第三章 整数规划

修贤超

https://xianchaoxiu.github.io

例 1

- 某厂利用集装箱托运甲、乙两种货物，每箱体积、重量、可获利润及托运限制如下。问两种货物各托运多少箱使利润最大？

项目	体积	重量	利润
甲	5	2	20
乙	4	5	10
托运限制	24	13	

整数规划的数学模型及解的特点

例 1

- 设两种货物分别托运 x_1, x_2，得到

$$\max \ z = 20x_1 + 10x_2$$
$$\text{s.t.} \ \begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \le 24 \\ 2x_1 + 5x_2 \le 13 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

- 显然托运数量必须是整数，于是

$$\max \ z = 20x_1 + 10x_2$$
$$\text{s.t.} \ \begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \le 24 \\ 2x_1 + 5x_2 \le 13 \\ x_1, x_2 \ge 0 \text{且取整数} \end{cases}$$

整数规划的数学模型及解的特点

整数规划数学模型的一般形式

- 要求部分或全部决策变量必须取整数值的规划问题称为**整数规划** (Integer Programming, IP)

$$\max(\min)\ z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

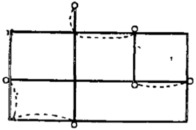
$$\text{s.t.}\ \begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le(\ge,=)\ b_i\ (i=1,\ldots,m)\\ x_j\ge 0\ (j=1,\ldots,n)\\ x_j\text{中部分或全部取整数}\end{cases}$$

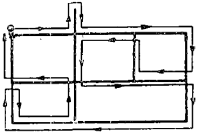
- 若不考虑整数条件，由余下的目标函数和约束条件构成的规划问题称为**松弛问题**
- 若松弛问题是一个线性规划，则称该规划为称为**整数线性规划** (Integer Linear Programming, ILP)

整数规划的数学模型及解的特点

整数规划数学模型的一般形式

- 纯整数线性规划：全部决策变量都必须取整数值
- 0-1 型整数线性规划：决策变量只能取值 0 或 1
- 混合整数线性规划：决策变量中一部分必须取整数值，另一部分可以不取整数值
- （中国邮递员问题）一个邮递员从邮局出发，要走完他所管辖范围内的每一条街道，至少一次再返回邮局，如何选择一条尽可能短的路线？该问题由我国数学家管梅谷在 1962 年首先提出。





- 旅行商问题 (Traveling Salesman Problem, TSP)

例 2: 纯整数线性规划问题

- 某服务部门各时段（每 2h 为一时段）需要的服务员人数见下表。按规定，服务员连续工作 8h（即四个时段）为一班。现要求安排服务员的工作时间，使服务部门服务员总数最少。

时段	1	2	3	4	5	6	7	8
服务员最少数目	10	8	9	11	13	8	5	3

例 2: 纯整数线性规划问题

- 设在第 j 时段开始时上班的服务员人数为 x_j
- 由于第 j 时段开始时上班的服务员将在第 $(j+3)$ 时段结束时下班，故决策变量只需考虑 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5
- 数学模型为

$$\min \ z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 \geq 10 \\ x_1 + x_2 \geq 8 \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 9 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 11 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 13 \\ x_3 + x_4 + x_5 \geq 8 \\ x_4 + x_5 \geq 5 \\ x_5 \geq 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \text{且取整数} \end{cases}$$

例 3: 0-1 型整数线性规划

- 现有资金总额为 B，可供选择的投资项目有 n 个，项目 j 所需投资额和预期收益分别为 a_j 和 c_j $(j = 1, \ldots, n)$。此外，因种种原因，有 3 个附加条件:
  - 若选择项目 1 必须同时选择项目 2，反之，不一定
  - 项目 3 和项目 4 中至少选择一个
  - 项目 5、6、7 中恰好选择两个

  应当怎样选择投资项目，才能使总预期收益最大？

整数规划的数学模型及解的特点

例 3: 0-1 型整数线性规划

- 每一个投资项目都有被选择和不被选择两种可能，为此令

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{对项目}j\text{投资} \\ 0 & \text{对项目}j\text{不投资} \end{cases}$$

- 数学模型为

$$\max \ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_j x_j \le B \\ x_2 \ge x_1 \\ x_3 + x_4 \ge 1 \\ x_5 + x_6 + x_7 = 2 \\ x_j = 0\text{或}1 \ (j = 1, \ldots, n) \end{cases}$$

例 4: 混合整数线性规划

- 工厂 A_1 和 A_2 生产某种物资，由于该种物资供不应求，故需要再建一家工厂。相应建设方案有 A_3 和 A_4 两个。这种物资的需求地有 B_1, B_2, B_3, B_4 四个。各工厂年生产能力、各地年需求量、各厂至各需求地的单位物资运费 c_{ij} $(i, j = 1, 2, 3, 4)$ 如下

工厂	B_1	B_2	B_3	B_4	生产能力 (kt/年)
A_1	2	9	3	4	400
A_2	8	3	5	7	600
A_3	7	6	1	2	200
A_4	4	5	2	5	200
需求量 (kt/年)	350	400	300	150	

工厂 A_3 和 A_4 的生产费用估计为 1200 万元或 1500 万元。现要决定应该建设工厂 A_3 还是 A_4，才能使今后每年的总费用 (包括物资运费和新工厂的生产费用) 最少。

例 4: 混合整数线性规划

- 设 x_{ij} 为由 A_i 送往 B_j 的物资数量
- 令

$$y=\begin{cases}1 & 若建工厂A_3\\ 0 & 若建工厂A_4\end{cases}$$

- 目标函数包括物资总运费和新工厂生产费用，即

$$\min\ \ z=\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}c_{ij}x_{ij}+[1200y+1500(1-y)]$$

