



**UNIVERSITÉ
DE GENÈVE**

UNIVERSITY OF GENEVA

DEPARTMENT OF SCIENCE

BACHELOR'S DEGREE IN COMPUTER SCIENCE

~ ~ ~

ANNÉE ACADÉMIQUE 2023–2024

Analyse de la Symétrie dans un Réseau Non-Local: Une Approche par Programmation Linéaire

Superviseur

Prof. Brunner NICOLAS
Prof. Bastien CHOPARD
Dr. Pozas-Kerstjens ALEJANDRO

Etudiant

Christian WILLIAM

DATE DE RENDU: Juin 2024

Contents

1	Préface	2
2	Prémisse	3
2.1	Introduction	3
2.2	Une expérience de Bell	3
2.2.1	Modèle local \mathcal{L}	4
2.2.2	Espace Quantique \mathcal{Q}	5
2.2.3	Espace Non-Signalement \mathcal{NS}	5
2.2.4	Hiérarchie des Espaces de Corrélations	6
2.2.5	Rôle des Inégalités de Bell dans la Hiérarchie	7
2.2.6	Inégalité de CHSH	8
2.3	Programmation Linéaire	9
2.3.1	Qu'est ce que la Programmation Linéaire ?	9
2.3.2	\mathcal{LP} avec Modèle Locaux	10
2.3.3	\mathcal{LP} avec Non-Signalement	12
3	Sujets et Problématique	15
3.1	Sujets	15
3.2	Problématique	16
4	State of Art	18
4.1	Expériences de Bell et généralisations :	18
4.2	Analyse des Corrélations par Inflation	20
4.3	Les Distributions GHZ et W	24
4.4	Résultats actuels et Perspectives	26
5	Modèle de Solution	28
5.1	Inflation Seule	28
5.2	Inflation Multiple	35
5.3	Faisabilité	37
5.3.1	Distributions bruité spécifique	37
5.3.2	Famille de Distributions	37
6	Implémentation	40
6.1	Structure des Données	40
6.2	Symétrie sous Permutation Cyclique	41
6.3	Contraintes d'Indépendance Généralisées	41
6.4	Génération Dynamique de Contraintes	43
7	Évaluation	48
7.1	Résultats	48
7.1.1	Analyse du Bruit	48
7.1.2	Résultats Principaux	53
8	Conclusion	59

Chapter 1

Préface

Dans le domaine en pleine expansion de la cryptographie et des communications quantiques, l'authentification indépendante des dispositifs et la certification de l'intégrité du système sont cruciales, particulièrement pour la validation de phénomènes non classiques. Initialement axée sur une analyse minimale des distributions observées, cette approche a évolué pour inclure des caractéristiques avancées telles que la résistance aux menaces post-quantiques et l'organisation en réseaux.

Ce travail explore l'application de ces techniques de certification à des systèmes structurés en réseaux triangulaires, avec une symétrie tant dans les sources que dans les dispositifs de mesure. Nous examinons si des distributions observées peuvent être générées dans un réseau spécifique, tout en respectant les contraintes minimales de non-signallement, d'indépendance des sources, et de symétrie sous permutation cyclique des parties. Cette recherche vise à approfondir notre compréhension des interactions quantiques dans des configurations de réseaux complexes et à renforcer la sécurité des communications dans les environnements quantiques et post-quantiques.

Chapter 2

Prémisse

2.1 Introduction

La théorie quantique, avec ses résultats contre-intuitifs et ses implications profondes, continue de défier notre compréhension traditionnelle de la physique. Parmi les concepts les plus fascinants figurent les inégalités de Bell, qui mettent en évidence les limites de la mécanique classique pour expliquer les phénomènes observés lors d'expériences quantiques spécifiques. Ces inégalités formulées pour la première fois par John Bell en 1964 [1], révèlent que dans certains cas, les résultats expérimentaux ne peuvent être expliqués que par des théories non-locales. La non-localité quantique ne suggère pas une influence instantanée à distance dans le sens traditionnel où un signal ou une force se propagerait plus rapidement que la lumière, ce qui violerait la relativité restreinte. Elle indique plutôt que l'état de deux particules peut être corrélé de manière que le résultat de la mesure sur une particule semble instantanément influencer l'état de l'autre, peu importe la distance les séparant. Cette interdépendance n'implique pas une transmission d'information permettant une communication ou une interaction plus rapide que la lumière, mais reflète plutôt des corrélations quantiques intrinsèques lesquelles peuvent être exploitées dans différent champ de recherche émergents telles que la communication et le calcul quantiques.

Pour garantir une compréhension approfondie de notre étude, il est crucial de clarifier certains concepts essentiels utilisés dans les expériences de Bell. Cette clarification est indispensable pour faciliter la compréhension des sections suivantes de notre travail.

2.2 Une expérience de Bell

Dans une expérience de Bell standard, nous envisageons deux systèmes qui peuvent avoir été en interaction par le passé, comme être issus d'une source commune, qui sont par la suite séparés spatialement. Ces systèmes sont alors sujets à des mesures effectuées par deux observateurs distants, souvent dénommés Alice et Bob. Alice choisit une mesure parmi plusieurs possibles, notée x , et Bob en fait de même, avec le choix noté y . Les résultats de ces mesures, notés a et b respectivement, peuvent varier d'une exécution de l'expérience à l'autre, même lorsque les mêmes paramètres de mesure sont sélectionnés.

Ces variations suggèrent que les résultats des mesures sont régis par une distribution de probabilité $p(ab|xy)$, qui dépend de l'expérience spécifique effectuée.

Rappelons que dans le cas où deux systèmes sont séparés et n'ont aucune interaction entre eux, leurs mesures respectives devraient être statistiquement indépendantes, ce qui serait exprimées mathématiquement par $p(ab|xy) = p(a|x)p(b|y)$.

Cependant, ce que l'on trouve dans les expériences de Bell avec des particules quantiques est différent: les résultats des mesures sont corrélés d'une manière qui ne peut pas être expliquée par la mécanique classique.

2.2.1 Modèle local \mathcal{L}

Dans les expériences de Bell, qui explorent les principes de base de la mécanique quantique, le concept de **localité** est crucial. Ce principe se fonde sur la causalité et l'indépendance spatiale, faisant écho aux principes fondamentaux de la mécanique classique. Selon cette hypothèse, les résultats obtenus par des observateurs distants (par exemple, Alice et Bob) ne devraient dépendre que de variables locales ou de facteurs cachés (notés λ) qui sont pré-établis par leur interaction passée commune et non par une action à distance instantanée.

Formellement, dans une théorie locale, la probabilité conjointe des résultats observés peut être décrite par la relation suivante:

$$p(ab|xy, \lambda) = p(a|x, \lambda)p(b|y, \lambda) \quad (2.1)$$

où $p(a|x, \lambda)$ et $p(b|y, \lambda)$ représentent les probabilités d'obtenir les résultats a et b en fonction des choix de mesures x et y , respectivement, conditionnés par l'état λ . Cette factorisation montre que les résultats chez Alice et Bob sont indépendants l'un de l'autre une fois le facteur λ connu, respectant l'idée de localité.

Cette variable λ n'est pas forcément constante pour toutes les itérations de l'expérience, même si la procédure de préparation des particules est maintenue fixe. La raison en est que λ peut comprendre des quantités physiques qui échappent à notre contrôle total. Par conséquent, il est essentiel de caractériser les différentes valeurs de λ sur l'ensemble des runs expérimentaux par une distribution de probabilité, notée $q(\lambda)$.

En tenant compte de la condition de factorabilité qui exprime l'indépendance des mesures d'Alice et de Bob après avoir pris en compte les variables cachées λ , nous pouvons reformuler la probabilité conjointe des résultats de mesure comme suit :

$$p(ab|xy) = \int_{\Lambda} d\lambda q(\lambda) p(a|x, \lambda) p(b|y, \lambda) \quad (2.2)$$

où:

- $p(a|x, \lambda)$ et $p(b|y, \lambda)$ représentent les probabilités de détecter les résultats a et b , en fonction des choix de mesures x et y , respectivement, conditionnées par l'état λ .
- $\int_{\Lambda} d\lambda q(\lambda)$ sert à moyenner sur toutes les valeurs possibles de λ , reflétant ainsi l'effet de toutes les configurations possibles des facteurs cachés.

Cette factorisation montre que les résultats chez Alice et Bob sont indépendants l'un de l'autre une fois le facteur λ connu. Ceci respecte l'idée de localité en ne permettant pas une influence directe des mesures de l'un sur les résultats de l'autre, conformément aux principes de la relativité, qui interdit toute influence plus rapide que la lumière.

Ainsi, nous dirons qu'un phénomène qui ne peut être expliqué par une théorie locale ou par des variables cachées sera qualifié de non-local, indiquant une violation des principes de la mécanique classique.

2.2.2 Espace Quantique \mathcal{Q}

L'espace quantique \mathcal{Q} fait référence à l'ensemble des corrélations qui sont en accord avec les prédictions de la mécanique quantique. Ces corrélations peuvent excéder celles permises par les théories locales, signifiant qu'elles peuvent violer les inégalités de Bell, confirmant ainsi l'incompatibilité de ces théories locales avec celle de la mécanique quantique. Nous définirons les inégalités de Bell dans la section (2.2.5).

Cela ne contredit pas les fondements de la relativité restreinte car même si les corrélations quantiques sont non locales, elles ne permettent pas la transmission d'information à une vitesse supérieure à celle de la lumière, préservant ainsi le principe de causalité.

L'ensemble de ces corrélations est décrit par [2]:

$$p(ab|xy) = \text{tr}(\rho_{AB} M_{a|x} \otimes M_{b|y})$$

où chaque composant a une signification précise dans le cadre de la mécanique quantique :

- ρ_{AB} : Il s'agit de l'état quantique du système composé, situé dans l'espace de Hilbert conjoint $H_A \otimes H_B$. Cet état représente l'ensemble des informations sur le système avant que les mesures ne soient effectuées, encapsulant toutes les corrélations possibles entre les sous-systèmes représentés par Alice et Bob.
- $M_{a|x}$: Ces opérateurs représentent les éléments de mesure (ou mesures à valeurs d'opérateur positives, POVM) que Alice peut effectuer, indexés par x pour la configuration de mesure spécifique et a pour le résultat de cette mesure. Ces opérateurs sont positifs ($M_{a|x} \geq 0$) et la somme de ces opérateurs pour tous les résultats possibles a sous une configuration fixe x doit être l'opérateur identité ($\sum_a M_{a|x} = 1$), assurant que les probabilités de tous les résultats possibles s'additionnent à 1.
- $M_{b|y}$: De manière similaire, $M_{b|y}$ sont les opérateurs de mesure pour Bob, indexés par y pour la configuration de mesure et b pour les résultats. Ils suivent les mêmes règles que ceux d'Alice, garantissant que chaque action de mesure est bien définie et conforme aux règles de la mécanique quantique.

Les états intriqués et le théorème du non-clonage sont deux exemples de phénomènes qui peuvent être décrits dans l'espace quantique. Les états intriqués illustrent comment des particules, dont les propriétés ne sont pas définies avant d'être mesurées, peuvent être profondément corrélées. Ces états manifestent des effets non locaux où une action sur une particule peut instantanément influencer une autre, indépendamment de la distance. Cela ne signifie pas une transmission d'information d'un système à un autre, mais plutôt que toute action sur une partie du système a une répercussion sur l'ensemble du système global. Parallèlement, le théorème du non-clonage établit qu'il est impossible de copier parfaitement un état quantique inconnu, soulignant ainsi les limites uniques de la manipulation de l'information quantique.

2.2.3 Espace Non-Signalement \mathcal{NS}

Nous abordons ensuite l'espace de non-signalement \mathcal{NS} , lequel englobe toutes les corrélations respectant le principe de non-signalement. Ce principe crucial stipule qu'aucune information ne

peut être transmise instantanément, ni à une vitesse supérieure à celle de la lumière, entre les observateurs. Dans le cadre d'une expérience de Bell, où chaque partie effectue des mesures locales sur une ressource physique distribuée par une source commune, ce principe est fondamental. Il garantit que le choix de mesure d'un participant (l'entrée) ne peut influencer les statistiques de mesure observées par les autres (leurs sorties). Cette garantie est essentielle car elle assure que les résultats des mesures sont uniquement le produit des propriétés intrinsèques des systèmes quantiques eux-mêmes, et non le résultat d'une communication ou d'une influence cachée plus rapide que la lumière.

En d'autres termes, cela implique que la distribution de probabilité marginale pour chaque partie doit rester indépendante des entrées des autres parties. Ces exigences, connues sous le nom de conditions de non-signallement, sont les contraintes minimales que les corrélations doivent respecter pour être compatibles avec la théorie de la relativité.

Les corrélations observées entre les particules intriquées doivent donc être expliquées par des phénomènes inhérents à l'intrication elle-même, et non par des transmissions d'informations qui violeraient les lois de la relativité. Ainsi, \mathcal{NS} inclut non seulement les corrélations quantiques mais aussi des corrélations théoriques non réalisables actuellement, comme celles proposées par les boîtes PR (Popescu-Rohrlich)[3]. Ces corrélations hypothétiques, qui violeraient les inégalités de Bell à un degré plus élevé que les corrélations quantiques, respectent néanmoins le principe de non-signallement. Elles sont exploitées pour sonder les frontières théoriques des théories physiques au-delà de la mécanique quantique conventionnelle.

2.2.4 Hiérarchie des Espaces de Corrélations

Dans l'étude des corrélations physiques, nous distinguons plusieurs ensembles hiérarchiques basés sur les lois fondamentales de la physique. À la base, l'ensemble local \mathcal{L} représente les théories de variables cachées locales. Ces théories avancent que toutes les corrélations entre particules sont prédéterminées par des états inobservables, agissant de manière déterministe. Montant dans la hiérarchie, l'espace quantique \mathcal{Q} permet des corrélations non locales, tout en respectant la vitesse de la lumière comme limite pour la transmission d'information, tout en étant conforme aux prédictions de la mécanique quantique. Au sommet de la hiérarchie, l'espace des corrélations de non-signallement, \mathcal{NS} , englobe \mathcal{Q} et représente l'ensemble le plus vaste. Il inclut les types de corrélations les plus généraux qui sont possibles sans impliquer de transmission d'information à une vitesse supraluminique.

Ces ensembles sont visualisables à travers une structure d'inclusion stricte, illustrée à la page suivante. Cette structure souligne la manière dont chaque ensemble est contenu dans l'ensemble suivant de manière stricte:

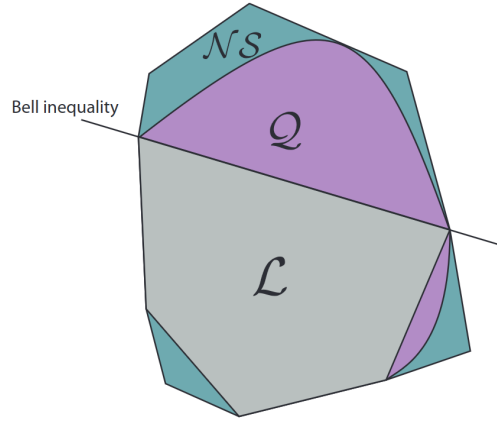


Figure 2.1: Nous avons identifiés nos différents ensembles cités. Il est important de souligner l'existence d'une inclusion stricte entre ces ensembles: $\mathcal{L} \subset \mathcal{Q} \subset \mathcal{NS}$.

2.2.5 Rôle des Inégalités de Bell dans la Hiérarchie

Les inégalités de Bell, initialement développées pour tester l'existence de variables cachées locales en accord avec les principes de la mécanique classique, permettent de distinguer les corrélations explicables par des modèles locaux de celles qui ne le sont pas. Lorsqu'une expérience montre une violation des inégalités de Bell, cela signifie que les corrélations observées ne peuvent pas être expliquées uniquement par des interactions locales et nécessitent une description quantique, plaçant ainsi ces corrélations dans l'ensemble \mathcal{Q} ou même au-delà, dans \mathcal{NS} .

Aujourd'hui, l'utilisation des inégalités de Bell s'étend au-delà de la simple évaluation des modèles classiques. Elles sont aussi employées pour explorer les limites de la mécanique quantique et examiner des corrélations complexes provenant de théories post-quantique ou de configuration de réseau spécifique.

Ces inégalités sont donc un critère essentiel pour différencier les modèles locaux, quantiques et ceux de non-signallement. Elles offrent un moyen empirique et robuste de vérifier si un système obéit aux lois de la mécanique classique ou s'il présente des propriétés non locales, caractéristiques de la mécanique quantique. Cette capacité de distinction est cruciale pour explorer les interfaces entre la physique classique et quantique, stimulant ainsi le développement de nouvelles technologies.

La figure (2.1) illustre comment, en fonction de l'inégalité de Bell utilisée, il est possible de définir précisément les frontières entre les catégories de corrélations. Ce processus permet de révéler les corrélations qui dépassent les limites théoriques établies, favorisant une meilleure compréhension et utilisation des phénomènes quantiques dans les systèmes exploitant pleinement des propriétés non locales.

De plus, les inégalités de Bell sont particulièrement puissantes car elles ne nécessitent que de très peu de connaissances spécifiques sur le dispositif expérimental utilisé. La seule connaissance de la distribution des entrées et des sorties suffit pour leur application, sans besoin de détails sur l'état quantique, la nature du système physique impliqué ou les mesures effectuées. Cette approche, basée uniquement sur les statistiques expérimentales, rend ces inégalités universelles

et essentielles pour délimiter les frontières entre la physique classique et quantique, offrant ainsi d'importantes perspectives pour l'informatique et la cryptographie quantique.

2.2.6 Inégalité de CHSH

Après avoir examiné les inégalités de Bell et leur rôle, il est pertinent d'introduire l'inégalité de CHSH, une spécification de Bell pour deux parties. Nous utiliserons cette inégalité pour illustrer les limites des différentes corrélations à travers nos programmes.

L'inégalité de CHSH (Clauser, Horne, Shimony et Holt) [4], est un exemple des inégalités de Bell, conçue pour étudier les corrélations non locales dans des systèmes impliquant deux observateurs, Alice et Bob. Dans ce scénario, Alice et Bob choisissent chacun parmi deux paramètres de mesure, $x \in \{0, 1\}$ et $y \in \{0, 1\}$ respectivement. Chaque mesure peut donner deux résultats possibles, $a \in \{0, 1\}$ pour Alice et $b \in \{0, 1\}$ pour Bob. Ces résultats sont utilisés pour calculer une valeur statistique qui, dans un contexte de mécanique classique locale, doit respecter des bornes précises, mais peut les dépasser en présence de non-localité quantique.

La forme mathématique de l'inégalité CHSH est la suivante :

$$E(A_0B_0) + E(A_0B_1) + E(A_1B_0) - E(A_1B_1) \leq S \quad (2.3)$$

où $E(A_iB_j)$ représente l'espérance mathématique du produit des résultats des mesures A_i et B_j , définie par :

$$E(A_iB_j) = \sum_{a,b} (-1)^{a+b} p(a, b | x = i, y = j) \quad (2.4)$$

La valeur maximale que peut prendre S varie selon le cadre théorique :

- Sous les hypothèses de localité et de réalisme (théories locales cachées), notée $S_{\mathcal{L}}$, elle est limitée à 2.
- Dans le cadre de la mécanique quantique, notée $S_{\mathcal{Q}}$, elle peut atteindre jusqu'à $2\sqrt{2}$, signe d'une violation des inégalités de Bell et indicateur de non-localité quantique.
- Enfin, sous l'hypothèse de non-signallement seule, notée $S_{\mathcal{NS}}$, la limite théorique maximale est de 4.

