第五章 对策论

5.2 矩阵对策的基本理论

修贤超

机电工程与自动化学院
上海大学

xcxiu@shu.edu.cn

矩阵对策的基本理论

- 矩阵对策的纯策略
  - 二人有限零和对策

矩阵对策的基本理论

矩阵对策的纯策略

二人有限零和对策

- 局中人: 两人 (I,II)，分别有 m, n 个纯策略可供选择
- 策略集: $S_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\}$，$S_2 = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$
- 策略集: $S_1 \times S_2 = \{(\alpha_i, \beta_j),\ i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n\}$
- 赢得函数: $H_1(\alpha_i, \beta_j) = a_{ij},\ H_2(\alpha_i, \beta_j) = -a_{ij}$，矩阵表示为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- 矩阵对策: 局中人 + 策略集 + 赢得函数，即 $G = \{S_1, S_2; \mathbf{A}\}$

矩阵对策的纯策略

- 在“齐王赛马”中，齐王和田忌各自都有 6 个策略: (上, 中, 下)、(上, 下, 中)、(中, 上, 下)、(中, 下, 上)、(下, 中, 上)、(下, 上, 中)。齐王的赢得矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

矩阵对策的基本理论

矩阵对策的纯策略

- 在“齐王赛马”中，齐王和田忌各自都有 6 个策略: (上, 中, 下)、(上, 下, 中)、(中, 上, 下)、(中, 下, 上)、(下, 中, 上)、(下, 上, 中)。齐王的赢得矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

- 矩阵对策模型给定后，各局中人面临的问题: 如何选择对自己最有利的纯策略以取得最大的赢得（或最少所失）？

例 1

- 设有一矩阵策略 $G=\{S_1,S_2;\mathbf{A}\}$，其中

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} -6 & 1 & -8 \\ 3 & 2 & 4 \\ 9 & -1 & -10 \\ -3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

矩阵对策的基本理论

例 1

- 设有一矩阵策略 $G=\{S_1,S_2;\mathbf{A}\}$，其中

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} -6 & 1 & -8 \\ 3 & 2 & 4 \\ 9 & -1 & -10 \\ -3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

- 考虑到对方必然会设法使自己所得最少这一点，就应该从各自可能出现的最不利的情形中选择一个最有利的情形作为决策的依据，这就是所谓的“理智行为”。

例 1

- 设有一矩阵策略 $G=\{S_1,S_2;\mathbf{A}\}$，其中

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} -6 & 1 & -8 \\ 3 & 2 & 4 \\ 9 & -1 & -10 \\ -3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

- 考虑到对方必然会设法使自己所得最少这一点，就应该从各自可能出现的最不利的情形中选择一个最有利的情形作为决策的依据，这就是所谓的“理智行为”。
- 局中人 I 和 II 的“理智行为”分别是选择纯策略 α_2 和 β_2，这是局中人 I 的赢得值和局中人 II 的所失值的绝对值相等，因此 (α_2,β_2) 称为平衡局势，即最优纯策略。

矩阵对策的纯策略

- **定义 1:** 设 $G=\{S_1,S_2;\mathbf{A}\}$ 为一矩阵对策，其中 $S_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m\}$，$S_2=\{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n\}$，$\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$。若

$$\max_i \min_j \ a_{ij} = \min_j \max_i \ a_{ij}$$

成立，记其值为 V_G，则称 V_G 为对策的值，称使上式成立的纯局势 (α_i^*,β_j^*) 为 G 在纯策略意义下的解（或平衡局势），称 α_i^* 和 β_j^* 分别为局中人 I 和 II 的最优纯策略。

矩阵对策的纯策略

- **定义 1:** 设 $G = \{S_1, S_2; \mathbf{A}\}$ 为一矩阵对策，其中 $S_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\}$，$S_2 = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$，$\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$。若

$$\max_i \min_j \ a_{ij} = \min_j \max_i \ a_{ij}$$

成立，记其值为 V_G，则称 V_G 为对策的值，称使上式成立的纯局势 (α_i^*, β_j^*) 为 G 在纯策略意义下的解（或平衡局势），称 α_i^* 和 β_j^* 分别为局中人 I 和 II 的最优纯策略。

- 矩阵 $\mathbf{A}$ 中平衡局势 (α_2, β_2) 对应的元素 a_{22} 既是其所在行的最小元素，又是其所在列的最大元素，即有

$$a_{i2} \leq a_{22} \leq a_{2j}, \ i = 1, 2, 3, 4, \ j = 1, 2, 3$$

矩阵对策的基本理论

矩阵对策的纯策略

- 定理 1: 矩阵对策 $G = \{S_1, S_2; \mathbf{A}\}$ 在纯策略意义下有解的充要条件是: 存在纯局势 (α_i^*, β_j^*)，使得对任意 i 和 j，有

$$a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*} \leq a_{i^*j}$$

矩阵对策的基本理论

矩阵对策的纯策略

- 定理 1: 矩阵对策 $G=\{S_1,S_2;\mathbf{A}\}$ 在纯策略意义下有解的充要条件是: 存在纯局势 (α_i^*,β_j^*)，使得对任意 i 和 j，有

$$a_{ij^*}\le a_{i^*j^*}\le a_{i^*j}$$

- (充分性) 设有 i^* 和 j^* 使得

$$\min_j\ a_{i^*j}=\max_i\min_j\ a_{ij},\quad \max_i\ a_{ij^*}=\min_j\max_i\ a_{ij}$$

