第六章 对策论

6.1 图与网络的基本知识

修贤超

机电工程与自动化学院
上海大学

xcxiu@shu.edu.cn

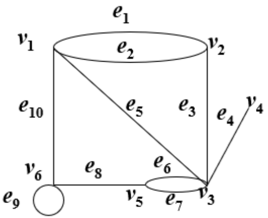
图与网络的基本知识

图与网络的基本概念

- **定义:** 一个图是由点集 $V=\{v_j\}$ 和 V 中元素的无序对的一个集合 $E=\{e_k\}$ 构成的二元组，记为 $G=(V,E)$，其中 V 中的元素 v_j 叫做顶点，V 表示图 G 的点集合；E 中的元素 e_k 叫做边，E 表示图 G 的边集合。

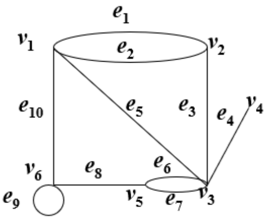
图与网络的基本概念

- **定义:** 一个图是由点集 $V=\{v_j\}$ 和 V 中元素的无序对的一个集合 $E=\{e_k\}$ 构成的二元组，记为 $G=(V,E)$，其中 V 中的元素 v_j 叫做顶点，V 表示图 G 的点集合；E 中的元素 e_k 叫做边，E 表示图 G 的边集合。



图与网络的基本概念

定义: 一个图是由点集 $V=\{v_j\}$ 和 V 中元素的无序对的一个集合 $E=\{e_k\}$ 构成的二元组，记为 $G=(V,E)$，其中 V 中的元素 v_j 叫做顶点，V 表示图 G 的点集合；E 中的元素 e_k 叫做边，E 表示图 G 的边集合。



- $V=\{v_1,v_2.v_3.v_4.v_5,v_6\}$
- $E=\{v_1,v_2.v_3.v_4.v_5,v_6\}$
- $e_1=(v_1,v_2)$, $e_2=(v_1,v_2)$, $e_3=(v_2,v_3)$, $e_4=(v_3,v_4)$, $e_5=(v_1,v_3)$, $e_6=(v_3,v_5)$, $e_7=(v_3,v_5)$, $e_8=(v_5,v_6)$, $e_9=(v_6,v_6)$, $e_{10}=(v_1,v_6)$

图与网络的基本概念

- 如果一个图是由点和边所构成的，则称其为无向图，记作 $G = (V, E)$，连接点的边记作 (v_i, v_j)，或者 (v_j, v_i)。

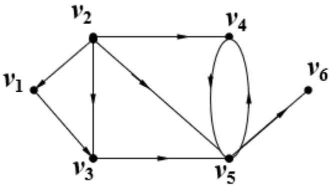
图与网络的基本知识

图与网络的基本概念

- 如果一个图是由点和边所构成的，则称其为无向图，记作 $G=(V,E)$，连接点的边记作 (v_i,v_j)，或者 (v_j,v_i)。
- 如果一个图是由点和弧所构成的，那么称它为有向图，记作 $D=(V,A)$，其中 V 表示有向图 D 的点集合，A 表示有向图 D 的弧集合。一条方向从 v_i 指向 v_j 的弧，记作 (v_i,v_j)。

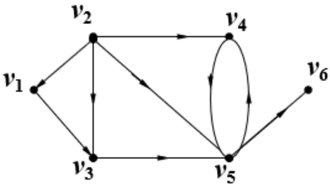
图与网络的基本概念

- 如果一个图是由点和边所构成的，则称其为无向图，记作 $G=(V,E)$，连接点的边记作 (v_i,v_j)，或者 (v_j,v_i)。
- 如果一个图是由点和弧所构成的，那么称它为有向图，记作 $D=(V,A)$，其中 V 表示有向图 D 的点集合，A 表示有向图 D 的弧集合。一条方向从 v_i 指向 v_j 的弧，记作 (v_i,v_j)。



