偏微分方程数值解法

刘 瑜

November 19, 2018

Contents

Chapter 1

基础知识回顾

1.1 多变量微积分复习

有 n 个自变量,$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 的函数 f 的微分为

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \tag{1.1}$$

其中偏导数

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_i + h, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{h} \tag{1.2}$$

在本文中同时采用下列记法表示一阶和二阶偏导数,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \equiv \partial_{x_i} f \equiv f_{x_i}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j} \equiv \partial^2_{x_i x_j} f \equiv f_{x_i x_j} \tag{1.3}$$

用下面的记号表示向量,

$$\vec{u} \equiv \mathbf{u} \tag{1.4}$$

向量微分算子. 在三维笛卡尔坐标系 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$,考虑 $f(x, y, z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 和 $[u_x(x, y, z), u_y(x, y, z), u_z(x, y, z)] : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

梯度:

$$\nabla f = \partial_x f \mathbf{i} + \partial_y f \mathbf{j} + \partial_z f \mathbf{k} \tag{1.5}$$

散度:

$$\nabla \mathbf{u} = \partial_x u_x + \partial_y u_y + \partial_z u_z \tag{1.6}$$

旋度:

$$\nabla \times \mathbf{u} = (\partial_y u_z - \partial_z u_y)\mathbf{i} + (\partial_z u_x - \partial_x u_z)\mathbf{j} + (\partial_x u_y - \partial_y u_x)\mathbf{k} \tag{1.7}$$

拉普拉斯算子:

$$\Delta f \equiv \nabla^2 f = \partial_x^2 f + \partial_y^2 f + \partial_z^2 f \tag{1.8}$$

向量的拉普拉斯算子:

$$\Delta \mathbf{u} \equiv \nabla^2 \mathbf{u} = \nabla^2 \mathbf{u}_x \mathbf{i} + \nabla^2 \mathbf{u}_y \mathbf{j} + \nabla^2 \mathbf{u}_z \mathbf{k} \tag{1.9}$$

在其他坐标系下 (圆柱坐标系，球坐标系)，以上算子具有不同的形式.

1.2 偏微分方程定义

热传导方程

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \tag{1.10}$$

定义 **1.1.** 偏微分方程
具有两个或以上自变量的函数 u 的变化由其偏导数确定，有时也由其自身以及自变量确定.
当未知函数大于 1 个时，得到偏微分方程组.

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, \partial_{x_1} u, \ldots, \partial_{x_n} u, \partial_{x_1}^2 u, \partial_{x_1 x_2}^2, \ldots, \partial_{x_1 x_2 \ldots x_n}^n u) \tag{1.11}$$

定义 **1.2.** 偏微分方程的阶数
偏微分方程的阶数指方程中最高阶偏导数的阶数.

一阶方程的一般定义，定义域为 (x, y) 平面的某区域 D.

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \tag{1.12}$$

二阶方程

$$G(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}) = 0 \tag{1.13}$$

偏微分方程一般有无穷多个解，为了获得唯一解，需要补充辅助条件，通常包括边界条件和初始条件.

定义 **1.3.** 边界和边界条件
边界: 偏微分方程通常需要在一定的空间区域内求解. 当所关心的区域是受限的有限区域或半无限区域时，边界的处理非常重要. 如何区分边界点，内点和外点？以二维问题为例. 考虑任意的二维域 Ω. 如果以 p 点为圆心作圆，无论半径多小，圆总会包含属于 Ω 中点和不属于 Ω 的点，则 p 属于边界点. 如果以 Q 点为圆心，可以画出一个圆只包含 Ω 中的点，则 Q 为内点. 以 R 点为圆心，可以画出一个圆不包含 Ω 中的任何点，则 R 为内点.Ω 的所有边界点的集合称为边界，记为 $\partial\Omega$. 三维的定义可以直接推广.
在求解偏微分方程时，解除了要满足偏微分方程，同时在边界上需满足一定的边界条件，称为边界条件.
三类基本的边界条件

(1) 第一类边界条件，或称为 *Dirichlet* 条件
在边界上给定函数的值，比如

$$u(x,y,z,t)=f(x,y,z,t),(x,y,z,t)\in\partial\Omega,t>0$$

(2) 第二类边界条件，或称为 *Neumann* 边界条件
在边界上给定函数法向导数的值.

$$\partial_n u(x,y,z,t)=f(x,y,z,t),(x,y,z,t)\in\partial\Omega,t>0$$

(3) 第三类边界条件，或称为 *Robin* 条件
在边界上函数和函数的法向导数满足一定的关系

$$\alpha(x,y,z)\partial_n u(x,y,z,t)+u(x,y,z,t)=f(x,y,z,t),(x,y,z,t)\in\partial\Omega,t>0$$

除了这三类最常见的边界条件外，还有其他的边界条件，如混合边界条件，在边界的不同部分应用不同的边界条件类型.

定义 **1.4.** 初始条件.
如果位置函数还是时间 t 的函数，还需要指定初始条件, 在初始时刻 $(t=0)$，需要给定整个区域内函数的值.

定义 **1.5.** 线性和非线性偏微分方程
区分方程是线性或者是非线性，对于方程的求解十分重要. 关于可微函数 $u(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ 的偏微分方程. 线性 *PDE*(linear)
方程中不存在关于未知函数 u 及其偏导数的非线性项，同时边界条件和初始条件也必须是线性的. 不是线性的方程都是非线性的. 非线性方程又可以细分为一下几类:

(1) 半线性 semilinear
最高阶偏导数前的系数仅是自变量的函数.

(2) 拟线性 (quasilinear)
m 阶偏导数前的系数可以是自变量，函数本身以及小于 m 阶偏导数的函数.

(3) 完全非线性 (nonlinear)
不属于以上任意一类的方程.

定义 **1.6.** 方程可以包含一个仅是自变量的函数 f. 如果 $f=0$, 则方程是齐次的，否则是非齐次的.

例 **1.1.** 线性对流方程

$$u_t = a_x u_x + a_y u_y + a_z u_z \tag{1.14}$$

其中对流速度 $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ 为常数.

例 **1.2.** 二维空间的 *Laplace* 方程

$$\Delta_2 u = 0 \tag{1.15}$$

其中

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Laplace 方程是齐次线性方程.

例 **1.3.** 三维 *Possion* 方程

$$\Delta_3 u = -f(x, y, z) \tag{1.16}$$

其中

$$\Delta_3 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Possion 方程是非齐次线性方程.

