

张量积B样条曲面的自适应节点设置

王财勇^{a,b,1,*}, 曹娟^{a,b,2}, 曾晓明^{a,b,3}

^a厦门大学数学科学学院 厦门 361005

^b福建省数学建模与高性能科学计算重点实验室 厦门 361005

Abstract

We present an algorithm for self-adaptive knot placement of tensor product B-spline surface based on surface geometry information and fitting error. Our method can put more knots line in the place which is of rich geometry information or larger fitting error, and adding u knot lines is independent of adding v knot lines, which makes knot lines be added to the more suitable place, therefore we can fit the surface more accurately. Several experiments demonstrate the efficiency of our method in fitting surface with distinct geometry features, and our method can reach higher precision than other similar methods.

Keywords:

B-spline, spline-knot, mesh parameterization, least-square method, triangle mesh

摘要: 本文提出了一种以输入曲面几何信息或者拟合误差为驱动的张量积B样条曲面自适应节点的设置方法, 可以实现在曲面几何信息丰富或者拟合误差较大的地方自适应地添加更多的节点线, 而且 u 向和 v 向的节点线添加保持相互独立, 这样可将节点线添加到更适合的地方, 进而更好地拟合曲面。实验表明: 我们的方法思路简单、有效, 在拟合具有明显几何特征的输入数据时具有优势, 比同类方法可以达到更高的精度。

关键字: B样条, 样条节点, 网格参数化, 最小二乘法, 三角网格

1 引言

曲面拟合在逆向工程、几何造型、几何处理等领域有广泛的应用。用于曲面拟合的连续曲面大致可分为隐式代数曲面、细分曲面和参数样条曲面三大类。其中参数样条曲面由于具有显式表示、几何直观、便于求导求积等优点而得到广泛的应用。而用样条曲面拟合离散数据已成为CAGD领域的一经典问题。过去的几十年间, 涌现出大量的用各种样条拟合数据的理论和实践工作, 被用于数据拟合的样条有经典的B样条或Bézier曲面片^[1]、径向基函

数^[2]、T样条^[3,4]等。

B样条具有自动连续性、可以进行局部细节描述等诸多优点, 因此被广泛用于连续曲面的表示。在B样条曲面拟合中, u, v 两个参数方向上的节点(或节点线, 即与节点对应的穿过四边形参数区域的线段)设置对最终拟合曲面的质量和计算的效率有着重要的影响。例如, 在同一参数区域上节点线的个数直接影响到在这一区域上控制顶点的个数。节点线越密集的地方, 控制顶点具有的自由度越多, 越能构造复杂的形状。反之, 对于简单的形状, 需要的控制顶点自由度越少, 应设置较少的节点线以提高曲面计算的效率。因此, 有效的节点线设置方法对B样条曲面拟合具有重要的意义。

在这篇文章中, 我们考虑了输入数据为三角网格曲面的情况, 提出了基于曲面几何特征及拟合误

*通讯作者

Email address: cywang@stu.xmu.edu.cn (王财勇)

¹王财勇(1990-), 男, 硕士研究生, 主要研究方向是CAGD

²曹娟(1983-), 女, 博士, 副教授, 主要研究方向是CAGD&CG

³曾晓明(1955-), 男, 博士, 教授, 主要研究方向是CAGD、逼近论

差的张量积B样条自适应节点线设置方法. 通过该方法, 可以将更多的节点线添加到曲面几何信息较多或者误差较大的地方, 从而很好地拟合曲面。

2 相关工作

B样条曲面的拟合主要依赖参数化和节点线的设置. 因此在二者固定的情况下, 控制顶点可以通过最小二乘法求解. 早期的B样条拟合主要考虑格子点数据^[5,6], 对三角网格考虑的较少。

最理想的情况是直接将数据的参数化、节点线的个数位置及控制顶点都作为未知量, 通过求解一个非线性的最优化问题来求解, 然而由于B样条基函数是关于节点的高度非线性函数, 因此以上的最优化问题是个多模态、高度非线性的优化问题, 可以通过智能优化算法如遗传算法^[7,8]等来求解. 但这样的算法多数针对与B样条曲线的拟合, 仅有部分办法被推广到曲面拟合之上. 而且这类办法由于参数过多, 会存在计算效率过低、时间过长的问题, 并且一般无法保证全局最优解。

为提高B样条拟合效率, 可通过将最小二乘问题中参数化或节点固定, 从而使问题得到简化. 因此, 一种比较可行的方法是将节点线数及位置固定而优化参数化或固定参数化而优化节点线位置. 例如, 在用最小二乘法优化得到B样条曲面控制顶点的方法中, Ma等^[9]提出了为随机测量得到的数据指定参数的方法. Floater^[10]提出了适用于曲面插值与逼近的“保形”参数化方法. Park等^[6]提出了在输入数据中选取所谓的主导列(dominant columns)的方法, 这些主导列的参数即作为B样条曲面拟合的节点线的参数. 但该方法适用于规则的呈格子状分布的离散数据. Cao等^[11]提出了基于曲面的几何特征和拟合误差驱动的自适应节点设置, 该方法设计简单, 效率较高, 但是仍然有一些缺点, 如参数化区域的划分是基于重心Voronoi剖分的, 所以剖分后的区域是不规则的多边形区域. 我们知道B样条曲面的控制网格是张量积型, 参数域的 u, v 节点线也交织成矩形形状, 而且拟合过程中每一块面片的拟合能力是相近的, 这也应是从矩形曲面片考虑的, 所以这里用不规则的多边形区域剖分就不是很合适. 另外在该