矩阵对策的基本理论

矩阵对策的纯策略

- **定理 1**: 矩阵对策 $G=\{S_1,S_2;\mathbf{A}\}$ 在纯策略意义下有解的充要条件是: 存在纯局势 (α_i^*,β_j^*)，使得对任意 i 和 j，有

$$a_{ij^*}\le a_{i^*j^*}\le a_{i^*j}$$

- (充分性) 设有 i^* 和 j^* 使得

$$\min_j\ a_{i^*j}=\max_i\min_j\ a_{ij},\quad \max_i\ a_{ij^*}=\min_j\max_i\ a_{ij}$$

由于 $\max_i\min_j\ a_{ij}=\min_j\max_i\ a_{ij}$，有

$$\max_i\ a_{ij^*}=\min_j\ a_{i^*j}\le a_{i^*j^*}\le\max_i\ a_{ij^*}=\min_j\ a_{i^*j}$$

矩阵对策的基本理论

矩阵对策的纯策略

- 定理 1: 矩阵对策 $G=\{S_1,S_2;\mathbf{A}\}$ 在纯策略意义下有解的充要条件是: 存在纯局势 (α_i^*,β_j^*)，使得对任意 i 和 j，有

$$a_{ij^*}\leq a_{i^*j^*}\leq a_{i^*j}$$

- (充分性) 设有 i^* 和 j^* 使得

$$\min_j \ a_{i^*j}=\max_i\min_j \ a_{ij},\quad \max_i \ a_{ij^*}=\min_j\max_i \ a_{ij}$$

由于 $\max\limits_i\min\limits_j \ a_{ij}=\min\limits_j\max\limits_i \ a_{ij}$，有

$$\max_i \ a_{ij^*}=\min_j \ a_{i^*j}\leq a_{i^*j^*}\leq \max_i \ a_{ij^*}=\min_j \ a_{i^*j}$$

因此对任意有 i^* 和 j^* 有

$$a_{ij^*}\leq a_{i^*j^*}\leq a_{i^*j}$$

矩阵对策的纯策略

- (必要性) 由 $a_{ij^*} \le a_{i^*j^*} \le a_{i^*j}$ 有 $\max\limits_i \ a_{ij^*} \le a_{i^*j^*} \le \min\limits_j \ a_{i^*j}$，而 $\min\limits_j \max\limits_i \ a_{ij} \le \max\limits_i \ a_{ij^*}$，$\min\limits_j \ a_{i^*j} \le \max\limits_i \min\limits_j \ a_{ij}$，所以

$$\min_j \max_i \ a_{ij} \le a_{i^*j^*} \le \max_i \min_j \ a_{ij}$$

矩阵对策的基本理论

矩阵对策的纯策略

- (必要性) 由 $a_{ij^*} \le a_{i^*j^*} \le a_{i^*j}$ 有 $\max\limits_i \; a_{ij^*} \le a_{i^*j^*} \le \min\limits_j \; a_{i^*j}$，而 $\min\limits_j \max\limits_i \; a_{ij} \le \max\limits_i \; a_{ij^*}$，$\min\limits_j \; a_{i^*j} \le \max\limits_i \min\limits_j \; a_{ij}$，所以

$$\min_j \max_i \; a_{ij} \le a_{i^*j^*} \le \max_i \min_j \; a_{ij}$$

对任意 i, j，有

$$\max_i \min_j \; a_{ij} \le \min_j \max_i \; a_{ij}$$

矩阵对策的基本理论

矩阵对策的纯策略

- (必要性) 由 $a_{ij^*} \le a_{i^*j^*} \le a_{i^*j}$ 有 $\max\limits_i \ a_{ij^*} \le a_{i^*j^*} \le \min\limits_j \ a_{i^*j}$，而 $\min\limits_j \max\limits_i \ a_{ij} \le \max\limits_i \ a_{ij^*}$， $\min\limits_j \ a_{i^*j} \le \max\limits_i \min\limits_j \ a_{ij}$，所以

$$\min_j \max_i \ a_{ij} \le a_{i^*j^*} \le \max_i \min_j \ a_{ij}$$

对任意 i, j，有

$$\max_i \min_j \ a_{ij} \le \min_j \max_i \ a_{ij}$$

于是

$$\max_i \min_j \ a_{ij} = \min_j \max_i \ a_{ij} = a_{i^*j^*}$$

证毕。

矩阵对策的基本理论

矩阵对策的纯策略

- 对任意矩阵 $\mathbf{A}$，称 $a_{i^*j^*}$ 为矩阵 $\mathbf{A}$ 的**鞍点**。在矩阵对策中，矩阵 $\mathbf{A}$ 的鞍点也称为对策的鞍点。

矩阵对策的纯策略

- 对任意矩阵 $\mathbf{A}$，称 $a_{i^*j^*}$ 为矩阵 $\mathbf{A}$ 的**鞍点**。在矩阵对策中，矩阵 $\mathbf{A}$ 的鞍点也称为对策的鞍点。
- 一个平衡局势 (α_i^*, β_j^*) 应具有这样的性质：当局中人 I 选择了纯策略 α_i^* 后，局中人 II 为了使其所失最少，只能选择纯策略 β_j^*，否则就有可能失的更多；当局中人 II 选择了纯策略 β_j^* 后，局中人 I 为了得到最大的赢得也只能选择纯策略 α_i^*，否则就会赢的更少，双方的竞争在局势 (α_i^*, β_j^*) 下达到了一个平衡状态。

