入]
3. **归谬法**：引入结论的否定作为附加前提，若能推出矛盾式，则此推理有效 [结论否定引入]
4. **消解证明法**：把【结论的否定】及【前提】都化成合取范式，以这些合取范式中的【简单析取式】为前提，仅用归结规则规则构造证明推出 0
- 归结规则：$(A\vee B)\wedge(\neg A\vee C)\Rightarrow B\vee C$

一阶谓词逻辑等值式

1. 命题逻辑等值式的代换实例都是一阶逻辑的等值式

2.1 **量词否定等值式** $A(x)$ 是含 x 自由出现的公式：

1. $\neg\forall xA(x)\Leftrightarrow\exists x\neg A(x)$
2. $\neg\exists xA(x)\Leftrightarrow\forall x\neg A(x)$

2.2 **量词辖域收缩与扩张等值式**：$A(x)$ 是含 x 自由出现的公式；B 中不含 x 的自由出现：

1. $\forall x(A(x)\vee B)\Leftrightarrow\forall xA(x)\vee B$
2. $\forall x(A(x)\wedge B)\Leftrightarrow\forall xA(x)\wedge B$
3. $\forall x(A(x)\to B)\Leftrightarrow\exists xA(x)\to B$
4. $\forall x(B\to A(x))\Leftrightarrow B\to\forall xA(x)$
5. $\exists x(A(x)\vee B)\Leftrightarrow\exists xA(x)\vee B$
6. $\exists x(A(x)\wedge B)\Leftrightarrow\exists xA(x)\wedge B$
7. $\exists x(A(x)\to B)\Leftrightarrow\forall xA(x)\to B$
8. $\exists x(B\to A(x))\Leftrightarrow B\to\exists xA(x)$

2.3 **量词分配等值式** $A(x)B(x)$ 是含 x 自由出现的公式：

1. $\forall x(A(x)\wedge B(x))\Leftrightarrow\forall xA(x)\wedge\forall xB(x)$
2. $\exists x(B\to A(x))\Leftrightarrow B\to\exists xA(x)$

- $\forall$ 对 $\vee$ 无分配律，$\exists$ 对 $\wedge$ 无分配律!

3.1 **置换规则**：设 $\Phi(A)$ 是含公式 A 的公式，$\Phi(B)$ 是用公式 B 取代 $\Phi(A)$ 中所有 A 所得到的公式，若 $A\Leftrightarrow B$，则 $\Phi(A)\Leftrightarrow\Phi(B)$

3.2 **换名规则**：
- 约束变元：【指导变元】及其【辖域中的约束出现】一起换成辖域中没出现过的变元
- 自由变元：公式中自由变元的所有自由出现一起换（且不允许在原公式中以约束形式出现）

前束范式存在定理：一阶逻辑中的任何公式都存在与之等值的前束范式，但其前束范式并不唯一

化前束范式的方法：设 G 是任一公式
1. 消去公式中包含的联结词 $\to$（非必要），$\leftrightarrow$
2. 反复使用德摩根律将 $\neg$ 内移
3. 使用分配等值式将量词左移
4. （不能使用分配律时）先易名后辖域扩张

一阶逻辑的推理定律

1. 命题逻辑推理定律的代换实例
- 例：$\forall xF(x)\wedge\forall yG(y)\Rightarrow\forall xF(x)$（化简律）

2. 常用的重要推理定律：

1. $\forall xA(x)\Rightarrow\exists xA(x)$
2. $\forall xA(x)\vee\forall xB(x)\Rightarrow\forall x(A(x)\vee B(x))$ 仅单向！
3. $\exists x(A(x)\wedge B(x))\Rightarrow\exists xA(x)\wedge\exists xB(x)$ 仅单向！
4. $\forall x(A(x)\to B(x))\Rightarrow\forall xA(x)\to\forall xB(x)$
5. $\forall x(A(x)\to B(x))\Rightarrow\exists xA(x)\to\exists xB(x)$
6. $\forall x(A(x)\leftrightarrow B(x))\Rightarrow\forall xA(x)\leftrightarrow\forall xB(x)$
7. $\forall x(A(x)\leftrightarrow B(x))\Rightarrow\exists xA(x)\leftrightarrow\exists xB(x)$

3. 含有多个量词的公式：

$$\begin{tikzcd}
\exists y\forall x \arrow[d] & \forall y\forall x \arrow[l] \arrow[r, leftrightarrow] & \forall x\forall y \arrow[r] & \exists x\forall y \arrow[d] \\
\forall x\exists y \arrow[r] & \exists x\exists y \arrow[r, leftrightarrow] & \exists y\exists x & \forall y\exists x \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