- 例 4：混合整数线性规划
  - 数学模型为

$$\min\ z=\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}c_{ij}x_{ij}+[1200y+1500(1-y)]$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases}x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}=350\\ x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}=400\\ x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}=300\\ x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}=150\\ x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=400\\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{23}=600\\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=200y\\ x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}=200(1-y)\\ x_{ij}\geq 0\ (i,j=1,2,3,4)\\ y=0\text{或}1\end{cases}$$

整数规划的数学模型及解的特点

解的特点

- 整数线性规划问题

$$\max(\min)\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le (\ge, =)\ b_i\ (i = 1, \ldots, m) \\ x_j \ge 0\ (j = 1, \ldots, n) \\ x_j \text{中部分或全部取整数} \end{cases}$$

- 整数线性规划问题的可行解的集合不是凸集，即任意两个可行解的凸组合不一定满足整数约束条件。
- 整数线性规划问题的可行解一定是松弛问题的可行解，反之不一定。
- 整数线性规划问题的目标函数值不会优于松弛问题。

例 5

- 求解整数线性规划问题

$$\max\ z = 20x_1 + 10x_2$$
$$\text{s.t.}\ \begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \le 24 \\ 2x_1 + 5x_2 \le 13 \\ x_1, x_2 \ge 0 \text{且取整数} \end{cases}$$

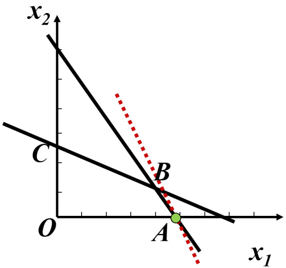
整数规划的数学模型及解的特点

- **例 5**
  - 考虑其松弛问题

$$\max \ z = 20x_1 + 10x_2$$

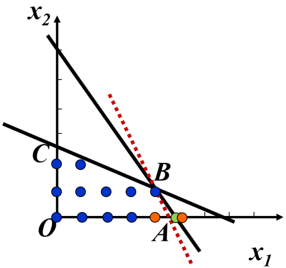
$$\text{s.t.} \begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \leq 24 \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 13 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

  - 最优解为 $A(4.8, 0)$，最优值 $z = 96$



例 5

- 设想一: 将松弛问题的最优解进行四舍五入，即 $x_1 = 5$，$x_2 = 0$。
- 设想二: 将松弛问题的最优解向下取整，即 $x_1 = 4$，$x_2 = 0$，$z = 80$。



- 启发: 先求松弛问题最优解，再用简单取整的方法虽然直观，却并不是求解整数规划的有效方法。

课堂练习 1

- 求解下述整数线性规划问题

$$
\max \quad z = x_1 + 4x_2
$$

$$
\text{s.t.} \quad \begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \leq 3 \\ x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1, x_2 \geq 0 \text{且取整数} \end{cases}
$$

线性规划问题及其数学模型

小结

整数规划的几种类型

- 纯整数线性规划
- 0-1 型整数线性规划
- 混合整数线性规划

解的特点

- 最优解不一定在顶点上达到
- 最优解不一定是相应线性规划的最优解“化整”的整数解
- 最优解不一定是相应线性规划最优解的临近点
- 整数可行解远多于顶点，枚举法不可取

分支定界法

- 整数可行解远多于顶点，枚举法不可取——分支定界法
- 应用范围: 求解纯整数规划和混合整数规划问题

$$\max(\min)\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le (\ge, =)\ b_i\ (i = 1, \ldots, m) \\ x_j \ge 0\ (j = 1, \ldots, n) \\ x_j \text{中部分或全部取整数} \end{cases}$$

- 分支: 若松弛问题的最优解不符合整数要求，则将取值为非整数解之一的决策变量取值分区，并入松弛问题中，形成两个分支松弛问题，分别求解。
- 定界: 为求解纯整数规划和混合整数规划问题，先求出其松弛问题的最优解，作为整数规划问题的最优目标函数值的上界，同时选择任意整数可行解作为整数规划问题的最优目标函数值的下界。

- **例 1**
  - 求解下述整数线性规划问题 A

$$
\max \ z = 40x_1 + 90x_2
$$

$$
\text{s.t.} \quad \begin{cases} 9x_1 + 7x_2 \leq 56 \\ 7x_1 + 20x_2 \leq 70 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \text{整数} \end{cases}
$$

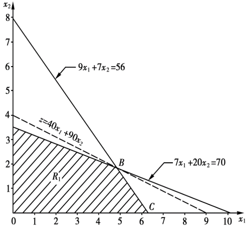
例 1

- 先不考虑整数约束，即解相应的松弛问题 B

$$\max\ \ z = 40x_1 + 90x_2$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} 9x_1 + 7x_2 \leq 56 \\ 7x_1 + 20x_2 \leq 70 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

- 最优解为 $x_1 = 4.81, x_2 = 1.82$，最优值为 $z_0 = 356$



- 不符合整数条件

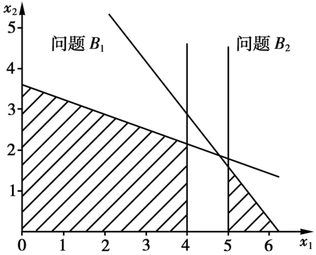
分支定界法

例 1 (第一次迭代)

- 定界: 问题 A 的最优目标函数值

$$0 \le z^* \le 356$$

- 分支: 在问题 B 的解中，首先注意其中一个非整数变量的解，如 $x_1 = 4.81$。于是对原问题 B 增加两个约束条件 $x_1 \le 4, x_1 \ge 5$



