第三章 整数规划

3.2 分支定界法

修贤超

机电工程与自动化学院
上海大学

xcxiu@shu.edu.cn

分支定界法

- 分支定界法
  - 整数可行解远多于顶点，枚举法不可取——分支定界法

分支定界法

- 整数可行解远多于顶点，枚举法不可取——分支定界法
- 应用范围: 求解纯整数规划和混合整数规划问题

$$
\max(\min)\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j
$$

$$
\text{s.t.}\ \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le (\ge, =)\ b_i\ (i = 1, \dots, m) \\ x_j \ge 0\ (j = 1, \dots, n) \\ x_j\text{中部分或全部取整数} \end{cases}
$$

分支定界法

- 整数可行解远多于顶点，枚举法不可取——分支定界法
- 应用范围: 求解纯整数规划和混合整数规划问题

$$\max(\min)\ z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le(\ge,=)\ b_i\ (i=1,\ldots,m)\\ x_j\ge 0\ (j=1,\ldots,n)\\ x_j\text{中部分或全部取整数}\end{cases}$$

- 分支: 若松弛问题的最优解不符合整数要求，则将取值为非整数解之一的决策变量取值分区，并入松弛问题中，形成两个分支松弛问题，分别求解。

分支定界法

- 整数可行解远多于顶点，枚举法不可取——分支定界法
- 应用范围: 求解纯整数规划和混合整数规划问题

$$\max(\min)\ z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le(\ge,=)\ b_i\ (i=1,\dots,m)\\ x_j\ge 0\ (j=1,\dots,n)\\ x_j\text{中部分或全部取整数}\end{cases}$$

- 分支: 若松弛问题的最优解不符合整数要求，则将取值为非整数解之一的决策变量取值分区，并入松弛问题中，形成两个分支松弛问题，分别求解。
- 定界: 为求解纯整数规划和混合整数规划问题，先求出其松弛问题的最优解，作为整数规划问题的最优目标函数值的上界，同时选择任意整数可行解作为整数规划问题的最优目标函数值的下界。

分支定界法

- **例 1**
  - 求解下述整数线性规划问题 A

$$\max \ z = 40x_1 + 90x_2$$

$$\text{s.t.} \ \begin{cases} 9x_1 + 7x_2 \leq 56 \\ 7x_1 + 20x_2 \leq 70 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \text{整数} \end{cases}$$

分支定界法

- 例 1
  - 先不考虑整数约束，即解相应的松弛问题 B

$$
\max \ z = 40x_1 + 90x_2
$$

$$
\text{s.t.} \ \begin{cases} 9x_1 + 7x_2 \le 56 \\ 7x_1 + 20x_2 \le 70 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}
$$

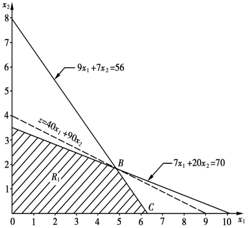
例 1

- 先不考虑整数约束，即解相应的松弛问题 B

$$\max\ z = 40x_1 + 90x_2$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} 9x_1 + 7x_2 \le 56 \\ 7x_1 + 20x_2 \le 70 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

- 最优解为 $x_1 = 4.81, x_2 = 1.82$，最优值为 $z_0 = 356$



分支定界法

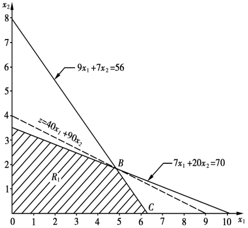
例 1

- 先不考虑整数约束，即解相应的松弛问题 B

$$\max \ \ z = 40x_1 + 90x_2$$

$$\text{s.t.} \ \begin{cases} 9x_1 + 7x_2 \le 56 \\ 7x_1 + 20x_2 \le 70 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

- 最优解为 $x_1 = 4.81, x_2 = 1.82$，最优值为 $z_0 = 356$



- 不符合整数条件

分支定界法

- 例 1 (第一次迭代)
  - 定界: 问题 A 的最优目标函数值

$$0 \le z^* \le 356$$

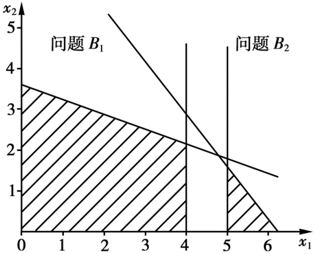
分支定界法

例 1 (第一次迭代)

- 定界: 问题 A 的最优目标函数值

$$0 \leq z^* \leq 356$$

- 分支: 在问题 B 的解中，首先注意其中一个非整数变量的解，如 $x_1 = 4.81$。于是对原问题 B 增加两个约束条件 $x_1 \leq 4, x_1 \geq 5$