方法中, 相应剖分的重心坐标被用作 u, v 向的节点线, 使得 u, v 向的节点线被绑定在一起. 这对于拟合某些 u 向(这里是从参数域的角度来看, u 向是水平方向, v 向是竖直方向)几何特征比较丰富或者 v 向几何特征丰富的输入曲面, 将会带来一定的限制或者会造成一些节点线的浪费。

本文提出了在参数化固定的情况下, 逐步增加节点个数并自适应调整节点位置的办法. 本文算法以带参数化结果的三角网格为输入数据, 输出为一个拟合的张量积B样条曲面. 本文的主要贡献在于保持了文献^[11]提出的通过几何特征或拟合误差驱动的迭代增加节点的方法, 使得新加入的节点线总是穿过局部弯曲最大的地方或者拟合误差最大的地方, 即更多的控制顶点将被逐步引入到几何特征多或误差大的区域, 从而拟合曲面质量被逐步改进, 而且参数域的剖分是矩形形状的, 且 u, v 向节点线的添加是独立的, 这将会很好地弥补文献^[11]的不足, 可以最大限度地利用节点线, 将其布置到相对合适的地方, 极大地提高拟合精度。

3 B样条曲面的最小二乘拟合

B样条理论是计算机辅助几何设计的经典理论^[1,5,12], 已被各界广泛应用. 我们假定读者已经熟悉B样条曲线曲面的理论, 因此这里仅作简单的介绍, 并且引入一些符号为后文的讨论做准备。

设B样条曲面的两个参数为 $u, v \in [0, 1]$, 给定 u, v 参数轴上的递增序列 $U = \{u_0, u_1, \dots, u_{m+p+1}\}$ 和 $V = \{v_0, v_1, \dots, v_{n+q+1}\}$, 则 $p \times q$ 次的B样条曲面定义为

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n P_{i,j} B_{i,p}(u) B_{j,q}(v) \quad (1)$$

这里 $(u, v) \in [u_p, u_{m+1}] \times [v_q, v_{n+1}]$, $B_{i,p}(u)$ 和 $B_{j,q}(v)$ 分别是 U, V 定义的 p 次和 q 次B样条基函数, $P_{i,j} (i = 0, 1, \dots, m; j = 0, 1, \dots, n)$ 为控制顶点, 构成了控制网格. 以点 $(u_i, 0)$ 和 $(u_i, 1)$ 为端点的线段即为 u 向上 u_i 对应的节点线, 同理, 对 v 向节点线亦做此定义。

给定三角网格点 $X = \{x_i \in \mathbb{R}^3, i = 0, 1, \dots, N\}$ 和对应的参数化 $\Omega = \{(s_i, t_i) \in [0, 1] \times [0, 1], i =$

4.1 曲面拟合的初始化

$0, 1, \dots, N$ },若用次数为 p, q 的B样条曲面公式(1)去拟合三角网格, 则可以通过求解如下的最小二乘问题而得到B样条曲面的控制顶点。

$$\text{Min } E(\{P_{i,j} \mid 0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n\}) = \sum_{i=0}^N \|S(s_i, t_i) - x_i\|^2 \quad (2)$$

该问题等价于一个求解一个线性方程组问题, 而且由于该线性方程组的系数矩阵是一个稀疏矩阵, 并且一般是秩亏的, 故可以使用SVD分解法或者秩展现(rank-revealing)QR算法求解^[13,14], 本文采用后者来求解。

在实际应用中, 大多测量得到的数据都是圆盘同胚的面片, 因此本文假设离散点集采样源于某三维物体表面的单连通面片上。在上述最小二乘问题中, 参数化、节点向量等都会影响到最终的曲面形式。本文讨论的是在离散数据及其参数化给定的条件下, 如何设定有利于最小二乘拟合的节点向量 U, V 的问题。

4 自适应节点的设置

本文在进行张量积B样条曲面的拟合中, 采用了自适应添加节点线的方法, 即可以自动在曲面几何特征较多或者误差较大的地方添加更多的节点线。该方法可以处理大规模的离散的三角网格, 而且也可以通过将四边形网格转换为三角网格的办法来进行同样的处理, 另外节点数无需设置, 可以根据误差自适应地添加, 且与同类方法相比, 本文的算法精度更高。

本文算法的提出是受到了文献^[11]启发, 我们从同样的角度提出了另一种不同的方法来自适应地设置张量积B样条曲面的节点。本文的算法的提出基于这样的观察: 对于指定次数的B样条曲面, 即定义在子矩形区域 $[u_i, u_{i+1}] \times [v_j, v_{j+1}]$ 上的面片, 其控制顶点的自由度是相同的, 即逼近几何形状的能力是相同的。因此对输入的曲面对应形状越复杂的部分, 需要较多的B样条曲面才能达到较好的逼近。反之, 形状越简单的部分, 需要的面片越少。

