□础算法

类型	范围
int	$[-2^{31},2^{31}]$
long long	$[-2^{63},2^{63} - 1]$

□本单位

□本单位	详解
Bit（比特）	计算机中最小数据单位，表示二进制的一位
Byte（字节）	计算机存储的□本单位，`1 Byte = 8 Bits`

快速排序

1. 确定分界点
2. 重点：调整区间，根据分界点重新划分数据分布，保证左边数小于分界点，右边数大于分界点
    - 暴力做法：
        - 创建两个数组a，b
        - 扫描原数组，小于分界点的数放到a，大于分界点的数放到b
        - 然后再把a和b里面的数放回原数组
    - 优雅做法（双指针）：
        - 创建两个指针l，r，分别直指向数组的头部和尾部
        - l从左边开始向右扫描，碰到大于等于分界点的数就停下来
        - r从右边开始向左扫描，碰到小于等于分界点的数就停下来
        - 交换两个指针指向的数，然后各自移动1位
        - 直到l和r相遇
3. 递归处理左右两端

```
##include<iostream>
using namespace std;
const int N = 1e6 + 10;

int n;
int q[N];

void quick_sort(int q[],int l,int r){
    if(l >= r) return;
    int x = q[(int)((l + r) / 2)];
    int i = l - 1 ,j = r + 1;
    while(i < j){
        do i++; while(q[i] < x);
        do j--; while(q[j] > x);
        if(i < j) swap(q[i],q[j]);
    }
    quick_sort(q,l,j);
    quick_sort(q,j + 1,r);
}
```

```
int main(){
    scanf("%d", &n);
    for(int i = 0;i < n;i++) scanf("%d",&q[i]);

    quick_sort(q,0,n - 1);

    for(int i = 0;i < n;i++) printf("%d ",q[i]);

    return 0;
}
```

归并排序

- 时间复杂度: $O(n\log n)$

1. 确定分离点: $mid = \frac{l + r }{2}$
2. 递归排序数组左部分和右部分
3. 归并排序完的数组，合二为一
    - 用双指针，分别指向两个已排序好的数组的第一位
    - 比较指针指向的数，更小的数写入答案数组
    - 当访问完任意一个数组后退出循环

```
##include<iostream>
using namespace std;

const int N = 1e6 + 10;
int n;
int q[N],temp[N];

void merge_sort(int q[],int l,int r){
    if(l >= r) return;
    int mid  = (l + r) / 2;
    merge_sort(q, l, mid);
    merge_sort(q, mid + 1, r);

    int k = 0,i = l,j = mid + 1;
    while(i <= mid && j <= r){
        if(q[i] <= q[j]) temp[k++] = q[i++];
        if(q[i] > q[j]) temp[k++] = q[j++];
    }
    while(i <= mid) temp[k++] = q[i++];
    while(j <= r) temp[k++] = q[j++];

    for(int i = l, j = 0;i <= r;i++,j++) q[i] = temp[j];
}


int main(){
    scanf("%d",&n);

    for(int i = 0;i < n;i++) scanf("%d",&q[i]);
```

```
    merge_sort(q,0,n - 1);

    for(int i = 0;i < n;i++) printf("%d ",q[i]);

    return 0;
}
```

整数二分

```
// □查查找的数是否满足性质
bool check(int x){...}

// 查找最小的满足check条件的值
int binary_search1(int l,int r){
    while(l < r){
        int mid = (l + r) / 2;
        if(check(mid)) r = mid;
        else l = mid + 1;
    }
    return l;
}


// 查找最大的满足check条件的值
int binary_search2(int l, int r){
    while(l < r){
        int mid = (l + r + 1) / 2; // 加1是防止死循环
        if(check(mid)) l = mid;
        else r = mid - 1;
    }
    return l;
}
```

浮点数二分

```
bool check(double x){}

// 不需要处理边界
double binary_search(double l, double r){
    while(r - l > eps){ // eps表示精度，取决题目对精度要求
        double mid = (l + r) / 2;
        if(check(mid)) r = mid;
        else l = mid;
    }
    return l;
}
```

高精度

也就是把大整数的每一位存到数组里，个位存到数组的第一个位置，后面以此类推

- 加法:

```
##include<iostream>
##include<vector>
const int N = 1e6 + 10;
int n;
using namespace std;

vector<int> add(vector<int> &a,vector<int> &b) {//加引用可以提高效率
    vector<int> c;
    int t = 0; //进位
    for(int i = 0;i < a.size() || i < b.size();i++){
        if(i < a.size()) t += a[i];
        if(i < b.size()) t += b[i];
        c.push_back(t % 10);
        t /= 10;
    }
    if(t) c.push_back(1);
    return c
}
int main(){
    string a, b;
    vector<int> A, B;
    cin >> a >> b;
    for(int i = a.size() - 1 ;i >= 0;i--) A.push_back(a[i] - '0');
    for(int i = b.size() - 1 ;i >= 0;i--) A.push_back(b[i] - '0');
    vector<int> c = add(A,B);
    for(int i = c.size() - 1;i >= 0 ;i--) printf("%d",c[i]);
}
```

- 减法:
    - $A > B$: 算$A-B$
    - $A < B$: 算$-(B-A)$

```
##include<iostream>
##include<vector>
const int N = 1e6 + 10;
int n;
using namespace std;

// 判断A是不是大于等于B
bool cmp(vector<int> &a,vector<int> &b){
    if(a.size() != b.size()) return a.size() > b.size();
    for(int i = a.size() - 1;i >= 0;i++){
        if(a[i] != b[i]) return a[i] > b[i];
    }
    return true;
}
```

```
vector<int> sub(vector<int> &a,vector<int> &b){
    vector<int> c;
    int t = 0;
    for(int i = 0; i < a.size();i++){
        t = a[i] - t;
        if(i < b.size()) t -= b[i];
        c.push_back((t + 10) % 10);
        if(t < 0) t = 1;
        else t = 0;
    }
    while(c.size() > 1 && c.back() == 0) c.pop_back();
    return c;
}
int main(){
    String a, b;
    vector<int> A, B;
    cin >> a >> b;
    for(int i = a.size() - 1 ;i >= 0;i--) A.push_back(a[i] - '0');
    for(int i = b.size() - 1 ;i >= 0;i--) B.push_back(b[i] - '0');
    if(cmp(A,B)){
         vector<int> c = sub(A,B);
    for(int i = c.size() - 1;i >= 0 ;i--) printf("%d",c[i]);
    }
    else{
         vector<int> c = sub(B,A);
        printf("-");
    for(int i = c.size() - 1;i >= 0 ;i--) printf("%d",c[i]);
    }
}
```