2.3 Programmation Linéaire

Nous utiliserons la Programmation Linéaire \mathcal{LP} pour la suite de notre étude. Une des raisons de cette utilisation est que l'on peut caractériser les ensembles des modèles locaux \mathcal{L} et ceux de Non-Signalement \mathcal{NS} en terme de programme linéaire.

2.3.1 Qu'est ce que la Programmation Linéaire ?

Cette dernière, est une technique d'optimisation mathématique conçue pour trouver le meilleur résultat possible dans un système composé d'équations linéaires et d'inégalités. La théorie générale des programmes linéaires peut être approfondie à travers l'étude de l'ouvrage *Convex Optimization* par Boyd et Vandenberghe [5].

L'objectif principal est d'optimiser une fonction linéaire, souvent avec le but de maximiser ou minimiser une valeur, tout en satisfaisant un ensemble de contraintes linéaires qui délimitent un polyèdre convexe. Dans le cas où ce polyèdre est borné dans toutes ses dimensions, il constitue un polytope. Ce processus d'optimisation d'une fonction sous contraintes garantit que toute solution trouvée sera non seulement optimale, mais aussi réalisable dans les limites définies par les relations linéaires. Ainsi, le problème aboutira soit à une solution optimale répondant à ces contraintes, soit à l'absence de solution réalisable.

Considérons le problème de maximisation sous forme canonique d'un programme linéaire, défini comme suit :

$$\text{Maximiser } c^T x \quad (2.5)$$

$$\text{sous les contraintes } Ax \leq b \quad (2.6)$$

où :

- x représente le vecteur des variables de décision,
- c est le vecteur des coefficients de la fonction objectif,
- A est la matrice des coefficients des contraintes,
- b est le vecteur des termes constants des contraintes,
- Les inégalités $Ax \leq b$ décrivent les limitations ou les ressources disponibles,

Il est important de noter que les problèmes de maximisation peuvent souvent être convertis en problèmes de minimisation par multiplication de la fonction objectif par -1 , et inversement. Ainsi, maximiser ou minimiser sont des opérations interchangeables dans la théorie des programmes linéaires, selon le contexte de l'application.

Fonction Objectif

Au centre de tout problème de programmation linéaire se trouve la fonction objective, c'est-à-dire la fonction linéaire qui sera maximisée ou minimisée. Mathématiquement, cette fonction est souvent exprimée de la manière suivante :

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

où c_1, c_2, \dots, c_n sont les coefficients qui déterminent l'influence de chaque variable de décision x_1, x_2, \dots, x_n sur la valeur de la fonction objective.

Pour une notation plus compacte, on préfère souvent exprimer la notation sous forme matricielle:

$$c^T x = z$$

où c^T représente la transposée du vecteur des coefficients c , et x est le vecteur des variables de décision.

Contraintes

Les contraintes sont des conditions qui doivent être respectées pour qu'une solution soit réalisable. Ces contraintes sont également exprimées sous forme d'équations ou d'inégalités linéaires. Par exemple, si nous avons des contraintes de ressources, elles peuvent être représentées comme suit:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &\leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &\leq b_2, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &\leq b_m. \end{aligned}$$

où a_{ij} représente les coefficients des contraintes et b_i les termes constants, chacun reflétant des limitations ou des exigences spécifiques du problème. On préfère la notation matricielle:

$$Ax \leq b$$

Algorithmes de Résolution

Les problèmes de programmation linéaire sont typiquement résolus en utilisant des méthodes algorithmiques. L'algorithme le plus célèbre et utilisé est la méthode du simplexe, développée par George Dantzig en 1947 [6]. Cette méthode parcourt les sommets d'un polytope dans un espace multidimensionnel à la recherche du sommet optimal.

Une autre approche est la méthode des points intérieurs qui, contrairement au simplexe opère sur la frontière du domaine réalisable, et se déplace à l'intérieur du domaine pour atteindre l'optimum [5].

En somme, la programmation linéaire est extrêmement utile pour prendre des décisions là où de nombreux facteurs doivent être pris en compte et où les ressources sont limitées, afin d'identifier la meilleure solution possible compte tenu des limites imposées.

2.3.2 \mathcal{LP} avec Modèle Locaux

Dans un contexte à variables caché, il est crucial de comprendre que les corrélations locales peuvent être définies en termes de variables cachées locales déterministes. Dans un tel modèle, les fonctions de réponse locales $p(a|x, \lambda)$ et $p(b|y, \lambda)$ prennent uniquement les valeurs 0 ou 1, contrairement au modèle stochastique général où elles peuvent prendre des valeurs comprises entre 0 et 1 [7]. Cela signifie que la variable cachée λ spécifie entièrement le résultat obtenu pour chaque mesure, éliminant ainsi toute la randomité locale présente dans le modèle stochastique.

De plus, on peut simplifier davantage en considérant qu'il n'existe qu'un nombre fini de variables cachées. Puisque chaque variable cachée détermine une assignation des sorties possibles pour chaque entrée, et que le nombre total d'entrées et de sorties est fini, le nombre d'assignations et donc de variables cachées est également fini. Ainsi, toute corrélation local pourrait être exprimée comme une combinaison convexe de ces points déterministes.

Pour reformuler le modèle local défini, nous pouvons définir $\lambda = (a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_m)$ comme une assignation des sorties a_x et b_y pour chacune des entrées $x = 1, \dots, n$ et $y = 1, \dots, m$. Nous utilisons $d_\lambda \in \mathcal{L}$ pour représenter le comportement déterministe correspondant :

$$d_\lambda(ab|xy) = \begin{cases} 1 & \text{si } a = a_x \text{ et } b = b_y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Il existe 2^{n+m} assignations de sortie possibles et donc 2^{n+m} de tels comportements déterministes locaux. Un comportement p sera dit local si et seulement s'il peut être exprimé comme une combinaison convexe de ces points déterministes, c'est-à-dire si

$$p = \sum_{\lambda} q_{\lambda} d_{\lambda}$$

avec $q_{\lambda} \geq 0$ et $\sum_{\lambda} q_{\lambda} = 1$, où chaque q_{λ} correspond à la probabilité au comportement déterministe associé.

Cette formulation est particulièrement utile pour deux raisons. Premièrement, elle fournit un algorithme permettant de déterminer si un comportement donné p est local, en vérifiant sa capacité à être exprimé comme une combinaison linéaire pondérée de comportements déterministes de base. Deuxièmement, cette approche illustre un exemple classique de programmation linéaire où l'on teste l'existence de poids q_{λ} qui respectent les contraintes linéaires spécifiées.

Computing $S_{\mathcal{L}}$

Nous abordons le calcul de la limite de Bell dans le cadre de la localité en utilisant l'inégalité de CHSH avec le modèle précédemment décrit. Chaque observateur, Alice et Bob, peut choisir entre deux paramètres de mesure ($m = n = 2$). Le λ représente un ensemble de paires d'assignations pour les deux observateurs. Chaque paire (a_x, b_y) définit les configurations possibles pour chaque observateur, de sorte que $\lambda = (a_1, a_2; b_1, b_2)$, où a_x et b_y peuvent indépendamment prendre des valeurs dans $\{0, 1\}$. Cela aboutit à 16 comportements déterministes distincts.

Nous modélisons les probabilités conditionnelles des résultats de mesure ab pour les configurations xy en combinant ces comportements déterministes λ , selon l'équation :

$$p(ab|xy) = \sum_{\lambda} q_{\lambda} d_{\lambda}(ab|xy)$$

où q_{λ} est la probabilité associée à la variable cachée λ et $d_{\lambda}(ab|xy)$ correspond à un comportement déterministe spécifique.

Notre objectif est de maximiser la valeur CHSH, définie par :

$$\text{maximiser CHSH}(p(ab|xy))$$

où la valeur CHSH, calculée à partir des probabilités conditionnelles, est :

$$\text{CHSH}(p(ab|xy)) = \text{CHSH} \left(\sum_{\lambda} q_{\lambda} d_{\lambda}(ab|xy) \right) = \sum_{\lambda} q_{\lambda} \text{CHSH}(d_{\lambda}(ab|xy))$$

Cette formule montre que la valeur globale de CHSH est une moyenne pondérée des contributions CHSH de chaque comportement déterministe, pondérée par la probabilité q_λ de chaque configuration.

Cela est rendu possible car, comme il est décrit dans l'équation (2.3) et dans l'expression explicite de chaque espérance (2.4), CHSH est une fonction linéaire des probabilités. En d'autres termes, la valeur de CHSH pour une combinaison de probabilités peut être obtenue en prenant la somme pondérée des valeurs CHSH des comportements déterministes individuels, chaque pondération étant donnée par la probabilité q_λ associée à chaque comportement. Cette propriété de linéarité permet de décomposer la valeur de CHSH en contributions individuelles et de les recomposer pour obtenir la valeur globale.

Pour déterminer le maximum de CHSH sous les conditions de localité, nous utilisons l'algorithme suivant en pseudo-code :

```
CHSH = 0
for i, behavior in enumerate(lambda_behaviors):
    a0, a1, b0, b1 = (2*output - 1 for output in behavior)
    CHSH_contribution = a0*b0 + a0*b1 + a1*b0 - a1*b1
    CHSH += q[i] * CHSH_contribution

return CHSH
```

Les q_λ étant des probabilités, ils doivent respecter $q_\lambda \geq 0$ et $\sum_\lambda q_\lambda = 1$. Ces conditions définissent les limites permettant de trouver la borne maximale de localité, notée $S_{\mathcal{L}}$, qui est de 2.

Le code développé est disponible dans le répertoire `chsh_inequality/bell_Local`.

2.3.3 \mathcal{LP} avec Non-Signalement

Les contraintes de non-signalement assurent que les résultats obtenus par un observateur ne dépendent pas des actions (comme les réglages des appareils de mesure) d'autres observateurs distants. Cela est formulé mathématiquement de telle manière que les distributions de probabilité pour les résultats des mesures d'une partie sont indépendantes des choix de mesures effectuées par d'autres parties.

Pour le formaliser, considérons un scénario avec deux parties, Alice et Bob, où :

- Alice peut choisir entre plusieurs réglages de mesure x et obtenir des résultats a .
- Bob peut choisir entre plusieurs réglages de mesure y et obtenir des résultats b .

La probabilité jointe de leurs résultats est notée $p(ab|xy)$. La contrainte de non-signalement stipule que la probabilité marginale des résultats d'Alice ne doit pas dépendre du choix de mesure de Bob, et vice versa. Mathématiquement, cela se traduit par :

$$\sum_b p(ab|xy) = \sum_b p(ab|xy') \quad \forall a, x, y, y' \quad (2.7)$$

$$\sum_a p(ab|xy) = \sum_a p(ab|x'y) \quad \forall b, y, x, x' \quad (2.8)$$

Étant donné que les contraintes de non-signalement sont exprimées sous forme d'équations linéaires, elles forment un sous-espace affine dans l'espace des probabilités. Cet espace peut donc être exploré efficacement à l'aide de techniques de programmation linéaire.

Computing S_{NS}

Dans le cadre du non-signallement, en tenant compte d'un scénario de Bell, ce principe implique que le choix de mesure pris par l'une des parties n'a aucune répercussion sur les mesures effectuées par les autres parties. Par conséquent, dans le contexte de l'inégalité de CHSH, le choix de mesure binaire effectué par Bob n'affecte pas les résultats observés par Alice, affirmant que l'information ne peut voyager plus vite que la lumière. Cela signifie que la distribution de probabilité marginale des résultats d'Alice doit rester constante, indépendamment du paramètre de mesure sélectionné par Bob. Ce principe de non-signallement est généralisable à un nombre plus grand de parties et à tout sous-ensemble de ces parties.

Afin de démontrer cette propriété de manière concrète, j'ai réalisé une implémentation d'un programme linéaire qui optimise la valeur de l'expression CHSH (2.3). La fonction objective, dérivée de cette formule, est une somme linéaire des probabilités des différents résultats de mesure. Dans notre modèle, les variables de décision sont les probabilités de chaque configuration possible de résultats.

Chaque observateur peut choisir entre deux paramètres de mesure, et peut donner lieu à deux résultats possibles, soit $\{0, 1\}$. Cela conduit à $2 \times 2 = 4$ configurations de mesure pour chaque observateur. Combinant les deux observateurs, nous obtenons un total de $4 \times 4 = 16$ probabilités différentes à optimiser, correspondant à chaque combinaison possible de résultats de mesure entre Alice et Bob.

Ces variables de décision représentent la probabilité de chaque issue possible pour les configurations de mesure choisies. Ce modèle permet de calculer la valeur maximale que peut atteindre l'expression CHSH sous les contraintes de non-signallement, illustrant ainsi les limites des corrélations non-local autorisées par les théories physique.

Les contraintes de non-signallement seront celle utilisé dans notre programme linéaire, garantissent ainsi que les résultats observés par Alice ne dépendent pas du choix de mesure de Bob, et vice versa. Formellement, les contraintes de non-signallement se définissent ainsi dans mon programme:

- Pour que les probabilités observées par Bob ne dépendent pas du réglage de mesure d'Alice:

$$\sum_a p(ab|x=0, y) = \sum_a p(ab|x=1, y), \quad \forall b, y.$$

- Pour que les probabilités observées par Alice ne dépendent pas du réglage de mesure de Bob:

$$\sum_b p(ab|x, y=0) = \sum_b p(ab|x, y=1), \quad \forall a, x.$$

Le code développé est accessible dans le répertoire `chsh_inequality/bell_NSI`.

J'ai ainsi implémenté ce programme linéaire utilisant la bibliothèque CVXPY [8], une boîte à outils pour l'optimisation convexe en Python. Cette bibliothèque permet de formuler et de résoudre des problèmes d'optimisation de manière efficace et intuitive.

J'ai donc utilisée une matrice de probabilité de manière à ce que les colonnes représentent les résultats possibles, et les lignes correspondent aux configurations de mesure possibles (A1B1, A1B2, A2B1, A2B2). Chaque élément de la matrice, noté $P[a, b|x, y]$, représente la probabilité d'obtenir le résultat a pour Alice et b pour Bob, donnés les réglages de mesure x et y .

La fonction objectif de notre programme, qui se base sur l'expression de l'inégalité CHSH présentée dans l'équation (2.3), sera maximisée en tenant compte des contraintes spécifiées.

Les contraintes de non-signallement sont exprimées comme suit dans des boucles imbriquées, garantissant que les distributions marginales de chaque observateur sont uniformes, quel que soit le choix de mesure de l'autre :

```
for i in range(2):
    for j in range(2):
        constraints += [cp.sum(P[i*2+j, :2]) == cp.sum(P[i*2+j, 2:]),
                        cp.sum(P[i+j*2, ::2]) == cp.sum(P[i+j*2, 1::2])]
```

De cette manière, le résultat obtenu pour la valeur maximale de CHSH, respectant les contraintes de non-signallement, est $S_{NS} = 4$, avec la matrice de probabilités P , permettant d'atteindre cette valeur, donné par:

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.5 \\ 0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.5 \\ 0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.5 \\ 0.0 & 0.5 & 0.5 & 0.0 \end{bmatrix}$$

Chapter 3

Sujets et Problématique

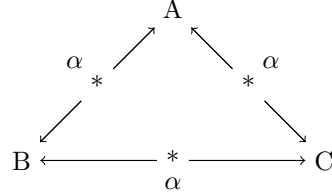
3.1 Sujets

Dans le cadre de mon projet de fin d'études, nous avons exploré les généralisations des expériences de Bell, traditionnellement limitées à deux participants, vers des configurations plus complexes impliquant plusieurs entités. Notre étude s'est concentrée sur un réseau composé de trois observateurs — Alice, Bob et Charlie — arrangés en configuration triangulaire, connu sous le nom de 'réseau en triangle'. Cette configuration particulière se caractérise par la présence de sources bipartites indépendantes reliant chaque paire d'observateurs, sans qu'aucune information tripartite commune ne soit partagée entre eux. Chaque observateur fournit une sortie (a , b et c , respectivement) basée sur les ressources reçues, sans recevoir d'entrée préalable, contrairement aux tests de non-localité de Bell habituels. La statistique de l'expérience est ainsi définie par la distribution de probabilité conjointe $p(a, b, c)$.

Cette structure nous a permis d'adopter une nouvelle perspective sur les corrélations quantiques. Nous avons étudié les limitations des corrélations possibles entre ces entités en nous basant sur les principes de non-signallement et d'indépendance des sources. Notre étude s'est particulièrement concentrée sur un scénario où toutes les sources sont identiques et où la permutation cyclique des parties résulte en des résultats de mesures invariants. Cette symétrie introduit des contraintes supplémentaires qui influencent les corrélations observables dans le réseau.

3.2 Problématique

Dans une configuration où la structure du réseau est symétrique sous permutations cycliques, c'est-à-dire lorsque les sources et moyen de mesure sont identiques, c'est-à-dire:



il est alors logique de s'attendre à ce que les résultats des mesures soient également symétriques sous ces mêmes propriétés, étant donné que tous obtiennent la même source et le même choix de mesure, donnant ainsi la probabilité $p(a, b, c) = p(b, c, a) = p(c, a, b)$.

L'interrogation principale de notre étude sera de déterminer dans le cas du chemin inverse, si une distribution symétrique des résultats est nécessairement indicative d'une structure de réseau symétrique.

Nous constaterons que ce n'est pas le cas. Par le biais d'une méthode connue sous le nom d'inflation [9], nous démontrons l'existence de distributions de probabilité spécifiques qui peuvent être générées au sein d'un réseau triangulaire utilisant des sources classiques. Ces distributions, bien qu'elles soient symétriques suite à la permutation des parties, ne peuvent pas être reproduites en utilisant des ressources post-quantiques si toutes les sources et tous les moyens de mesure sont identiques. Cela suggère que la symétrie observée dans les distributions de résultats ne reflète pas nécessairement une structure symétrique de ce que nous appelons indifféremment un réseau ou un modèle.

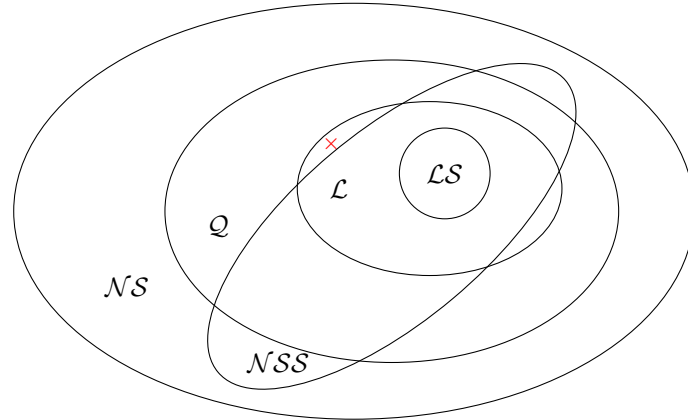


Figure 3.1: Nous identifions divers ensembles de modèles (pas les distributions): \mathcal{LS} représente les modèles Locaux Symétriques, \mathcal{L} désigne les modèles Locaux, \mathcal{Q} englobe les modèles Quantiques, \mathcal{NS} inclut les modèles qui adhèrent aux principes de Non-Signalement, et \mathcal{NSS} correspond aux modèles qui suivent les principes de Non-Signalement tout en étant symétriques. La croix rouge symbolisant qu'une distribution symétrique pouvant être générée par un modèle local asymétrique, ne peut pas l'être par n'importe quel type de modèle symétrique, étant donné qu'elle n'appartient pas à \mathcal{NSS} .

Nous mettons en évidence un point crucial : si nous n'imposons pas de symétrie dans nos modèles, ces distributions symétriques peuvent être facilement générées par des systèmes classiques. Cependant, dès que nous prenons en compte les contraintes de non-signallement et de symétrie du modèle, nous pouvons démontrer que, pour des distributions symétriques, en tenant compte de la symétrie du modèle - c'est-à-dire que nos sources et moyens de mesure sont identiques, que ce soit dans des modèles locaux, quantiques ou selon une hypothétique nouvelle physique - il est certain que ces distributions ne pourront jamais être générées dans un cadre symétrique.

