第三章 多维随机变量及其分布

修贤超

https://xianchaoxiu.github.io

目录

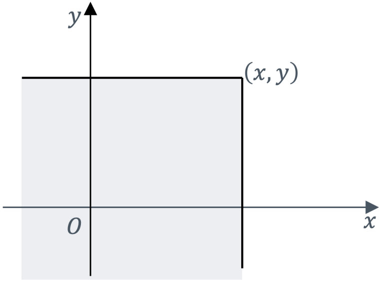
二维随机变量

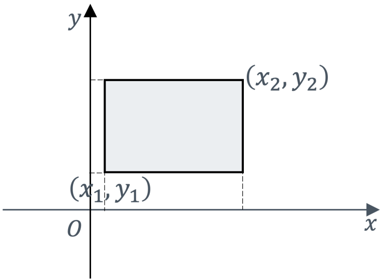
- 定义: 随机试验 E 的样本空间为 $S = \{e\}$. 设 $X = X(e)$ 和 $Y = Y(e)$ 是定义在样本空间 S 上的随机变量, 则称向量 (X, Y) 为 二维随机变量
- 例如
  - $S = \{$社区中的全部家庭$\}$
    $X(e)$ 为每个家庭中男孩数量, $Y(e)$ 为每个家庭中女孩数量
  - $S = \{$同时投掷的两个骰子点数$\}$
    $X(e)$ 为骰子 1 点数, $Y(e)$ 为骰子 2 点数
  - $S = \{$炮弹弹着点$\}$
    $X(e)$ 为弹着点横坐标, $Y(e)$ 为弹着点纵坐标

- 定义: 设 (X,Y) 是二维随机变量, 对于任意实数 x,y, 二元函数

$$F(x,y)=P\{(X\le x)\cap(Y\le y)\}=P\{X\le x,Y\le y\}$$

称为二维随机变量 (X,Y) 的分布函数, 或称为随机变量 X 和 Y 的联合分布函数 (Joint cumulative probability distribution function)





基本性质

- $F(x,y)$ 是变量 x 和 y 的不减函数
  - 对于任意固定的 y, 如果 $x_2 > x_1$, 则 $F(x_2,y) \geq F(x_1,y)$
  - 对于任意固定的 x, 如果 $y_2 > y_1$, 则 $F(x,y_2) \geq F(x,y_1)$
- $0 \leq F(x,y) \leq 1$ 且
  - 对于任意固定的 y, 有 $F(-\infty,y) = 0$
  - 对于任意固定的 x, 有 $F(x,-\infty) = 0$
  - $F(-\infty,-\infty) = 0$, $F(\infty,\infty) = 1$
- $F(x+0,y) = F(x,y)$, $F(x,y+0) = F(x,y)$, 即 $F(x,y)$ 是 x 和 y 右连续
- 对于任意 (x_1,y_1) 和 (x_2,y_2), 满足 $x_1 < x_2$ 和 $y_1 < y_2$, 有

$$F(x_2,y_2) + F(x_1,y_1) - F(x_1,y_2) - F(x_2,y_1) \geq 0$$

- 定义: 如果二维随机变量 (X,Y) 的全部可能取值是有限对或可列无限多对, 则称 (X,Y) 为离散型的随机变量
- 定义: 设 (X,Y) 的可能取值为 (x_i, y_j), $i,j=1,2,\cdots$. 记

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij},\ \ i,j=1,2,\cdots$$

为 (X,Y) 的分布律, 或 X 和 Y 的联合分布律, 满足

$$p_{ij}\geq 0,\ \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=1$$

例 1

- 设随机变量 X 在 1, 2, 3, 4 四个数中随机取值, 随机变量 Y 在 $1 \sim X$ 中随机取值. 试求 (X, Y) 的分布律

  解答　由乘法公式容易求得, 对于 $i = 1, 2, 3, 4,\ j \leq i$ 有

$$P\{X = i, Y = j\} = P\{Y = j | X = i\} P\{X = i\} = \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{4}$$

于是 (X, Y) 的分布律为

	$X = 1$	$X = 2$	$X = 3$	$X = 4$
$Y = 1$	$1/4$	$1/8$	$1/12$	$1/16$
$Y = 2$	0	$1/8$	$1/12$	$1/16$
$Y = 3$	0	0	$1/12$	$1/16$
$Y = 4$	0	0	0	$1/16$

- 定义: 对于二维随机变量 (X, Y) 的分布函数 $F(X, Y)$, 如果存在非负可积函数 $f(x, y)$ 对于任意 x, y 有

$$F(X, Y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u, v)dudv$$

  则称 (X, Y) 为连续型的随机变量

- 函数 $f(x, y)$ 称为二维连续型随机变量 (X, Y) 的概率密度, 或称为随机变量 X 和 Y 的联合概率密度
- 与离散型的随机变量有什么区别

基本性质

- $f(x,y) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = F(\infty,\infty) = 1$
- 设 G 是 xOy 平面上的区域，则 (X,Y) 落在 G 内的概率是

$$P\{(X,Y) \in G\} = \iint\limits_{G} f(x,y)dxdy$$

- 若 $f(x,y)$ 在 (x,y) 连续, 则有

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y)$$

例 2

- 设随机变量 (X, Y) 具有概率密度

$$f(x,y) = \begin{cases} 2e^{-(2x+y)}, & x > 0,\ y > 0 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