- □□□

```
vector<int> multi(vector<int> &a,int b){
    vector<int> c;
    int t = 0;
    for(int i = 0;i < a.size();i++){
        t += a[i] * b;
        c.push_back(t % 10);
        t =  t / 10;
    }
    while(t > 0){
        c.push_back(t % 10);
        t /= 10;
    }
    // if(t > 0) c.push_back(t);
    while(c.size() > 1 && c.back() == 0) c.pop_back();
    return c;
}
```

- 除法

每次push_back()的值都不会超过两位数，证明如下 $$ \begin{align} r_k &= r_{k-1} % b \ r_k &\le b -1 \ r_k * 10 &\le (b-1) * 10 \ r_k * 10 + a &\le 10b - 1 < 10b \end{align} $$ 也就是说r / b最大是$(10 b -1)/b$，最大到9

```
vector<int> div(vector<int> &a,int b,int &r){
    vector<int> c;
    r = 0;
    for(int i = a.size() - 1;i >= 0;i--){
        r = r * 10 + a[i];
        c.push_back(r / b);
        r %= b;
    }
    while(t > 0){
        c.push_back(t )
    }
    while(c.size() > 1 && c.back() == 0) c.pop_back();
    reverse(c.begin(),c.end());

}
```

前缀和

- 一维前缀和

给定数组$a_1,a_2,\dots,a_n$

前缀和数组为$S_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots +a_i$

$S_k - S_l$表示$(l,k]$的元素总和

```
int t;
int b[n];
// 令s0 = 0 前缀和数组长度变为 n + 1
void sum(int a[]){
    int t = 0;
    for(int i = 0 ;i <= n;i++){
        b[i] = t;
        t += a[i];
    }
}
```

- 二维前缀和
  - 给定二维数组，二维前缀和$S_{ij} = \sum_{m \le i,n\le j}{a_{mn}}$
  - 二维数组从$a[1][1]$开始存储
  - $S_{ij} -S_{in} -S_{mj} + S_{mn}$表示在二维数组里，$(i,j)、(m,n)、(i,n)、(m,j)$围起来的矩形的所有元素的和
  - $S_{ij} = a_{ij} + S_{i-1,j} + S_{i,j - 1} - S_{i - 1,j - 1}$
  - $S_{0,1}、S_{0,0}、S_{1,0}$等都是0

```
int s[M][N];
int main(){
    s[0][0] = 0;
    for(int i = 1;i < n;i++){
        for(int j = 1;j < m;j++){
            scanf("%d",&a[i][j]);
            s[i][j] = s[i][j - 1] + a[i][j] - s[i -1][j - 1] + s[i - 1][j];
        }
    }
}
```

差分

- 一维差分

给定$a_1,a_2,\dots,a_n$，构造$b_1,b_2,\dots,b_n$，使得$a_i = b_1 + b_2 + \dots + b_i$，则$b$是$a$的差分，$a$是$b$的前缀和 $$ b_1 = a_1\ b_2 = a_2 - a_1\ b_3 = a_3 - a_2\ \dots \ b_n = a_n - a_{n-1} $$ 假设我们需要对**$[l,r]$**区间内的**a_i**全部加上**C**，这时候如果直接扫描时间复杂度是**O(N)**。但我们可以求**a**的差分**b**，让**b_l+C**那么**a_l**后面的数字都会加上**C**，我们再让**$b_{r+1} -C$**，就可以让**$[l,r]$**区间内的**a**都加上**C**，而其他地方不变，也适用于给$a[i]$赋初值

- 二维差分

原矩阵：a_{ij}

差分矩阵：b_{ij}

```
##include<iostream>
using namespace std;

int n,m,q;

const int N = 1010;
int a[N][N],b[N][N];

void insert(int x1,int y1,int x2,int y2,int c){
    b[x1][y1] += c;
    b[x2 + 1][y2 + 1] += c;
    b[x1][y2 + 1] -= c;
    b[x2 + 1][y1] -= c;
}


int main(){
    cin >> n >> m >> q;
    for(int i = 1;i <= n;i++){
        for(int j = 1;j <= m;j++){
            int t;
            cin >> t;
            insert(i,j,i,j,t);
        }
    }
    while(q--){
```

```
        int x1,y1,x2,y2,c;
        cin >> x1 >> y1 >> x2 >> y2 >> c;
        insert(x1,y1,x2,y2,c);
    }

    for(int i = 1;i <= n;i++){
        for(int j = 1;j <= m;j++){
           b[i][j] = b[i][j] + b[i - 1][j] + b[i][j - 1] - b[i - 1][j - 1]; // 差分数组直接化为前缀和数组
        }
    }

    for(int i = 1;i <= n;i++){
        for(int j = 1;j <= m;j++){
            cout << b[i][j] << " ";
        }
        cout << endl;
    }
}
```

双指针算法

可以将$O(n^2)$优化到$O(n)$

没什么好说的，做题

位运算

n的二进制表示中第k位数字是多少

从**0**开始算的

1. 先把第k位移到最后一位：n >> k
2. 看个位是几： n & 1
3. n >> k & 1;

- $lowbit(x)$：返回x的最右边（最后）一位1和后面的数字
    - x = 1010，返回10
    - x = 101000，返回1000
    - `x & -x`