Une question complémentaire de notre étude concernera la détermination du niveau minimal de bruit nécessaire, afin de certifier que ces distributions ne peuvent pas être reproduite dans le réseau triangulaire tout en respectant les contraintes de non-signallement et de symétrie. Nous introduirons un bruit progressif dans nos distributions pour identifier ce seuil minimal. Si le niveau de bruit est inférieur à ce seuil, nous ne pourrons pas conclure à l'infaisabilité; en revanche, un bruit supérieur à ce seuil invalidera la possibilité de réaliser ces distributions sous les contraintes actuelles.

Chapter 4

State of Art

4.1 Expériences de Bell et généralisations :

Les expériences de Bell, initiées dans les années 1960 par John Bell[1], ont profondément influencé notre compréhension de la nature fondamentale de la physique quantique. Elles ont révélé l'existence de corrélations quantiques non-locales entre des systèmes physiques éloignés, défiant ainsi les fondements classiques sur la causalité et la relation entre les phénomènes.

Traditionnellement, ces expériences étaient conçues pour des configurations bipartites, impliquant deux observateurs [7]. L'idée centrale était de tester les prédictions de la mécanique quantique concernant les corrélations entre les mesures effectuées sur ces deux systèmes, en comparant les résultats aux prédictions des théories locales.

Cependant, la recherche en physique quantique a rapidement évolué pour explorer des configurations plus complexes, impliquant plusieurs observateurs ou sous-systèmes. Cela a conduit à la généralisation des expériences de Bell pour inclure des configurations multipartites, telles que le réseau en triangle [10].

L'étude du réseau en triangle et de ses propriétés de corrélation a déjà été abordée dans la littérature scientifique. Des travaux antérieurs ont examiné divers aspects de ce réseau, notamment ses implications pour la non-localité quantique, ses contraintes sous le principe de non-signallement, et ses applications potentielles dans des contextes expérimentaux [10–13].

Ce réseau représente alors une prolongation des expériences de Bell bipartites. Dans cette configuration, trois observateurs, souvent nommés Alice, Bob et Charlie, sont disposés de manière triangulaire. Chaque paire d'observateurs partage une source bipartite indépendante, mais aucun d'entre eux ne reçoit directement d'information de l'autre. Dans ce système, contrairement à une expérience de Bell classique, aucun des observateurs ne reçoit d'entrée préalable. Ainsi, chaque observateur effectue la même mesure. Cette disposition permet d'explorer des corrélations tripartites et de tester de limites dans un autre cadre.

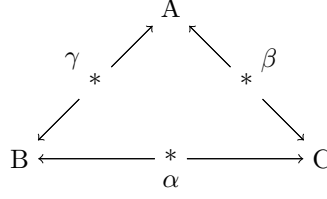


Figure 4.1: Ce diagramme illustre un réseau triangulaire formé de trois observateurs (A, B, C) et de trois sources bipartites indépendantes (* avec les labels α , β , γ). Chaque observateur est connecté à deux sources, créant une configuration où chaque paire d'observateurs partage une source unique, indépendante des autres. Les flèches indiquent la direction de la transmission de l'information, symbolisant la réception par les observateurs.

La distribution des résultats pour le triangle est donnée par $p(a, b, c)$, où a , b , et c sont des valeurs binaires qui représentent respectivement les sorties de chaque observateur, peut être décrite de la manière suivante :

$$p(a, b, c) = \frac{1}{8} \left(1 + (-1)^a E_A + (-1)^b E_B + (-1)^c E_C + (-1)^{a+b} E_{AB} + (-1)^{a+c} E_{AC} + (-1)^{b+c} E_{BC} + (-1)^{a+b+c} E_{ABC} \right) \quad (4.1)$$

Dans cette équation, les termes notés E représentent des valeurs d'espérance. Ainsi, E_A , E_B , et E_C sont les espérances des marginales à une seule partie, E_{AB} , E_{BC} , et E_{AC} celles des marginales à deux parties, et E_{ABC} celle de la corrélation à trois corps.

Symétrie sous permutation cyclique

Dans le cadre qui nous intéresse, lorsque la distribution est symétrique sous permutation cyclique des parties, impliquant $p(a, b, c) = p(b, c, a) = p(c, a, b)$, nous observons que les termes d'espérance sont égaux pour les variables permutées cycliquement. Ainsi :

$$E_A = E_B = E_C \quad \text{et} \quad E_{AB} = E_{AC} = E_{BC}$$

Sous ces conditions, l'expression de la distribution peut être réécrite en mettant en avant ces symétries :

$$p(a, b, c) = \frac{1}{8} \left(1 + E_1 ((-1)^a + (-1)^b + (-1)^c) + E_2 ((-1)^{a+b} + (-1)^{b+c} + (-1)^{a+c}) + E_3 (-1)^{a+b+c} \right) \quad (4.2)$$

où :

- E_1 représente l'espérance commune des marginales à une seule partie, correspondant à E_A , E_B , et E_C .
- E_2 est l'espérance commune des marginales à deux parties, correspondant à E_{AB} , E_{AC} , et E_{BC} .
- E_3 est l'espérance de la corrélation à trois corps, indiquant E_{ABC} .

Cette notation nous sera utile pour caractériser la limite des distributions symétriques non réalisables dans un modèle symétrique pour chaque famille de distributions. Ainsi, nous pourrions vérifier si des distributions locales et symétriques pour trois parties ne sont pas réalisables dans le cadre d'un réseau triangulaire symétrique.

4.2 Analyse des Corrélations par Inflation

Pourquoi l'Inflation ?

Assouplissement

Pour analyser notre réseau configuré en triangle et caractérisé par des complexités non-linéaires, nous avons opté pour le principe d'inflation. Cette méthode consiste à introduire artificiellement des copies des sources et des observateurs pour simplifier le problème initial. En introduisant des sources et des observateurs supplémentaires, nous échangeons la non-linéarité contre de la symétrie. La distribution originale étant constante, les contraintes de symétrie imposées en exigeant que deux composantes aient le même comportement, sont donc linéaires. Nous imposons également des comportements entre le réseau original et le réseau étendu, par conséquent il est cruciale de s'assurer que notre distribution d'origine soit fixe, car la distribution dans le réseau enflé, ici sont nos variables de décisions à résoudre, de ce fait nous devons nous assurer que notre distribution d'origine est fixe, afin que nos contraintes restent linéaire.

Cela nous permet d'éliminer la non-linéarité et de réduire la complexité du problème tout en conservant les caractéristiques du réseau symétrique original. Grâce à cette approche, le problème reformulé satisfait les exigences nécessaires pour l'application de techniques de programmation linéaire.

Pour illustrer la non-linéarité, nous examinerons l'analyse du modèle local triangulaire (voir 4.1), qui peut être défini par le modèle mathématique suivant :

Déterminer les valeurs de q_λ , r_β , et s_γ telles que :

$$\begin{aligned} q_\lambda, r_\beta, s_\gamma &\geq 0, \\ \sum_{\lambda} q_\lambda &= 1, \\ \sum_{\beta} r_\beta &= 1, \\ \sum_{\gamma} s_\gamma &= 1, \\ p(abc \mid xyz) &= \sum_{\lambda, \beta, \gamma} q_\lambda r_\beta s_\gamma d_{\lambda\beta\gamma}(abc \mid xyz). \end{aligned}$$

Pour déterminer les probabilités, nous devons résoudre pour les variables q_λ , r_β , et s_γ , qui sont nos trois inconnues représentant les probabilités associées au différents comportement déterministes selon la source, rendant ainsi le programme non-linéaire.

En examinant ce modèle trilocal simple, nous constatons que même les modèles locaux les plus élémentaires pour trois parties sont non-linéaires. Cela suggère que les modèles plus avancés, tels que ceux obéissant aux principes quantiques ou respectant les contraintes maximales, sont au minimum aussi complexes et non-linéaires. La complexité de ces modèles avancés réside dans le fait qu'ils doivent satisfaire des conditions non-linéaires similaires ou plus strictes. C'est pour cette raison que nous utiliserons l'inflation pour relaxer le problème, le rendant linéaire et facilitant ainsi l'application de techniques de programmation linéaire pour obtenir des solutions plus aisément.

Non-signallement

L'inflation est donc un moyen de transformer un problème complexe en un problème plus simple à résoudre. Cela se fait en ajoutant des copies de sources et des appareils de mesure, puis en les connectant pour former un réseau plus large. Ce principe permet d'inclure, par la même occasion les contraintes de non-signallement et de vérifier leur respect, même dans des configurations complexes où il n'y pas d'input à proprement parler.

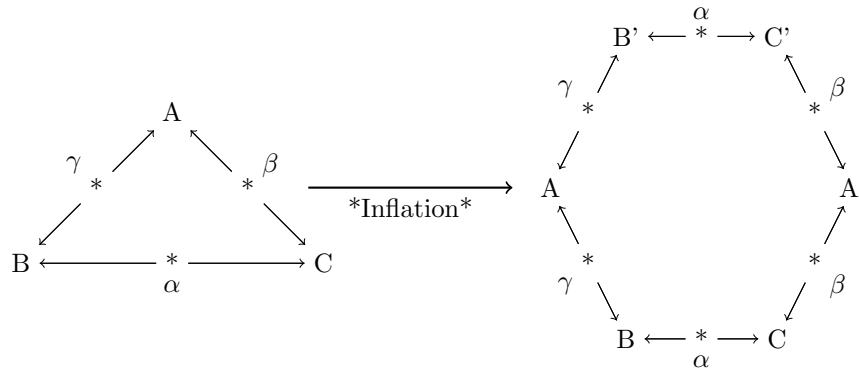


Figure 4.2: Pour obtenir les contraintes de non-signallement dans le réseau triangulaire, nous considérons une inflation vers un réseau hexagonal.

Dans notre cas, un réseau triangulaire, chaque paire d'observateurs (Alice, Bob, et Charlie) est connectée par une source bipartite indépendante. Les observateurs produisent des sorties notées a , b , et c , respectivement, sans recevoir d'inputs. Contrairement aux tests de non-localité de Bell traditionnels, ici il n'y a pas d'inputs, signifiant que les actions des observateurs sont uniquement basées sur les ressources partagées. Comme cité plus tôt, le principe de non-signallement stipule que le choix de mesure pris par l'une des parties n'a aucune répercussion sur les mesures effectuées par les autres parties. Cela garantit que les actions d'un observateur ne peuvent pas influencer instantanément les résultats des autres observateurs qui ne sont pas directement connectés.

Pour analyser et vérifier le respect des contraintes de non-signallement, étant donnée que nous n'avons pas réellement d'input, nous utiliserons le concept d'inflation pour certifier que nous respectons bien le non-signallement. L'idée générale est que, lors d'une inflation, nous étendons le réseau triangulaire en un réseau hexagonal. Cela implique de créer des copies fictives des parties et des sources du réseau original. Par exemple, nous pouvons ajouter des copies supplémentaires d'Alice (A'), de Bob (B'), et de Charlie (C'), tout en ajoutant des sources supplémentaires pour former un réseau hexagonal.

L'objectif de l'inflation est de garantir que, du point de vue de Bob et Charlie, les deux configurations (réseau triangulaire et réseau hexagonal) sont indiscernables. Cela signifie que les distributions marginales et jointes des résultats de Bob et Charlie doivent être identiques dans les deux configurations. Si Bob et Charlie peuvent distinguer entre les configurations uniquement en se basant sur leurs mesures, cela signifie que les statistiques de leurs résultats changent en fonction de la configuration utilisée.

Si les statistiques des résultats de Bob et Charlie diffèrent entre le réseau triangulaire et le réseau hexagonal, cela indique qu'Alice pourrait choisir quelle configuration utiliser pour influencer les résultats de Bob et Charlie. En d'autres termes, Alice pourrait modifier localement la structure du réseau pour changer les statistiques de Bob et Charlie, ce qui constituerait une violation du principe de non-signallement.

En créant un réseau hexagonal et en vérifiant que les distributions $P(b, c)$ dans le réseau triangulaire et $P(b', c')$ dans le réseau hexagonal sont identiques, nous nous assurons que le principe de non-signallement est respecté, c'est pourquoi nous établirons des contraintes de connexion entre le réseau enflé et le réseau original pour garantir cela. Si les distributions sont les mêmes, cela confirme que les actions locales d'Alice ne peuvent pas influencer les résultats de Bob et Charlie. Si une différence est détectée, cela indiquerait une violation du principe de non-signallement, car cela signifierait qu'Alice peut indirectement influencer Bob et Charlie par des modifications locales du réseau.

L'inflation est donc une technique essentielle pour tester et garantir que les réseaux complexes, comme le réseau triangulaire, respectent les contraintes de non-signallement. En créant des configurations indiscernables pour Bob et Charlie, l'inflation permet de s'assurer qu'aucune information ne peut être transmise instantanément par des modifications locales, validant ainsi le principe de non-signallement. Dans ce contexte particulier, où les observateurs ne reçoivent pas d'inputs, l'inflation devient encore plus cruciale pour s'assurer que les corrélations observées respectent les règles de la relativité sans permettre de signallement instantané.

Preuve

Les corrélations observées dans le réseau ainsi gonflé manifestent deux propriétés fondamentales: elles sont symétriques, restant invariantes sous des permutations cycliques appropriées des copies des éléments du réseau de base. De plus, lorsqu'on effectue une marginalisation sur les sources et les dispositifs de mesure, on reproduit ainsi des parties du réseau original, la distribution marginale résultante doit donc être en accord avec le produit des distributions marginales de la distribution originale, signifiant bien le respect des contraintes de non-signallement.

De ce fait, l'utilisation de l'inflation dans notre analyse est d'une double importance : d'une part, elle nous permet d'assouplir les contraintes initiales facilitant de cette manière notre analyse. Mais d'autre part, elle constitue un puissant moyen de preuve par contradiction, car si une distribution dans le cas du réseau en triangle peut être générée, alors toutes les inflations imaginables sont forcément capable de générer une distribution équivalente à celle-ci sous les contraintes du réseaux triangulaire. Ainsi par contraposée, si une distribution de probabilité ne peut pas être générée par une inflation sous les contraintes du réseau original cela implique que cette distribution ne pouvait pas être généré par le réseau initial avec un modèle symétrique.

Plus formellement la preuve pourrait être définie comme suit:

- Soit \mathcal{N} un réseau triangulaire avec un ensemble de contraintes C .
- Soit \mathcal{N}^* l'inflation de \mathcal{N} , où \mathcal{N}^* est conçu pour faciliter l'analyse sous un ensemble étendu de contraintes C^* .

Preuve : Si une distribution de probabilité P peut être générée sur le réseau original \mathcal{N} sous les contraintes C , alors pour toute inflation \mathcal{N}^* , il existe une distribution correspondante P^* , qui respecte les contraintes étendues C^* et qui peut être générée dans l'inflation \mathcal{N}^* .

$$P \text{ généré dans } \mathcal{N} \text{ sous } C \implies \forall \mathcal{N}^*, P^* \text{ peut être généré sous } C^*$$

Preuve par contraposée: Soit une inflation \mathcal{N}^* ne peut pas générer la distribution correspondante P^* sous les contraintes C^* , alors la distribution de probabilité P sur le réseau original \mathcal{N} qui devrait respecter les contraintes C ne peut pas être générée non plus.

$$\forall \mathcal{N}^*, P^* \text{ ne peut pas être généré dans } \mathcal{N}^* \text{ sous } C^* \implies P \text{ ne peut pas être généré dans } \mathcal{N} \text{ sous } C$$

Remarque:

Il est important de noter que la présence d'une distribution P et la découverte de sa correspondante P^* dans une inflation spécifique \mathcal{N}^* ne permettent pas de tirer des conclusions définitives. En effet, il est possible d'identifier une autre inflation, \mathcal{N}^{**} , pour laquelle la distribution correspondante P^{**} ne pourrait pas être générée. Par conséquent, une approche possible serait de tester toutes les inflations envisageables jusqu'à ce que l'on trouve une qui prouve définitivement que la distribution P d'origine n'est pas réalisable [14].

4.3 Les Distributions GHZ et W

En mécanique quantique, les états intriqués jouent un rôle central, offrant une vue nouvelle pour l'information quantique. Parmi les divers types d'états intriqués, les distributions GHZ et W se distinguent par leurs propriétés et applications uniques. Ces états, impliquant l'intrication de trois qubits ou plus, sont essentiels pour exploiter les phénomènes de non-localité et de superposition quantique.

Les états GHZ, nommés d'après les physiciens Daniel Greenberger, Michael Horne et Anton Zeilinger, représentent un exemple remarquable d'enchevêtrement parfait. Indépendamment de la distance qui les sépare, la mesure de l'état quantique de l'une des particules détermine instantanément l'état des autres. La distribution de probabilités pour un état GHZ impliquant trois particules est donnée par :

$$P_{GHZ}(a, b, c) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } a = b = c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cette distribution est cruciale pour illustrer les violations des inégalités de Bell, car elle met en évidence les contradictions entre les prédictions de la mécanique quantique et les principes du réalisme local. Ainsi, les seules issues possibles sont soit l'état $|000\rangle$ soit $|111\rangle$, chacun survenant avec une probabilité de $\frac{1}{2}$. Les autres états, tels que $|001\rangle$, $|010\rangle$, $|011\rangle$, $|100\rangle$, $|101\rangle$, et $|110\rangle$, ne peuvent pas se produire et sont donc nulle.

Les états W sont un type de configuration quantique intriquée impliquant trois particules ou plus. Leur particularité réside dans le fait que, connaissant les états de deux particules, on peut déterminer directement l'état de la troisième. Cette propriété rend les états W particulièrement précieux pour des applications pratiques telles que la communication quantique et le calcul quantique distribué. La distribution W dans le cas de trois particules est donné par :

$$P_W(a, b, c) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{si } (a, b, c) \in \{(0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Lors de la mesure, les résultats possible dans l'état W sont donc $|001\rangle$, $|010\rangle$, ou $|100\rangle$, avec une probabilité de $\frac{1}{3}$ pour chaque. Tous les autres résultats de mesure à part ceux là seront également nul, ce qui atteste de la distribution de probabilité spécifique et de la robustesse de l'état W.

Dans notre cas d'étude, nous soulignons l'importance de ces distributions, notamment parce qu'elles sont symétriques sous permutations cycliques. Nous prévoyons alors d'utiliser ces distributions dans le cadre de nos inflations, en y incorporant du bruit. Cela nous permettra de déterminer le seuil minimal de bruit nécessaire pour assurer que ces nouvelles distributions bruitées ne soient pas réalisables dans un modèle symétrique.

L'introduction de bruit sera essentielle pour simuler les conditions réelles d'utilisation de ces états quantiques, incluant les effets de la décohérence. Les effets de la décohérence, dans ce contexte, se réfèrent au processus par lequel un système quantique perd ses caractéristiques quantiques distinctives, notamment l'intrication, en raison de ses interactions avec l'environnement.

Cette approche est d'une importance capitale pour simuler comment l'intrication est influencé par les interactions avec l'environnement, un aspect vitale pour le développement de technologies quantiques robustes.

Distributions bruitées

Une distribution bruitée, dans le contexte de la mécanique quantique et des états de particules tels que les états GHZ et W, est une modification de la distribution de probabilités originale de ces états due à l'introduction de bruit. Ce bruit représente des perturbations externes ou des imperfections dans la préparation ou la mesure des états quantiques. Il modifie les probabilités initiales des différentes configurations d'états, conduisant à des distributions qui ne reflètent plus parfaitement l'état quantique pur initial, répartissant plus uniformément les différents états possibles.

