第二部分 线性规划

2.6 线性规划的对偶理论

修贤超

机电工程与自动化学院
上海大学

xcxiu@shu.edu.cn

对偶问题的提出

- 公司不再安排生产，而是将设备 A、设备 B 和调试工序这三种能力资源出租用于对外加工，此时公司应考虑如何确定各种资源的租价，才能获得最大利润。

项目	产品 I	产品 II	每天可用能力
设备 A/h	0	5	15
设备 B/h	6	2	24
调试工序/h	1	1	5
利润/元	2	1	

线性规划的对偶理论

对偶问题的提出

问题分析

- 把资源租出去所获得的租金不应低于自行生产时的可获利润
- 定价不能太高，要使租赁方能够接受

对偶问题的提出

问题分析

- 把资源租出去所获得的租金不应低于自行生产时的可获利润
- 定价不能太高，要使租赁方能够接受

数学建模

- 决策变量：设 y_1, y_2, y_3 分别为出租设备 A、设备 B 和调试工序三种资源单位时间的租金。

线性规划的对偶理论

对偶问题的提出

问题分析

- 把资源租出去所获得的租金不应低于自行生产时的可获利润
- 定价不能太高，要使租赁方能够接受

数学建模

- 决策变量: 设 y_1, y_2, y_3 分别为出租设备 A、设备 B 和调试工序三种资源单位时间的租金。
- 约束条件: 出租资源所得到的租金应不低于自己生产产品时的获利，否则不如自己生产为好，因此有

$$\begin{cases} 6y_2 + y_3 \geq 2 \\ 5y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 1 \end{cases}$$

对偶问题的提出

问题分析

- 把资源租出去所获得的租金不应低于自行生产时的可获利润
- 定价不能太高，要使租赁方能够接受

数学建模

- 决策变量: 设 y_1, y_2, y_3 分别为出租设备 A、设备 B 和调试工序三种资源单位时间的租金。
- 约束条件: 出租资源所得到的租金应不低于自己生产产品时的获利，否则不如自己生产为好，因此有

$$\begin{cases} 6y_2 + y_3 \geq 2 \\ 5y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 1 \end{cases}$$

- 目标函数: 公司总收入即租赁方的成本

$$w = 15y_1 + 24y_2 + 5y_3$$

对偶问题的提出

- 原问题 (从公司的角度考虑)

$$\max \quad z = 2x_1 + x_2$$
$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} 5x_2 \le 15 \\ 6x_1 + 2x_2 \le 24 \\ x_1 + x_2 \le 5 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

- 对偶问题 (从租赁方的角度考虑)

$$\min \quad w = 15y_1 + 24y_2 + 5y_3$$
$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} 6y_2 + y_3 \ge 2 \\ 5y_1 + 2y_2 + y_3 \ge 1 \\ y_1, y_2, y_3 \ge 0 \end{cases}$$

- 对称形式下对偶问题的一般形式
  - 原问题

$$
\begin{aligned}
\max \ \ z &= c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\text{s.t.} \ \ &\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\
\cdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \\
x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0
\end{cases}
\end{aligned}
$$

对称形式下对偶问题的一般形式

原问题

$$\max \ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0 \end{cases}$$

- 变量均具有非负约束
- 目标函数求极大时，约束条件均取 $\leq$

对称形式下对偶问题的一般形式

原问题

$$\max \ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \ge 0 \end{cases}$$

- 变量均具有非负约束
- 目标函数求极大时，约束条件均取 $\le$

矩阵形式

$$\max \ z = \mathbf{CX}$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} \mathbf{AX} \le \mathbf{b} \\ \mathbf{X} \ge \mathbf{0} \end{cases}$$

对称形式下对偶问题的一般形式

对偶问题

$$\min \ w = b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m \geq c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{m2}y_m \geq c_2 \\ \cdots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots + a_{mn}y_m \geq c_n \\ y_1, y_2, \cdots, y_m \geq 0 \end{cases}$$

对称形式下对偶问题的一般形式

对偶问题

$$
\min \ w = b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m
$$

$$
\text{s.t.} \ \begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m \geq c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{m2}y_m \geq c_2 \\ \cdots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots + a_{mn}y_m \geq c_n \\ y_1, y_2, \cdots, y_m \geq 0 \end{cases}
$$