例 **1.4.** 三维波动方程

$$u_t t = c^2 \Delta_3 u \tag{1.17}$$

其中 c 是波传播速度.

例 **1.5.** 一维梁振动方程

$$u_{tt} + u_{xxxx} = F \tag{1.18}$$

四阶非齐次线性方程.

例 **1.6.** 无粘 *Bergers* 方程

$$u_t + uu_x = 0 \tag{1.19}$$

拟线性一阶齐次方程.

例 **1.7.** 粘性 *Bergers* 方程

$$u_t + uu_x = \varepsilon u_{xx} \tag{1.20}$$

二阶拟线性方程.

例 **1.8.** *Kdv* 方程

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{1.21}$$

三阶拟线性方程.

例 **1.9.** 反应扩散方程

$$u_t = u_{xx} + u(1-u) \tag{1.22}$$

二阶半线性方程.

例 **1.10.** 真空中的 *Maxwell* 方程组

$$\frac{1}{c}\mathbf{E}_t = \nabla \times \mathbf{H} \tag{1.23a}$$

$$\frac{1}{c}\mathbf{H}_t = -\nabla \times \mathbf{E} \tag{1.23b}$$

$$\nabla \mathbf{E} = \nabla \mathbf{H} = 0 \tag{1.23c}$$

一阶线性方程组.

例 **1.11.** 一维 *Euler* 方程.

$$\begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho e \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (\rho e + p)u \end{bmatrix}_x = 0 \tag{1.24}$$

一阶拟线性方程组

例 **1.12.** 最小表面方程.

$$(1+u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1+u_x^2)u_{yy} = 0 \tag{1.25}$$

该方程描述了由线圈支撑的肥皂泡的表面形状. 二阶拟线性方程.

定义 **1.7.** 偏微分方程的存在性，唯一性和稳定性.
当我们求解偏微分方程时，首先需要确定解是否存在？解如果存在，是否存在唯一解？如果初始条件或边界条件发生连续的变化，所得到的解是否也发生连续的变化？即微小的初始条件或边界条件改变，解的变化也应该是微小的. 这是解的稳定性. 给定初值和边值条件的偏微分方程称为定解问题、如果解存在，唯一且稳定，则称定解问题适定 *(well-posed);* 否则则称为不适定 *(ill-posed).*

可以通过常微分方程的例子来理解上述概念.

例 **1.13.**

$$\frac{du}{dt} = u, \quad u(0) = 1$$

解为:$u(t) = e^t, \quad 0 \le t < \infty$.

例 **1.14.**

$$\frac{du}{dt} = u^2, \quad u(0) = 1$$

解为: $u(t) = 1/(1-t), \quad 0 \le t < 1.$

例 **1.15.**

$$\frac{du}{dt} = \sqrt{u}, \quad u(0) = 0$$

具有两个解: $u \equiv 0$ 和 $u = t^2/4$.

例 **1.16.** *Possion* 方程的解的唯一性.

$$\Delta u = F \quad in\ \Omega$$

在边界上 $u = 0, on\ \partial\Omega$ 假定 u_1 和 u_2 满足方程和边界条件. 考虑 $\omega = u_1 - u_2$. 则在 Ω 内 $\Delta\omega = 0$ 且在边界上 $\omega = 0$.

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} \omega\nabla\omega \cdot \mathbf{n} dS &= \int_{\Omega} \nabla \cdot (\omega\nabla\omega) dV \\
&= \int_{\Omega} [(\nabla\omega)^2 + \omega\Delta\omega] dV
\end{aligned}$$

则要求 $\nabla\omega = 0$，即 $\omega = const.$. 根据边界条件，$\omega = 0$，即 $u_1 = u_2$，解是唯一的.

1.3 微分算子和叠加原理

k 阶方程的解必须是 k 次可微的. 我们定义 $C^k(D)$ 为在域 D 内所有 k 次连续可微的函数集. 特别的，定义 D 上的连续函数集为 $C^0(D)$ 或 $C(D)$. 满足 k 阶 PDE 方程的 C^k 中的函数，称为 PDE 的经典解 (classic solution) 或强解 (strong solution). 需要指出的是有时会出现不存在经典解的情形，此时的解称为弱解 (weak solution).

不同函数集之间的映射称为算子 (*operators*). 算子 L 对函数 u 的操作用 $L(u)$ 表示. 本书主要考虑描述函数导数的算子称为微分算子 (differential operators).

如果算子满足下列关系

$$L[a_1u_1 + a_2u_2] = a_1L[u_1] + a_2L[u_2] \tag{1.26}$$

其中 a_1, a_2 为任意常数，u_1, u_2 为任意函数，则称算子为线性算子 (linear operator). 线性微分方程自然定义了线性算子，方程可以表示为 $L[u] = f$,

其中 L 为线性算子，f 是给定函数.
线性算子在整个数学中起着中心作用，在 PDE 中更是如此.$u_i, 1 \leq i \leq n$ 满足线性微分方程 $L[u_i] = f_i$，则线性组合 $\upsilon := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$ 满足方程 $L[\upsilon] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$. 特别地，当 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 满足齐次方程 $L[u_i] = 0$ 时，这些函数的线性组合也满足方程，这称为叠加原理 (superposition principle).

1.4 二阶偏微分方程的分类

二阶线性偏微分方程

$$L(u) = au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g \tag{1.27}$$

其中各项系数数是 x, y 的函数.
包含二阶项的算子

$$L_0(u) = au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} \tag{1.28}$$

称为算子 L 的主部，决定了方程的性质. 可以通过判别式

$$\delta(L)(x, y) = b(x, y)^2 - a(x, y)c(x, y) \tag{1.29}$$

的符号来判断方程的性质.

定义 1.8. 二阶线性偏微分方程的分类

(1) 如果在 Ω 中的任意一点 (x, y)，$\delta(L)(x, y) > 0$，则方程是双曲型的 *(hyperbolic)*;

(2) 如果在 Ω 中的任意一点 (x, y)，$\delta(L)(x, y) = 0$，则方程是抛物型的 *(parabolic)*;

(3) 如果在 Ω 中的任意一点 (x, y)，$\delta(L)(x, y) < 0$，则方程是椭圆型的 *(elliptic)*;

定义 1.9. 坐标变换
变换 $(\xi, \eta) = (\xi(x, y), \eta(x, y)$ 是坐标变换，如果雅克比 $J := \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x$ 在 Ω 中所有点都不为 0.