离散化

将不连续的数字映射成连续的数字

值域跨度很大，但是用到的值很少，用到的值十分稀疏

- 要对原始数据去重
- 用二分找要映射的位置
- 本质上是把数组里面的数映射成数组的下标

区间求和

- alls数组是为了存储需要离散化的点，对其进行去重和排序是为了防止映射错误
- add和query分别存储要插入的数据和搜索的数据

- 最后进行区间搜索的时候要先离散化

```
##include<iostream>
##include<vector>
##include<algorithm>
using namespace std;

const int N = 3e5 + 10; // 不仅有插入的点，还有查询的点，离散化后的数组的长度要能容纳插入点和查询的点的长度
int a[N],s[N]; // 离散化后用前缀和求解

vector<int> alls; // 所有要离散化的下标


typedef pair<int,int> PII;
vector<PII> add,query;
int n,m;
// x为数轴上的点，返回的是离散化后的结果
int find(int x){
    int l = 0, r = alls.size() - 1;
    while(l < r){
        int mid = l + r >> 1;
        if(alls[mid] >= x) r = mid;
        else l = mid + 1;
    }
    return r + 1;
}

int main(){
    cin >> n >> m;
    // 插入操作
    for(int i = 0;i < n;i++){
        int x, c;
        cin >> x >> c;
        alls.push_back(x);
        add.push_back({x,c});
    }

    // 查找操作
    while(m--){
        int l,r;
        cin >> l >> r;
        query.push_back({l,r});
        alls.push_back(l);
        alls.push_back(r);
    }

    //排序、去重，不然映射出错
    sort(alls.begin(),alls.end());
    alls.erase(unique(alls.begin(),alls.end()),alls.end());

    // 处理插入
```

```
    for(auto x: add){
        int t = find(x.first);
        a[t] += x.second;
    }

    // 前缀和
    for(int i = 1;i <= alls.size();i++){
        s[i] = a[i] + s[i - 1];
    }

    // 输出答案
    for(auto x: query){
        int l = find(x.first);
        int r = find(x.second);
        cout << s[r] - s[l - 1] << endl;
    }
}
```

区间合并

把多个有交集的区间合并成一个区间

1. 按区间左端点排序
2. 扫描区间，并把区间进行合并

```
##include<iostream>
##include<algorithm>
##include<vector>
using namespace std;
const int N = 100010;

vector<pair<int,int>> t;

int n;


void merge(vector<pair<int,int>> &s){
    vector<pair<int,int>> temp;
    sort(s.begin(),s.end());
    // 用第一对数据作为初始维护区间
    int l = s[0].first,r = s[0].second;
    for(int i = 1;i < s.size();i++){
        if(s[i].first > r) {
            temp.push_back({l,r});
            l = s[i].first;
            r = s[i].second;
        }
        else r = max(r,s[i].second);// 将两种情况合二为一
    }
    // 循环结束后一定会有一个区间没有被处理，在这里进行处理
    temp.push_back({l,r});
```

```
    t = temp;
}


int main(){
    cin >> n;
    while(n--){
        int a,b;
        cin >> a >> b;
        t.push_back({a,b});
    }
    merge(t);
    cout << t.size();
}
```

数据结构

以数组模拟为主

链表

1. 单链表：邻接表（存储树和图）
    - e[N]：存的是节点的值
    - ne[N]：存的是节点的next指针
2. 双链表：每个节点有两个指针
    - l[N]：记录节点的左指针
    - r[N]：记录节点的右指针
3. 邻接表：n个单链表

单链表

```
##include<iostream>

using namespace std;

const int N = 1000010;
/*
e[N]存的是当前节点的值
ne[N]存的是当前节点的指针
head存的是头节点
idx存的是链表已有节点的个数
*/
int e[N],ne[N];
int head,idx;


void init(){
    head = -1;
    idx = 0;
}
```

```
void add_to_head(int c){
    e[idx] = c;
    ne[idx] = head;
    head = idx++;
}

void erase(int k){
    // □□k□0□□□
    if(k == -1) {
        head = ne[head];
    }
    ne[k] = ne[ne[k]];
}

void add(int x,int c){
    e[idx] = c;
    ne[idx] = ne[x];
    ne[x] = idx++;
}

int main(){
    init();
    int m;
    cin >> m;
    while(m--){
        int k,x;
        char op;
        cin >> op;
        if(op == 'H'){
            cin >> x;
            add_to_head(x);
        }
        else if(op == 'D'){
            cin >> k ;
            erase(k - 1);
        }
        else if(op == 'I'){
            cin >> k >> x;
            add(k - 1,x);
        }
    }
    for(int i = head;i != -1;i = ne[i]){
        cout << e[i] << " ";
    }

}
```

□□□

```cpp
##include<iostream>
using namespace std;

const int N = 100010;
int l[N],r[N],e[N];
int idx;
// 令双链表的头节点下标为0，尾节点下标为1
void init(){
    r[0] = 1,l[1] = 0;
    idx = 2;
}
// 模拟的是在k的右侧插入
void add(int k,int x){
    e[idx] = x;
    r[idx] = r[k];
    l[idx] = k;
    l[r[k]] = idx;
    r[k] = idx;
    idx++;
}

void remove(int k){
    l[r[k]] = l[k];
    r[l[k]] = r[k];
}


int main(){
    int m;
    init();
    cin >> m;
    while(m--){
        string op;
        cin >> op;
        int k,x;
        if(op == "L"){
            cin >> x;
            add(0,x);
        }
        else if(op == "R"){
            cin >> x;
            add(l[1],x);
        }
        else if(op == "D"){
            cin >> k;
            remove(k + 1); // 第1个插入的数实际上idx是2
        }
        else if(op == "IL"){
            cin >> k >> x;
            add(l[k + 1],x);
        }else if(op == "IR"){
```

```
            cin >> k >> x;
            add(k + 1,x);
        }
    }
    for(int i = r[0];i != 1;i = r[i]){
        cout << e[i] << " ";
    }
}
```

□

□□□□

```
##include<iostream>
using namespace std;

const int N = 100010;
int s[N];
int top;

void init(){
    top = -1;
}

bool isempty(){
    return top == -1;
}

void push(int x){
    s[++top] = x;
}

void pop(){
    top--;
}

int query(){
    return s[top];
}

int main(){
    init();
    int m;
    cin >> m;
    while(m--){
        int x;
        string op;
        cin >> op;
        if(op == "push"){
            cin >> x;
            push(x);
```

```
        }
        else if(op == "pop") pop();
        else if(op == "empty"){
            if(isempty()) cout << "YES" << endl;
            else cout << "NO" << endl;
        }
        else if(op == "query") cout << query()<< endl;
    }

}
```

