第二章 线性规划

修贤超

https://xianchaoxiu.github.io

目录

解的概念

标准形式

$$
\text{(LP)} \quad \max\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1.1}
$$

$$
\text{s.t.} \quad \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ (i = 1, \cdots, m) & (1.2) \\ x_j \geq 0 \ (j = 1, \cdots, n) & (1.3) \end{cases}
$$

- 满足约束条件 (1.2) 和 (1.3) 的 $x_j \ (j = 1, \cdots, n)$ 称为**可行解**
- 全部可行解的集合称为**可行域**
- 满足 (1.1) 的可行解称为**最优解**
- 最优解所对应的函数值称为**最优值**

解的概念

- 设 $\mathbf{A}$ 为约束方程组 (1.2) 的 $m \times n$ $(n > m)$ 阶系数矩阵，其秩为 m，$\mathbf{B}$ 是矩阵 $\mathbf{A}$ 中的一个 $m \times m$ 阶的满秩子矩阵，记为

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix} = (\mathbf{P}_1, \cdots, \mathbf{P}_m)$$

  - $\mathbf{B}$ 是线性规划问题 (LP) 的一个基
  - $\mathbf{B}$ 中的每一个列向量 $\mathbf{P}_j$ $(j = 1, \cdots, m)$ 称为基向量
  - 与基向量 $\mathbf{P}_j$ 对应的变量 x_j 称为基变量，记为 $\mathbf{X}_B = (x_1, \cdots, x_m)^\top$
  - 除基变量以外的变量称为非基变量，记为 $\mathbf{X}_N = (x_{m+1}, \cdots, x_n)^\top$

例 1

- **找出线性规划问题的基、基向量和基变量**

$$\max\ z = 70x_1 + 120x_2$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} 9x_1 + 4x_2 + x_3 = 360 \\ 4x_1 + 5x_2 + x_4 = 200 \\ 3x_1 + 10x_2 + x_5 = 300 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

例 1

- 写出技术系数矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 寻找阶为 m 的满秩子矩阵

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (\mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4, \mathbf{P}_5)$$

基变量为 $\mathbf{X}_B = (x_3, x_4, x_5)^\top$，非基变量为 $\mathbf{X}_N = (x_1, x_2)^\top$

例 1

- **写出技术系数矩阵**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

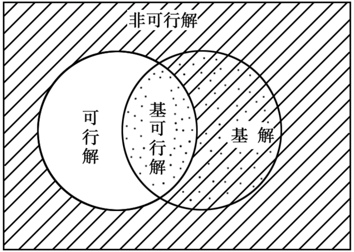
- **另一个基为**

$$\mathbf{B}' = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_4, \mathbf{P}_5)$$

基变量为 $\mathbf{X}_B = (x_2, x_4, x_5)^\top$, **非基变量为** $\mathbf{X}_N = (x_1, x_3)^\top$

解的概念

- 在 (1.2) 中，令所有非基变量 $x_{m+1}, \cdots, x_n$ 等于 0，则称
$$\mathbf{X} = (x_1, \cdots, x_m, 0, \cdots, 0)^\top$$
为线性规划问题 (LP) 的基解
- 满足变量非负约束条件 (1.3) 的基解称为基可行解
- 对应于基可行解的基称为可行基



例 2

- 求出全部基解，指出其中的基可行解，并确定最优解

$$\max\ z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} x_1 + x_3 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 10 \\ x_2 + x_5 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

- 写出技术系数矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

例 2

- 全部基解见下表

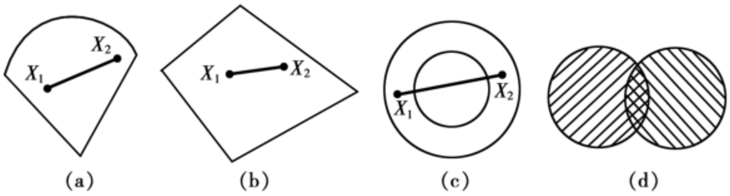
序号	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	基可行解
①	0	0	5	10	4	5	✓
②	0	4	5	2	0	17	✓
③	5	0	0	5	4	10	✓
④	0	5	5	0	-1	20	×
⑤	10	0	-5	0	4	15	×
⑥	5	2.5	0	0	0	1.5	✓
⑦	5	4	0	-3	0	22	×
⑧	2	4	3	0	0	19	✓