4. 量词的消去/引入规则：设 x,y 为个体变元符号，c 为个体常元，【y 不在 $A(x)$ 中约束出现】

1. $\forall-$：$(\forall x)A(x)\Rightarrow A(y),(\forall x)A(x)\Rightarrow A(c)$
2. $\forall+$：$A(y)\Rightarrow(\forall x)A(x)$ 限制：x 不在 $A(y)$ 中约束出现 [重名引起混乱]
3. $\exists-$：$(\exists x)A(x)\Rightarrow A(c)$ 限制：$(\exists x)A(x)$ 中无自由变元 [否则 x 依赖于自由变元]，且不含 c
4. $\exists+$：$A(c)\Rightarrow(\exists x)A(x)$ 限制：x 不出现于 $A(c)$

一阶自然推理系统 N_L 构造推理的证明：
- 推理规则：12 条命题逻辑推理规则、$\forall-,\forall+,\exists-,\exists+$
- 推理方法：

1. 前提引入规则和结论引入规则
2. 如果结论是以蕴涵形式（或析取形式）给出，可使用附加前提证明法
3. 若需消去量词，用全称量词消去规则和存在量词消去规则
4. 当所要求的结论可能被定量时，用全称量词引入规则和存在量词引入规则将量词加入
5. 对消去量词的公式或公式中不含量词的子公式，用命题演算中的基本等价公式和基本推理定律
6. 对含有量词的公式可以用谓词中的基本等价公式和基本推理定律

注 1. 如公式中既要消去存在量词又要消去全称量词，且所选用的个体是同一个符号，则必须 **先消去存在量词再消去全称量词**

注2. $\exists xA(x)\Rightarrow A(c)\Rightarrow\exists xA(x)$ 单向!
$\forall xA(x)\Rightarrow A(y)\Rightarrow\forall xA(x)$

注 3. 有两个含有存在量词的公式，当消去存在量词时，不能选用同样的一个常量符号来取代两个公式中的变元，而 **应用不同的常量符号**

注 4. 使用 $\forall+,\forall-,\exists+,\exists-$ 时，此量词必须位于整个公式的最前端，且它的辖域为其后的整个公式

集合基础概念

子集：$B \subseteq A \Leftrightarrow \forall x(x \in B \to x \in A)$

非子集：$B \nsubseteq A \Leftrightarrow \exists x(x \in B \land x \notin A)$

相等：$A = B \Leftrightarrow \forall x(x \in B \leftrightarrow x \in A) \Leftrightarrow A \subseteq B \land B \subseteq A$

真子集：$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \land A \neq B$

非真子集：$A \not\subset B \Leftrightarrow \exists x(x \in A \land x \notin B) \lor A = B$

空集：$\varnothing = \{x|x \neq x\}$，是一切集合的子集；唯一

全集 E：与具体问题相关，不唯一

幂集：$P(A) = 2^A = \{x|x \subseteq A\}$，易知 $|P(A)| = 2^n$

n 元集：A 有 n 个元素，记作 $|A| = n$

有穷集（有限集）：A 的元素个数有限

并集：$A \cup B = \{x|x \in A \lor x \in B\}$

初级并：$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \{x|\exists i(1 \le i \le n \land x \in A_i)\}$，$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$，$\bigcup_{i=1}^\infty A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots$

交集：$A \cap B = \{x|x \in A \land x \in B\}$

初级交：$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \{x|\forall i(1 \le i \le n \to x \in A_i)\}$，$\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots$，$\bigcap_{i=1}^\infty A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots$

不相交：设 $A_1, A_2, \ldots$ 是可数多个集合，对于任意的 $i \neq j$，都有 $A_i \cap A_j = \varnothing$，则称 $A_1, A_2, \ldots$ 是互不相交的

相对补集：只属于 A 而不属于 B 的全体元素组成的集合为 B 对 A 的相对补集。$A - B = \{x|x \in A \land x \notin B\} = A \cap \sim B$

对称差：$A \bigoplus B = \{x|(x \in A \land x \notin B) \lor (x \notin A \land x \in B)\} = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

绝对补集：$\sim A = \{x|x \in E \land x \notin A\} = E - A = \{x|x \notin A\}$

广义并：$\bigcup A = \{x|\exists z(x \in z \land z \in A)\}$，$A$ 是集族（即 A 的元素是集合）；$\bigcup\varnothing = \varnothing$

