第二章 线性规划

2.7 对偶问题的基本性质

修贤超

机电工程与自动化学院
上海大学

xcxiu@shu.edu.cn

对偶问题的基本性质

单纯形法计算的矩阵描述

原问题

$$\max \ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.} \ \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \ (i = 1, \cdots, m) \\ x_j \geq 0 \ (j = 1, \cdots, n) \end{cases}$$

矩阵表达

$$\max \ z = \mathbf{CX}$$

$$\text{s.t.} \ \begin{cases} \mathbf{AX} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{X} \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

对偶问题的基本性质

- 单纯形法计算的矩阵描述
  - 引入松弛变量

$$\max \ z = \mathbf{CX} + 0\mathbf{X}_S$$

$$\text{s.t.} \ \begin{cases} \mathbf{AX} + \mathbf{IX}_S = \mathbf{b} \\ \mathbf{X} \geq \mathbf{0}, \ \mathbf{X}_S \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

单纯形法计算的矩阵描述

- 引入松弛变量

$$\max \ z = \mathbf{C}\mathbf{X} + 0\mathbf{X}_S$$

$$\text{s.t.} \ \begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{I}\mathbf{X}_S = \mathbf{b} \\ \mathbf{X} \geq \mathbf{0}, \ \mathbf{X}_S \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

- $\mathbf{I}$ 为 $m \times m$ 单位矩阵，为初始基。
- $\mathbf{X}_S = (x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})^\top$ 为基变量。

对偶问题的基本性质

单纯形法计算的矩阵描述

- 引入松弛变量

$$\max \ z = \mathbf{C}\mathbf{X} + 0\mathbf{X}_S$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{I}\mathbf{X}_S = \mathbf{b} \\ \mathbf{X} \geq \mathbf{0}, \ \mathbf{X}_S \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

- $\mathbf{I}$ 为 $m \times m$ 单位矩阵，为初始基。
- $\mathbf{X}_S = (x_{n+1}, \dots, x_{n+m})^\top$ 为基变量。
- 设迭代若干步后基变量为 $\mathbf{X}_B$，决策变量为 $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_B, \mathbf{X}_N)$。

对偶问题的基本性质

单纯形法计算的矩阵描述

- 引入松弛变量

$$\max \ z = \mathbf{CX} + 0\mathbf{X}_S$$
$$\text{s.t.} \ \begin{cases} \mathbf{AX} + \mathbf{IX}_S = \mathbf{b} \\ \mathbf{X} \geq \mathbf{0}, \ \mathbf{X}_S \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

- $\mathbf{I}$ 为 $m \times m$ 单位矩阵，为初始基。
- $\mathbf{X}_S = (x_{n+1}, \dots, x_{n+m})^\top$ 为基变量。
- 设迭代若干步后基变量为 $\mathbf{X}_B$，决策变量为 $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_B, \mathbf{X}_N)$。
- 将约束函数的系数矩阵 $\mathbf{A}$ 分为 $\mathbf{A} = (\mathbf{B}, \mathbf{N})$，其中 $\mathbf{B}$ 是基变量 $\mathbf{X}_B$ 的系数矩阵，$\mathbf{N}$ 是非基变量的系数矩阵。

单纯形法计算的矩阵描述

- 引入松弛变量

$$\max \ z = \mathbf{C}\mathbf{X} + 0\mathbf{X}_S$$

$$\text{s.t.} \ \begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{I}\mathbf{X}_S = \mathbf{b} \\ \mathbf{X} \geq \mathbf{0}, \ \mathbf{X}_S \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

- $\mathbf{I}$ 为 $m \times m$ 单位矩阵，为初始基。
- $\mathbf{X}_S = (x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})^\top$ 为基变量。
- 设迭代若干步后基变量为 $\mathbf{X}_B$，决策变量为 $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_B, \mathbf{X}_N)$。
- 将约束函数的系数矩阵 $\mathbf{A}$ 分为 $\mathbf{A} = (\mathbf{B}, \mathbf{N})$，其中 $\mathbf{B}$ 是基变量 $\mathbf{X}_B$ 的系数矩阵，$\mathbf{N}$ 是非基变量的系数矩阵。
- 将目标函数的系数向量 $\mathbf{C}$ 分为 $\mathbf{C} = (\mathbf{C}_B, \mathbf{C}_N)$，其中 $\mathbf{C}_B$ 是基变量的系数向量，$\mathbf{N}$ 是非基变量的系数向量。

