Probabilidad y Estadística - Grado en Matemáticas
Curso 2020-2021

Práctica de ordenador del Tema 3

Indicaciones generales.

En esta práctica vamos a estudiar las funciones que proporciona el lenguaje R para el cálculo en los modelos de distribución de probabilidad. En la tabla siguiente mostramos algunos modelos que ya conocemos: Binomial, Uniforme, Normal y Ji-cuadrado.

	Binomial	Uniforme	Normal	Ji-cuadrado
Densidad (prob.)	`dbinom`	`dunif`	`dnorm`	`dchisq`
Distribución	`pbinom`	`punif`	`pnorm`	`pchisq`
Cuantil	`qbinom`	`qunif`	`qnorm`	`qchisq`
Números aleatorios	`rbinom`	`runif`	`rnorm`	`rchisq`

Como vemos, los nombres de las funciones empiezan por una letra:

d En este caso la función calcula la función de densidad si la variable es continua (por ejemplo, la Normal). Si la variable es discreta (por ejemplo, la Binomial), calcula la probabilidad del valor concreto.

p La función calcula la probabilidad acumulada, o función de distribución, $\mathbb{P}(X \leq x)$. Si la variable es continua (por ejemplo, la Normal) es el área bajo la función de densidad. Si la variable es discreta (por ejemplo, la Binomial), calcula la probabilidad del valor concreto y de todos los valores inferiores a él.

q La función calcula el cuantil, esto es, se le suministra la probabilidad, p, y da como resultado el valor x_0 tal que $\mathbb{P}(X \leq x_0) = p$.

r Proporciona números aleatorios extraídos del modelo de distribución considerado.

En las funciones que empiezan por **p** y **d** hay que dar el valor de x y devuelve una probabilidad, p. En las funciones que empiezan por **q** hay que dar una probabilidad y devuelve la abscisa x. En las funciones que empiezan por **r** hay que indicar el número de observaciones independientes que se desea extraer.

Además, hay que proporcionar los parámetros del modelo. Por ejemplo, las funciones dbinom, pbinom y qbinom necesitan los valores del número de intentos y la probabilidad de éxito, mientras que la distribución Ji-cuadrado requiere el número de grados de libertad. En la normal indicaremos la media y la desviación típica, salvo que sean cero y uno, respectivamente, que son valores que R toma por defecto.

Actividad 1: Estudio de la distribución Normal univariante.

(a) Utilizando la función `dnorm` de R vamos a representar las funciones de densidad:

$$N(0,1) \qquad N(0,2^2) \qquad N(2,1) \qquad N(-3,0.5^2).$$

(b) Utilizando la función `pnorm` de R vamos a calcular las siguientes probabilidades:

$$\mathbb{P}(Z<1.52) \qquad \mathbb{P}(Z>2) \qquad \mathbb{P}(-1<Z<2),$$

siendo $Z \in N(0,1)$.

(c) Utilizando la función `qnorm` de R vamos a calcular los valores z_0 tales que

$$\mathbb{P}(Z \leq z_0) = 0.87 \qquad \mathbb{P}(Z > z_0) = 0.05 \qquad \mathbb{P}(|Z| > z_0) = 0.01,$$

siendo $Z \in N(0,1)$.

Indicaciones.

(a) Como resultado de este apartado obtendremos la Figura 2 de los apuntes del Tema 3. Para representar estas funciones, construiremos un vector que contenga una rejilla de puntos equiespaciados en un intervalo razonable, donde estas funciones tomen valores claramente mayores que cero (que no se solapen visualmente con el eje de abscisas). Para una distribución normal estándar esos valores están entre -3 y +3, y para una distribución $N(\mu,\sigma^2)$ están entre $\mu-3\sigma$ y $\mu+3\sigma$. El vector con la rejilla se puede obtener con la función `seq`.

Al aplicar cada una de las cuatro funciones correspondientes a las distribuciones indicadas, $N(0,1)$, $N(0,2^2)$, $N(2,1)$ y $N(-3,0.5^2)$, se obtienen cuatro vectores de ordenadas. Se pueden representar las cuatro funciones en el mismo gráfico con la función `matplot`, con la opción `type=‘‘l’’`.

(b) La función `pnorm` calcula la función de distribución, por lo que la primera probabilidad que se solicita, $\mathbb{P}(Z<1.52)$, es una aplicación inmediata de esta función. Las otras dos probabilidades requieren argumentos como la probabilidad del complementario, o la diferencia de probabilidades.

(c) El primer valor de z_0 es una aplicación directa de la función cuantil, `qnorm`, mientras que en los otros dos hay que aplicar algún razonamiento sobre complementarios o simetrías de la distribución normal. Para realizar este apartado y quizá también el apartado anterior, se recomienda razonar sobre el dibujo de una campana de Gauss.

Actividad 2: Estudio de la distribución ji-cuadrado.

(a) Utilizando la función `dchisq` de R vamos a representar las funciones de densidad:

$$\chi^2_3 \qquad \chi^2_5 \qquad \chi^2_8$$

(b) Utilizando la función `pchisq` de R vamos a calcular las siguientes probabilidades:

$$P\left(\chi^2_5 < 6\right) \qquad P\left(\chi^2_5 > 2\right) \qquad P\left(1 < \chi^2_5 < 7\right).$$

(c) Utilizando la función `qchisq` de R vamos a calcular los valores x_0 tales que

$$\mathbb{P}(\chi^2_5 \leq x_0) = 0.87 \qquad \mathbb{P}(\chi^2_5 > x_0) = 0.05.$$

Indicaciones.

Las indicaciones para esta actividad son muy similares a la Actividad 1. Para representar las densidades ji-cuadrado hay que tener en cuenta que son variables positivas, y que su soporte crece con los grados de libertad, estando contenido prácticamente entre el valor cero y tres veces sus grados de libertad. Como resultado obtendremos la Figura 6 de los apuntes del Tema 3.