第二章 线性规划

修贤超

https://xianchaoxiu.github.io

目录

单纯形法原理

- 先找出一个基可行解，判断其是否为最优解，如果否，则转换到相邻的基可行解，并使目标函数值不断增大，一直找到最优解为止
- 迭代步骤
  - 第一步：求初始基可行解，列出初始单纯形表
  - 第二步：最优性检验
  - 第三步：从一个基可行解转换到相邻的目标函数值更大的基可行解，列出新的单纯形表
  - 第四步：重复二、三步，一直到计算结束为止
- 单纯形表：为检验一个基可行解是否最优，需要将其目标函数值与相邻基可行解的目标函数值进行比较

第一步: 列出初始单纯形表

- 考虑线性规划问题

$$\max\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} x_1 + a_{1,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ x_2 + a_{2,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \\ x_1, \cdots, x_n \geq 0 \end{cases}$$

- 系数矩阵的增广矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{1,m+1} & \cdots & a_{1,n} & \color{red}{b_1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_{2,m+1} & \cdots & a_{2,n} & \color{red}{b_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{m,m+1} & \cdots & a_{m,n} & \color{red}{b_m} \end{bmatrix}$$

第一步: 列出初始单纯形表

- 选取 $m \times m$ 的单位矩阵作为可行基，得到初始单纯形表

$c_j \rightarrow$			c_1	$\cdots$	c_m	$\cdots$	c_j	$\cdots$	c_n
$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{b}$	x_1	$\cdots$	x_m	$\cdots$	x_j	$\cdots$	x_n
c_1	x_1	b_1	1	$\cdots$	0	$\cdots$	a_{1j}	$\cdots$	a_{1n}
c_2	x_2	b_2	0	$\cdots$	0	$\cdots$	a_{2j}	$\cdots$	a_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
c_m	x_m	b_m	0	$\cdots$	1	$\cdots$	a_{mj}	$\cdots$	a_{mn}
$c_j - z_j$			0	$\cdots$	0	$\cdots$	σ_j	$\cdots$	σ_n

- 检验数 $\sigma_j = c_j - z_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$

第一步: 列出初始单纯形表

- **例 1**

$$\max\ z = 2x_1 + x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 5x_2 \leq 15 \\ 6x_1 + 2x_2 \leq 24 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

- **标准化**

$$\max\ z = 2x_1 + x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 5x_2 + x_3 = 15 \\ 6x_1 + 2x_2 + x_4 = 24 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

第一步: 列出初始单纯形表

- **系数矩阵**

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **列出初始单纯形表**

$c_j \rightarrow$			2	1	0	0	0
$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	15	0	5	1	0	0
0	x_4	24	6	2	0	1	0
0	x_5	5	1	1	0	0	1
$c_j - z_j$			2	1	0	0	0

第二步：最优性检验

- 如果所有检验数

$$\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} \le 0$$

且基变量中不含有人工变量，则停止，得到最优解

- 如果存在

$$\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} > 0$$

且有 $\mathbf{P}_j \le 0$，则停止迭代，问题为无界解

- 否则转三步

第二步: 最优性检验

- 例 1

$c_j \rightarrow$			2	1	0	0	0
$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	15	0	5	1	0	0
0	x_4	24	6	2	0	1	0
0	x_5	5	1	1	0	0	1
$c_j - z_j$			2	1	0	0	0

- 检验数 $\sigma_j > 0$，因此初始基可行解不是最优解
- 按照单纯形法转第三步

第三步: 基可行解转化

- 从一个基可行解转换到相邻的目标函数更大的基可行解，列出新的单纯形表
  - 确定换入变量 x_k（最大增加原则）

$$\sigma_k = \max_j \{\sigma_j \mid \sigma_j > 0\}$$

  - 确定换出变量 x_l（最小比值原则）

$$\theta = \min_i \left\{ \frac{b_i}{a_{ik}} \mid a_{ik} > 0 \right\} = \frac{b_l}{a_{lk}}$$

确定 x_l 为换出变量，a_{lk} 为主元素

第三步: 基可行解转化

- 用换入变量 x_k 替换基变量中的换出变量 x_l，得到一个新的基

$$(\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_{l-1}, \mathbf{P}_k, \mathbf{P}_{l+1}, \ldots, \mathbf{P}_m)$$