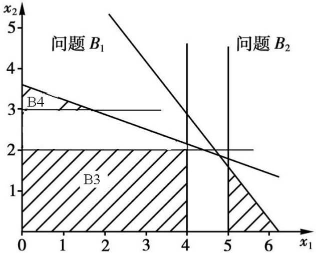
- 问题 B_1 的最优解为 $x_1 = 4.00, x_2 = 2.10$，最优值为 $z_1 = 349$
- 问题 B_2 的最优解为 $x_1 = 5.00, x_2 = 1.57$，最优值为 $z_2 = 341$

例 1 (第二次迭代)

- **定界**: 因 $z_1 > z_2$，故将 z 改为 349，那么必存在最优整数解，满足

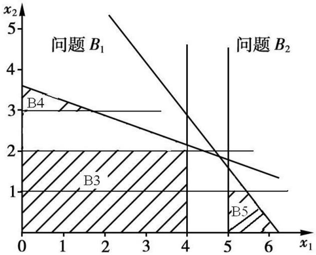
$$0 \leq z^* \leq 349$$

- **分支**: 因 $z_1 > z_2$，故先分解 B_1 为两支
  - 增加条件 $x_2 \leq 2$，称为问题 B_3
  - 增加条件 $x_2 \geq 3$，称为问题 B_4
  - 舍去 $x_2 > 2$ 与 $x_2 < 3$ 之间的可行域

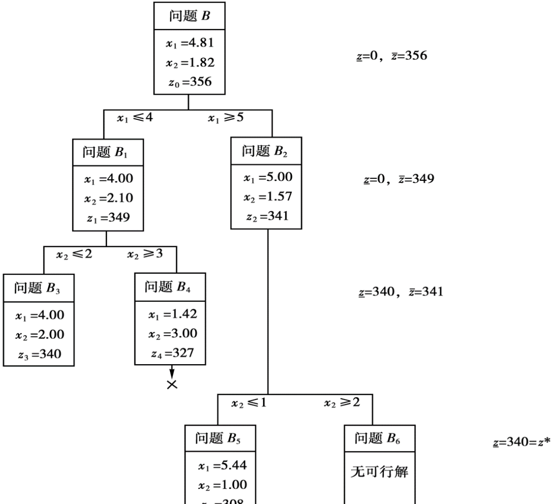


例 1 (第二次迭代)

- 继续对问题 B_2 进行分解
  - 增加条件 $x_2 \leq 1$，称为问题 B_5
  - 增加条件 $x_2 \geq 2$，称为问题 B_6
  - 舍去 $x_2 > 1$ 与 $x_2 < 2$ 之间的可行域



- 例 1
  - 解题的过程如下


问题 B
$x_1=4.81$
$x_2=1.82$
$z_0=356$
$\underline{z}=0$, $\bar{z}=356$
$x_1\leqslant 4$
$x_1\geqslant 5$
问题 B_1
$x_1=4.00$
$x_2=2.10$
$z_1=349$
问题 B_2
$x_1=5.00$
$x_2=1.57$
$z_2=341$
$\underline{z}=0$, $\bar{z}=349$
$x_2\leqslant 2$
$x_2\geqslant 3$
问题 B_3
$x_1=4.00$
$x_2=2.00$
$z_3=340$
问题 B_4
$x_1=1.42$
$x_2=3.00$
$z_4=327$
$\underline{z}=340$, $\bar{z}=341$
$x_2\leqslant 1$
$x_2\geqslant 2$
问题 B_5
$x_1=5.44$
$x_2=1.00$
问题 B_6
无可行解
$\underline{z}=340=z^*$

分支定界法

分支定界法解题步骤

- 以求解整数线性规划 (最大化) 问题为例，将要求解的整数线性规划问题称为问题 A，将与它相应的松弛问题称为问题 B。
- 第一步: 求解问题 B，可能得到以下情况之一
  - 若没有可行解，这时 A 也没有可行解，则停止
  - 若有最优解，并符合整数条件，最优解即 A 的最优解，则停止
  - 若有最优解，但不符合整数条件，记它的目标函数值为 $\bar{z}$
- 第二步: 用观察法找问题 A 的一个整数可行解，一般可取

$$x_j = 0 \ (j = 1, \ldots, n)$$

求得其目标函数值 $\underline{z}$，以 z^* 表示问题 A 的最优目标函数值，这时有

$$\underline{z} \leq z^* \leq \bar{z}$$

分支定界法解题步骤

- 第三步 (分支): 在问题 B 的最优解中任选一个不符合整数条件的变量 x_j，其值为 b_j，以 $\lfloor b_j \rfloor$ 表示小于 b_j 的最大整数，以 $\lceil b_j \rceil$ 表示大于 b_j 的最小整数。构造两个约束条件

$$x_j \leq \lfloor b_j \rfloor, \ x_j \geq \lceil b_j \rceil$$

  分别加入问题 B，求两个后继规划问题 B_1 和 B_2。
- 第四步 (定界): 以每个后继问题为一分支标明求解的结果，找出最优目标函数值最大者作为新的上界。从已符合整数条件的各分支中，找出目标函数值为最大者作为新的下界，若无可行解，$\underline{z} = 0$。
- 第五步 (剪支): 各分支的最优目标函数中若有小于 $\underline{z}$ 者，则剪掉这支 (用打 $\times$ 表示)，即以后不再考虑了。若大于 $\underline{z}$，且不符合整数条件，则重复分支定界。一直到最后得到 z^* 为止，得最优整数解

$$x_j^* \ (j = 1, \ldots, n)$$

分支定界法

分支定界法解题步骤

- 用分支定界法可解纯整数线性规划问题和混合整数线性规划问题。它比枚举法优越。因为它仅在一部分可行解的整数解中寻求最优解，计算量比枚举法小。

分支定界法

- 例 2
  - 求解下述整数线性规划问题 A

$$\max \quad z = x_1 + x_2$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} x_1 + \frac{9}{14}x_2 \le \frac{51}{14} \\ -2x_1 + x_2 \le \frac{1}{3} \\ x_1, x_2 \ge 0 \\ x_1, x_2 \text{整数} \end{cases}$$