广义交：$\bigcap A = \{x|\forall z(z \in A \to x \in z)\}$，$A$ 是集族且非空——理论上 $\bigcap\varnothing$ 包含任意元素，即包含所有集合，这在集合论中无意义

集合运算的优先级：一元运算优先于二元运算

- 第一类运算/一元运算（从右向左）：绝对补、幂集、广义交/并
- 第二类运算/二元运算（从左向右）：初级并/交、相对补、对称差

二元关系

有序对：由两个元素 x 和 y（允许 $x = y$）按照一定顺序排列而成的二元组称作一个有序对，记作 $\langle x, y\rangle := \{\{a\}, \{a, b\}\}$

- $x \neq y \Rightarrow \langle x, y\rangle \neq \langle y, x\rangle$
- $\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle \Leftrightarrow a = c \land b = d$

笛卡尔积（卡式积）：设 A, B 为集合，用 A 中元素为第一元素，B 中元素为第二元素构成有序对。所有这样的有序对组成的集合称作 A 和 B 的笛卡尔积，记作 $A \times B := \{\langle x, y\rangle|x \in A \land y \in B\}$

笛卡尔积性质

- 非交换 $A \times B \neq B \times A$【除非 $A = \varnothing \lor B = \varnothing \lor A = B$】
- 非结合 $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$【除非 $A = \varnothing \lor B = \varnothing \lor C = \varnothing$】
- 对并和交满足分配律：
  - $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
  - $(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$
  - $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
  - $(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$
- $A \times \varnothing = \varnothing, \varnothing \times A = \varnothing$
- $A \times B = \varnothing \Leftrightarrow A = \varnothing \lor B = \varnothing$
- 若 $A \neq \varnothing$，则 $A \times B \subseteq A \times C \Leftrightarrow B \subseteq C$
- $A \subseteq C \land B \subseteq D \Rightarrow A \times B \subseteq C \times D$【当 $(A = B = \varnothing) \lor (A \neq \varnothing \land B \neq \varnothing)$ 时，逆命题成立】

n 元关系：元素全是有序 n 元组【或为空集】的集合

二元关系（关系）：$n = 2$ 的情形，记作 R

- 记号：$\langle x, y\rangle \in R \Leftrightarrow R(x, y), Rxy \Leftrightarrow xRy$
- 若 $\langle x, y\rangle \notin R$，记作 $x \not R y$

A 到 B 的二元关系：$A \times B$ 的任何子集（含空集）$\Leftrightarrow R \subseteq A \times B \Leftrightarrow R \in \mathcal{P}(A \times B)$

- A 到 B 不同的二元关系有 $2^{|A|\cdot|B|}$ 个
- 当 $A = B$ 时称作 A 上的二元关系

特殊关系：对于任何集合 A：

- 空关系：$\varnothing$
- 全域关系：$E_A = \{\langle x, y\rangle|x \in A \land y \in A\} = A \times A$
- 恒等关系：$I_A = \{\langle x, x\rangle|x \in A\}$
- 小于等于关系：$LE_A = \{\langle x, y\rangle|x, y \in A, x \le y\}$
- 整除关系：$D_A = \{\langle x, y\rangle|x, y \in A, x|y\}$
- 包含关系：$R_\subseteq = \{\langle x, y\rangle|x, y \in A, x \subseteq y\}$
- 真包含关系：$R_\subset = \{\langle x, y\rangle|x, y \in A, x \subset y\}$

关系矩阵：$M(R) = [r_{ij}]_{n\times n}$，若 x_i 与 x_j 有关系则 r_{ij} 为 1，否则为 0。

关系图：$\langle x_i, x_j\rangle \in R$ 对应图 G_R 中 x_i 到 x_j 的有向边

- 集合表达式、关系矩阵、关系图三者可唯一互相确定。

逆关系：$R^{-1} = \{\langle x, y\rangle \mid \langle y, x\rangle \in R\}$

右复合：$F \circ G = \{\langle x, y\rangle \mid \exists t(\langle x, t\rangle \in F \land \langle t, y\rangle \in G)\}$

定义域：R 中所有有序对的第一元素构成的集合称作 R 的定义域，记作 $\mathrm{dom}R$，即 $\mathrm{dom}R = \{x \mid \exists y(\langle x, y\rangle \in R)\}$

值域：R 中所有有序对的第二元素构成的集合称作 R 的值域，记作 $\mathrm{ran}R$，即 $\mathrm{ran}R = \{y \mid \exists x(\langle x, y\rangle \in R)\}$