(1) 求分布函数 $F(x, y)$

解答 (1) 根据定义有

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy$$

$$= \begin{cases} 2\int_0^x e^{-2x}\int_0^y e^{-y}dydx, & x > 0,\ y > 0 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (1-e^{-2x})(1-e^{-y}), & x > 0,\ y > 0 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

例 2

- 设随机变量 (X, Y) 具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(2x+y)}, & x>0,\ y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(2) 求概率 $P\{Y \le X\}$

解答 (2) 根据定义有

$$\begin{aligned}P\{Y \le X\} &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{x} f(x,y)dydx \\ &= 2\int_{0}^{\infty} e^{-2x}\int_{0}^{x} e^{-y}dydx \\ &= 2\int_{0}^{\infty}(1-e^{-x})e^{-2x}dx = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

n 维随机变量

- 定义: 随机试验 E 的样本空间为 $S=\{e\}$. 设

$$X_1=X_1(e),\ X_2=X_2(e),\ \cdots,\ X_n=X_n(e)$$

是定义在样本空间 S 上的随机变量, 则称向量 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为 n 维随机变量或 n 维随机向量

- 对于任意实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$, n 元函数

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=P\{X_1\le x_1,X_2\le x_2,\cdots,X_n\le x_n\}$$

称为 n 维随机变量 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的分布函数, 或称为随机变量 $X_1,X_2,\cdots$ 和 X_n 的联合分布函数

- $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的性质与 $F(x,y)$ 相似

目录

边缘分布

- **定义:** 二维随机变量 (X,Y) 具有分布函数 $F(x,y)$, 则

$$F_X(x) = P\{X \le x\} = P\{X \le x, Y < \infty\} = F(x,\infty)$$

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{X < \infty, Y \le y\} = F(\infty,y)$$

分别称为二维随机变量 (X,Y) 的关于 X 和 Y 的**边缘分布函数**

- **定义:** 离散型的随机变量 X 和 Y 的联合分布函数为

$$F(x,y) = \sum_{x_i \le x} \sum_{y_j \le y} p_{ij}$$

关于 X 和 Y 的边缘分布律为

$$p_{i\cdot} = P\{X \le x_i\} = \sum_{y_j=1}^{\infty} p_{ij}, \ \ i = 1,2,\cdots$$

$$p_{\cdot j} = P\{Y \le y_j\} = \sum_{x_i=1}^{\infty} p_{ij}, \ \ j = 1,2,\cdots$$

例 1

- 一整数 N 等可能地在 $1, 2, \cdots, 10$ 十个值中取一个值. 设 $D = D(N)$ 是能整除 N 的正整数的个数, $F = F(N)$ 是能整除 N 的素数的个数. 试写出 D 和 F 的联合分布律和边缘分布律

解答

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	1	2	2	3	2	4	2	4	3	4
F	0	1	1	1	1	2	1	1	1	2

	$D=1$	$D=2$	$D=3$	$D=4$	$P\{F=j\}$
$F=0$	$1/10$	0	0	0	$1/10$
$F=1$	0	$4/10$	$2/10$	$1/10$	$7/10$
$F=2$	0	0	0	$2/10$	$2/10$
$P\{D=i\}$	$1/10$	$4/10$	$2/10$	$3/10$	1

课堂练习 1

- 某社区 15% 家庭无孩子, 20% 家庭有 1 个孩子, 35% 家庭有 2 个孩子, 30% 家庭有 3 个孩子. 随机选取 1 个家庭, 写出男孩数量 B 与女孩数量 G 的边缘分布律

课堂练习 1

- 某社区 15% 家庭无孩子, 20% 家庭有 1 个孩子, 35% 家庭有 2 个孩子, 30% 家庭有 3 个孩子. 随机选取 1 个家庭, 写出男孩数量 B 与女孩数量 G 的边缘分布律

解答 已知 $B+G$ 取值为 $1,2,3$，容易得到

	$G=0$	$G=1$	$G=2$	$G=3$	$P\{B=j\}$
$B=0$	0.15	0.1	0.0875	0.0375	0.3750
$B=1$	0.1	0.175	0.1125	0	0.3875
$B=2$	0.0875	0.1125	0	0	0.2000
$B=3$	0.0375	0	0	0	0.0375
$P\{G=i\}$	0.3750	0.3875	0.2000	0.0375	1

边缘分布

- 定义: 二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y)$, 则 (X, Y) 关于 X 和 Y 的边缘分布函数分别为

$$F_X(x) = P\{X \leq x\} = P\{X \leq x, Y < \infty\} = F(x, \infty) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dydx$$

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{X < \infty, Y \leq y\} = F(\infty, y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dxdy$$