例 2

- 设有一矩阵策略 $G=\{S_1,S_2;\mathbf{A}\}$，其中

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 9 & 8 & 11 & 8 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 5 & 8 & 7 & 8 \\ 10 & 7 & 9 & 6 \end{bmatrix}$$

例 2

- 设有一矩阵策略 $G=\{S_1,S_2;\mathbf{A}\}$，其中

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 9 & 8 & 11 & 8 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 5 & 8 & 7 & 8 \\ 10 & 7 & 9 & 6 \end{bmatrix}$$

- 直接在 $\mathbf{A}$ 提供的赢得矩阵上计算，有

$$\max_i \min_j \ a_{ij} = \min_j \max_i \ a_{ij} = a_{i^*j^*} = 8, \ i^*=1, \ j^*=2,4$$

因此 (α_1,β_2),(α_1,β_4) 都是对策解，且 $V_G=8$

- 矩阵对策的纯策略
  - 由上例可知，一般对策的解可以是不惟一的。

矩阵对策的基本理论

矩阵对策的纯策略

- 由上例可知，一般对策的解可以是不惟一的。
- 性质 1: (无差别性) 若 $(\alpha_{i_1}, \beta_{j_1})$ 和 $(\alpha_{i_2}, \beta_{j_2})$ 是对策 G 的两个解，则 $a_{i_1 j_1} = a_{i_2 j_2}$。
- 性质 2: (可交换性) 若 $(\alpha_{i_1}, \beta_{j_1})$ 和 $(\alpha_{i_2}, \beta_{j_2})$ 是对策 G 的两个解，则 $(\alpha_{i_1}, \beta_{j_2})$ 和 $(\alpha_{i_2}, \beta_{j_1})$ 也是对策 G 的解。

矩阵对策的纯策略

- 由上例可知，一般对策的解可以是不惟一的。
- 性质 1: (无差别性) 若 $(\alpha_{i_1}, \beta_{j_1})$ 和 $(\alpha_{i_2}, \beta_{j_2})$ 是对策 G 的两个解，则 $a_{i_1j_1} = a_{i_2j_2}$。
- 性质 2: (可交换性) 若 $(\alpha_{i_1}, \beta_{j_1})$ 和 $(\alpha_{i_2}, \beta_{j_2})$ 是对策 G 的两个解，则 $(\alpha_{i_1}, \beta_{j_2})$ 和 $(\alpha_{i_2}, \beta_{j_1})$ 也是对策 G 的解。
- 注意:矩阵对策的值是惟一的，即当一个局中人选择了最优纯策略后，他的赢得值不依赖于对方的纯策略。

- 例 3
  - 某单位采购员在秋天时要决定冬季取暖用煤的采购量。已知在正常气温条件下需要煤 $15t$，在较暖和较冷气温条件下分别需要煤 $10t$ 和 $20t$。假定冬季的煤价随天气寒冷程度而变化，在较暖、正常、较冷气温条件下每 t 煤的价格分别为 100 元，150 元和 200 元。又设秋季时每 t 煤的价格为 100 元，在没有关于当年冬季气温情况准确预报的条件下，秋季时应采购多少 t 煤能使总支出最少？

例 3

- 某单位采购员在秋天时要决定冬季取暖用煤的采购量。已知在正常气温条件下需要煤 $15t$，在较暖和较冷气温条件下分别需要煤 $10t$ 和 $20t$。假定冬季的煤价随天气寒冷程度而变化，在较暖、正常、较冷气温条件下每 t 煤的价格分别为 100 元，150 元和 200 元。又设秋季时每 t 煤的价格为 100 元，在没有关于当年冬季气温情况准确预报的条件下，秋季时应采购多少 t 煤能使总支出最少？
- 将采购员看成一个局中人，有 3 个策略。在秋天时购买 $10t$, $15t$ 或 $20t$ 煤，分别记为 α_1, α_2, α_3。

例 3

- 某单位采购员在秋天时要决定冬季取暖用煤的采购量。已知在正常气温条件下需要煤 $15t$，在较暖和较冷气温条件下分别需要煤 $10t$ 和 $20t$。假定冬季的煤价随天气寒冷程度而变化，在较暖、正常、较冷气温条件下每 t 煤的价格分别为 100 元，150 元和 200 元。又设秋季时每 t 煤的价格为 100 元，在没有关于当年冬季气温情况准确预报的条件下，秋季时应采购多少 t 煤能使总支出最少？
- 将采购员看成一个局中人，有 3 个策略。在秋天时购买 $10t$, $15t$ 或 $20t$ 煤，分别记为 α_1，α_2，α_3。
- 对策的另一局中人可看成是大自然，有 3 个策略。出现较暖、正常或较冷的冬季，分别记为 β_1，β_2，β_3。

例 3

- 现把单位冬季用煤的全部费用 (秋季购煤费用与冬季不够时再补够的费用之和) 作为采购员的赢得，得到赢得矩阵如下

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} -1000 & -1750 & -3000 \\ -1500 & -1500 & -2500 \\ -2000 & -2000 & -2000 \end{bmatrix}$$