域：R 的定义域和值域的并集为域，记作 $\mathrm{fld}R$，即 $\mathrm{fld}R = \mathrm{dom}R \cup \mathrm{ran}R$

限制：R 在 A 上的限制记作 $R \upharpoonright A$，即 $R \upharpoonright A = \{\langle x, y\rangle \mid xRy \land x \in A\} \subseteq R$

像：A 在 R 上的像记作 $R[A]$，即 $R[A] = \mathrm{ran}(R \upharpoonright A) = \{y \mid \exists x(x \in A \land xFy)\} \subseteq \mathrm{ran}R$

幂运算：R 的 n 次幂

- $R^0 = \{\langle x, x\rangle \mid x \in A\} = I_A$
- $R^{n+1} = R^n \circ R$

关系运算的顺序

- 逆运算优先于其他运算
- 关系运算（逆、合成、限制、像）优先于集合运算（交并补、相对补、对称差等）
- 没有规定优先权的运算以括号决定运算顺序

自反：设 R 为 A 上的关系，R 在 A 上是自反的 $\Leftrightarrow \forall x(x \in A \to \langle x, x\rangle \in R) \Leftrightarrow (\forall x \in A)xRx$

非自反：自反的否定，定义空关系非自反

反自反：称 R 在 A 上是反自反的，若 $\forall x(x \in A \to \langle x, x\rangle \notin R)$

对称：若 $\forall x\forall y(y, x \in A \land \langle x, y\rangle \in R \to \langle y, x\rangle \in R)$，则称 R 为 A 上对称的关系

反对称：若 $\forall x\forall y(x, y \in A \land \langle x, y\rangle \in R \to \langle y, x\rangle \notin R)$，则称 R 为 A 上反对称的关系

传递：$\forall x\forall y\forall z(x, y, z \in A \land \langle x, y\rangle \in R \land \langle y, z\rangle \in R \to \langle x, z\rangle \in R)$【若两步能到，一步一定能到】

自反/对称/传递闭包：要求 A 非空，R 的 ×× 闭包是 A 上的关系 R' 满足 $R \subseteq R'$、×× 性、极小性；分别记作 $r(R), s(R), t(R)$

- 极小性的表示：$\forall S((R \subseteq S \land S\text{自反}) \to r(R) \subseteq S)$

等价关系：设 R 为非空集合 A 上的关系，若 R 是自反、对称、传递的，则称 R 为 A 上的等价关系

- 设 R 为一个等价关系，若 $\langle x, y\rangle \in R$，则称 x 等价于 y，记作 $x \sim y$。空关系不是等价关系。

等价类：设 R 为非空集合 A 上的等价关系，$\forall x \in A$，令 $[x]_R = \{y \mid y \in A \land xRy\}$，称 $[x]_R$ 为 x 关于 R 的等价类，简记为 $[x]$

商集：设 R 为非空集合 A 上的等价关系，R 的所有等价类组成的集合是 A 关于 R 的商集，记作 A/R，即 $A/R = \{[x]_R \mid x \in A\}$ （是一个集族）

- 显然 $\cup A/R = A$

划分：$A \neq \varnothing$ 的一个划分是 A 的子集族 $\mathcal{A} \subseteq P(A)$ 满足：$\varnothing \notin \mathcal{A}$，$\forall x\forall y(x, y \in \mathcal{A} \land x \neq y \to x \cap y = \varnothing)$，$\bigcup\mathcal{A} = A$，称 $\mathcal{A}$ 中的元素为 A 的划分块。

- R 是 A 上的等价关系 $\Rightarrow$ 商集 A/R 是 A 的划分
- $\mathcal{A}$ 是 A 的划分 $\Leftrightarrow$ 同块关系 $R_{\mathcal{A}}$ 是 A 上的等价关系
- 注：求所有等价关系时并上 I_A（自反性）

Stirling 子集数：记 $f[n][k]$ 为 n 个不同元素划分为 k 组的方法数，$f[n][0] = 0, f[n][1] = 1, f[n][2] = 2^{n-1} - 1, f[n][n-1] = C_n^2, f[n][n] = 1, f[n][k] = kf[n-1][k] + f[n-1][k-1]$

- $\Sigma f[3][k] = 5, \Sigma f[4][k] = 15$

偏序关系：设 $A \neq \varnothing, R \subseteq A \times A$，若 R 是自反、反对称、传递的，则称 R 为 A 的偏序关系，记作 $\preccurlyeq$。设 $\preccurlyeq$ 为偏序关系，如果 $\langle x, y\rangle \in \preccurlyeq$，则记作 $x \preccurlyeq y$