- 定义: 连续型的随机变量 X 和 Y 的边缘概率密度为

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx$$

例 2

- **设随机变量 X 和 Y 具有联合概率密度**

$$f(x,y)=\begin{cases}6, & x^2\le y\le x\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求边缘概率密度 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$

解答

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{x^2}^{x}6dy=6(x-x^2), & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

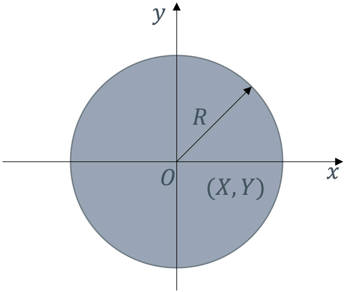
$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{y}^{\sqrt{y}}6dx=6(\sqrt{y}-y), & 0\le y\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

课堂练习 2

- 设一个圆的半径为 R, 圆心在 O, 其上点为均匀分布, 点的坐标为随机变量 (X, Y), 其联合概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} c, & x^2+y^2 \le R^2 \\ 0, & x^2+y^2 > R^2 \end{cases}$$

(1) 确定 c, (2) 求边缘概率密度 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$



- 设一个圆的半径为 R, 圆心在 O, 其上点为均匀分布, 点的坐标为随机变量 (X, Y), 其联合概率密度为

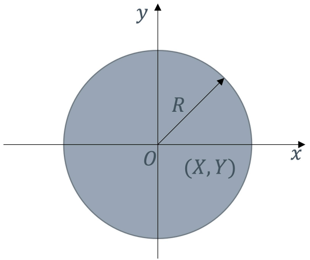
$$f(x, y) = \begin{cases} c, & x^2 + y^2 \leq R^2 \\ 0, & x^2 + y^2 > R^2 \end{cases}$$

(1) 确定 c, (2) 求边缘概率密度 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$

解答 (1) 确定 c

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = \pi R^2 c = 1$$

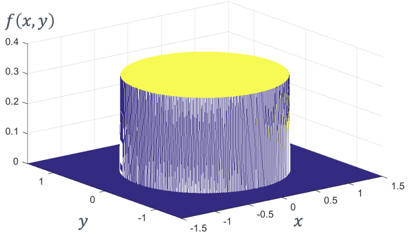
$$\Longrightarrow c = \frac{1}{\pi R^2}$$

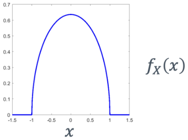


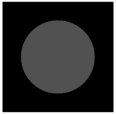
解答 **求边缘概率密度** $f_X(x)$ **和** $f_Y(y)$

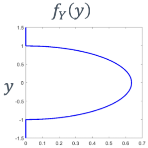
$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{1}{\pi R^2} = \frac{2\sqrt{R^2-x^2}}{\pi R^2}, \quad x^2 \le R^2$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{R^2-x^2}}{\pi R^2}, & x^2 \le R^2 \\ 0, & x^2 > R^2 \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{R^2-y^2}}{\pi R^2}, & y^2 \le R^2 \\ 0, & y^2 > R^2 \end{cases}$$









例 3

- 设二维随机变量 X 和 Y 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

求边缘概率密度 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$

解答　由于

$$\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}=\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-\rho^2\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}$$

于是

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2}dy \end{aligned}$$

例 3

解答 令

$$t = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} - \rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)$$

则有

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$$

同理

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

- 称 (X, Y) 服从 二维正态分布
- 二维正态分布的两个边缘分布都是一维正态分布，且与 ρ 无关
- 一般来说，由边缘分布不能确定随机变量的联合分布

目录

条件分布

- **定义:** 二维离散型随机变量 (X, Y), 若对于固定的 j 有 $P\{Y = y_j\} > 0$, 则称

$$P\{X = x_i | Y = y_j\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{Y = y_j\}} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}, \quad i = 1, 2, \cdots$$

为在 $Y = y_j$ 条件下随机变量 X 的条件分布律

- 同理, 若对于固定的 i 有 $P\{X = X_i\} > 0$, 则称

$$P\{Y = y_j | X = x_i\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{X = x_i\}} = \frac{p_{ij}}{p_{i \cdot}}, \quad j = 1, 2, \cdots$$

为在 $X = x_i$ 条件下随机变量 Y 的条件分布律

例 1

- 机器人完成两道工序——紧固 3 只螺栓, 焊接 2 处焊点, 随机变量 X, Y 分别为其完成结果不良的数量, (X, Y) 的联合分布律如下, 求 $P\{Y=j|X=1\}$

	$X=0$	$X=1$	$X=2$	$X=3$	$P\{Y=j\}$
$Y=0$	0.840	0.030	0.020	0.010	0.900
$Y=1$	0.060	0.010	0.008	0.002	0.080
$Y=2$	0.010	0.005	0.004	0.001	0.020
$P\{X=i\}$	0.910	0.045	0.032	0.013	1