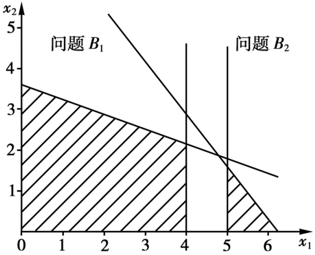
分支定界法

例 1 (第一次迭代)

- 定界: 问题 A 的最优目标函数值

$$0 \leq z^* \leq 356$$

- 分支: 在问题 B 的解中，首先注意其中一个非整数变量的解，如 $x_1 = 4.81$。于是对原问题 B 增加两个约束条件 $x_1 \leq 4, x_1 \geq 5$



  - 问题 B_1 的最优解为 $x_1 = 4.00, x_2 = 2.10$，最优值为 $z_1 = 349$
  - 问题 B_2 的最优解为 $x_1 = 5.00, x_2 = 1.57$，最优值为 $z_2 = 341$

分支定界法

- 例 1 (第二次迭代)
  - **定界**: 因 $z_1 > z_2$，故将 z 改为 349，那么必存在最优整数解，满足

$$0 \le z^* \le 349$$

分支定界法

例 1 (第二次迭代)

- **定界**: 因 $z_1 > z_2$，故将 z 改为 349，那么必存在最优整数解，满足

$$0 \leq z^* \leq 349$$

- **分支**: 因 $z_1 > z_2$，故先分解 B_1 为两支
  - 增加条件 $x_2 \leq 2$，称为问题 B_3
  - 增加条件 $x_2 \geq 3$，称为问题 B_4

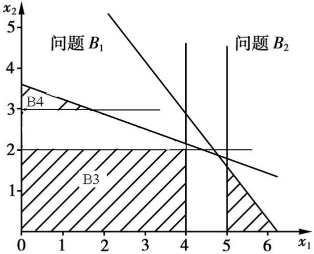
分支定界法

例 1 (第二次迭代)

- 定界: 因 $z_1 > z_2$，故将 z 改为 349，那么必存在最优整数解，满足

$$0 \leq z^* \leq 349$$

- 分支: 因 $z_1 > z_2$，故先分解 B_1 为两支
  - 增加条件 $x_2 \leq 2$，称为问题 B_3
  - 增加条件 $x_2 \geq 3$，称为问题 B_4
  - 舍去 $x_2 > 2$ 与 $x_2 < 3$ 之间的可行域



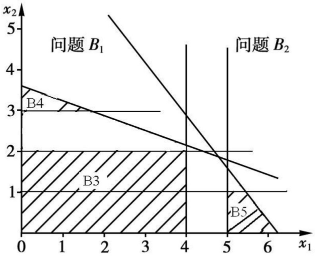
分支定界法

- 例 1 (第二次迭代)
  - 继续对问题 B_2 进行分解
    - 增加条件 $x_2 \leq 1$，称为问题 B_5
    - 增加条件 $x_2 \geq 2$，称为问题 B_6

分支定界法

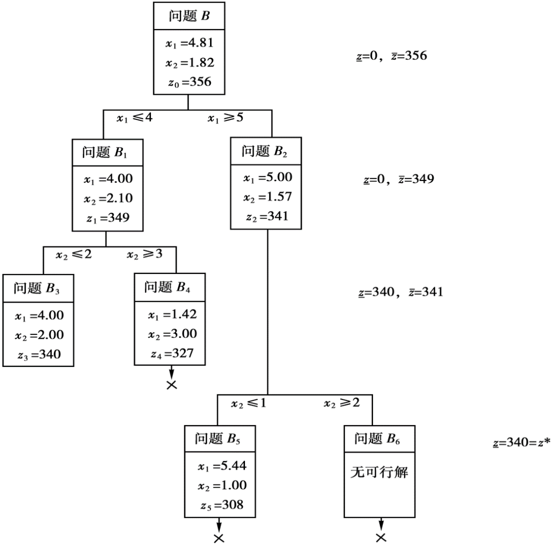
例 1 (第二次迭代)

- 继续对问题 B_2 进行分解
  - 增加条件 $x_2 \le 1$，称为问题 B_5
  - 增加条件 $x_2 \ge 2$，称为问题 B_6
  - 舍去 $x_2 > 1$ 与 $x_2 < 2$ 之间的可行域



