

第二章 线性规划

修贤超

<https://xianchaoxiu.github.io>

- 2.1 线性规划问题及其数学模型
- 2.2 图解法
- 2.3 单纯形法原理
- 2.4 单纯形法计算步骤
- 2.5 单纯形法的进一步讨论
- 2.6 线性规划的对偶问题
- 2.7 对偶问题的基本性质

例 1

- 某公司计划制造 I、II 两种家电产品。已知各制造一件时分别占用的设备 A、设备 B 的台时、调试工序时间及每天可用于这两种家电的能力、各售出一件时的获利情况

项目	产品 I	产品 II	每天可用能力
设备 A/h	0	5	15
设备 B/h	6	2	24
调试工序/h	1	1	5
利润/元	2	1	

- 问该公司应制造两种家电各多少件，使获取的利润为最大

例 1

- 设两种家电产量分别为 x_1, x_2 , 于是

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 2x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 5x_2 \leq 15 \\ 6x_1 + 2x_2 \leq 24 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

- 决策变量: x_1, x_2
- 目标函数: $\max \quad z = 2x_1 + x_2$
- 约束条件: $5x_2 \leq 15, 6x_1 + 2x_2 \leq 24, x_1 + x_2 \leq 5, x_1, x_2 \geq 0$

例 2

- 某公司拟在下一年度的 1-4 月的 4 个月内租用仓库堆放物资。已知各月份所需仓库面积

月份	1	2	3	4
所需仓库面积 ($100m^2$)	15	10	20	12

仓库租借费用随合同期限而定，合同期越长折扣越大。租借仓库的合同每月初都可办理，每份合同具体规定租用面积和期限

合同租借期限	1 个月	2 个月	3 个月	4 个月
合同期内的租费 (元/ $100m^2$)	2800	4500	6000	7300

- 试确定该公司签订租借合同的最优决策，使所付租借费用最小

例 2

- 设 x_{ij} 表示在第 i ($i = 1, 2, 3, 4$) 个月初签订的租借期为 j ($j = 1, 2, 3, 4$) 个月的仓库面积的合同

- 决策变量: x_{ij} ($i, j = 1, 2, 3, 4$)

- 目标函数:

$$\begin{aligned} \min z = & 2800(x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41}) + 4500(x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42}) \\ & + 6000(x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43}) + 7300(x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44}) \end{aligned}$$

- 约束条件:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \geq 15 \\ x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{21} + x_{22} + x_{23} \geq 10 \\ x_{13} + x_{14} + x_{22} + x_{23} + x_{31} + x_{32} \geq 20 \\ x_{14} + x_{23} + x_{32} + x_{41} \geq 12 \\ x_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

课堂练习 1

- 某工厂用三种原料 P_1 、原料 P_2 、原料 P_3 生产三种产品 Q_1 、产品 Q_2 、产品 Q_3 ，如表所示

单位产品所需原料数量	产品 Q_1	产品 Q_2	产品 Q_3	原料可用量
原料 P_1 /公斤	2	3	0	1500
原料 P_2 /公斤	0	2	4	800
原料 P_3 /公斤	3	2	5	2000
位产品的利润/千元	3	5	4	

- 试制订总利润最大的生产计划

课堂练习 1 (答案)

■ 设每天生产三种产品的数量, 分别设为 x_1, x_2, x_3 , 于是

□ 决策变量: x_1, x_2, x_3

□ 目标函数: $\max z = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3$

□ 约束条件: $2x_1 + 3x_2 \leq 1500, 2x_2 + 4x_3 \leq 800, 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 2000$
 $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

■ 数学模型为

$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 1500 \\ 2x_2 + 4x_3 \leq 800 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 2000 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

线性规划问题的数学模型

- 三要素: 决策变量, 目标函数, 约束条件

$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 1500 \\ 2x_2 + 4x_3 \leq 800 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 2000 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

- 决策变量的取值是连续的
- 目标函数是决策变量的线性函数
- 约束条件是含决策变量的线性等式或不等式

线性规划问题的数学模型

■ 一般形式

$$\begin{aligned} \max(\min) \quad & z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq (=, \geq) b_1 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq (=, \geq) b_m \\ x_1, \cdots, x_n \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

- x_j : 决策变量
- c_j : 价值系数
- b_i : 资源量/右端项
- a_{ij} : 技术系数/工艺系数

线性规划问题的数学模型

■ 线性规划问题的数学模型

$$\begin{aligned} \max(\min) \quad & z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq (=, \geq) b_1 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq (=, \geq) b_m \\ x_1, \cdots, x_n \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

\Downarrow

$$\begin{aligned} \max(\min) \quad & z = \sum_{j=1}^n c_jx_j \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq (=, \geq) b_i \quad (i = 1, \cdots, m) \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, \cdots, n) \end{cases} \end{aligned}$$

线性规划问题的数学模型

■ 记

$$\mathbf{C} = [c_1 \dots c_n] \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

■ 用向量和矩阵表示

$$\max(\min) \ z = \mathbf{CX}$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^n \mathbf{A}_j x_j \leq (=, \geq) \mathbf{b} \\ \mathbf{X} \geq 0 \end{cases}$$

$$\max(\min) \ z = \mathbf{CX}$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} \mathbf{AX} \leq (=, \geq) \mathbf{b} \\ \mathbf{X} \geq 0 \end{cases}$$

