离散数学期末知识点汇总 2025.1

命题、联结词与命题公式

命题: 非真即假/可明确判真假的陈述句

• 悖论: [我正在撒谎] 既不为真也不为假 • [长方形是正方形] 既可为真也可为假

真值: 命题的判断结果, 只取真或假两个值 真命题/假命题: 真值为真/假的命题

命题符号化: 将命题抽象为取值为 0or1 的 p,q... 简单命题 (原子命题): 不能被分解成更简单的命 题的命题

复合命题: 由简单命题通过联结词联结而成的命题

• 其真假完全由构成它的简单命题的真假决定

• 简单命题和复合命题的划分是相对的

否定式: 复合命题"非 p"称作 p的否定式, $\neg p$ 否定联结词: \neg , 规定 $\neg p$ 为真当且仅当 p 为假 合取式: 复合命题 "p 并且 q" 称为 p 与 q 的合 取式,记作 $p \wedge q$

合取联结词: \land , 规定 $p \land q$ 为真当且仅当 p 与 q同时为真

析取式: 复合命题 "p 或 q" 称作 p 与 q 的析取 式,记作 $p \vee q$

析取联结词: \lor , 规定 $p \lor q$ 为假当且仅当 p 与 q同时为假

 相容或与相斥或: ∨ 与 ▽, ▽ 为真要满足 p,q 不同时为真;不能看见 p 或 q 就转化为 $p \lor q$ 蕴涵式: 复合命题"如果 p, 则 q" 称为 p 与 q

的蕴涵式,记作 $p \rightarrow q$,并称 p 是前件, q 是后件 • 例子: 如果 p 则 q; q 每当 p; p 仅当 q; 只有 q 才 p; 除非 q 才 p; 除非 q, 否则 ¬p

蕴涵联结词: \rightarrow , 规定 $p \rightarrow q$ 为假当且仅当 p 为 真而 q 为假 (p ≤ q)

等价式: 复合命题 "p 当且仅当 q" 称作 p 与 q 的等价式,记作 $p \leftrightarrow q$

等价联结词: \leftrightarrow , 规定 $p \leftrightarrow q$ 为真当且仅当 p 与 q 同时为真或同时为假

命题常量:一个特定的命题,真值确定

命题变量/项/元:一个没有赋予具体内容的命题, 真值可变

命题公式(命题形式):由命题变元和联结词按以 下规则组成的符号串

1. 任何命题变元都是命题公式, 称为原子命题公

2. 如果 A 是命题公式,则 $\neg A$ 也是命题公式 3. 如果 $A \times B$ 是命题公式,则 $(A \vee B) \times (A \wedge B)$

 $(A \rightarrow B)$ 和 $(A \leftrightarrow B)$ 都是命题公式 只有有限次地应用(1)-(3)构成的符号串才是

命题公式定义是归纳定义,而不是循环定义,(1) 是奠基,(2)、(3)是归纳步骤

公式中的 0, 1 看作可看作 (A∧(¬A))、(A∨(¬A))

约定运算顺序

省略命题公式最外层括号; ¬ 的优先级高于其它的 联结词,只作用于紧随其后的命题变元;相同联结 词可以省略括号;优先级:(否定)>(合取、析 取) > (蕴涵、等价)

赋值 (解释): 设 p_1, p_2, \ldots, p_n 是出现在命题公式 A 中的所有命题变元, 对序列 p_1, p_2, \ldots, p_n 指定 的的任一真值序列, 称为对 A 的一个赋值

成真/假赋值: 若 $p_1, p_2, ..., p_n$ 的一个赋值使 A为真/假,则称此赋值为A的一个成真/假赋值

重言式(永真式)/矛盾式(永假式): A 关于其中 出现的命题变元的所有赋值均为成真/假赋值

可满足式: A 对于其中出现的命题变元的某个赋值 为成真赋值

哑元: 未出现在 <math>A 中的命题变元, A 取值与哑元 取值无关

等值式与范式

等值式: 若 A,B 构成的等价式 $A \leftrightarrow B$ 为重言式, 则称 A 与 B 等值,记作 $A \Leftrightarrow B$,并称 $A \Leftrightarrow B$ 是 等值式: 等值是一种等价关系

文字: 命题变项及其否定的统称

简单析/合取式:仅由有限个文字构成的析/合取式

范式:由有限个简单合/析取式的析/合取构成的命 题公式称作析/合取范式; 析取范式与合取范式统 称作范式

• 简单合(析)取式既是析取范式又是合取范式 极小/大项: 以含 p,q,r 的情况为例

• $m_1 = \neg p \land \neg q \land r$ (下标 = 成真赋值)

• $M_1 = p \lor q \lor \neg r$ (下标 = 成假赋值) 主析/合取范式: 所有简单合/析取式都是极小/大

项的析/合取范式

n 元真值函数: $F: \{0,1\}^n \to \{0,1\}$

联结词的完备集 S: 仅由 S 中的联结词构成的公 式可表示所有真值函数

与非、或非: ↑ 表示与非, ↓ 表示或非

命题逻辑推理

推理形式: 由前提 α_1 , α_2 , ..., α_n 推出结论 β

推理正确 (有效): 如果对 α_1 , …, α_n , β 中出现 的命题变元的任意赋值,若 $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_n$ 为 假, 或若 $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_n$ 为真时 β 亦真, 则称 推理 " $\alpha_1, \, \alpha_2, \, \cdots, \, \alpha_n$ 推出 β " 有效,否则是不 合理 (无效)的。

•注: 若出现前提为真结论为假的情况则推理无效! 逻辑蕴涵 \Rightarrow : 前提: $\alpha_1, \, \alpha_2, \, \cdots, \, \alpha_n$ 结论: β 推 理正确记为 $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \Rightarrow \beta$

• $A \rightarrow B$ 是命题公式, $A \Rightarrow B$ 表示两个命题公式 之间的逻辑蕴涵关系

自然推理系统 P: 字母表:命题变元、联结词、括号逗号

命题公式:(见上) • 推理规则: (见定理)

一阶谓词逻辑

个体: 独立存在的客体

个体常元:表示具体事物,a,b,c,..

个体变元:抽象事物(不确定具体哪个)x,y,z,...