例 1

- 解题的过程如下



问题 B
$x_1=4.81$
$x_2=1.82$
$z_0=356$
$\underline{z}=0$，$\bar{z}=356$
$x_1\leqslant 4$
$x_1\geqslant 5$
问题 B_1
$x_1=4.00$
$x_2=2.10$
$z_1=349$
问题 B_2
$x_1=5.00$
$x_2=1.57$
$z_2=341$
$\underline{z}=0$，$\bar{z}=349$
$x_2\leqslant 2$
$x_2\geqslant 3$
问题 B_3
$x_1=4.00$
$x_2=2.00$
$z_3=340$
问题 B_4
$x_1=1.42$
$x_2=3.00$
$z_4=327$
$\underline{z}=340$，$\bar{z}=341$
$x_2\leqslant 1$
$x_2\geqslant 2$
问题 B_5
$x_1=5.44$
$x_2=1.00$
$z_5=308$
问题 B_6
无可行解
$\underline{z}=340=z^*$

分支定界法

分支定界法解题步骤

- 以求解整数线性规划 (最大化) 问题为例，将要求解的整数线性规划问题称为问题 A，将与它相应的松弛问题称为问题 B。
- 第一步: 求解问题 B，可能得到以下情况之一
  - 若没有可行解，这时 A 也没有可行解，则停止
  - 若有最优解，并符合整数条件，最优解即 A 的最优解，则停止
  - 若有最优解，但不符合整数条件，记它的目标函数值为 $\bar{z}$

分支定界法

分支定界法解题步骤

- 以求解整数线性规划 (最大化) 问题为例，将要求解的整数线性规划问题称为问题 A，将与它相应的松弛问题称为问题 B。
- 第一步: 求解问题 B，可能得到以下情况之一
  - 若没有可行解，这时 A 也没有可行解，则停止
  - 若有最优解，并符合整数条件，最优解即 A 的最优解，则停止
  - 若有最优解，但不符合整数条件，记它的目标函数值为 $\bar{z}$
- 第二步: 用观察法找问题 A 的一个整数可行解，一般可取

$$x_j = 0 \; (j = 1, \ldots, n)$$

求得其目标函数值 $\underline{z}$，以 z^* 表示问题 A 的最优目标函数值，这时有

$$\underline{z} \leq z^* \leq \bar{z}$$

分支定界法

分支定界法解题步骤

- 第三步 (分支): 在问题 B 的最优解中任选一个不符合整数条件的变量 x_j，其值为 b_j，以 $\lfloor b_j \rfloor$ 表示小于 b_j 的最大整数，以 $\lceil b_j \rceil$ 表示大于 b_j 的最小整数。构造两个约束条件

$$x_j \leq \lfloor b_j \rfloor, \ x_j \geq \lceil b_j \rceil$$

分别加入问题 B，求两个后继规划问题 B_1 和 B_2。

分支定界法

分支定界法解题步骤

- **第三步 (分支)**: 在问题 B 的最优解中任选一个不符合整数条件的变量 x_j，其值为 b_j，以 $\lfloor b_j \rfloor$ 表示小于 b_j 的最大整数，以 $\lceil b_j \rceil$ 表示大于 b_j 的最小整数。构造两个约束条件

$$x_j \le \lfloor b_j \rfloor, \; x_j \ge \lceil b_j \rceil$$

  分别加入问题 B，求两个后继规划问题 B_1 和 B_2。

- **第四步 (定界)**: 以每个后继问题为一分支标明求解的结果，找出最优目标函数值最大者作为新的上界。从已符合整数条件的各分支中，找出目标函数值为最大者作为新的下界，若无可行解，$\underline{z} = 0$。

分支定界法

分支定界法解题步骤

- 第三步 (分支): 在问题 B 的最优解中任选一个不符合整数条件的变量 x_j，其值为 b_j，以 $\lfloor b_j \rfloor$ 表示小于 b_j 的最大整数，以 $\lceil b_j \rceil$ 表示大于 b_j 的最小整数。构造两个约束条件

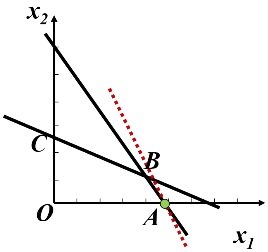
  $$x_j \leq \lfloor b_j \rfloor, \; x_j \geq \lceil b_j \rceil$$