□□

□□□□

```
##include<iostream>
using namespace std;

const int N = 100010;
int s[N],top,tail;

void init(){
    top = 0;
    tail = -1;
}

void push(int x){
    s[++tail] = x;
}

bool isempty(){
    return tail < top;
}

void pop(){
    top++;
}

int query(){
    return s[top];
}


int main(){
    int m;
    init();
    cin >> m;
    while(m--){
        int x;
        string op;
        cin >> op;
```

```
        if(op == "push"){
            cin >> x;
            push(x);
        }
        else if(op == "pop"){
            pop();
        }
        else if(op == "empty"){
            if(isempty()) cout << "YES" << endl;
            else cout << "NO" << endl;
        }
        else if( op == "query"){
            cout << query() << endl;
        }
    }
}
```

单调栈和单调队列

单调栈：给定一个序列，求每一个数左边离他最近的数且比它小在什么地方

题解出处：https://www.acwing.com/video/5400/

```
##include<iostream>

using namespace std;
const int N = 1e5 + 10;
int st[N];
int top = -1;
int n;
// 先用朴素算法模拟，然后找出规律，可以用单调栈求解
int main(){
    cin >> n;
    for(int i = 0;i < n;i++){
        int x;
        cin >> x;
        while(top >= 0 && st[top] >= x) top--;
        if(top != -1) cout << st[top] << " ";
        else cout << -1 << " ";
        st[++top] = x;
    }
}
```

单调队列：求滑动窗口最大值或者最小值

- 用一个单调（双端）队列维护，每一时刻这个单调队列都是有序的，每移动一次输出一次队头元素，本质上和单调栈思想一致，都是把不可能的答案给去掉

```
##include<iostream>
using namespace std;

const int N = 1e6 + 10;
```

```
int a[N],st[N];
int head = 0,tail = -1;
int main(){

    int n,k;
    cin >> n >> k;
    for(int i = 0;i < n;i++){
        cin >> a[i];
    }
    // □□□□
    for(int i = 0;i < n;i++){
        if( i - k + 1 > st[head]) head ++;
        while(tail >= head && a[st[tail]] >= a[i]) tail--;
        st[++tail] = i;
        if(i >= k - 1) cout << a[st[head]] << " ";
    }
    cout << endl;
    // □□□□
    head = 0,tail = -1;
    for(int i = 0;i < n;i++){
        if(i - k + 1 > st[head]) head ++;
        while(tail >= head && a[st[tail]] <= a[i]) tail--;
        st[++tail] = i;
        if(i >= k - 1) cout << a[st[head]] << " ";
    }
    cout << endl;
}
```

□□□□□□□□

```
##include<iostream>

using namespace std;
const int N = 1e6 + 10;
int n,k;
int tail = -1,head = 0;
int q[N],a[N];

int main(){
    cin >> n >> k;
    for(int i = 1;i <= n;i++){
        cin >> a[i];
    }
    for(int i = 1;i <= n;i++){
        if(head <= tail && i > k && q[head] == a[i - k]) head ++;
        while(tail >= head && q[tail] > a[i])  tail --;
        q[++tail] = a[i];
        if(i > k - 1){
             cout << q[head] << " ";
        }
    }
```

```
    cout << endl;
    head = 0, tail = -1;
     for(int i = 1;i <= n;i++){
        if(head <= tail && i > k && q[head] == a[i - k]) head ++;
        while(tail >= head && q[tail] < a[i])  tail --;
        q[++tail] = a[i];
        if(i > k - 1){
             cout << q[head] << " ";
        }
    }

}
```

KMP

- 字符串匹配的一种算法，本质上是根据已有信息减少重复匹配。
- 算法维护一个next数组，存储的是最长的相等真前缀和真后缀的长度。
- 当前面n个字符匹配成功，但是第 `n + 1` 个字符匹配失败，算法将模式串向右滑动 `n - next[n]` 位，再从第 `n+1` 位比较

```
##include<iostream>
using namespace std;

const int N = 1e6 + 10;
char s[N],p[N];
// 字符串是从下标为1开始，当然也可以从0开始，所以第1个字符能移动的距离ne[1]为0
int ne[N];
int main(){
    int n,m;
    cin >> n >> p + 1 >> m >> s + 1;
    /*
    j是存储下标i可以往前移动从而避免重复匹配的下标
        a b a b a
        1 2 3 4 5
    ne  0 0 1 2 3
      a b a b a
          a b a b a
    */
    for(int i = 2,j = 0;i <= n;i++){
        while(j && p[i] != p[j + 1]) j = ne[j];
        if(p[i] == p[j + 1]) j++;
        ne[i] = j;
    }


    for(int i = 1,j = 0; i <= m;i++){
        while(j && s[i] != p[j + 1]) j = ne[j];
        if(s[i] == p[j + 1]) j++;
        if(j == n) {
            // 我们代码的下标是从1开始计数，题目要求从0开始，因此不是i-n+1
            cout << i - n << " ";
            j = ne[j];
```

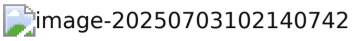
```
        }
    }

}
```

Trie

高效地存储和查找字符串集合的数据结构

如图所示:



如果某个字符是某个单词结尾，需要在这个字符后打上标记

根节点是空节点，下标（编号）为**0**

```
##include<iostream>
##include<string.h>
using namespace std;

const int N = 1e5 + 10;
int son[N][26],idx,cnt[N];
int n;

void insert(char str[]){
    int p = 0;
    for(int i = 0;str[i];i++){
        if(!son[p][str[i] - 'a']) son[p][str[i] - 'a'] = ++idx;
        p = son[p][str[i] - 'a'];
    }
    cnt[p]++;
}

int query(char str[]){

    int p = 0;
    for(int i = 0;str[i];i++){
        if(!son[p][str[i] - 'a']) return 0;
        p = son[p][str[i] - 'a'];
    }
    return cnt[p];
}

int main(){
    ios::sync_with_stdio(false);
    cout.tie(0),cin.tie(0);
    cin >> n;
    while(n--){
        string s;
        char x[N];
```

```
        cin >> s;
        if(s == "I"){
            cin >> x;
            insert(x);
        }
        else if(s == "Q"){
            cin >> x;
            cout << query(x) << endl;
        }
    }


}
```