个体域: 个体变元的取值范围 • 全总个体域: 由宇宙间一切事物组成的个体域

谓词:表示个体性质或彼此之间关系 F,G,H,... • 谓词常元:表示具体性质或关系

 谓词变元:表示抽象的或泛指的性质或关系 n 元谓词: 含 n 个【个体变元】的谓词,是定义

在个体域上, 值域为 $\{0,1\}$ 的 n 元函数 • 一元谓词:表示事物的性质

• 多元谓词:表示事物之间的关系 • 0 元谓词: 不含个体变元的谓词, 就是命题常项或

注: 将 n 元谓词中的个体变元都用个体域中具体

的个体取代后, 就成为一个命题

全称量词 V: 自然语言中"所有的"、"一切的"、"任 意的"、"每一个"、"都"等的统称。∀x 个体域中 的所有个体; $\forall x F(x)$ 个体域里的所有 x 都有性质

存在量词 3: 自然语言中"有一个"、"至少有一 '、"存在着"、"有的"等的统称。3x 存在个体 域里的 x; $\exists x F(x)$ 在个体域里存在 x 具有性质 F

有限域下的公示表示法 (无穷集下无)

• $\forall x P(x) = P(1) \land P(2) \land ... \land P(k)$: 对任意的 x, P(x) 均成立, 合取联结词的推广

• $\exists x P(x) = P(1) \lor P(2) \lor ... \lor P(k)$: 有一个 x 使 得 P(x) 成立, 析取联结词的推广

特性谓词 M(x): 用于将个体变元局限在满足该谓 词代表的性质或关系的范围之内

命题符号化应注意以下几点:

・两个基本公式: $\forall x(M(x) \rightarrow F(x))$, 个体域中所有 有性质 M 的个体都有性质 F; $\exists x(M(x) \land G(x))$, 个体域中存在有性质 M 同时有性质 G 的个体

• 同一命题在不同个体域中符号化形式可能不同

同一命题在不同个体域中真值可能不同

•命题中表示性质和关系的谓词,分别符号化为-元和 n 元谓词

• 多个量词出现时, 仅同类量词可交换顺序

・定理: $(\exists x)(\forall y)P(x,y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)P(x,y)$

函 数 符号: 个体域 D 上, n 元函数符号 $f(x_1,...,x_n)$ 是 $D^n \to D$ 的函数 (与谓词差异在 于值域)

一阶语言 £ 的字母表

非逻辑符号: 所描述的特定对象中的符号

• 个体常元: $a,b,c,...,a_i,b_i,c_i,i \ge 1$ • 函数符号: $f,g,h,...,f_i,g_i,h_i,...,i \ge 1$

• 谓词符号: F,G,H,...,F_i,G_i,H_i,i≥1 逻辑符号:逻辑系统中的符号

• 个体变元: $x, y, z, ..., x_i, y_i, z_i, ..., i ≥ 1$

·量词符号:_∀,∃

联结词符号: ¬,∧,∨,→,←

括号与逗号:(),

£ 的项 1. 个体常元和个体变元是项

2. 若 $\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ 是 n 元函数, t_1,t_2,\ldots,t_n 是任意的 n 个项, 则 $\varphi(t_1,t_2,...,t_n)$ 是项 3. 所有的项都是有限次使用(1),(2)得到的

原子公式: 设 $R(x_1,x_2,...,x_n)$ 是 \mathcal{L} 任意的 n元谓词, $t_1,t_2,...,t_n$ 是 $\mathcal L$ 的任意 n 个项,则称 $R(t_1,t_2,...,t_n)$ 是原子公式

定义 \mathcal{L} 的合式公式

1. 原子公式是合式公式 2. 若 A 是合式公式,则 $(\neg A)$ 也是合式公式 3. 若 A, B 是合式公式, 则 $(A \land B)$, $(A \lor B)$, $(A \lor B)$

B), $(A \leftrightarrow B)$ 也是合式公式 4. 若 A, B 是合式公式, 则 $(\forall x)A$, $(\exists x)A$ 也是合

式公式 • 项是(复合)个体;(原子)公式是完整的判断

注 1: 一阶语言中的原子公式取代了命题公式

注 2: 所有一阶语言中都含有相同的逻辑符号, 但 所含的非逻辑符号不一定相同 注 3: 在定义中没有要求个体 x 一定要在 A 中出

现, $(\forall x_1)F(x_1,x_2)$, $(\forall x_3)F(x_1,x_2)$ 都是公式 注 4: L 中至少有一个谓词符号, 否则 L 生成的

一阶语言中没有公式

括号省略规则

1. 省略公式最外层的括号

2. 联结词 ¬ 的优先级高于其他联结词, 可以去掉 (¬α) 中的外层括号

 $3. \forall x, \exists x$ 优先级高于所有联结词, 将 $(\forall x)\alpha, (\exists x)\alpha$ $\forall x \alpha, \exists x \alpha; (\forall x_1) \cdots (\forall x_n) \alpha$ 简记为 $\forall x_1 \cdots \forall x_n \alpha, (\exists x_1) \cdots (\exists x_n) \alpha$ 简记为 $\exists x_1 \cdots \exists x_n \alpha$ 辖域: 公式 $\forall xA$ 和 $\exists xA$ 中, 称 x 为 指导变元,

A 为相应量词的 辖域 约束出现: 在 $\forall x$ 和 $\exists x$ 的辖域中(包括 $\forall x$ 和 $\exists x$ 中的 x), x 的所有出现称为约束出现, A 中不 是约束出现的其他变元称为 自由出现

约束变元: 设个体变元 x 在公式 α 中出现, 若 x在 α 中的所有出现【均】为约束出现,则称 x 为 α 的约束变元: 否则称为自由变元

闭式: 设 A 是任意的公式, 若 A 中不含自由出现 的个体变元,则称 A 为封闭的公式,简称闭式

 要将含 r 个自由出现的个体变元的公式变成闭 式,至少需要加上r个量词

解释与赋值

 设一阶语言 £ 个体常元集 {a_i}, 函数符号集 {f_i}, 谓词符号集 $\{F_i\}$, \mathcal{L} 的解释 I 由下面 4 部分组成: 1 非空个体域 D_I

2. 对每一个个体常元 $a_i, \overline{a_i} \in D_I$, 称作 a_i 在 I 中

3. 对每一个函数符号 f_i , 设其为 m 元的, $\overline{f_i}$ 是 D_I 上的 m 元函数, 称作 \overline{f} 在 I 中的解释 4. 对每一个谓词符号 F_i , 设其为 n 元的, $\overline{F_i}$ 是

一个 n 元谓词,称作 F_i 在 I 中的解释 • I 下的赋值 σ : 对每一个【自由出现】的个体变 元 x 指定个体域中的一个值 $\sigma(x)$

注1:任何公式在给定的解释和赋值下都是命题 注 2 , 闭式在任何解释下都变成命题 (无需赋值

永真式(逻辑有效式): 无成假解释和赋值 矛盾式(永假式): 无成真解释和赋值 可满足式: 至少有一个成真解释和赋值

代换实例: 设 A_0 是含命题变项 p_1,p_2,\ldots,p_n 的 命题公式, $A_1, A_2, ..., A_n$ 是 n 个谓词公式, 用 A_i 处处代替 A_0 中的 $p_i(1 \le i \le n)$, 所得公 式 A 称为 A_0 的代换实例。例如, $F(x) \rightarrow G(x)$. $\forall x F(x) \rightarrow \exists y G(y)$ 都是 $p \rightarrow q$ 的代换实例

等值式: 设 A,B 是一阶逻辑中任意两个公式,若 $A \leftrightarrow B$ 是永真式,则称 A 与 B 等值,记作 $A \leftrightarrow B$, 并称 $A \Leftrightarrow B$ 为等值式