- 自反时证反对称：$xRy \land yRx \Rightarrow x = y$

偏序集：$\preccurlyeq$是 A 上的偏序关系，称 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 为偏序集

设 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 为偏序集，$x, y \in A$，定义：

- x与y 可比：若 $x \preccurlyeq y \lor y \preccurlyeq x$
- 严格小于：$x \prec y \Leftrightarrow x \preccurlyeq y \land x \neq y$
- 覆盖：若 $x \prec y$，且不存在 z，使得 $x \prec z \prec y$
- 对任意两个元素 x, y，有四种情况必发生其中恰好一种：$x \prec y$，$y \prec x$，$x = y$，x 与 y 不是可比的

哈斯图：$\forall x, y \in A$，若 $x \prec y$，则将 x 画在 y 下方；对于 A 中两个不同的元素 x 和 y，若 y 覆盖 x，就用一条线段连接 x 和 y

全序关系（线序关系）：设 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 为偏序集，若 $\forall x, y \in A$，x 与 y 都是可比的，则 R 为 A 上的全序关系（哈斯图是一根线）

拟序关系：设 R 为非空集合 A 上的关系。若 R 是反自反、传递的，则称 R 为 A 上的拟序关系，常用 $\prec$ 表示拟序关系，$\langle A, \prec\rangle$ 为拟序集。

- 反自反性与传递性蕴含反对称性

最/极大/小元：设 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 为偏序集，$B \subseteq A, y \in B$

- 若 $\forall x(x \in B \to y \preccurlyeq x)$ 成立，则称 y为B 的最小元【可以无必唯一】
- 若 $\forall x(x \in B \land x \preccurlyeq y \to x = y)$成立，则称$y$为$B$ 的极小元【必存在不唯一，不大于任何元】

上/下界：设 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 为偏序集，$B \subseteq A, y \in A$

- 若 $\forall x(x \in B \to x \preccurlyeq y)$ 成立，则称 y为B 的上界【可以无不唯一】
- 令 $C = \{y \mid y为B的上界\}$，则称 C 的最小元为 B 的最小上界或上确界【可以无必唯一】
- 上界与下界不一定存在集合之中
- 集合的最小元素是它的下确界，最大元素就是它的上确界；反之不对

函数（映射）：单值的二元关系 F，若 $\forall x \in \mathrm{dom}F$ 都存在唯一的 $y \in \mathrm{ran}F$ 使得 xFy 成立（单值）

- 记号：$F(x) = y \Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in F \Leftrightarrow xFy$
- 证单值：$\forall x \in \mathrm{dom}F, \forall y, z \in \mathrm{ran}F, xFy \land xFz \to y = z$

偏函数（部分函数）：若 $\mathrm{dom}F \subseteq A \land \mathrm{ran}F \subseteq B$，则 F 称为从 A 到 B 的偏函数，A 称为 F 的前域，B 称为 F 的后域，记作

- 偏函数计数：$(|B| + 1)^{|A|}$

全函数（函数）：若 $\mathrm{dom}f = A \land \mathrm{ran}f \subseteq B$，则 f 称为从 A 到 B 的函数，记作 $f : A \to B$

- 所有从 A 到 B 的函数的集合记作 B^A，读作"B 上 A"：$B^A = \{f \mid f : A \to B\}$；$|B^A| = |B|^{|A|}$
- 当 $A = \varnothing$ 时，$B^A = \{\varnothing\}$，$|B^A| = 1$
- 当 $A \neq \varnothing \land B = \varnothing$ 时，$B^A = \varnothing$，$|B^A| = 0$

单射、满射、双射：设 $f : A \to B$

- 若 $\mathrm{ran}f = B$，则称 f 为满射
- 若 $\forall y \in \mathrm{ran}f$ 都存在唯一的 $x \in A$ 使得 $f(x) = y$，则称 f 为单射
- 若 f 既单射又满射，则 f 为双射（一一对应）

单射、满射、双射计数：设 $|A| = n, |B| = m$

- $n < m$ 时，单射个数 $m!/(m-n)!$
- $n > m$ 时，满射个数 $m!f[n][m]$
- $n = m$ 时，单/满/双射个数 $n!$