- 最优解为 $\mathbf{X} = (2, 4, 3, 0, 0)^\top$，最优值为 $z^* = 19$

凸集

- 对于任意两点 $\mathbf{X}_1$，$\mathbf{X}_2 \in \Omega$，满足下式的集合 Ω 称为凸集

$$\alpha \mathbf{X}_1 + (1-\alpha)\mathbf{X}_2 \in \Omega \quad (0 < \alpha < 1)$$



- 对于凸集 Ω 中的点 $\mathbf{X}$，如果不存在 $\mathbf{X}_1$，$\mathbf{X}_2 \in \Omega$ 使得

$$\mathbf{X} = \alpha \mathbf{X}_1 + (1-\alpha)\mathbf{X}_2 \in \Omega \quad (0 < \alpha < 1)$$

则称 $\mathbf{X}$ 是凸集 Ω 的顶点 (极点)

- **定理 1** 若线性规划问题存在可行解，则可行域是凸集

证明 记 Ω 为满足线性规划问题束条件的集合

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}_j x_j = \mathbf{b},\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, \cdots, n)$$

设 Ω 内的任意两点为

$$\mathbf{X}_1 = (x_{11}, \cdots, x_{1n})^\top,\ \mathbf{X}_2 = (x_{21}, \cdots, x_{2n})^\top$$

且 $\mathbf{X}_1 \neq \mathbf{X}_2$，一定满足

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}_j x_{1j} = \mathbf{b},\ x_{1j} \geq 0 \quad (j = 1, \cdots, n)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}_j x_{2j} = \mathbf{b},\ x_{2j} \geq 0 \quad (j = 1, \cdots, n)$$

几个基本定理

证明 (续) 令 $\mathbf{X}=(x_1,\cdots,x_n)^\top$ 为 $\mathbf{X}_1$，$\mathbf{X}_2$ 连线上任意一点，即

$$\mathbf{X}=\alpha\mathbf{X}_1+(1-\alpha)\mathbf{X}_2 \quad (0<\alpha<1)$$

其中 $x_j=\alpha x_{1j}+(1-\alpha)x_{2j}$

于是

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{P}_j x_j &= \sum_{j=1}^{n}\mathbf{P}_j\left(\alpha x_{1j}+(1-\alpha)x_{2j}\right)\\ &= \alpha\sum_{j=1}^{n}\mathbf{P}_j x_{1j}+\sum_{j=1}^{n}\mathbf{P}_j x_{2j}-\alpha\sum_{j=1}^{n}\mathbf{P}_j x_{2j}\\ &= \alpha\mathbf{b}+\mathbf{b}-\alpha\mathbf{b}\\ &= \mathbf{b}\end{aligned}$$

考虑 $x_{1j},x_{2j}\geq 0$, $\alpha>0$, $1-\alpha>0$，可知 $x_j\geq 0$ $(j=1,\cdots,n)$，证毕

几个基本定理

- **引理** 线性规划问题的可行解 $\mathbf{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^\top$ 为基可行解的充要条件是 $\mathbf{X}$ 的正分量所对应的系数列向量是线性独立的

证明 (必要性) 由基可行解的定义可知

在 (1.2) 中，令所有非基变量 $x_{m+1},\cdots,x_n$ 等于 0，则称

$$\mathbf{X}=(x_1,\cdots,x_m,0,\cdots,0)^\top$$

为线性规划问题的基解，满足变量非负约束条件 (1.3) 的基解称为基可行解

证明（续） (充分性) 若向量 $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \cdots, \mathbf{P}_k$ 线性独立，则必有 $k \le m$

