第三章 整数规划

3.1 整数规划的数学模型及解的特点

修贤超

机电工程与自动化学院
上海大学

xcxiu@shu.edu.cn

整数规划的数学模型及解的特点

例 1

- 某厂利用集装箱托运甲、乙两种货物，每箱体积、重量、可获利润及托运限制如下。问两种货物各托运多少箱使利润最大？

项目	体积	重量	利润
甲	5	2	20
乙	4	5	10
托运限制	24	13	

整数规划的数学模型及解的特点

- 例 1
  - 设两种货物分别托运 x_1, x_2，得到

$$
\max \ z = 20x_1 + 10x_2
$$

$$
\text{s.t.} \ \begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \le 24 \\ 2x_1 + 5x_2 \le 13 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}
$$

整数规划的数学模型及解的特点

- 例 1
  - 设两种货物分别托运 x_1, x_2，得到

$$\max\ z = 20x_1 + 10x_2$$
$$\text{s.t.}\ \begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \le 24 \\ 2x_1 + 5x_2 \le 13 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

  - 显然托运数量必须是整数，于是

$$\max\ z = 20x_1 + 10x_2$$
$$\text{s.t.}\ \begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \le 24 \\ 2x_1 + 5x_2 \le 13 \\ x_1, x_2 \ge 0 \text{且取整数} \end{cases}$$

整数规划数学模型的一般形式

- 要求部分或全部决策变量必须取整数值的规划问题称为整数规划 (Integer Programming, IP)

$$\max(\min)\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le (\ge, =)\ b_i\ \ (i = 1, \dots, m) \\ x_j \ge 0\ (j = 1, \dots, n) \\ x_j\text{中部分或全部取整数} \end{cases}$$

整数规划的数学模型及解的特点

整数规划数学模型的一般形式

- 要求部分或全部决策变量必须取整数值的规划问题称为整数规划(Integer Programming, IP)

$$\max(\min)\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le (\ge, =)\ b_i\ (i = 1, \ldots, m) \\ x_j \ge 0\ (j = 1, \ldots, n) \\ x_j \text{中部分或全部取整数} \end{cases}$$

- 若不考虑整数条件，由余下的目标函数和约束条件构成的规划问题称为松弛问题

整数规划数学模型的一般形式

- 要求部分或全部决策变量必须取整数值的规划问题称为整数规划 (Integer Programming, IP)

$$\max(\min)\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le (\ge, =)\ b_i\ (i = 1, \ldots, m) \\ x_j \ge 0\ (j = 1, \ldots, n) \\ x_j \text{中部分或全部取整数} \end{cases}$$

- 若不考虑整数条件，由余下的目标函数和约束条件构成的规划问题称为松弛问题
- 若松弛问题是一个线性规划，则称该规划为称为整数线性规划 (Integer Linear Programming, ILP)

整数规划的数学模型及解的特点

- 整数规划数学模型的一般形式
  - 纯整数线性规划: 全部决策变量都必须取整数值

整数规划的数学模型及解的特点

- 整数规划数学模型的一般形式
  - 纯整数线性规划: 全部决策变量都必须取整数值
  - 0-1 型整数线性规划: 决策变量只能取值 0 或 1

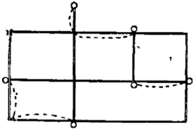
整数规划的数学模型及解的特点

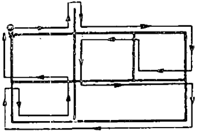
- 整数规划数学模型的一般形式
  - 纯整数线性规划: 全部决策变量都必须取整数值
  - 0-1 型整数线性规划: 决策变量只能取值 0 或 1
  - 混合整数线性规划: 决策变量中一部分必须取整数值，另一部分可以不取整数值

整数规划的数学模型及解的特点

整数规划数学模型的一般形式

- 纯整数线性规划：全部决策变量都必须取整数值
- 0-1 型整数线性规划：决策变量只能取值 0 或 1
- 混合整数线性规划：决策变量中一部分必须取整数值，另一部分可以不取整数值
- （中国邮递员问题）一个邮递员从邮局出发，要走完他所管辖范围内的每一条街道，至少一次再返回邮局，如何选择一条尽可能短的路线？该问题由我国数学家管梅谷在 1962 年首先提出。

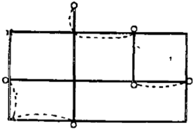


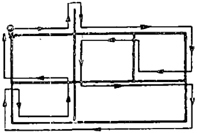


整数规划的数学模型及解的特点

整数规划数学模型的一般形式

- 纯整数线性规划: 全部决策变量都必须取整数值
- 0-1 型整数线性规划: 决策变量只能取值 0 或 1
- 混合整数线性规划: 决策变量中一部分必须取整数值，另一部分可以不取整数值
- (中国邮递员问题) 一个邮递员从邮局出发，要走完他所管辖范围内的每一条街道，至少一次再返回邮局，如何选择一条尽可能短的路线？该问题由我国数学家管梅谷在 1962 年首先提出。