引理 1.1. 两变量线性二阶偏微分方程经过坐标变换后，方程类型不变. 这表明，方程的类型是方程的内在属性，与坐标系无关.

Proof. 令 $(\xi, \eta) = (\xi(x, y), \eta(x, y))$ 是非奇异变换，方程的解可以表示为 $\omega(\xi, \eta) = u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$，根据链式法则，

$$u_x = \omega_\xi \xi_x + \omega_\eta \eta_x = \left(\xi_x \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial}{\partial \eta}\right)\omega \tag{1.30}$$

$$u_y = \omega_\xi \xi_y + \omega_\eta \eta_y = \left(\xi_y \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial}{\partial \eta}\right)\omega \tag{1.31}$$

二阶导数项稍微复杂一点.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \left(\xi_x \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial}{\partial \eta}\right)^2 \\
&= \left[\xi_x \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\xi_x \frac{\partial}{\partial \xi}\right) + \xi_x \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\eta_x \frac{\partial}{\partial \eta}\right)\right] + \left[\eta_x \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\xi_x \frac{\partial}{\partial \xi}\right) + \eta_x \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\eta_x \frac{\partial}{\partial \eta}\right)\right] \\
&= \xi_x^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \eta_x^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + 2\xi_x \eta_x \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \\
&+ \left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x}\right]\frac{\partial}{\partial \xi} + \left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x}\right]\frac{\partial}{\partial \eta} \\
&= \xi_x^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \eta_x^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + 2\xi_x \eta_x \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial \eta} \qquad (1.32)
\end{aligned}
$$

因此

$$u_{xx} = \xi_x^2 \omega_{\xi\xi} + \eta_x^2 \omega_{\eta\eta} + 2\xi_x \eta_x \omega_{\xi\eta} + \xi_{xx}\omega_\xi + \eta_{xx}\omega_\eta \qquad (1.33)$$

其他二阶导数项为

$$
\begin{aligned}
u_{yy} &= \xi_y^2 \omega_{\xi\xi} + \eta_y^2 \omega_{\eta\eta} + 2\xi_y \eta_y \omega_{\xi\eta} + \xi_{yy}\omega_\xi + \eta_{yy}\omega_\eta \qquad (1.34) \\
u_{xy} &= \omega_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + \omega_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + \omega_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + \omega_\xi \xi_{xy} + \omega_\eta \eta_{xy} \qquad (1.35)
\end{aligned}
$$

将坐标变换后的偏导数代入到 (1.27),

$$l[\omega] := A\omega_{\xi\xi} + 2B\omega_{\xi\eta} + C\omega_{\eta\eta} + D\omega_\xi + E\omega_\eta + F\omega = G \qquad (1.36)$$

其中

$$
\begin{aligned}
A &= a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2 \qquad (1.37) \\
B &= a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + c\xi_y\eta_y \qquad (1.38) \\
C &= a\eta_x^2 + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2 \qquad (1.39)
\end{aligned}
$$

方程的性质决定于主部，根据简单的计算，系数满足关系式

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_x & \eta_x \\ \xi_y & \eta_y \end{bmatrix} \qquad (1.40)$$

上式两边取行列式,

$$-\delta(l) = AC - B^2 = J^2(ac - b^2) = -\delta(L). \qquad (1.41)$$

因此非奇异变换不改变方程的性质.

□

通常我们可以在一个坐标系下将方程表示为标准形式 (canonical form)，

定义 1.10. 双曲型方程的标准形式

$$l[\omega]=\omega_{\xi\eta}+l_1[\omega]=G(\xi,\eta) \tag{1.42}$$

其中 l_1 是一阶线性微分算子.

定义 1.11. 抛物型方程的标准形式

$$l[\omega]=\omega_{\xi\xi}+l_1[\omega]=G(\xi,\eta) \tag{1.43}$$

定义 1.12. 椭圆型方程的标准形式

$$l[\omega]=\omega_{\xi\xi}+\omega_{\eta\eta}+l_1[\omega]=G(\xi,\eta) \tag{1.44}$$

1.5 特征线法

为了描述特征线法 (method of characteristics)，首先考虑简单的一维线性对流问题.

$$u_t+au_x=0 \tag{1.45a}$$

$$u(x,0)=F(x) \tag{1.45b}$$

其中 $u(x,t)$ 是 (x,t) 的未知函数，a 是对流速度，$F(x)$ 是初值. 特征线法是将偏微分方程转化为一系列的常微分方程求解. 根据微分链式法则，

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} \tag{1.46}$$

如果令

$$\frac{dx}{dt}=a \tag{1.47}$$

代入到 (1.46)，并与 (1.45a) 比较，可得

$$\frac{du}{dt}=0 \tag{1.48}$$

方程 (1.47) 的解为一组曲线，沿着曲线，u 的值将不变. 这组曲线称为方程 (1.45a) 的特征线 (characteristic curves). 求解偏微分方程 (1.45a) 转化为求解方程 (1.48) 和 (1.47). 积分 (1.47) 得到特征曲线族

$$x(t)=at+\xi \tag{1.49}$$

由于 a 为常数，所以特征线为直线. 根据 (1.48)，

$$u(x,t)=u(\xi,0)=F(\xi) \tag{1.50}$$

由于 $\xi=x-at$，故

$$u(x,t)=F(x-at). \tag{1.51}$$

如果 $F(x)$ 是 C^1，可以验证 $u(x,t)$ 满足偏微分方程 (1.45a) 和初始条件.