图与网络的基本概念

- 如果一个图是由点和边所构成的，则称其为无向图，记作 $G=(V,E)$，连接点的边记作 (v_i,v_j)，或者 (v_j,v_i)。
- 如果一个图是由点和弧所构成的，那么称它为有向图，记作 $D=(V,A)$，其中 V 表示有向图 D 的点集合，A 表示有向图 D 的弧集合。一条方向从 v_i 指向 v_j 的弧，记作 (v_i,v_j)。



- $V=\{v_1,v_2.v_3.v_4.v_5,v_6\}$
- $A=\{(v_1,v_3),(v_2,v_1),(v_2,v_3),(v_2,v_5),(v_3,v_5),(v_4,v_5),(v_5,v_4),(v_5,v_6)\}$

图与网络的基本概念

- 一条边的两个端点是相同的，那么称为这条边是**环**。如果两个端点之间有两条以上的边，那么称为它们为**多重边**。

图与网络的基本知识

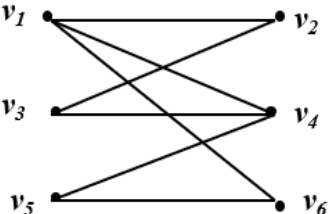
- 图与网络的基本概念
  - 一条边的两个端点是相同的, 那么称为这条边是环。如果两个端点之间有两条以上的边，那么称为它们为多重边。
  - 一个无环，无多重边的图称为简单图，一个无环，有多重边的图称为多重图。

图与网络的基本概念

- 一条边的两个端点是相同的，那么称为这条边是环。如果两个端点之间有两条以上的边，那么称为它们为多重边。
- 一个无环，无多重边的图称为简单图，一个无环，有多重边的图称为多重图。
- 每一对顶点间都有边相连的无向简单图称为完全图。有向完全图则是指任意两个顶点之间有且仅有一条有向边的简单图。

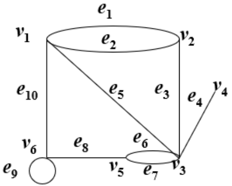
图与网络的基本概念

- 一条边的两个端点是相同的，那么称为这条边是环。如果两个端点之间有两条以上的边，那么称为它们为多重边。
- 一个无环，无多重边的图称为简单图，一个无环，有多重边的图称为多重图。
- 每一对顶点间都有边相连的无向简单图称为完全图。有向完全图则是指任意两个顶点之间有且仅有一条有向边的简单图。
- 图 $G=(V,E)$ 的点集 V 可以分为两个非空子集 X，Y，即 $X\cup Y=V$，$X\cap Y=\varnothing$，使得 E 中每条边的两个端点必有一个端点属于 X，另一个端点属于 Y，则称 G 为二部图 (偶图)，有时记作 $G=(X,Y,E)$。



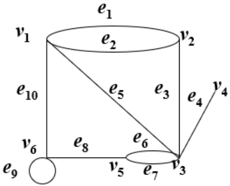
图与网络的基本概念

- 以点 v 为端点的边的个数称为点 v 的度（次），记作 $d(v)$。



图与网络的基本概念

- 以点 v 为端点的边的个数称为点 v 的度（次），记作 $d(v)$。

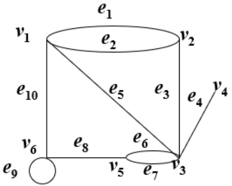


- 例如图中 $d(v_1) = 4$，$d(v_6) = 4$（环计两度）

图与网络的基本知识

图与网络的基本概念

- 以点 v 为端点的边的个数称为点 v 的度（次），记作 $d(v)$。



- 例如图中 $d(v_1) = 4$，$d(v_6) = 4$（环计两度）
- 度为零的点称为弧立点，度为 1 的点称为悬挂点。悬挂点的关联边称为悬挂边。度为奇数的点称为奇点，度为偶数的点称为偶点。