进行初等变换

$$\mathbf{P}_k = \begin{bmatrix} a_{1,k} \\ a_{2,k} \\ \vdots \\ a_{l,k} \\ \vdots \\ a_{m,k} \end{bmatrix} \xRightarrow{\text{高斯消元}} \mathbf{P}_l = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

第三步: 基可行解转化

- 例 1

$c_j \rightarrow$			2	1	0	0	0
$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{b}$	$\underline{x_1}$	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	15	0	5	1	0	0
0	$\underline{x_4}$	24	[6]	2	0	1	0
0	x_5	5	1	1	0	0	1
$c_j - z_j$			2	1	0	0	0

- 因 $\sigma_1 > \sigma_2$，确定 x_1 为换入变量
- $\theta = \min\left\{\infty, \frac{24}{6}, \frac{5}{1}\right\} = 4$, 因此确定 6 为主元素
- x_4 为换出变量

- 例 1

$c_j \rightarrow$			2	1	0	0	0
$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{b}$	x_1	$\underline{x_2}$	x_3	x_4	x_5
0	x_3	15	0	5	1	0	0
2	x_1	4	1	2/6	0	1/6	0
0	$\underline{x_5}$	1	0	[4/6]	0	−1/6	1
$c_j - z_j$			0	1/3	0	−1/3	0

  - 因 $\sigma_2 > 0$，确定 x_2 为换入变量
  - $\theta = \min\left\{\frac{15}{5}, \frac{4}{2/6}, \frac{1}{4/6}\right\} = \frac{6}{4}$，因此确定 $4/6$ 为主元素
  - x_5 为换出变量

- 例 1

$c_j \to$			2	1	0	0	0
$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	$15/2$	0	0	1	$5/4$	$-15/2$
2	x_1	$7/2$	1	0	0	$1/4$	$-1/2$
1	x_2	$3/2$	0	1	0	$-1/4$	$3/2$
$c_j - z_j$			0	0	0	$-1/4$	-1.2

- 所有检验数 $\sigma_j \leq 0$，得到最优解 $\mathbf{X} = (7/2, 3/2, 15/2, 0, 0)^\top$
- 代入目标函数得最优值 $z^* = 2x_1 + x_2 = 17/2$

例 2

- 用单纯形法求解线性规划问题

$$\max\ z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

- 标准化

$$\max\ z = 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 4x_1 + x_4 = 16 \\ 4x_2 + x_5 = 12 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

例 2

- 第一步：求初始基可行解，列出初始单纯形表

$c_j \rightarrow$			2	3	0	0	0
$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	8	1	2	1	0	0
0	x_4	16	4	0	0	1	0
0	x_5	12	0	4	0	0	1
$c_j - z_j$			2	3	0	0	0

- 第二步：检验数大于零，因此初始基可行解不是最优解

例 2

- 第三步：基可行解的转换

	$c_j \rightarrow$		2	3	0	0	0
$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{b}$	x_1	$\underline{x_2}$	x_3	x_4	x_5
0	x_3	8	1	2	1	0	0
0	x_4	16	4	0	0	1	0
0	$\underline{x_5}$	12	0	[4]	0	0	1
	$c_j - z_j$		2	3	0	0	0

- 因 $\sigma_2 > \sigma_1$，确定 x_2 为换入变量
- $\theta = \min\left\{\frac{8}{2}, \infty, \frac{12}{4}\right\} = 3$, 因此确定 4 为主元素
- x_5 为换出变量

例 2

- 具体过程

$c_j \rightarrow$			2	3	0	0	0
$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{b}$	x_1	$\underline{x_2}$	x_3	x_4	x_5
0	x_3	8	1	2	1	0	0
0	x_4	16	4	0	0	1	0
0	$\underline{x_5}$	12	0	[4]	0	0	1
$c_j - z_j$			2	3	0	0	0

$$\Downarrow$$

$c_j \rightarrow$			2	3	0	0	0
$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	2	1	0	1	0	$-1/2$
0	x_4	16	4	0	0	1	0
3	x_2	3	0	1	0	0	$1/4$
$c_j - z_j$			2	0	0	0	$-3/4$