1.5.1 拟线性偏微分方程的特征线法

特征线法被用来求解双曲型偏微分方程. 本节主要介绍特征线法在一阶拟线性方程求解中的应用. 考虑一般形式的一阶拟线性方程

$$a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y = c(x,y,u) \qquad in \;\; \Omega \tag{1.52}$$

系数 a,b,c 是 (x,y,u) 的 C^1 函数. 方程 (1.52) 可能的解 $u(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^3$ 中构成了一个曲面 S(例如, $u(x,y)=x^2-y^2$).S 通常称为方程的积分面. 解曲面 S 可以隐式表示为 $f(x,y,u)=0$. 在本例中 $f(x,y,u)=u(x,y)-u$. 根据隐式方程可以计算曲面的法向方向, 即

$$\nabla f = (u_x, u_y, -1) \tag{1.53}$$

因此, 向量 $(u_x,u_y,-1)$ 是 S 上任一点 (x,y,u) 处的法向方向. 根据观察, 方程 (1.52) 可以表示为

$$(a,b,c)\cdot(u_x,u_y,-1) = 0 \tag{1.54}$$

上式表明, (a,b,c) 与 $(u_x,u_y,-1)$ 正交. 向量 (a,b,c) 位于 S 上一点 (x,y,u) 的切平面内. 由这这一条件可以得到 Lagrange-Charpit 方程

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{du}{c} \tag{1.55}$$

例 **1.17.** 求解方程

$$u_t + uu_x = 0 \tag{1.56}$$

解*:*
$a=1,b=u,c=0$, 根据 *Lagrange-Charpit* 方程

$$\frac{dx}{u} = \frac{dt}{1} = \frac{du}{0} \tag{1.57}$$

显然在特征线上 $du=0$, 即沿着特征线, u 为常数. 根据前两个方程可以得到

$$udt = dx \tag{1.58}$$

即特征线方程为 $u-xt=c$. 方程的解为

$$u = g(x-ut). \tag{1.59}$$

例: 偏微分方程 [1]

$$u_x + 2xu_y = 2xu,$$

对给定的 3 种条件分别进行求解.

1. $u(x,0)=x^2$
2. $u(0,y)=y^2$
3. 当 $x\le 0$ 时, $u(x,0)=x^2$, 当 $y\le 0$ 时, $u(0,y)=y^2$

Chapter 2

线性方程的数值方法

本章介绍线性对流方程和线性双曲守恒系统的基本数值方法.
考虑一维的时间相关 Cauchy 问题

$$\begin{aligned} u_t + Au_x &= 0, \quad ,-\infty < x < \infty, \ \ t \geq 0 \qquad (2.1) \\ u(x,0) &= u_0(x) \qquad (2.2) \end{aligned}$$

为了进行数值计算，需要在 $x-t$ 平面进行离散. 出于简单起见，采用均匀网格. 空间网格取为 $h \equiv \Delta x$，时间步长取 $k \equiv \Delta t$. 定义离散网格点 (x_j, t_n) 为

$$\begin{aligned} x_j &= jh, \ \ j = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots \qquad (2.3) \\ y_j &= nk, \ \ k = 0, 1, \dots \qquad (2.4) \end{aligned}$$

定义网格中点是有用的

$$x_{j+1/2} = x_j + 1/2h = (j+1/2)h \qquad (2.5)$$

有限差分方法得到网格点上的精确解 $u(x_j, t_n)$ 的近似解 U_j^n. 对于双曲方程组，$U_j^n \in \mathbb{R}^m$. 网格点上的精确解可以记为

$$u_j^n = u(x_j, t_n). \qquad (2.6)$$

在研究双曲守恒律时，更方便的是定义函数 $u(x, t_n)$ 在网格单元的平均值，

$$\bar{u}_j^n = \frac{1}{h} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x, t_n) dx \qquad (2.7)$$

与离散点的值相比，网格平均值更合理. 初始条件的离散值可以选择给定网格点上的值 $U_j^0 = u_j^0$，或者是给网格平均值 $U_j^n = \bar{u}_j^n$，后者更合理.
通常还会根据 U_j^n 定义一个分段常值函数，

$$U_k(x,t) = U_j^n, \ \ (x,t) \in [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}) \times [t_n, t_{n+1}) \qquad (2.8)$$

对于双曲守恒律问题，我们假定当 $k,h \to 0$ 时网格比 k/h 为常数，所以 k 定义了唯一的网格. 因此可以用 k 来表示分段函数.
在实际计算时，计算区域是有界的，比如 $a \leq x \leq b$. 因此需要考虑合适的边界条件. 在研究格式时，我们通常选择周期性边界条件，

$$u(a,t) = u(b,t), \quad \forall t \geq 0 \tag{2.9}$$

相当于求解周期性的 Cauchy 问题. 对于具有周期性的问题，可以采用 Fourier 变换进行求解.
根据 $u_0(x)$ 定义了初始离散值 U^0，然后采用时间步进方法从 U^0 计算 U^1，然后根据 U^1 计算 U^2，依此类推. 这种方法称为两层方法 (two-level). 也可以采用 $r+2$ 层方法，即计算 U^{n+1} 需要利用 $U^n, U^{n-1}, \ldots, U^{n-r}$.
可以用多种方法构造有限差分格式，很多方法是将有限差分来代替导数. 比如用前向差分来近似 u_t，中心差分来近似 u_x，

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{k} + A\frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2h} = 0 \tag{2.10}$$

从上式得到

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{k}{2h}(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) \tag{2.11}$$

虽然这个格式的到处十分自然，但是这个格式是不稳定的. 如果用中心差分近似 $n+1$ 时刻的 u_x，即

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{k} + A\frac{U_{j+1}^{n+1} - U_{j-1}^{n+1}}{2h} = 0 \tag{2.12}$$

或者

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{k}{2h}(U_{j+1}^{n+1} - U_{j-1}^{n+1}) \tag{2.13}$$

则格式是稳定的. 为了根据 U^n 计算 U^{n+1}，必须求解由所有节点方程 (2.13) 构成的耦合系统. 对于标量方程，得到 $N \times N$ 系统，系数矩阵是三对角矩阵. 而当 $u \in \mathbb{R}^m$ 式，离散系统是 $mN \times mN$.
方法 (2.11) 显式计算 U^{n+1}，称为显示方法. 与此相反，方法 (2.13) 称为隐式方法. 时间相关双曲守恒律很少采用隐式方法.
在格式中涉及到的网格点称为格式的模板 (stencil). 图给出了常用格式的模板. 大多数格式是对导数的直接逼近，但是 Lax-Wendroff 格式是一个例外.Lax-Wendroff 格式基于 Taylor 级数展开，

$$u(x,t+k) = u(x,t) + ku_t(x,t) + \frac{k^2}{2}u_{tt}(x,t) + \ldots$$

由方程 (2.1)，$u_t = -Au_x$，

$$u_{tt} = -Au_{xt} = A^2 u_{xx} \tag{2.14}$$

代入到 (2),

$$u(x,t+k) = u(x,t) + ku_t(x,t) + \frac{k^2}{2}A^2u_{xx}(x,t) + \dots \tag{2.15}$$