对偶问题的基本性质

- 例 1
  - 写出下面问题的对偶问题

$$\max \; z = 2x_1 + x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 5x_2 \le 15 \\ 6x_1 + 2x_2 \le 24 \\ x_1 + x_2 \le 5 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

对偶问题的基本性质

- 例 1
  - 标准化

$$\max\ z = 2x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} 5x_2 + x_3 = 15 \\ 6x_1 + 2x_2 + x_4 = 24 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

例 1

标准化

$$\max\ z = 2x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 5x_2 + x_3 = 15 \\ 6x_1 + 2x_2 + x_4 = 24 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

列出初始单纯形表，确定主元 [6]，用 x_1 替换 x_4

$c_j \rightarrow$			2	1	0	0	0
$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	15	0	5	1	0	0
0	x_4	24	6	2	0	1	0
0	x_5	5	1	1	0	0	1
$c_j - z_j$			2	1	0	0	0

对偶问题的基本性质

例 1

- 初等行变换之前的单纯形表 (变量重排)

	$\mathbf{X}_B$			$\mathbf{X}_N$		$\mathbf{X}_S$		
	x_3	x_1	x_5	x_4	x_2	x_3	x_4	x_5
15	1	0	0	0	5	1	0	0
24	0	6	0	1	2	0	1	0
5	0	1	1	0	1	0	0	1
$\mathbf{b}$	$\mathbf{B}$			$\mathbf{N}$		$\mathbf{I}$		

对偶问题的基本性质

例 1

- 初等行变换之前的单纯形表 (变量重排)

	$\mathbf{X}_B$			$\mathbf{X}_N$		$\mathbf{X}_S$		
	x_3	x_1	x_5	x_4	x_2	x_3	x_4	x_5
15	1	0	0	0	5	1	0	0
24	0	6	0	1	2	0	1	0
5	0	1	1	0	1	0	0	1
$\mathbf{b}$	$\mathbf{B}$			$\mathbf{N}$		$\mathbf{I}$		

$$\Downarrow$$

项目			非基变量		基变量
$\mathbf{C}_B$	基	$\mathbf{b}$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{X}_N$	$\mathbf{X}_S$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{X}_S$	$\mathbf{b}$	$\mathbf{B}$	$\mathbf{N}$	$\mathbf{I}$
$c_j - z_j$			$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{C}_N$	$\mathbf{0}$

对偶问题的基本性质

- 例 1
  - 迭代之后的单纯形表 (变量重排)

	$\mathbf{X}_B$			$\mathbf{X}_N$		$\mathbf{X}_S$		
	x_3	x_1	x_5	x_4	x_2	x_3	x_4	x_5
15	1	0	0	0	5	1	0	0
4	0	1	0	1/6	2/6	0	1/6	0
5	0	0	1	-1/6	4/6	0	-1/6	1
$\mathbf{b}$	$\mathbf{I}$			$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$		$\mathbf{B}^{-1}$		

例 1

- 迭代之后的单纯形表 (变量重排)

	$\mathbf{X}_B$			$\mathbf{X}_N$		$\mathbf{X}_S$		
	x_3	x_1	x_5	x_4	x_2	x_3	x_4	x_5
15	1	0	0	0	5	1	0	0
4	0	1	0	1/6	2/6	0	1/6	0
5	0	0	1	-1/6	4/6	0	-1/6	1
$\mathbf{b}$	$\mathbf{I}$			$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$		$\mathbf{B}^{-1}$		

$$\Downarrow$$

项目			基变量	非基变量	
$\mathbf{C}_B$	基	$\mathbf{b}$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{X}_N$	$\mathbf{X}_S$
$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{I}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{I} = \mathbf{B}^{-1}$
$c_j - z_j$			$\mathbf{C}_B - \mathbf{C}_B\mathbf{I} = \mathbf{0}$	$\mathbf{C}_N - \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$	$\mathbf{0} - \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}$