解答 由 $P\{Y=j|X=1\} = \frac{P\{X=1,Y=j\}}{P\{X=1\}}$, 计算得

$Y=j$	0	1	2
$P\{Y=j\|X=1\}$	6/9	2/9	1/9

课堂练习 1

- 机器人完成两道工序——紧固 3 只螺栓, 焊接 2 处焊点, 随机变量 X, Y 分别为其完成结果不良的数量, (X, Y) 的联合分布律如下, 求 $P\{X=i|Y=0\}$

	$X=0$	$X=1$	$X=2$	$X=3$	$P\{Y=j\}$
$Y=0$	0.840	0.030	0.020	0.010	0.900
$Y=1$	0.060	0.010	0.008	0.002	0.080
$Y=2$	0.010	0.005	0.004	0.001	0.020
$P\{X=i\}$	0.910	0.045	0.032	0.013	1

例 2

- 已知射击一次命中概率是 $p\ (0<p<1)$, 射击直至击中目标两次为止. X 表示第一次命中时的射击次数, Y 表示第二次命中时的射击次数. 计算 X 和 Y 的联合分布律和条件分布律

  解答　X 和 Y 的联合分布律为

$$P\{X=m,Y=n\}=p^2(1-p)^{n-2},\ \ n=2,3,\cdots,m=1,2,\cdots$$

  又

$$\begin{aligned}P\{X=m\}&=\sum_{n=m+1}^{\infty}P\{X=m,Y=n\}\\&=\sum_{n=m+1}^{\infty}p^2(1-p)^{n-2}=(1-p)^{m-1}p\end{aligned}$$

例 2

解答 同理有

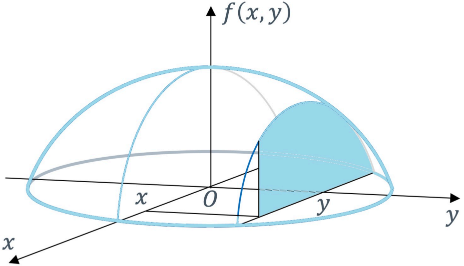
$$P\{Y=n\}=\sum_{m=1}^{n-1}P\{X=m,Y=n\}$$
$$=\sum_{m=1}^{n-1}p^2(1-p)^{n-2}=(n-1)p^2(1-p)^{n-2}$$

于是

$$P\{Y=n|X=m\}=\frac{P\{X=m,Y=n\}}{P\{X=m\}}=\frac{p^2(1-p)^{n-2}}{(1-p)^{m-1}p}=p(1-p)^{n-m-1}$$
$$P\{X=m|Y=n\}=\frac{P\{X=m,Y=n\}}{P\{Y=n\}}=\frac{p^2(1-p)^{n-2}}{(n-1)p^2(1-p)^{n-2}}=\frac{1}{n-1}$$

- 对于二维连续型随机变量 (X, Y), 有

$$P\{X \le x | Y = y\} = \frac{P\{X \le x, Y = y\}}{P\{Y = y\}}$$
$$= \frac{\varepsilon \int_{-\infty}^{x} f(x,y)dx}{\varepsilon f_Y(y)} = \frac{\int_{-\infty}^{x} f(x,y)dx}{f_Y(y)}$$



条件分布

- 定义: 二维连续型随机变量 (X,Y) 有概率密度 $f(x,y)$, 及关于 Y 的边缘概率密度 $f_Y(y)$, 称

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

为在 $Y=y$ 条件下，X 的条件概率密度, 称

$$F_{X|Y}(x|y)=P\{X\leq x|Y=y\}=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}dx$$

为在 $Y=y$ 条件下，X 的条件分布函数

- 同理有

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

$$F_{Y|X}(y|x)=P\{Y\leq y|X=x\}=\int_{-\infty}^{y}\frac{f(y,x)}{f_X(x)}dy$$

例 4

- 设数 X 在区间 $(0,1)$ 等可能随机取值, 当观察到 $X=x$, $(0<x<1)$ 时, Y 在区间 $(x,1)$ 等可能随机取值, 求 $f_Y(y)$

  解答 根据题意知 X 具有概率密度

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

  对于任意给定 $x\in(0,1)$, 在 $X=x$ 的条件下 Y 的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\frac{1}{1-x}, & x<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

例 4

解答 于是 X 和 Y 的联合概率密度为

$$f(x,y) = f_{Y|X}(y|x) f_X(x)$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & 0 < x < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

得到关于 Y 的边缘概率密度为

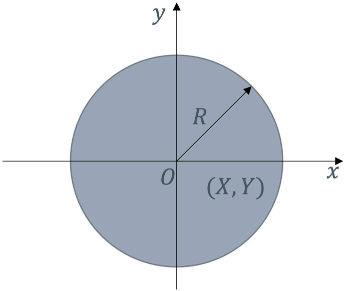
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx$$
$$= \begin{cases} \int_0^y \frac{1}{1-x} dx = \ln(1-y), & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

课堂练习 2

- 设一个圆的半径为 R, 圆心在 O, 其上点为均匀分布, 点的坐标为随机变量 (X,Y), 其联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} c, & x^2+y^2\le R^2 \\ 0, & x^2+y^2>R^2 \end{cases}$$