图与网络的基本概念

- **定理 1:** 所有顶点度数之和等于所有边数的 2 倍。
- **定理 2:** 在任一图中，奇点的个数必为偶数。

图与网络的基本概念

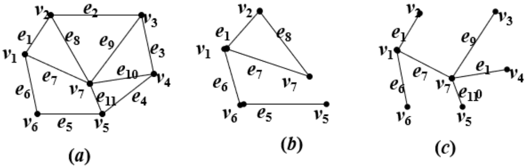
- 定理 1: 所有顶点度数之和等于所有边数的 2 倍。
- 定理 2: 在任一图中，奇点的个数必为偶数。
- 有向图中，以 v_i 为始点的边数称为点 v_i 的出次，用 $d^+(v_i)$ 表示；以 v_i 为终点的边数称为点 v_i 的入次，用 $d^-(v_i)$ 表示；v_i 点的出次和入次之和就是该点的次。所有顶点的入次之和等于所有顶点的出次之和。

图与网络的基本概念

- 图 $G=(V,E)$，若 E' 是 E 的子集，V' 是 V 的子集，且 E' 中的边仅与 V' 中的顶点相关联，则称 $G'=(V',E')$ 是 G 的一个子图。特别是，若 $V'=V$，则 G' 称为 G 的生成子图 (支撑子图)。

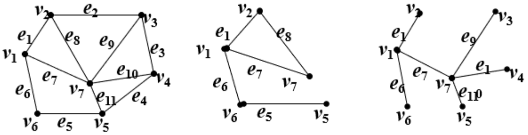
图与网络的基本概念

- 图 $G=(V,E)$，若 E' 是 E 的子集，V' 是 V 的子集，且 E' 中的边仅与 V' 中的顶点相关联，则称 $G'=(V',E')$ 是 G 的一个子图。特别是，若 $V'=V$，则 G' 称为 G 的生成子图 (支撑子图)。



图与网络的基本概念

- 图 $G = (V, E)$，若 E' 是 E 的子集，V' 是 V 的子集，且 E' 中的边仅与 V' 中的顶点相关联，则称 $G' = (V', E')$ 是 G 的一个子图。特别是，若 $V' = V$，则 G' 称为 G 的生成子图 (支撑子图)。



(a) (b) (c)

- 在实际应用中，给定一个图 $G = V, E$ 或有向图 $D = V, A$, 在 V 中指定两个点，一个称为**始点（或发点）**，记作 v_1 ，一个称为**终点（或收点）**，记作 v_n ，其余的点称为**中间点**。对每一条弧 $(v_i, v_j) \in A$，对应一个数 w_{ij} ，称为弧上的**权**。通常把这种赋权的图称为网络。

连通图

- 无向图 $G = (V, E)$，若图 G 中某些点与边的交替序列可以排成 $(v_{i0}, e_{i1}, v_{i1}, e_{i2}, \ldots, v_{ik-1}, e_{ik}, v_{ik})$ 的形式，且 $e_{it} = (v_{it-1}, v_{it})$ $(t = 1, \ldots, k)$，则称这个点边序列为连接 v_{i0} 与 v_{ik} 的一条链，链长为 k。点边列中没有重复的点和重复边者为初等链。

图与网络的基本知识

连通图

- 无向图 $G=(V,E)$，若图 G 中某些点与边的交替序列可以排成 $(v_{i0},e_{i1},v_{i1},e_{i2},\ldots,v_{ik-1},e_{ik},v_{ik})$ 的形式，且 $e_{it}=(v_{it-1},v_{it})$ $(t=1,\ldots,k)$，则称这个点边序列为连接 v_{i0} 与 v_{ik} 的一条链，链长为 k。点边列中没有重复的点和重复边者为初等链。
- 无向图 G 中，连结 v_{i0} 与 v_{ik} 的一条链，当 v_{i0} 与 v_{ik} 是同一个点时，称此链为圈。圈中既无重复点也无重复边者为初等圈。

连通图

- 无向图 $G=(V,E)$，若图 G 中某些点与边的交替序列可以排成 $(v_{i0},e_{i1},v_{i1},e_{i2},\ldots,v_{ik-1},e_{ik},v_{ik})$ 的形式，且 $e_{it}=(v_{it-1},v_{it})$ $(t=1,\ldots,k)$，则称这个点边序列为连接 v_{i0} 与 v_{ik} 的一条链，链长为 k。点边列中没有重复的点和重复边者为初等链。
- 无向图 G 中，连结 v_{i0} 与 v_{ik} 的一条链，当 v_{i0} 与 v_{ik} 是同一个点时，称此链为圈。圈中既无重复点也无重复边者为初等圈。
- 对于有向图可以类似于无向图定义链和圈，初等链、圈，此时不考虑边的方向。而当链 (圈) 上的边方向相同时，称为道路 (回路)。对于无向图来说，道路与链、回路与圈意义相同。