Dans notre cas, nous considérons alors un bruit blanc (white noise). Le bruit blanc est un type de bruit qui affecte de manière uniforme toutes les fréquences, simulant ainsi des perturbations aléatoires et omniprésentes. Ici, il représente les imperfections globales affectant uniformément toutes les configurations d'états. Nous pouvons représenter une distribution bruitée avec une visibilité v , définie comme suit :

$$p_v(a, b, c) = v \cdot p(a, b, c) + (1 - v) \cdot \text{uniform}(a, b, c)$$

Formellement, v représente la visibilité et $1 - v$ représente le bruit, rendant ainsi la distribution plus homogène. Une visibilité de 1 correspond à la distribution originale, tandis qu'une visibilité de 0 correspond à une distribution uniforme.

Dans le cas d'un état GHZ pour trois particules où l'on intègre un bruit uniforme, la distribution de probabilités modifiée peut être exprimée comme suit :

$$p_{GHZ}(a, b, c) = \begin{cases} \frac{3v+1}{8} & \text{si } a = b = c \\ \frac{1-v}{8} & \text{sinon} \end{cases}$$

où v désigne la visibilité. On observe que lorsque $v = 1$, la distribution redevient celle de l'état GHZ sans bruit, car plus la valeur de v est élevée, plus la contribution de la distribution originale est forte. Lorsque $v = 0$, toutes les probabilités sont équiprobables, reflétant une situation de bruit maximal où la distribution originale n'a plus d'influence.

La distribution de probabilités pour l'état W bruité pour trois particules, en fonction des résultats de mesure a , b , et c et du paramètre de visibilité v , est exprimée par la fonction suivante :

$$p_W(a, b, c) = \begin{cases} v \cdot \frac{1}{3} + \frac{1-v}{8} & \text{si } (a, b, c) \in \{(0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)\} \\ \frac{1-v}{8} & \text{sinon} \end{cases}$$

où chaque terme représente la probabilité pour chaque état. Ces deux formules intègrent de cette manière, à la fois la visibilité de leur états original et la contribution uniforme du bruit.

Par le biais des inflations, notre objectif sera de déterminer la plus petite valeur de visibilité v qui garantit que notre distribution ne correspond à aucun modèle symétrique dans un réseau triangulaire. Autrement dit, si nous augmentons la visibilité au-delà de cette limite, le résultat obtenu ne sera pas réalisable avec un modèle symétrique. En revanche, si nous ajoutons davantage de bruit en diminuant v , nous ne serons plus en mesure de déterminer si la distribution peut être représentée par un modèle symétrique ou non. Prouvant de cette manière que les distributions correspondant aux états GHZ et W originaux ne peuvent pas être reproduites dans le cadre d'un modèle symétrique triangulaire.

4.4 Résultats actuels et Perspectives

Des résultats existent déjà pour les distributions GHZ et W. Ces distributions ne sont pas réalisables dans le cadre d'un réseau triangulaire symétrique sous permutation des parties. Nous utiliserons leurs distributions bruitées pour déterminer cette non-réalisation.

Notons que la visibilité, représentant le bruit minimal permettant à un modèle de générer une distribution donnée dépend du cadre théorique considéré. Dans le cas GHZ, le minimum théorique de visibilité dans le cas de non-signallement et de symétrie a été prouvé être donné par $v = \sqrt{2} - 1 \approx 0.4142$ [11]. On peut considérer cette valeur comme la plus petite visibilité permettant d'admettre un modèle symétrique non-signalant générant cette distribution, ou comme la visibilité maximale permettant de révéler au mieux la distribution originale pour un modèle symétrique non-signalant. Au-delà de ce seuil, la distribution ne sera pas réalisable dans le cadre d'un modèle respectant ces contraintes. Nous allons donc tenter de retrouver ce résultat à travers notre programme.

Dans le cas de la W distribution, le minimum de visibilité pour un modèle respectant les contraintes de non-signallement et symétrie n'est pas connu à ce jour. Cependant, pour les modèles quantiques asymétriques, la limite de visibilité v atteint 0.7472 [15], tandis que pour les modèles classiques, cette limite atteint 0.5966 [12]. Nous tenterons de voir si nous pouvons obtenir une de ces bornes ou une autre permettant de certifier que la distribution originale ne peut être générée par un modèle symétrique non-signalant.

Nous allons d'abord tenter d'obtenir ces résultats par le biais des inflations afin de vérifier que les distributions originales ne sont pas réalisables, et ainsi certifier le bon fonctionnement de notre programme. Nous commencerons avec une inflation régulière à quatre côtés, c'est-à-dire un carré, puis nous passerons à un pentagone, un hexagone, et ainsi de suite jusqu'au nombre de côtés maximum possible, en respectant, pour chaque configuration, les contraintes associées.

Par la suite, nous envisagerons une nouvelle forme d'inflation en combinant une inflation donnée avec toutes celles qui la précèdent. Pour expliquer, si nous voulons calculer l'inflation pour l'hexagone, nous devrons également considérer l'intégration du pentagone et du carré avec leurs propres contraintes. Ainsi, nous obtiendrons des contraintes encore plus strictes pour mieux déterminer si une distribution donnée peut être reproduite ou non dans le cadre de nos modèles. Nous réaliserons cela pour l'inflation la plus grande possible que possible.

Par la suite, après avoir pu vérifier que le code est fonctionnel, nous allons pouvoir analyser un espace de distributions symétrique donné par la figure la figure suivante.

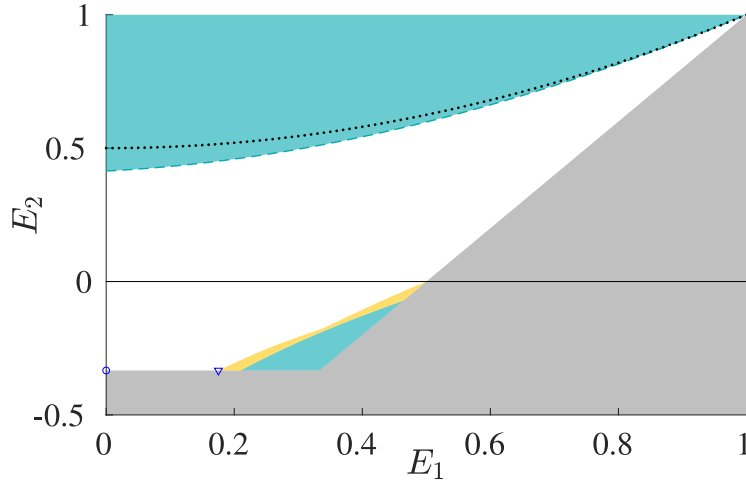


Figure 4.3: La région des corrélations autorisées pour les distributions symétriques est projetée dans le plan E_2 contre E_1 . Ici, E_1 représente l'espérance commune des marginales à une seule partie, tandis que E_2 représente l'espérance commune des marginales à deux parties. La région turquoise est exclue par les contraintes de non-signallement et d'indépendance, tandis que la région grise est exclue par des contraintes de probabilité. La région blanche est accessible via des modèles trilocaux. Les corrélations dans la région jaune satisfont les contraintes non-signallement et d'indépendance (à partir de l'inflation hexagonale), mais aucun modèle trilocal n'a été trouvé pour elles [7].

Nous allons analyser ce graphique en nous concentrant sur la région jaune, où les contraintes de non-signallement et d'indépendance sont satisfaites, mais où aucun modèle local symétrique n'a pu être déterminé pour ces distributions.

Grâce à nos méthodes d'inflation, nous explorerons cette région jaune et démontrerons qu'une partie des distributions qu'elle contient ne peut pas être générée par un modèle triangulaire symétrique. Nous recréerons cette section du graphique en y ajoutant les frontières et en délimitant les distributions impossibles à générer avec le degré d'inflation considéré. Pour ce faire, nous utiliserons l'équation (4.2), qui permet de décrire toute famille de distributions symétriques. Ce graphique nous permettra de visualiser clairement les limites au-delà desquelles une distribution ne peut pas être reproduite fidèlement par un modèle triangulaire symétrique.

Chapter 5

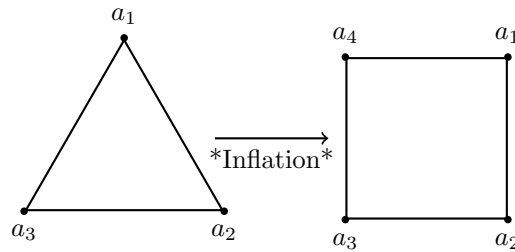
Modèle de Solution

5.1 Inflation Seule

Le modèle de solution sera axé sur la définition précise des contraintes dans le cadre d'une inflation, en énumérant toutes les contraintes nécessaires. Comme notre objectif principal est de vérifier si une distribution peut être reproduite dans le cas du réseau triangulaire, nous n'intégrerons pas de fonction à optimiser, puisque notre concentration est portée sur l'existence d'une solution plutôt que sur l'optimisation d'une fonction spécifique.

Carré

Nous commencerons par l'inflation la plus simple, qui est le carré. Pour illustrer notre exemple, nous considérons les observateurs dans le réseau de base comme étant a_1, a_2, a_3 et pour celui de l'inflation par a_1, a_2, a_3, a_4 .



Les contraintes imposées par le réseau original sur l'inflation incluront des contraintes de connexion entre le réseau d'origine et le réseau enflé, ainsi que des contraintes d'indépendance des sources de l'inflation. Nous intégrerons également des contraintes liées à la symétrie des sources dans le modèle. Étant donné que notre analyse repose sur des probabilités, nous appliquerons des contraintes probabilistiques nécessaires pour assurer la cohérence du modèle.

Probabilité:

Nous commencerons par les contraintes triviales, celles liées aux probabilités : Étant donné que nous nous intéressons que chaque événement résultant se produise, nous imposons des contraintes sur les probabilités dans le réseau enflé. Il est requis que la probabilité de

chaque résultat soit positive ou nulle, et que la somme de toutes les probabilités des événements soit égale à 1.

$$P_I(a_1, a_2, a_3, a_4) \geq 0$$

$$\sum_{a_1, a_2, a_3, a_4} P_I(a_1, a_2, a_3, a_4) = 1$$

Connexion:

Les contraintes de connexion sont définies telle que :

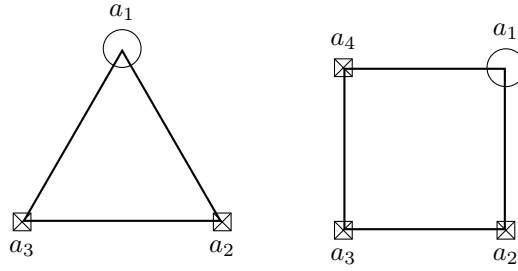


Figure 5.1: Ce schéma illustre les contraintes de marginalisation des probabilités dans un réseau original et son inflation. Les croix sur les sommets indiquent où les probabilités sont marginalisées pour isoler les effets d'autres variables (comme démontré dans l'expression $\sum_{a_2, a_3} P_O(a_1, a_2, a_3)$), tandis que les cercles mettent en évidence les variables observées directement influençant le calcul des probabilités marginales $P_O(a_1)$.

$$\sum_{a_2, a_3} P_O(a_1, a_2, a_3) = \sum_{a_2, a_3, a_4} P_I(a_1, a_2, a_3, a_4) \quad (5.1)$$

Cette contrainte de connexion signifie que, en marginalisant le reste des sources et observateurs, nous devons obtenir la même probabilité dans les deux cas. Autrement dit, la statistique d'un seul observateur doit être identique dans le réseau enflé et dans le réseau d'origine. Nous pouvons alors étendre cette approche pour chaque observateur du réseau enflé. Nous avons également une contrainte de connexion pour deux parties entre le réseau d'origine et le réseau enflé, donnée par :

$$\sum_{a_3} P_O(a_1, a_2, a_3) = \sum_{a_3, a_4} P_I(a_1, a_2, a_3, a_4) \quad (5.2)$$

Ici, nous marginalisons pour obtenir la probabilité conjointe de deux observateurs.

Nous pouvons alors constater que l'équation (5.1) est une marginalisation de cette dernière équation pour deux parties.

$$\sum_{a_2} \sum_{a_3} P_O(a_1, a_2, a_3) = \sum_{a_2} \sum_{a_3, a_4} P_I(a_1, a_2, a_3, a_4)$$

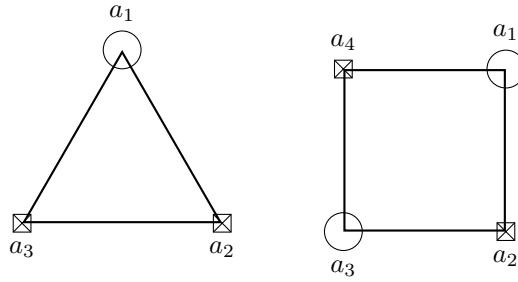
$$\sum_{a_2, a_3} P_O(a_1, a_2, a_3) = \sum_{a_2, a_3, a_4} P_I(a_1, a_2, a_3, a_4)$$

Ainsi, il suffit d'imposer l'équation (5.2), car la contrainte de (5.1) n'est qu'un sous-ensemble de la première équation, et est donc déjà respectée en satisfaisant cette dernière.

Ces contraintes de connexion permettent de capturer simultanément les exigences de non-signallement en garantissant l'indiscernabilité des parties les unes par rapport aux autres, grâce à l'introduction de copies des sources et des observateurs (voir 4.2).

Indépendance:

Les contraintes d'indépendance sont quant à elles définies de la manière suivante:



$$\sum_{a_2, a_4} P_I(a_1, a_2, a_3, a_4) = \sum_{a_2, a_3} P_O(a_1, a_2, a_3) \cdot \sum_{a_2, a_3} P_O(a_1, a_2, a_3)$$

Ce qui équivaut à:

$$P_I(a_1, a_3) = P_O(a_1) \cdot P_O(a_3) \quad (5.3)$$

Ici, nous avons une contrainte basée sur l'indépendance des probabilités étant donné que a_1 et a_3 ne sont pas liés dans l'inflation par une source bipartite. Le résultat de l'un est donc indépendant du résultat de l'autre. De plus, comme les sources sont identiques, alors lorsqu'on calcule la marginale due à la symétrie pour n'importe quel observateur, nous obtenons pour tous la même probabilité, qui est donnée par :

$$\sum_{a_2, a_3} P_O(a_1, a_2, a_3) = P_O^A(a_1) = P_O^B(a_1) = P_O^C(a_1) \equiv P_O(a_1)$$

Nous pouvons ainsi répéter le même raisonnement pour la contrainte:

$$P_I(a_2, a_4) = P_O(a_2) \cdot P_O(a_4)$$

Symétrie:

La dernière contrainte que nous imposons est celle de la symétrie sous permutation cyclique dans le cadre de l'inflation, exprimée par :

$$P_I(a_1, a_2, a_3, a_4) = P_I(a_2, a_3, a_4, a_1) = P_I(a_3, a_4, a_1, a_2) = P_I(a_4, a_1, a_2, a_3) \quad (5.4)$$

Cette contrainte de symétrie nous est utile, car grâce à cette symétrie, il n'est pas nécessaire de définir séparément les contraintes de connexion et d'indépendance pour chaque observateur dans le scénario d'inflation, car la symétrie assure implicitement que ces contraintes sont respectées uniformément pour tous les observateurs.

Nous observons de cette manière que dans nos contraintes, les variables inconnues dans notre analyse sont les probabilités P_I , et puisque la distribution originale du réseau triangulaire est donnée et constante. Cela signifie que nos contraintes sont linéaires, validant ainsi l'application d'un programme linéaire.

La linéarité de $P_O(a_1) \cdot P_O(a_3)$ pourrait soulever des questions, car cela n'est vrai que pour une distribution fixée. Dans le cas où la visibilité est une variable dans la distribution, cette expression devient non linéaire. Par conséquent nous utiliserons l'algorithme de bisection pour fixer cette variable à une constante, de manière à ce que la distribution d'origine reste constante. Ainsi, nous pourrions établir cette expression comme contrainte linéaire, permettant à $P_O(a_1) \cdot P_O(a_3)$ d'être également une constante.

Synthèse sous forme \mathcal{LP}

Ainsi pour déterminer si nous pouvons reproduire une distribution donnée dans le cas du réseau triangulaire en utilisant l'inflation du carré voici le programme linéaire:

Déterminer faisabilité sous les contraintes :

$$\sum_{a_1, a_2, a_3, a_4} P_I(a_1, a_2, a_3, a_4) = 1 \quad (5.5)$$

$$P_I(a_1, a_2, a_3, a_4) \geq 0 \quad (5.6)$$

$$\sum_{a_3, a_4} P_I(a_1, a_2, a_3, a_4) = \sum_{a_3} P_O(a_1, a_2, a_3) \quad (5.7)$$

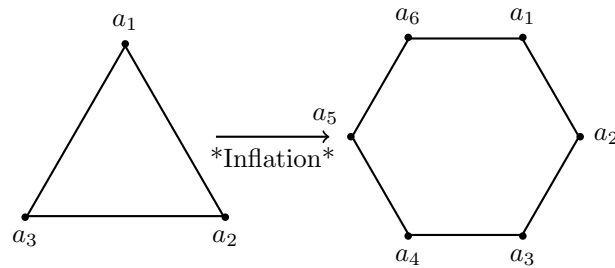
$$P_I(a_1, a_3) = P_O(a_1) \cdot P_O(a_3) \quad (5.8)$$

$$P_I(a_1, a_2, a_3, a_4) = P_I(a_2, a_3, a_4, a_1) = P_I(a_3, a_4, a_1, a_2) = P_I(a_4, a_1, a_2, a_3) \quad (5.9)$$

L'objectif est de déterminer la non-faisabilité dans le cadre du réseau initial.

Hexagone

Nous passons maintenant au cas de l'hexagone plus grands ou nous avons pour l'inflation les observateurs $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$.



Comme précédemment, nous appliquerons des contraintes de symétrie sous permutations cycliques, ainsi que des contraintes de probabilité associées à l'inflation.

Connexion

Nous avons les contraintes de connexion lié de nouveau qui entraine les contraintes de marginalisation. Pour un partie

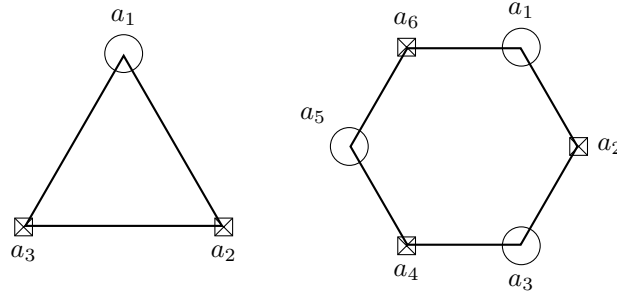
$$\sum_{a_2, a_3} P_O(a_1, a_2, a_3) = \sum_{a_2, a_3, a_4, a_5, a_6} P_I(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$$

Et pour deux parties est donné par:

$$\sum_{a_3} P_O(a_1, a_2, a_3) = \sum_{a_3, a_4, a_5, a_6} P_I(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$$

Indépendance

Dans le cas de l'indépendance cette fois-ci nous avons une indépendance pour trois parties.