- 旅行商问题 (Traveling Salesman Problem, TSP)

例 2: 纯整数线性规划问题

- 某服务部门各时段（每 2h 为一时段）需要的服务员人数见下表。按规定，服务员连续工作 8h（即四个时段）为一班。现要求安排服务员的工作时间，使服务部门服务员总数最少。

时段	1	2	3	4	5	6	7	8
服务员最少数目	10	8	9	11	13	8	5	3

整数规划的数学模型及解的特点

- **例 2: 纯整数线性规划问题**
  - 设在第 j 时段开始时上班的服务员人数为 x_j
  - 由于第 j 时段开始时上班的服务员将在第 $(j+3)$ 时段结束时下班，故决策变量只需考虑 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5

例 2: 纯整数线性规划问题

- 设在第 j 时段开始时上班的服务员人数为 x_j
- 由于第 j 时段开始时上班的服务员将在第 $(j+3)$ 时段结束时下班，故决策变量只需考虑 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5
- 数学模型为

$$\min \ z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 \geq 10 \\ x_1 + x_2 \geq 8 \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 9 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 11 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 13 \\ x_3 + x_4 + x_5 \geq 8 \\ x_4 + x_5 \geq 5 \\ x_5 \geq 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \text{且取整数} \end{cases}$$

例 3: 0-1 型整数线性规划

- 现有资金总额为 B，可供选择的投资项目有 n 个，项目 j 所需投资额和预期收益分别为 a_j 和 c_j $(j = 1, \ldots, n)$。此外，因种种原因，有 3 个附加条件:
  - 若选择项目 1 必须同时选择项目 2，反之，不一定
  - 项目 3 和项目 4 中至少选择一个
  - 项目 5、6、7 中恰好选择两个

  应当怎样选择投资项目，才能使总预期收益最大？

例 3: 0-1 型整数线性规划

- 每一个投资项目都有被选择和不被选择两种可能，为此令

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{对项目}j\text{投资} \\ 0 & \text{对项目}j\text{不投资} \end{cases}$$

整数规划的数学模型及解的特点

例 3: 0-1 型整数线性规划

- 每一个投资项目都有被选择和不被选择两种可能，为此令

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{对项目}j\text{投资} \\ 0 & \text{对项目}j\text{不投资} \end{cases}$$

- 数学模型为

$$\max\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_j x_j \leq B \\ x_2 \geq x_1 \\ x_3 + x_4 \geq 1 \\ x_5 + x_6 + x_7 = 2 \\ x_j = 0\text{或}1\ (j = 1, \ldots, n) \end{cases}$$

例 4: 混合整数线性规划

- 工厂 A_1 和 A_2 生产某种物资，由于该种物资供不应求，故需要再建一家工厂。相应建设方案有 A_3 和 A_4 两个。这种物资的需求地有 B_1, B_2, B_3, B_4 四个。各工厂年生产能力、各地年需求量、各厂至各需求地的单位物资运费 c_{ij} $(i, j = 1, 2, 3, 4)$ 如下

工厂	B_1	B_2	B_3	B_4	生产能力 (kt/年)
A_1	2	9	3	4	400
A_2	8	3	5	7	600
A_3	7	6	1	2	200
A_4	4	5	2	5	200
需求量 (kt/年)	350	400	300	150	

工厂 A_3 和 A_4 的生产费用估计为 1200 万元或 1500 万元。现要决定应该建设工厂 A_3 还是 A_4，才能使今后每年的总费用 (包括物资运费和新工厂的生产费用) 最少。

整数规划的数学模型及解的特点

- 例 4: 混合整数线性规划
  - 设 x_{ij} 为由 A_i 送往 B_j 的物资数量
  - 令

$$y = \begin{cases} 1 & 若建工厂 A_3 \\ 0 & 若建工厂 A_4 \end{cases}$$

例 4: 混合整数线性规划

- 设 x_{ij} 为由 A_i 送往 B_j 的物资数量
- 令

$$y=\begin{cases}1 & \text{若建工厂} A_3 \\ 0 & \text{若建工厂} A_4\end{cases}$$

- 目标函数包括物资总运费和新工厂生产费用，即

$$\min\ z=\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}c_{ij}x_{ij}+[1200y+1500(1-y)]$$

例 4: 混合整数线性规划

- 数学模型为

$$\min \ z=\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}c_{ij}x_{ij}+[1200y+1500(1-y)]$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}=350 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}=400 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}=300 \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}=150 \\ x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=400 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{23}=600 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=200y \\ x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}=200(1-y) \\ x_{ij}\geq 0\ (i,j=1,2,3,4) \\ y=0\text{或}1 \end{cases}$$