常数函数设 $f : A \to B$，若存在 $c \in B$ 使得对所有 $x \in A$ 都有 $f(x) = c$，则称 f 为常数函数

恒等函数：称 A 上的恒等关系 $I_A : A \to A$ 为 A 上的恒等函数，$I_A(x) = x$

特征函数：A 的特征函数 $\chi_A : E \to \{0, 1\}$ 定义为 $\chi_A(x) = 1$ if $a \in A$，否则为 0

- 当 $\varnothing \subset A \subset E$ 时，χ_A 是满射

单调函数：设$\langle A, \preccurlyeq_A\rangle, \langle B, \preccurlyeq_B\rangle$ 为偏序集，$f : A \to B$，若 $\forall x_1, x_2 \in A$，$x_1 \preccurlyeq_A x_2 \Rightarrow f(x_1) \preccurlyeq_B f(x_2)$，则称 f 单调递增

- 严格单调：把$\preccurlyeq$换成$\prec$，要求 f 是单射

自然映射（典型映射）：设 R 是 A 上的等价关系，令 $f : A \to A/R$，$f(x) = [x]_R, \forall a \in A$，称 f 是从 A 到商集 A/R 的自然映射

- 不同的等价关系确定不同的自然映射，恒等关系确定的是双射，其他自然映射一般只是满射

计数问题

文氏图：大矩形表示全集 E（可省略），在矩形内部画圆，用圆或其他闭曲线的内部表示集合。不同的圆代表不同的集合，并将运算结果得到的集合用阴影部分表示——计数问题：

1. 画文氏图，一般每个集合对应一种性质
2. 计算各区域的数量，有未知的则列方程

包含排斥原理（容斥原理） 设 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 为 n 个集合，则

$$\left|\bigcup_{i=1}^n A_i\right| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$$

集合恒等式

幂等律 $A \cup A = A$，$A \cap A = A$

交换律 $A \cup B = B \cup A$，$A \cap B = B \cap A$

结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$，$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

分配律 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$，$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

德摩根律

相对形式：$E - (A \cup B) = (E - A) \cap (E - B)$，$E - (A \cap B) = (E - A) \cup (E - B)$

绝对形式：$\sim (A \cup B) = \sim A \cap \sim B$，$\sim (A \cap B) = \sim A \cup \sim B$

吸收律 $A \cup (A \cap B) = A$，$A \cap (A \cup B) = A$

零律 $A \cup E = E$，$A \cap \varnothing = \varnothing$

同一律 $A \cup \varnothing = A$，$A \cap E = A$

排中律 $A \cup \sim A = E$

矛盾律 $A \cap \sim A = \varnothing$

余补律 $\sim \varnothing = E$，$\sim E = \varnothing$

双重否定律 $\sim (\sim A) = A$

补交转换律 $A - B = A \cap \sim B$（消去差集运算符）

对于集合定律的证明应该使用数理逻辑

子集的性质

- $A \subseteq B \Rightarrow (A \cup C) \subseteq (B \cup C)$
- $A \subseteq B \Rightarrow (A \cap C) \subseteq (B \cap C)$
- $(A \subseteq B) \land (C \subseteq D) \Rightarrow (A \cup C) \subseteq (B \cup D)$
- $(A \subseteq B) \lor (C \subseteq D) \Rightarrow (A \cap C) \subseteq (B \cap D)$
- $(A \subseteq B) \land (C \subseteq D) \Rightarrow (A - C) \subseteq (B - D)$
- $C \subseteq D \Rightarrow (A - D) \subseteq (A - C)$

差集的性质

- $A - B = A - (A \cap B)$
- $A - B = A \cap \sim B$
- $A \cup (B - A) = A \cup B$
- $A \cap (B - C) = (A \cap B) - C$

对称差的性质

- 交换律，结合律
- 分配律：$A \cap (B \bigoplus C) = (A \cap B) \bigoplus (A \cap C)$
- $A \bigoplus (A \bigoplus B) = B$
- 同一律：$A \bigoplus \varnothing = A$
- 零律：$A \bigoplus A = \varnothing$

幂集的性质

- $A \subseteq B \Leftrightarrow P(A) \subseteq P(B)$
- $A = B \Leftrightarrow P(A) = P(B)$
- $P(A) \in P(B) \Rightarrow A \in B$
- $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$
- $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$
- $P(A - B) \subseteq (P(A) - P(B)) \cup \{\varnothing\}$
- $A \subseteq P(A)$
- $\{x\} \in P(A) \Leftrightarrow x \in A$; $x \in P(A) \Leftrightarrow x \subseteq A$