Que l'on peut décrire par:

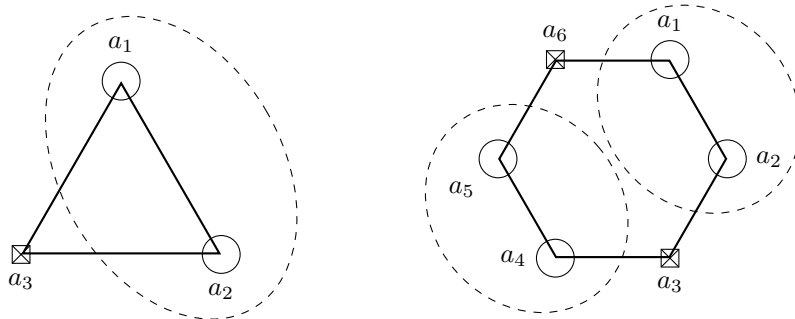
$$\sum_{a_2, a_4, a_6} P_I(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) = \left(\sum_{a_2, a_3} P_O(a_1, a_2, a_3) \right) \cdot \left(\sum_{a_2, a_3} P_O(a_1, a_2, a_3) \right) \cdot \left(\sum_{a_2, a_3} P_O(a_1, a_2, a_3) \right)$$

Ce qui équivaut à:

$$P_I(a_1, a_3, a_5) = P_O(a_1) \cdot P_O(a_3) \cdot P_O(a_5) \quad (5.10)$$

On remarque alors qu'il n'est pas nécessaire de considérer la contrainte pour deux parties unique indépendantes, car si l'indépendance est établie pour trois parties, celle pour deux parties en découle naturellement. En effet, l'indépendance pour deux observateurs est un sous-ensemble du cas de trois observateurs.

Nous considérons aussi l'indépendance conjointe de deux groupes de variables, chacun étant indépendant par rapport à un autre groupe de deux variables.



Cela se traduit par la contrainte suivante :

$$\sum_{a_3, a_6} P_I(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) = \left(\sum_{a_3} P_O(a_1, a_2, a_3) \right) * \left(\sum_{a_3} P_O(a_1, a_2, a_3) \right)$$

égale à:

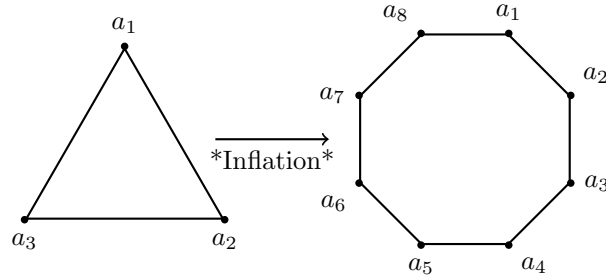
$$P_I(a_1, a_2, a_4, a_5) = P_O(a_1, a_2) * P_O(a_4, a_5) \quad (5.11)$$

Notons qu'en considérant l'indépendance de deux groupes composés chacun de deux observateurs, nous prenons aussi en compte, par extension, l'indépendance entre un seul observateur et un groupe de deux observateurs.

Après avoir défini les contraintes spécifiques au carré et à l'hexagone, nous commençons à percevoir une méthode pour établir les contraintes applicables à toute forme d'inflation. L'objectif est de sélectionner les contraintes les plus strictes possibles afin de couvrir toutes les contraintes dérivées. Cela implique de considérer l'ensemble le plus large de contraintes qui satisfait l'intégralité des sous-ensembles de contraintes.

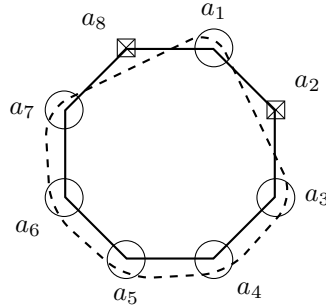
Polygone à \mathcal{N} sommets

Un aspect important à considérer est que les contraintes d'indépendance englobent déjà les contraintes de connexion, dues à la marginalisation des probabilités réalisée pour établir l'indépendance. Par conséquent, notre objectif actuel est de prendre en compte les contraintes d'indépendance les plus exhaustives. À titre d'exemple, nous utiliserons l'inflation octogonale, bien que cette approche soit applicable à tout niveau d'inflation.



1 VS OTHERS

Pour réaliser cette contrainte générale, nous prenons l'indépendance d'une partie par rapport à un groupe d'observateurs qui ne sont pas directement connectés à ce dernier.

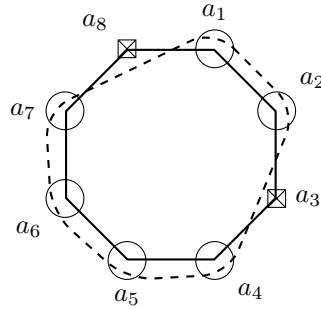


Cette disposition maximise l'indépendance en considérant un seul élément face aux autres, permettant de démontrer que marginaliser les observateurs a_4 et a_6 révèle l'indépendance entre quatre parties distinctes. Par conséquent, en examinant l'indépendance d'une seule partie vis-à-vis des autres, nous incluons toutes les sous-contraintes possibles. Ce principe peut être exprimé mathématiquement comme suit :

$$\sum_{a_2, a_8} P_I(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8) = \left(\sum_{a_2, a_3} P_O(a_1, a_2, a_3) \right) \cdot \left(\sum_{a_1, a_2, a_8} P_I(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8) \right)$$

2 VS OTHERS

En suivant la même logique, nous allons considérer l'indépendance maximale entre un groupe composé de deux parties et un autre groupe formé par les observateurs restants qui ne sont pas directement reliés à eux.



Cette contrainte peut ainsi être représentée telle que:

$$\sum_{a_3, a_8} P_I(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8) = \left(\sum_{a_1, a_2, a_3, a_8} P_I(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8) \right) \cdot \left(\sum_{a_3} P_O(a_1, a_2, a_3) \right)$$

qui donne:

$$P_I(a_1, a_2, a_4, a_5, a_6, a_7) = P_I(a_4, a_5, a_6, a_7) \cdot P_O(a_1, a_2)$$

Comme précédemment on remarque si nous marginalisons selon a_4 et a_7 :

$$\sum_{a_4, a_7} P_I(a_1, a_2, a_4, a_5, a_6, a_7) = \left(\sum_{a_4, a_7} P_I(a_4, a_5, a_6, a_7) \right) \cdot P_O(a_1, a_2)$$

$$P_I(a_1, a_2, a_5, a_6) = P_I(a_5, a_6) \cdot P_O(a_1, a_2)$$

Nous observons à nouveau que l'indépendance est obtenue entre deux groupes composés chacun de deux parties. Ainsi, en sélectionnant les contraintes les plus strictes, nous parvenons à satisfaire également les autres contraintes, car elles constituent des sous-ensembles de ces contraintes plus sévères.

Abstraction générale

Pour une inflation de polygone avec \mathcal{N} sommets, nous pouvons établir les contraintes d'indépendance et de marginalisation simultanément:

Contraintes d'indépendance pour une partie:

$$\sum_{a_2, a_{\mathcal{N}}} P_I(a_1, a_2, \dots, a_{\mathcal{N}}) = \left(\sum_{a_1, a_2, a_{\mathcal{N}}} P_I(a_1, a_2, \dots, a_{\mathcal{N}}) \right) \cdot \left(\sum_{a_2, a_3} P_O(a_1, a_2, a_3) \right) \quad (5.12)$$

Contraintes d'indépendance pour des groupes de deux parties:

$$\sum_{a_3, a_{\mathcal{N}}} P_I(a_1, a_2, \dots, a_{\mathcal{N}}) = \left(\sum_{a_1, a_2, a_3, a_{\mathcal{N}}} P_I(a_1, a_2, \dots, a_{\mathcal{N}}) \right) \cdot \left(\sum_{a_3} P_O(a_1, a_2, a_3) \right) \quad (5.13)$$

En appliquant ces dernières contraintes, et en incluant la symétrie des sources et les règles de probabilité, nous disposons désormais d'une abstraction pour générer les contraintes de n'importe quel niveau d'inflation.

Remarque Il est important de noter que cette abstraction n'est applicable qu'à partir de l'inflation du pentagone. Par conséquent, nous traiterons l'inflation du carré comme un cas spécifique.

5.2 Inflation Multiple

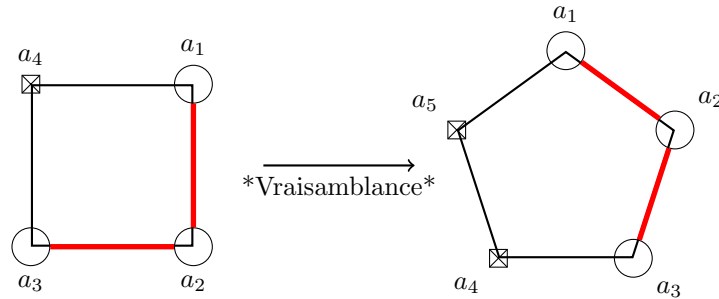
Cette fois-ci, notre approche à l'inflation sera particulière : en plus de considérer les contraintes spécifiques à l'inflation actuelle, nous prendrons également en compte toutes les contraintes des inflations précédentes. Comme nous le verrons dans les résultats, cela crée une hiérarchie par les inflations, où chaque problème est strictement moins général que le précédent. Par exemple, lors de l'analyse de l'inflation d'un hexagone, nous inclurons les contraintes associées au pentagone et au carré. Cela nous permettra de créer une nouvelle inflation en ajoutant des contraintes plus strictes tout en tenant compte de celles des niveaux précédents.

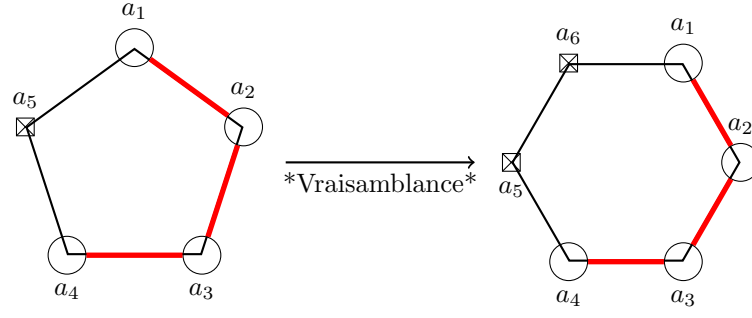
Contraintes

$$\text{Inflation}(\mathcal{N}) = \text{Inflation}(\mathcal{N}) + \text{Inflation}(\mathcal{N} - 1) + \dots + \text{Inflation}(5) + \text{Inflation}(4)$$

Ainsi nous intégrons également les contraintes des niveaux d'inflation précédents avec celles actuelles. En plus de cela, nous appliquons une contrainte de vraisemblance, visant à identifier un sous-ensemble de nos inflations au niveau inférieur. L'objectif est d'établir une contrainte qui définit le plus grand sous-ensemble du réseau actuel présent également dans l'inflation de niveau inférieur.

Schéma:





Ce qui se traduit par la contrainte suivante :

$$\sum_{a_n} P_{I_{n-1}}(a_1, \dots, a_{n-1}) = \sum_{a_{n-1}, a_n} P_{I_n}(a_1, \dots, a_n)$$

où $P_{I_{n-1}}$ désigne l'inflation au niveau $n - 1$ et P_{I_n} l'inflation au niveau supérieur n .

Nous avons défini toutes les contraintes qui permettent de réaliser nos inflation, étant donné qu'on cherche à déterminer la faisabilité nous n'avons pas de fonction objective à optimiser, car nous souhaitons déterminer l'existence d'une solution.

5.3 Faisabilité

5.3.1 Distributions bruité spécifique

Dans ce contexte, \mathcal{N} désigne le niveau d'inflation sélectionné pour l'analyse. Nous utiliserons l'algorithme de bisection pour identifier le seuil minimal de visibilité v sous lequel la distribution analysée pourrait encore être considérée comme réalisable. L'utilisation de l'algorithme de bisection est justifiée par le fait que, si nous devions considérer v comme une fonction objectif à maximiser, cela impliquerait l'introduction d'une variable v inconnue dans nos contraintes. Cela rendrait les contraintes non-linéaires, ce qui ne respecterait plus la structure d'un programme linéaire. Si v était une variable, nos contraintes d'indépendance deviendraient non-linéaires, comme par exemple dans les équations (5.12) et (5.13), ou plus explicitement dans l'équation (5.8). En effet, car la distribution d'origine ne serait pas constante et les contraintes deviendraient non-linéaires. De cette manière, les contraintes sont bien définies et sont linéaires à conditions que v ne soit pas une nouvelle variable inconnue à ajouter au problème. Etant donné que les différentes probabilités associées à l'inflation sont déjà les variables de décisions inconnues à résoudre.

Diminuer v augmente le bruit, altérant progressivement la distribution par rapport à sa forme initiale. Nous évaluons ainsi la limite jusqu'à laquelle le bruit peut être retiré avant que la distribution soit considérée comme irréalisable, tout en respectant les contraintes de symétrie. Ce seuil est crucial car il détermine la quantité minimale de bruit à avoir pour que la distribution puisse encore être générée, avant qu'elle ne puisse plus l'être en retirant davantage de bruit. Si la visibilité est inférieure à ce seuil, la distribution pourrait être jugée comme potentiellement générable; cependant, une autre inflation pourrait révéler qu'à ce niveau de bruit, la distribution ne peut pas être générée.

Nous allons déterminer le seuil de visibilité v au-delà duquel les distributions GHZ et W, lorsqu'elles sont perturbées par moins de bruit, révélant davantage leur état original, ne sont plus réalisables dans un réseau triangulaire symétrique, en tenant compte d'une inflation spécifique.

Algorithm 1 Algorithme de Bisection pour Déterminer la Faisabilité des Distributions selon le Niveau d'Inflation

```

1:  $\epsilon \leftarrow 1 \times 10^{-6}$ 
2:  $v_{\text{low}} \leftarrow 0$ 
3:  $v_{\text{high}} \leftarrow 1$ 
4: while  $v_{\text{high}} - v_{\text{low}} > \epsilon$  do
5:    $v \leftarrow (v_{\text{high}} + v_{\text{low}})/2$ 
6:   if IS_FEASIBLE( $v, \mathcal{N}$ ) then
7:      $v_{\text{low}} \leftarrow v$ 
8:   else
9:      $v_{\text{high}} \leftarrow v$ 
10:  end if
11: end while

```

5.3.2 Famille de Distributions

Nous adopterons la même approche, en utilisant cette fois l'équation qui définit les familles de distributions symétriques (voir équation 4.2). Nous fixerons $E_3 = 0$ et varierons E_2 sur une

série de valeurs pour identifier, pour chaque valeur de E_2 , jusqu'à quel point E_1 associé à ce E_2 spécifique devient non réalisable, compte tenu des contraintes de symétrie du modèle.

La raison pour laquelle nous fixons $E_3 = 0$ est que nos contraintes concernent les interactions entre une partie et deux parties, sans imposer de contraintes sur les interactions entre trois parties. Par conséquent, nous pouvons fixer E_3 , l'espérance des résultats pour trois parties, à n'importe quelle valeur. Lors de la marginalisation pour les interactions à une et deux parties, E_3 disparaît simplement en raison de la simplification. Ainsi, nous fixons $E_3 = 0$ pour simplifier les calculs, sachant que cela n'affecte pas la faisabilité du modèle.

La marginalisation pour obtenir la probabilité de deux parties est donnée en reprenant la distribution (4.2) :

$$p(a, b, c) = \frac{1}{8} \left(1 + E_1 ((-1)^a + (-1)^b + (-1)^c) \right. \\ \left. + E_2 ((-1)^{a+b} + (-1)^{b+c} + (-1)^{a+c}) + E_3 (-1)^{a+b+c} \right)$$

En marginalisant par rapport à c :

$$p(a, b) \equiv \sum_c p(a, b, c) = \frac{1}{8} (2 + 2E_1 ((-1)^a + (-1)^b) + 2E_2 ((-1)^{a+b})) \\ = \frac{1}{4} (1 + E_1 ((-1)^a + (-1)^b) + E_2 ((-1)^{a+b}))$$

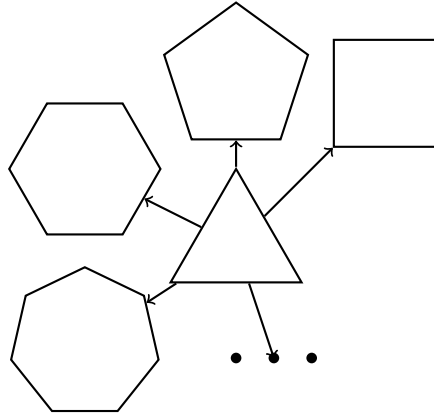
On remarque bien que la formule ne dépend pas de E_3 .

Algorithm 2 Algorithme de Bisection pour la Faisabilité des Distributions à un Niveau d'Inflation Donné

```

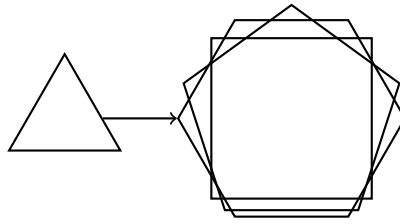
1:  $\epsilon \leftarrow 1 \times 10^{-4}$ 
2: Initialize results to an empty list
3: for  $E_2$  in  $[0.1, \dots, 0.5]$  do
4:    $E_{1\text{low}} \leftarrow 0.1$ 
5:    $E_{1\text{high}} \leftarrow 0.5$ 
6:   while  $E_{1\text{high}} - E_{1\text{low}} > \epsilon$  do
7:      $E_1 \leftarrow (E_{1\text{high}} + E_{1\text{low}})/2$ 
8:     if IS_FEASIBLE( $E_1, E_2, \mathcal{N}$ ) then
9:        $E_{1\text{low}} \leftarrow E_1$ 
10:    else
11:       $E_{1\text{high}} \leftarrow E_1$ 
12:    end if
13:  end while
14:  Append tuple  $(E_{1\text{low}}, E_2)$  to results
15: end for
16: return results

```



Nous débuterons notre analyse en explorant un polygone régulier à quatre côtés, soit un carré. Progressivement, nous élargirons notre étude à des polygones ayant un nombre croissant de côtés, passant à un pentagone, puis à un hexagone, et ainsi de suite, jusqu'à atteindre le nombre maximal de côtés envisageable pour nos modèles. Pour chaque forme, nous veillerons scrupuleusement à respecter les contraintes de connexion, de symétrie et d'indépendance des sources.

Ultérieurement, nous combinerons une inflation spécifique avec toutes celles qui l'ont précédée, intégrant leurs contraintes respectives. Cette approche nous permettra d'imposer des contraintes plus rigoureuses et d'affiner notre capacité à déterminer si une distribution spécifique peut être reproduite dans le cadre de nos modèles. Nous appliquerons cette méthode jusqu'à la l'inflation la plus grande.



Chapter 6

Implémentation

6.1 Structure des Données

Dans notre modèle d'optimisation convexe, nous utilisons une structure de données tensorielle où chaque élément est une variable représentée par `cvxpy.Variable`. Cette structure est essentielle pour modéliser des variables d'optimisation associées à différents sommets d'un polygone lors de l'inflation, chaque sommet pouvant observer deux issues possibles.

Chaque variable dans notre tenseur est non-négative car elle représente une probabilité. Nous spécifions cette contrainte de non-négativité dès l'initialisation des variables.

Pour initialiser cette structure tensorielle, nous avons développé une fonction en Python qui crée un tableau de variables non-négatives. Voici le code associé à cette fonction :

```
def create_variable_array(dimensions):
    if not isinstance(dimensions, (list, tuple)) or \
    not all(isinstance(d, int) for d in dimensions):
        raise ValueError("Les dimensions doivent être une liste \
        ou un tuple d'entiers.")

    array = np.empty(dimensions, dtype=object)

    for index in np.ndindex(array.shape):
        array[index] = cp.Variable(nonneg=True)

    return array
```

Nous utilisons ce tenseur pour simuler l'observation des différents sommets. Les dimensions du tenseur correspondent au nombre de sommets, avec deux issues possibles pour chaque observateur:

```
dimensions = (2,) * num_vertice
P_I = create_variable_array(dimensions)
```

L'utilisation d'un tenseur pour représenter ces variables est naturelle car elle permet des opérations de sommation sur des dimensions spécifiques, essentielles pour la marginalisation des probabilités

dans notre modèle. Cette structure facilite également la mise en œuvre de contraintes complexes et l'analyse des résultats d'optimisation.