最大异或对

```
##include<iostream>
using namespace std;

const int N = 1e5 + 10;
const int M = 31 * N; //用二进制表示最多有31*N个节点
int n;
int a[N],son[M][2];
int idx = 0;
void insert(int x){
    int p = 0;
    for(int i = 30;i >= 0;i--){
        int u = x >> i & 1;
        if(!son[p][u]) son[p][u] = ++idx;
        p = son[p][u];
    }
}

int search(int x){
    int p = 0,res = 0;
    for(int i = 30;i >= 0;i--){
        int u = x >> i & 1;
        if(son[p][!u]){
            p = son[p][!u]; // 要找最大的肯定要找不同的，比如1和0，0和1
            res = res * 2 + 1; //比如100 -> 1001 ，起始就是 (100)_2 * 2 + 1 = (1001)_2 即4 *
2 + 1 = 9
        }
        else {
            p = son[p][u];// 这是因为找不到不同的，但是为了左移只能退而求其次
            res = res * 2;
        }
    }
    return res;
}

int main(){
```

```
    scanf("%d",&n);
    int ans = 0;
    for(int i = 0;i < n;i++) {
        scanf("%d",&a[i]);
        insert(a[i]);
    }
    for(int i = 0;i < n;i++) {
        ans = max(ans,search(a[i]));
    }
    cout << ans;
```

并查集

1. 合并两个集合
2. 询问两个元素是否在一个集合中

用树维护集合

- 每一个集合的编号是根节点的编号
- 对于每个节点都存下父节点是谁，对于根节点，它的爸爸是他自己
- 合并集合：p[x]是x的编号，p[y]是y的编号，只要让p[x] = y即可
- 路径压缩：某一结点第一次向上搜索根节点，找到根节点后把走过的路径的节点全部指向根节点

维护额外信息

- 记录集合元素数量：维护一个size数组，这个数组只对根节点有效

合并集合

```
##include<iostream>
using namespace std;

const int N = 1e5 + 10;
int n,m;

int h[N];

int find(int x){
    if(x != h[x]) h[x] = find(h[x]);
    return h[x];
}



int main(){
    ios::sync_with_stdio(false);
    cin.tie(0),cout.tie(0);
    cin >> n >> m;
    for(int i = 0;i < n;i++) h[i] = i; // 每个节点就是一个集合
    int a,b;
    while(m--){
        char c;
        cin >> c;
        if(c == 'M'){
```

```
            cin >> a >> b;
            if(find(a) == find(b)) continue;
            h[find(a)] = find(b);
        }
        else{
            cin >> a >> b;
            if(find(a) == find(b)) cout << "Yes" << endl;
            else cout << "No" << endl;
        }
    }
}
```

堆

是一个完全二叉树，最后一层节点从左往右排列，其他层节点非空，下标从1开始

用数组模拟，支持修改或者删除任意一个元素（STL里面的不支持）

□本操作

1. 插入一个数
2. 求集合最小值
3. 删除最小值
4. 删除、修改任意一个元素

存储

- x的左儿子: 2x
- x的右儿子: 2x+1

向上和向下调整

- 从n/2开始调整
- 向上调整（`up`）：用于插入或节点值变小时。
- 向下调整（`down`）：用于删除或节点值变大时。

哈希表

存储结构

1. 开放寻址法
    - 只开一个一维数组存储所有哈希值
    - 如果位置已经被占，那么看下一个位置，循环找到没有人占领的位置
    - 核心是find函数
        - 如果x已经存在，返回x存储的位置
        - 如果x不存在，返回x要插入的位置

```
// 开放寻址法
##include<iostream>
```

```
##include<cstring>
using namespace std;

const int N = 2e5 + 3; // 用两倍是因为要让每个数都能找到位置，+3是经验设定，可以减少冲突发生的概率
const int NuLL = 0x3f3f3f3f; //设定初值
int h[N];
int n;

// 这个函数能返回X要插入的位置，也能返回X在哈希表的位置
int find(int x){
    int k = (x % N + N) % N;
    while(h[k] != NuLL && h[k] != x){
        k++;
        if(k == N) k = 0;
    }
    return k;
}


int main(){
    memset(h,0x3f,sizeof(h)); // 初始化
    string s;
    cin >> n;
    while(n--){
        cin >> s;
        int x;
        if(s == "I"){
            cin >> x;
            h[find(x)] = x;
        }
        else if(s == "Q"){
            cin >> x;
            int k = find(x);
            if(h[k] == x) cout << "Yes" << endl;
            else cout << "No" << endl;
        }
    }
}
```

2. 拉链法

    - 开一个一维数组存所有的哈希值
    - 这个一维数组存的是链表的头节点
    - 有相同哈希值的数字插到对应的链表里

```
// 拉链法
##include<iostream>
##include<cstring>
using namespace std;
```

```
const int N = 1e5 + 3; // 找比100000大的最小质数，可以减少冲突出现的概率
int h[N];
int e[N],ne[N];
int idx = 0;
int n ;

void insert(int x){
    int k = (x % N + N) % N; //设定哈希函数，这里这么写是因为有负数 先把x压缩到[-N,N]，再进一步压缩
    e[idx] = x;
    ne[idx] = h[k];
    h[k] = idx++;
}


bool find(int x){
    int k = (x % N + N) % N;
    for(int i = h[k];i != -1;i = ne[i]){
        if(e[i] == x) return true;
    }
    return false;
}

int main(){
    memset(h,-1,sizeof(h)); //初始化哈希表全为-1
    cin >> n;
    string s;
    int x;
    while(n--){
        cin >> s;
        if(s == "I"){
          cin >> x;
          insert(x);
        }
        else if(s == "Q"){
            cin >> x;
            if(find(x)) cout << "Yes" << endl;
            else cout << "No" << endl;
        }
    }


}
```

