

# 2022年秋季学期离散数学期末考试

## 选择题

1. 公式 $\forall x(P(x) \leftrightarrow Q)$ 等价于
  - A.  $(\exists xP(x) \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow \exists xP(x))$
  - B.  $(\exists xP(x) \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow \forall xP(x))$
  - C.  $(\forall xP(x) \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow \forall xP(x))$
  - D.  $(\forall xP(x) \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow \exists xP(x))$
2. 选择/填空, 没想起来
3. 公式 $\forall x(P(x) \vee \exists yR(y)) \rightarrow Q(x)$ 中量词 $\forall x$ 的辖域为
  - A.  $P(x)$
  - B.  $\forall x(P(x) \vee \exists yR(y))$
  - C.  $P(x) \vee \exists yR(y)$
  - D.  $P(x), Q(x)$
4.  $Z$ 为整数集合, 函数 $f: Z \rightarrow Z, f(x) = |x| - 2x$ .  $f$ 为
  - A. 双射
  - B. 满射
  - C. 单射
  - D. 非单射且非满射
5. 下面哪一组命题公式是等值的
  - A.  $\neg p \vee (p \wedge q), q$
  - B.  $p \rightarrow (q \rightarrow p), \neg p \rightarrow (p \rightarrow \neg q)$
  - C.  $\neg p \wedge \neg q, p \vee q$
  - D.  $q \rightarrow (p \vee q), \neg q \wedge (p \vee q)$
6. 下列公式为永真式的是
  - A.  $(\exists xA(x) \rightarrow \exists xB(x)) \rightarrow (\exists x(A(x) \rightarrow B(x)))$
  - B.  $\neg \forall xA(x) \rightarrow \forall x\neg A(x)$
  - C.  $\forall x\exists yA(x, y) \rightarrow \exists y\forall xA(x, y)$
  - D.  $(\forall xA(x) \rightarrow \forall xB(x)) \rightarrow (\forall x(A(x) \rightarrow B(x)))$

7.  $A, B$  是集合且  $A \cap B = \emptyset$ ,  $P(A), P(B)$  为其幂集, 则  $P(A) \cap P(B)$  为
- $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
  - $\{\{\emptyset\}\}$
  - $\{\emptyset\}$
  - $\emptyset$
8. 若  $R$  与  $S$  是非空集合  $A$  上的两个关系, 则下述结论正确的是 (多选)
- 若  $R$  与  $S$  是对称的, 则  $R \circ S$  也是对称的
  - 若  $R$  与  $S$  是传递的, 则  $R \circ S$  也是传递的
  - 若  $R$  与  $S$  是传递的, 则  $R \cap S$  也是传递的
  - 若  $R$  与  $S$  是自反的, 则  $R \cup S$  也是自反的
9. 设  $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C, f \circ g: A \rightarrow C$ , 下列说法正确的是 (多选):
- 若  $f \circ g$  满射, 则  $f$  为满射
  - 若  $f, g$  均满射, 则  $f \circ g$  为满射
  - 若  $f \circ g$  双射, 则  $f$  为单射
  - 若  $f \circ g$  单射, 则  $g$  为单射
10. 下列说法正确的是 (多选)
- $(A \subseteq B) \wedge (C \subseteq D) \Rightarrow A - D \subseteq B - C$
  - $A \cap B = A \cap C \Rightarrow B = C$
  - $(A \cup B) \subseteq (A \cap B) \Rightarrow A = B$
  - $(A \subseteq B) \wedge (C \subseteq D) \Rightarrow (A \cap C) \subseteq (B \cap D)$