假设输入的离散数据已经参数化到 $[0, 1] \times [0, 1]$ 的矩形区域上, 初始时刻给定 m, n (要求 $m >$

$p, n > q$), 然后将矩形参数域 $[0, 1] \times [0, 1]$ 进行均匀划分, 得到准均匀的B样条节点线^[12], 这时由于各个矩形域 $[u_i, u_{i+1}] \times [v_j, v_{j+1}]$ 的面积大小相同, 因此累积的几何特征相差比较大。为了使各个矩形域累积的几何特征相近, 我们需要移动节点线, 使几何特征较大的矩形域占的面积较小些, 几何特征较小的地方占的面积较大些, 这样就实现了在曲面几何信息较多的地方聚集了较多的节点线, 在曲面几何信息较少的地方节点线也比较少。然后我们进行最小二乘问题的求解, 如果得到的拟合曲面不够理想, 我们可以继续添加节点线, 新增的节点线优先添加到误差较大的地方, 这样继续拟合曲面, 直到达到我们满意的效果为止。如下为具体的算法流程:

算法1. 张量积B样条曲面的自适应节点设置

输入: 带有参数化的三维曲面

输出: 拟合曲面

1: 初始化

2: 根据几何特征加入节点

3: 最小二乘拟合(rank-revealing QR分解)

4: 判断迭代次数 $> N_{iter}$ 或者拟合误差 $< \varepsilon$, 如果满足, 停止迭代, 输出拟合曲面, 否则进行第5步

5: 根据拟合误差添加新的节点线, 然后转到第3步操作。

4.1 曲面拟合的初始化

本文输入的三角网格点 $X = \{x_i \in R^3, i = 0, 1, \dots, N\}$, 参数化为 $\Omega = \{(s_i, t_i) \in [0, 1] \times [0, 1], i = 0, 1, \dots, N\}$, 分别如图1(a), 1(b)所示。指定B样条曲面的次数为 $p \times q$, 节点向量 U, V 取首尾为重节点(即 $u_0 = \dots = u_p = 0, u_{m+1} = \dots = u_{m+p+1} = 1, v_0 = \dots = v_q = 0, v_{n+1} = \dots = v_{n+q+1} = 1$), 元素按照升序排列, 这样拟合后的B样条曲面将插值于对应控制网格的四个角点。

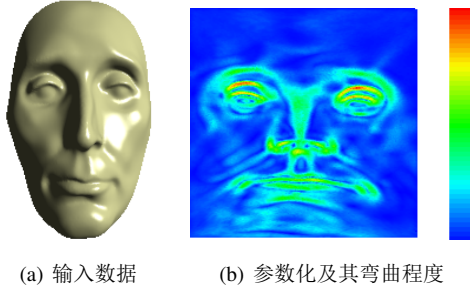


图1 输入数据及曲面弯曲度的颜色表示

4.2 根据几何特征加入节点

4.2.1 几何特征度量

曲率是描述曲面局部弯曲程度的重要度量。对于嵌入在三维空间的二维流形曲面，有两种曲率存在：高斯曲率和平均曲率。它们分别是主曲率 k_{min} 与 k_{max} 的乘积和平均值。主曲率描述了曲面在给定点不同方向的弯曲程度的最大值和最小值。本文采用主曲率绝对值的平均值 $\frac{|k_{min}|+|k_{max}|}{2}$ 作为度量曲面局部弯曲程度的度量，并称为弯曲度^[11]。

离散曲率的估计是离散微分几何的一项重要研究内容，根据离散曲面的表示方法与应用的不同，离散曲率的估计方法也不尽相同。本文采用文章^[15]的方法，通过估计每个网格顶点上的曲率张量，从而得到表面上的每点的最大最小主曲率和弯曲度。设 κ_i 为网格点 x_i 对应的弯曲度，如图1(a)，算法输入为一张人脸曲面，其弯曲度在参数域上的分布如图1(b)，其中当颜色越接近红色表示弯曲度越大，越接近蓝色表示弯曲度越小。每个三角面片上的弯曲度由其对应顶点的弯曲度线性插值获得。由此得到参数域上的弯曲度函数 $\kappa(u, v)$, $(u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]$ 。

4.2.2 初始节点线的设置和扰动

如前所述，若将控制顶点的自由度个数作为度量B样条曲面造型能力的度量，则每个子矩形域上固定次数的B样条曲面的造型能力是一致的。假设用具有 K_0 个这样的面片拼成的B样条曲面拟合输入的离散数据，则每一个面片应分担的输入离散数据的复杂度应相近，其中曲面复杂度用4.2.1节

定义的弯曲度来衡量。因此将参数域分成 K_0 个小块 $\Omega_i, i = 1, 2, \dots, K_0$ ，使得每一块对应的曲面弯曲度一致，即 $\int_{\Omega_i} \kappa(u, v) d\sigma$ 相等。

初始时刻我们给定参数 p, q, m, n ，当 $m > p, n > q$ 时，则参数域 $[0, 1] \times [0, 1]$ 上就会产生非重节点线，我们在初始时刻时先取非重节点线为均匀分布的。如图2，取参数 $p=q=3, m=n=30$ 。