例 3

- 现把单位冬季用煤的全部费用 (秋季购煤费用与冬季不够时再补够的费用之和) 作为采购员的赢得，得到赢得矩阵如下

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1000 & -1750 & -3000 \\ -1500 & -1500 & -2500 \\ -2000 & -2000 & -2000 \end{bmatrix}$$

由于

$$\max_i \min_j \ a_{ij} = \min_j \max_i \ a_{ij} = a_{33} = -2000$$

那么该对策的解为 (α_3, β_3)，即秋季购煤 20t 较好。

矩阵对策的基本理论

矩阵对策的混合策略

- 在一个矩阵对策 $G=\{S_1,S_2;\mathbf{A}\}$ 中，局中人 I 能保证的至少赢得是

$$v_1=\max_i\min_j\ a_{ij}$$

局中人 II 能保证的至多所失是

$$v_2=\min_j\max_i\ a_{ij}$$

局中人 I 的赢得不会多于局中人 II 的所失，故总有

$$v_1\leq v_2$$

矩阵对策的混合策略

- 在一个矩阵对策 $G = \{S_1, S_2; \mathbf{A}\}$ 中，局中人 I 能保证的至少赢得是

$$v_1 = \max_i \min_j \ a_{ij}$$

局中人 II 能保证的至多所失是

$$v_2 = \min_j \max_i \ a_{ij}$$

局中人 I 的赢得不会多于局中人 II 的所失，故总有

$$v_1 \leq v_2$$

- 当 $v_1 = v_2$ 时，矩阵对策在纯策略意义下有解，且 $V_G = v_1 = v_2$。然而，实际中出现的更多情形是 $v_1 < v_2$，这时对策不存在纯策略意义下的解。

矩阵对策的基本理论

矩阵对策的混合策略

- 例如

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

矩阵对策的混合策略

- 例如

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

可知

$$v_1 = \max_i \min_j \ a_{ij} = 4, \ \ i^* = 2$$

$$v_2 = \min_j \max_i \ a_{ij} = 5, \ \ j^* = 1$$

$$v_2 = 5 > 4 = v_1$$

矩阵对策的混合策略

- 例如

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

可知

$$v_1 = \max_i \min_j \ a_{ij} = 4, \ i^* = 2$$

$$v_2 = \min_j \max_i \ a_{ij} = 5, \ j^* = 1$$

$$v_2 = 5 > 4 = v_1$$

- 既然局中人没有最优策略可出，是否可以给出一个选择不同策略的概率分布？如局中人 I 可制定这样一种策略，分别以概率 x 和 $(1-x)$ 选取纯策略 α_1 和 α_2，称这种策略为一个混合策略。同样，局中 II 也可以制定这样一种混合策略，分别以概率 y 和 $(1-y)$ 选取纯策略 β_1 和 β_2。

矩阵对策的混合策略

定义 2: 设有矩阵对策 $G=\{S_1,S_2;\mathbf{A}\}$，其中

$$S_1=\{\alpha_1,\dots,\alpha_m\},\ S_2=\{\beta_1,\dots,\beta_n\},\ \mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$$

记

$$S_1^*=\{\mathbf{x}\in E^m \mid x_i\geq 0,\ i=1,\dots,m;\ \sum_{i=1}^m x_i=1\}$$

$$S_2^*=\{\mathbf{y}\in E^n \mid y_j\geq 0,\ j=1,\dots,n;\ \sum_{j=1}^n y_j=1\}$$

- 称 S_1^* 和 S_2^* 为局中人 I 和 II 的混合策略集 (或策略集)
- 对 $\mathbf{x}\in S_1^*$ 和 $\mathbf{y}\in S_2^*$，称 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 为混合策略 (或策略)，$(\mathbf{x},\mathbf{y})$ 为混合局势 (或局势)

矩阵对策的混合策略

- **定义 2:** 设有矩阵对策 $G=\{S_1,S_2;\mathbf{A}\}$，其中

$$S_1=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_m\},\ S_2=\{\beta_1,\ldots,\beta_n\},\ \mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$$

记

$$S_1^*=\{\mathbf{x}\in E^m \mid x_i\geq 0,\ i=1,\ldots,m;\ \sum_{i=1}^m x_i=1\}$$

$$S_2^*=\{\mathbf{y}\in E^n \mid y_j\geq 0,\ j=1,\ldots,n;\ \sum_{j=1}^n y_j=1\}$$

  - 称 S_1^* 和 S_2^* 为局中人 I 和 II 的混合策略集 (或策略集)
  - 对 $\mathbf{x}\in S_1^*$ 和 $\mathbf{y}\in S_2^*$，称 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 为混合策略 (或策略)，$(\mathbf{x},\mathbf{y})$ 为混合局势 (或局势)

- 局中人 I 的赢得函数记为

$$E(\mathbf{x},\mathbf{y})=\mathbf{x}^\top A\mathbf{y}=\sum_i\sum_j a_{ij}x_iy_j$$

称 $G^*=\{S_1^*,S_2^*;E\}$ 为对策 G 的混合扩充。

矩阵对策的基本理论

- ## 矩阵对策的混合策略
  - 纯策略是混合策略的特殊形式

矩阵对策的基本理论

矩阵对策的混合策略

- 纯策略是混合策略的特殊形式
- 一个混合策略 $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)^\top$ 可理解为：如果进行多局对策G的话，局中人 I 分别选取纯策略 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ 的频率。若只进行一次对策，则反映了局中人 I 对各策略的偏爱程度。