方程右端保留前三项，然后用中心差分离散空间导数，就得到 Lax-Wendroff 格式.
Beam-Warming 格式是单侧版本的 Lax-Wendroff，利用单侧的二阶格式近似空间导数.
除了蛙跳格式是三层格式以外，表中其他格式都是二层格式. 三层以上格式具有额外的困难，需要更多的存储，并且需要特殊的启动算法. 我们主要研究两层格式，并引入两层格式的记法，

$$U^{n+1} = \mathcal{H}_k(U^n) \tag{2.16}$$

U^{n+1} 代表 $n+1$ 时刻的解向量. 对于网格节点 j 上的 U_j^{n+1}，取决于与 j 相邻的某些节点在 n 时刻的值，即

$$U_j^{n+1} = \mathcal{H}_k(U^n; j) \tag{2.17}$$

(2.11) 中，算子 $\mathcal{H}_k$ 的形式为

$$\mathcal{H}_k(U^n; j) = U_j^n - \frac{k}{2h}(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) \tag{2.18}$$

有限差分算子可以推广到作用于连续函数，而不是作用于离散点上的函数. 如果 $v(x)$ 是关于 x 的任意函数，我们定义新函数 $\mathcal{H}_k(v)$ 在 x 处的形式为对 x 处的 v 应用差分格式. 在任意一点 x 处，$\mathcal{H}_k(v)$ 的值表示为 $\mathcal{H}_k(v;x)$. 对于方法 (2.11),

$$\mathcal{H}_k(v) = [\mathcal{H}_k(v)](x) = v(x) - \frac{k}{2h}A(v(x+h) - v(x-h) \tag{2.19}$$

将差分算子作用于分段常数函数 $U_k(\cdot,t)$(在 (2.8) 中定义)，得到

$$U_k(x; t+k) = \mathcal{H}_k(U_k(\cdot,t); x) \tag{2.20}$$

以上表明 $\mathcal{H}_k$ 既可以表示离散算子，也可以表示连续算子.
表中所列的方法都是线性的，由此得到的算子是线性算子，

$$\mathcal{H}_k(\alpha U_n + \beta V_n) = \alpha\mathcal{H}_k(U_n) + \beta\mathcal{H}_k(V_n), \tag{2.21}$$

对于任意的网格函数 U^n, V_n 和标量 α, β 都成立. 线性算子都可以表示为矩阵形式，因此 (2.16) 可以改写为

$$U^{n+1} = \mathcal{H}_k U^n. \tag{2.22}$$

其中 $\mathcal{H}_k$ 是一个 $mN \times mN$ 的矩阵 (N 是网格节点数).

2.1 全局误差和收敛性

我们最终感兴趣的是计算解 U_j^n 逼近精确解的程度，为此定义全局误差来表示计算解与精确解的差别. 在研究光滑解是，定义网格点上误差是比较方便的.

$$E_j^n = U_j^n - u_j^n. \tag{2.23}$$

对于守恒律，通常还定义网格平均值的误差，即

$$\bar{E}_j^n = U_j^n - \bar{u}_j^n. \tag{2.24}$$

以上两种误差可以由误差函数统一起来，

$$E_k(x,t) = U_k(x,t) - u(x,t) \tag{2.25}$$

E_j^n 是网格点上的值 $E_k(x_j, t_n)$，而 $\bar{E}_j^n$ 是 E_k 在 n 时刻的网格平均值.
对于某一范数 $\|\cdot\|$，如果对于任意固定的 t，和对于任意的有意义的初始条件 u_0，当

$$\|E_k(\cdot,t)\| \to 0, \quad as\ k \to 0 \tag{2.26}$$

则称方法收敛.

2.2 范数

在讨论收敛性时，必须选择采用何种范数. 有可能会出现采用一种范数，方法收敛，而换一种范数，方法不收敛的情况. 守恒律问题，通常采用 1-范数，对于函数 $v(x)$

$$\|v\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |v(x)| dx \tag{2.27}$$

因此，对于某固定的时刻 t

$$\|E_k(\cdot,t)\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |E_k(x,t)| dx \tag{2.28}$$

在理想情况下，可能会期望在 ∞-范数下收敛，

$$\|v\|_1 = \sup_x |v(x)| \tag{2.29}$$

但是如果解存在间断，在间断附近的网格点上的误差不会随着网格的细化而一致收敛到 0. 采用 1-范数可以得到很好的收敛性，但是采用 ∞-范数则不会有好的收敛性.
对于线性问题，还广泛采用 2-范数，

$$\|v\|_2 = \left[\int_{-\infty}^{\infty} |v(x)|^2 dx \right]^{1/2} \tag{2.30}$$

线性问题可以运用 Fourier 变化，并且 Parseval 等式表明 Fourier 变换 $\hat{v}(\xi)$ 和 $v(x)$ 具有相同的 2-范数，这可以简化对问题的分析.
本文主要缺省采用 1-范数. 对于离散函数，定义离散形式的 1-范数，

$$\|U^n\|_1 = h\sum_j |U_j^n| \tag{2.31}$$

显然，这与函数范数的定义是相容的，

$$\|U^n\|_1 = \|U_k(\cdot, t)\|_1. \tag{2.32}$$

尽管我们最终的目的是证明计算解的收敛性，获得全局误差的显式界限 (包括收敛速率)，但是直接得到收敛性是很困难的。为此我们先研究局部截断误差 (local truncation error) 和判断稳定性的方法，最后通过稳定性和局部误差来估计全局误差.

2.3 局部截断误差

局部截断误差 $L_k(x,t)$ 是测量在局部，差分方程逼近微分方程的程度. 将微分方程的精确解 $u(x_j, t_n)$ 代替差分方程中的 U_j^n 就得到局部截断误差. 显然，微分方程的精确解只是差分方程解的近似，微分方程精确解满足差分方程的程度可以反映差分方程解逼近微分方程精确解的好坏.
作为例子，给出 Lax-Friedriches 格式的局部截断误差.Lax-Friedriches 格式是将 (2.10) 中的 U_j^n 用 $\frac{1}{2}(U_{j-1}^n + U_{j+1}^n)$ 代替，这样处理后，只要 k/h 足够小，格式是稳定的.

$$\frac{U_j^{n+1} - \frac{1}{2}(U_{j-1}^n + U_{j+1}^n)}{k} + A\frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2h} = 0 \tag{2.33}$$

在上式中，在对应的网格点 $u(x,t)$ 代替 U_j^n, 方程右侧将不为 0，我们将得到局部截断误差，

$$L_k(x,t) = \frac{u(x,t+k) - \frac{1}{2}(u(x-h,t) + u(x+h,t))}{k} + A\frac{u(x+h,t) - u(x-h,t)}{2h} \tag{2.34}$$