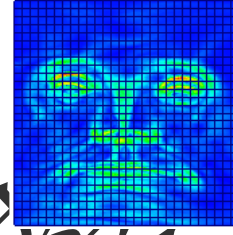


图2 初始时刻均匀节点线的分布及其弯曲度分布的颜色表示

接下来我们将采用误差极小化的思想来设置节点线的分布。

我们先来做一些标记，如图2，设 u 轴方向(即水平方向)的非重节点线序号标记为 $0, 1, \dots, \tilde{m} - 1$, u 值分别为 $x_0, x_1, \dots, x_{\tilde{m}-2}, x_{\tilde{m}-1}$ ，相应地分别等于 $u_p, u_{p+1}, \dots, u_m, u_{m+1}$ ；设 v 轴方向(即竖直方向)的节点线序号标记为 $0, 1, \dots, \tilde{n} - 1$, v 值分别为 $y_0, y_1, \dots, y_{\tilde{n}-2}, y_{\tilde{n}-1}$ ，相应地分别等于 $v_q, v_{q+1}, \dots, v_n, v_{n+1}$ 。因此节点线划分成的子矩形区域的数量为 $\tilde{m} \times \tilde{n}$ ， $\Omega_{i,j}$ 为第 (i, j) 个子矩形区域。

设常数

$$C = \frac{1}{(\tilde{m} - 1) \times (\tilde{n} - 1)} \sum_{i=0}^{\tilde{m}-2} \sum_{j=0}^{\tilde{n}-2} \int_{\Omega_{i,j}} \kappa(u, v) du dv$$

记 $X = \{x_0, x_1, \dots, x_{\tilde{m}-2}, x_{\tilde{m}-1}\}$, $Y = \{y_0, y_1, \dots, y_{\tilde{n}-2}, y_{\tilde{n}-1}\}$ 。我们的目标是通过调整节点线的位置，使得各个子区域的积分值尽量接近常数 C ，即调整 X 和 Y 并且满足 $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{\tilde{m}-2} < x_{\tilde{m}-1} = 1$ 和 $0 = y_0 < y_1 < \dots < y_{\tilde{n}-2} < y_{\tilde{n}-1} = 1$ ，目标可以转换成在每个子区域上的积分与常数 C 的二次误差之和最小。即求：

$$\text{Min } E(X, Y) = \sum_{i=0}^{\tilde{m}-2} \sum_{j=0}^{\tilde{n}-2} \left| \int_{\Omega_{i,j}} \kappa(u, v) du dv - C \right|^2 \quad (3)$$

接下来我们将求解目标函数(3)关于 X, Y 的偏导数:
 X 中 x_0 与 $x_{\tilde{m}-1}$ 是常量, Y 中 y_0 与 $y_{\tilde{n}-1}$ 是常量。

当 $1 \leq i \leq \tilde{m} - 2$ 时,

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=0}^{\tilde{n}-2} \left(\left| \int_{\Omega_{(i-1),j}} \kappa(u, v) dudv - C \right|^2 + \left| \int_{\Omega_{i,j}} \kappa(u, v) dudv - C \right|^2 \right) \\ &= \sum_{j=0}^{\tilde{n}-2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \int_{\Omega_{(i-1),j}} \kappa(u, v) dudv - C \right|^2 + \left| \int_{\Omega_{i,j}} \kappa(u, v) dudv - C \right|^2 \right) \\ &= \sum_{j=0}^{\tilde{n}-2} \left(2 \left(\int_{\Omega_{(i-1),j}} \kappa(u, v) dudv - C \right) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{\Omega_{(i-1),j}} \kappa(u, v) dudv \right) \\ &\quad + \sum_{j=0}^{\tilde{n}-2} \left(2 \left(\int_{\Omega_{i,j}} \kappa(u, v) dudv - C \right) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{\Omega_{i,j}} \kappa(u, v) dudv \right) \end{aligned}$$

其中 $\frac{\partial}{\partial x_i} \int_{\Omega_{(i-1),j}} \kappa(u, v) dudv$ 与 $\frac{\partial}{\partial x_i} \int_{\Omega_{i,j}} \kappa(u, v) dudv$ 可以根据雷诺传输定理^[16]求得, 最终的结果为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial x_i} &= 2 \sum_{j=0}^{\tilde{n}-2} \left(\left(\int_{\Omega_{(i-1),j}} \kappa(u, v) dudv - C \right) \cdot \int_{\partial\Omega_{(i-1),j} \cap x_i} \kappa(u, v) dv \right) \\ &\quad - 2 \sum_{j=0}^{\tilde{n}-2} \left(\left(\int_{\Omega_{i,j}} \kappa(u, v) dudv - C \right) \cdot \int_{\partial\Omega_{i,j} \cap x_i} \kappa(u, v) dv \right) \end{aligned}$$

注意到上式中 $\partial\Omega_{(i-1),j} \cap x_i$ 与 $\partial\Omega_{i,j} \cap x_i$ 都是 $u = x_i$ 上的线积分区域, 二者是相同的。因此上式可改写为:

$$\frac{\partial E}{\partial x_i} = 2 \sum_{j=0}^{\tilde{n}-2} \left(\left(\int_{\Omega_{(i-1),j}} \kappa(u, v) dudv - \int_{\Omega_{i,j}} \kappa(u, v) dudv \right) \cdot \int_{\partial\Omega_{i,j} \cap x_i} \kappa(u, v) dv \right)$$