整数规划的数学模型及解的特点

解的特点

- 整数线性规划问题

$$\max(\min)\ z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le (\ge, =)\ b_i\ (i=1,\dots,m) \\ x_j \ge 0\ (j=1,\dots,n) \\ x_j \text{中部分或全部取整数} \end{cases}$$

- 整数线性规划问题的可行解的集合不是凸集，即任意两个可行解的凸组合不一定满足整数约束条件。

整数规划的数学模型及解的特点

解的特点

- 整数线性规划问题

$$\max(\min)\ z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le (\ge,=)\ b_i\ (i=1,\ldots,m) \\ x_j \ge 0\ (j=1,\ldots,n) \\ x_j\text{中部分或全部取整数} \end{cases}$$

- 整数线性规划问题的可行解的集合不是凸集，即任意两个可行解的凸组合不一定满足整数约束条件。
- 整数线性规划问题的可行解一定是松弛问题的可行解，反之不一定。

整数规划的数学模型及解的特点

解的特点

- 整数线性规划问题

$$\max(\min)\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le (\ge, =)\ b_i\ (i = 1, \ldots, m) \\ x_j \ge 0\ (j = 1, \ldots, n) \\ x_j \text{中部分或全部取整数} \end{cases}$$

- 整数线性规划问题的可行解的集合不是凸集，即任意两个可行解的凸组合不一定满足整数约束条件。
- 整数线性规划问题的可行解一定是松弛问题的可行解，反之不一定。
- 整数线性规划问题的目标函数值不会优于松弛问题。

- 例 5
  - 求解整数线性规划问题

$$\max \ z = 20x_1 + 10x_2$$
$$\text{s.t.} \ \begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \leq 24 \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 13 \\ x_1, x_2 \geq 0 \text{且取整数} \end{cases}$$

整数规划的数学模型及解的特点

- 例 5
  - 考虑其松弛问题

$$\max \ z = 20x_1 + 10x_2$$

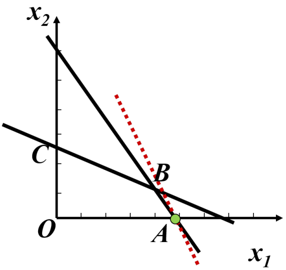
$$\text{s.t.} \ \begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \leq 24 \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 13 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

- 例 5
  - 考虑其松弛问题

$$\max\ z = 20x_1 + 10x_2$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \le 24 \\ 2x_1 + 5x_2 \le 13 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

  - 最优解为 $A(4.8, 0)$，最优值 $z = 96$

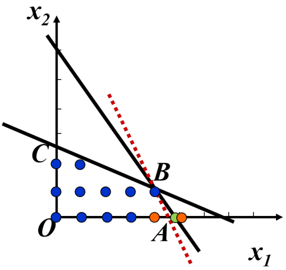


整数规划的数学模型及解的特点

- 例 5
  - 设想一: 将松弛问题的最优解进行四舍五入，即 $x_1 = 5$，$x_2 = 0$。

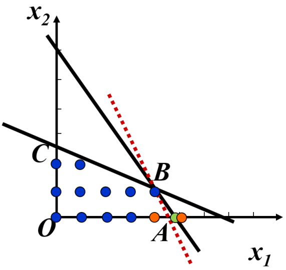
整数规划的数学模型及解的特点

- 例 5
  - 设想一：将松弛问题的最优解进行四舍五入，即 $x_1 = 5$，$x_2 = 0$。
  - 设想二：将松弛问题的最优解向下取整，即 $x_1 = 4$，$x_2 = 0$，$z = 80$。



例 5

- 设想一：将松弛问题的最优解进行四舍五入，即 $x_1 = 5$，$x_2 = 0$。
- 设想二：将松弛问题的最优解向下取整，即 $x_1 = 4$，$x_2 = 0$，$z = 80$。



- 启发：先求松弛问题最优解，再用简单取整的方法虽然直观，却并不是求解整数规划的有效方法。

- 课堂练习 1
  - 求解下述整数线性规划问题

$$\max \ z = x_1 + 4x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 3 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \\ x_1, x_2 \ge 0 \text{且取整数} \end{cases}$$

小结

整数规划的几种类型

- 纯整数线性规划
- 0-1 型整数线性规划
- 混合整数线性规划

解的特点

- 最优解不一定在顶点上达到
- 最优解不一定是相应线性规划的最优解“化整”的整数解
- 最优解不一定是相应线性规划最优解的临近点
- 整数可行解远多于顶点，枚举法不可取

Q&A

Thank you!

感谢您的聆听和反馈