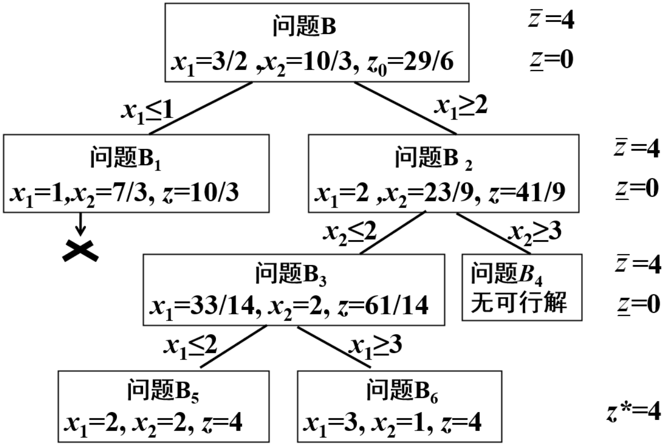
  - 对应的松弛问题 B

$$\max \quad z = x_1 + x_2$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} x_1 + \frac{9}{14}x_2 \le \frac{51}{14} \\ -2x_1 + x_2 \le \frac{1}{3} \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

例 2

- 解题的过程如下


问题B
x1=3/2 ,x2=10/3, z0=29/6
z̄=4
z=0
x1≤1
x1≥2
问题B1
x1=1,x2=7/3, z=10/3
问题B 2
x1=2 ,x2=23/9, z=41/9
z̄=4
z=0
x2≤2
x2≥3
问题B3
x1=33/14, x2=2, z=61/14
问题B4
无可行解
z̄=4
z=0
x1≤2
x1≥3
问题B5
x1=2, x2=2, z=4
问题B6
x1=3, x2=1, z=4
z*=4

课堂练习

- 求解下述整数线性规划问题 A

$$\max \ z = 2x_1 + x_2$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} \frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_2 \leq 1 \\ -x_1 + x_2 \leq 0 \\ \frac{6}{21}x_1 + \frac{2}{21}x_2 \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \text{整数} \end{cases}$$

分支定界法

- 小结
  - 用分支定界法可解纯整数线性规划问题和混合整数线性规划问题
  - 分支定界法是一种隐枚举法或部分枚举法
  - “分支”为整数规划最优解的出现缩减了搜索范围
  - “定界”可以提高搜索的效率
  - 分支定界法解题步骤
- 课后作业: 即上述课堂练习

0-1 变量的概念

- 0-1 变量是一种**逻辑变量**，常用来表示系统处于某个特定状态，或者决策时是否取某个特定方案。例如

$$x = \begin{cases} 1 & \text{若选择决策方案 P} \\ 0 & \text{若不选择决策方案 P} \end{cases}$$

- 若多项要素 $E_1, \ldots, E_n$ 中每项要素均有两种选择 A_j 和 $\overline{A}_j$，则可令

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{若} E_j \text{选择} A_j \\ 0 & \text{若} E_j \text{不选择} \overline{A}_j \end{cases} \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

- 若变量取多个整数值，则可以用一组 0-1 变量来取代该变量。例如，变量 x 取 0 与 9 之间的任意整数，则可令

$$x = 2^0 x_0 + 2^1 x_1 + 2^2 x_2 + 2^3 x_3 \leq 9$$

这时 x 可用 4 个 0-1 变量 x_0, x_1, x_2, x_3 来代替。

例 1 (相互排斥的约束条件问题)

- 工序 B 每周工时的约束条件

$$0.3x_1 + 0.5x_2 \leq 150 \qquad (1)$$

工序 B 的新加工方式，对应的每周工时约束条件

$$0.2x_1 + 0.4x_2 \leq 120 \qquad (2)$$

只能从两种加工方式中选择一种，则式 (1) 和 (2) 就成为两个相互排斥的约束条件。

- 困难之处: 如何将相互排斥的约束条件统一起来？

例 1 (相互排斥的约束条件问题)

- 引入 0-1 变量

$$y_1 = \begin{cases} 0 \text{ 若工序 B 采用原加工方式} \\ 1 \text{ 若工序 B 不采用原加工方式} \end{cases}$$

$$y_2 = \begin{cases} 0 \text{ 若工序 B 采用新加工方式} \\ 1 \text{ 若工序 B 不采用新加工方式} \end{cases}$$

- 相互排斥的约束条件 (1) 和 (2) 就可以通过下式统一起来

$$\begin{cases} 0.3x_1 + 0.5x_2 \leq 150 + My_1 \\ 0.2x_1 + 0.4x_2 \leq 120 + My_2 \\ y_1 + y_2 = 1 \end{cases}$$

其中 M 为充分大的数

例 1 (相互排斥的约束条件问题)

- 一般地，若需要从 p 个约束条件

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \ (i = 1, \dots, p)$$

中恰好选择 q $(q < p)$ 个约束条件

- 引入 p 个 0-1 变量

$$y_i = \begin{cases} 0 & \text{若选择第 } i \text{ 个约束条件} \\ 1 & \text{若不选择第 } i \text{ 个约束条件} \end{cases} \qquad (i = 1, \dots, p)$$