同理, $1 \leq j \leq \tilde{n} - 2$

$$\frac{\partial E}{\partial y_j} = 2 \sum_{i=0}^{\tilde{m}-2} \left(\left(\int_{\Omega_{i,j}} \kappa(u, v) dudv - \int_{\Omega_{i,j+1}} \kappa(u, v) dudv \right) \cdot \int_{\partial\Omega_{i,j} \cap y_j} \kappa(u, v) du \right)$$

注意:在不与前面定义产生冲突的条件下, 这里的 x_i 等价于 $\{(x_i, v) | v \in [0, 1]\}$, y_j 等价于 $\{(u, y_j) | u \in [0, 1]\}$ 。

对于上述问题(3), 我们可以采用拟牛顿法等经典的优化方法求解, 但是在这里我们将采用一种改进的基于梯度配方法^[16,17](我们简单地称之为梯度降模法)来求解这个最优化问题。公式如下:

$$\begin{aligned} x_i^{(k+1)} &= x_i^{(k)} - \delta_i^{(k)} \frac{\partial E}{\partial x_i} \bigg/ \left| \frac{\partial E}{\partial x_i} \right|, i = 1, 2, \dots, \tilde{m} - 1, \\ y_j^{(k+1)} &= y_j^{(k)} - \theta_j^{(k)} \frac{\partial E}{\partial y_j} \bigg/ \left| \frac{\partial E}{\partial y_j} \right|, j = 1, 2, \dots, \tilde{n} - 1, \end{aligned}$$

这里 k 表示迭代次数, $\delta_i^{(k)}$ 与 $\theta_j^{(k)}$ 分别是 x_i 与 y_j 的步长。注意到这里下降方向是通过归一化相应部分的梯度所得。因此下降方向不再是梯度方向, 优化方法也不再是梯度下降法。步长 $\delta_i^{(k)}, \theta_j^{(k)}$ 将逐步趋于0, 并

且由如下的公式获得:

$$\begin{aligned} \delta_i^{(k)} &= \frac{(du)_{min}^k}{10} \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{k}{K_{max}-k}}, i = 1, 2, \dots, \tilde{m} - 1 \\ \theta_j^{(k)} &= \frac{(dv)_{min}^k}{10} \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{k}{K_{max}-k}}, i = 1, 2, \dots, \tilde{n} - 1 \end{aligned}$$

这里 K_{max} 是最大的迭代次数, $(du)_{min}^k$ 与 $(dv)_{min}^k$ 分别表示第 k 次迭代时相邻节点线之间间距的最小值。

经过迭代后, 原来均匀的节点线开始分散开了, 且在弯曲度大的地方分布密集, 在弯曲度小的地方分布稀疏。记经过迭代后的节点集合分别为 \tilde{U}, \tilde{V} 。根据Schoenberg-Whitney^[18]理论, 为保证最小二乘问题(2)的系数矩阵是非奇异的, 我们还要对 \tilde{U}, \tilde{V} 中的节点进行适当的局部修正和扰动, 使得 \tilde{U}, \tilde{V} 中的节点添加到 \tilde{U}, \tilde{V} 后, 每个基函数支集上至少包含1个数据的参数点。具体修正^[11]如下:

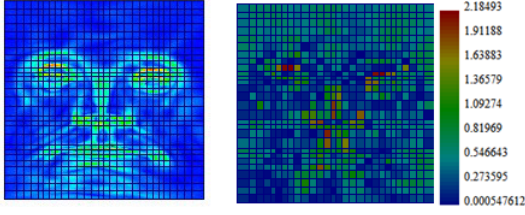
1) 合并间距过小的相邻节点。对序列 \tilde{U} , 若存在 i_0 , 使得 $x_{i_0+1} - x_{i_0} < \frac{1}{\sqrt{N}}$, 则用 x_{i_0+1} 和 x_{i_0} 的中点替代两点, 即 $\tilde{U} = \tilde{U} \cup \left\{ \frac{x_{i_0+1} + x_{i_0}}{2} \right\} \setminus \{x_{i_0+1}, x_{i_0}\}$, 其中 N 为输入的曲面的顶点数。更新过的 \tilde{U} 仍保持升序排列。对 \tilde{V} 也做同样的操作。

2) 删除可能引起系数矩阵奇异的候选节点。对于 \tilde{U} 的每一个元素 $x_{i_0} \in [x_i, x_{i+1}]$, 若存在 j_0 , 使得 $[x_i, x_{i+1}] \times [y_{j_0}, y_{j_0+1}]$ 不包含任何参数点 (s_i^*, t_i^*) , 则 x_{i_0} 不被添加到 \tilde{U} 中, 即 $\tilde{U} = \tilde{U} \setminus \{x_{i_0}\}$ 。对 \tilde{V} 也做同样的操作。

图3(a)为原始的均匀节点线经过20次迭代修正后的结果, 图3(b)为目标函数(3)中每个矩形域的弯曲度积分相对于常数 C 的相对误差的颜色表示, 其中颜色越接近红色表示相对误差越大, 越接近蓝色表示相对误差越小。