(3) 求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$ 和 $f_{Y|X}(y|x)$



课堂练习 2

- 设一个圆的半径为 R, 圆心在 O, 其上点为均匀分布, 点的坐标为随机变量 (X,Y), 其联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} c, & x^2+y^2\le R^2 \\ 0, & x^2+y^2>R^2 \end{cases}$$

(3) 求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$ 和 $f_{Y|X}(y|x)$

解答 (3) 根据 (1) 和 (2) 知

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{\pi R^2}, & x^2+y^2\le R^2 \\ 0, & x^2+y^2>R^2 \end{cases}$$

$$f_X(x)=\begin{cases} \frac{2\sqrt{R^2-x^2}}{\pi R^2}, & x^2\le R^2 \\ 0, & x^2>R^2 \end{cases} \qquad f_Y(y)=\begin{cases} \frac{2\sqrt{R^2-y^2}}{\pi R^2}, & y^2\le R^2 \\ 0, & y^2>R^2 \end{cases}$$

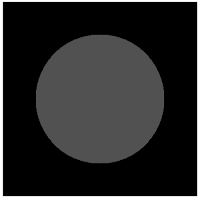
课堂练习 2

解答 于是

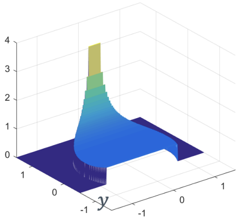
$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{R^2-y^2}}, & x^2 \le R^2 - y^2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{R^2-x^2}}, & y^2 \le R^2 - x^2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

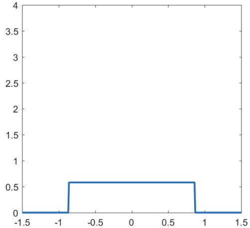
$f(x,y)$



$f_{X|Y}(x|y)$



$f_{X|Y}(x|y)$



目录

相互独立的随机变量

- 定义: 如果对任意两个实数集 A 和 B, 满足

$$P\{X \in A, Y \in B\} = P\{X \in A\}P\{Y \in B\}$$

  则称 A 和 B 是相互独立的

- 如果 X 和 Y 是相互独立的, 则

$$P\{X \leq x, Y \leq y\} = P\{X \leq x\}P\{Y \leq y\}$$

  - 当 X 和 Y 是离散随机变量时, 有

$$p_{ij} = p_{i\cdot}p_{\cdot j}$$

  - 当 X 和 Y 是连续随机变量时, 有

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$$

例 1

- 一负责人到达办公室的时间均匀分布在 $8\sim12$ 时, 他的秘书到达办公室的时间均匀分布在 $7\sim9$ 时, 设他们两人到达的时间相互独立, 求他们到达办公室的时间相差不超过 5 分钟的概率

解答　设 X 和 Y 分别是两人到达办公室的时间, 由假设知概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & 8<x<12\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 7<y<9\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

因为 X 和 Y 相互独立, 故 (X,Y) 的概率密度为

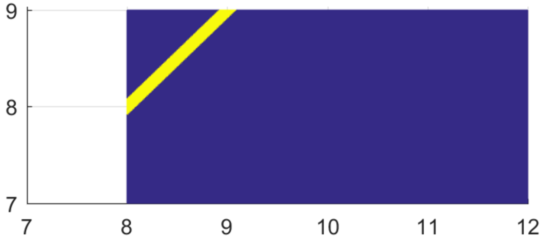
$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{8}, & 8<x<12, 7<y<9\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

例 1

解答 所求的概率为

$$P\left\{|X-Y|\le\frac{1}{12}\right\}=\iint\limits_G f(x,y)dxdy=\frac{1}{8}\times(G\text{的面积})$$

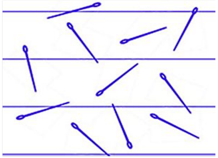
$$=\frac{1}{8}\times\left(\frac{1}{2}\left(\frac{13}{12}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{11}{12}\right)^2\right)=\frac{1}{8}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{48}$$

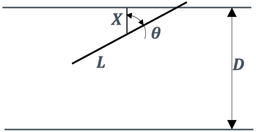


- 18 世纪, Buffon 提出以下问题: 设我们有一个以平行且等距木纹铺成的地板, 随意抛一支长度比木纹之间距离小的针, 求针和其中一条木纹相交的概率

解答 设线间距离 D, 针长 L, 针的角度 $\theta \sim U(0, \pi/2)$, 针中心至线的距离 $X \sim U(0, D/2)$, 于是

$$
\begin{aligned}
P\left\{X < \frac{L}{2}cos\theta\right\} &= \iint\limits_{x<\frac{L}{2}cos\theta} f(x,y)dxdy \\
&= \iint\limits_{x<\frac{L}{2}cos\theta} f_X(x)f_\theta(y)dxdy \\
&= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\frac{L}{2}cos\theta} \frac{1}{\pi/2}\frac{1}{D/2}dxdy \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{2Lcosy}{\pi D}dxdy = \frac{2L}{\pi D}
\end{aligned}
$$