- 变量均具有非负约束
- 目标函数求极小时，约束条件均取 $\geq$

对称形式下对偶问题的一般形式

对偶问题

$$
\min\ w = b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m
$$

$$
\text{s.t.}\ \begin{cases}
a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m \geq c_1 \\
a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{m2}y_m \geq c_2 \\
\cdots \\
a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots + a_{mn}y_m \geq c_n \\
y_1, y_2, \cdots, y_m \geq 0
\end{cases}
$$

- 变量均具有非负约束
- 目标函数求极小时，约束条件均取 $\geq$

矩阵形式

$$
\min\ w = \mathbf{Y}^\top \mathbf{b}
$$

$$
\text{s.t.}\ \begin{cases}
\mathbf{A}^\top \mathbf{Y} \geq \mathbf{C}^\top \\
\mathbf{Y} \geq \mathbf{0}
\end{cases}
$$

对称形式下对偶问题的一般形式

矩阵形式

$$
\text{(P)} \quad \max \ z = \mathbf{CX} \qquad \text{s.t.} \begin{cases} \mathbf{AX} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{X} \geq \mathbf{0} \end{cases}
$$

$$
\text{(D)} \quad \min \ w = \mathbf{Y}^{\top}\mathbf{b} \qquad \text{s.t.} \begin{cases} \mathbf{A}^{\top}\mathbf{Y} \geq \mathbf{C}^{\top} \\ \mathbf{Y} \geq \mathbf{0} \end{cases}
$$

线性规划的对偶理论

对称形式下对偶问题的一般形式

矩阵形式

$$(\mathrm{P})\quad \max\ z=\mathbf{CX}\qquad \text{s.t.}\ \begin{cases}\mathbf{AX}\le\mathbf{b}\\ \mathbf{X}\ge\mathbf{0}\end{cases}$$

$$(\mathrm{D})\quad \min\ w=\mathbf{Y}^\top\mathbf{b}\qquad \text{s.t.}\ \begin{cases}\mathbf{A}^\top\mathbf{Y}\ge\mathbf{C}^\top\\ \mathbf{Y}\ge\mathbf{0}\end{cases}$$

具体分析

项目	原问题 (P)	对偶问题 (D)
$\mathbf{A}$	约束系数矩阵	约束系数矩阵的转置
$\mathbf{b}$	约束条件的右端项向量	目标函数中的价格系数向量
$\mathbf{C}$	目标函数中的价格系数向量	约束条件的右端项向量的转置

对称形式下对偶问题的一般形式

矩阵形式

$$
\text{(P)}\quad \max\ z = \mathbf{CX} \qquad \text{s.t.} \begin{cases} \mathbf{AX} \le \mathbf{b} \\ \mathbf{X} \ge \mathbf{0} \end{cases}
$$

$$
\text{(D)}\quad \min\ w = \mathbf{Y}^\top \mathbf{b} \qquad \text{s.t.} \begin{cases} \mathbf{A}^\top \mathbf{Y} \ge \mathbf{C}^\top \\ \mathbf{Y} \ge \mathbf{0} \end{cases}
$$

具体分析

项目	原问题 (P)	对偶问题 (D)
$\mathbf{A}$	约束系数矩阵	约束系数矩阵的转置
$\mathbf{b}$	约束条件的右端项向量	目标函数中的价格系数向量
$\mathbf{C}$	目标函数中的价格系数向量	约束条件的右端项向量的转置
目标函数	$\max\ z = \mathbf{CX}$	$\min\ w = \mathbf{Y}^\top \mathbf{b}$
约束条件	$\mathbf{AX} \le \mathbf{b}$	$\mathbf{A}^\top \mathbf{Y} \ge \mathbf{C}^\top$
决策变量	$\mathbf{X} \ge 0$	$\mathbf{Y} \ge 0$

- 例 1
  - 写出下面问题的对偶问题

$$
\max \quad z = 5x_1 + 6x_2
$$

$$
\text{s.t.} \quad \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \leq 7 \\ 4x_1 + x_2 \leq 9 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}
$$