连通图

- 无向图 $G=(V,E)$，若图 G 中某些点与边的交替序列可以排成 $(v_{i0},e_{i1},v_{i1},e_{i2},\ldots,v_{ik-1},e_{ik},v_{ik})$ 的形式，且 $e_{it}=(v_{it-1},v_{it})$ $(t=1,\ldots,k)$，则称这个点边序列为连接 v_{i0} 与 v_{ik} 的一条链，链长为 k。点边列中没有重复的点和重复边者为初等链。
- 无向图 G 中，连结 v_{i0} 与 v_{ik} 的一条链，当 v_{i0} 与 v_{ik} 是同一个点时，称此链为圈。圈中既无重复点也无重复边者为初等圈。
- 对于有向图可以类似于无向图定义链和圈，初等链、圈，此时不考虑边的方向。而当链 (圈) 上的边方向相同时，称为道路 (回路)。对于无向图来说，道路与链、回路与圈意义相同。
- 一个图中任意两点间至少有一条链相连，则称此图为连通图。任何一个不连通图都可以分为若干个连通子图，每一个称为原图的一个分图。

图的矩阵表示

- 对于网络（赋权图）$G = V, E$, 其中边有权 (v_i, v_j), 构造矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 其中:

$$a_{ij} = \begin{cases} w_{ij} & (v_i, v_j) \in E \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

称矩阵 A 为网络 G 的权矩阵。

图的矩阵表示

- 对于网络（赋权图）$G = V, E$, 其中边有权 (v_i, v_j), 构造矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$, 其中:

$$a_{ij} = \begin{cases} w_{ij} \ (v_i, v_j) \in E \\ 0 \ \text{其他} \end{cases}$$

  称矩阵 A 为网络 G 的权矩阵。

- 设图 $G = V, E$ 中顶点的个数为 n，构造一个矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ ，其中:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \ (v_i, v_j) \in E \\ 0 \ (v_i, v_j) \notin E \end{cases}$$

  称矩阵 A 为网络 G 的邻接矩阵。

图的矩阵表示

- 对于网络（赋权图）$G = V, E$, 其中边有权 (v_i, v_j), 构造矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$, 其中:

$$a_{ij} = \begin{cases} w_{ij} \ (v_i, v_j) \in E \\ 0 \ 其他 \end{cases}$$

称矩阵 A 为网络 G 的权矩阵。

- 设图 $G = V, E$ 中顶点的个数为 n，构造一个矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$，其中:

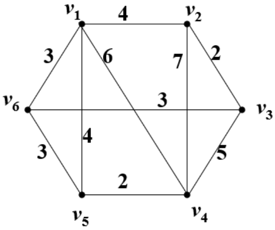
$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \ (v_i, v_j) \in E \\ 0 \ (v_i, v_j) \notin E \end{cases}$$

称矩阵 A 为网络 G 的邻接矩阵。

- 当 G 为无向图时，邻接矩阵为对称矩阵。

图的矩阵表示

- 试写出权矩阵和邻接矩阵

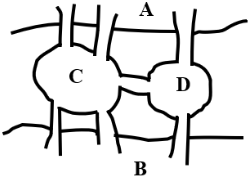


欧拉回路

- 连通图 G 中，若存在一条道路，经过每边一次且仅一次，则称这条路为欧拉道路。若存在一条回路，经过每边一次且仅一次，则称这条回路为**欧拉回路**。具有欧拉回路的图称为**欧拉图** (**E 图**)。

欧拉回路

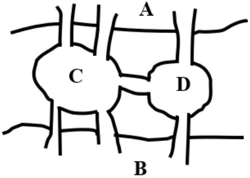
- 连通图 G 中，若存在一条道路，经过每边一次且仅一次，则称这条路为欧拉道路。若存在一条回路，经过每边一次且仅一次，则称这条回路为欧拉回路。具有欧拉回路的图称为欧拉图 (E 图)。