蒙特卡洛方法

- 由 20 世纪 40 年代美国在第二次世界大战中研制原子弹的“曼哈顿计划”计划的成员乌拉姆和冯·诺伊曼首先提出, 以驰名世界的赌城—摩纳哥的 Monte Carlo 来命名这种方法, 为它蒙上了一层神秘色彩. 1777 年，法国数学家布丰提出用投针实验的方法求圆周率 π, 这被认为是蒙特卡罗方法的起源
- 针对 Buffon 问题, 取 $L = D/2$, 概率为 $1/\pi$

试验者	时间	投掷次数	相交次数	圆周率的估计值
Wolf	1850 年	5000	2532	3.1596
Smith	1855 年	3204	1218.5	3.1554
C.De Morgan	1860 年	600	382.5	3.137
Fox	1884 年	1030	489	3.1595
Lazzerini	1901 年	3408	1808	3.1415929

n 维随机变量

- n 维随机变量 $(X_1, \cdots, X_n)$ 的**分布函数**

$$F(x_1, \cdots, x_n) = P\{X_1 \le x_1, \cdots, X_n \le x_n\}$$

- **概率密度函数**

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_n} \cdots \int_{-\infty}^{1} f(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

- **边缘分布函数**

$$F_{X_k}(x_k) = F(\infty, \cdots, \infty, x_k, \infty, \cdots, \infty)$$

$$F_{X_k, X_l}(x_k, x_l) = F(\infty, \cdots, \infty, x_k, \infty, \cdots, \infty, x_l, \infty, \cdots, \infty)$$

- **边缘概率密度**

$$f_{X_k}(x_k) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_{k-1} dx_{k+1} \cdots dx_n$$

$$f_{X_k, X_l}(x_k, x_l) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_{k-1} dx_{k+1} \cdots dx_{l-1} dx_{l+1} \cdots dx_n$$

- 定义: 若对于所有的 $x_1, \cdots, x_n$ 有
$$F(x_1, \cdots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdots F_{X_n}(x_n)$$
则称 $(X_1, \cdots, X_n)$ 相互独立

- 定义: 若对于所有的 $x_1, \cdots, x_n$ 和 $y_1, \cdots, y_n$ 有
$$F(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n) = F(x_1, \cdots, x_n) F(y_1, \cdots, y_n)$$
则称 $(X_1, \cdots, X_n)$ 和 $(Y_1, \cdots, Y_n)$ 相互独立

- 定理: 设 $(X_1, \cdots, X_n)$ 和 $(Y_1, \cdots, Y_n)$ 相互独立, 则 X_i $(i = 1, \cdots, m)$ 和 Y_i $(i = 1, \cdots, n)$ 相互独立. 又若 h 和 g 是连续函数, 则 $h(X_1, \cdots, X_m)$ 和 $g(Y_1, \cdots, Y_n)$ 相互独立

目录

$Z = X + Y$ 的分布

- 设 X 和 Y 是二维连续型随机变量, 具有概率密度 $f(x, y)$, 则 $Z = X + Y$ 仍为连续型随机变量, 其概率密度分别为

$$f_Z(z) = f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z - y, y)dy$$

$$f_Z(z) = f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z - x)dx$$

- 若 X 和 Y 相互独立, 设 (X, Y) 关于 X 和 Y 的边缘概率密度分别为 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$, 则

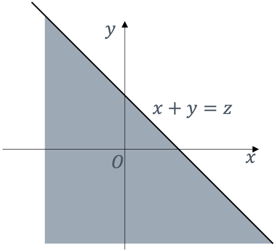
$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z - y)f_Y(y)dy$$

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z - x)dx$$

这两个公式称为 f_X 和 f_Y 的卷积公式, 记为 $f_X * f_Y$

- 讨论 $Z = X + Y$ 的分布函数 $F_Z(z)$

$$
\begin{aligned}
F_Z(z) &= P\{Z \le z\} = P\{X + Y \le z\} \\
&= P\{X \le z - Y\} = F_X(z - Y) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{z-y} f(x, y) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{z-y} f(x, y) d(x + y) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{z} f(u - y, y) du \\
&= \int_{-\infty}^{z} du \int_{-\infty}^{\infty} f(u - y, y) dy
\end{aligned}
$$



例 1

- 设 X 和 Y 是两个独立的随机变量, 且 $X \sim N(0,1)$, $Y \sim N(0,1)$, 求 $Z = X + Y$ 的概率密度

  解答　由标准正态分布知

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot e^{-\frac{(z-x)^2}{2}} dx = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\frac{z}{2})^2} dx$$

令 $t = x - \frac{z}{2}$, 得

$$f_Z(z) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dx = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} \sqrt{\pi} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{4}}$$

则 Z 服从 $N(0,2)$ 分布

推论

- 设 X 和 Y 是两个独立的随机变量, 且 $X \sim N(0,1)$, $Y \sim N(0,1)$, 则 $Z = X + Y$ 满足
$$Z \sim N(0,2)$$
- 设 X 和 Y 是两个独立的随机变量, 且 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 则 $Z = X + Y$ 满足
$$Z \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$
- 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是 n 个独立的随机变量, 且 $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, 则 $Z = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ 满足
$$Z \sim N(\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_n^2)$$
- 有限个相互独立的正态随机变量的线性组合仍然服从正态分布