前束范式: 一阶逻辑公式 A 具 $Q_1x_1 ... Q_kx_kB$ 的 形式。其中 $Q_i = \forall$ 或 \exists , B(母式/基式) 不含量 **推理正确(有效)**: 在一阶逻辑中,从前提 A_1, \ldots, A_k 推出结论 B 正确,若 $A_1 \wedge \ldots \wedge A_k \to B$ 为永真式,记作 $A_1 \wedge \ldots \wedge A_k \Rightarrow B$,否则称推理不正确 自然推理系统 N_L 一阶逻辑自然推理系统包括: 1 字母表: 同一阶语言字母表

 合式公式(谓词公式):(见上) 3. 推理规则: (见定理

等值式与范式定理

否定律 A ⇔ ¬¬A

交換律 $A \lor B \Leftrightarrow B \lor A, A \land B \Leftrightarrow B \land A, A \leftrightarrow B \Leftrightarrow$

结合律 $(A \lor B) \lor C \Leftrightarrow A \lor (B \lor C), (A \land B) \land C \Leftrightarrow$ $A \wedge (B \wedge C), (A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C \Leftrightarrow A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)$ 分配律 $A \rightarrow (B \rightarrow C) \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$ $A \lor (B \land C) \Leftrightarrow (A \lor B) \land (A \lor C)$, 与或可互换

德摩根律 $\neg (A \lor B) \Leftrightarrow \neg A \land \neg B, \neg (A \land B) \Leftrightarrow \neg A \lor \neg B$

幂等律 $A \lor A \Leftrightarrow A, A \land A \Leftrightarrow A, A \to A \Leftrightarrow 1, A \leftrightarrow$ 吸收率 $A \lor (A \land B) \Leftrightarrow A, A \land (A \lor B) \Leftrightarrow A$

零律 $A \lor 1 \Leftrightarrow 1$, $A \land 0 \Leftrightarrow 0$, $A \to 1 \Leftrightarrow 1$, $0 \to A \Leftrightarrow 1$

排中律 $A \lor \neg A \Leftrightarrow 1$

矛盾律 $A \land \neg A \Leftrightarrow 0$

蕴涵等值式 $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \lor B$ 等价等值式 $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \land (B \rightarrow A)$

假言易位 $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \rightarrow \neg A$

等价否定等值式 $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg A \leftrightarrow \neg B$ 归谬律 $(A \rightarrow B) \land (A \rightarrow \neg B) \Leftrightarrow \neg A$

其他 $A \rightarrow \neg A \Leftrightarrow \neg A, \neg A \rightarrow A \Leftrightarrow A, A \leftrightarrow \neg A \Leftrightarrow 0$ $A \to (B \to C) \Leftrightarrow (A \land B) \to C \Leftrightarrow B \to (A \to C)$ $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \land B) \lor (\neg A \land \neg B) \Leftrightarrow (\neg A \lor B) \land (A \lor \neg B)$ $(A \rightarrow C) \land (B \rightarrow C) \Leftrightarrow (A \lor B) \rightarrow C$

置换规则设 $\phi(A)$ 是含公式 A 的公式,用公式 B置换 $\phi(A)$ 中的 A, 得公式 $\phi(B)$, 如果 $A \Leftrightarrow B$, 则 $\phi(A) \Leftrightarrow \phi(B)$

证明等值式: 真值表法/等值演算

证明不等值式: 真值表法/观察出一个不等值的赋 值/先等值演算再观察

• 一个简单析取式是重言式当且仅当它同时含某个 命题变项及它的否定式 •一个简单合取式是矛盾式当且仅当它同时含某个

命题变项及它的否定式 •一个析取范式是矛盾式当且仅当它的每个简单合 取式都是矛盾式

•一个合取范式是重言式当且仅当它的每个简单析 取式都是重言式

范式存在定理: 任一命题公式都存在与之等值的析 取范式与合取范式 • 方法: 利用蕴涵等值式和等价等值式消去: 利用

双重否定式和德摩根率将 ¬ 消去或内移; 分配律 一些联结词的完备集: {¬,∧},{¬,∨},{¬,→},{↑},{↓}

·证明:从主析取出发得 {¬, ∧, ∨},其他通过符号 间的表示 • 不考虑与非、或非, 2 元素有 3 个完备, 3 元 素有 6 个完备 (含 ¬ 即可), 4 元素有 4 个完备

命题逻辑的推理定律

⇒ 的基本性质

• 若 $A \Rightarrow B$, A 为重言式, 则 B 也是重言式

• 若 $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow A$ 同时成立, 必有 $A \Leftrightarrow B$ • $\exists A \Rightarrow B, B \Rightarrow C, \emptyset A \Rightarrow C$

• $\rightleftarrows A \Rightarrow B$, $A \Rightarrow C$, $\bowtie A \Rightarrow B \land C$ • $\rightleftarrows A \Rightarrow C$, $B \Rightarrow C$, $M \land A \lor B \Rightarrow C$

证明推理公式 $A \Rightarrow B$ 的方法 • 真值表法: 直观解释法【关注前提为真结论为假】

主析取/合取范式法:等值演算法【根据充要条 件 $A \rightarrow B$ 为永真式或 $A \land \neg B$ 为矛盾式】

• 若 $\neg B \Rightarrow \neg A$,则 $A \Rightarrow B$ 附加律: $A \Rightarrow (A \lor B)$ 化简律: $(A \land B) \Rightarrow A$

假言推理: $(A \rightarrow B) \land A \Rightarrow B$ 拒取式: $(A \rightarrow B) \land \neg B \Rightarrow \neg A$

析取三段论: $(A \lor B) \land \neg A \Rightarrow B$. $(A \lor B) \land \neg B \Rightarrow A$ 假言三段论: $(A \rightarrow B) \land (B \rightarrow C) \Rightarrow (A \rightarrow C)$ 等价三段论: $(A \leftrightarrow B) \land (B \leftrightarrow C) \Rightarrow (A \leftrightarrow C)$ 构造性二难: $(A \rightarrow B) \land (C \rightarrow D) \land (A \lor C) \Rightarrow (B \lor D)$ 构造性二难 (特殊形式): $(A \rightarrow B) \land (\neg A \rightarrow B) \Rightarrow B$ 破坏性二难: $(A \rightarrow B) \land (C \rightarrow D) \land (\neg B \lor \neg D) \Rightarrow$ $(\neg A \lor \neg C)$

推理定律 10: $\neg A \Rightarrow (A \rightarrow B)$; $B \Rightarrow (A \rightarrow B)$; $\neg (A \to B) \Rightarrow A: \neg (A \to B) \Rightarrow \neg B$

推理定律 11: $(B \rightarrow C) \Rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$; $(B \to C) \Rightarrow (A \lor B) \to (A \lor C)$

利用自然推理系统 P 构造推理的证明:

• 推理规则: 前提引入规则、结论引入规则、置换 规则、合取引入规则 $(A,B \Rightarrow A \land B)$

1. 直接证明法

2. 附加前提证明法: 如果推理的结构有如下形式: $(A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_k) \rightarrow (C \rightarrow B)$, 则可以将结构改 写为: $(A_1 \land A_2 \land ... \land A_k \land C) \rightarrow B[附加前提引入]$ 3. 归谬法: 引入结论的否定作为附加前提, 若能推

出矛盾式,则此推理有效 [结论否定引入] 4. 消解证明法: 把【结论的否定】及【前提】都化成 合取范式,以这些合取范式中的【简单析取式】为

前提,仅用归结规则规则构造证明推出 0 • 归结规则: $(A \lor B) \land (\neg A \lor C) \Rightarrow B \lor C$

一阶谓词逻辑等值式

1. 命题逻辑等值式的代换实例都是一阶逻辑的等 值式

2.1 量词否定等值式 A(x) 是含 x 自由出现的公 式:

 $1. \neg \forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$ $2.\neg \exists x A(x) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x)$

2.2 量词辖域收缩与扩张等值式: A(x) 是含 x 自 由出现的公式: B 中不含 x 的自由出现:

 $1. \forall x (A(x) \lor B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \lor B$ $2.\forall x(A(x) \land B) \Leftrightarrow \forall xA(x) \land B$ $3. \forall x (A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \rightarrow B$ $4. \forall x (B \rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B \rightarrow \forall x A(x)$ $5.\exists x(A(x) \lor B) \Leftrightarrow \exists xA(x) \lor B$ $6.\exists x(A(x) \land B) \Leftrightarrow \exists xA(x) \land B$

 $7.\exists x(A(x)\to B) \Leftrightarrow \forall xA(x)\to B$ $8.\exists x(B \to A(x)) \Leftrightarrow B \to \exists x A(x)$ 2.3 量词分配等值式 A(x)B(x) 是含 x 自由出现

 $1. \forall x (A(x) \land B(x)) \Leftrightarrow \forall x A(x) \land \forall x B(x)$

 $2.\exists x(A(x) \lor B(x)) \Leftrightarrow \exists xA(x) \land \exists xB(x)$

 ∀ 对 ∨ 无分配律, ∃ 对 ∧ 无分配律! 3.1 置换规则: 设 $\Phi(A)$ 是含公式 A 的公式, $\Phi(B)$ 是用公式 B 取代 $\Phi(A)$ 中所有 A 所得到的公式, 若 $A \Leftrightarrow B$, 则 $\Phi(A) \Leftrightarrow \Phi(B)$

· 约束变元:【指导变元】及其【辖域中的约束出现】

一起换成该量词辖域中没出现过的变元 自由变元: 公式中自由变元的所有自由出现一起 换(且不允许在原公式中以约束形式出现)

前束范式存在定理:一阶逻辑中的任何公式都存在 与之等值的前束范式,但其前束范式并不唯一 化前束范式的方法:设 G 是任一公式 消去公式中包含的联结词 → (非必要), ↔

 反复使用德摩根律将 ¬ 内移 3. 使用分配等值式将量词左移

4. (不能使用分配律时) 先易名后辖域扩张 一阶逻辑的推理定律

1. 命题逻辑推理定律的代换实例 •例: $\forall x F(x) \land \forall y G(y) \Rightarrow \forall x F(x)$ (化简律)

 $1.\forall x A(x) \Rightarrow \exists x A(x)$ $2.\forall x A(x) \lor \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \lor B(x))$ 仅单向! $3.\exists x(A(x) \land B(x)) \Rightarrow \exists xA(x) \land \exists xB(x)$ 仅单向! $4. \forall x (A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \rightarrow \forall x B(x)$ $5. \forall x (A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \rightarrow \exists x B(x)$ $\begin{array}{c} 6. \forall x (A(x) \leftrightarrow B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \leftrightarrow \forall x B(x) \\ 7. \forall x (A(x) \leftrightarrow B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \leftrightarrow \exists x B(x) \end{array}$

量词的消去/引入规则: 设 x.v 为个体变元符

号, c 为个体常元, \mathbb{C}_y 不在 A(x) 中约束出现】

3. 含有多个量词的公式:

 $\exists y \forall x \leftarrow \forall y \forall x \longleftrightarrow \forall x \forall y \rightarrow \exists x \forall y$ $\forall x \exists y \rightarrow \exists x \exists y \longleftrightarrow \exists y \exists x \longleftrightarrow \forall y \exists x$ 1. \forall -: $(\forall x)A(x) \Rightarrow A(y), (\forall x)A(x) \Rightarrow A(c)$

 $2.\forall +: A(y) \Rightarrow (\forall x)A(x)$ 限制: x 不在 A(y) 中 约束出现 [重名引起混乱]

 $3.3-: (\exists x)A(x) \Rightarrow A(c)$ 限制: $(\exists x)A(x)$ 中无自 由变元 [否则 x 依赖于自由变元],且不含 c $4.3+: A(c) \Rightarrow (3x)A(x)$ 限制: x 不出现于 A(c)

一阶自然推理系统 N_L 构造推理的证明: 推理规则:12 条命题逻辑推理规则、V-,V+,3-,3+ 推理方法

1. 前提引入规则和结论引入规则

2. 如果结论是以蕴涵形式 (或析取形式) 给出,可

使用附加前提证明法 3. 若需消去量词,用全称量词消去规则和存在量

4. 当所要求的结论可能被定量时,用全称量词引 入规则和存在量词引入规则将量词加入

 对消去量词的公式或公式中不含量词的子公式, 用命题演算中的基本等价公式和基本推理定律 6. 对含有量词的公式可以用谓词中的基本等价公 式和基本推理定律

注 1. 如公式中既要消去存在量词又要消去全称量 词,且所选用的个体是同一个符号,则必须 先消去 存在量词再消去全称量词

注2.∃XA(X) ⇒ A(c) ⇒ ∃XA(X) $\forall x A(x) \Rightarrow A(y) \Rightarrow \forall x A(x)$

注 3. 有两个含有存在量词的公式, 当消去存在量词时, 不能选用同样的一个常量符号来取代两个公 式中的变元,而 应用不同的常量符号

注 4. 使用 ∀+,∀-,3+,3- 时,此量词必须位于整 个公式的最前端, 且它的辖域为其后的整个公式

集合基础概念

子集: $B \subseteq A \Leftrightarrow \forall x(x \in B \to x \in A)$ 非子集: $B \not\subseteq A \Leftrightarrow \exists x (x \in B \land x \notin A)$

相等: $A = B \Leftrightarrow \forall x (x \in B \leftrightarrow x \in A) \Leftrightarrow A \subseteq B \land B \subseteq A$

真子集: $A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \land A \neq B$

非真子集: $A \subset B \Leftrightarrow \exists x(x \in A \land x \notin B) \lor A = B$ 空集: $\emptyset = \{x | x \neq x\}$, 是一切集合的子集; 唯一 全集 E: 与具体问题相关,不唯一

