作业 1

2025 年 3 月 12 日

1 第一大题

1.1 无人机路径规划问题

1.1.1 状态定义

定义一个状态 s 为无人机在网格中的位置，即 $s = (3, b)$，其中 x 和 y 是无人机当前所在的行列坐标。

1.1.2 初始状态

无人机的起始位置为 S 处，即图中标记的 S 位置。

1.1.3 目标状态

目标位置为 $E(8, h)$ 处，即图中标记的 E 位置。

1.1.4 行动

无人机可以执行的动作包括：

- 向上移动：$(x, y) \to (x - 1, y)$
- 向下移动：$(x, y) \to (x + 1, y)$
- 向左移动：$(x, y) \to (x, y - 1)$
- 向右移动：$(x, y) \to (x, y + 1)$

其中，移动必须在网格范围内，并且不能移动到障碍物所在的位置 $(3, f)(6, b)(5, c)$。

1.1.5 代价函数

每次移动的代价为 1，路径的总代价是无人机从 S 到 E 经过的步数。

1.2 机关切换问题

1.2.1 状态定义

设三个机关的状态分别为 S_1, S_2, S_3，其中 $S_i \in \{0,1\}$（0 代表“未激活”，1 代表“激活”）。

1.2.2 初始状态

初始状态为 $(S_1, S_2, S_3) = (0,1,0)$。

1.2.3 目标状态

目标状态为全“激活”$(1,1,1)$ 或全“未激活”$(0,0,0)$。

1.2.4 行动

每次可以切换一个机关的状态，即选择某个 S_i 进行翻转。

1.2.5 代价函数

每次切换的代价为 1，最小代价是最少的切换次数。

2 第三大题

第一步：初始化

- 设定起点 C。
- 计算邻居节点 B、E 的 f 值。
- 选择 f 值最小的节点进行扩展。

第一步计算：

$$\begin{aligned} g(B) &= g(C) + d(C,B) = 0 + 18 = 18, \qquad h(B) = 17, f(B) = 18 + 17 = 35. \\ g(E) &= g(C) + d(C,E) = 0 + 15 = 15, \qquad h(E) = 11, f(E) = 15 + 11 = 26. \end{aligned}$$

选择 f 最小的节点 E 进行扩展。

第二步：扩展节点 E

- 计算邻居节点 T 的 f 值。
- 选择 f 最小的节点进行扩展。

第二步计算：

$$g(T) = g(E) + d(E,T) = 15 + 11 = 26, \qquad h(T) = 0, f(T) = 26 + 0 = 26.$$

最终路径：

$$\mathrm{C} \rightarrow \mathrm{E} \rightarrow \mathrm{T}$$

最短路径总代价：26。

3 第四大题

3.1

命题： A* 算法在满足一致性条件下是最优的。**一致性条件：** 对于每个节点 n 及其每个后继节点 n'，有

$$h(n) \leq c(n,n') + h(n'),$$

其中 $c(n,n')$ 是从 n 到 n' 的代价，且 $c(n,n') > 0$。

证明： A* 算法的代价函数定义为：

$$f(n) = g(n) + h(n),$$

其中 $g(n)$ 为从起点到 n 的实际代价，$h(n)$ 为启发式估计。

一致性条件保证 $h(n)$ 服从三角不等式，因此 A* 算法在扩展节点时，其 f 值不会递减，即：

$$f(n') = g(n') + h(n') \geq g(n) + c(n,n') + h(n') \geq f(n).$$

这意味着 A* 访问目标节点时，其找到的路径代价不会比实际最优路径高，因此 A* 算法是最优的。

该结论**正确**。

3.2

命题： 深度优先搜索是一种特殊的 A* 算法。

分析： 深度优先搜索 (DFS) 仅依赖搜索深度，而 A* 算法使用 $f(n) = g(n) + h(n)$ 作为评估函数。二者的主要区别：- DFS 可能深入高代价路径，而 A* 选择代价最小的路径。- DFS 可能进入死胡同，而 A* 在一致性条件下能保证最优性。

反例： 考虑一个简单的图搜索问题：

$$S \rightarrow A \rightarrow G, \quad S \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow G,$$

其中路径代价为：

$$c(S,A)=1,\quad c(A,G)=1,\quad c(S,B)=1,\quad c(B,C)=1,\quad c(C,G)=10.$$

如果 DFS 选择 $S \to B \to C \to G$，则其搜索顺序与最优解 $S \to A \to G$ 不匹配，证明 DFS 不能保证最优性。

该结论**错误**。

3.3

命题： 设 $f(n), g(n)$ 为渐进函数，若

$$f(n) = O(g(n)),$$

则

$$\log(f(n)) = O(\log(g(n))).$$

其中 $\log(g(n)) \geq 1, f(n) \geq 1$ 对足够大的 n 成立。

证明： 根据 O 记号的定义，存在常数 $C > 0$ 和 n_0，使得：

$$f(n) \leq Cg(n), \quad \forall n \geq n_0.$$

两边取对数：

$$\log(f(n)) \leq \log(Cg(n)) = \log C + \log g(n).$$

由于 $\log C$ 为常数，忽略后得到：

$$\log(f(n)) = O(\log(g(n))).$$

且题目已说明 $\log(g(n)) \geq 1, f(n) \geq 1$，确保对数函数始终有效。

该结论**正确**。