4.3 根据拟合误差添加新的节点线

一般情况下, 拟合曲面通常假定次数 p, q 给定, 进而需要求解控制顶点的个数(即 m, n 的大小), 而 m, n 的大小是通过非重节点线的个数来控制的, 因此我们需要逐步加入节点线, 直到最终的拟合曲面的误差达到一定的精度即可。上一次根据曲面几何信息添加了一定量的节点线后, 得到的曲面的拟合误差不一定满足精度要求, 为此我们还需要根据



(a) 经过迭代修正后的初始化节点线 (b) 每个矩形域的弯曲度积分相对于常数C的相对误差的颜色表示

图3 初始化节点线及矩形域的相对误差

上一次的误差分布, 添加更多的节点线。与前面根据曲面弯曲度设置节点类似, 我们期望拟合误差大的区域优先添加节点线。为此我们采用如下的方法来添加节点线:

算法2. 添加新的节点线

输入: 拟合后的曲面的参数化误差图

输出: 新增加的节点线

1: 分别计算 u 向矩形条(即矩形域 $[x_i, x_{i+1}] \times [0, 1]$)和 v 向矩形条(即矩形域 $[0, 1] \times [y_j, y_{j+1}]$)的每个的平均误差和最大误差, 并且要标记出最大误差的位置, 进而计算加权误差。即求解

$$U_{error}^{aver} = \frac{\sum_{\{(s_i, t_i) \in [x_i, x_{i+1}] \times [0, 1], 0 \leq i \leq \tilde{m}-2\}} \|S(s_i, t_i) - \tilde{P}(s_i, t_i)\|_2}{N_u}$$

$$U_{error}^{max} = \max \left\{ \frac{\|S(s_i, t_i) - \tilde{P}(s_i, t_i)\|_2}{l_{box}} \mid (s_i, t_i) \in [x_i, x_{i+1}] \times [0, 1], 0 \leq i \leq \tilde{m}-2 \right\}$$

$$U_{error}^{weight} = 0.3 \cdot U_{error}^{aver} + 0.7 \cdot U_{error}^{max}$$

这里 l_{box} 指输入网格曲面的最小包围盒的最长边, $\tilde{P}(s_i, t_i)$ 指对应于参数 (s_i, t_i) 的原始坐标点。 N_u 为 u 向矩形条包含的参数点的个数, v 向同理去求。如果矩形条中不包含一个参数点, 则设它的相对误差为一个很大的常数(比如1000)。

2: 分别给定 u 向和 v 向的新增节点总数, 然后开始分配节点线的个数。按照上述相对误差的大小顺序依次给每个矩形条分配一根节点线, 若一次分配完毕后还有剩余再依照前面的方法分配节点线直到最终将新增节点的个数分配完毕为止。注意: 如果相对误差为一个很大的常数, 则不分配节点线。

3: 设置新增节点线的位置。第二步结束后, 如果矩形条中分配了新增节点线的个数, 则我们就要对其求解新增节点的位置。具体方法是如果只分配了一根节点线, 则新增节点的位置为矩形条中包含的参数点的 u 坐标或者 v 坐标的加权值, 权重为该参数点的误差。如果不止一条, 则第一条仍然按照前面的方法添加, 将剩余的节点线平均添加到最大误差点相对于新增的第一根节点线的同侧。

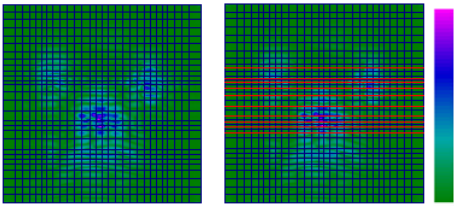
4: 微调新增节点线的位置。第三步结束后, 新增节点线已经分配完毕。我们可以在提前预览节点线的位置情况。但是有时候会出现有的矩形条比较宽, 新增的节点线离最大误差处比较远。此时我们可以选择微调节点线的位置, 使之靠近最大误差点。如果这种情况没有出现或者选择不微调, 也是可行的, 最终的效果基本上差不多。微调的方法后面叙述。

5: 对新增的节点线进行删减。方法是如果新增节点线的位置与已知节点线的位置距离过近, 比如低于 $\frac{1}{\sqrt{N}}$, N 为输入曲面的顶点数, 则删除该节点线。然后再按照初始节点线的修正方法第2条检验新增节点线, 删除可能引起系数矩阵奇异的节点线。

下面我们来叙述微调新增节点线的方法:

微调节点线的办法和前面根据弯曲度设置节点的方法类似, 只不过是弯曲度换成了误差。同样求解目标函数(3), 然后得到了优化后的节点线, 这样新增节点线与原有的节点线的位置都会发生改变。但是这里我们只取新增节点线的位置, 而原有的节点线的位置保持不变。图4中, 左边是第一次拟合完毕后曲面的误差显示, 其中颜色越接近深红色误差越大, 越接近绿色误差越小, 而且我们可以看出误差分布呈现扁平状, 即偏 v 向, 因此我们在第一次拟合完成后新增了10条 v 节点线, 如图所示, 蓝色节点线为原来的节点线, 红色节点线为新增的节点线。可以看到新增的节点线在误差大的地方比较密集, 在误差小的地方比较稀疏。

