

单纯形法原理

修贤超

<https://xianchaoxiu.github.io>

■ 标准形式

$$(LP) \quad \max z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (1.1)$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, \dots, m) & (1.2) \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n) & (1.3) \end{cases}$$

- 满足约束条件 (1.2) 和 (1.3) 的 x_j ($j = 1, \dots, n$) 称为**可行解**
- 全部可行解的集合称为**可行域**
- 满足 (1.1) 的可行解称为**最优解**
- 最优解所对应的函数值称为**最优值**

解的概念

- 设 A 为约束方程组 (1.2) 的 $m \times n$ ($n > m$) 阶系数矩阵, 其秩为 m , B 是矩阵 A 中的一个 $m \times m$ 阶的满秩子矩阵, 记为

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix} = (P_1, \cdots, P_m)$$

- B 是线性规划问题 (LP) 的一个基
- B 中的每一个列向量 P_j ($j = 1, \cdots, m$) 称为基向量
- 与基向量 P_j ($j = 1, \cdots, m$) 对应的变量 x_j ($j = 1, \cdots, m$) 称为基变量, 记为 $X_B = (x_1, \cdots, x_m)$
- 除基变量以外的变量称为非基变量, 记为 $X_N = (x_{m+1}, \cdots, x_n)$

例 1

- 找出线性规划问题的基、基向量和基变量

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 70x_1 + 120x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 9x_1 + 4x_2 + x_3 = 360 \\ 4x_1 + 5x_2 + x_4 = 200 \\ 3x_1 + 10x_2 + x_5 = 300 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

例 1

- 写出技术系数矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 寻找阶为 m 的满秩子矩阵

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (\mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4, \mathbf{P}_5)$$

基变量为 $\mathbf{X}_B = (x_3, x_4, x_5)^\top$, 非基变量为 $\mathbf{X}_N = (x_1, x_2)^\top$

例 1

- 写出技术系数矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 另一个基为

$$\mathbf{B}' = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_4, \mathbf{P}_5)$$

基变量为 $\mathbf{X}_B = (x_2, x_4, x_5)^\top$, 非基变量为 $\mathbf{X}_N = (x_1, x_3)^\top$

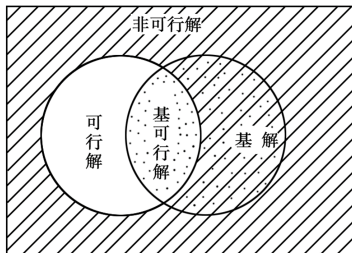
解的概念

- 在 (1.2) 中, 令所有非基变量 x_{m+1}, \dots, x_n 等于 0, 则称

$$\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)^\top$$

为线性规划问题 (LP) 的**基解**

- 满足变量非负约束条件 (1.3) 的基解称为**基可行解**
- 对应于基可行解的基称为**可行基**



例 2

- 求出全部基解，指出其中的基可行解，并确定最优解

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 2x_1 + 3x_2 + x_3 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} x_1 + x_3 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 10 \\ x_2 + x_5 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

例 2

■ 全部基解见下表

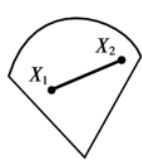
序号	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	可行解
①	0	0	5	10	4	5	✓
②	0	4	5	2	0	17	✓
③	5	0	0	5	4	10	✓
④	0	5	5	0	-1	20	×
⑤	10	0	-5	0	4	15	×
⑥	5	2.5	0	0	0	1.5	✓
⑦	5	4	0	-3	0	22	×
⑧	2	4	3	0	0	19	✓

■ 最优解为 $(2, 4, 3, 0, 0)$, 最优值为 19

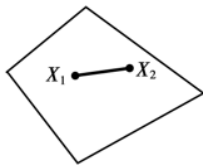
凸集

- 对于任意两点 $X_1, X_2 \in \Omega$, 满足下式的集合 Ω 称为**凸集**

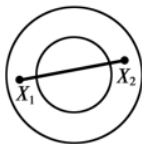
$$\alpha X_1 + (1 - \alpha)X_2 \in \Omega \quad (0 < \alpha < 1)$$



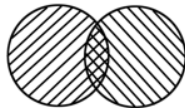
(a)



(b)



(c)



(d)