例 2

- 在一简单电路中，两个串联电阻 R_1 和 R_2 相互独立，概率密度均为

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{10-x}{50}, & 0 \le x \le 10 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求 $R = R_1 + R_2$ 的概率密度

解答　R 的概率密度为

$$\begin{aligned} f_R(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) f(z-x) dx \\ &= \begin{cases} \int_0^z \frac{10-x}{50} \frac{10-(z-x)}{50} dx = \frac{600z-60z^2+z^3}{15000}, & 0 \le z < 10 \\ \int_{z-10}^{10} \frac{10-x}{50} \frac{10-(z-x)}{50} dx = \frac{(20-z)^2}{15000}, & 10 \le z \le 20 \end{cases} \end{aligned}$$

$Z=Y/X$ 的分布、$Z=XY$ 的分布

- 设 X 和 Y 是二维连续型随机变量，具有概率密度 $f(x,y)$，则 $Z=Y/X$、$Z=XY$ 仍为连续型随机变量，其概率密度分别为

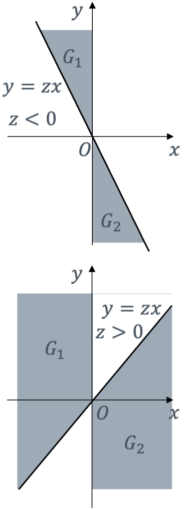
$$f_{Y/X}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}|x|f(x,xz)dx$$
$$f_{XY}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}1/|x|f(x,z/x)dx$$

- 若 X 和 Y 相互独立，设 (X,Y) 关于 X 和 Y 的边缘概率密度分别为 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$，则

$$f_{Y/X}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}|x|f_X(x)f_Y(xz)dx$$
$$f_{XY}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}1/|x|f_X(x)f_Y(z/x)dx$$

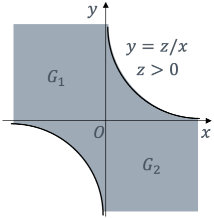
$Z=Y/X$ 的分布

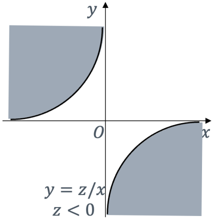
$$
\begin{aligned}
F_Z(z) &= P\{Z\le z\} = P\{Y/X\le z\} = \iint_{G_1\cup G_2} f(x,y)dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{0} dx \int_{zx}^{\infty} f(x,y)dy + \int_{0}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{zx} f(x,y)dy \\
&= \int_{-\infty}^{0} dx \int_{zx}^{\infty} f(x,xu)d(xu) + \int_{0}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{zx} f(x,xu)d(xu) \\
&= \int_{-\infty}^{0} dx \int_{z}^{-\infty} xf(x,u)du + \int_{0}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{z} xf(x,xu)du \\
&= \int_{-\infty}^{0} dx \int_{-\infty}^{z} (-x)f(x,xu)du + \int_{0}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{z} xf(x,xu)du \\
&= \int_{-\infty}^{z} du \int_{-\infty}^{0} (-x)f(x,xu)du + \int_{-\infty}^{z} du \int_{0}^{\infty} xf(x,xu)dx \\
&= \int_{-\infty}^{z} du \int_{-\infty}^{\infty} |x|f(x,xu)dx
\end{aligned}
$$



$Z = XY$ 的分布

$$
\begin{aligned}
F_Z(z) &= P\{Z \le z\} = P\{XY \le z\} = \iint_{G_1 \cup G_2} f(x,y)dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{0} dx \int_{z/x}^{\infty} f(x,y)dy + \int_{0}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{z/x} f(x,y)dy \\
&= \int_{-\infty}^{0} dx \int_{z/x}^{\infty} f(x,u/x)d(u/x) + \int_{0}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{z/x} f(x,u/x)d(u/x) \\
&= \int_{-\infty}^{0} dx \int_{z}^{-\infty} 1/x f(x,u/x)du + \int_{0}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{z} 1/x f(x,u/x)du \\
&= \int_{-\infty}^{0} dx \int_{-\infty}^{z} (-1/x) f(x,u/x)du + \int_{0}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{z} 1/x f(x,u/x)du \\
&= \int_{-\infty}^{z} du \int_{-\infty}^{0} (-1/x) f(x,u/x)dx + \int_{-\infty}^{z} du \int_{0}^{\infty} -(1/x) f(x,u/x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{z} du \int_{-\infty}^{\infty} 1/|x| f(x,u/x)dx
\end{aligned}
$$





例 4

- 某公司提供一种地震保险，保险费率 Y 和保险赔付 X 的概率密度分别为

$$f(y)=\begin{cases}\frac{y}{25}e^{-\frac{y}{5}}, & y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}, & x>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

设 X 与 Y 相互独立，求 $Z=Y/X$ 的概率密度

解答 Z 的概率密度为

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty}|x|g(x)f(xz)dx \\ &= \begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty} x\frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}\frac{xz}{25}e^{-\frac{xz}{5}}dx=\frac{2z}{(1+z)^3}, & z>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\end{aligned}$$