算法迭代执行, 每次迭代中, 之前迭代得到的节点线固定不动, 直到拟合误差小于给定的值或者迭代次数达到指定的值。



(a) 第一次拟合完后的 (b) 新增的节点线及其原有误差及节点分布

图 4 新增节点线前后的分布比较

5 实验结果

本文将算法应用在多个网格曲面数据中，以此检验算法对离散数据的拟合能力。本文的算法是用C++语言实现，另外还调用了多种工具来辅助进行程序的设计，其中Graphite^[19]被用来求解离散点的曲率，ANN^[20]库被用来求解参数域上某个点的近似最近邻，Openmesh^[21]库、CGAL^[22]库等被用来实现三角网格的读入读出和相关操作,Eigen^[13]被用来求解线性方程组，Qt 被用来设计程序的界面。实验平台是配置Intel i5 2.30GHz处理器和4GB内存、64 位操作系统的笔记本电脑。每次新增节点线的个数由用户指定，实际上在实践中我们发现对于拟合后的曲面，比较大的误差总聚集在某几个区域，而这些区域可能会跨越附近的若干个u向矩形条和v向矩形条，这时我们统计聚集区域跨越u向矩形条和v向矩形条的个数，以此作为新增节点线的个数。如果误差区域的分布偏向u向或者v向，可以只统计聚集区域跨越u向矩形条或者v向矩形条的个数，下一次节点线的添加可以选择只添加u向或者v向节点线；如果聚集区域不明显，我们指定u向和v向的新增节点线个数分别为5个，当然这是个经验值，可以通过不断的实验获得比较好的数值。上述的选择将会使新增的节点线一般会加在误差大的地方，并且最终导致同样的控制顶点个数我们的拟合效果将会超过其它的一些方法。规定当拟合的均方根误差(相对于输入网格曲面的最小包围盒的最长边)小于0.1%或者迭代次数达到10时时，算法结束。如表5-1 为本算法用3×3次非均匀B 样条曲面拟合人脸模型、Moai 模型、螺丝刀手柄模型以及

耳朵模型的效果。

表 5-1 实验模型及其结果

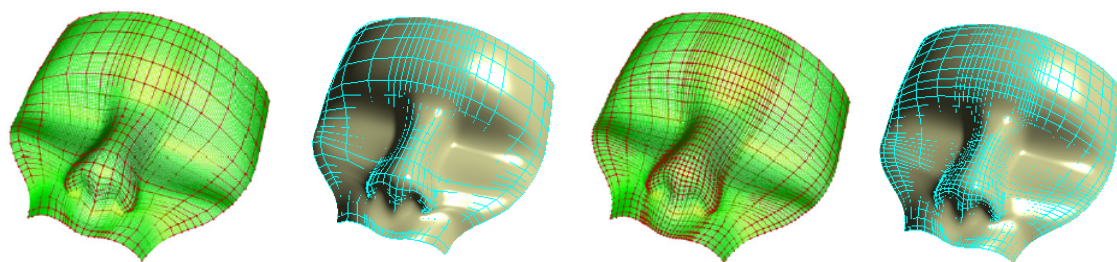
模型	拟合曲面	拟合曲面 对应的控制 网格	拟合误差 的颜色表 示
人脸(51 × 36个控制 顶点)			
Moai(49 × 41个控制 顶点)			
螺丝刀手 柄(15 × 25个控制 顶点)			
耳朵(28 × 21个控制 顶点)			

6 与其他算法的比较

首先我们将本文结果与文献^[6]做对比，如图5,从最终的效果上看，达到同样的精度我们的方法用了更少的控制顶点。接着我们将本文方法与文献^[11]的方法做对比，对比结果见表6-2,文献^[11]的方法与我们的方法很类似，但是从效果上看，我们的方法更具有优势。

7 结论

本文方法基于被拟合曲面的几何特征(这里是弯曲度)和迭代过程中的拟合误差，自适应地添加节点，而且u,v向添加节点是互相独立的，这样就



(a) 23×22 个控制点,精度为 10^{-3} (b) 21×24 个控制点,精度为 10^{-3} (c) 37×35 个控制点,精度为 10^{-4} (d) 33×34 个控制点,精度为 10^{-4}

图5 本文方法与文献^[6]方法关于mask-shaped point data的拟合效果的对比图,其中(a,c)为文献^[6]的方法,(b,d)为我们的方法,精度取最大误差

表 6-2 算法拟合数据统计

模型	顶点数	控制顶点数		均分根误差/%		最大误差/%		迭代次数	
		文献 ^[11]	Ours	文献 ^[11]	Ours	文献 ^[11]	Ours	文献 ^[11]	Ours
人脸	42342	41×46	51×36	0.06	0.04	0.40	0.33	5	2
Moai	81549	42×57	49×41	0.05	0.04	0.40	0.24	6	8
螺丝刀柄	57097	18×21	15×25	0.10	0.08	0.66	0.40	3	2
耳朵	15134	39×33	28×21	0.08	0.08	0.61	0.46	4	3

为B样条曲面拟合提供了一种可供选择的节点设置方法。

致谢

本项研究获得国家自然科学基金(61170324)的支持。

参考文献

- [1] Piegl L and Tiller W. The NURBS book[M]. Springer, Heidelberg, 2 edition, 1997.
- [2] Carr J C, Beatson R K, Cherrie J B, et al. Reconstruction and representation of 3d objects with radial basis functions [C]. In Proceedings of the 28th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques, pages 67–76, New York, 2001. ACM Press.
- [3] Zheng J M, Wang Y M, and Seah H S. Adaptive t-spline surface fitting to z-map models [C]. In Proceedings of the 3rd International Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques in Australasia and South East Asia, pages 405–411, New York, 2005. ACM Press.
- [4] Wang J, Yang Z W, Jin L B, et al. Parallel and adaptive surface reconstruction based on implicit pht-splines [J]. Computer Aided Geometric Design, 28(8):463–474, 2011.