矩阵对策的混合策略

- 纯策略是混合策略的特殊形式
- 一个混合策略 $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)^\top$ 可理解为：如果进行多局对策G的话，局中人 I 分别选取纯策略 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ 的频率。若只进行一次对策，则反映了局中人 I 对各策略的偏爱程度。
- 设两个局中人仍如前所述那样进行理智的对策，则当局中人 I 选择混合策略 $\mathbf{x}$ 时，预期所得 (最不利的情形) 是 $\min\limits_{\mathbf{y} \in S_2^*} E(\mathbf{x}, \mathbf{y})$，故局中人 I 应选取 $\mathbf{x} \in S_1^*$，使得

$$v_1 = \max_{\mathbf{x} \in S_1^*} \min_{\mathbf{y} \in S_2^*} E(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

同理，局中人 II 可失保证的所的期望值至多是

$$v_2 = \min_{\mathbf{y} \in S_2^*} \max_{\mathbf{x} \in S_1^*} E(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

则 $v_1 \leq v_2$，即局中人 I 的预期赢得不会多于局中人 II 的预期所失。

矩阵对策的混合策略

- **定义 3:** 设矩阵对策 $G^* = \{S_1^*, S_2^*; E\}$ 是矩阵对策 $G = \{S_1, S_2; \mathbf{A}\}$ 的混合扩充。如果

$$\max_{\mathbf{x}\in S_1^*}\min_{\mathbf{y}\in S_2^*} E(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \min_{\mathbf{y}\in S_2^*}\max_{\mathbf{x}\in S_1^*} E(\mathbf{x},\mathbf{y})$$

记其值为 V_G，则称 V_G 为对策 G 的值，称上式成立的混合局势 $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ 为 G 在混合策略意义下的解 (或平衡局势)，称 $\mathbf{x}^*$ 和 $\mathbf{y}^*$ 分别为局中人 I 和 II 的最优混合策略。

矩阵对策的混合策略

- **定义 3:** 设矩阵对策 $G^* = \{S_1^*, S_2^*; E\}$ 是矩阵对策 $G = \{S_1, S_2; \mathbf{A}\}$ 的混合扩充。如果

$$\max_{\mathbf{x}\in S_1^*} \min_{\mathbf{y}\in S_2^*} E(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \min_{\mathbf{y}\in S_2^*} \max_{\mathbf{x}\in S_1^*} E(\mathbf{x},\mathbf{y})$$

记其值为 V_G，则称 V_G 为对策 G 的值，称上式成立的混合局势 $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ 为 G 在混合策略意义下的解 (或平衡局势)，称 $\mathbf{x}^*$ 和 $\mathbf{y}^*$ 分别为局中人 I 和 II 的最优混合策略。

- **定理 2:** 矩阵对策 G 在混合策略意义下有解的充要条件是: 存在 $\mathbf{x}^* \in S_1^*$ 和 $\mathbf{y}^* \in S_2^*$，使得对任意 $\mathbf{x} \in S_1^*$ 和 $\mathbf{y} \in S_2^*$，有

$$E(\mathbf{x},\mathbf{y}^*) \le E(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*) \le E(\mathbf{x}^*,\mathbf{y})$$

- 矩阵对策的混合策略
  - 例如

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

矩阵对策的混合策略

- 例如

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

设 $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ 和 $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ 分别为局中人 I 和 II 的混合策略，则

$$S_1^* = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 = 1\}$$
$$S_2^* = \{(y_1, y_2) \mid y_1, y_2 \geq 0, y_1 + y_2 = 1\}$$

矩阵对策的混合策略

- **局中人 I 的赢得的期望是**

$$\begin{aligned} E(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= 3x_1y_1 + 6x_1y_2 + 5x_2y_1 + 4x_2y_2 \\ &= 3x_1y_1 + 6x_1(1-y_1) + 5(1-x_1)y_1 + 4(1-x_1)(1-y_1) \\ &= -4(x_1 - \frac{1}{4})(y_1 - \frac{1}{2}) + \frac{9}{2} \end{aligned}$$

矩阵对策的基本理论

矩阵对策的混合策略

- 局中人 I 的赢得的期望是

$$\begin{aligned} E(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= 3x_1y_1 + 6x_1y_2 + 5x_2y_1 + 4x_2y_2 \\ &= 3x_1y_1 + 6x_1(1-y_1) + 5(1-x_1)y_1 + 4(1-x_1)(1-y_1) \\ &= -4(x_1 - \frac{1}{4})(y_1 - \frac{1}{2}) + \frac{9}{2} \end{aligned}$$

取 $\mathbf{x}^* = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}), \mathbf{y}^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$，则

$$E(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*) = \frac{9}{2},\ E(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}) = E(\mathbf{x},\mathbf{y}^*) = \frac{9}{2},$$

即有 $E(\mathbf{x},\mathbf{y}^*) \leq E(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*) \leq E(\mathbf{x}^*,\mathbf{y})$