例 1

- 写出下面问题的对偶问题

$$\max \ z = 5x_1 + 6x_2$$
$$\text{s.t.} \ \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \leq 7 \\ 4x_1 + x_2 \leq 9 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

- 对偶问题

$$\min \ w = 7y_1 + 9y_2$$
$$\text{s.t.} \ \begin{cases} 3y_1 + 4y_2 \geq 5 \\ -2y_1 + y_2 \geq 6 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

- 课堂练习 1
  - 写出下面问题的对偶问题

$$\max \ z = 2x_1 + 5x_3$$
$$\text{s.t.} \ \begin{cases} x_1 + x_2 \le 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \le 5 \\ x_1 - 2x_3 \le 3 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

课堂练习 1

- 写出下面问题的对偶问题

$$\max\ z = 2x_1 + 5x_3$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 5 \\ x_1 - 2x_3 \leq 3 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

- 对偶问题

$$\min\ w = 4y_1 + 5y_2 + 3y_3$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 2 \\ y_1 - y_2 \geq 0 \\ 3y_2 - 2y_3 \geq 5 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

非对称形式

- 整体思路

$$\text{非对称形式} \Longrightarrow \text{对称形式} \Longrightarrow \text{对偶问题}$$

非对称形式

- 整体思路

$$\text{非对称形式} \Longrightarrow \text{对称形式} \Longrightarrow \text{对偶问题}$$

- 情况一: 等式变不等式

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \ (i = 1, \ldots, m)$$

非对称形式

- 整体思路

$$\text{非对称形式} \Longrightarrow \text{对称形式} \Longrightarrow \text{对偶问题}$$

- 情况一: 等式变不等式

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \ (i = 1, \ldots, m)$$

$$\Downarrow$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i \ (i = 1, \ldots, m)$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i \ (i = 1, \ldots, m)$$

非对称形式

- 整体思路

$$\text{非对称形式} \Longrightarrow \text{对称形式} \Longrightarrow \text{对偶问题}$$

- 情况一: 等式变不等式

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \ (i = 1, \ldots, m)$$
$$\Downarrow$$
$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i \ (i = 1, \ldots, m)$$
$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i \ (i = 1, \ldots, m)$$
$$\Downarrow$$
$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i \ (i = 1, \ldots, m)$$
$$-a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \cdots - a_{in}x_n \leq -b_i \ (i = 1, \ldots, m)$$

线性规划的对偶理论

非对称形式

情况二：不等式变不等式

- 目标函数求极大时

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i \ (i = 1, \ldots, m)$$

线性规划的对偶理论

非对称形式

情况二：不等式变不等式

- 目标函数求极大时

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i \ (i = 1, \ldots, m)$$

$$\Downarrow$$

$$-a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \cdots - a_{in}x_n \leq -b_i \ (i = 1, \ldots, m)$$

非对称形式

情况二：不等式变不等式

- 目标函数求极大时

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i \ (i = 1, \ldots, m)$$

$$\Downarrow$$

$$-a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \cdots - a_{in}x_n \leq -b_i \ (i = 1, \ldots, m)$$

- 目标函数求极小时

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i \ (i = 1, \ldots, m)$$

非对称形式

情况二: 不等式变不等式

- 目标函数求极大时

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i \ (i = 1, \ldots, m)$$
$$\Downarrow$$
$$-a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \cdots - a_{in}x_n \leq -b_i \ (i = 1, \ldots, m)$$

- 目标函数求极小时

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i \ (i = 1, \ldots, m)$$
$$\Downarrow$$
$$-a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \cdots - a_{in}x_n \geq -b_i \ (i = 1, \ldots, m)$$

非对称形式

情况三：变量转换

- 若存在取值无约束的变量 x_k，可令

$$x_k = x'_k - x''_k,\ x'_k, x''_k \geq 0$$

非对称形式

情况三: 变量转换

- 若存在取值无约束的变量 x_k，可令

$$x_k = x_k' - x_k'',\ x_k', x_k'' \geq 0$$

- 若 $x_k \leq 0$，可令

$$x_k' = -x_k,\ x_k' \geq 0$$

- 例 2
  - 写出下面问题的对偶问题

$$\max\ z = 5x_1 + 6x_2$$
$$\text{s.t.}\ \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 7 \\ 4x_1 + x_2 \le 9 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