- 对于凸集 Ω 中的点 X , 如果不存在 $X_1, X_2 \in \Omega$ 使得

$$X = \alpha X_1 + (1 - \alpha)X_2 \in \Omega \quad (0 < \alpha < 1)$$

则称 X 是凸集 Ω 的**顶点 (极点)**

几个基本定理

■ **定理 1** 若线性规划问题存在可行解, 则可行域是凸集

证明 记 Ω 为满足线性规划问题束条件的集合

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{P}_j x_j = \mathbf{b}, \quad x_j \geq 0 \quad (j = 1, \cdots, n)$$

设 Ω 内的任意两点为

$$\mathbf{X}_1 = (x_{11}, \cdots, x_{1n})^\top, \quad \mathbf{X}_2 = (x_{21}, \cdots, x_{2n})^\top$$

且 $\mathbf{X}_1 \neq \mathbf{X}_2$, 一定满足

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{P}_j x_{1j} = \mathbf{b}, \quad x_{1j} \geq 0 \quad (j = 1, \cdots, n)$$

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{P}_j x_{2j} = \mathbf{b}, \quad x_{2j} \geq 0 \quad (j = 1, \cdots, n)$$

几个基本定理

证明 (续) 令 $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n)^\top$ 为 $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ 连线上任意一点, 即

$$\mathbf{X} = \alpha \mathbf{X}_1 + (1 - \alpha) \mathbf{X}_2 \quad (0 < \alpha < 1)$$

其中 $x_j = \alpha x_{1j} + (1 - \alpha)x_{2j}$ 。于是

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \mathbf{P}_j x_j &= \sum_{j=1}^n \mathbf{P}_j (\alpha x_{1j} + (1 - \alpha)x_{2j}) \\ &= \alpha \sum_{j=1}^n \mathbf{P}_j x_{1j} + \sum_{j=1}^n \mathbf{P}_j x_{2j} - \alpha \sum_{j=1}^n \mathbf{P}_j x_{2j} \\ &= \alpha \mathbf{b} + \mathbf{b} - \alpha \mathbf{b} \\ &= \mathbf{b} \end{aligned}$$

考虑 $x_{1j}, x_{2j} \geq 0, \alpha > 0, 1 - \alpha > 0$, 可知 $x_j \geq 0 (j = 1, \dots, n)$ 。于是集合中任意两点连线上的点均在集合内, 所以 Ω 是凸集

几个基本定理

- **引理** 线性规划问题的可行解 $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top$ 为基可行解的充要条件是 \mathbf{X} 的正分量所对应的系数列向量是线性独立的

证明 (必要性) 由基可行解的定义可知

(充分性) 若向量 $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_k$ 线性独立, 则必有 $k \leq m$

(1) 当 $k = m$ 时, $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_k$ 恰构成一个基, 从而

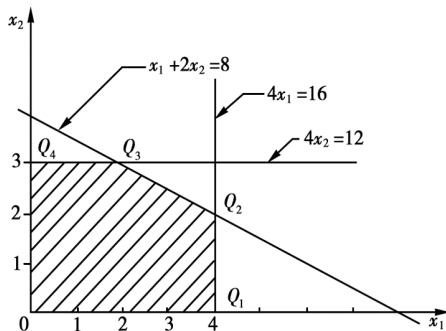
$$\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_m, 0, \dots, 0)^\top$$

为相应的基可行解。

(2) 当 $k < m$ 时, 则可以从其余的列向量中取出 $m - k$ 个与 $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_k$ 构成最大的线性独立向量组, 其对应的解恰为 \mathbf{X} , 根据定义它是基可行解

几个基本定理

- **定理 2** 线性规划问题的基可行解 X 对应线性规划问题可行域 (凸集) 的顶点
- **定理 3** 若线性规划问题有最优解, 那么一定存在一个基可行解是最优解
- **定理 4** 可行域有界, 目标函数最优值必可在顶点得到



小结

- 可行解, 最优解
- 基, 基解, 基可行解, 可行基
- 凸集, 顶点
- 解的性质
 - 线性规划问题的所有可行解构成的集合是凸集
 - 线性规划问题的每个基可行解对应可行域的一个顶点
 - 若线性规划问题有最优解, 必在某顶点上得到
- 课后作业: P44, 习题 1.3

Q&A

Thank you!

感谢您的聆听和反馈