线性规划的对偶问题

修贤超

https://xianchaoxiu.github.io

例 1

- 美佳公司计划制造 I、II 两种家电产品。已知各制造一件时分别占用的设备 A、设备 B 的台时、调试工序时间及每天可用于这两种家电的能力、各售出一件时的获利情况

项目	产品 I	产品 II	每天可用能力
设备 A/h	0	5	15
设备 B/h	6	2	24
调试工序/h	1	1	5
利润/元	2	1	

- 如果公司不再安排生产，而是将设备 A、设备 B 和调试工序这三种能力资源出租用于对外加工，此时应考虑如何确定各种资源的租价才能获得最大利润

对偶问题的提出

- 决策变量：设 y_1, y_2, y_3 为出租设备 A、设备 B 和调试工序单位时间的租金
- 约束条件：出租所得到的租金应不低于自己生产的获利，即

$$\begin{cases} 6y_2 + y_3 \geq 2 \\ 5y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 1 \end{cases}$$

- 目标函数：公司总收入即租赁方的成本 $w = 15y_1 + 24y_2 + 5y_3$
- 于是，从租赁方的角度考虑，数学模型为

$$\min\ w = 15y_1 + 24y_2 + 5y_3$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 6y_2 + y_3 \geq 2 \\ 5y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 1 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

对偶问题的提出

- **原问题**

$$\max\ z = 2x_1 + x_2$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} 5x_2 \le 15 \\ 6x_1 + 2x_2 \le 24 \\ x_1 + x_2 \le 5 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

- **对偶问题**

$$\min\ w = 15y_1 + 24y_2 + 5y_3$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} 6y_2 + y_3 \ge 2 \\ 5y_1 + 2y_2 + y_3 \ge 1 \\ y_1, y_2, y_3 \ge 0 \end{cases}$$

对称形式下对偶问题的一般形式

- **一般形式**

$$
\min\ w = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \cdots + b_m y_m
$$

$$
\text{s.t.}\ \begin{cases} a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + \cdots + a_{m1} y_m \geq c_1 \\ a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + \cdots + a_{m2} y_m \geq c_2 \\ \cdots \\ a_{1n} y_1 + a_{2n} y_2 + \cdots + a_{mn} y_m \geq c_n \\ y_1, y_2, \cdots, y_m \geq 0 \end{cases}
$$

- **矩阵形式**

$$
\min\ w = \mathbf{Y}^\top \mathbf{b}
$$

$$
\text{s.t.}\ \begin{cases} \mathbf{A}^\top \mathbf{Y} \geq \mathbf{C}^\top \\ \mathbf{Y} \geq \mathbf{0} \end{cases}
$$

对称形式下对偶问题的一般形式

项目	原问题 (P)	对偶问题 (D)
$\mathbf{A}$	约束系数矩阵	约束系数矩阵的转置
$\mathbf{b}$	约束条件的右端项向量	目标函数中的价格系数向量
$\mathbf{C}$	目标函数中的价格系数向量	约束条件的右端项向量的转置
目标函数	$\max\ z = \mathbf{C}\mathbf{X}$	$\min\ w = \mathbf{Y}^\top\mathbf{b}$
约束条件	$\mathbf{A}\mathbf{X} \leq \mathbf{b}$	$\mathbf{A}^\top\mathbf{Y} \geq \mathbf{C}^\top$
决策变量	$\mathbf{X} \geq 0$	$\mathbf{Y} \geq 0$

例 1

- **写出下面问题的对偶问题**

$$\max\ z = 5x_1 + 6x_2$$
$$\text{s.t.}\ \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 7 \\ 4x_1 + x_2 \le 9 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

- **对偶问题**

$$\min\ w = 7y_1 + 9y_2$$
$$\text{s.t.}\ \begin{cases} 3y_1 + 4y_2 \ge 5 \\ -2y_1 + y_2 \ge 6 \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$$

课堂练习 1

- **写出下面问题的对偶问题**

$$
\max\ z = 2x_1 + 5x_3
$$

$$
\text{s.t.}\ \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 5 \\ x_1 - 2x_3 \leq 3 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}
$$

情况一

- **等式变不等式**

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \ (i = 1, \ldots, m)$$

$$\Downarrow$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i \ (i = 1, \ldots, m)$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i \ (i = 1, \ldots, m)$$

$$\Downarrow$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i \ (i = 1, \ldots, m)$$

$$-a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \cdots - a_{in}x_n \leq -b_i \ (i = 1, \ldots, m)$$

情况二

- 不等式变不等式
  - 目标函数求极大时

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i \ (i = 1, \ldots, m)$$
$$\Downarrow$$
$$-a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \cdots - a_{in}x_n \leq -b_i \ (i = 1, \ldots, m)$$

  - 目标函数求极小时

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i \ (i = 1, \ldots, m)$$
$$\Downarrow$$
$$-a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \cdots - a_{in}x_n \geq -b_i \ (i = 1, \ldots, m)$$

情况三

- 变量转换
  - 若存在取值无约束的变量 x_k，可令

$$x_k = x_k' - x_k'',\ x_k', x_k'' \geq 0$$

  - 若 $x_k \leq 0$，可令

$$x_k' = -x_k,\ x_k' \geq 0$$

例 2

- 写出下面问题的对偶问题

$$\max\ z = 5x_1 + 6x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 7 \\ 4x_1 + x_2 \leq 9 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