字符串哈希

用于快速判断两个字符串是不是相等

- 把字符串的每个字符都看成一个整数，组合成一个p进制，然后算出这个字符串的十进制数再模一个q，得到这个字符串的哈希值
    - p一般取131或者13331
    - q取2^{64}，可以直接用unsigned long long进行存储，溢出也不管，这样就不用写取模
- 会把字符串的每个前缀的哈希值都算出来，用h数组存储

    - `h[0] = 0`
    - `h[i] = h[i - 1] * 131 + str[i];`
- 对于任意子串，可以用这个算法以O(1)复杂度算出来其哈希值
    - $h[L-R]=h[R]-h[L-1]*131^{R-L+1}$
    - 131^{R-L+1}可以用数组求
    - 这是因为在 `h[R]` 中， `h[L-1]` 其实贡献了高位，但是实际 `h[L-1]` 是低位，因此要减去右移后的

```
##include<iostream>
using namespace std;

const int N = 1e5 + 10;
char s[N];
unsigned long long P[N],h[N];
int n,m;
int p = 131;

int search(int l,int r){
    return h[r] - h[l - 1] * P[r - l + 1];
}

int main(){
    cin >> n >> m;
    cin >> s;
    P[0] = 1;
    for(int i = 0;i < n;i++){
        P[i + 1] = P[i] * p;
        h[i + 1] = h[i] * p + s[i];
    }


    while(m --){
        int l1,r1,l2,r2;
        cin >> l1 >> r1 >> l2 >> r2;
        if(search(l1,r1) == search(l2,r2)) cout << "Yes" << endl;
        else cout << "No" << endl;
    }
}
```

STL

vector

- 变长数组，支持比较运算
- 初始化： `vector<int> a = (10,3)` ：初始化长度为10，初值为3的数组
- size()：查看元素个数
- empty()：判空
- clear()：清空
- front()/back()：返回第一个/最后一个数
- push_back() /pop_back()：插入/删除最后一个数
- begin()/end()：第0个数/最后一个数的后面一个数的迭代器

pair<int,int>

- 可以定义一个二元组
- first()/second(): 第1/2个元素
- 初始化: `p = (20,"zxb")` 或者 `p = make_pair(20,"zxb")`

string

- substr(): 返回子串
    - substr(1,2): 从下标为1的字符开始，输出长度为2的子串
- size(): 查看元素个数
- empty(): 判空
- clear(): 清空

queue

- size(): 查看元素个数
- empty(): 判空
- push(): 往队尾插入
- front(): 返回队头元素
- back(): 返回队尾元素
- pop(): 弹出队头元素

priority_queue（优先队列，堆）

默认是大根堆

- push(): 插入元素
- front(): 返回堆顶元素
- pop(): 弹出堆顶元素

deque（双端队列）

- size(): 查看元素个数
- empty(): 判空
- clear(): 清空
- front(): 返回队头元素
- back(): 返回队尾元素
- push_back() /pop_back(): 插入/弹出最后一个数
- push_front() /pop_front(): 插入/弹出第一个数
- begin()/end(): 第0个数/最后一个数的后面一个数的迭代器

stack

- size(): 查看元素个数
- empty(): 判空
- push(): 向栈顶插入元素
- top(): 返回栈顶元素
- pop(): 弹出栈顶元素

set

不能有重复元素

- size(): 查看元素个数
- empty(): 判空
- clear(): 清空
- insert(): 插入一个元素
- find(): 查找一个元素
- count(): 返回某个元素个数
- erase()
  - 如果输入是一个数x，删除所有x
  - 输入一个迭代器，删除这个迭代器
- lower_bound(): 返回大于等于x最小的数的迭代器，不存在返回end()
- upper_bound(): 返回大于x的最小的数的迭代器，不存在返回end()
- begin()/end(): 第0个数/最后一个数的后面一个数的迭代器

map

- size(): 查看元素个数
- empty(): 判空
- clear(): 清空
- insert(): 插入一个元素，插入的是一个pair
- erase(): 输入的参数是pair或者迭代器
- `m['key']`: 可以用key去索引value
- lower_bound(): 返回大于等于x最小的数的迭代器，不存在返回end()
- upper_bound(): 返回大于x的最小的数的迭代器，不存在返回end()

multiset

可以有重复元素

- size(): 查看元素个数
- empty(): 判空
- clear(): 清空
- insert(): 插入一个元素
- find(): 查找一个元素
- count(): 返回某个元素个数
- erase()
  - 如果输入是一个数x，删除所有x
  - 输入一个迭代器，删除这个迭代器
- lower_bound(): 返回大于等于x最小的数的迭代器，不存在返回end()
- upper_bound(): 返回大于x的最小的数的迭代器，不存在返回end()

multimap

- size(): 查看元素个数
- empty(): 判空
- clear(): 清空
- insert(): 插入一个元素，插入的是一个pair
- erase(): 输入的参数是pair或者迭代器
- `m['key']`: 可以用key去索引value
- lower_bound(): 返回大于等于x最小的数的迭代器，不存在返回end()
- upper_bound(): 返回大于x的最小的数的迭代器，不存在返回end()

unordered_map、unordered_set、unordered_multiset、unordered_multimap

□于哈希表实现，增删改查时间复杂度是**O(1)**

不支持 lower_bound()和upper_bound()