例 1

- 迭代前后对比对“增广”矩阵做初等行变换

项目			非基变量		基变量
$\mathbf{C}_B$	基	$\mathbf{b}$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{X}_N$	$\mathbf{X}_S$
0	$\mathbf{X}_S$	$\mathbf{b}$	$\mathbf{B}$	$\mathbf{N}$	$\mathbf{I}$
$c_j - z_j$			$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{C}_N$	$\mathbf{0}$

$$\Downarrow$$

项目			基变量	非基变量	
$\mathbf{C}_B$	基	$\mathbf{b}$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{X}_N$	$\mathbf{X}_S$
$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{I}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{I} = \mathbf{B}^{-1}$
$c_j - z_j$			$\mathbf{C}_B - \mathbf{C}_B\mathbf{I} = \mathbf{0}$	$\mathbf{C}_N - \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$	$\mathbf{0} - \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}$

对偶问题的基本性质

单纯形法计算的矩阵描述

- 对应初始单纯形表中的单位矩阵 $\mathbf{I}$，迭代后的单纯形表中为 $\mathbf{B}^{-1}$。
- 初始单纯形表中基变量 $\mathbf{X}_S = \mathbf{b}$，迭代后的表中 $\mathbf{X}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$。

项目			非基变量		基变量
$\mathbf{C}_B$	基	$\mathbf{b}$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{X}_N$	$\mathbf{X}_S$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{X}_S$	$\mathbf{b}$	$\mathbf{B}$	$\mathbf{N}$	$\mathbf{I}$
$c_j - z_j$			$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{C}_N$	$\mathbf{0}$

$$\Downarrow$$

项目			基变量	非基变量	
$\mathbf{C}_B$	基	$\mathbf{b}$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{X}_N$	$\mathbf{X}_S$
$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{I}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{I} = \mathbf{B}^{-1}$
$c_j - z_j$			$\mathbf{C}_B - \mathbf{C}_B\mathbf{I} = \mathbf{0}$	$\mathbf{C}_N - \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$	$\mathbf{0} - \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}$

对偶问题的基本性质

单纯形法计算的矩阵描述

- 初始单纯形表中约束系数矩阵 $[\mathbf{A},\ \mathbf{I}] = [\mathbf{B},\ \mathbf{N},\ \mathbf{I}]$，迭代后的表中约束系数矩阵为 $[\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A},\ \mathbf{B}^{-1}\mathbf{I}] = [\mathbf{I},\ \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N},\ \mathbf{B}^{-1}]$
- 若初始矩阵中的变量 x_j 的系数向量为 $\mathbf{P}_j$，迭代后的为 $\mathbf{P}_j^{'}$，则有 $\mathbf{P}_j^{'} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j$

项目			非基变量		基变量
$\mathbf{C}_B$	基	$\mathbf{b}$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{X}_N$	$\mathbf{X}_S$
0	$\mathbf{X}_S$	$\mathbf{b}$	$\mathbf{B}$	$\mathbf{N}$	$\mathbf{I}$
$c_j - z_j$			$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{C}_N$	$\mathbf{0}$

$$\Downarrow$$

项目			基变量	非基变量	
$\mathbf{C}_B$	基	$\mathbf{b}$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{X}_N$	$\mathbf{X}_S$
$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{I}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{I} = \mathbf{B}^{-1}$
$c_j - z_j$			$\mathbf{C}_B - \mathbf{C}_B\mathbf{I} = \mathbf{0}$	$\mathbf{C}_N - \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$	$\mathbf{0} - \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}$

单纯形法计算的矩阵描述

- 迭代后达到最优，即检验数满足

$$\mathbf{C}_N - \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} \leq 0, \quad -\mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1} \leq 0$$

由于 $\mathbf{C}_B - \mathbf{C}_B\mathbf{I} = 0$，得到

$$\mathbf{C} - \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} \leq 0, \quad -\mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1} \leq 0$$

这里 $\mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}$ 称为单纯形乘子。若令 $\mathbf{Y}^\top = \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}$，则上式可以改写为

$$\mathbf{A}^\top\mathbf{Y} \geq \mathbf{C}^\top, \quad \mathbf{Y} \geq 0$$

- 上式表明 $\mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}$ 的转置为其对偶问题的一个可行解，即

$$w = \mathbf{Y}^\top\mathbf{b} = \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = z$$

因此，当原问题为最优解时，对偶问题为可行解，且两者具有相同的目标函数值。

对偶问题的基本性质

对偶问题的基本性质——弱对偶性

- 如果 $\overline{x}_j\ (j=1,\ldots,n)$ 是原问题的可行解，$\overline{y}_i\ (i=1,\ldots,m)$ 是其对偶问题的可行解，则恒有

$$\sum_{j=1}^{n} c_j\overline{x}_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i\overline{y}_i$$