- 经过变换后可重新表达为

$$\max\ z = 5x_1 + 6x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \leq 7 \\ -3x_1 + 2x_2 \leq -7 \\ 4x_1 + x_2 \leq 9 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

例 2

- 令各约束的对偶变量分别是 $y_1^{'}$，$y_1^{''}$，y_2，按对应关系写出对偶问题

$$\min\ w = 7y_1^{'} - 7y_1^{''} + 9y_2$$
$$\text{s.t.}\ \begin{cases} 3y_1^{'} - 3y_1^{''} + 4y_2 \geq 5 \\ -2y_1^{'} + 2y_1^{''} + y_2 \geq 6 \\ y_1^{'}, y_1^{''}, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

- 令 $y_1 = y_1^{'} - y_1^{''}$，得到对偶问题

$$\min\ w = 7y_1 + 9y_2$$
$$\text{s.t.}\ \begin{cases} 3y_1 + 4y_2 \geq 5 \\ -2y_1 + y_2 \geq 6 \\ y_1\text{自由，}\ y_2 \geq 0 \end{cases}$$

例 3

- 写出下面问题的对偶问题

$$\max\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \ge b_3 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \le 0,\ x_3\text{无约束} \end{cases}$$

例 3

- 令$x_2 = -x_2^{'}$，$x_3 = x_3^{'} - x_3^{''}$，经过变换后可重新表达为

$$
\max\ z = c_1x_1 - c_2x_2^{'} + c_3x_3^{'} - c_3x_3^{''}
$$

$$
\text{s.t.} \begin{cases}
a_{11}x_1 - a_{12}x_2^{'} + a_{13}x_3^{'} - a_{13}x_3^{''} \leq b_1 \\
a_{21}x_1 - a_{22}x_2^{'} + a_{23}x_3^{'} - a_{23}x_3^{''} \leq b_2 \\
-a_{21}x_1 + a_{22}x_2^{'} - a_{23}x_3^{'} + a_{23}x_3^{''} \leq -b_2 \\
-a_{31}x_1 - a_{32}x_2^{'} - a_{33}x_3^{'} + a_{33}x_3^{''} \leq -b_3 \\
x_1, x_2^{'}, x_3^{'}, x_3^{''} \geq 0
\end{cases}
$$

例 3

- 令各约束的对偶变量分别是 y_1，$y_2^{'}$，$y_2^{''}$，$y_3^{'}$，按对应关系写出

$$\min\ w = b_1 y_1 + b_2 y_2^{'} - b_2 y_2^{''} - b_3 y_3^{'}$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2^{'} - a_{21}y_2^{''} - a_{31}y_3^{'} \geq c_1 \\ -a_{12}y_1 - a_{22}y_2^{'} + a_{22}y_2^{''} - a_{32}y_3^{'} \geq -c_2 \\ a_{13}y_1 + a_{23}y_2^{'} - a_{23}y_2^{''} - a_{33}y_3^{'} \geq c_3 \\ -a_{13}y_1 - a_{23}y_2^{'} + a_{23}y_2^{''} + a_{33}y_3^{'} \geq -c_3 \\ y_1, y_2^{'}, y_2^{''}, y_3^{'} \geq 0 \end{cases}$$

例 3

- 令$y_2 = y_2^{'} - y_2^{''}$，$y_3 = -y_3^{'}$，**得到对偶问题**

$$
\min\ w = b_1y_1 + b_2y_2 + b_3y_3
$$

$$
\text{s.t.}\ \begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + a_{31}y_3 \geq c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + a_{32}y_3 \leq c_2 \\ a_{13}y_1 + a_{23}y_2 + a_{33}y_3 = c_3 \\ y_1 \geq 0,\ y_2\text{无约束},\ y_3 \leq 0 \end{cases}
$$

课堂练习 2

- **写出下面问题的对偶问题**

$$\min\ z = 4x_1 + 2x_2 - 3x_3$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 6 \\ 2x_1 + 3x_3 \ge 9 \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 4 \\ x_1\text{无约束},\ x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

原问题与对偶问题的关系归纳

原问题 (P)	对偶问题 (D)
目标函数 $\max \ z$	目标函数 $\min \ w$
决策变量 n 个 决策变量 ≥ 0 决策变量 ≤ 0 决策变量无约束	n 个 约束条件 ≤ 0 约束条件 ≥ 0 约束条件 $=$
约束条件 m 个 约束条件 ≥ 0 约束条件 ≤ 0 约束条件 $=$ 约束条件右端项向量 目标函数变量系数	决策变量 m 个 决策变量 ≤ 0 决策变量 ≥ 0 决策变量无约束 目标函数变量的系数 约束条件右端项向量

课堂练习 2

- **写出下面问题的对偶问题**

$$\min\ z = 4x_1 + 2x_2 - 3x_3$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + 3x_3 \geq 9 \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 4 \\ x_1\text{无约束},\ x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

小结

- 对偶问题的提出
- 原问题与对偶问题
  - 目标函数
  - 约束条件
  - 决策变量
- 课后作业: P75, 习题 2.1

Q&A

Thank you!

感谢您的聆听和反馈