第四章 动态规划

4.4 动态规划在经济管理中的应用

修贤超

机电工程与自动化学院
上海大学

xcxiu@shu.edu.cn

动态规划在经济管理中的应用

背包问题

- 一位旅行者携带背包去登山，已知他所能承受的背包重量限度为 $a$kg，现有 n 种可供他选择背入背包，第 i 种物品的单件重量为 $a_i$kg，其价值 (可以是表明本物品对登山的重要性的数量指标) 是携带数量 x_i 的函数 $c_i(x_i)$ $(i = 1, 2, , n)$。问旅行者应如何选择携带各种物品的件数，以使总价值最大?

动态规划在经济管理中的应用

背包问题

- 一位旅行者携带背包去登山，已知他所能承受的背包重量限度为 $a$kg，现有 n 种可供他选择背入背包，第 i 种物品的单件重量为 $a_i$kg，其价值 (可以是表明本物品对登山的重要性的数量指标) 是携带数量 x_i 的函数 $c_i(x_i)$ $(i = 1, 2, , n)$。**问旅行者应如何选择携带各种物品的件数，以使总价值最大?**
- 设 x_i 为第 i 种物品装入的件数，则背包问题可归结为如下形式的整数规划模型

$$\max \ z = \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i)$$

$$\text{s.t.} \ \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i \le a \\ x_i \ge 0 \ \text{且为整数} \ (i = 1, \ldots, n) \end{cases}$$

动态规划在经济管理中的应用

动态规划顺序解法

- 阶段: 将可装入物品按 $1, \ldots, n$ 排序，每段装一种物品，共划分为 n 个阶段，即 $k = 1, \ldots, n$
- 状态变量: 在第 k 段开始时，背包中允许装入前 k 种物品的总重量为 s_{k+1}
- 决策变量: 装入第 k 种物品的件数，记 x_k

动态规划顺序解法

- 阶段: 将可装入物品按 $1, \ldots, n$ 排序，每段装一种物品，共划分为 n 个阶段，即 $k = 1, \ldots, n$
- 状态变量: 在第 k 段开始时，背包中允许装入前 k 种物品的总重量为 s_{k+1}
- 决策变量: 装入第 k 种物品的件数，记 x_k
- 状态转移方程: $s_k = s_{k+1} - a_k x_k$

动态规划顺序解法

- **阶段**: 将可装入物品按 $1, \ldots, n$ 排序，每段装一种物品，共划分为 n 个阶段，即 $k = 1, \ldots, n$
- **状态变量**: 在第 k 段开始时，背包中允许装入前 k 种物品的总重量为 s_{k+1}
- **决策变量**: 装入第 k 种物品的件数，记 x_k
- **状态转移方程**: $s_k = s_{k+1} - a_k x_k$
- **允许决策集合**: $D_k(s_{k+1}) = \{x_k \mid 0 \leq x_k \leq [s_{k+1}/a_k],\ x_k\text{为整数}\}$

动态规划顺序解法

- **阶段**: 将可装入物品按 $1, \ldots, n$ 排序，每段装一种物品，共划分为 n 个阶段，即 $k = 1, \ldots, n$
- **状态变量**: 在第 k 段开始时，背包中允许装入前 k 种物品的总重量为 s_{k+1}
- **决策变量**: 装入第 k 种物品的件数，记 x_k
- **状态转移方程**: $s_k = s_{k+1} - a_k x_k$
- **允许决策集合**: $D_k(s_{k+1}) = \{x_k \mid 0 \leq x_k \leq [s_{k+1}/a_k],\ x_k\text{为整数}\}$
- **最优指标函数**: 表示在背包中允许装入物品的总重量不超过 s_{k+1} kg，采用最优策略只装前 k 种物品时的最大使用价值，记 $f_k(s_{k+1})$

动态规划在经济管理中的应用

动态规划顺序解法

顺序递推方程

$$\begin{cases} f_k(s_{k+1}) = \max\limits_{x_k=0,1,\ldots,[s_{k+1}/a_k]} \{c_k(x_k) + f_{k-1}(s_{k+1} - a_k x_k)\} \\ f_0(s_1) = 0 \end{cases}$$

动态规划顺序解法

顺序递推方程

$$\begin{cases} f_k(s_{k+1}) = \max\limits_{x_k=0,1,\ldots,[s_{k+1}/a_k]} \{c_k(x_k) + f_{k-1}(s_{k+1} - a_k x_k)\} \\ f_0(s_1) = 0 \end{cases}$$

- 用前向动态规划方法逐步计算出 $f_1(s_2), f_2(s_3), \ldots, f_n(s_{n+1})$ 及相应的决策函数 $x_1(s_1), x_2(s_3), \ldots, x_n(s_{n+1})$，最后得到的 $f_n(a)$ 即为所求的最大价值，相应的最优策略则由反推计算得出。

动态规划顺序解法

顺序递推方程

$$\begin{cases} f_k(s_{k+1}) = \max\limits_{x_k=0,1,\ldots,[s_{k+1}/a_k]} \{c_k(x_k) + f_{k-1}(s_{k+1} - a_k x_k)\} \\ f_0(s_1) = 0 \end{cases}$$