线性规划问题的数学模型

■ 标准形式

$$\begin{aligned} \max \quad & z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, \dots, m) \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n) \end{cases} \end{aligned}$$

- 目标函数求最大值
- 所有约束条件均用等式表示
- 所有决策变量均取非负数
- 所有右端项常数均为非负数

非标准型转化为标准形式

■ 非标准型

$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 1500 \\ 2x_2 + 4x_3 \leq 800 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 2000 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

■ 基本思路

目标函数 \Rightarrow 约束条件 \Rightarrow 决策变量

■ 第一步：目标函数的转换

$$\min z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \Rightarrow \max z' = - \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

非标准型转化为标准形式

■ 第二步: 约束条件的转换

□ 右端项常数的转换

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad b_i < 0 \quad \Rightarrow \quad -\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = -b_i$$

□ 不等式的转换——引入松弛变量

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + s_i = b_i, \quad s_i \geq 0$$

□ 不等式的转换——引入剩余变量

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - s_i = b_i, \quad s_i \geq 0$$

非标准型转化为标准型

■ 第三步: 决策变量的转换

□ 取值无约束的转化

$$x_k \text{ 取值无约束} \Rightarrow x_k = x'_k - x''_k, \quad x'_k, x''_k \geq 0$$

□ 取值非正的转化

$$x_k \leq 0 \Rightarrow x'_k = -x_k$$

这里 x'_k, x''_k 为任意非负数, 不是导数

例 3

- 请将下式转化为线性规划标准形式

$$\begin{aligned} \min z &= x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 \leq 9 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 4 \\ 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -6 \\ x_1 \leq 0, x_2 \geq 0, x_3 \text{取值无约束} \end{cases} \end{aligned}$$

- 第一步：目标函数的转换
- 第二步：约束条件的转换
- 第三步：决策变量的转换

第一步：目标函数的转换

■ 令 $z' = -z$, 于是

$$\begin{aligned} \max \quad & z' = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 \leq 9 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 4 \\ 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -6 \\ x_1 \leq 0, x_2 \geq 0, x_3 \text{取值无约束} \end{cases} \end{aligned}$$

第二步: 约束条件的转换

■ 右端项常数的转换

$$\begin{aligned} \max \quad & z' = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 \leq 9 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 4 \\ -4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ x_1 \leq 0, x_2 \geq 0, x_3 \text{取值无约束} \end{cases} \end{aligned}$$

■ 不等式的转换, 松弛变量 x_4 , 剩余变量 x_5

$$\begin{aligned} \max \quad & z' = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 0x_4 + 0x_5 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 = 4 \\ -4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ x_1 \leq 0, x_2, x_4, x_5 \geq 0, x_3 \text{取值无约束} \end{cases} \end{aligned}$$

第三步：决策变量的转换

■ 令 $x_3 = x'_3 - x''_3$, $x'_3, x''_3 \geq 0$

$$\max z' = -x_1 - 2x_2 - 3x'_3 + 3x''_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} -2x_1 + x_2 + x'_3 - x''_3 + x_4 = 9 \\ -3x_1 + x_2 + 2x'_3 - 2x''_3 - x_5 = 4 \\ -4x_1 + 2x_2 + 3x'_3 - 3x''_3 = 6 \\ x_1 \leq 0, x_2, x'_3, x''_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

■ 令 $x'_1 = -x_1$, 于是

$$\max z' = x'_1 - 2x_2 - 3x'_3 + 3x''_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 2x'_1 + x_2 + x'_3 - x''_3 + x_4 = 9 \\ 3x'_1 + x_2 + 2x'_3 - 2x''_3 - x_5 = 4 \\ 4x'_1 + 2x_2 + 3x'_3 - 3x''_3 = 6 \\ x'_1, x_2, x'_3, x''_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

■ 标准型通常记为

$$\max z' = x'_1 - 2x_2 - 3x'_3 + 3x''_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 2x'_1 + x_2 + x'_3 - x''_3 + x_4 = 9 \\ 3x'_1 + x_2 + 2x'_3 - 2x''_3 - x_5 = 4 \\ 4x'_1 + 2x_2 + 3x'_3 - 3x''_3 = 6 \\ x'_1, x_2, x'_3, x''_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

\Downarrow

$$\max z = x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 3x_4$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 9 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 - x_6 = 4 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

- 请将下式转化为线性规划标准形式

$$\begin{aligned} \min z &= -x_1 + 2x_2 - 3x_3 \\ \text{s.t. } &\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 7 \\ x_1 - x_2 + x_3 \geq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0, x_3 \text{取值无约束} \end{cases} \end{aligned}$$

课堂练习 2 (答案)

■ 线性规划标准形式为

$$\begin{aligned} \min z &= -x_1 + 2x_2 - 3x_3 \\ \text{s.t. } &\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 7 \\ x_1 - x_2 + x_3 \geq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0, x_3 \text{取值无约束} \end{cases} \end{aligned}$$

\Downarrow

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 \\ \text{s.t. } &\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 7 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - x_6 = 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

■ 线性规划问题的标准形式

$$\begin{aligned} \max \quad & z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, \dots, m) \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n) \end{cases} \end{aligned}$$

■ 三要素：决策变量，目标函数，约束条件

■ 非标准型转化为标准形式

目标函数 \Rightarrow 约束条件 \Rightarrow 决策变量

■ 课后作业：P43, 习题 1.2

Q&A

Thank you!

感谢您的聆听和反馈