对偶问题的基本性质

对偶问题的基本性质——弱对偶性

- 如果 $\overline{x}_j\ (j=1,\ldots,n)$ 是原问题的可行解，$\overline{y}_i\ (i=1,\ldots,m)$ 是其对偶问题的可行解，则恒有

$$\sum_{j=1}^{n} c_j\overline{x}_j \le \sum_{i=1}^{m} b_i\overline{y}_i$$

证: 根据定义易知

$$\sum_{j=1}^{n} c_j\overline{x}_j \le \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\overline{y}_i\right)\overline{x}_j = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{x}_j\overline{y}_i$$

对偶问题的基本性质——弱对偶性

- 如果 $\overline{x}_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ 是原问题的可行解，$\overline{y}_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ 是其对偶问题的可行解，则恒有

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \overline{x}_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i \overline{y}_i$$

证: 根据定义易知

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \overline{x}_j \leq \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \overline{y}_i \right) \overline{x}_j = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \overline{x}_j \overline{y}_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} b_i \overline{y}_i \geq \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \overline{x}_j \right) \overline{y}_i = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \overline{y}_i \overline{x}_j$$

对偶问题的基本性质——弱对偶性

- 如果 $\overline{x}_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ 是原问题的可行解，$\overline{y}_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ 是其对偶问题的可行解，则恒有

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \overline{x}_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i \overline{y}_i$$

- 推论 1: 原问题任一可行解的目标函数值是其对偶问题目标函数值的下界，反之，对偶问题任一可行解的目标函数值是其原问题目标函数值的上界。

对偶问题的基本性质

对偶问题的基本性质——弱对偶性

- 如果 $\overline{x}_j\ (j=1,\ldots,n)$ 是原问题的可行解，$\overline{y}_i\ (i=1,\ldots,m)$ 是其对偶问题的可行解，则恒有

$$\sum_{j=1}^{n} c_j\overline{x}_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i\overline{y}_i$$

- **推论 1:** 原问题任一可行解的目标函数值是其对偶问题目标函数值的下界，反之，对偶问题任一可行解的目标函数值是其原问题目标函数值的上界。

- **推论 2:** 若原问题有可行解且目标函数值无界，则其对偶问题无可行解；反之，对偶问题有无界解，则原问题无可行解。

对偶问题的基本性质

对偶问题的基本性质——弱对偶性

- 如果 $\overline{x}_j\ (j=1,\ldots,n)$ 是原问题的可行解，$\overline{y}_i\ (i=1,\ldots,m)$ 是其对偶问题的可行解，则恒有

$$\sum_{j=1}^{n} c_j\overline{x}_j \le \sum_{i=1}^{m} b_i\overline{y}_i$$

- **推论 1:** 原问题任一可行解的目标函数值是其对偶问题目标函数值的下界，反之，对偶问题任一可行解的目标函数值是其原问题目标函数值的上界。
- **推论 2:** 若原问题有可行解且目标函数值无界，则其对偶问题无可行解；反之，对偶问题有无界解，则原问题无可行解。
- **推论 3:** 若原问题有可行解，对偶问题无可行解，则原问题目标函数值无界；反之，对偶问题有可行解，而原问题无可行解，则对偶问题的目标函数值无界。

对偶问题的基本性质

- **对偶问题的基本性质——最优性**
  - 如果 $\hat{x}_j\ (j=1,\dots,n)$ 是原问题的可行解，$\hat{y}_i\ (i=1,\dots,m)$ 是其对偶问题的可行解，且有 $\sum_{j=1}^{n} c_j\hat{x}_j = \sum_{i=1}^{m} b_i\hat{y}_i$ 则 $\hat{x}_j\ (j=1,\dots,n)$ 是原问题的最优解，$\hat{y}_i\ (i=1,\dots,m)$ 是其对偶问题的最优解。

对偶问题的基本性质

对偶问题的基本性质——最优性

- 如果 $\hat{x}_j\ (j=1,\ldots,n)$ 是原问题的可行解，$\hat{y}_i\ (i=1,\ldots,m)$ 是其对偶问题的可行解，且有 $\sum\limits_{j=1}^{n} c_j\hat{x}_j = \sum\limits_{i=1}^{m} b_i\hat{y}_i$ 则 $\hat{x}_j\ (j=1,\ldots,n)$ 是原问题的最优解，$\hat{y}_i\ (i=1,\ldots,m)$ 是其对偶问题的最优解。