搜索和图论

DFS

深度优先搜索，使用栈

重点：递归结束条件的选择＋状态标记＋递归后的恢复

排列数字

```
##include<iostream>
using namespace std;
const int N = 10;
int n,t[N];
bool state[N];

void dfs(int p){
    if(p == n){
        for(int i = 0;i < n;i++) cout << t[i] << " ";
        cout << endl;
    }
    for(int i = 1;i <= n;i++){
        if(!state[i]){
            t[p] = i;
            state[i] = true;
            dfs(p + 1);
            state[i] = false;
        }
    }
}


int main(){
    cin >> n;
    dfs(0);
}
```

n皇后

```
##include<iostream>
using namespace std;

const int N = 12,M = 2 * N;
char d[N][N];
int n;
```

```
bool col[N],e[M],ne[M];
// 第u行
void dfs(int u){
    if(u == n + 1){
        for(int i = 1;i <= n;i++){
            for(int j = 1;j <= n;j++)
            cout << d[i][j];
        cout << endl;
        }
        cout << endl;
        return ;
    }

    for(int i = 1;i <= n;i++){
        if(!col[i] && !e[i + u] && !ne[n - i + u]){
            col[i] = true,e[i + u] = true,ne[n - i + u] = true;
            d[u][i] = 'Q';
            dfs(u + 1);
            col[i] = false,e[i + u] = false,ne[n - i + u] = false;
            d[u][i] = '.';
        }
    }
}


int main(){
    cin >> n;
    for(int i = 1;i <= n;i++){
        for(int j = 1;j <= n;j++)
        d[i][j] = '.';
    }
    dfs(1);
    return 0;
}
```

BFS

广度优先搜索，使用队列，一般求什么最短的，最少操作次数的，用BFS

当所有边的权重都为**1**的时候，才能用BFS

走迷宫

```
##include<iostream>
using namespace std;
typedef pair<int,int> PII;
const int N = 110;
int d[N][N],p[N][N]; //d存迷宫 p存步数
PII q[N * N];
bool st[N][N];
int head = 0,tail = -1;
int dx[4] = {0,1,0,-1},dy[4] = {-1, 0, 1, 0};
```

```
int n,m;
int bfs(){
    st[0][0] = true;
    p[0][0] = 0;
    q[++tail] = {0,0};
    while(head <= tail){
        auto x = q[head++];
        for(int i = 0;i < 4;i++){
            int a = x.first + dx[i],b = x.second + dy[i]; // a□□□□b□□□
            if(a >= 0 && a < n && b >= 0 && b < m && !st[a][b] && d[a][b] == 0){
                st[a][b] = true;
                p[a][b] = p[x.first][x.second] + 1;
                q[++tail] = {a,b};
            }
        }
    }
    return p[n - 1][m - 1];
}
int main(){
    cin >> n >> m;
    for(int i = 0;i < n;i ++){
        for(int j = 0;j < m;j++)
            cin >> d[i][j];
    }
    cout << bfs();

}
```

□□□□□□□

```
##include<iostream>
##include<queue>
##include<cstring>
using namespace std;
const int N = 1e5 + 10;
int dist[N],e[N],ne[N],h[N],idx;
bool st[N];
int n,m;
queue<int> q;

void add(int a,int b){
    e[idx] = b,ne[idx] = h[a],h[a] = idx ++;
}

int main(){
    cin >> n >> m;
    memset(h,-1,sizeof h);
    memset(dist,0x3f,sizeof(dist));
    while(m--){
        int a,b;
        cin >> a >> b;
```

```
        add(a,b);
    }
    q.push(1);
    dist[1] = 0;
    st[1] = true;
    while(q.size()){
        int t = q.front();
        q.pop();
        for(int i = h[t];i != -1;i = ne[i]){
            int j = e[i];
            if(!st[j]){
                dist[j] = dist[t] + 1;
                q.push(j);
                st[j] = true;
            }
        }
    }
    if(dist[n] == 0x3f3f3f3f) cout << -1;
    else cout << dist[n];
}
```

拓扑排序

核心思想是将图中的所有顶点排成一个序列，使得对于图中的每一条有向边 $(u \to v)$，在排序中顶点 u 都位于顶点 v 的前面

适用于有向无环图

```
##include<iostream>
##include<cstring>
using namespace std;
const int N = 1e5 + 10;
int n,m;
int h[N],e[N],ne[N],idx;
int q[N],d[N];

void add(int a,int b){
    e[idx] = b,ne[idx] = h[a],h[a] = idx++;
}

bool topsort(){
    int head = 0,tail = -1;
    for(int i = 1;i <= n;i++){
        if(!d[i]) q[++tail] = i;
    }
    while(head <= tail){
        int x = q[head ++];
        for(int i = h[x];i != -1;i = ne[i]){
            int j = e[i];
            d[j]--;
            if(!d[j]) q[++tail] = j;
        }
    }
```

```
    return tail == n - 1;
}

int main(){
    memset(h,-1,sizeof h);
    cin >> n >> m;
    int a,b;
    for(int i = 1;i <= m;i++){
        cin >> a >> b;
        add(a,b);
        d[b] ++;
    }
    if(topsort()){
        for(int i = 0;i < n;i++) cout << q[i] << " ";
    }
    else {
        cout << -1;
    }
}
```

最短路

 image-20250714111902028

- 朴素**Dijkstra**算法适用于稠密图
- 堆优化版**Dijkstra**算法适用于稀疏图：用优先队列
- 稀疏图用邻接表存
- 稠密图用邻接矩阵存
- 没有负环才能用SPFA

朴素**Dijkstra**算法

- 找到路径最短的点，标记一下
- 用这个点更新其他的路径

```
##include<iostream>
##include<cstring>
##include<algorithm>
using namespace std;

const int N = 510,M = 1e5 + 10;
int h[N],e[M],w[M],ne[M],idx;
int n,m;
int dist[N];
bool st[N];

void add(int a,int b,int c){
    e[idx] = b,ne[idx] = h[a],w[idx] = c,h[a] = idx ++;
}
```

```
int dijkstra(){
    memset(dist,0x3f,sizeof(dist));
    dist[1] = 0;
    for(int i = 1;i < n;i++){
        int t = - 1;
        for(int j = 1;j <= n;j++){
            if(!st[j] && (t == -1 || dist[t] > dist[j]) )
            t = j;
        }
        if (dist[t] == 0x3f3f3f3f) break;
        st[t] = true;
        for(int j = h[t]; j != -1;j = ne[j]){ // j为idx
            int k = e[j]; // k为节点编号
            dist[k] = min(dist[k],dist[t] + w[j]);
        }
    }
    return dist[n];
}

int main(){
    cin >> n >> m;
    memset(h,-1,sizeof h);
    int a,b,c;
    while(m--){
        cin >> a >> b >> c;
        add(a,b,c);
    }
    int res = dijkstra();
    if(res == 0x3f3f3f3f) cout << -1;
    else cout << res;
}
```