关系的运算

基本运算：

- $R \cup S = \{\langle x, y\rangle \mid xRy \lor xSy\}$
- $R \cap S = \{\langle x, y\rangle \mid xRy \land xSy\}$
- 相对补 $R - S = \{\langle x, y\rangle \mid xRy \land x \not S y\}$
- 绝对补 $\sim R = A \times B - R$

逆：

- $(F^{-1})^{-1} = F$
- $\mathrm{dom}F^{-1} = \mathrm{ran}F, \mathrm{ran}F^{-1} = \mathrm{dom}F$
- $M(R^{-1}) = (M(R))^T$

合成（复合）：

- 结合律：$(F \circ G) \circ H = F \circ (G \circ H)$
- $(F \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ F^{-1}$
- $M(R_1 \circ R_2) = M(R_1) \cdot M(R_2)$

恒等关系性质：$R \circ I_A = I_A \circ R = R$

仅并的复合有分配律：本质 $\exists$ 与 $\land, \lor$ 的关系

- $F \circ (G \cup H) = F \circ G \cup F \circ H$
- $(G \cup H) \circ F = G \circ F \cup H \circ F$
- $F \circ (G \cap H) \subseteq F \circ G \cap F \circ H$【注意是子集】
- $(G \cap H) \circ F \subseteq G \circ F \cap H \circ F$【注意是子集】

限制和像与交并的性质：

- $F \upharpoonright (A \cup B) = F \upharpoonright A \cup F \upharpoonright B$
- $F[A \cup B] = F[A] \cup F[B]$
- $F \upharpoonright (A \cap B) = F \upharpoonright A \cap F \upharpoonright B$
- $F[A \cap B] \subseteq F[A] \cap F[B]$
- $F[A] - F[B] \subseteq F[A - B]$

幂运算：

- 设 A 为 n 元集，R 是 A 上的关系，则 $\exists s, t \in \mathbb{N}$使得$R^s = R^t$；因为 A 上一共只有 2^{n^2} 种关系
  - 对任何 $k \in \mathbb{N}$ 有 $R^{s+k} = R^{t+k}$
  - 对任何 $k, i \in \mathbb{N}$ 有 $R^{s+kp+i} = R^{s+i}$，其中 $p = t - s$
  - 令 $S = \{R^0, R^1, \ldots, R^{t-1}\}$，则对任意的 $q \in \mathbb{N}$ 有 $R^q \in S$
- 设 R 为 A 上的关系，$m, n \in \mathbb{N}$，则：
  - $R^m \circ R^n = R^{m+n}$
  - $(R^m)^n = R^{mn}$

关系性质的充要条件：设 R 为 A 上的关系，则

	自反	反自反	对称性	反对称性	传递性
集式	$I_A \subseteq R$	$R \cap I_A = \varnothing$	$R = R^{-1}$	$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$	$R \circ R \subseteq R$
关系矩阵 $M(R)$	$M_{ii} = 1$	$M_{ii} = 0$	$M^T = M$	对 $i \neq j$，$M_{ji} + M_{ij} \leqslant 1$	$M_{ij}^2 \leqslant M_{ij}$
关系图 $G(R)$	每个顶点都有环	每个顶点都没有环	相异点有一对方向相反的边或者没边	相异点仅有一条单向边或者没边	若 ab, bc 间都有边，则 ac 间有边

- 对称性与反对称性可以同时拥有（即仅有环）
- 自反性与反自反性不可以同时拥有（除非定义在空集上的空关系）

$R_1, R_2 \subseteq A \times A$ 具有某些共同性质，经过运算后保留原性质如下表：

表达式	自反	反自反	对称	反对称	传递
R_1^{-1}, R_2^{-1}	✓	✓	✓	✓	✓
$R_1 \cup R_2$	✓	✓	✓		
$R_1 \cap R_2$	✓	✓	✓	✓	✓
$R_1 \circ R_2, R_2 \circ R_1$	✓				
$R_1 - R_2, R_2 - R_1$		✓	✓	✓	
$\sim R_1, \sim R_2$			✓		

闭包的求法：设 R 为 A 上的关系，则有：

- $r(R) = R \cup I_A$
- $s(R) = R \cup R^{-1}$
- $t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$