矩阵对策的混合策略

- 局中人 I 的赢得的期望是

$$
\begin{aligned}
E(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= 3x_1y_1+6x_1y_2+5x_2y_1+4x_2y_2 \\
&= 3x_1y_1+6x_1(1-y_1)+5(1-x_1)y_1+4(1-x_1)(1-y_1) \\
&= -4(x_1-\frac{1}{4})(y_1-\frac{1}{2})+\frac{9}{2}
\end{aligned}
$$

取 $\mathbf{x}^*=(\frac{1}{4},\frac{3}{4}),\mathbf{y}^*=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，则

$$
E(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*)=\frac{9}{2},\ E(\mathbf{x}^*,\mathbf{y})=E(\mathbf{x},\mathbf{y}^*)=\frac{9}{2},
$$

即有 $E(\mathbf{x},\mathbf{y}^*)\leq E(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*)\leq E(\mathbf{x}^*,\mathbf{y})$

- 故 $\mathbf{x}^*=(\frac{1}{4},\frac{3}{4})$ 和 $\mathbf{y}^*=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 分别为局中人 I 和 II 的最优策略，对策的值 (局中人 I 的赢得的期望值) 为 $V_G=\frac{9}{2}$。

矩阵对策的基本理论

矩阵对策的基本定理

- 一般矩阵对策在纯策略意义下的解往往是不存在的

矩阵对策的基本理论

矩阵对策的基本定理

- 一般矩阵对策在纯策略意义下的解往往是不存在的
- 一般矩阵对策在混合策略意义下的解却总是存在的

矩阵对策的基本理论

矩阵对策的基本定理

- 一般矩阵对策在纯策略意义下的解往往是不存在的
- 一般矩阵对策在混合策略意义下的解却总是存在的
- 记 $E(i, \mathbf{y}) = \sum_{j} a_{ij} y_j$ 局中人 I 取纯策略 α_i 时的赢得函数
  $E(\mathbf{x}, j) = \sum_{i} a_{ij} x_i$ 局中人 II 取纯策略 β_j 时的赢得函数

矩阵对策的基本理论

矩阵对策的基本定理

- 一般矩阵对策在纯策略意义下的解往往是不存在的
- 一般矩阵对策在混合策略意义下的解却总是存在的
- 记 $E(i,\mathbf{y})=\sum_j a_{ij}y_j$ 局中人 I 取纯策略 α_i 时的赢得函数

  $E(\mathbf{x},j)=\sum_i a_{ij}x_i$ 局中人 II 取纯策略 β_j 时的赢得函数

  则

$$E(\mathbf{x},\mathbf{y})=\sum_i\sum_j a_{ij}x_iy_j=\sum_i(\sum_j a_{ij}y_j)x_i=\sum_i E(i,\mathbf{y})x_i$$

$$E(\mathbf{x},\mathbf{y})=\sum_i\sum_j a_{ij}x_iy_j=\sum_j(\sum_i a_{ij}x_i)y_j=\sum_j E(\mathbf{x},j)y_j$$

矩阵对策的基本定理

- 定理 3: 设 $\mathbf{x}^* \in S_1^*$ 和 $\mathbf{y}^* \in S_2^*$，则 $G = (\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ 为对策 G 的解的充要条件是: 对任意 $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$，有

$$E(i, \mathbf{y}^*) \leq E(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \leq E(\mathbf{x}^*, j)$$

矩阵对策的基本定理

- 定理 3: 设 $\mathbf{x}^* \in S_1^*$ 和 $\mathbf{y}^* \in S_2^*$，则 $G = (\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ 为对策 G 的解的充要条件是: 对任意 $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$，有

$$E(i, \mathbf{y}^*) \leq E(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \leq E(\mathbf{x}^*, j)$$

- (充分性) 设 $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ 为对策 G 的解，则由定理 2 可知下式成立

$$E(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq E(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \leq E(\mathbf{x}^*, \mathbf{y})$$

由于纯策略是混合策略的特例，故定理 3 成立。

矩阵对策的基本定理

- 定理 3: 设 $\mathbf{x}^* \in S_1^*$ 和 $\mathbf{y}^* \in S_2^*$，则 $G = (\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ 为对策 G 的解的充要条件是：对任意 $i = 1, \dots, m$，$j = 1, \dots, n$，有

$$E(i, \mathbf{y}^*) \le E(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \le E(\mathbf{x}^*, j)$$

- (充分性) 设 $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ 为对策 G 的解，则由定理 2 可知下式成立

$$E(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \le E(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \le E(\mathbf{x}^*, \mathbf{y})$$

由于纯策略是混合策略的特例，故定理 3 成立。

- (必要性) 设定理 3 中公式成立，由

$$E(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) = \sum_i E(i, \mathbf{y}^*) x_i \le E(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \sum_i x_i = E(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$$

$$E(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) = \sum_j E(\mathbf{x}^*, j) y_j \ge E(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \sum_j y_j = E(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$$

即得 $E(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \le E(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \le E(\mathbf{x}^*, \mathbf{y})$ 成立。

矩阵对策的基本理论

矩阵对策的基本定理

- **定理 4**: 设 $\mathbf{x}^* \in S_1^*$ 和 $\mathbf{y}^* \in S_2^*$，则 $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ 为对策 G 的解的充要条件是: 存在数 v，使得 $\mathbf{x}^*$ 和 $\mathbf{y}^*$ 分别是以下不等式组的解，且 $v = V_G$。

$$\begin{cases} \sum_i a_{ij} x_i \geq v \ (j = 1, \ldots, n) \\ \sum_i x_i = 1 \\ x_i \geq 0 \ (i = 1, \ldots, m) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_j a_{ij} y_j \leq v \ (i = 1, \ldots, m) \\ \sum_j y_j = 1 \\ y_j \geq 0 \ (j = 1, \ldots, n) \end{cases}$$