图与网络的基本知识

欧拉回路

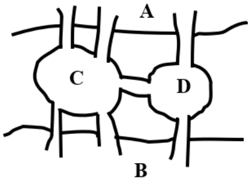
- 连通图 G 中，若存在一条道路，经过每边一次且仅一次，则称这条路为欧拉道路。若存在一条回路，经过每边一次且仅一次，则称这条回路为欧拉回路。具有欧拉回路的图称为欧拉图 (E 图)。



- 定理 3: 无向连通图 G 是欧拉图，当且仅当 G 中无奇点。

欧拉回路

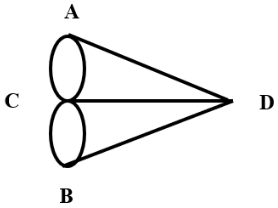
- 连通图 G 中，若存在一条道路，经过每边一次且仅一次，则称这条路为欧拉道路。若存在一条回路，经过每边一次且仅一次，则称这条回路为欧拉回路。具有欧拉回路的图称为欧拉图 (E 图)。



- 定理 3: 无向连通图 G 是欧拉图，当且仅当 G 中无奇点。
- 无向连通图 G 为欧拉图，当且仅当 G 的边集可划分为若干个初等回路。
- 无向连通图 G 有欧拉道路，当且仅当 G 中且有两个奇点。

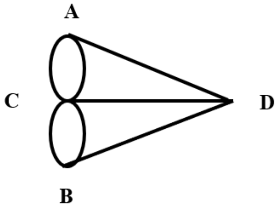
欧拉回路

- 欧拉回路的算法: 从图 G 中的任一点 v_1 出发，找一个初等回路 c_1，再从途中去掉 c_1，在剩余的图中再找初等回路 c_2，一直做到图中所有的边都被包含在这些初等回路中，再把这些回路连续起来即得这个图的欧拉回路。



欧拉回路

- 欧拉回路的算法：从图 G 中的任一点 v_1 出发，找一个初等回路 c_1，再从途中去掉 c_1，在剩余的图中再找初等回路 c_2，一直做到图中所有的边都被包含在这些初等回路中，再把这些回路连续起来即得这个图的欧拉回路。



- 定理 4：连通有向图 G 是欧拉图，当且仅当它每个顶点的出次等于入次。

中国邮递员问题

- 一个邮递员，负责某一地区的信件投递。他每天要从邮局出发，走遍该地区所有街道再返回邮局，问应如何安排送信的路线可以使所走的总路程最短？这个问题是我国管梅谷教授在 1962 年首先提出的。因此国际上通称为中国邮路问题。用图论的语言描述给定一个连通图 G，每边有非负权 $l(e)$，要求一条回路过每边至少一次，且满足总权最小。

中国邮递员问题

- 一个邮递员，负责某一地区的信件投递。他每天要从邮局出发，走遍该地区所有街道再返回邮局，问应如何安排送信的路线可以使所走的总路程最短？这个问题是我国管梅谷教授在 1962 年首先提出的。因此国际上通称为中国邮路问题。用图论的语言描述给定一个连通图 G，每边有非负权 $l(e)$，要求一条回路过每边至少一次，且满足总权最小。
- 定理 5: 已知图 $G^* = G + E_1$ 无奇点，则 $L(E_l) = \sum\limits_{e \in E_l} l(e)$ 最小的充分必要条件为:
  - 每条边最多重复一次；
  - 对图 G 中每个初等圈来讲，重复边的长度和不超过圈长的一半。
- 奇偶点图上作业法

图与网络的基本知识

- 小结
  - 图与网络的基本概念
    - 图、顶点、边、简单图、完全图
    - 顶点的次、奇点、偶点
    - 子图、生成子图
    - 权、网络
  - 连通图
  - 图的矩阵表示
  - 欧拉回路与中国邮路问题

Q&A

Thank you!

感谢您的聆听和反馈