引理：$(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$

引理：$(R_1 \cup R_2)^2 = R_1^2 \cup (A \circ B) \cup (B \circ A) \cup R_2^2$

关系矩阵求闭包：$M_r = M \lor E, M_s = M \lor M^T, M_t = M \lor M^2 \lor M^3 + \cdots$

关系图求闭包：

- 自反闭包：每一个顶点没有环就加上一个环
- 对称闭包：每一条边没有反向边就加上反向边
- 传递闭包：A 到 B 可达，就加 A 到 B 的边

闭包的性质：设 R 是非空集合 A 上的关系，则 R 是自反的 $\Leftrightarrow r(R) = R$；R 是对称的 $\Leftrightarrow s(R) = R$；R 是传递的 $\Leftrightarrow t(R) = R$

闭包与包含关系：若$R_1 \subseteq R_2 \subseteq A \times A$ 且$A \neq \varnothing$，则 $r(R_1) \subseteq r(R_2)$；$s(R_1) \subseteq s(R_2)$；$t(R_1) \subseteq t(R_2)$

证明步骤：

- $R_1 \subseteq R_2; R_2 \subseteq r(R_2) \Rightarrow R_1 \subseteq r(R_2)$
- $r(R_2)$ 自反：$r(R_1)$ 定义可得 $r(R_1) \subseteq r(R_2)$

闭包与并：设 $R_1, R_2 \subseteq A$，且 $A \neq \varnothing$，则：

- $r(R_1 \cup R_2) = r(R_1) \cup r(R_2)$【自反的并自反】
- $s(R_1 \cup R_2) = s(R_1) \cup s(R_2)$【对称的并对称】
- $t(R_1 \cup R_2) \supseteq t(R_1) \cup t(R_2)$【传递并未必传递】

闭包与关系性质：注意对称与传递！

- 若 R 是自反的，则 $s(R), t(R)$ 是自反的
- 若 R 是对称的，则 $r(R), t(R)$ 是对称的
- 若 R 是传递的，则 $r(R)$ 是传递的

反例：R传递，但是$s(R)$ 非传递：$A = \{1, 2\}, R = \{\langle 1, 2\rangle\}$

引理：$(R \cup I_A)^n = I_A \cup R \cup R^2 \cup \cdots \cup R^n \quad (n \ge 1)$

定理：$sr(R) = rs(R), tr(R) = rt(R), st(R) \subseteq ts(R)$

例：$tsr(R) = trs(R) = rts(R)$ 是等价关系

$str(R) = srt(R) = rst(R)$ 不是，无传递性

等价关系性质：R为非空集合A上的等价关系，则

- $\forall x \in A$，$[x]_R \neq \varnothing$，因为 xRx
- $\forall x, y \in A$，$xRy \Rightarrow [x] = [y]$
- $\forall x, y \in A$，$\neg xRy \Rightarrow [x] \cap [y] = \varnothing$
- $\cup\{[x] \mid x \in A\} = A$

序关系性质：设 $\preccurlyeq$ 是非空集合 A 上偏序关系，$\prec$ 是 A 上的拟序关系，则

- $\prec$ 是反对称的
- $\preccurlyeq - I_A$ 是 A 上的拟序关系
- $\prec \cup I_A$ 是 A 上的偏序关系
- 若 $x \prec y, x = y, y \prec x$ 中至多有一成立
- $(x \prec y \lor x = y) \land (y \prec x \lor y = x) \Rightarrow x = y$

函数相关定理

定理1：设 $F : A \to B, G : B \to C$，则 $F \circ G : A \to C$ 也是函数，且 $F \circ G(x) = G(F(x))$

- 证：$F \circ G$ 单值：$\mathrm{dom}\ F \circ G = A, \mathrm{ran}\ F \circ G \subseteq C$【⊆ 显然，= 利用全函数定义】：$F \circ G(x) = G(F(x))$

推论1：设 F, G, H 是函数，有 $(F \circ G) \circ H = F \circ (G \circ H)$

定理2：设 $f : A \to B, g : B \to C$：

- 如果 f, g 都是满射的，则 $f \circ g$ 也是满射的
- 如果 f, g 都是单射的，则 $f \circ g$ 也是单射的
- 如果 f, g 都是双射的，则 $f \circ g$ 也是双射的
- 如果 $f \circ g$ 是满射的，则 g 是满射
- 如果 $f \circ g$ 是单射的，则 f 是单射
- 如果 $f \circ g$ 是双射的，则 f 是单射，g 是满射

定理3：设 $f : A \to B$，则有 $f = f \circ I_B = I_A \circ f$

定理4：f, g 都是单调增（单调减）的，则 $f \circ g$ 是单调增的

定理5（反函数）：设 $f : A \to B$ 是双射，则 $f^{-1} : B \to A$ 也是双射；且 $f^{-1} \circ f = I_B, f \circ f^{-1} = I_A$