在计算截断误差时，总是假定解是光滑的，然后对上式右端各项关于 $u(x,t)$ 进行 Taylor 展开 ($u \equiv u(x,t)$)，得到

$$L_k(x,t) = u_t + Au_x + \frac{1}{2}\left(ku_{tt} - \frac{h^2}{k}u_{xx}\right) + O(h^2) \tag{2.35}$$

u 是精确解，因此 $u_t + Au_x = 0$，并利用 (2.14)，得到

$$\begin{aligned} L_k(x,t) &= \frac{k}{2}\left(A^2 - \frac{h^2}{k^2}I\right)u_{xx}(x,t) + O(k^2) \\ &= O(k) \quad as\ k \to 0 \end{aligned} \tag{2.36}$$

因为我们假定 $\frac{h}{k}$ 为常数，所以在网格细化的过程中 $\frac{h^2}{k^2}$ 为常数.
应用 Taylor 余项定理，并假设 $u(x,t)$ 的各阶导数一致有界，可以得到局部截断误差满足

$$|L_k(x,t)| \le Ck, \quad for\ all\ k < k_0 \tag{2.37}$$

对于线性问题，$u(x,t)$ 的导数的界可以从初值得到，因此 C 只与初值有关.
若进一步假定 u_0 是紧支函数，则在每一时刻 t，$L_k(x,t)$ 具有有限的 1-范数，故

$$\|L_k(\cdot,t)\| \le C_L k \tag{2.38}$$

C_L 同样只取决于 u_0.
根据(2.38)，Lax-Friedriches 格式具有 1 阶精度.
下面给出任意 2 层格式的局部截断误差定义

定义 2.1. 对于任意的 *2* 层格式，局部截断误差为

$$L_k(x,t) = \frac{1}{k}[u(x,t+k) - \mathcal{H}_k(u(\cdot,t);x)] \tag{2.39}$$

定义 2.2. 格式相容是指，

$$\|L_k(\cdot,t)\| \to 0, \quad as\ k \to 0 \tag{2.40}$$

定义 2.3. 格式具有 p 阶精度，是指对于充分光滑的，紧支的初始函数，存在常数 C_L，使得局部截断误差满足

$$\|L_k(\cdot,t)\| \le C_L k^p, \quad for\ all\ k \le k_0,\ t \le T. \tag{2.41}$$

可以证明，如果格式是稳定的，对于光滑解，格式的全局误差的阶数和局部误差相同.

2.4 稳定性

(2.39)可以写成

$$u(x,t+k) = \mathcal{H}_k(u(\cdot,t);x) + kL_k(x,t) \tag{2.42}$$

因为数值解满足(2.16)，与上式相减，得到

$$E_k(x,t+k) = \mathcal{H}_k(E_k(\cdot,t);x) - kL_k(x,t) \tag{2.43}$$

对于线性格式，上式中的算子可以提出来，

$$E_k(\cdot,t+k) = \mathcal{H}_k E_k(\cdot,t) - kL_k(\cdot,t) \tag{2.44}$$

$t+k$ 时刻的误差包含两部分，$-tL_k$ 为这一步引入的局部误差，$\mathcal{H}_k(E_k(\cdot,t);x)$ 为之前计算的累积误差. 通过简单的计算，可以得到 t_n 时刻，线性格式误差的递归关系式，

$$E_k(\cdot,t_n)=\mathcal{H}_k^nE_k(\cdot,0)-k\sum_{i=1}^{n}\mathcal{H}_k^{n-i}L_k(\cdot,t_{i-1}) \tag{2.45}$$

为了保证全局误差有界，必须确保局部误差 $L_k(\cdot,t_{i-1})$ 在经过 $n-i$ 次算子作用后，误差不会放大. 这要求格式是稳定的，一般称这种稳定性为 Lax-Richtmyer 稳定性.

定义 2.4. 格式是稳定的是指对于任意的时间 T，存在常数 C_s 和 $k_0>0$，当 $k<k_0$ 时，有

$$\|\mathcal{H}_k^n\|\le C_S,\ for\, all\, nk\le T,\ k\le k_0 \tag{2.46}$$

特别地，对于所有的 n,k，当 $\|\mathcal{H}_k\|\le 1$ 时，由于 $\|\mathcal{H}_k^n\|\le\|\mathcal{H}_k\|^n\le 1$，因此格式稳定. 更一般的情形，可以允许误差一定程度的增长. 例如，当

$$\|\mathcal{H}_k\|\le 1+\alpha_k\ for\, all\, k\le k_0 \tag{2.47}$$

成立时，有

$$\|\mathcal{H}_k^n\|\le(1+\alpha k)^n\le e^{\alpha kn}\le e^{\alpha T} \tag{2.48}$$

其中 k,n 满足 $nk\le T$.

2.5 Lax 等价定理

Lax 等价定理的内容为：对于相容的线性差分格式，稳定性是收敛性的充分必要条件. 该定理是线性差分格式最基本的收敛定理.
定理的详细证明可参考文献. 下面简单说明至少在光滑初值条件下，充分性为什么成立，以及解释为什么全局误差的阶数和局部误差的阶数相同.
根据(2.45)，两边取范数，并应用三角不等式，

$$\|E_k(\cdot,t_n)\|\le\|\mathcal{H}_k^n\|\|E_k(\cdot,0)\|+k\sum_{i=1}^{n}\|\mathcal{H}_k^{n-i}\|\|L_k(\cdot,t_{i-1})\| \tag{2.49}$$

由稳定性条件，对于 $i=1,0,\ldots,n$，有 $\|\mathcal{H}_k^{n-i}\|\le C_S$，因此

$$\|E_k(\cdot,t_n)\|\le C_S\left(\|E_k(\cdot,0)\|+k\sum_{i=1}^{n}\|L_k(\cdot,t_{i-1})\|\right) \tag{2.50}$$

如果格式具有 p 阶精度，因此根据(2.41)，对于 $kn = t_n \le T$，有

$$\|E_k(\cdot, t_n)\| \le C_S\left(\|E_k(\cdot, 0)\| + TC_L k^p\right) \tag{2.51}$$