幂集: $P(A) = 2^A = \{x | x \subseteq A\}$, 易知 $|P(A)| = 2^n$ n元集: A 有 n 个元素, 记作 |A| = n

有穷集(有限集): A 的元素个数有限

并集: $A \cup B = \{x | x \in A \lor x \in B\}$

初级并: $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \{x | \exists i (1 \leq i \leq n) \}$ $n \wedge x \in A_i$, $\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots$

交集: $A \cap B = \{x | x \in A \land x \in B\}$

初级交: $A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n = \{x | \forall i (1 \le i \le n \to x \in A_n) \}$ A_i), $\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap ..., \bigcap_{i=1}^\infty A_i = A_1 \cap A_2 \cap ...$ 不相交: 设 A_1, A_2, \dots 是可数多个集合,对于任意 的 $i \neq j$, 都有 $A_i \cap A_j = \emptyset$, 则称 A_1, A_2, \dots 是互

相对补集: 只属于 A 而不属于 B 的全体元素组 成的集合为 B 对 A 的相对补集。 $A - B = \{x | x \in A \cap B \}$ $A \wedge x \notin B$ = $A \cap \sim B$

对称差: $A \bigoplus B = \{x | (x \in A \land x \notin B) \lor (x \notin A \land x \in B)\}$ $|B| = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

绝对补集: $\sim A = \{x | x \in E \land x \notin A\} = E - A =$ $\{x \mid x \notin A\}$

广义并: $\bigcup A = \{x | \exists z (x \in z \land z \in A)\}, A$ 是集族 (即 A 的元素是集合); UØ=Ø

广义交: $\bigcap A = \{x | \forall z (z \in A \rightarrow x \in z) \}$, A 是集族 且非空──理论上 ○Ø 包含任意元素,即包含所 有集合,这在集合论中无意义

• $\{x | \forall z (z \in A \rightarrow x \in P(z))\} = \cap \{P(z) | z \in A\}$

集合运算的优先级: 一元运算优先于二元运算

•第一类运算/一元运算(从右向左): 绝对补、幂 集、广义交/并

第二类运算/二元运算(从左向右):初级并/交、 相对补、对称差

二元关系

有序对: 由两个元素 x 和 v (允许 x = v) 按照 一定顺序排列而成的二元组称作一个有序对,记作 $\langle x,y\rangle := \{\{a\},\{a,b\}\}$

• $x \neq v \Rightarrow \langle x, v \rangle \neq \langle v, x \rangle$ • $\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle \Leftrightarrow a = c \land b = d$

笛卡尔积 (卡式积): 设 A,B 为集合, 用 A 中元素 为第一元素,B 中元素为第二元素构成有序对。所 有这样的有序对组成的集合称作 A 和 B 的笛卡 尔积,记作 $A \times B := \{\langle x, y \rangle | x \in A \land y \in B\}$

笛卡尔积性质

 非交換 A×B ≠ B×A【除非 A = Ø∨B = Ø∨A = B】 非结合 (A×B)×C ≠ A×(B×C)【除非 A = Ø∨B =

 $\emptyset \lor C = \emptyset$ 对并和交满足分配律:

• $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

• $(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$

• $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

• $(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$

• $A \times \emptyset = \emptyset$, $\emptyset \times A = \emptyset$

• $A \times B = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset \vee B = \emptyset$

若 A ≠ Ø, 则 A × B ⊆ A × C ⇔ B ⊆ C

• $A \subseteq C \land B \subseteq D \Rightarrow A \times B \subseteq C \times D$ (A = B = \emptyset) \vee ($A \neq \emptyset \land B \neq \emptyset$) 时,逆命题成立】

n 元关系: 元素全是有序 n 元组【或为空集】的 二元关系 (关系): n=2 的情形, 记作 R

• 记号: $\langle x,y \rangle \in R \Leftrightarrow R(x,y), Rxy \Leftrightarrow xRy$

若 ⟨x,y⟩ ∉ R, 记作 x ~ Ry。

A 到 B 的二元关系: $A \times B$ 的任何子集(含空集 \Leftrightarrow $R \subseteq A \times B \Leftrightarrow R \in \mathcal{P}(A \times B)$

• A 到 B 不同的二元关系有 $2^{|A|\cdot|B|}$ 个 • 当 A = B 时称作 A 上的二元关系

特殊关系: 对于任何集合 A: 空关系: Ø

• 全域关系: $E_A = \{\langle x, y \rangle | x \in A \land y \in A\} = A \times A$

• 恒等关系: $I_A = \{\langle x, x \rangle | x \in A \}$ • 小于等于关系: $LE_A = \{\langle x, y \rangle | x, y \in A, x \le y \}$

整除关系: D_A = {⟨x,y⟩|x,y ∈ A,x|y}

•包含关系: $R_{\subset} = \{\langle x, y \rangle | x, y \in A, x \subseteq y\}$

• 真包含关系: $R_{\subset} = \{\langle x, y \rangle | x, y \in A, x \subset y\}$

关系矩阵: $M(R) = [r_{ij}]_{n \times n}$, 若 x_i 与 x_j 有关系 则 r_{ii} 为 1, 否则为 0。

关系图: $\langle x_i, x_i \rangle \in R$ 对应图 G_R 中 x_i 到 x_i 的有

• 集合表达式、关系矩阵、关系图三者可唯一互相 确定。

逆关系: $R^{-1} = \{\langle x, y \rangle \mid \langle y, x \rangle \in R\}$

右复合: $F \circ G = \{\langle x, y \rangle \mid \exists t (\langle x, t \rangle \in F \land \langle t, y \rangle \in G)\}$

定义域: R 中所有有序对的第一元素构成的集合称 作 R 的定义域, 记作 dom R, 即 $dom R = \{x \mid$

值域: R 中所有有序对的第二元素构成的集合称作 R 的值域, 记作 ranR, 即 ranR = $\{y \mid \exists x (\langle x, y \rangle \in A)\}$

域:R的定义域和值域的并集为域,记作fldR,即 $fldR = domR \cup ranR$

限制: R 在 A 上的限制记作 $R \uparrow A$, 即 $R \uparrow A =$ $\{\langle x,y\rangle \mid xRy \land x \in A\} \subseteq R$

像: A 在 R 上的像记作 R[A], 即 R[A] = ran(R↑ $A) = \{y \mid \exists x (x \in A \land xFy)\} \subseteq \operatorname{ran} R$

幂运算: R 的 n 次幂

• $R^0 = \{\langle x, x \rangle \mid x \in A\} = I_A$

 $\bullet \ R^{n+1} = R^n \circ R$

关系运算的顺序

逆运算优先于其他运算

关系运算(逆、合成、限制、像)优先于集合运算 (交并补、相对补、对称差等) 没有规定优先权的运算以括号决定运算顺序

自反: 设R为A上的关系, R在A上是自反的 $\Leftrightarrow \forall x (x \in A \to \langle x, x \rangle \in R) \Leftrightarrow (\forall x \in A) x R x$ 非自反: 自反的否定, 定义空关系非自反