- 通过下式就可以将所有约束条件统一起来

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i + My_i \\ \sum_{i=1}^{p} y_i = p - q \end{cases} \qquad (i = 1, \dots, p)$$

例 2 (固定费用问题)

- 有三种资源被用于生产三种产品，资源量、产品单件可变费用及售价、资源单耗量及组织三种产品生产的固定费用见下表。要求制定一个生产计划，使总收益为最大。

资源	产品 I	产品 II	产品 III	资源量
A	2	4	8	500
B	2	3	4	300
C	1	2	3	100
单件可变费用	4	5	6	
固定费用	100	150	200	
单价	8	10	12	

- 设 x_j 为生产第 j 种产品的产量 $(j=1,2,3)$，引入 0-1 变量

$$y_j = \begin{cases} 1 \text{ 若生产第 } j \text{ 种产品} \\ 0 \text{ 若不生产第 } j \text{ 种产品} \end{cases} \quad (j=1,2,3)$$

例 2 (固定费用问题)

- 整数规划模型为

$$\max\ z = 8x_1 + 10x_2 + 12x_3 - 100y_1 - 150y_2 - 200y_3 - 4x_1 - 5x_2 - 6x_3$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 \le 500 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \le 300 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 100 \\ x_1 \le M_1 y_1 \\ x_2 \le M_2 y_2 \\ x_3 \le M_3 y_3 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0\text{且为整数} \\ y_1, y_2, y_3 = 0\text{或}1 \end{cases}$$

例 3 (工件排序问题)

- 用 4 台机床加工三件产品。各产品的机床加工顺序，以及产品 i 在机床 j 上的加工工时 a_{ij} 列于下表。由于某种原因，产品 2 的加工总时间不得超过 d。**现要求确定个件产品在机床上的加工方案，使在最短的时间内加工完全部产品。**

	机床 1	机床 2	机床 3	机床 4
产品 1	a_{11}	—	a_{13}	a_{14}
产品 2	a_{21}	a_{22}	—	a_{24}
产品 3	—	a_{32}	a_{33}	—

例 3 (工件排序问题)

- 设 x_{ij} 表示产品 i 在机床 j 上开始加工的时间 $i, j = 1, 2, 3$。
- 同一件产品在不同机床上的加工顺序约束，即同一件产品在下一台机床上加工的开始时间不得早于在上一台机床上加工的结束时间。
  - 产品 1: $x_{11} + a_{11} \leq x_{13}$ 及 $x_{13} + a_{13} \leq x_{14}$
  - 产品 2: $x_{21} + a_{21} \leq x_{22}$ 及 $x_{22} + a_{22} \leq x_{24}$
  - 产品 3: $x_{32} + a_{32} \leq x_{33}$

例 3 (工件排序问题)

- 引入 0-1 变量

$$y_j = \begin{cases} 0 \text{ 先加工某件产品} \\ 1 \text{ 先加工另一件产品} \end{cases} \quad (j = 1,2,3,4)$$

- 每一台机床对不同产品的加工顺序约束，即同一台机床，如已开始的产品加工尚未结束，则不能开始另一件产品的加工。
  - 机床 1: $x_{11} + a_{11} \le x_{21} + My_1$ 及 $x_{21} + a_{21} \le x_{11} + M(1 - y_1)$
  - 机床 2: $x_{22} + a_{22} \le x_{32} + My_2$ 及 $x_{32} + a_{32} \le x_{22} + M(1 - y_2)$
  - 机床 3: $x_{13} + a_{13} \le x_{33} + My_3$ 及 $x_{33} + a_{33} \le x_{13} + M(1 - y_3)$
  - 机床 4: $x_{14} + a_{14} \le x_{24} + My_4$ 及 $x_{24} + a_{24} \le x_{14} + M(1 - y_4)$
- 产品 2 的加工总时间约束 $x_{24} + a_{24} - x_{21} \le d$
- 目标函数 $W = \max\{x_{14} + a_{14}, x_{24} + a_{24}, x_{33} + a_{33}\}$

0-1 型整数规划的解法

- 若含有 n 个变量，则可以产生 2^n 个可能的变量组合，采用完全枚举法几乎是不可能的。

$$\max(\min)\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le (\ge, =)\ b_i \ (i = 1, \ldots, m) \\ x_j \ge 0 \ (j = 1, \ldots, n) \\ x_j = 0\text{或}1 \end{cases}$$

- 隐枚举法: 只检查变量取值组合的一部分就能找到问题的最优解。
- 过滤条件: 目标函数值优于计算过的可行解目标函数值。
- 解题关键: 寻找可行解，产生过滤条件。

例 4

- 试用隐枚举法求解下述问题

$$\max \quad z = 3x_1 - 2x_2 + 5x_3$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \le 2 & (1) \\ x_1 + 4x_2 + x_3 \le 4 & (2) \\ x_1 + x_2 \le 3 & (3) \\ 4x_2 + x_3 \le 6 & (4) \\ x_1, x_2, x_3 = 0 \text{或} 1 & (5) \end{cases}$$

例 4

- 求解过程如下

(x_1, x_2, x_3)	z 值	(1)	(2)	(3)	(4)	过滤条件
$(0,0,0)$	0	✓	✓	✓	✓	$z \geq 0$
$(0,0,1)$	5	✓	✓	✓	✓	$z \geq 5$
$(0,1,0)$	-2					
$(0,1,1)$	3					
$(1,0,0)$	3					
$(1,0,1)$	8	✓	✓	✓	✓	$z \geq 8$
$(1,1,0)$	1					
$(1,1,1)$	6					