例 2

- 第四步: 重复二、三步

$c_j \to$			2	3	0	0	0
$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{X}_B$	**b**	$\underline{x_1}$	x_2	x_3	x_4	x_5
0	$\underline{x_3}$	2	[1]	0	1	0	$-1/2$
0	x_4	16	4	0	0	1	0
3	x_2	3	0	1	0	0	$1/4$
$c_j - z_j$			2	0	0	0	$-3/4$

  - 因 $\sigma_1 > 0$，确定 x_1 为换入变量
  - $\theta = \min\left\{\frac{2}{1}, \frac{16}{4}, \infty\right\} = 2$, 因此确定 1 为主元素
  - x_3 为换出变量

例 2

- 具体过程

$c_j \rightarrow$			2	3	0	0	0
$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{b}$	$\underline{x_1}$	x_2	x_3	x_4	x_5
0	$\underline{x_3}$	2	[1]	0	1	0	$-1/2$
0	x_4	16	4	0	0	1	0
3	x_2	3	0	1	0	0	$1/4$
$c_j - z_j$			2	0	0	0	$-3/4$

$$\Downarrow$$

$c_j \rightarrow$			2	3	0	0	0
$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	2	1	0	1	0	$-1/2$
0	x_4	8	0	0	-4	1	2
3	x_2	3	0	1	0	0	$1/4$
$c_j - z_j$			0	0	-2	0	$1/4$

例 2

- 第四步: 重复二、三步

$c_j \rightarrow$			2	3	0	0	0
$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	$\underline{x_5}$
2	x_1	2	1	0	1	0	$-1/2$
0	$\underline{x_4}$	8	0	0	-4	1	[2]
3	x_2	3	0	1	0	0	$1/4$
$c_j - z_j$			0	0	-2	0	$1/4$

- 因 $\sigma_5 > 0$，确定 x_5 为换入变量
- $\theta = \min\left\{-, \frac{8}{2}, \frac{3}{1/4}\right\} = 4$, 因此确定 2 为主元素
- x_4 为换出变量

例 2

- 具体过程

$c_j \rightarrow$			2	3	0	0	0
$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	$\underline{x_5}$
2	x_1	2	1	0	1	0	$-1/2$
0	$\underline{x_4}$	8	0	0	-4	1	[2]
3	x_2	3	0	1	0	0	$1/4$
$c_j - z_j$			0	0	-2	0	$1/4$

$\Downarrow$

$c_j \rightarrow$			2	3	0	0	0
$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	$\underline{x_5}$
2	x_1	4	1	0	0	$1/4$	0
0	x_5	4	0	0	-2	$1/2$	1
3	x_2	2	0	1	1/2	$-1/8$	0
$c_j - z_j$			0	0	-3/2	$-1/8$	0

例 2

- 第四步: 重复二、三步

$c_j \to$			2	3	0	0	0
$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	$\underline{x_5}$
2	x_1	4	1	0	0	$1/4$	0
0	x_5	4	0	0	-2	$1/2$	1
3	x_2	2	0	1	1/2	$-1/8$	0
$c_j - z_j$			0	0	-3/2	$-1/8$	0

- 所有检验数 $\sigma_j \leq 0$，得到最优解
- 最优解 $X = (4, 2, 0, 0, 4)^\top$
- 最优值 $z^* = 2x_1 + 3x_2 = 14$

课堂练习 1

- **用单纯形法求解线性规划问题**

$$\max\ z = 50x_1 + 100x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 \le 300 \\ 2x_1 + x_2 \le 400 \\ x_2 \le 250 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

课堂练习 1（答案）

- 经过分析得到

$c_j \rightarrow$			50	100	0	0	0
$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{X}_B$	**b**	x_1	x_2	x_3	x_4	$\underline{x_5}$
50	x_1	50	1	0	1	0	-1
0	x_4	50	0	0	-2	1	1
100	x_2	250	0	1	0	0	1
$c_j - z_j$			0	0	-50	0	-50

- 所有检验数 $\sigma_j \leq 0$，得到唯一最优解
- 最优解 $X = (50, 250, 0, 50, 0)^\top$
- 最优值 $z^* = 50x_1 + 100x_2 = 27500$

小结

- 单纯形表
- 检验数
- 计算步骤
  - 第一步: 列出初始单纯形表
  - 第二步: 最优性检验
  - 第三步: 基可行解转化
  - 第四步: 重复二、三步，一直到计算结束为止

Q&A

Thank you!

感谢您的聆听和反馈