反自反: 称 R 在 A 上是反自反的, 若 $\forall x(x \in A \rightarrow A)$ $\langle x, x \rangle \notin R$

对称: 若 $\forall x \forall y (x, y \in A \land \langle x, y \rangle \in R \rightarrow \langle y, x \rangle \in R)$, 则称 R 为 A 上对称的关系

反对称: 若 $\forall x \forall y (x, y \in A \land \langle x, y \rangle \in R \land \langle y, x \rangle \in R$ $R \rightarrow x = y$), 则称 R 为 A 上反对称的关系

传递: $\forall x \forall y \forall z (x, y, z \in A \land \langle x, y \rangle \in R \land \langle y, z \rangle \in R \rightarrow$ $(x,z) \in R$)【若两步能到,一步一定能到】

自反/对称/传递闭包: 要求 A 非空, R 的 $\times \times$ 闭 包是 A 上的关系 R' 满足 $R \subseteq R'$ 、×× 性、极小 性: 分别记作 r(R), s(R), t(R)

极小性的表示: ∀S((R ⊆ S ∧ S 自反) → r(R) ⊆ S)

等价关系: 设 R 为非空集合 A 上的关系, 若 R是自反、对称、传递的,则称 R 为 A上的等价关系 •设R为一个等价关系,若 $\langle x,y\rangle \in R$,则称x等 价于 y, 记作 $x \sim y$ 。空关系不是等价关系。

等价类:设R为非空集合A上的等价关系, $\forall x \in A$, 令 $[x]_R = \{y \mid y \in A \land xRy\}$,称 $[x]_R$ 为 x 关于 R的等价类,简记为 [x]

商集: 设 R 为非空集合 A 上的等价关系, R 的 所有等价类组成的集合是 A 关于 R 的商集,记作 A/R, 即 $A/R = \{[x]_R \mid x \in A\}$ (是一个集族) 显然 UA/R = A

划分: $A \neq \emptyset$ 的一个划分是 A 的子集族 $A \subseteq P(A)$ 满足: $\emptyset \notin A$, $\forall x \forall y (x, y \in A \land x \neq y \rightarrow x \cap y =$ Ø), $\bigcup A = A$, 称 A 中的元素为 A 的划分块。

 R是A 上的等价关系 ⇒ 商集 A/R 是 A 的划分 A是A的划分⇔同块关系 R_A 是 A 上的等价关系 注:求所有等价关系时并上 I_A(自反性)

Stirling子集数:记 f[n][k]为n 个不同元素划分为 k 组的方法数, f[n][0] = 0, f[n][1] = 1, f[n][2] = $2^{n-1} - 1, f[n][n-1] = C_n^2, f[n][n] = 1, f[n][k] =$ kf[n-1][k] + f[n-1][k-1]• $\Sigma f[3][k] = 5, \Sigma f[4][k] = 15$

偏序关系: 设 $A \neq \emptyset$, $R \subseteq A \times A$, 若 R 是自反、反 对称、传递的,则称 R 为 A 的偏序关系,记作 \leq 。 设 \leq 为偏序关系,如果 $\langle x,y \rangle \in \leq$,则记作 $x \leq y$ • 自反时证反对称: $xRy \land yRx \Rightarrow x = y$

偏序集: \leq 是A 上的偏序关系, 称 $\langle A, \leq \rangle$ 为偏序集 设 $\langle A, \leq \rangle$ 为偏序集, $x,y \in A$, 定义:

• x与y 可比: 若 $x \leq y \vee y \leq x$

• 严格小于: $x < y \Leftrightarrow x ≤ y \land x ≠ y$ •覆盖: 称 y 覆盖 x, 若 x < y, 且不存在 z, 使

得 x < z < y·对任意两个元素 x, y,有四种情况必发生其中恰

好一种: x < y, y < x, x = y, x 与 y 不是可比的 哈斯图: $\forall x, y \in A$, 若 x < y, 则将 x 画在 y 下 方; 对于 A 中两个不同的元素 x 和 y, 若 y 覆

盖 x, 就用一条线段连接 x 和 y• 省略自反性、传递性及反对称性的箭头

全序关系 (线序关系): 设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 为偏序集,若 $\forall x, y \in A, x \neq y$ 都是可比的,则 R 为 A 上的 全序关系 (哈斯图是一根线)

拟序关系: 设 R 为非空集合 A 上的关系。若 R是反自反、传递的,则称 R 为 A 上的拟序关系, 常用 < 表示拟序关系, (A, <) 为拟序集。 反自反性与传递性蕴涵反对称性

最/极大/小元: 设 $\langle A, \leq \rangle$ 为偏序集, $B \subseteq A, y \in B$ • 若 $\forall x(x \in B \rightarrow y \leq x)$ 成立,则称 $y \rightarrow B$ 的最

小元【可以无必唯一】 若 ∀x(x ∈ B∧x ≤ y → x = y)成立,则称y为B

的极小元【必存在不唯一,不大于任何元】

上/下界: 设 $\langle A, \leq \rangle$ 为偏序集, $B \subseteq A, y \in A$

•若 $\forall x(x \in B \rightarrow x \leq y)$ 成立,则称 $y \rightarrow B$ 的上 界【可以无不唯一】

・令 $C = \{y \mid y \land B$ 的上界}, 则称 C 的最小元 为 B 的最小上界或上确界【可以无必唯一】 • 上界与下界不一定存在集合之中

• 集合的最小元素是它的下确界, 最大元素就是 它的上确界; 反之不对

函数 (映射): 单值的二元关系 F, 若 $\forall x \in \text{dom} F$ 都存在唯一的 $y \in \operatorname{ran} F$ 使得 xFy 成立 (单值) • 记号: $F(x) = y \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in F \Leftrightarrow xFy$

 证单值: ∀x ∈ domF, ∀y, z ∈ ranF, xFy ∧ xFz → 偏函数 (部分函数): 若 $dom F \subseteq A \land ran F \subseteq B$,

则 F 称为从 A 到 B 的偏函数, A 称为 F 的前 域,B 称为 F 的后域,记作 偏函数计数: (|B| + 1)|A|

全函数 (函数): 若 $dom f = A \wedge ran f \subseteq B$, 则 f称为从 A 到 B 的函数,记作 $f:A\to B$

• 所有从 A 到 B 的函数的集合记作 B^A , 读作 "B" $\perp A^n$; $B^A = \{f \mid f : A \to B\}$; $|B^A| = |B|^{|A|}$

• $\stackrel{\cdot}{=}$ $A = \emptyset$ $\stackrel{\cdot}{=}$ $\stackrel{\cdot}$

• 当 $A \neq \emptyset \land B = \emptyset$ 时, $B^A = \emptyset$, $|B^A| = 0$

单射、满射、双射: 设 $f:A \rightarrow B$

• 若 ranf = B, 则称 f 为满射

• 若 $\forall y \in \text{ran} f$ 都存在唯一的 $x \in A$ 使得 f(x) = y, 则称 f 为单射

若 f 既单射又满射,则 f 为双射(一一对应)

单射、满射、双射计数: 设 |A| = n, |B| = m

• n < m 时, 单射个数 m!/(m - n)!