(1) 当 $k = m$ 时，$\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \cdots, \mathbf{P}_k$ 恰构成一个基，从而

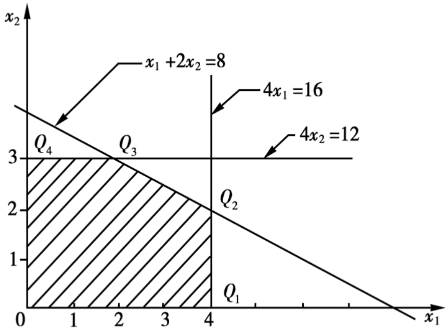
$$\mathbf{X} = (x_1, x_2, \cdots, x_m, 0, \cdots, 0)^\top$$

为相应的基可行解

(2) 当 $k < m$ 时，则可以从其余的列向量中取出 $m - k$ 个与 $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \cdots, \mathbf{P}_k$ 构成最大的线性独立向量组，其对应的解恰为 $\mathbf{X}$，根据定义它是基可行解

几个基本定理

- 定理 2　线性规划问题的基可行解 X 对应线性规划问题可行域 (凸集) 的顶点
- 定理 3　若线性规划问题有最优解，那么一定存在一个基可行解是最优解
- 定理 4　可行域有界，目标函数最优值必可在顶点得到



课堂练习 1

- 试证明定理 3，即

若线性规划问题有最优解，那么一定存在一个基可行解是最优解

课堂练习 1 (答案)

证明 设$\mathbf{X}^{(0)} = (x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)^\top$ 是线性规划问题的一个最优解，那么

$$\mathbf{Z} = \mathbf{C}\mathbf{X}^{(0)} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^0$$

是目标函数的最大值

若 $\mathbf{X}^{(0)}$ 不是基可行解，由定理 2 知 $\mathbf{X}^{(0)}$ 不是顶点，一定能在可行域内找到通过 $\mathbf{X}^{(0)}$ 的直线上的另外两个点

$$(\mathbf{X}^{(0)} + \mu\delta) \geq 0 \ \text{ 和 } \ (\mathbf{X}^{(0)} - \mu\delta) \geq 0$$

将这两个点带入目标函数有

$$\mathbf{C}(\mathbf{X}^{(0)} + \mu\delta) = \mathbf{C}\mathbf{X}^{(0)} + \mathbf{C}\mu\delta$$
$$\mathbf{C}(\mathbf{X}^{(0)} - \mu\delta) = \mathbf{C}\mathbf{X}^{(0)} - \mathbf{C}\mu\delta$$

课堂练习 1 (答案)

证明（续） 因 $\mathbf{CX}^{(0)}$ 为目标函数的最大值，故有

$$\mathbf{CX}^{(0)} \geq \mathbf{CX}^{(0)} + \mathbf{C}\mu\delta$$
$$\mathbf{CX}^{(0)} \geq \mathbf{CX}^{(0)} - \mathbf{C}\mu\delta$$

由此 $\mathbf{C}\mu\delta = 0$，即有

$$\mathbf{C}(\mathbf{X}^{(0)} + \mu\delta) = \mathbf{CX}^{(0)} = \mathbf{C}(\mathbf{X}^{(0)} - \mu\delta)$$

如果 $(\mathbf{X}^{(0)} + \mu\delta)$ 或 $(\mathbf{X}^{(0)} - \mu\delta)$ 仍不是基可行解，按照上面的方法继续做下去，最终一定可以找到一个基可行解，其目标函数值等于 $\mathbf{CX}^{(0)}$，证毕

小结

- 解的概念
  - 可行解，可行域，最优解
  - 基，基解，基可行解，可行基
  - 凸集，顶点
- 解的性质
  - 所有可行解构成的集合是凸集
  - 每个基可行解对应可行域的一个顶点
  - 若有最优解，则必在顶点上得到
- 课后作业：P44，习题 1.3

Q&A

Thank you!

感谢您的聆听和反馈