6.2 Symétrie sous Permutation Cyclique

Pour appliquer les contraintes de symétrie, nous transformons notre représentation tensorielle de l'inflation en un vecteur linéaire. Ce processus est décrit ci-dessous.

Aplatissage du Tenseur

Le tenseur P_I , qui représente l'inflation, est converti en un vecteur P_{I_linear} . Cette transformation facilite la manipulation des indices lors de l'application des contraintes de symétrie.

```
P_I_linear = P_I.flatten()
```

Génération des Groupes de Symétrie

Nous utilisons la fonction `generate_last_symmetry_group` pour définir les groupes de symétrie, chacun représentant une permutation cyclique. Les éléments de chaque groupe doivent être identiques, ce qui reflète la symétrie cyclique du système.

```
symmetry_groups = generate_last_symmetry_group(num_vertices)
```

Par exemple, pour une symétrie impliquant trois parties, les groupes générés sont [1,2,4] et [3,5,6]. Il est important de noter que les indices 0 et 7 ne participent à aucune permutation cyclique pertinente et ne sont donc associés à aucun groupe.

0	1	2	3	4	5	6	7
000	001	010	011	100	101	110	111

Application des Contraintes de Symétrie

La fonction `apply_symmetry_constraints` est utilisée pour imposer l'égalité des indices des éléments du vecteur P_{I_linear} appartenant au même groupe pour chaque groupe de permutation cyclique.

```
def apply_symmetry_constraints(P_I, symmetry_groups):
    for group in symmetry_groups:
        for i in range(len(group) - 1):
            constraints.append(P_I[group[i]] == P_I[group[i + 1]])
```

Cette méthode assure que les probabilités des indices au sein d'un même groupe sont égales, garantissant ainsi le respect des contraintes de symétrie.

6.3 Contraintes d'Indépendance Généralisées

La fonction suivante définit les contraintes d'indépendance généralisées pour une et deux parties, ainsi que le processus d'itération pour chaque combinaison d'indépendance possible. De plus, elle impose la contrainte de probabilité selon laquelle la somme des probabilités du tenseur doit être égale à 1.

```

def generate_polygon_constraints(P_I, P_O, dimensions):

    constraints = []
    # initial constraint
    constraints.append(np.sum(P_I, axis=tuple(range(len(dimensions)))) == 1)
    vertice = len(dimensions)
    # dynamically generate index ranges based on the number of sides
    indices = [range(2)] * (vertice - 2)

    # generate all possible combinations of indices
    for index_tuple in product(*indices):
        index_list = list(index_tuple)

        #adding constraints based on the polygon's side number
        ##2 parties
        constraints.append(np.sum(P_I, (2, vertice-1))[tuple(index_list)] ==
                           np.sum(P_O, (2))[tuple(index_list[:2])] *
                           np.sum(P_I, (0, 1, 2, vertice-1))[tuple(index_list[2:])])

        ##1 partie
        constraints.append(np.sum(P_I, (1, vertice-1))[tuple(index_list)] ==
                           np.sum(P_O, (1, 2))[index_list[0]] *
                           np.sum(P_I, (0, 1, vertice - 1))[tuple(index_list[1:])])

    return constraints

```

La fonction `generate_polygon_constraints` génère les contraintes d'indépendance entre P_I l'inflation et P_O la distribution original.

Contrainte Initiale

Nous commençons par imposer que la somme sur toutes les dimensions du tenseur P_I soit égale à 1, ce qui est une contrainte de probabilité fondamentale.

```
constraints.append(np.sum(P_I, axis=tuple(range(len(dimensions)))) == 1)
```

Génération Dynamique des Indices

Nous déterminons dynamiquement les plages d'indices basées sur le nombre de côtés (sommets) du polygone et générons toutes les combinaisons possibles d'indices pour l'indépendance.

```

vertice = len(dimensions)
indices = [range(2)] * (vertice - 2)

for index_tuple in product(*indices):
    index_list = list(index_tuple)

```

Ajout des Contraintes d'Indépendance

Nous ajoutons ensuite les contraintes spécifiques basées sur le nombre de parties impliquées :

Un Partie

En reprenant la forme la contrainte (5.12) pour l'indépendance généralisée pour un parti, la contrainte est définie comme suit :

```
constraints.append(np.sum(P_I, (1, vertice-1))[tuple(index_list)] ==
                    np.sum(P_0, (1, 2))[index_list[0]] *
                    np.sum(P_I, (0, 1, vertice -1))[tuple(index_list[1:])])
```

Deux Parties

En reprenant la forme la contrainte (5.13) pour l'indépendance généralisée pour deux parties, la contrainte est définie comme suit :

```
constraints.append(np.sum(P_I, (2, vertice-1))[tuple(index_list)] ==
                    np.sum(P_0, (2))[tuple(index_list[:2])] *
                    np.sum(P_I, (0, 1, 2, vertice-1))[tuple(index_list[2:])])
```

Ces contraintes permettent de garantir que les probabilités dans le modèle respectent les relations d'indépendance spécifiées, tout en respectant la contrainte de probabilité totale. La méthode itérative permet d'examiner toutes les combinaisons possibles, assurant ainsi une couverture complète des configurations d'indépendance.

6.4 Génération Dynamique de Contraintes

Voici le code servant d'abstraction pour générer les contraintes en fonction de la taille d'inflation souhaitée.

```
def generate_dynamic_constraints(P_I, P_0, dimensions):

    constraints = []
    num_vertice = len(dimensions)

    if num_vertice < 4:
        raise ValueError("Le nombre de dimensions doit être au moins de 4 pour \
former une géométrie valide.")

    constraints.append(np.sum(P_I, axis=tuple(range(num_vertice))) == 1)
    indices = [range(2)] * (num_vertice - 2)

    # the unique specific case
    if num_vertice == 4:

        for i, j in product(*indices):
            constraints.append(np.sum(P_I, (1, 3))[i][j] == np.sum(P_0, (1, 2))[i] \
```

```

* np.sum(P_0, (1, 2))[j])
constraints.append(np.sum(P_I, (2, 3))[i][j] == np.sum(P_0, (2))[i][j])

# general case starting from pentagon
else:

    constraints = generate_polygon_constraints(P_I, P_0, dimensions)

return constraints

```

Cas Spécifique : Quadrilatère

Pour les configurations en quatre dimensions, comme le carré, des contraintes spécifiques sont appliquées. Nous pouvons alors nous référer à la description des contraintes présentées dans la section (5.1).

Cas Général : Formes Supérieures au Quadrilatère

Pour les formes ayant plus de quatre côtés (à partir du pentagone), les contraintes sont générées à l'aide de la fonction `generate_polygon_constraints` cité plus tôt. Cette abstraction permet de traiter les formes complexes de manière systématique et cohérente.

Le code relatif à la structure des données, l'implémentation des contraintes de symétrie et la génération des contraintes dynamiques se trouve dans le fichier `usefulFunction.py`, situé dans le répertoire `main`, sous le dossier `general_code`.

Détermination de la Faisabilité d'une Distribution

Le code suivant définit la faisabilité d'une distribution initiale P_O , qui est fixée dans notre cas à la fonction GHZ bruitée. La fonction `is_feasible` prend en entrée la visibilité v et le nombre de sommet `num_vertice` pour déterminer la taille de l'inflation à créer, et retourne la faisabilité du problème. Elle utilise l'algorithme de bisection pour déterminer la limite de faisabilité.

```

def is_feasible(v, num_vertice):
    P_0 = [(3*v + 1) / 8, (1 - v) / 8, (1 - v) / 8, (1 - v) / 8, \
            (1 - v) / 8, (1 - v) / 8, (1 - v) / 8, (3*v + 1) / 8]

    P_0 = np.reshape(P_0, (2, 2, 2))
    dimensions = (2,) * num_vertice
    P_I = create_variable_array(dimensions)
    P_I_linear = P_I.flatten()
    constraints = generate_dynamic_constraints(P_I, P_0, dimensions)

    def apply_symmetry_constraints(P_I, symmetry_groups):
        for group in symmetry_groups:
            for i in range(len(group) - 1):
                constraints.append(P_I[group[i]] == P_I[group[i + 1]])

    apply_symmetry_constraints(P_I_linear, generate_last_symmetry_group_decimal(num_vertice))

```

```

problem = cp.Problem(cp.Minimize(0), constraints)
problem.solve(solver=cp.MOSEK, canon_backend=cp.SCIPY_CANON_BACKEND)

return problem.status == cp.OPTIMAL

```

Ce code prend la visibilité v et l'inflation pour déterminer la faisabilité en utilisant une fonction objective nulle (0) et une liste de contraintes. L'algorithme de bisection suivant est utilisé conjointement pour trouver la limite de faisabilité v pour une inflation donnée :

```

epsilon = 1e-6
v_low, v_high = 0, 1
while v_high - v_low > epsilon:
    v = (v_high + v_low) / 2
    if is_feasible(v, N):
        v_low = v
    else:
        v_high = v

```

Cet algorithme permet de déterminer la valeur maximale de v pour laquelle la faisabilité n'est pas assurée, avec une précision définie par ϵ .

Le fichier du code est `distribution_single_inflation.py` se trouvant dans le répertoire `main`, dans le dossier `visibility`.

Inflation Multiple

Génération des Inflations

Dans le cas où nous considérons une inflation et toutes celle qui l'ont précédé, j'ai défini la fonction `inflation`. Le code suivant crée l'inflation et ses contraintes. La fonction `inflation` génère les contraintes pour une distribution initiale P_0 et un nombre de sommets `num_vertice`.

```

def inflation(P_0, num_vertice):
    dimensions = (2,) * num_vertice
    P_I = create_variable_array(dimensions)
    P_I_linear = P_I.flatten()
    constraints = generate_dynamic_constraints(P_I, P_0, dimensions)

    def apply_symmetry_constraints(P_I, symmetry_groups):
        for group in symmetry_groups:
            for i in range(len(group) - 1):
                constraints.append(P_I[group[i]] == P_I[group[i + 1]])

    apply_symmetry_constraints(P_I_linear, generate_last_symmetry_group_decimal(num_vertice))

    return constraints, P_I

```

Combinaisons des Inflations

La fonction `generate_constraints_adding_polygon` utilise `inflation` pour générer toutes les inflations jusqu'au niveau souhaité, en prenant en compte chaque inflation précédente. Elle ajoute ensuite les contraintes de vraisemblance entre les différents niveaux d'inflation.

```
def generate_constraints_adding_polygon(P_0, max_inflation):
    constraints = []
    P_Is = []

    for i in range(4, max_inflation + 1):
        constraints_i, P_I = inflation(P_0, i)
        P_Is.append(P_I)
        constraints += constraints_i

    for i in range(len(P_Is)):
        if i < len(P_Is) - 1:
            indices = [range(2)] * (i + 3)
            for index_tuple in product(*indices):
                prev_sum = np.sum(P_Is[i], (i + 3))
                curr_sum = np.sum(P_Is[i + 1], (i + 3, i + 4))
                constraints.append(prev_sum[index_tuple] == curr_sum[index_tuple])

    return constraints
```

Famille de Distributions

```
def is_feasible(E1, E2, num_vertice, E3=0):

    P_0 = [1/8 * (3*E1 + 3*E2 + E3 + 1), #000
            1/8 * (E1 - E2 - E3 + 1),    #001
            1/8 * (E1 - E2 - E3 + 1),    #010
            1/8 * (-E1 - E2 + E3 + 1),    #011
            1/8 * (E1 - E2 - E3 + 1),    #100
            1/8 * (-E1 - E2 + E3 + 1),    #101
            1/8 * (-E1 - E2 + E3 + 1),    #110
            1/8 * (-3*E1 + 3*E2 - E3 + 1)#111
            ]

    P_0 = np.reshape(P_0, (2, 2, 2))

    constraints = generate_constraints_adding_polygon(P_0, num_vertice)

    problem = cp.Problem(cp.Minimize(0), constraints)
    problem.solve(solver=cp.MOSEK, canon_backend=cp.SCIPY_CANON_BACKEND)

    return problem.status == cp.OPTIMAL
```

Cette fonction, `is_feasible`, détermine la faisabilité d'une distribution en fonction des paramètres $E1$, $E2$ et $E3$. La distribution initiale P_0 est définie par ces paramètres, puis

transformée en une forme adaptée pour les calculs. Les contraintes sont générées en utilisant la fonction `generate_constraints_adding_polygon`, qui prend en compte toutes les inflations jusqu'au niveau souhaité.

Pour caractériser toute famille de distributions symétriques, on itère sur une plage de valeurs pour $E2$. Pour chaque valeur de $E2$, on maximise la valeur de $E1$ afin de déterminer la limite de non-faisabilité.

Voici la formule :

$$p(a, b, c) = \frac{1}{8} \left(1 + E_1 ((-1)^a + (-1)^b + (-1)^c) \right. \\ \left. + E_2 ((-1)^{a+b} + (-1)^{b+c} + (-1)^{a+c}) + E_3 (-1)^{a+b+c} \right)$$

La distribution initiale P_O est dérivée de formule pour chaque combinaison possible de a, b et c . Chaque terme $P_O[i]$ correspond à une combinaison spécifique de a, b, c avec i représentant la position binaire de abc . Voici comment chaque terme est calculé :

$$\begin{aligned} P_O[0] &= p(0, 0, 0) = \frac{1}{8} (1 + 3E_1 + 3E_2 + E_3) \\ P_O[1] &= p(0, 0, 1) = \frac{1}{8} (1 + E_1 - E_2 - E_3) \\ P_O[2] &= p(0, 1, 0) = \frac{1}{8} (1 + E_1 - E_2 - E_3) \\ P_O[3] &= p(0, 1, 1) = \frac{1}{8} (1 - E_1 - E_2 + E_3) \\ P_O[4] &= p(1, 0, 0) = \frac{1}{8} (1 + E_1 - E_2 - E_3) \\ P_O[5] &= p(1, 0, 1) = \frac{1}{8} (1 - E_1 - E_2 + E_3) \\ P_O[6] &= p(1, 1, 0) = \frac{1}{8} (1 - E_1 - E_2 + E_3) \\ P_O[7] &= p(1, 1, 1) = \frac{1}{8} (1 - 3E_1 + 3E_2 - E_3) \end{aligned}$$

Ainsi, P_O est construit en évaluant la formule pour chaque combinaison de a, b, c et en plaçant le résultat correspondant dans la position appropriée.

Le code se trouve dans le fichier `corrolator_all_inflation_contained.py`, situé dans le répertoire `main`, sous le dossier `general_code`.

Chapter 7

Évaluation

7.1 Résultats

7.1.1 Analyse du Bruit

La motivation de cette analyse du bruit sur les distributions GHZ et W est de s'assurer que le code fonctionne correctement et produit les résultats attendus.

GHZ bruité

Dans le cadre de la distribution GHZ bruitée, il a été déterminé que la visibilité minimale, définie comme la plus petite valeur permettant de distinguer la distribution originale, est de $\sqrt{2} - 1 \approx 0.4142$. Cette valeur, qui correspond également à la visibilité maximale laissant transparaître le plus la distribution originale, est discutée en détail dans l'article intitulé *Non-Local Boxes for Networks* [11].

Nous avons évalué la visibilité obtenue par notre modèle pour différentes configurations, depuis la forme simple du carré jusqu'à des formes polygonales de 10 sommets. Les résultats des visibilités atteintes, obtenus pour chaque configuration spécifique testée individuellement par notre programme, sont présentés ci-dessous :

Nombre de sommets	Valeur de v
4	0.5000009536743164
5	0.5000009536743164
6	0.4142141342163086
7	0.4142141342163086
8	0.4142141342163086
9	0.4142141342163086
10	0.4142141342163086

Table 7.1: Limite de Faisabilité pour la distribution GHZ bruité

Nous observons initialement que, pour les formes de carré (4 sommets) et de pentagone (5 sommets), la limite de non-faisabilité est atteinte à une visibilité de 0.5000009536743164. Une augmentation même légère de cette visibilité, par exemple à 0.51, rend la distribution non

réalisable sous les contraintes de symétrie pour un réseau triangulaire. Cela démontre que la distribution symétrique GHZ ne peut être reproduite fidèlement. Si la distribution bruitée tente de se rapprocher davantage de la distribution originale GHZ, la non-faisabilité est confirmée dès la valeur de $v = 0.5000009536743164$, signalant que la réduction de bruit rend la distribution incompatible avec les contraintes de symétrie et de non-signallement imposées par le réseau initial.

En outre, en augmentant le nombre de sommets à partir de l'hexagone, nous constatons que les contraintes deviennent plus sévères, diminuant la visibilité à 0.4142141342163086. Cette observation suggère que la visibilité admissible pour le carré et le pentagone révèle excessivement la distribution originale, et que pour maintenir la faisabilité avec une symétrie accrue, il est nécessaire d'introduire davantage de bruit. Cette analyse renforce la conclusion que la distribution GHZ originale n'est pas réalisable dans un modèle tripartite à symétrie permutatonnelle, étant donné les strictes exigences de non-signallement. Des expériences supplémentaires avec plus de sommets ont systématiquement démontré que, sous ces contraintes, la distribution GHZ symétrique est irréalisable.

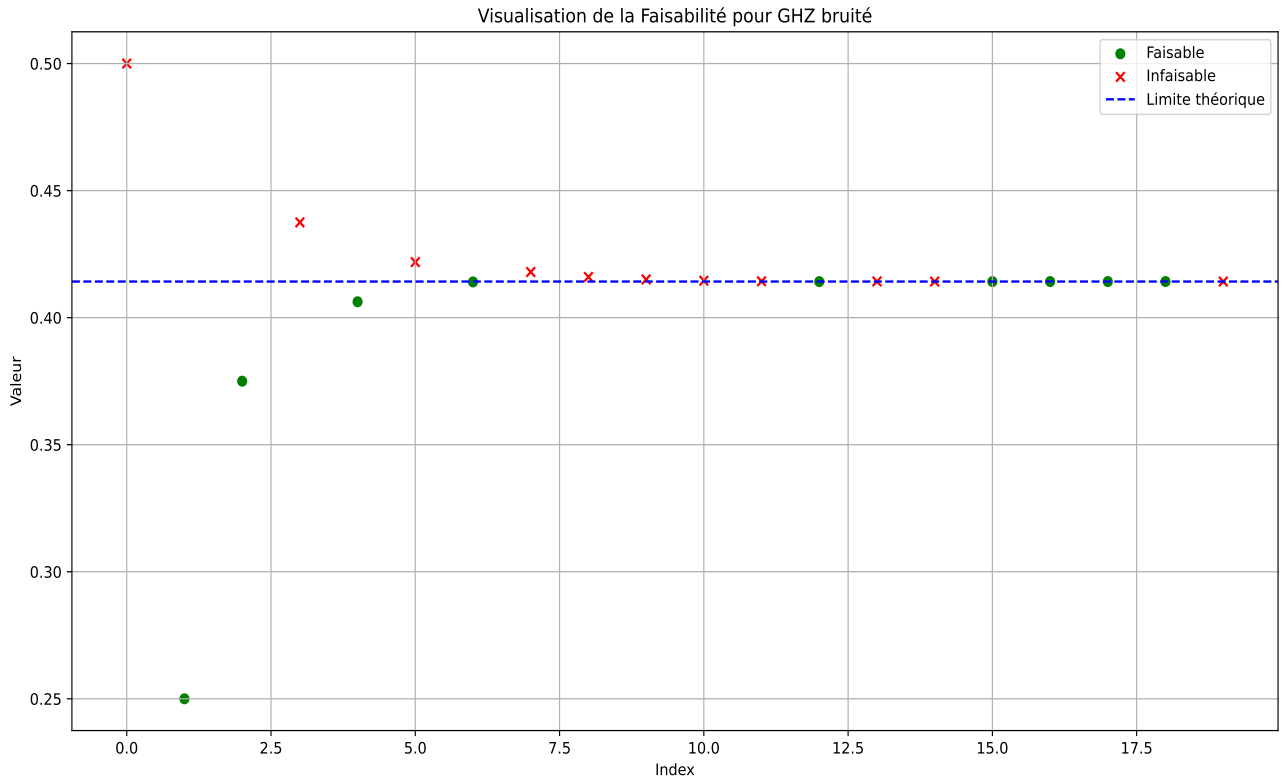


Figure 7.1: Analyse de la convergence de l'algorithme de bisection pour la visibilité dans un modèle GHZ bruité pour l'inflation hexagonale, indiquant la faisabilité (points verts) et la non-faisabilité (points rouges) à différentes itérations.