如果初值不存在误差，则全局误差的阶数与局部误差相同. 假设当 $k \to 0$ 时，初始误差亦以 $O(k^p)$ 衰减，因此数值解以期望的速率收敛. 最终我们可以得到全局误差界的形式，当满足 $t \le T, k \le k_0$ 时

$$\|E_k(\cdot, t)\| \le C_E k^p. \tag{2.52}$$

例 **2.1.** 给出标量对流方程 $u_t + au_x = 0$ 的 *Lax-Friedrichs* 格式，并说明当 k, h 满足下列关系时，格式是稳定的.

$$\left|\frac{ak}{h}\right| \le 1 \tag{2.53}$$

这是 *Lax-Friedrichs* 格式的稳定性限制条件.
标量对流方程的 *Lax-Friedrichs* 格式为

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{2}(U_{j-1}^n + U_{j+1}^n) - \frac{ak}{2h}(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) \tag{2.54}$$

因此

$$\begin{aligned}
\|U^{n+1}\| &= h\sum_j |U_j^{n+1}| \\
&\le \frac{h}{2}\left[\sum_j \left|\left(1 - \frac{ak}{h}\right) U_{j+1}^n\right| + \sum_j \left|\left(1 + \frac{ak}{h}\right) U_{j-1}^n\right|\right]
\end{aligned}$$

根据(2.53)，有

$$1 - \frac{ak}{h} \ge 0, \quad 1 + \frac{ak}{h} \ge 0 \tag{2.55}$$

因此

$$\begin{aligned}
\|U^{n+1}\| &\le \frac{h}{2}\left[\sum_j \left|\left(1 - \frac{ak}{h}\right) U_{j+1}^n\right| + \sum_j \left|\left(1 + \frac{ak}{h}\right) U_{j-1}^n\right|\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\sum_j \left(1 - \frac{ak}{h}\right) \|U^n\| + \sum_j \left(1 + \frac{ak}{h}\right) \|U^n\|\right] \\
&= \|U^n\|
\end{aligned}$$

故 $\|U^{n+1}\| \le \|U^n\|$，$\|H_k\| \le 1$，因此限制条件(2.53)是格式稳定的充分条件. 事实上也可以证明，它也是必要条件.

下面考虑线性方程组. 我们假定系数矩阵 A 是可以对角化的,令 $\upsilon(x,t) = R^{-1}u(x,t)$，其中 R 是 A 的特征向量矩阵，则方程组可以解耦，

$$\upsilon_t + \Lambda \upsilon_x = 0, \tag{2.56}$$

得到 m 个独立的标量对流方程.
对差分方程应用同样的方法，令 $V_j^n = R^{-1}U_j^n$，在 Lax-Friedrichs 格式两侧乘以 R^{-1}，得到

$$V_j^{n+1} = \frac{1}{2}(V_{j-1}^n + V_{j+1}^n) - \frac{k}{2h}\Lambda(V_{j+1}^n - V_{j-1}^n) \tag{2.57}$$

以上解耦式得到 m 个独立的标量差分方程. 第 p 个方程的稳定性限制条件为

$$\left|\frac{\lambda_p k}{h}\right| \leq 1 \tag{2.58}$$

如果解耦后的每一个差分方程都满足(2.58)，则格式是稳定的，因此 V_j^n 会收敛到 $\upsilon(x,t)$，$U_j^n = RV_j^n$ 会收敛到 $u(x,t)$. 对于线性方程组，当 A 的特征值 λ_p 都满足(2.58)，Lax-Friedrichs 格式稳定.

例 **2.2.** 考虑标量对流方程的单侧 *(one-side)* 格式，

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{ak}{h}(U_j^n - U_{j-1}^n) \tag{2.59}$$

的稳定性. 类似于 *Lax-Friedrichs* 格式，

$$\|U^{n+1}\| \leq h\left[\sum_j \left|\left(1 - \frac{ak}{h}\right)U_j^n\right| + \sum_j \left|\left(\frac{ak}{h}\right)U_{j-1}^n\right|\right] \tag{2.60}$$

当

$$0 \leq \frac{ak}{h} \leq 1, \tag{2.61}$$

时，$U^{n+1} \leq U^n$，格式是稳定的.

由于 $k, h > 0$，稳定性条件(2.61)要求 $a > 0$，因此单侧格式(2.59)只适用于 $a > 0$ 的情形. 对于方程组，Lax-Friedrichs 格式的稳定性要求

$$0 \leq \frac{\lambda_p k}{h} \leq 1 \tag{2.62}$$

对 A 的所有特征值都成立.
同样可以构造另一侧的格式

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{k}{h}A(U_j^n - U_{j-1}^n) \tag{2.63}$$

稳定性条件为

$$-1 \leq \frac{\lambda_p k}{h} \leq 0 \tag{2.64}$$

采用本节的方法分析 Lax-Friedrichs 格式和单侧格式的稳定性能够成功，是因为这两种格式属于单调格式 (monotone scheme). Lax-Wendroff 格式和跳蛙格式不属于单调格式，对于非单调格式的稳定性分析需要用到更复杂的方法. 对于线性问题，通常采用 Fourier 分析 (von Neumann 方法). 这是一种重要的方法，但是不能推广到非线性问题和非线性格式.

2.6 CFL 条件

2.7 迎风格式

2.8 数值格式的修正方程

格式的修正方程是指假设存在光滑的数值解，并寻求描述数值解的方程.

例 1. 考虑线性标量问题

$$u_t + au_x = 0$$

且具有光滑的初始条件和周期性边界条件.

Chapter 3

非线性双曲型方程差分格式

3.1 守恒律

一维标量双曲守恒律方程

$$u_t + f(u)_x = 0 \tag{3.1}$$

考虑非线性波动方程

$$\rho_t + c(\rho)\rho_x = 0 \tag{3.2}$$

其中 ρ 表示某种密度，c 是扰动传播的速度，它是密度的函数. 对这个方程的研究对于非线性双曲守恒律的研究具有重要的意义. 下面将讨论该方程解的若干性质.

$\rho(x,t)$ 是定义在平面 (x,t) 上的函数. 如果沿着曲线

$$\frac{dx}{dt} = c \tag{3.3}$$

可以发现 $\rho_t + c\rho_x$ 是 $\rho(x,t)$ 的全导数

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{dx}{dt}\frac{\partial \rho}{\partial x} \tag{3.4}$$

满足 $\frac{dx}{dt} = c$ 曲线 l 称为特征线. 故沿着特征线

$$\frac{d\rho}{dt} = 0, \quad \frac{dx}{dt} = c(\rho) \tag{3.5}$$

由于在特征线上 ρ 为常数，所以特征线为直线. 方程 (3.2) 的通解可以通过构造一族特征线得到，特征线的斜率 $c(\rho)$ 由当地的 ρ 确定.