  证: 设 $x_j^*\ (j=1,\ldots,n)$ 是原问题的最优解，$y_i^*\ (i=1,\ldots,m)$ 是其对偶问题的最优解，有

$$\sum_{j=1}^{n} c_j\hat{x}_j \le \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^*,\quad \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* \le \sum_{i=1}^{m} b_i\hat{y}_i$$

对偶问题的基本性质——最优性

- 如果 $\hat{x}_j\ (j=1,\dots,n)$ 是原问题的可行解，$\hat{y}_i\ (i=1,\dots,m)$ 是其对偶问题的可行解，且有 $\sum\limits_{j=1}^{n} c_j\hat{x}_j = \sum\limits_{i=1}^{m} b_i\hat{y}_i$ 则 $\hat{x}_j\ (j=1,\dots,n)$ 是原问题的最优解，$\hat{y}_i\ (i=1,\dots,m)$ 是其对偶问题的最优解。

证: 设 $x_j^*\ (j=1,\dots,n)$ 是原问题的最优解，$y_i^*\ (i=1,\dots,m)$ 是其对偶问题的最优解，有

$$\sum_{j=1}^{n} c_j\hat{x}_j \le \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^*,\quad \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* \le \sum_{i=1}^{m} b_i\hat{y}_i$$

又

$$\sum_{j=1}^{n} c_j\hat{x}_j = \sum_{i=1}^{m} b_i\hat{y}_i,\quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$$

对偶问题的基本性质——最优性

- 如果 $\hat{x}_j$ $(j=1,\ldots,n)$ 是原问题的可行解，$\hat{y}_i$ $(i=1,\ldots,m)$ 是其对偶问题的可行解，且有 $\sum_{j=1}^{n} c_j\hat{x}_j = \sum_{i=1}^{m} b_i\hat{y}_i$ 则 $\hat{x}_j$ $(j=1,\ldots,n)$ 是原问题的最优解，$\hat{y}_i$ $(i=1,\ldots,m)$ 是其对偶问题的最优解。

证: 设 x_j^* $(j=1,\ldots,n)$ 是原问题的最优解，y_i^* $(i=1,\ldots,m)$ 是其对偶问题的最优解，有

$$\sum_{j=1}^{n} c_j\hat{x}_j \le \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^*,\quad \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* \le \sum_{i=1}^{m} b_i\hat{y}_i$$

又

$$\sum_{j=1}^{n} c_j\hat{x}_j = \sum_{i=1}^{m} b_i\hat{y}_i,\quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$$

因此

$$\sum_{j=1}^{n} c_j\hat{x}_j = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* = \sum_{i=1}^{m} b_i\hat{y}_i$$