- 最优解 $(1,0,1)$，最优值 $z = 8$

例 4

- 对于最大化问题，常按目标函数中各变量系数的由大到小排序，这样最优解容易比较早发现。
- 例 4 可以写成

$$
\max \quad z = 5x_3 + 3x_1 - 2x_2
$$

$$
\text{s.t.} \begin{cases} -x_3 + x_1 + 2x_2 \le 2 & (1) \\ x_3 + x_1 + 4x_2 \le 4 & (2) \\ x_1 + x_2 \le 3 & (3) \\ x_3 + 4x_2 \le 6 & (4) \\ x_3, x_1, x_2 = 0\text{或}1 & (5) \end{cases}
$$

例 4

- 求解过程如下

(x_3, x_1, x_2)	z 值	(1)	(2)	(3)	(4)	过滤条件
$(0,0,0)$	0	✓	✓	✓	✓	$z \geq 0$
$(1,0,0)$	5	✓	✓	✓	✓	$z \geq 5$
$(1,1,0)$	8	✓	✓	✓	✓	$z \geq 8$

课堂练习

- 用隐枚举法求解下述 0-1 型整数规划问题

$$
\max \quad z = 2x_1 + x_2 - x_3
$$

$$
\text{s.t.} \quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 \le 2 \\ 4x_2 + x_3 \le 5 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \le 2 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 \le 4 \\ x_1, x_2, x_3 = 0\text{或}1 \end{cases}
$$

0-1 型整数规划

- **小结**
  - 0-1 变量的概念
  - 0-1 变量的实际应用
    - 相互排斥的约束条件问题
    - 固定费用问题
    - 工件排序问题
  - 0-1 型整数规划的解法
    - 隐枚举法
    - 过滤条件
- **课后作业: P146, 习题 5.5(1)**

典型的指派问题

- **指派问题**: 若干项任务需要若干个人完成，如何分配任务会使所需的时间最小或成本最低。
- **标准形式**: n 个人，n 件事，第 i 个人做第 j 件事的费用为 c_{ij}，确定人和事之间一一对应的指派方案，使完成 n 件事的总费用最小。
- 一般称 C 为指派问题的效率矩阵或系数矩阵

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

标准指派问题的数学模型

引入 n^2 个 0-1 变量

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ 指派第 } i \text{ 个人做第 } j \text{ 件事} \\ 0 \text{ 不指派第 } i \text{ 个人做第 } j \text{ 件事} \end{cases} \quad (i, j = 1, \ldots, n)$$

则标准指派问题的数学模型为

$$\min \ z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \ (j = 1, \ldots, n) & (1) \\ \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \ (i = 1, \ldots, n) & (2) \\ x_{ij} = 0 \text{或} 1 \ (i, j = 1, \ldots, n) \end{cases}$$

- (1) 表示每件事必有且只有一个人去做
- (2) 表示每个人必做且只做一件事

例 1

- 某商业公司计划开办 5 家新商店，决定由 5 家建筑公司分别承建。已知建筑公司 $A_i\ (i=1,\dots,5)$ 对新商店 $B_j\ (j=1,\dots,5)$ 的建造费用的报价 (万元) 为 $c_{ij}\ (i,j=1,\dots,5)$，具体如下

建筑公司	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	4	8	7	15	12
A_2	7	9	17	14	10
A_3	6	9	12	8	7
A_4	6	7	14	6	10
A_5	6	9	12	10	6

- 问如仅考虑节省费用，商业公司应当对 5 家建筑公司怎样分配建造任务，才能使总的建造费用最少?

指派问题

例 1

引入 0-1 变量

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ 指派第 } i \text{ 个人做第 } j \text{ 件事} \\ 0 \text{ 不指派第 } i \text{ 个人做第 } j \text{ 件事} \end{cases} \quad (i, j = 1, \ldots, 5)$$

则问题的数学模型为

$$\min \quad z = 4x_{11} + 8x_{12} + \cdots + 10x_{54} + 6x_{55}$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{5} x_{ij} = 1 \ (j = 1, \ldots, 5) \\ \sum_{j=1}^{5} x_{ij} = 1 \ (i = 1, \ldots, 5) \\ x_{ij} = 0\text{或}1 \ (i, j = 1, \ldots, 5) \end{cases}$$

- 例 1
  - 系数矩阵为

$$\mathbf{C} = (c_{ij})_{5\times 5} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 7 & 15 & 12 \\ 7 & 9 & 17 & 14 & 10 \\ 6 & 9 & 12 & 8 & 7 \\ 6 & 7 & 14 & 6 & 10 \\ 6 & 9 & 12 & 10 & 6 \end{bmatrix}$$

  - 其中一个 (可行) 解矩阵为

$$\mathbf{X} = (x_{ij})_{5\times 5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  - 注意: 指派问题有 $n!$ 个可行解，且每行每列只有一个 1

相关性质

- **性质 1:** 若从指派问题的系数矩阵 $(c_{ij})_{n\times n}$ 的某行或某列各元素中分别减一个常数 k, 得到的新矩阵与原矩阵有相同的最优解。

$$\mathbf{C}' = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 & 11 & 8 \\ 0 & 2 & 10 & 7 & 3 \\ 0 & 3 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 8 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

- **性质 2:** 称位于不同行不同列的 0 元素为独立 0 元素，那么 n 个独立 0 元素取值为 1，其余元素取值为 0，是最优解。
- **性质 3:** 系数矩阵 $(c_{ij})_{n\times n}$ 中独立 0 元素的最多个数等于能覆盖所有 0 元素的最少直线数。