矩阵对策的基本定理

- 定理 5: 对任一矩阵对策 $G = \{S_1, S_2; \mathbf{A}\}$，一定存在混合策略意义下的解。

矩阵对策的基本定理

- **定理 5**: 对任一矩阵对策 $G=\{S_1,S_2;\mathbf{A}\}$，一定存在混合策略意义下的解。
- **分析**: 由定理 3，只要证明存在 $\mathbf{x}^*\in S_1^*$ 和 $\mathbf{y}^*\in S_2^*$ 使得定理 3 中公式成立。为此，考虑如下两个线性规划问题

$$
\text{(P)}\quad \max\ w
$$

$$
\text{s.t.}\begin{cases}\sum_i a_{ij}x_i\geq w\ (j=1,\ldots,n)\\ \sum_i x_i=1\\ x_i\geq 0\ (i=1,\ldots,m)\end{cases}
$$

$$
\text{(D)}\quad \min\ v
$$

$$
\text{s.t.}\begin{cases}\sum_j a_{ij}y_j\leq v\ (i=1,\ldots,m)\\ \sum_j y_j=1\\ y_j\geq 0\ (j=1,\ldots,n)\end{cases}
$$

矩阵对策的基本定理

- 问题 (P) 和 (D) 是互为对偶的线性规划，而且

$$\mathbf{x} = (1, 0, \ldots, 0)^\top \in E^m, \ w = \min_j \ a_{1j}$$

是问题 (P) 的一个可行解，

$$\mathbf{y} = (1, 0, \ldots, 0)^\top \in E^n, \ v = \max_i \ a_{i1}$$

是问题 (D) 的一个可行解。

矩阵对策的基本定理

- 问题 (P) 和 (D) 是互为对偶的线性规划，而且

$$\mathbf{x} = (1, 0, \ldots, 0)^\top \in E^m, \ w = \min_j \ a_{1j}$$

是问题 (P) 的一个可行解，

$$\mathbf{y} = (1, 0, \ldots, 0)^\top \in E^n, \ v = \max_i \ a_{i1}$$

是问题 (D) 的一个可行解。

- 由线性规划对偶定理可知，问题 (P) 和 (D) 分别存在最优解 $(\mathbf{x}^*, w^*)$ 和 $(\mathbf{y}^*, v^*)$，且 $w^* = v^*$。即存在 $\mathbf{x}^* \in S_1^*$ 和 $\mathbf{y}^* \in S_2^*$ 和数 v^*，使得对任意 $i = 1, \ldots, m, \ j = 1, \ldots, n$，有

$$\sum_j a_{ij} y_j^* \le v^* \le \sum_i a_{ij} x_i^* \text{ 或 } E(i, \mathbf{y}^*) \le v^* \le E(\mathbf{x}^*, j)$$

矩阵对策的基本定理

- 又由

$$E(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*)=\sum_i E(i,\mathbf{y}^*)x_i^*\le v^*\sum_i x_i^*=v^*$$

$$E(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*)=\sum_j E(\mathbf{x}^*,j)y_j^*\ge v^*\sum_j y_j^*=v^*$$

得到 $v^*=E(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*)$，故定理 3 中的

$$E(i,\mathbf{y}^*)\le E(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*)\le E(\mathbf{x}^*,j)$$

成立。

矩阵对策的基本定理

- 定理 6: 设 $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ 是矩阵对策 G 的解，且 $v = V_G$，则

1. 若 $x_i^* > 0$，则 $\sum\limits_j a_{ij} y_j^* = v$
2. 若 $y_j^* > 0$，则 $\sum\limits_i a_{ij} x_i^* = v$
3. 若 $\sum\limits_j a_{ij} y_j^* < v$，则 $x_i^* = 0$
4. 若 $\sum\limits_i a_{ij} x_i^* > v$，则 $y_j^* = 0$

矩阵对策的基本定理

- 由 $v = \max_{\mathbf{x} \in S_1^*} E(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*)$ 有

$$v - \sum_j a_{ij} y_j^* = \max_{\mathbf{x} \in S_1^*} E(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) - E(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \geq 0$$

矩阵对策的基本定理

- 由 $v = \max\limits_{\mathbf{x}\in S_1^*} E(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*)$ 有

$$v - \sum_j a_{ij} y_j^* = \max_{\mathbf{x}\in S_1^*} E(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) - E(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \geq 0$$

又因

$$\sum_i x_i^* (v - \sum_j a_{ij} y_j^*) = v - \sum_i \sum_j a_{ij} x_i^* y_j^* = 0$$

矩阵对策的基本定理

- 由 $v = \max_{\mathbf{x}\in S_1^*} E(\mathbf{x},\mathbf{y}^*)$ 有

$$v - \sum_j a_{ij}y_j^* = \max_{\mathbf{x}\in S_1^*} E(\mathbf{x},\mathbf{y}^*) - E(\mathbf{x},\mathbf{y}^*) \geq 0$$