对偶问题的基本性质

对偶问题的基本性质——强对偶性

- 若原问题有最优解，对偶问题也有最优解，且目标函数值相等。或若原问题与对偶问题均具有可行解，则两者均具有最优解，且它们最优解的目标函数值相等。

对偶问题的基本性质——强对偶性

- 若原问题有最优解，对偶问题也有最优解，且目标函数值相等。或若原问题与对偶问题均具有可行解，则两者均具有最优解，且它们最优解的目标函数值相等。

  证: 一方面，由于两者均有可行解，根据弱对偶性的推论 1，对原问题的目标函数值具有上界，对偶问题的目标函数值具有下界，因此两者均具有最优解。

对偶问题的基本性质——强对偶性

- 若原问题有最优解，对偶问题也有最优解，且目标函数值相等。或若原问题与对偶问题均具有可行解，则两者均具有最优解，且它们最优解的目标函数值相等。

  证: 一方面，由于两者均有可行解，根据弱对偶性的推论 1，对原问题的目标函数值具有上界，对偶问题的目标函数值具有下界，因此两者均具有最优解。

  另一方面，又由（2.19）和（2.20）知，当原问题为最优解时，其对偶问题的解为可行解，且有 $z = w$。

对偶问题的基本性质——强对偶性

- 若原问题有最优解，对偶问题也有最优解，且目标函数值相等。或若原问题与对偶问题均具有可行解，则两者均具有最优解，且它们最优解的目标函数值相等。

  证: 一方面，由于两者均有可行解，根据弱对偶性的推论 1，对原问题的目标函数值具有上界，对偶问题的目标函数值具有下界，因此两者均具有最优解。

  另一方面，又由（2.19）和（2.20）知，当原问题为最优解时，其对偶问题的解为可行解，且有 $z = w$。

  由最优性知, 这时两者的解均为最优解。

对偶问题的基本性质——互补松驰性

- 在线性规划问题的最优解中，如果对应某一约束条件的对偶变量值为零，则改约束条件取严格等式; 反之，如果约束条件取严格不等式，则其对应的对偶变量一定为零。也即
  - 若 $\hat{y}_i > 0$，则有 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\hat{x}_j = b_i$，即 $\hat{x}_{si} = 0$
  - 若 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\hat{x}_j < b_i$，即 $\hat{x}_{si} = 0$，则有 $\hat{y}_i = 0$

  因此一定有 $\hat{x}_{si} \cdot \hat{y}_i = 0$

对偶问题的基本性质——互补松驰性

- 在线性规划问题的最优解中，如果对应某一约束条件的对偶变量值为零，则改约束条件取严格等式; 反之，如果约束条件取严格不等式，则其对应的对偶变量一定为零。也即
  - 若 $\hat{y}_i > 0$，则有 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\hat{x}_j = b_i$，即 $\hat{x}_{si} = 0$
  - 若 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\hat{x}_j < b_i$，即 $\hat{x}_{si} = 0$，则有 $\hat{y}_i = 0$

  因此一定有 $\hat{x}_{si} \cdot \hat{y}_i = 0$

  证: 由弱对偶性知

$$\sum_{j=1}^{n} c_j\hat{x}_j \leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\hat{x}_j\hat{y}_i \leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_i\hat{y}_i$$

对偶问题的基本性质——互补松驰性

- 在线性规划问题的最优解中，如果对应某一约束条件的对偶变量值为零，则改约束条件取严格等式; 反之，如果约束条件取严格不等式，则其对应的对偶变量一定为零。也即
  - 若 $\hat{y}_i > 0$，则有 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\hat{x}_j = b_i$, 即 $\hat{x}_{si} = 0$
  - 若 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\hat{x}_j < b_i$，即 $\hat{x}_{si} = 0$，则有 $\hat{y}_i = 0$

  因此一定有 $\hat{x}_{si} \cdot \hat{y}_i = 0$

  证: 由弱对偶性知

$$\sum_{j=1}^{n} c_j\hat{x}_j \leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\hat{x}_j\hat{y}_i \leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_i\hat{y}_i$$

  又根据最优性 $\sum\limits_{j=1}^{n} c_j\hat{x}_j = \sum\limits_{i=1}^{m} b_i\hat{y}_i$，故上式中全为等式。

对偶问题的基本性质

- 对偶问题的基本性质——互补松驰性
  - 证: 由右端等式得

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\hat{x}_j - b_i\right)\hat{y}_i = 0$$

对偶问题的基本性质

对偶问题的基本性质——互补松驰性

- 证: 由右端等式得

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\hat{x}_j - b_i\right)\hat{y}_i = 0$$

由于 $\hat{y}_i \geq 0$, $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\hat{x}_j - b_i \leq 0$，故对所有 $i = 1, \ldots, m$ 有

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\hat{x}_j - b_i\right)\hat{y}_i = 0$$

对偶问题的基本性质

对偶问题的基本性质——互补松弛性

证: 由右端等式得

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\hat{x}_j - b_i\right)\hat{y}_i = 0$$

由于 $\hat{y}_i \geq 0$, $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\hat{x}_j - b_i \leq 0$，故对所有 $i = 1, \ldots, m$ 有

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\hat{x}_j - b_i\right)\hat{y}_i = 0$$

- 当 $\hat{y}_i > 0$ 时，必有 $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\hat{x}_j - b_i = 0$
- 当 $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\hat{x}_j - b_i < 0$ 时，必有 $\hat{y}_i = 0$

对偶问题的基本性质

对偶问题的基本性质——互补松弛性

- 将互补松弛性质应用于其对偶问题时，可以描述为
  - 如果有 $\hat{x}_i > 0$，则有 $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\hat{y}_i = c_j$
  - 如果有 $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\hat{y}_j > c_j$，即 $\hat{x}_j = 0$