Ci-dessus, la figure illustre l'analyse de faisabilité pour le GHZ bruité, mettant en évidence les points où la distribution est considérée comme faisable ou non en fonction des valeurs testées lors de l'itération de l'algorithme:

Nous observons que l'algorithme de bisection atteint effectivement la limite théorique de $\sqrt{2} - 1$, conformément aux attentes. Cette correspondance sert non seulement à confirmer le bon fonctionnement de notre code mais aussi à valider que les contraintes ont été correctement établies. De plus, la convergence de l'algorithme est remarquablement rapide, puisque le résultat souhaité est environ atteint après seulement une dizaine d'itérations.

Nous allons aussi établir la limite mais en considérant cette fois une inflation avec tout celles qui l'a précède.

Nombre de sommets	Valeur de v
4	0.5000009536743164
5	0.5000009536743164
6	0.4142141342163086
7	0.4142141342163086
8	0.4142141342163086
9	0.4142141342163086
10	0.4142141342163086

Table 7.2: Limite de Faisabilité pour la distribution GHZ bruité pour chaque inflation contenant les précédentes

On observe que les résultats obtenus sont les mêmes que précédemment, indiquant que les contraintes ajoutées ne permettent pas de renforcer davantage les conditions pour obtenir des valeurs encore plus petites, rejoignant ainsi la limite théorique établie, que la distribution initiale ne peut pas être générée sous les contraintes du réseau symétrique triangulaire. Par conséquent dès lors que la visibilité dépasse le seuil de 0.4142, nous sommes certain que la distribution n'est pas réalisable dans notre modèle triangulaire possédant des sources identiques.

W bruité

Nous procéderons à une analyse supplémentaire sur une autre distribution symétrique, celle de la distribution W , afin de déterminer jusqu'à quel seuil de visibilité la distribution originale peut être préservée avant d'être jugée infaisable en comptant une inflation à la fois, dans le cas d'un modèle symétrique.

Nombre de sommets	Valeur de v
4	0.8038473129272461
5	0.794734001159668
6	0.796788215637207
7	0.8002099990844727
8	0.8038473129272461
9	0.8038473129272461
10	0.8002901077270508
11	0.8003454208374023
12	0.8017206192016602

Table 7.3: Limite de Faisabilité pour la distribution GHZ bruité

On observe que la visibilité varie avec le nombre de sommets, suggérant que l'architecture du réseau et le nombre de connexions influencent la capacité à maintenir la visibilité requise pour une reproduction fidèle de la distribution W .

Elle est surtout bien plus élevée que la borne supérieure de 0.5966 déterminée pour les modèles locaux [12] avec la distribution W , et dépasse également la borne supérieure de 0.7472 établie pour les modèles quantiques asymétriques [15]. Ainsi dans le cadre d'un modèle non-signalant symétrique la visibilité atteint un minimum à 0.7947, suggérant que c'est la borne supérieure sous laquelle la distribution W admet potentiellement un modèle symétrique.

On note que pour la configuration du pentagone, la visibilité diminue à 0.7947 et ne descend pas plus bas, indiquant que les contraintes spécifiques à cette configuration sont les plus strictes, résultant en une visibilité réduite et en une moindre représentation de la distribution originale. Certifiant plus sévèrement que la distribution d'origine ne peut être accompli dans le cas d'un modèle tripartite symétrique.

Nous observons aussi une augmentation de la visibilité à partir de l'hexagone, se poursuivant jusqu'à l'octogone, et retrouvant ainsi des niveaux de visibilité comparables à ceux observés pour le carré.

Cette visibilité représente le niveau le plus élevé possible permettant de révéler au plus possible la distribution originale, confirmant ainsi que la distribution ne peut pas être pleinement réalisée dans un modèle tripartite symétrique et que notre code fonctionne comme prévu.

Il est à noter que la configuration pentagonale impose des contraintes plus sévères, où la visibilité est plus basse, empêchant la reproduction fidèle de la distribution originale. Cette observation souligne que certaines configurations peuvent plus ou moins améliorer la visibilité, donnant ainsi une représentation plus fidèle de la distribution originale avant d'atteindre les limites de faisabilité, soulignant ainsi l'idée qu'une certaine inflation pourrait certifier la capacité du réseau

de base à ne pas être capable de générer une distribution tandis qu'une autre ne détecterait pas forcément cette incapacité.

En considérant chaque inflation avec toutes les inflations plus petites, nous obtenons les nouveaux résultats ci-dessous:

Nombre de sommets	Valeur de v
4	0.8038473129272461
5	0.794734001159668
6	0.794734001159668
7	0.794734001159668
8	0.794734001159668
9	0.794734001159668
10	0.794734001159668
11	0.794734001159668
12	0.794734001159668

Comme nous pouvons le constater, dès que la visibilité la plus basse pour l'inflation 5 a été détectée, les autres ont obtenu également cette même visibilité. On peut donc noter que, dans le cas d'une inflation isolée, il n'y a pas de hiérarchie mise en place. Cependant, dès que nous considérons une inflation, en tenant compte les plus petites inflations précédentes, chaque inflation n'est pas plus générale que la suivante en raison de l'ajout de contraintes. De plus cela suggère que, puisque la visibilité ne diminue pas davantage c'est une forte indication, qu'il s'agit probablement (bien que ce ne soit pas une preuve) de la valeur minimale critique pour les modèles symétriques.

En déterminant que la visibilité théorique minimale pour la distribution GHZ est respectée, et bien que dans le cas de la distribution W aucune visibilité n'avait été établie pour un modèle respectant le non-signallement et de la symétrie, nous avons déterminé une borne supérieure à celle déjà trouvée pour des modèles locaux ou quantiques asymétriques. Toutefois malgré que cette borne soit plus élevée, nous avons pu prouver que la distribution originale W ne pouvait pas être générée dans le cadre d'un modèle symétrique, certifiant malgré tout notre approche.

Ce qui permet de conclure que nos deux distributions symétriques ne peuvent pas être réalisées sous les contraintes d'un modèle symétrique où toutes les sources sont identiques. Cette analyse nous a permis de vérifier que les contraintes appliquées sont conformes à la théorie sous-jacente du problème.

7.1.2 Résultats Principaux

Maintenant que le code est fonctionnel, nous allons utiliser la formule (4.2) pour décrire toutes les familles de distributions qui sont symétrique sous permutations des parties. Comme mentionné précédemment, nous allons itérer sur une gamme de valeurs de E_2 (l'espérance pour deux parties) et chercher à maximiser E_1 (l'espérance pour une partie), tout en fixant E_3 à 0. Cette méthode nous permettra de caractériser toutes les familles de distributions symétriques et de déterminer les limites de faisabilité de celles-ci dans un modèle symétrique, en examinant chaque inflation individuellement.

Inflation seule

Voici ci-dessous la représentation graphique des résultats obtenus :

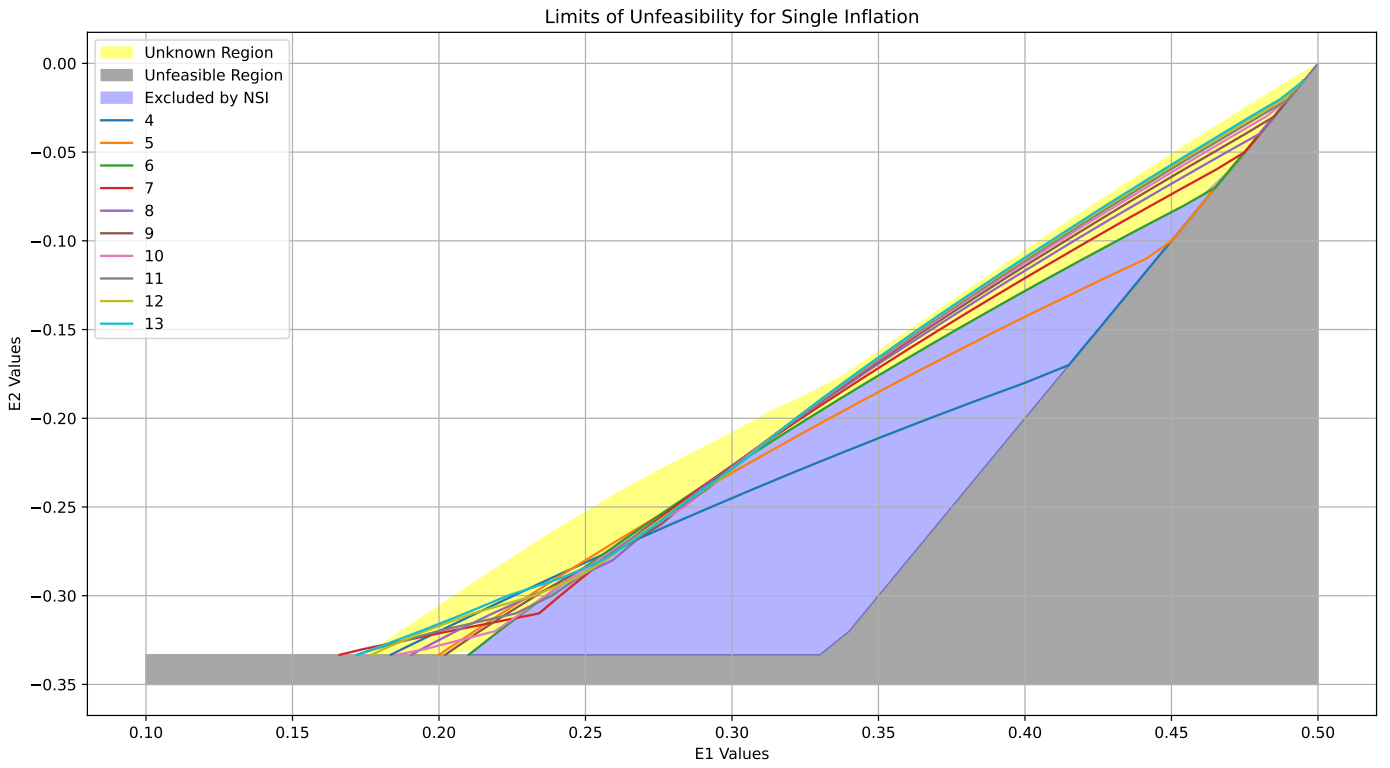


Figure 7.2: Comme pour le graphe de l'analyse des corrélations de E_2 vs E_1 dans l'état de l'art, tout ce qui se trouve en blanc au-dessus des régions colorées correspond aux distributions suivant des modèles trilocalisés. La région grise est exclue car elle ne représente pas des probabilités valides. La région bleue marque les distributions qui ne sont pas régies par les contraintes de non-signallement et d'indépendance. La région jaune contient des corrélations qui, bien que soumises aux contraintes de non-signallement et d'indépendance, ne correspondent à aucun modèle trilocale connu. Les courbes numérotées représentent les différents niveaux d'inflation. Tout ce qui se trouve en dessous d'un niveau d'inflation donné correspond aux distributions qui ne peuvent pas être générées.

Notons que tout ce qui se trouve en dessous de la limite d'un niveau d'inflation est jugé non-faisable pour cette configuration particulière. Cependant, pour les éléments situés au-dessus, il n'est pas possible de confirmer leur non-faisabilité sans envisager qu'une autre inflation puisse imposer une limite plus contraignante, en particulier dans le contexte d'un réseau triangulaire symétrique.

Nous observons que les différentes inflations définies ne suivent pas de hiérarchie fixe jusqu'à un seuil approximatif de $E_1 = 0.31$. Au-delà de ce point, une structure hiérarchique commence à se manifester, alors qu'avant ce seuil, aucune hiérarchie claire n'est établie. Cette non-hiérarchie impliquant que des distributions ne pouvant être générées à un certain niveau d'inflation peuvent l'être à des niveaux d'inflation inférieurs. Soulignant à première vue de considérer de nouvelles inflations en tenant compte des niveaux inférieurs.

On observe également que pour l'inflation de 13, à partir de la valeur de $E_1 = 0.33$, les distributions s'approchent de manière significative de la limite où des modèles trilocaux symétriques ont été identifiés. Cette proximité confirme qu'un bon nombre de distributions, pour lesquelles aucun modèle trilocal n'a pu être trouvé dans la région jaune, ne sont en réalité pas réalisables dans le cadre d'un modèle symétrique.

En extrapolant à partir de ces observations, on peut conjecturer que des valeurs d'inflation supérieures à 13 pourraient nous amener encore plus près de la limite local. Renforçant l'affirmation selon laquelle des distributions symétriques ne sont pas représentables par des modèles entièrement symétriques.

Espacement

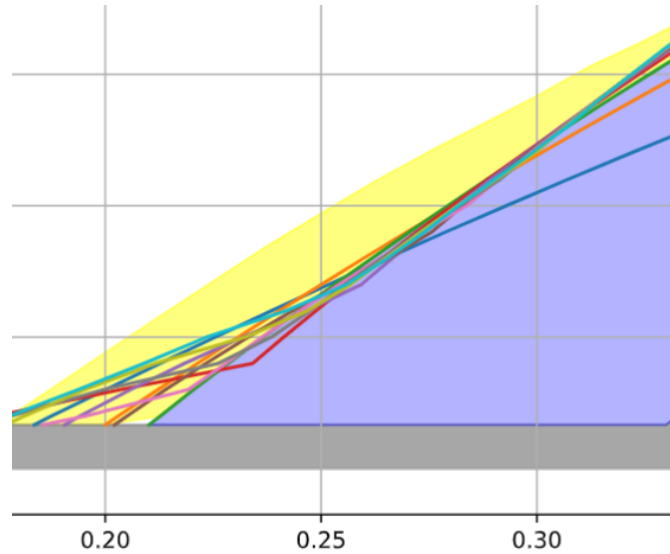


Figure 7.3: Illustration du l'espace vide, environ $E_1 = 0.18$ et $E_1 = 0.33$

Dans l'analyse du graphique, il est notable d'observer un espace significatif dans la région jaune et les courbes représentant les différents niveaux d'inflation. Aucune des inflations représentées ne traverse cette zone, ce qui peut indiquer que les distributions situées dans cet espace pour-

raient être caractérisées par des modèles respectant une certaine symétrie.

Dans notre étude, cette observation suggère en avant-garde d’explorer un nouveau type d’inflation, ce qui pourrait améliorer notre compréhension afin de déterminer une limite de ‘non-faisabilité’ mieux définie et infranchissable par nos contraintes actuels.

Distributions symétriques non réalisables

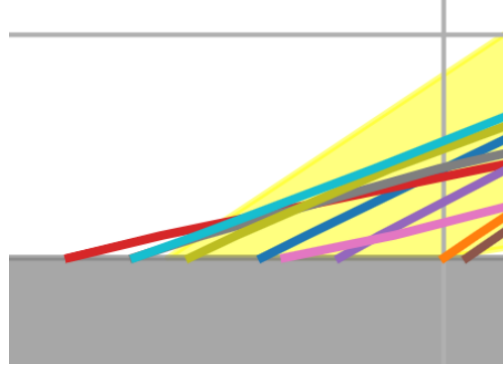


Figure 7.4: Illustration de distributions symétriques possédant un modèle local qui ne peut être généré dans le cadre d’un modèle symétrique, entre $E_1 = 0.15$ et $E_1 = 0.2$

Nous pouvons également observer que certaines distributions symétriques, pour lesquelles des modèles locaux ont été trouvés, ne peuvent pas être générées dans les cas d’inflations 7 et 13. Elles ne sont donc pas réalisables dans un réseau triangulaire avec des sources identiques. Cela confirme que certaines distributions symétriques, ou des modèles locaux non symétriques sont capables de les générer, ne peuvent pas être générés dans le cadre d’un modèle triangulaire symétrique. Il est important de noter qu’il s’agit d’un résultat général. Ainsi, même si nous avions accès à des systèmes quantiques, ou si de futurs systèmes physiques permettaient d’atteindre des corrélations plus fortes que celles autorisées par la mécanique quantique, nous ne pourrions pas les utiliser pour générer ces distributions sous un modèle symétrique. En conclusion, certaines distributions symétriques ne peuvent être représentées par aucun type de modèle symétrique.

Afin d’augmenter la sévérité des contraintes appliquées, nous adoptons une stratégie d’inflation plus complexe avec davantage de restrictions. En intégrant une inflation polygonale ainsi que celle qui la précède, nous ajoutons des contraintes de cohérence entre chaque niveau d’inflation. Par un effet de transitivité, des restrictions sont ainsi établies entre l’inflation la moins complexe et la plus élaborée.

Inflation Multiple

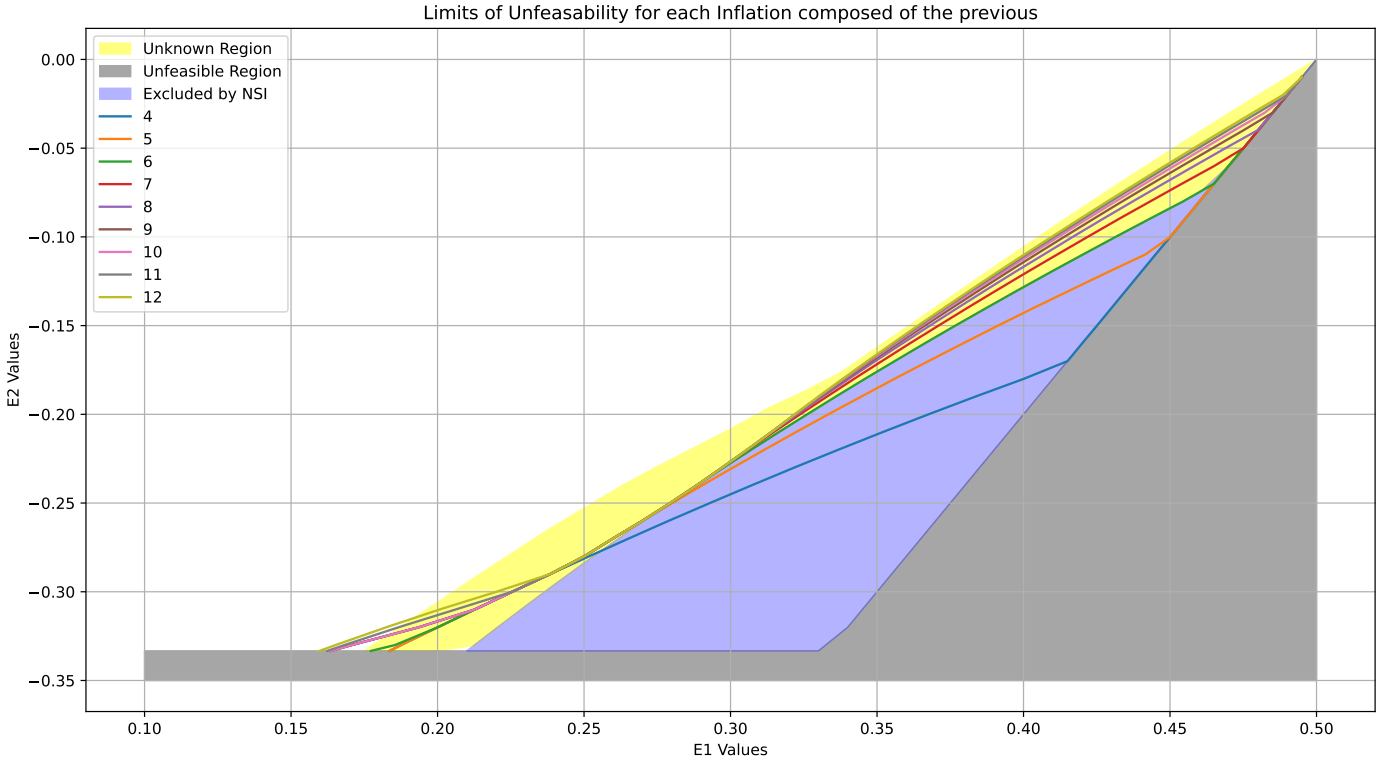


Figure 7.5: Comme précédemment, mais avec chaque inflation contenant les précédentes

On note qu'une hiérarchie croissante s'établit parmi les inflations, avec chacune étant moins générale que la précédente. On observe que l'ajout des contraintes des inflations précédentes accroît la sévérité des nouvelles inflations. Ainsi, même si une inflation donnée était moins sévère à un instant donné qu'une autre inflation, elle devient plus contraignante grâce aux contraintes cumulées des inflations précédentes, renforçant ainsi l'ensemble des contraintes appliquées. On note d'ailleurs qu'en considérant les inflations précédentes nous n'avons pu obtenir que jusqu'à l'inflation 12 dû au temps de temps de calcul trop grands.