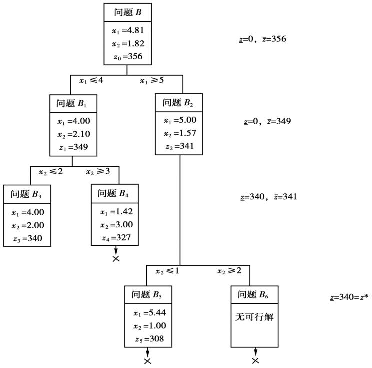
  分别加入问题 B，求两个后继规划问题 B_1 和 B_2。
- 第四步 (定界): 以每个后继问题为一分支标明求解的结果，找出最优目标函数值最大者作为新的上界。从已符合整数条件的各分支中，找出目标函数值为最大者作为新的下界，若无可行解，$\underline{z} = 0$。
- 第五步 (剪支): 各分支的最优目标函数中若有小于 $\underline{z}$ 者，则剪掉这支 (用打 $\times$ 表示)，即以后不再考虑了。若大于 $\underline{z}$，且不符合整数条件，则重复分支定界。一直到最后得到 z^* 为止，得最优整数解

  $$x_j^* \; (j = 1, \ldots, n)$$

分支定界法解题步骤

- 用分支定界法可解纯整数线性规划问题和混合整数线性规划问题。它比枚举法优越。因为它仅在一部分可行解的整数解中寻求最优解，计算量比枚举法小。





例 2

- 求解下述整数线性规划问题 A

$$
\max\ z = x_1 + x_2
$$

$$
\text{s.t.}\ \begin{cases} x_1 + \frac{9}{14}x_2 \leq \frac{51}{14} \\ -2x_1 + x_2 \leq \frac{1}{3} \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \text{整数} \end{cases}
$$

- 例 2
  - 求解下述整数线性规划问题 A

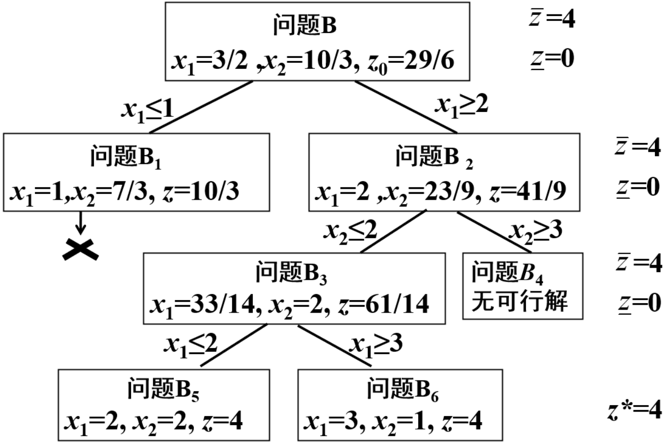
$$\max \ z = x_1 + x_2$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + \frac{9}{14}x_2 \le \frac{51}{14} \\ -2x_1 + x_2 \le \frac{1}{3} \\ x_1, x_2 \ge 0 \\ x_1, x_2 \text{整数} \end{cases}$$

  - 对应的松弛问题 B

$$\max \ z = x_1 + x_2$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + \frac{9}{14}x_2 \le \frac{51}{14} \\ -2x_1 + x_2 \le \frac{1}{3} \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

例 2

- 解题的过程如下



问题B
$x_1=3/2$,$x_2=10/3$, $z_0=29/6$
$\bar{z}=4$
$\underline{z}=0$
$x_1\le1$
$x_1\ge2$
问题B_1
$x_1=1$,$x_2=7/3$, $z=10/3$
问题B_2
$x_1=2$,$x_2=23/9$, $z=41/9$
$\bar{z}=4$
$\underline{z}=0$
$x_2\le2$
$x_2\ge3$
问题B_3
$x_1=33/14$, $x_2=2$, $z=61/14$
问题B_4
无可行解
$\bar{z}=4$
$\underline{z}=0$
$x_1\le2$
$x_1\ge3$
问题B_5
$x_1=2$, $x_2=2$, $z=4$
问题B_6
$x_1=3$, $x_2=1$, $z=4$
$z^*=4$

课堂练习

- 求解下述整数线性规划问题 A

$$
\max \ z = 2x_1 + x_2
$$

$$
\text{s.t.} \ \begin{cases} \frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_2 \le 1 \\ -x_1 + x_2 \le 0 \\ \frac{6}{21}x_1 + \frac{2}{21}x_2 \le 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \\ x_1, x_2 \text{整数} \end{cases}
$$

分支定界法

小结

- 用分支定界法可解纯整数线性规划问题和混合整数线性规划问题
- 分支定界法是一种隐枚举法或部分枚举法
- “分支”为整数规划最优解的出现缩减了搜索范围
- “定界”可以提高搜索的效率
- 分支定界法解题步骤

分支定界法

小结

- 用分支定界法可解纯整数线性规划问题和混合整数线性规划问题
- 分支定界法是一种隐枚举法或部分枚举法
- “分支”为整数规划最优解的出现缩减了搜索范围
- “定界”可以提高搜索的效率
- 分支定界法解题步骤

课后作业: 即上述课堂练习

$Q\&A$

Thank you!

感谢您的聆听和反馈