例 2

- 写出下面问题的对偶问题

$$\max \ z = 5x_1 + 6x_2$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 7 \\ 4x_1 + x_2 \leq 9 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

- 经过变换后可重新表达为

$$\max \ z = 5x_1 + 6x_2$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \leq 7 \\ -3x_1 + 2x_2 \leq -7 \\ 4x_1 + x_2 \leq 9 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

例 2

- 令各约束的对偶变量分别是 $y_1^{'}$，$y_1^{''}$，y_2，按对应关系写出对偶问题

$$
\begin{aligned}
\min\ & w = 7y_1^{'} - 7y_1^{''} + 9y_2 \\
\text{s.t. } & \begin{cases} 3y_1^{'} - 3y_1^{''} + 4y_2 \geq 5 \\ -2y_1^{'} + 2y_1^{''} + y_2 \geq 6 \\ y_1^{'}, y_1^{''}, y_2 \geq 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

例 2

- 令各约束的对偶变量分别是 $y_1^{'}$，$y_1^{''}$，y_2，按对应关系写出对偶问题

$$\min \ w = 7y_1^{'} - 7y_1^{''} + 9y_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 3y_1^{'} - 3y_1^{''} + 4y_2 \geq 5 \\ -2y_1^{'} + 2y_1^{''} + y_2 \geq 6 \\ y_1^{'}, y_1^{''}, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

- 令 $y_1 = y_1^{'} - y_1^{''}$，得到对偶问题

$$\min \ w = 7y_1 + 9y_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 3y_1 + 4y_2 \geq 5 \\ -2y_1 + y_2 \geq 6 \\ y_1 \text{自由}, \ y_2 \geq 0 \end{cases}$$

- 例 3
  - 写出下面问题的对偶问题

$$\max\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \ge b_3 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \le 0,\ x_3\text{无约束} \end{cases}$$

例 3

- 写出下面问题的对偶问题

$$\max\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \ge b_3 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \le 0,\ x_3\text{无约束} \end{cases}$$

- 令 $x_2 = -x_2^{'},\ x_3 = x_3^{'} - x_3^{''}$，经过变换后可重新表达为

$$\max\ z = c_1x_1 - c_2x_2^{'} + c_3x_3^{'} - c_3x_3^{''}$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} a_{11}x_1 - a_{12}x_2^{'} + a_{13}x_3^{'} - a_{13}x_3^{''} \le b_1 \\ a_{21}x_1 - a_{22}x_2^{'} + a_{23}x_3^{'} - a_{23}x_3^{''} \le b_2 \\ -a_{21}x_1 + a_{22}x_2^{'} - a_{23}x_3^{'} + a_{23}x_3^{''} \le -b_2 \\ -a_{31}x_1 - a_{32}x_2^{'} - a_{33}x_3^{'} + a_{33}x_3^{''} \le -b_3 \\ x_1, x_2^{'}, x_3^{'}, x_3^{''} \ge 0 \end{cases}$$

例 3

- 令各约束的对偶变量分别是 y_1，$y_2^{'}$，$y_2^{''}$，$y_3^{'}$，按对应关系写出

$$\min\ w = b_1y_1 + b_2y_2^{'} - b_2y_2^{''} - b_3y_3^{'}$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2^{'} - a_{21}y_2^{''} - a_{31}y_3^{'} \geq c_1 \\ -a_{12}y_1 - a_{22}y_2^{'} + a_{22}y_2^{''} - a_{32}y_3^{'} \geq -c_2 \\ a_{13}y_1 + a_{23}y_2^{'} - a_{23}y_2^{''} - a_{33}y_3^{'} \geq c_3 \\ -a_{13}y_1 - a_{23}y_2^{'} + a_{23}y_2^{''} + a_{33}y_3^{'} \geq -c_3 \\ y_1, y_2^{'}, y_2^{''}, y_3^{'} \geq 0 \end{cases}$$