指派问题

解题思路

- 利用性质 1，能够将原系数矩阵变换为含有很多 0 元素的新系数矩阵，而最优解保持不变。
- 若能在新系数矩阵 $(c_{ij})'_{n\times n}$ 中找出 n 个独立 0 元素，则令解矩阵 $(x_{ij})_{n\times n}$ 中对应这 n 个独立 0 元素的元素取值为 1，其它元素取值为 0，此时目标函数 $z = C'X = 0$ 为最小值，因此 $(x_{ij})_{n\times n}$ 为含系数矩阵 $(c_{ij})'_{n\times n}$ 的指派问题的最优解，也是原问题的最优解。

匈牙利解法

- 步骤一: 由性质 1，变换系数矩阵使各行各列都出现 0 元素。
  - 先对各行元素分别减去本行中的最小元素;

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 7 & 15 & 12 \\ 7 & 9 & 17 & 14 & 10 \\ 6 & 9 & 12 & 8 & 7 \\ 6 & 7 & 14 & 6 & 10 \\ 6 & 9 & 12 & 10 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{C}' = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 & 11 & 8 \\ 0 & 2 & 10 & 7 & 3 \\ 0 & 3 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 8 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

匈牙利解法（步骤一）

- 由性质 1，变换系数矩阵使各行各列都出现 0 元素
  - 先对各行元素分别减去本行中的最小元素;
  - 再对各列元素分别减去本列中最小元素。

$$
\mathbf{C}' = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 & 11 & 8 \\ 0 & 2 & 10 & 7 & 3 \\ 0 & 3 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 8 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & 4 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\Downarrow
$$

$$
\mathbf{C}'' = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 11 & 8 \\ 0 & 1 & 7 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}
$$

  - 系数矩阵中每行及每列至少有一个零元素，同时不出现负元素。

指派问题

匈牙利解法（步骤二）

确定独立 0 元素

- 从只有一个零元素的行（或列）开始，给这个 0 元素加圈，记作 $\circledcirc$，然后划去 $\circledcirc$ 所在列（或行）的其它 0 元素，记作 ϕ，直到所有 0 元素都被圈出和划掉为止;
- 若仍出现同行 (列) 至少有两个 0 元素的，用试探法，从含有 0 元素最少的行 (列) 开始，比较该行各 0 元素所在列中 0 元素的数目，选择 0 元素少的那列的这个 0 元素加圈，然后划掉同行同列的其它 0 元素，可反复进行，直到所有 0 元素都被圈出和划掉为止;
- 画 $\circledcirc$ 元素数目即为独立 0 元素数。若为 n 个，由性质 2 知得到最优解, 若少于 n 个，则转入下一步。

$$\mathbf{C}'' = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 11 & 8 \\ 0 & 1 & 7 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

匈牙利解法（步骤二）

- 确定独立 0 元素

$$\mathbf{C}'' = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 11 & 8 \\ 0 & 1 & 7 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{C}'' = \begin{bmatrix} \phi & 3 & \circledcirc & 11 & 8 \\ \circledcirc & 1 & 7 & 7 & 3 \\ \phi & 2 & 3 & 2 & 1 \\ \phi & \circledcirc & 5 & \phi & 4 \\ \phi & 2 & 3 & 4 & \circledcirc \end{bmatrix}$$

匈牙利解法（步骤三）

利用性质 3 确定能覆盖所有 0 元素的最少直线数目的直线集合

- 对没有 $\circledcirc$ 的行打 $\checkmark$;
- 对已打 $\checkmark$ 的行中，对 ϕ 所在列打 $\checkmark$;
- 再对打有 $\checkmark$ 的列中含 $\circledcirc$ 元素的行打 $\checkmark$;
- 重复上述两步直到找不出新的打 $\checkmark$ 的行、列为止;
- 对没有打 $\checkmark$ 的行画一横线，有打 $\checkmark$ 的列画一纵线，就得到覆盖所有 0 元素的最少直线数。

$$\mathbf{C}'' = \begin{bmatrix} \phi & 3 & \circledcirc & 11 & 8 \\ \circledcirc & 1 & 7 & 7 & 3 \\ \phi & 2 & 3 & 2 & 1 \\ \phi & \circledcirc & 5 & \phi & 4 \\ \phi & 2 & 3 & 4 & \circledcirc \end{bmatrix}$$

匈牙利解法（步骤三）

- 确定能覆盖所有 0 元素的最少直线数目的直线集合

$$
\mathbf{C}'' = \begin{array}{cc}
\begin{bmatrix}
 & \vdots & & & & & & & & & \\
\cdots & \phi & \cdots & 3 & \cdots & \circledcirc & \cdots & 11 & \cdots & 8 & \cdots \\
 & \vdots & & & & & & & & & \\
 & \circledcirc & & 1 & & 7 & & 7 & & 3 & \\
 & \vdots & & & & & & & & & \\
 & \phi & & 2 & & 3 & & 2 & & 1 & \\
 & \vdots & & & & & & & & & \\
\cdots & \phi & \cdots & \circledcirc & \cdots & 5 & \cdots & \phi & \cdots & 4 & \cdots \\
 & \vdots & & & & & & & & & \\
\cdots & \phi & \cdots & 2 & \cdots & 3 & \cdots & 4 & \cdots & \circledcirc & \cdots \\
 & \vdots & & & & & & & & &
\end{bmatrix}
&
\begin{array}{c}
\\ \\ \\ \checkmark \\ \\ \checkmark \\ \\ \\ \\ \\ \\
\end{array}
\end{array}
$$