## 填空题

11. 命题公式  $p \vee (q \wedge \neg r)$  的成真赋值  $(p, q, r)$  为\_\_\_\_\_。
12. 75 个学生去书店买语文、数学、英语课外书, 每种书每个学生至多买一本。已知有 20 个同学每人买了 3 本书, 55 个同学每人至少买 2 本, 75 个同学一共买了 140 本书。那么没买书的同学个数是\_\_\_\_\_。
13.  $R$  是非空集合  $A$  上的等价关系, 则  $tsr(R) =$ \_\_\_\_\_。
14. 集合  $A$  到集合  $B$  的全函数一共 64 个, 则  $B$  中元素个数可能是\_\_\_\_\_。
15. 设集合  $A$  为  $n(n \geq 1)$  元集,  $A$  上自反关系共有\_\_\_\_\_个, 对称关系共有\_\_\_\_\_个。
16. 设  $G(x)$ :  $x$  是金子;  $F(x)$ :  $x$  闪光。则命题“金子是闪光的, 但闪光的不一定是金子”可符号化为\_\_\_\_\_。
17. 个体域为  $A = \{a, b\}$ , 公式  $\forall x P(x) \wedge \exists x S(x)$  在  $A$  中消去量词后应为\_\_\_\_\_。

## 简答题

18. 对于集合  $X$  和关系  $R$ , 对任意  $x, y, z \in X$ , 如果有  $xRy, yRz$ , 就有  $zRx$ , 那么我们称  $R$  是循环的。证明  $R$  是等价关系是  $R$  自反且循环的充分必要条件。

19. 证明下列推理是有效的

$$(1) \neg p \vee (\neg q \vee r), q \rightarrow (r \rightarrow s), p \Rightarrow q \rightarrow s$$

$$(2) \exists x(A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \rightarrow \exists x B(x)$$

$$(3) \forall x(F(x) \rightarrow G(x)), \forall x(R(x) \rightarrow \neg G(x)) \Rightarrow \forall x(R(x) \rightarrow \neg F(x))$$

20. 设解释  $I$  如下: 个体域  $D_1 = \{-2, 3, 6\}$ , 谓词:  $F(x) : x \leq 3; G(x) : x > 5; R(x) : x \leq 7$ 。判断下列各式的真值并写出推导过程:

$$(1) \forall x(F(x) \wedge G(x))$$

$$(2) \forall x(R(x) \rightarrow F(x)) \vee G(3)$$

$$(3) \exists x(F(x) \vee G(x))$$

21. 设  $S$  为集合且  $A = P(S) - \{S, \emptyset\} \neq \emptyset$ 。求  $\langle A, \subseteq \rangle$  的极小元、极大元、最小元、最大元, 并说明理由。

22. (1) 在某次研讨会休息时间, 3 名与会者做出下述判断

甲说: 王教授不是苏州人, 是上海人;

乙说: 王教授不是上海人, 是苏州人;

丙说: 王教授既不是上海人, 也不是杭州人。

王教授说: 你们 3 个人有一个全说对了, 一个全说错了, 还有一个对错各一半。试用逻辑演算法判断王教授是哪里人

(2) 符号化下列命题, 并判断推理的有效性。

每个学生是勤奋的或者是聪明的, 所有勤奋的人都有有所作为, 并非每个学生都有所作为。所以有些学生是聪明的。

23. 设  $f : A \rightarrow A, B \subseteq A$ 。试判断  $f(f^{-1}(B)), B, f^{-1}(f(B))$  三者之间的关系(包含、真包含、相等、以上三种均不是), 并证明你的结论。

24. 化简下列集合表达式, 并写出推导过程

$$(1) ((A \cup B) \cap B) - (A \cup B)$$

$$(2) ((A \cup B \cup C) - (B \cup C)) \cup A$$

25. 按要求求下列公式的范式, 写出推导过程:

$$(1) \text{求} (\neg p \vee \neg q) \rightarrow (p \leftrightarrow \neg q) \text{的主析取范式}$$

(2)求 $(q \vee \neg p) \rightarrow r$ 的主合取范式

(3)求 $(\neg \exists x A(x) \vee \forall y B(y)) \wedge (A(x) \rightarrow \forall z C(z))$ 的前束范式