堆优化版

- 找到路径最短的点，标记一下（用优先队列直接找到）
- 用这个点更新其他的路径

```
##include<iostream>
##include<cstring>
##include<algorithm>
##include<queue>
using namespace std;

const int N = 2e5 + 10,M = 2e5 + 10;
int h[N],e[M],w[M],ne[M],idx;
int n,m;
int dist[N];
bool st[N];

typedef pair<int,int> PII;
```

```
void add(int a,int b,int c){
    e[idx] = b,ne[idx] = h[a],w[idx] = c,h[a] = idx ++;
}

int dijkstra(){
    memset(dist,0x3f,sizeof(dist));
    dist[1] = 0;
    priority_queue <PII,vector<PII>,greater<PII>> heap;
    heap.push({0,1});

    while(heap.size()){
        auto x = heap.top();
        heap.pop();
        if(st[x.second]) continue;
        st[x.second] = true;
        for(int i = h[x.second];i != -1;i = ne[i]){
            int j = e[i];
            if(dist[j] > x.first + w[i]){
                dist[j] = x.first + w[i];
                heap.push({dist[j],j});
            }
        }

    }
    return dist[n];
}

int main(){
    cin >> n >> m;
    memset(h,-1,sizeof h);
    int a,b,c;
    while(m--){
        cin >> a >> b >> c;
        add(a,b,c);
    }
    int res = dijkstra();
    if(res == 0x3f3f3f3f) cout << -1;
    else cout << res;
}
```

Bellman-ford算法

- 先循环k次（循环**k**次就是找到不少于**k**条边的最短路径）
    - 需要拷贝上一次遍历的结果
- 内循环遍历所有的边，更新每个点的最短路径

SPFA算法

- 初始化所有数组
- 当队列不空的时候取出队头元素并更新其他点的路径
- 更新过的点放到队列里面，不能重复放，用st数组判断点是否已经放进队列

```cpp
##include<iostream>
##include<queue>
##include<cstring>
using namespace std;
const int N = 1e5 + 10;
typedef pair<int,int> PII;
int n,m;

int e[N],ne[N],idx,w[N],h[N],dist[N];
bool st[N];
void add(int x,int y,int z){
    e[idx] = y,ne[idx] = h[x],w[idx] = z,h[x] = idx ++;
}

int spfa(){
    memset(dist,0x3f,sizeof dist);
    queue<PII> q;
    dist[1] = 0;
    q.push({0,1}); // 最短距离是0，编号是1
    st[1] = true;
    while(q.size()){
        auto t = q.front();
        q.pop();
        int dis = t.first,vec = t.second;
        st[vec] = false;
        for(int i = h[vec];i != -1;i = ne[i]){
            int j = e[i];
            if(dist[j] > dist[vec] + w[i]){ // 这里不能用dis，因为dist[vec]在循环的时候可能会更新
                dist[j] = dist[vec] + w[i];
                if(!st[j]){
                    q.push({dist[j],j});
                    st[j] = true;
                }
            }
        }
    }
    return dist[n] >= 0x3f3f3f3f / 2; // 可能有负权边
}

int main(){
    memset(h,-1,sizeof h);
    cin >> n >> m;
    while(m--){
        int x,y,z;
        cin >> x >> y >> z;
        add(x,y,z);
    }
    if(spfa()) cout << "impossible" << endl;
    else cout << dist[n] << endl;
```

- 判断负环
    - 可以直接维护一个cnt数组，记录最短路径的边数，当边数大于节点数，说明有负环
    - 需要将所有点都加到队列里面
    - dist数组并不是用来记录最短路径的，是一个工具数组，因为只要有负权环，dist存的数就会越来越小，因此其初始值也是任意的

```
##include<iostream>
##include<queue>
##include<cstring>
using namespace std;
const int N = 2010, M = 10010;

int n,m;

int e[M],ne[M],idx,w[M],h[N],dist[N],cnt[N];
bool st[N];
void add(int x,int y,int z){
    e[idx] = y,ne[idx] = h[x],w[idx] = z,h[x] = idx ++;
}

bool spfa(){
    queue<int> q;
    for(int i = 1;i <= n;i++){
        q.push(i);
        st[i] = true;
    } // 最短距离是0，编号是1
    while(q.size()){
        auto t = q.front();
        q.pop();
        st[t] = false;
        for(int i = h[t];i != -1;i = ne[i]){
            int j = e[i];
            if(dist[j] > dist[t] + w[i]){ // 这里不能用dis，因为dist[vec]在循环的时候可能会更新
                dist[j] = dist[t] + w[i];
                cnt[j] = cnt[t] + 1;
                if(cnt[j] >= n) return true;
                if(!st[j]){
                    q.push(j);
                    st[j] = true;
                }

            }
        }
    }
    return false;
}

int main(){
    memset(h,-1,sizeof h);
```

```
    cin >> n >> m;
    while(m--){
        int x,y,z;
        cin >> x >> y >> z;
        add(x,y,z);
    }
    if(spfa()) cout << "Yes" << endl;
    else cout << "No" << endl;

}
```

Floyd算法

- 用邻接矩阵存
- 三层循环，最后邻接矩阵存的就是最短路径长度

```
##include<iostream>
##include<cstring>
##include<algorithm>
using namespace std;

const int N = 210;
int n,m,k;
int d[N][N];



void floyd(){
    for(int k = 1;k <= n;k ++){
        for(int i = 1;i <= n;i++){
            for(int j = 1;j <= n;j++)
            d[i][j] = min(d[i][j],d[i][k] + d[k][j]);
        }
    }
}

int main(){
    memset(d,0x3f,sizeof d);
    cin >> n >> m >> k;
    for(int i = 1;i <= n;i++) d[i][i] = 0;
    while(m--){
        int x,y,z;
        cin >> x >> y >> z;
        d[x][y] = min(d[x][y],z);
    }
    floyd();
    while(k--){
        int x,y;
        cin >> x >> y;
        if(d[x][y] >= 0x3f3f3f3f / 2) cout << "impossible" << endl;
        else cout << d[x][y] << endl;
```

```
    }
}
```