$M=\max\{X,Y\}$ 的分布、$N=\min\{X,Y\}$ 的分布

- 若 X 和 Y 是二维连续型随机变量, 其分布函数分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$, 则 $M=\max\{X,Y\}$、$N=\min\{X,Y\}$ 的分布函数分别为

$$
\begin{aligned}
P\{M\le z\} &= P\{X\le z, Y\le z\} = P\{X\le z\}P\{Y\le z\} \\
&\Rightarrow \quad F_{\max}(z) = F_X(z)F_Y(z) \\
P\{N\le z\} &= 1-P\{N>z\} = 1-P\{X>z\}P\{Y>z\} \\
&\Rightarrow \quad F_{\min}(z) = 1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]
\end{aligned}
$$

- 若随机变量 $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立, 其分布函数分别为 $F_{X_1}(x),\cdots,F_{X_n}(x)$, 则 $M=\max\{X_1,\cdots,X_n\}$、$N=\min\{X_1,\cdots,X_n\}$ 的分布函数分别为

$$
\begin{aligned}
F_{\max}(z) &= F_{X_1}(z)F_{X_2}(z)\cdots F_{X_n}(z) \\
F_{\min}(z) &= 1-[1-F_{X_1}(z)][1-F_{X_2}(z)]\cdots[1-F_{X_n}(z)]
\end{aligned}
$$

例 5

- 某公司提系统 L 由相互独立的子系统 L_1 和 L_2 组成, 两子系统寿命分别为 X 和 Y, 其概率密度分别为

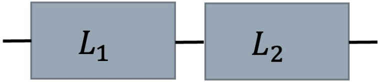
$$f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x}, & x>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta y}, & y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

其中 $\alpha>0,\beta>0,\alpha\neq\beta$, 求在不同连接情况下, L 寿命 Z 的概率密度

解答 (1) 串联

$$F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-\alpha x}, & x>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$F_Y(y)=\begin{cases}1-e^{-\beta y}, & y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$



例 5

解答 由于$N = \min\{X, Y\}$, 有

$$F_Z(z) = 1 - [1 - F_X(z)][1 - F_Y(z)]$$
$$= \begin{cases} 1 - e^{-(\alpha+\beta)z}, & z > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

于是

$$f_Z(z) = \begin{cases} (\alpha + \beta)e^{-(\alpha+\beta)z}, & z > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

例 5

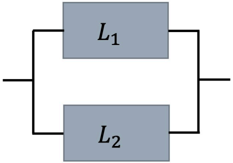
- 某公司提系统 L 由相互独立的子系统 L_1 和 L_2 组成，两子系统寿命分别为 X 和 Y，其概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x}, & x>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta y}, & y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

其中 $\alpha>0,\beta>0,\alpha\neq\beta$，求在不同连接情况下，$L$ 寿命 Z 的概率密度

解答 (2) 并联 $Z=\max\{X,Y\}$

$$F_Z(z)=F_X(z)F_Y(z)=\begin{cases}1-e^{-\alpha z}-e^{-\beta z}+e^{-(\alpha+\beta)z}, & z>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$



$$f_Z(z)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha z}+\beta e^{-\beta z}-(\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z}, & z>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

例 5

- 某公司提系统 L 由相互独立的子系统 L_1 和 L_2 组成，两子系统寿命分别为 X 和 Y，其概率密度分别为

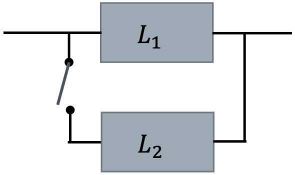
$$f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x}, & x>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta y}, & y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

其中 $\alpha>0,\beta>0,\alpha\neq\beta$，求在不同连接情况下，$L$ 寿命 Z 的概率密度

解答 (3) 备用电路 $Z=X+Y$

$$f_Z(z)=f_X(x)*f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(z-y)f_Y(y)dy$$

$$=\begin{cases}\frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}(e^{-\alpha z}-e^{-\beta z}), & z>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$



小结

- 考试内容
  - 多维随机变量及其分布、二维离散型随机变量的概率分布、边缘分布和条件分布、二维连续型随机变量的概率密度、边缘概率密度和条件密度、随机变量的独立性和不相关性、常用二维随机变量的分布、两个及两个以上随机变量简单函数的分布
- 考试要求
  - 理解多维随机变量的概念, 理解多维随机变量的分布的概念和性质. 理解二维离散型随机变量的概率分布、边缘分布和条件分布, 理解二维连续型随机变量的概率密度、边缘密度和条件密度
  - 理解随机变量的独立性及不相关性的概念, 掌握随机变量相互独立的条件
  - 掌握二维均匀分布, 了解二维正态分布的概率密度, 理解参数的概率意义
  - 会求两个随机变量函数的分布, 会求多个相互独立随机变量函数的分布

$Q\&A$

$Thank\ you!$

感谢您的聆听和反馈