由于本文算法添加 u,v 节点线的灵活性和自由性,使得在拟合几何特征明显的曲面上具有很大的优势,我们的方法不仅可以处理非格子点数据,而且与同类方法相比,对于同样的控制点,本文方法精度更高,且精度还可以不断提高,对于一些输入曲面,最大误差可以提高到0.1%,而这样的精度已经满足了工业标准。除此以外,本文的结果也可以作为求解节点线、参数化和控制顶点未知的全局最优问题的初始解,将有利于算法的收敛。

不过需要指出的是,对于几何信息较少或者特征分布比较均匀的曲面,本文的方法不具有明显的优势,而且本文的算法依赖于众多的现有算法,而这些算法不一定是最优的,这在一定程度上也影响了本算法的精度和使用。

- [5] 施法中. 计算机辅助几何设计与非均匀有理B样条[M]. 高等教育出版社, 北京, 2013.
- [6] Hyungjun Park. B-spline surface fitting based on adaptive knot placement using dominant columns[J]. *Computer-Aided Design*, 43:258–264, 2011.
- [7] Yoshimot F, Moriyama M, and Harada T. Automatic knot placement by a genetic algorithm for data fitting with a spline[C]. In *Proceedings of the International Conference on Shape Modeling and Applications*, pages 162–169, Los Alamitos, 1999. IEEE Computer Society Press.
- [8] Sarfraz M and Raza S A. Capturing outline of fonts using genetic algorithm and splines [C]. In *Proceedings of the 5th International Conference on Information Visualisation*, pages 738–743, Los Alamitos, 2001. IEEE Computer Society Press.
- [9] Ma W Y and Kruth J P. Parameterization of randomly measured points for least squares fitting of b-spline curves and surfaces [J]. *Computer-Aided Design*, 27(9):663–675, 1995.
- [10] Floater M S. Parametrization and smooth approximation of surface triangulations [J]. *Computer Aided Geometric Design*, 14(3):231–250, 1997.
- [11] Juan Cao, Yongsheng Ouyang, et al. Adaptive knot placement in non-uniform b-spline surface fitting[J]. *Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics*, 27(1):60–67, 2015.
- [12] 王仁宏等. 计算几何教程[M]. 科学出版社, 北京, 2 edition, 2008.
- [13] Gaël Guennebaud, Benoît Jacob, et al. Eigen v3[CP/OL]. <http://eigen.tuxfamily.org>, 2010.
- [14] James W. Demmel 著(王国荣译). 应用数值线性代数[M]. 人民邮电出版社, 北京, 2006.
- [15] Cohen-Steiner D and Morvan J M. Restricted delaunay triangulations and normal cycle[C]. In *Proceedings of the 19th Annual Symposium on Computational Geometry*, pages 312–321, New York, 2003. ACM Press.
- [16] V. Nivoliers and B. Lévy. Approximating functions on a mesh with restricted voronoi diagrams[J]. *Eurographics Symposium on Geometry Processing* 2013, 32(5):2013.
- [17] Zhonggui Chen, Yanyan Xiao, and Juan Cao. Approximation by piecewise polynomials on voronoi tessellation[J]. *Graphical Models*, 76:522–531, 2014.
- [18] de Boor C. *A practical guide to splines*[M]. Springer, New York, 1978.
- [19] Inria, C. Forgy, et al. Graphite 2.0 alpha 6[CP/OL]. <http://alice.loria.fr/index.php/software/3-platform/22-graphite.html>, 2014.
- [20] David M. Mount and Sunil Arya. Ann v1.1.2[CP/OL]. <http://www.cs.umd.edu/mount/ANN/>, 2010.
- [21] M. Botsch S, Steinberg S, Bischoff L, and Kobbelt and others. Openmesh v3.3[CP/OL]. <http://www.openmesh.org/>, 2002.
- [22] A. Fabri. Cgal-the computational geometry algorithm library[C]. In *Proceedings of 10th International Meshing Roundtable*, pages 137–142, 2001.
- [23] Xie W C, Zou X F, Yang J D, et al. Iteration and optimization scheme for the reconstruction of 3d surfaces based on non-uniform rational b-splines[J]. *Computer-Aided Design*, 44(11):1127–1140, 2012.
- [24] Gálvez A, Iglesias A, and Puig-Pey J. Iterative two-step geneticalgorithm- based method for efficient polynomial b-spline surface reconstruction[J]. *Information Sciences*, 182(1):56–76, 2012.
- [25] Wenni Zheng, Pengbo Bo, Yang Liu, and Wenping Wang. Fast b-spline curve fitting by l-bfgs[J]. *Computer Aided Geometric Design*, 29:448–462, 2012.
- [26] 汪嘉业等. 计算几何及应用[M]. 科学出版社, 北京, 2011.