- 用前向动态规划方法逐步计算出 $f_1(s_2), f_2(s_3), \ldots, f_n(s_{n+1})$ 及相应的决策函数 $x_1(s_1), x_2(s_3), \ldots, x_n(s_{n+1})$，最后得到的 $f_n(a)$ 即为所求的最大价值，相应的最优策略则由反推计算得出。
- 当 x_i 仅表示装入 (取 1) 和不装 (取 0) 第 i 种物品，则本模型就是 0-1 背包问题。

例 1

- 有一辆最大货运量为 10t 的卡车，用以装载 3 种货物，每种货物的单位重量及相应单位价值如下。应如何装载可使总价值最大？

货物编号 i	1	2	3
单位重量 $(t)(a_i)$	3	4	5
单位价值 c_i	4	5	6

例 1

- 有一辆最大货运量为 10t 的卡车，用以装载 3 种货物，每种货物的单位重量及相应单位价值如下。应如何装载可使总价值最大？

货物编号 i	1	2	3
单位重量 $(t)(a_i)$	3	4	5
单位价值 c_i	4	5	6

- 设第 i 种货物装载的件数为 x_i $(i = 1, 2, 3)$，则问题可表为

例 1

- 有一辆最大货运量为 10t 的卡车，用以装载 3 种货物，每种货物的单位重量及相应单位价值如下。应如何装载可使总价值最大？

货物编号 i	1	2	3
单位重量 $(t)(a_i)$	3	4	5
单位价值 c_i	4	5	6

- 设第 i 种货物装载的件数为 x_i $(i=1,2,3)$，则问题可表为

$$\max \quad z = 4x_1 + 5x_2 + 6x_3$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 10 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \text{且为整数} \end{cases}$$

- **例 1**
  - 当 $k=1$ 时，有

$$f_1(s_2)=\max_{0\le 3x_1\le s_2,\ x_1\text{为整数}}\{4x_1\}$$

或

$$f_1(s_2)=\max_{0\le x_1\le s_2/3,\ x_1\text{为整数}}\{4x_1\}=4[s_2/3]$$

例 1

- 当 $k=1$ 时，有

$$f_1(s_2)=\max_{0\le 3x_1\le s_2,\ x_1\text{为整数}}\{4x_1\}$$

或

$$f_1(s_2)=\max_{0\le x_1\le s_2/3,\ x_1\text{为整数}}\{4x_1\}=4[s_2/3]$$

s_2	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f_1(s_2)$	0	0	0	4	4	4	8	8	8	12	12
x_1^*	0	0	0	1	1	1	2	2	2	3	3

动态规划在经济管理中的应用

- 例 1
  - 当 $k=2$ 时，有

$$f_2(s_3) = \max_{0\leq 4x_2\leq s_s,\ x_2\text{为整数}} \{5x_2 + f_1(s_3 - 4x_2)\}$$

或

$$f_2(s_3) = \max_{0\leq x_2\leq s_3/4,\ x_2\text{为整数}} \{5x_2 + f_1(s_3 - 4x_2)\}$$

动态规划在经济管理中的应用

例 1

- **当 $k=2$ 时，有**

$$f_2(s_3)=\max_{0\le 4x_2\le s_s,\ x_2\text{为整数}}\{5x_2+f_1(s_3-4x_2)\}$$

或

$$f_2(s_3)=\max_{0\le x_2\le s_3/4,\ x_2\text{为整数}}\{5x_2+f_1(s_3-4x_2)\}$$

s_2	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_2	0	0	0	0	0 1	0 1	0 1	0 1	0 1 2	0 1 2	0 1 2
c_2+f_2	0	0	0	4	4 5	4 5	8 5	8 9	8 9 10	12 9 10	12 13 10
$f_2(s_3)$	0	0	0	4	5	5	8	9	10	12	13
x_2^*	0	0	0	0	1	1	0	1	2	0	1

- 例 1
  - 当 $k=3$ 时，有

$$
\begin{aligned}
f_3(s_4) &= \max_{0\le x_3\le[s_4/5]} \{6x_3 + f_2(s_4 - 5x_3)\} \\
&= \max_{x_3=0,1,2} \{3x_3 + f_2(10 - 5x_3)\} \\
&= \max \ \{f_2(10), 6 + f_2(5), 12 + f_2(0)\} \\
&= \max \ \{13, 6+5, 12+0\} \\
&= 13
\end{aligned}
$$

例 1

- 当 $k=3$ 时，有

$$
\begin{aligned}
f_3(s_4) &= \max_{0\le x_3\le [s_4/5]} \{6x_3 + f_2(s_4-5x_3)\} \\
&= \max_{x_3=0,1,2} \{3x_3 + f_2(10-5x_3)\} \\
&= \max\ \{f_2(10), 6+f_2(5), 12+f_2(0)\} \\
&= \max\ \{13, 6+5, 12+0\} \\
&= 13
\end{aligned}
$$

- 最大价值为 13
- $x_3^*=0$，倒推可得 $x_1^*=2, x_2^*=1$

动态规划在经济管理中的应用

- 小结
  - 背包问题
  - 生产经营问题
  - 设备更新问题
  - 复合系统工作可靠性问题
  - 货郎担问题
- 马氏决策规划

Q&A

Thank you!

感谢您的聆听和反馈