On note nettement mieux l'espace vide générer qui permet de délimiter les limites de 'non-faisabilité' renforçant l'idée que cette espace des corrélations ne peut possiblement pas être atteint sous les contraintes de notre problèmes actuelle. Cet espace vide toujours visible avec nos nouvelles contraintes souligne l'importance de réévaluer les modèles actuels et d'explorer potentiellement d'autre méthode permettant d'approfondir notre compréhension des limites des distributions réalisables dans un réseau triangulaire.

On note d'ailleurs un nouveau point; précédemment seulement l'inflation 13 et 7 individuellement permettait de dire que des distributions symétriques ou des modèles locaux ont être déterminer ne peuvent pas être représenter, mais ici avec l'ajout des contraintes des niveaux inférieur, nous avons que les inflations à partir de l'heptagone possèdent toutes cette caractéristique.

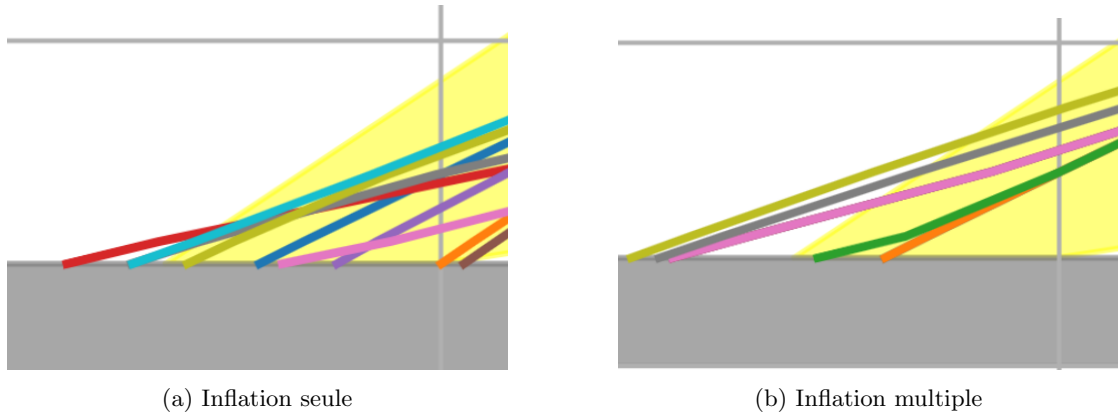


Figure 7.6: Comparaison entre inflation seul et inflations contenant les précédentes

On peut alors noter que les nouvelles contraintes couvrent un plus grand nombre de distributions, renforçant l'idée que l'ajout de ces dernières est pertinent. Cela permet de certifier l'infaisabilité dans davantage de distributions en utilisant le fait que chaque nouvelle inflation est plus contraignante que la précédente. L'ajout de ces contraintes semble avoir ajouter plus de précision et de fermeté au solutions, ce qui a permis, dans le cas de l'inflation 12 multiple, de certifier un plus grand nombre de distributions non réalisables.

Meilleur de chaque inflation VS Inflation la plus élevée contenant les précédentes

Pour une analyse plus nette de la différence entre inflation unique et celle contenant de multiple inflation, nous établirions le graphe de l'inflation la plus élevée contenant les inflations inférieures contre le meilleur de chaque inflations pour ainsi vérifier que notre approche, de considérer un nombre d'inflation successive était la bonne.

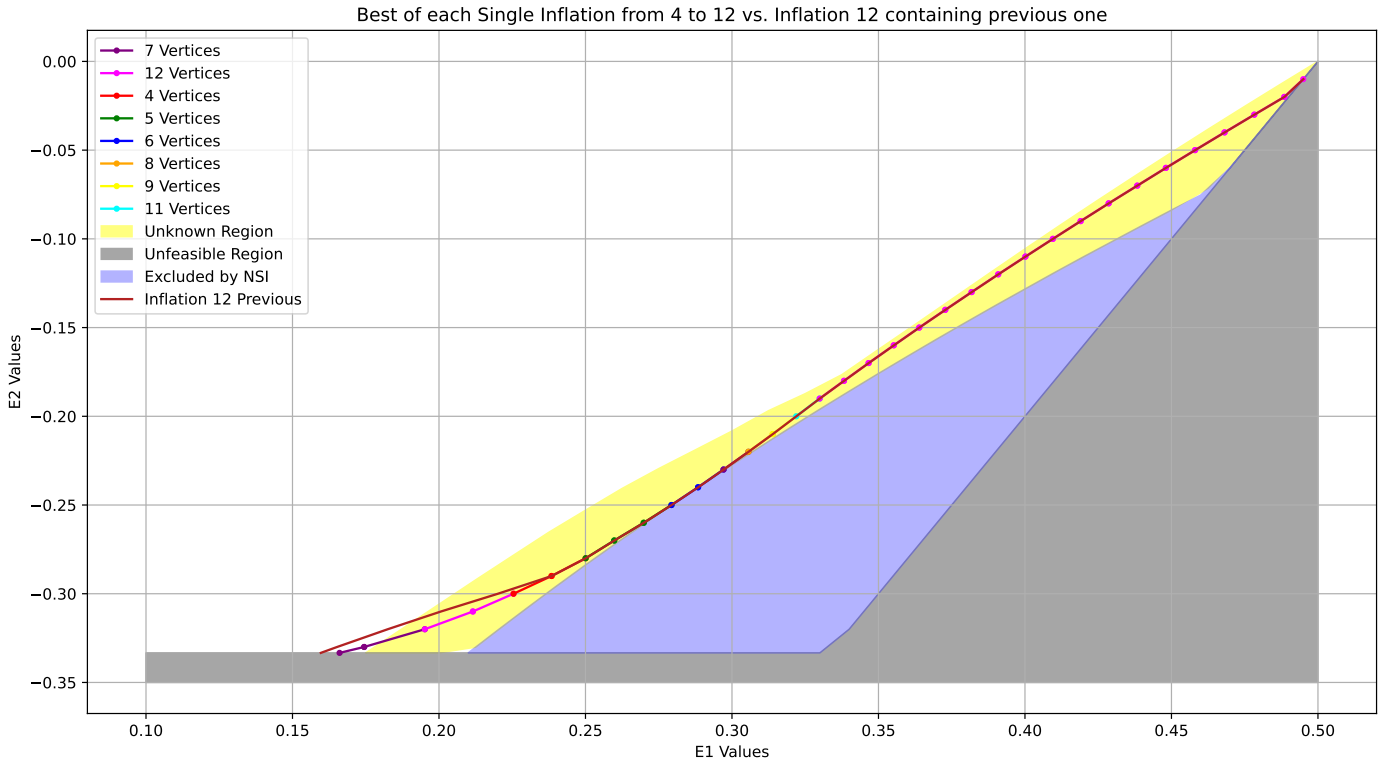


Figure 7.7: Voici les points reliés des meilleures inflations individuelles détectées, allant de 4 à 12 sommets. Ces points représentent les valeurs optimales de E_1 , comparées à la courbe magenta représentant l'inflation 12, qui englobe toutes les toutes les inflations inférieures.

Nous constatons bien que l'inflation englobant les inflations inférieures est meilleure pour les six premiers points, la courbe fusionne ensuite avec les tracés des points. Cela montre qu'elle est supérieure à celle qui prend uniquement les meilleurs points, certifiant ainsi plus de distributions, qui ne peuvent être générées dans le cas du triangle.

Ainsi nous pouvons désormais restreindre à un certain ensemble de modèles les distributions symétrique ou aucun modèle trilocale n'a pu être trouvé, car nous sommes sûr du moins que ces distributions symétrique ne sont pas en mesure d'être générées par un modèle symétrique local, ou encore quantique.

Chapter 8

Conclusion

Notre objectif initial était de démontrer qu’une distribution symétrique donnée ne pouvait pas être générée dans un réseau triangulaire avec des parties identiques, dans le cadre d’un modèle symétrique.

Pour ce faire, nous avons utilisé le principe d’inflation afin de reformuler notre problème en un programme linéaire, ce qui nous a permis de déterminer la faisabilité de cette distribution sous les contraintes du réseau initial.

L’analyse des résultats a premièrement révélé qu’un bon nombre de distributions symétrique qui satisfaisaient les contraintes d’indépendance et de non-signallement ne sont en fait pas réalisables dans le contexte du réseau triangulaire symétrique, ce qui permet de retirer un nombre de distributions réalisable dans un contexte symétrique. De plus, nous avons constaté que considérer une seule inflation à la fois n’était pas la meilleure stratégie. En effet, les contraintes des inflations individuelles ne sont pas suffisamment spécifiques pour établir les limites des distributions qui ne peuvent pas être représentées dans un réseau triangulaire. Il est donc crucial d’agréger les contraintes de différentes inflations pour obtenir une analyse plus précise et certifier la non-génération des distributions dans ce contexte.

Un deuxième point important à souligner est que les contraintes générales énoncées ont été suffisantes pour englober toutes les contraintes possibles, qu’il s’agisse de celles relatives à la connexion entre le réseau original et l’inflation, et de celles concernant l’indépendance des parties. Ainsi, il n’a pas été nécessaire de définir toutes les contraintes spécifiques, car elles constituaient un sous-ensemble des contraintes déjà couvertes par les contraintes générales. Cela nous a permis de définir une abstraction des contraintes applicable à toute inflation de forme polygonale.

Finalement, le dernier point à souligner est que, dans le cas d’un modèle symétrique, il était trivial de montrer qu’un tel modèle pouvait générer des distributions symétriques. Cependant, nous avons démontré que l’inverse n’est pas toujours vrai : des distributions symétriques ne peuvent pas nécessairement être générées par des modèles symétriques. En fait, nous avons observé que certaines distributions symétriques ne pouvaient pas être générées par des modèles symétriques, tandis que des modèles locaux, ne respectant pas la symétrie, pouvaient les générer. Cette observation, bien que contre-intuitive, souligne la complexité des corrélations et montre que les propriétés des distributions ne se traduisent pas toujours de manière directe en un modèle particulier.

Ainsi, peu importe le modèle que nous ayons, qu'il soit local, quantique ou issu d'un système physique encore inconnu avec des corrélations plus fortes que celles établies par la mécanique quantique, tant qu'il possède la conjecture minimale de symétrie et respecte les principes de non-signallement, nous ne pourrions pas utiliser ces modèles pour générer ces distributions.

Ces résultats montrent que l'exploration des contraintes d'inflation ainsi que des modèles symétriques et non symétriques est essentielle pour une compréhension approfondie des limitations et des possibilités dans la génération de distributions dans le réseau triangulaire. En résumé, notre étude a permis de mieux cerner les limites et les potentiels des différents modèles dans le contexte des distributions symétriques, soulignant la nécessité d'une approche globale et précise pour certifier l'impossibilité de générer certaines distributions dans un modèle spécifique.

Notons que ces découvertes seraient intéressantes non seulement sur le plan fondamental, mais également en pratique. En effet, toute l'analyse effectuée se situant au niveau des distributions de probabilité et des statistiques de l'expérience, signifierait qu'il ne serait pas nécessaire de connaître le système en place, ni de faire confiance aux mesures effectuées par les autres parties pour être certain que tous collaboreraient conformément aux règles appliquées à tous. Cela serait particulièrement important dans des scénarios cryptographiques où les parties n'auraient pas confiance en le système et ne pourraient pas se faire confiance mutuellement. Ainsi, les parties pourraient vérifier l'intégrité des systèmes mis en place et s'assurer que chaque partie respecterait les protocoles définis, garantissant ainsi la sécurité et la fiabilité des communications et des interactions.

En conclusion, cette approche offrirait également une couche supplémentaire de sécurité qui serait cruciale dans des applications telles que la transmission de données sensibles et les communications sécurisées entre entités méfiantes.

Suggetion

Au cours de nos calculs d'inflation, nous avons rapidement constaté une augmentation significative du temps de calcul. Par exemple, il a fallu sept jours de calculs sur le HPC BAOBAB pour obtenir les données relatives à l'inflation 13. Voici quelques suggestions pour améliorer les performances de calcul à l'avenir:

Premièrement, nous pourrions envisager d'effectuer une grid search en parallèle afin de remplacer l'utilisation de l'algorithme de bisection. En explorant une grille de valeurs prédéfini simultanément, nous pourrions sensiblement augmenter nos performances. Cette approche impliquerait de déjà connaître l'espace recherche pertinent pour ainsi le subdiviser en fonction du nombre de processus impliqués, permettant ainsi une exploration plus efficace et plus rapide.

Deuxièmement, il serait potentiellement bénéfique de vectoriser notre programme linéaire. Étant donné le nombre exponentiel de contraintes ajoutées à chaque nouveau niveau d'inflation, CVXPY commence à rencontrer des difficultés en raison du nombre croissant de contraintes à satisfaire. La vectorisation pourrait améliorer les performances du solveur en optimisant le traitement de ces contraintes.

Ces suggestions vont au-delà du cadre de ce travail, mais elles seraient judicieuses pour de futures améliorations. Elles permettraient d'obtenir plus de résultats et de réaliser une analyse encore plus précise.

Acknowledgements

'The computations were performed at University of Geneva using Baobab HPC service.'

Remerciement

Je souhaite exprimer ma gratitude à mes encadrants qui ont consacré leur temps et leur expertise pour m'accompagner tout au long de ce projet. Leur compréhension et leur aide précieuse ont été essentielles à la réalisation de ce travail. Les connaissances et compétences acquises grâce à leur soutien me seront bénéfiques non seulement pour le reste de mon parcours académique, mais également pour ma future carrière professionnelle.

Je tiens à exprimer une reconnaissance particulière au Dr. Pozas-Kerstjens, qui a su m'encadrer avec bienveillance et disponibilité. Son expertise et son engagement ont été déterminants pour la réussite de ce projet, et je lui en suis profondément reconnaissant.

Annexe

Tout le code et les données sont accessible sur le lien:
https://gitlab.unige.ch/Christian.William/project_bachelor

Bibliography

- [1] J. S. Bell. “On the Einstein Podolsky Rosen paradox”. In: *Physics Physique Fizika* 1 (3 Nov. 1964), pp. 195–200. DOI: 10.1103/PhysicsPhysiqueFizika.1.195. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysicsPhysiqueFizika.1.195>.
- [2] Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition*. Cambridge University Press, 2010.
- [3] D. Rohrlich and S. Popescu. “Nonlocality as an axiom for quantum theory”. In: (1995). arXiv: quant-ph/9508009 [quant-ph]. URL: <https://arxiv.org/pdf/quant-ph/9508009.pdf>.
- [4] John F. Clauser et al. “Proposed Experiment to Test Local Hidden-Variable Theories”. In: *Phys. Rev. Lett.* 23 (15 Oct. 1969), pp. 880–884. DOI: 10.1103/PhysRevLett.23.880. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.23.880>.
- [5] Stephen Boyd and Lieven Vandenberghe. *Convex Optimization*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2004, pp. 487–531. URL: <https://stanford.edu/~boyd/cvxbook/>.
- [6] GEORGE B. DANTZIG. *Linear Programming and Extensions*. Princeton University Press, 1991. URL: <http://www.jstor.org/stable/j.ctt1cx3tvq> (visited on 06/08/2024).
- [7] Nicolas Brunner et al. “Bell nonlocality”. In: *Reviews of Modern Physics* 86.2 (Apr. 2014), pp. 419–478. ISSN: 1539-0756. DOI: 10.1103/revmodphys.86.419. URL: <http://dx.doi.org/10.1103/RevModPhys.86.419>.
- [8] Steven Diamond and Stephen Boyd. “CVXPY: A Python-Embedded Modeling Language for Convex Optimization”. In: *Journal of Machine Learning Research* (2016). To appear. URL: https://stanford.edu/~boyd/papers/pdf/cvxpy_paper.pdf.
- [9] Elie Wolfe, Robert W. Spekkens, and Tobias Fritz. “The Inflation Technique for Causal Inference with Latent Variables”. In: *Journal of Causal Inference* 7.2 (July 2019). ISSN: 2193-3677. DOI: 10.1515/jci-2017-0020. URL: <http://dx.doi.org/10.1515/jci-2017-0020>.
- [10] Armin Tavakoli et al. “Bell nonlocality in networks”. In: *Reports on Progress in Physics* 85.5 (Mar. 2022), p. 056001. ISSN: 1361-6633. DOI: 10.1088/1361-6633/ac41bb. URL: <http://dx.doi.org/10.1088/1361-6633/ac41bb>.
- [11] Jean-Daniel Bancal and Nicolas Gisin. “Nonlocal boxes for networks”. In: *Physical Review A* 104.5 (Nov. 2021). ISSN: 2469-9934. DOI: 10.1103/physreva.104.052212. URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.104.052212>.
- [12] José Mário da Silva and Fernando Parisio. “Numerically assisted determination of local models in network scenarios”. In: *Physical Review A* 108.5 (Nov. 2023). ISSN: 2469-9934. DOI: 10.1103/physreva.108.052602. URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.108.052602>.

- [13] Alejandro Pozas-Kerstjens et al. “Post-quantum nonlocality in the minimal triangle scenario”. In: *New Journal of Physics* 25.11 (Nov. 2023), p. 113037. ISSN: 1367-2630. DOI: 10.1088/1367-2630/ad0a16. URL: <http://dx.doi.org/10.1088/1367-2630/ad0a16>.
- [14] Miguel Navascués and Elie Wolfe. “The Inflation Technique Completely Solves the Causal Compatibility Problem”. In: *Journal of Causal Inference* 8.1 (Sept. 2020), pp. 70–91. ISSN: 2193-3677. DOI: 10.1515/jci-2018-0008. URL: <http://dx.doi.org/10.1515/jci-2018-0008>.
- [15] Alejandro Pozas Kerstjens. “Quantum information outside quantum information”. PhD thesis. UPC, Institut de Ciències Fotòniques, Oct. 2019. DOI: 10.5821/dissertation-2117-170923. URL: <http://hdl.handle.net/2117/170923>.