- 匈牙利解法（步骤四）
  - 继续变换系数矩阵
    - 在未被直线覆盖的元素中找出一个最小元素;
    - 打 ✓ 行中各元素都减去最小元素，出现新的 0 元素;
    - 打 ✓ 列中各元素都加上最小元素。返回步骤二。

$$\mathbf{C}'' = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 11 & 8 \\ 0 & 1 & 7 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

指派问题

- 匈牙利解法（步骤四）
  - 继续变换系数矩阵

$$\mathbf{C}'' \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 11 & 8 \\ -1 & 0 & 6 & 6 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{C}''' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 11 & 8 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

■ 匈牙利解法（步骤四）

- 返回步骤二

$$\mathbf{C}''' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 11 & 8 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{C}''' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & \circledcirc & 11 & 8 \\ \phi & \circledcirc & 6 & 6 & 2 \\ \circledcirc & 1 & 2 & 1 & \phi \\ 1 & \phi & 5 & \circledcirc & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \circledcirc \end{bmatrix}$$

匈牙利解法（步骤四）

- $\mathbf{C}''$ 中已有 5 个独立零元素，故最优指派方案为

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- A_1 承建 B_3，A_2 承建 B_2，A_3 承建 B_1，A_4 承建 B_4，A_5 承建 B_5
- 总的建造费用为 $7+9+6+6+6+6=34$

指派问题

课堂练习

- 有一份中文说明书，需译成英、日、德、俄四种文字，分别记做 E、J、G、R。现有甲、乙、丙、丁 4 人，他们将中文说明书翻译成不同语种的说明书所需的时间如下

人员	E	J	G	R
甲	2	15	13	4
乙	10	4	14	15
丙	9	14	16	13
丁	7	8	11	9

- 问应指派何人去完成何种工作，使所需总时间最少？

课堂练习

- 对指派问题的系数矩阵进行转化

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix} \phi & 13 & 7 & \circledcirc \\ 6 & \circledcirc & 6 & 9 \\ \circledcirc & 5 & 3 & 2 \\ \phi & 1 & \circledcirc & \phi \end{bmatrix}$$

- 最优值为 $\min\ z = c_{31} + c_{22} + c_{43} + c_{14} = 4 + 4 + 9 + 11 = 28$

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix} 2 & 15 & 13 & 4 \\ 10 & 4 & 14 & 15 \\ 9 & 14 & 16 & 13 \\ 7 & 8 & 11 & 9 \end{bmatrix}$$

非标准形式的指派问题

- **最大化指派问题:** 设最大化指派问题系数矩阵 $\mathbf{C}=(c_{ij})_{n\times n}$，其中最大元素为 m。令矩阵 $\mathbf{B}=(b_{ij})_{n\times n}=(m-c_{ij})_{n\times n}$，则以 $\mathbf{B}$ 为系数矩阵的最小化指派问题和以 $\mathbf{C}$ 为系数矩阵的原最大化指派问题有相同最优解。
- **人数和事数不等的指派问题:** 若人少事多, 则添上一些虚拟的“人”。这些虚拟的“人”做各事的费用系数可取 0, 理解为这些费用实际上不会发生。若人多事少, 则添上一些虚拟的“事”。这些虚拟的“事”被各人做的费用系数同样也取 0。
- **一个人可做几件事的指派问题:** 若某个人可做几件事, 则可将该人化作相同的几个“人”来接受指派。这几个“人”做同一件事的费用系数当然都一样。
- **某事一定不能由某人做的指派问题:** 若某事一定不能由某个人做, 则可将相应的费用系数取作足够大的数 M。

非标准形式的指派问题

- 为了保证工程质量，舍弃建筑公司 A_4 和 A_5，而让技术力量较强的建筑公司 A_1， A_2 和 A_3 来承建。根据实际情况，可以允许每家建筑公司承建一家或两家商店。**求使总费用最少的指派方案。**
- 反映投资费系数矩阵为

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 7 & 15 & 12 \\ 7 & 9 & 17 & 14 & 10 \\ 6 & 9 & 12 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

- 由于每家建筑公司最多承建两家商店，因此把每家建筑公司化作相同的两家建筑公司 $(A_i$ 和 A_i'， $i = 1, 2, 3)$。系数矩阵变为

$$\mathbf{M}' = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 7 & 15 & 12 \\ 4 & 8 & 7 & 15 & 12 \\ 7 & 9 & 17 & 14 & 10 \\ 7 & 9 & 17 & 14 & 10 \\ 6 & 9 & 12 & 8 & 7 \\ 6 & 9 & 12 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

指派问题

非标准形式的指派问题

- 为了使“人”和“事”的数目相同，引入一件虚事使之成为标准指派问题，系数矩阵变为

$$\mathbf{M}'' = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 7 & 15 & 12 & 0 \\ 4 & 8 & 7 & 15 & 12 & 0 \\ 7 & 9 & 17 & 14 & 10 & 0 \\ 7 & 9 & 17 & 14 & 10 & 0 \\ 6 & 9 & 12 & 8 & 7 & 0 \\ 6 & 9 & 12 & 8 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

- 用匈牙利解法以 $\mathbf{M}''$ 为系数矩阵的最小化指派问题，得最优指派方案为由 A_1 承建 B_1 和 B_3，A_2 承建 B_2，A_3 承建 B_4 和 B_5
- 总的建造费用为 $4+7+9+8+7=35$

指派问题

- 小结
  - 指派问题的标准形式
  - 匈牙利解法
  - 非标准形式的指派问题
    - 最大化指派问题
    - 人数和事数不等的指派问题
    - 一个人可做几件事的指派问题
    - 某事一定不能由某人做的指派问题
- 课后作业: P147, 习题 5.8

Q&A

Thank you!

感谢您的聆听和反馈