又因

$$\sum_i x_i^*(v - \sum_j a_{ij}y_j^*) = v - \sum_i\sum_j a_{ij}x_i^*y_j^* = 0$$

1. 当 $x_i^* > 0$，必有 $\sum_j a_{ij}y_j^* = v$
2. 当 $\sum_j a_{ij}y_j^* < v$，必有 $x_i^* = 0$

即 (1)，(3) 得证，同理可证 (2)，(4)。

矩阵对策的基本定理

- **定理 7:** 记 $T(G)$ 为矩阵对策 G 的解集。设有两个矩阵对策 $G_1=\{S_1,S_2;\mathbf{A}_1\}$ 和 $G_2=\{S_1,S_2;\mathbf{A}_2\}$，其中 $\mathbf{A}_1=(a_{ij})$ 和 $\mathbf{A}_2=(a_{ij}+L)$，L 为一任意常数，则
  - $V_{G_2}=V_{G_1}+L$
  - $T(G_1)=T(G_2)$

矩阵对策的基本定理

- 定理 7: 记 $T(G)$ 为矩阵对策 G 的解集。设有两个矩阵对策 $G_1 = \{S_1, S_2; \mathbf{A}_1\}$ 和 $G_2 = \{S_1, S_2; \mathbf{A}_2\}$，其中 $\mathbf{A}_1 = (a_{ij})$ 和 $\mathbf{A}_2 = (a_{ij} + L)$，$L$ 为一任意常数，则
  - $V_{G_2} = V_{G_1} + L$
  - $T(G_1) = T(G_2)$

- 定理 8: 设有两个矩阵对策 $G_1 = \{S_1, S_2; \mathbf{A}\}$ 和 $G_2 = \{S_1, S_2; \alpha\mathbf{A}\}$，其中 $\alpha > 0$ 为一任意常数，则
  - $V_{G_2} = \alpha V_{G_1}$
  - $T(G_1) = T(G_2)$

矩阵对策的基本定理

- 定理 7: 记 $T(G)$ 为矩阵对策 G 的解集。设有两个矩阵对策 $G_1 = \{S_1, S_2; \mathbf{A}_1\}$ 和 $G_2 = \{S_1, S_2; \mathbf{A}_2\}$，其中 $\mathbf{A}_1 = (a_{ij})$ 和 $\mathbf{A}_2 = (a_{ij} + L)$，$L$ 为一任意常数，则
  - $V_{G_2} = V_{G_1} + L$
  - $T(G_1) = T(G_2)$
- 定理 8: 设有两个矩阵对策 $G_1 = \{S_1, S_2; \mathbf{A}\}$ 和 $G_2 = \{S_1, S_2; \alpha\mathbf{A}\}$，其中 $\alpha > 0$ 为一任意常数，则
  - $V_{G_2} = \alpha V_{G_1}$
  - $T(G_1) = T(G_2)$
- 定理 9: 设 $G_1 = \{S_1, S_2; \mathbf{A}\}$ 为一矩阵对策，且 $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^\top$ 为斜对策矩阵，则
  - $V_G = 0$
  - $T(G_1) = T(G_2)$

  其中，$T_1(G)$ 和 $T_2(G)$ 分别为局中人 I 和 II 的最优策略集。

课堂练习 1

- 设有一矩阵策略 $G = \{S_1, S_2; \mathbf{A}\}$，其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 6 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & -1 \\ 8 & 5 & 7 & 5 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

求矩阵对策 G 的值。

课堂练习 1

- 设有一矩阵策略 $G=\{S_1,S_2;\mathbf{A}\}$，其中

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 6 & 5 & 6 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & -1 \\ 8 & 5 & 7 & 5 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

求矩阵对策 G 的值。

- 具体思路

$$\max_i \min_j \ a_{ij} = \max_i \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = 5,\ \ i^* = 1,3$$

$$\min_j \max_i \ a_{ij} = \min_j [8\ 5\ 7\ 5] = 5,\ \ j^* = 2,4$$

其最优纯策略解为 (α_1,β_2), (α_1,β_4), (α_3,β_2), (α_3,β_4)，值为 5

矩阵对策的基本理论

- 课堂练习 2
  - 设有一矩阵策略 $G=\{S_1,S_2;\mathbf{A}\}$，其中

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 5 & -7 & 2 \\ 4 & 7 & 3 \\ 10 & -9 & 0 \\ -1 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

求矩阵对策 G 的值。

课堂练习 2

- 设有一矩阵策略 $G=\{S_1,S_2;\mathbf{A}\}$，其中

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 5 & -7 & 2 \\ 4 & 7 & 3 \\ 10 & -9 & 0 \\ -1 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

求矩阵对策 G 的值。

- 具体思路

$$\max_i \min_j \; a_{ij} = \max_i \begin{bmatrix} -7 \\ 3 \\ -9 \\ -1 \end{bmatrix} = 3,\;\; i^* = 2$$

$$\min_j \max_i \; a_{ij} = \min_j [1\;\;0\;\;9\;\;3] = 3,\;\; j^* = 3$$

其最优纯策略解为 (α_2,β_3)，值为 3

矩阵对策的基本理论

小结

- 纯策略
  - 矩阵对策
  - 理智行为
- 混合策略
  - 混合扩充
  - 鞍点定理
- 基本定理
  - 一定存在混合策略意义下的解
  - 线性规划求解矩阵对策的思路

Q&A

Thank you!

感谢您的聆听和反馈