- 例 3
  - 令各约束的对偶变量分别是 y_1, $y_2^{'}$, $y_2^{''}$, $y_3^{'}$，按对应关系写出

$$\min \ w = b_1y_1 + b_2y_2^{'} - b_2y_2^{''} - b_3y_3^{'}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2^{'} - a_{21}y_2^{''} - a_{31}y_3^{'} \geq c_1 \\ -a_{12}y_1 - a_{22}y_2^{'} + a_{22}y_2^{''} - a_{32}y_3^{'} \geq -c_2 \\ a_{13}y_1 + a_{23}y_2^{'} - a_{23}y_2^{''} - a_{33}y_3^{'} \geq c_3 \\ -a_{13}y_1 - a_{23}y_2^{'} + a_{23}y_2^{''} + a_{33}y_3^{'} \geq -c_3 \\ y_1, y_2^{'}, y_2^{''}, y_3^{'} \geq 0 \end{cases}$$

  - 令 $y_2 = y_2^{'} - y_2^{''}$, $y_3 = -y_3^{'}$，得到对偶问题

$$\min \ w = b_1y_1 + b_2y_2 + b_3y_3$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + a_{31}y_3 \geq c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + a_{32}y_3 \leq c_2 \\ a_{13}y_1 + a_{23}y_2 + a_{33}y_3 = c_3 \\ y_1 \geq 0, \ y_2\text{无约束}, \ y_3 \leq 0 \end{cases}$$

原问题与对偶问题

关系归纳

原问题 (P)	对偶问题 (D)
目标函数 $\max\ z$	目标函数 $\min\ w$
决策变量 n 个 决策变量 ≥ 0 决策变量 ≤ 0 决策变量无约束	约束条件 n 个 约束条件 ≤ 0 约束条件 ≥ 0 约束条件 $=$
约束条件 m 个 约束条件 ≥ 0 约束条件 ≤ 0 约束条件 $=$ 约束条件右端项向量 目标函数变量系数	决策变量 m 个 决策变量 ≤ 0 决策变量 ≥ 0 决策变量无约束 目标函数变量的系数 约束条件右端项向量

- 例 4
  - 写出下面问题的对偶问题

$$
\begin{aligned}
&\min \ \ z = 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 \\
&\text{s.t.} \ \begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 6 \\ 2x_1 + 3x_3 \ge 9 \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 4 \\ x_1\text{无约束},\ x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

- 例 4
  - 写出下面问题的对偶问题

$$\min\ z = 4x_1 + 2x_2 - 3x_3$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 6 \\ 2x_1 + 3x_3 \ge 9 \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 4 \\ x_1\text{无约束},\ x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

  - 对偶问题

$$\max\ w = 6y_1 + 9y_2 + 4y_3$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} -y_1 + 2y_2 + y_3 = 4 \\ 2y_1 + 5y_3 \le 2 \\ 3y_2 - 2y_3 \le -3 \\ y_1 \le 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3\text{无约束} \end{cases}$$

- 课堂练习 2
  - 写出下面问题的对偶问题

$$
\min \ z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4
$$

$$
\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \geq 5 \\ 2x_1 + 2x_3 - x_4 \leq 4 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 \leq 0, \ x_2, x_3 \geq 0, \ x_4\text{无约束} \end{cases}
$$

课堂练习 2

- 写出下面问题的对偶问题

$$\min \ z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \geq 5 \\ 2x_1 + 2x_3 - x_4 \leq 4 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 \leq 0,\ x_2, x_3 \geq 0,\ x_4\text{无约束} \end{cases}$$

- 对偶问题

$$\max \ w = 5y_1 + 4y_2 + 6y_3$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} y_1 + 2y_2 \geq 2 \\ y_1 + y_3 \leq 3 \\ -3y_1 + 2y_2 + y_3 \leq -5 \\ y_1 - y_2 + y_3 = 1 \\ y_1 \geq 0,\ y_2 \leq 0,\ y_3\text{无约束} \end{cases}$$

线性规划的对偶理论

- 小结
  - 原问题
  - 对偶问题
  - 对偶问题与原问题的关系
    - 对称形式
    - 非对称形式
  - 非对称形式的原-对偶问题关系
    - 等式变不等式
    - 不等式变不等式
    - 变量转换
- 课后作业: P75, 习题 2.1

Q&A

Thank you!

感谢您的聆听和反馈