• n > m 时,满射个数 m!f[n][m]

• n = m 时, 单/满/双射个数 n!常数函数设 $f: A \rightarrow B$,若存在 $c \in B$ 使得对所有

 $x \in A$ 都有 f(x) = c, 则称 f 为常数函数 恒等函数: 称 A 上的恒等关系 $I_A:A\to A$ 为 A上的恒等函数, $I_A(x) = x$

特征函数: A 的特征函数 $\chi_A:E \to \{0,1\}$ 定义为 $\chi_A(x) = 1$ if $a \in A$, 否则为 0

• 当 Ø \subset A \subset E 时, χ_A 是满射 单调函数: $\mathcal{Q}(A, \leq_A), \langle B, \leq_B \rangle$ 为偏序集, $f: A \to B$, 若 $\forall x_1, x_2 \in A$, $x_1 \leqslant_A x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant_B f(x_2)$, 则

严格单调: 把≼换成<,要求 f 是单射

自然映射 (典型映射): 设 R 是 A 上的等价关系: 令 $f: A \rightarrow A/R$, $f(x) = [x]_R$, $\forall a \in A$, 称 f 是从 A 到商集 A/R 的自然映射 不同的等价关系确定不同的自然映射,恒等关系

确定的是双射, 其他自然映射一般只是满射

计数问题

称 f 单调递增

文氏图: 大矩形表示全集 E (可省略), 在矩形内 部画圆,用圆或其他闭曲线的内部表示集合。不同 的圆代表不同的集合,并将运算结果得到的集合用 阴影部分表示——计数问题:

1. 画文氏图, 一般每个集合对应一种性质

2. 计算各区域的数量, 有未知的则列方程 包含排斥原理(容斥原理)设 $A_1,A_2,...,A_n$ 为 n个集合,则 $\left|\bigcup_{i=1}A_i\right| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{i=1}|A_i\cap A_j| + \sum_{i=1}|A_i\cap A_j\cap A_k| - \dots + (-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap \dots \cap A_n|$

集合恒等式

幂等律 $A \cup A = A$, $A \cap A = A$ 交換律 $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$

结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C =$ $A\cap (B\cap C)$

分配律 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) =$ $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

相对形式: $E-(A\cup B)=(E-A)\cap(E-B)$, $E-(A\cap B)=$ $(E-A) \cup (E-B)$ 绝对形式: $\sim (A \cup B) = \sim A \cap \sim B$, $\sim (A \cap B) = \sim$ $A \cup \sim B$

吸收律 $A \cup (A \cap B) = A$, $A \cap (A \cup B) = A$ 零律 $A \cup E = E$, $A \cap \emptyset = \emptyset$

同一律 $A \cup \emptyset = A$, $A \cap E = A$

排中律 $A \cup \sim A = E$ 矛盾律 $A \cap \sim A = \emptyset$

余补律 $\sim \emptyset = E$, $\sim E = \emptyset$

双重否定律 $\sim (\sim A) = A$ 补交转换律 $A - B = A \cap \sim B$ (消去差集运算符)

子集的性质

• $A \subseteq B \Rightarrow (A \cup C) \subseteq (B \cup C)$ • $A \subseteq B \Rightarrow (A \cap C) \subseteq (B \cap C)$

对于集合定律的证明应该使用数理逻辑

• $(A \subseteq B) \land (C \subseteq D) \Rightarrow (A \cup C) \subseteq (B \cup D)$

 $\cdot (A \subseteq B) \vee (C \subseteq D) \Rightarrow (A \cap C) \subseteq (B \cap D)$ • $(A \subseteq B) \land (C \subseteq D) \Rightarrow (A - C) \subseteq (B - D)$

• $C \subseteq D \Rightarrow (A - D) \subseteq (A - C)$

差集的性质

• $A - B = A - (A \cap B)$

• $A - B = A \cap \sim B$

• $A \cup (B - A) = A \cup B$

 $A \cap (B - C) = (A \cap B) - C$

对称差的性质

• 交换律,结合律

• 分配律: $A \cap (B \bigoplus C) = (A \cap B) \bigoplus (A \cap C)$

 $: A \bigoplus (A \bigoplus B) = B$

同一律: A ⊕ Ø = A

・零律: A ⊕ A = Ø

幂集的性质

• $A \subseteq B \Leftrightarrow P(A) \subseteq P(B)$ • $A = B \Leftrightarrow P(A) = P(B)$

• $P(A) \in P(B) \Rightarrow A \in B$ • $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$

• $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$

• $P(A - B) \subseteq (P(A) - P(B)) \cup \{\emptyset\}$

• $A \subseteq P(A)$; $\bigcup P(A) = A$

• $\{x\} \in P(A) \Leftrightarrow x \in A$ • $x \in P(A) \Leftrightarrow x \subseteq A$

关系的运算

基本运算:

• $R \cup S = \{\langle x, y \rangle \mid xRy \lor xSy\}$ • $R \cap S = \{\langle x, y \rangle \mid xRy \wedge xSy\}$

相对补 R − S = {⟨x, y⟩ | xRy ∧ x\$y}

• 绝对补 $\sim R = A \times B - R$

• $(F^{-1})^{-1} = F$ • $\operatorname{dom} F^{-1} = \operatorname{ran} F$, $\operatorname{ran} F^{-1} = \operatorname{dom} F$

• $M(R^{-1}) = (M(R))^T$ 合成(复合):

 结合律: (F∘G)∘H = F∘(G∘H) • $(F \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ F^{-1}$ • $M(R_1 \circ R_2) = M(R_1) \cdot M(R_2)$

恒等关系性质: $R \circ I_A = I_A \circ R = R$ Q并的复合有分配律:本质 \exists \exists \land , \lor 的关系

• $F \circ (G \cup H) = F \circ G \cup F \circ H$ • $(G \cup H) \circ F = G \circ F \cup H \circ F$ F。(G∩H)⊆F。G∩F。H【注意是子集】

• $(G \cap H) \circ F \subseteq G \circ F \cap H \circ F$ 【注意是子集】 限制和像与交并的性质:

• $F \uparrow (A \cup B) = F \uparrow A \cup F \uparrow B$ • $F[A \cup B] = F[A] \cup F[B]$

• $F \uparrow (A \cap B) = F \uparrow A \cap F \uparrow B$

• $F[A \cap B] \subseteq F[A] \cap F[B]$ • $F[A] - F[B] \subseteq F[A - B]$

幂运算:

•设 A 为 n 元集, R 是 A 上的关系, 则 $\exists s,t \in$ N使得 $R^s = R^t$; 因为 A 上一共只有 2^{n^2} 种关系

• 对任何 $k \in \mathbb{N}$ 有 $R^{s+k} = R^{t+k}$

• 对任何 $k,i \in \mathbb{N}$ 有 $R^{s+kp+i} = R^{s+i}$, 其中 p = t - s・令 $S = \{R^0, R^1, \dots, R^{t-1}\}$,则对任意的 $a \in \mathbb{N}$

有 $R^q \in S$ 设 R 为 A 上的关系, m,n∈ N, 则:

• $R^m \circ R^n = R^{m+n}$

• $(R^m)^n = R^{mn}$

XXIIXIIIXXXIII XXXXXX									
	自反	反自反		反对称性	传递性				
集式	$I_A \subseteq$	$R \cap$	$R = R^{-1}$	$R \cap R^{-1} \subseteq$	$R \circ R \subseteq R$				
	R	$I_A = \emptyset$		I_A					
关系	$M_{ii} =$	$M_{ii} = 0$	$M^T = M$	对 $i \neq j$,	$M_{ij}^2 \leq M_{ij}$				
矩阵	1			M_{ji} +	, ,				
M(R)				$M_{ij} \leq 1$					
关系	每个	每个顶	相异点有	相异点仅	若 ab,bc				
图	顶点	点都没	一对方向	有一条单					
G(R)	都有	有环	相反的边		则 ac 间有				
	环		或者没边	没边	边				

• 对称性与反对称性可以同时拥有(即仅有环) 自反性与反自反性不可以同时拥有(除非定义在 空集上的空关系)

 $R_1, R_2 \subseteq A \times A$ 具有某些共同性质,经过运算后保 留原性质如下表:

表达式	自反	反自反	对称	反对称	传递
R_1^{-1}, R_2^{-1}	/	/	/	/	/
$R_1 \cup R_2$					
$R_1 \cap R_2$					
$R_1 \circ R_2, R_2 \circ R_1$	/				
$R_1 - R_2, R_2 - R_1$				/	
~ R., ~ R.			/		

闭包的求法: 设 R 为 A 上的关系,则有:

• $r(R) = R \cup I_A$

• $s(R) = R \cup R^{-1}$

• $t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$

引理: $(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$

引理: $(R_1 \cup R_2)^2 = R_1^2 \cup (A \circ B) \cup (B \circ A) \cup R_2^2$ 关系矩阵求闭包: $M_r = M \lor E, M_s = M \lor M^T, M_t =$

 $M \vee M^2 \vee M^3 + \cdots$

• 自反闭包:每一个顶点没有环就加上一个环 • 对称闭包:每一条边没有反向边就加上反向边 • 传递闭包: A 到 B 可达, 就加 A 到 B 的边 闭包的性质: 设 R 是非空集合 A 上的关系,则

R 是自反的 $\Leftrightarrow r(R) = R$: R 是对称的 $\Leftrightarrow s(R) = R$: R 是传递的 $\Leftrightarrow t(R) = R$ $r(R_1) \subseteq r(R_2)$; $s(R_1) \subseteq s(R_2)$; $t(R_1) \subseteq t(R_2)$

• $R_1 \subseteq R_2$; $R_2 \subseteq r(R_2) \Rightarrow R_1 \subseteq r(R_2)$ • $r(R_2)$ 自反; $r(R_1)$ 定义可得 $r(R_1) \subseteq r(R_2)$

闭包与并:设 $R_1, R_2 \subseteq A$,且 $A \neq \emptyset$,则: • $r(R_1 \cup R_2) = r(R_1) \cup r(R_2)$ 【自反的并自反】

• $s(R_1 \cup R_2) = s(R_1) \cup s(R_2)$ 【对称的并对称】 t(R₁ ∪ R₂) ⊇ t(R₁) ∪ t(R₂) 【传递并未必传递】

闭包与关系性质:注意对称与传递!

•若 R 是自反的,则 s(R), t(R) 是自反的 •若 R 是对称的,则 r(R), t(R) 是对称的 • 若 R 是传递的, 则 r(R) 是传递的

反例: R传递,但是s(R) 非传递: $A = \{1,2\}, R =$ {< 1.2 >} 引理: $(R \cup I_A)^n = I_A \cup R \cup R^2 \cup \cdots \cup R^n \quad (n \ge 1)$

定理: $sr(R) = rs(R), tr(R) = rt(R), st(R) \subseteq ts(R)$ 例: tsr(R) = trs(R) = rts(R) 是等价关系

str(R) = srt(R) = rst(R) 不是, 无传递性 等价关系性质: R为非空集合A上的等价关系,则 ∀x ∈ A, [x]_R ≠ Ø, 因为 xRx

• $(x < y \lor x = y) \land (y < x \lor y = x) \Rightarrow x = y$ 函数相关定理

≺ 是反对称的

定理 1:设 $F: A \rightarrow B, G: B \rightarrow C$,则 $F \circ G: A \rightarrow C$ 也是函数,且 $F \circ G(x) = G(F(x))$

• 证: $F \circ G$ 单值; $\operatorname{dom} F \circ G = A, \operatorname{ran} F \circ G \subseteq C$ 【⊆ 显然, = 利用全函数定义】; $F \circ G(x) = G(F(x))$ 推论 1:设 F,G,H 是函数,有 $(F\circ G)\circ H=F\circ (G\circ H)$

定理2: 设 $f:A \rightarrow B,g:B \rightarrow C$:

• $\forall x, y \in A$, $xRy \Rightarrow [x] = [y]$

• $\cup \{[x] \mid x \in A\} = A$

是 A 上的拟序关系,则

• \leq $-I_A$ 是 A 上的拟序关系

 $\cdot \prec \cup I_A$ 是 A 上的偏序关系

• $\forall x, y \in A$, $\neg xRy \Rightarrow [x] \cap [y] = \emptyset$

• 若 x < y, x = y, y < x 中至多有一成立

序关系性质: 设 \leq 是非空集合 A 上偏序关系, <

• 如果 f,g 都是满射的,则 $f \circ g$ 也是满射的 • 如果 f,g 都是单射的,则 $f \circ g$ 也是单射的

• 如果 f,g 都是双射的,则 $f \circ g$ 也是双射的 • 如果 $f \circ g$ 是满射的,则 g 是满射

• 如果 $f \circ g$ 是单射的,则 f 是单射 如果 f · g 是双射的,则 f 是单射,g 是满射

定理3: 设 $f: A \rightarrow B$, 则有 $f = f \circ I_B = I_A \circ f$ 定理 4: f,g 都是单调增/都是单调减的,则 $f\circ g$ 是单调增的

定理5(反函数): 设 $f: A \to B$ 是双射,则 f^{-1} : $B \rightarrow A$ 也是双射; 且 $f^{-1} \circ f = I_B, f \circ f^{-1} = I_A$