考虑初值问题

$$\rho = f(x), \quad , -\infty < x < \infty, \quad , t > 0. \tag{3.6}$$

如果一根特征线与 x 轴交于 $x=\xi$，则在整个特征线上 $\rho=f(\xi)$，特征线的斜率为 $c=c(f(\xi))$，记为 $F(\xi)$. 特征线方程可以描述为

$$x=\xi+F(\xi)t$$

当 ξ 在整个 x 轴上变化时，我们得到在特征线族

$$x=\xi+F(\xi)t \tag{3.7}$$

在这些特征线上，

$$\rho=f(\xi),\quad c=F(\xi)=c(f(\xi)). \tag{3.8}$$

方程 (3.7),(3.8) 构成了方程的通解. 如果不从特征线的构造出发，而是将 $\xi(z,t)$ 视为 (3.7) 定义的隐函数，ρ 由 (3.8) 给出. 根据 (3.8)，

$$\rho_t=f'(\xi)\xi_t,\quad \rho_x=f'(\xi)\xi_x,$$

根据 (3.7)，分别取 x,t 的导数，

$$\begin{aligned}0 &= F(\xi)+(1+F'(\xi)t)\xi_t,\\ 1 &= (1+F'(\xi)t)\xi_x\end{aligned}$$

因此

$$\rho_t=-\frac{F(\xi)f'(\xi)}{1+F'(\xi)t},\quad \rho_x=-\frac{f'(\xi)}{1+F'(\xi)t}$$

因为 $c(\rho)=f(\xi)$，因此

$$\rho_t+c(\rho)\rho_x=0$$

证明解确实满足方程 (3.2).

特征线相当于在 x 轴上传播的小波，在特征线上传递着信息. 如果 $F'(\xi)<0$，将可能发生特征线相交的情况. 当

$$t=-\frac{1}{F'(\xi)} \tag{3.9}$$

时，ρ_t,ρ_x 趋于无穷大. 当出现这两种情形时，方程 (3.2) 的连续解将不存在.

3.2 弱解

当偏微分方程的解不可微，甚至也不连续时，偏微分方程所代表的意义是什么？此时，我们应该将偏微分方程的解从经典的可微函数拓展到更广泛的一类对象，可以将此类解视为“广义函数”. 在更严格的意义上，拓展后的这类解称为“分布 (distributions)”.

我们将在分布解的意义上求解偏微分方程. 首先引入测试函数 (test functions). 测试函数 $\phi(x,t), \phi \in C_0^\infty[\mathbb{R}\times[0,\infty)]$. 具有无穷可微性，并且是紧支的，即在定义域边界附近解趋于 0. 将测试函数乘在方程两边得到

$$\phi u_t + \phi f(u)_x = 0 \tag{3.10}$$

对上式积分得到

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \phi u_t + \phi f(u)_x = 0 \tag{3.11}$$

应用分部积分

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [\phi_t u + \phi_x f(u)] dxdt = 0 \tag{3.12}$$

上式利用了 ϕ 是紧支函数的性质. 满足 (3.12) 的解称为弱解 (weak solution).
考虑间断解. 即解存在一个跳跃，跳跃所在的位置可用 $x = \xi(t)$ 描述, 因而间断的运动速度为

$$s(t) = \frac{d\xi}{dt} \tag{3.13}$$

在跳跃两侧解的极限为 $u^+(t) = u(x+,t), u^- = u(x-,t)$，并且假设除间断外，解的其他部分是光滑的 (至少是 C^1). 将 3.12在 $(-\infty, \xi(t))$ 和 $(\xi(t), \infty)$ 两段上进行

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^{\xi(t)} [\phi_t u + \phi_x f(u)] dxdt + \int_0^\infty \int_{\xi(t)}^\infty [\phi_t u + \phi_x f(u)] dxdt \tag{3.14}$$

对每一段的积分分别应用分部积分，

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \int_{-\infty}^{\xi(t)} [(\phi u)_t + (\phi f(u))_x] dxdt - \int_0^\infty \int_{-\infty}^{\xi(t)} [\phi u_t + \phi f(u)_x] dxdt \\
&\quad + \int_0^\infty \int_{\xi(t)}^\infty [(\phi u)_t + (\phi f(u))_x] dxdt - \int_0^\infty \int_{\xi(t)}^\infty [\phi u_t + \phi f(u)_x] dxdt \\
&\quad = \int_0^\infty \int_{-\infty}^{\xi(t)} [(\phi u)_t + (\phi f(u))_x] dxdt + \int_0^\infty \int_{\xi(t)}^\infty [(\phi u)_t + (\phi f(u))_x] dxdt \\
&\quad = 0
\end{aligned} \tag{3.15}$$

上式利用了当 u 连续时，3.10成立. 再分别对每段上的积分应用格林定理 (Green theorem)，

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^{\xi(t)} [(\phi u)_t + (\phi f(u))_x] dx dt = \int_{\xi(t)} [(u^- \phi) n_t + (f(u^-) u^-) n_x] dl \tag{3.16a}$$

$$\int_0^\infty \int_{\xi(t)}^{\infty} [(\phi u)_t + (\phi f(u))_x] dx dt = \int_{\xi(t)} [(u^+ \phi) n_t + (f(u^+) u^+) n_x] dl \tag{3.16b}$$

在 (3.16) 的推导中已经用到了测试函数的紧支性质. 将 (3.16) 代入到 (3.15)，得到

$$\int_{\xi(t)} [(u^- \phi) n_t + (f(u^-) u^-) n_x] dl + \int_{\xi(t)} [(u^+ \phi) n_t + (f(u^+) u^+) n_x] dl = 0$$

对于任意的 $\phi(x,t)$ 上式都成立，因此得到

$$\frac{f(u^+) - f(u^-)}{u^+ - u^-} = -\frac{n_t}{n_x} = s(t) \tag{3.17}$$

上式即为表征间断 (或者称为激波) 传播速度的兰金-雨共纽公式 (Rankine-Hugoniot formula).

Bibliography

[1] Alan Jeffrey. *Applied partial differential equations: an introduction.* Academic Press, San Diego, 2003.

[2] Randell J. LeVeque. *Numerical methods for conservation laws.* Birkhauser Verlag, Basel, 1993.