对偶问题的基本性质

对偶问题的基本性质——互补松弛性

- 将互补松弛性质应用于其对偶问题时，可以描述为
  - 如果有 $\hat{x}_i > 0$，则有 $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\hat{y}_i = c_j$
  - 如果有 $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\hat{y}_j > c_j$，即 $\hat{x}_j = 0$
- 上述针对对称形式证明得对偶问题得性质，同样适用于非对称形式。

对偶问题的基本性质

对偶问题的基本性质——互补松弛性

- 将互补松弛性质应用于其对偶问题时，可以描述为
  - 如果有 $\hat{x}_i > 0$，则有 $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\hat{y}_i = c_j$
  - 如果有 $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\hat{y}_j > c_j$，即 $\hat{x}_j = 0$
- 上述针对对称形式证明得对偶问题得性质，同样适用于非对称形式。
- 互补松弛性质是理解非线性规划中 KKT 条件得重要基础。

对偶问题的基本性质

- 例 2
  - 试用对偶理论证明上述线性规划问题无最优解

$$\max\ z = x_1 + x_2$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \le 2 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 \le 1 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

例 2

- 试用对偶理论证明上述线性规划问题无最优解

$$\max\ z = x_1 + x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \le 2 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 \le 1 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

- 上述问题的对偶问题

$$\min\ w = 2y_1 + y_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} -y_1 - 2y_2 \ge 1 \\ y_1 + y_2 \ge 1 \\ y_1 - y_2 \ge 0 \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$$

- 由第 1 个约束条件可知对偶问题无可行解，因而无最优解，由推论3知原问题也无最优解。

例 3

- 已知线性规划问题

$$
\begin{aligned}
\min\ \ & w = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 \\
\text{s.t.}\ \ & \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \geq 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \geq 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

已知其对偶问题的最优解为 $y_1^* = 4/5, y_2^* = 3/5, z = 5$，试用对偶理论找出原问题的最优解。

- 例 3
  - 原问题

$$\min\ w = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \geq 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \geq 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

  - 对偶问题

$$\max\ z = 4y_1 + 3y_2$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} y_1 + 2y_2 \leq 2 & (1) \\ y_1 - y_2 \leq 3 & (2) \\ 2y_1 + 3y_2 \leq 5 & (3) \\ y_1 + y_2 \leq 2 & (4) \\ 3y_1 + y_2 \leq 3 & (5) \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

对偶问题的基本性质

例 3

- 将 $y_1^* = 4/5, y_2^* = 3/5$ 的值代入约束条件得

$$(2) = 1/5 < 3,\ (3) = 17/5 < 5, (4) = 7/5 < 2$$

它们为严格不等式，由互补松弛性得 $x_2^* = x_3^* = x_4^* = 0$。

- 例 3
  - 将 $y_1^* = 4/5, y_2^* = 3/5$ 的值代入约束条件得

$$(2) = 1/5 < 3,\ (3) = 17/5 < 5, (4) = 7/5 < 2$$

它们为严格不等式，由互补松弛性得 $x_2^* = x_3^* = x_4^* = 0$。

由于 $y_1^*, y_2^* > 0$，由互补松弛性可知原问题的两个约束条件应取等式，即

$$x_1^* + 3x_5^* = 4,\ 2x_1^* + x_5^* = 3$$

求解后得到 $x_1^* = 1,\ x_5^* = 1$。

例 3

- 将 $y_1^* = 4/5, y_2^* = 3/5$ 的值代入约束条件得

$$(2) = 1/5 < 3,\ (3) = 17/5 < 5, (4) = 7/5 < 2$$

它们为严格不等式，由互补松弛性得 $x_2^* = x_3^* = x_4^* = 0$。

由于 $y_1^*, y_2^* > 0$，由互补松弛性可知原问题的两个约束条件应取等式，即

$$x_1^* + 3x_5^* = 4,\ 2x_1^* + x_5^* = 3$$

求解后得到 $x_1^* = 1,\ x_5^* = 1$。

因此原问题的最优解为 $X^* = (1, 0, 0, 0, 1)^\top$，最优值为 $w^* = 5$。

对偶问题的基本性质

- 小结
  - 单纯形计算的矩阵描述
  - 对偶问题的基本性质
    - 弱对偶定理
    - 最优性定理
    - 对偶定理
    - 互补松弛性
- 课后作业: P75, 习题 2.5, 2.6

Q&A

Thank you!

感谢您的聆听和反馈