矩阵对策的解法

修贤超

https://xianchaoxiu.github.io

图解法

- 主要用于求解赢得矩阵为 $2 \times n$ 或 $m \times 2$ 阶的对策问题
- 从几何上理解对策论的思想
- 基本步骤
  - 第一步: 设局中人的混合策略
  - 第二步: 过 0 和 1 作两条垂线
  - 第三步: 画出对策矩阵
  - 第四步: 确定最优策略

例 1

- 用图解法求解矩阵对策 $G=\{S_1,S_2;\mathbf{A}\}$，其中

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

- 局中人 I 的最优混合策略为 $\mathbf{x}^*=\left(\frac{3}{11},\frac{8}{11}\right)^\top$，局中人 II 的最优混合策略为 $\mathbf{y}^*=\left(0,\frac{9}{11},\frac{2}{11}\right)^\top$，$V_G=\frac{49}{11}$

例 2

- 用图解法求解矩阵对策 $G=\{S_1,S_2;A\}$，其中

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 6 \\ 11 & 2 \end{bmatrix}$$

- 局中人 I 的最优混合策略为 $\mathbf{x}^*=(0,1,0)^\top$，即纯策略 α_2; 局中人 II 的最优混合策略为 $\mathbf{y}^*=(y,1-y)^\top$，$V_G=6$

方程组法

- **定理 4** 设$\mathbf{x}^* \in S_1^*$ 和 $\mathbf{y}^* \in S_2^*$，则 $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ 为对策 G 的解的充要条件是：存在数 v，使得 $\mathbf{x}^*$ 和 $\mathbf{y}^*$ 分别是以下不等式组的解，且 $v = V_G$

$$\begin{cases} \sum_i a_{ij}x_i \geq v \ (j = 1, \ldots, n) \\ \sum_i x_i = 1 \\ x_i \geq 0 \ (i = 1, \ldots, m) \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} \sum_j a_{ij}y_j \leq v \ (i = 1, \ldots, m) \\ \sum_j y_j = 1 \\ y_j \geq 0 \ (j = 1, \ldots, n) \end{cases} \tag{2}$$

- 求矩阵对策解 $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ 的问题等价于求解不等式组(1)和(2)

方程组法

- 若最优策略中的 $\mathbf{x}^*$ 和 $\mathbf{y}^*$ 均不为零，则上述两不等式组的求解问题转化为下面两个方程组的求解问题

$$\begin{cases} \sum_i a_{ij} x_i = v \ (j = 1, \ldots, n) \\ \sum_i x_i = 1 \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} \sum_j a_{ij} y_j = v \ (i = 1, \ldots, m) \\ \sum_j y_j = 1 \end{cases} \tag{4}$$

- 若方程组(3)和(4)存在非负解 $\mathbf{x}^*$ 和 $\mathbf{y}^*$，便求得了对策的一个解
- 若这两个方程组不存在非负解，则可将式(3)和(4)中的某些等式改成不等式，继续试求解，直至求得对策的解
- 若最优策略的某些分量为零，则式(3)和(4)可能无解

方程组法

- 针对赢得矩阵为 2×2 阶的对策问题

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

如果 $\mathbf{A}$ 有鞍点，则很容易求出各局中人的最优纯策略；如果 $\mathbf{A}$ 没有鞍点，则可以证明各局中人最优混合策略中的 $\mathbf{x}^*$ 和 $\mathbf{y}^*$ 均大于零。可求下列方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 = v \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 = v \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 = v \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 = v \\ y_1 + y_2 = 1 \end{cases}$$

方程组法

- 一定有严格的非负解（也就是两个局中人的最优策略）

$$x_1^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})}$$

$$x_2^* = \frac{a_{11} - a_{12}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})}$$

$$y_1^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})}$$

$$y_2^* = \frac{a_{11} - a_{21}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})}$$

$$v^* = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})} = V_G$$

方程组法

- 给定矩阵对策 $G=\{S_1,S_2;\mathbf{A}\}$，$\mathbf{A}$ 是 $m\times n$ 的矩阵
  - 如果 $a_{kj}\geq a_{lj}$，$j=1,\ldots,n$，则称局中人 I 的策略 k优超于策略 l
  - 如果 $a_{ik}\geq a_{il}$，$i=1,\ldots,m$，则称局中人 II 的策略 k优超于策略 l
- 局中人 I 的策略 k 优超于策略 l 说明对局中人 I 而言当其采用策略 k，无论局中人 II 采用任何策略，其获得都比采用策略 l 来的好。因而策略 l 出现的概率为 0，可以在赢得矩阵中删除该策略对应的行

例 3

- 求解矩阵对策 $G = \{S_1, S_2; \mathbf{A}\}$，其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 2 & 5 & 9 \\ 7 & 3 & 9 & 5 & 9 \\ 4 & 6 & 8 & 7 & 6 \\ 6 & 0 & 8 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

- 应用优超原则依次简化得到矩阵

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 9 & 5 & 9 \\ 4 & 6 & 8 & 7 & 6 \\ 6 & 0 & 8 & 8 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

例 3

- $\mathbf{A}_3$ 没有鞍点，得到方程组

$$\begin{cases} 7x_3 + 4x_4 = v \\ 3x_3 + 6x_4 = v \\ x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7y_1 + 3y_2 = v \\ 4y_1 + 6y_2 = v \\ y_1 + y_2 = 1 \end{cases}$$

得到非负解为

$$x_3^* = \frac{1}{3},\ x_4^* = \frac{2}{3},\ y_1^* = \frac{1}{2},\ y_2^* = \frac{1}{2},\ v^* = 5$$

于是，以矩阵 $\mathbf{A}$ 为赢得矩阵的对策的一个解为

$$\mathbf{x}^* = \left(0, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right)^\top,\ \mathbf{y}^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0\right)^\top,\ V_G = 5$$

线性规划法

- **定理 5**　任一矩阵对策一定存在混合策略下的解。

- 求解矩阵对策可等价地转化为求解互为对偶的线性规划问题 (P) 和 (D)，故在问题 (P) 中令 $x_i{}' = \frac{x_i}{w}$，$i = 1, \ldots, m$，则约束转化为

$$\begin{cases} \sum_i a_{ij} x_i' \geq 1 \ (j = 1, \ldots, n) \\ \sum_i x_i' = \frac{1}{w} \\ x_i' \geq 0 \ (i = 1, \ldots, m) \end{cases}$$

则 (P) 等价于线性规划问题

$$(\mathrm{P}') \quad \min \sum_i x_i'$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} \sum_i a_{ij} x_i' \geq 1 \ (j = 1, \ldots, n) \\ x_i' \geq 0 \ (i = 1, \ldots, m) \end{cases}$$

线性规划法

- 同理，作变换

$$y_j{}' = \frac{x_j}{v},\ j = 1, \dots, n$$

则问题 (D) 等价于线性规划问题

$$(\mathrm{D}')\quad \max \sum_j y_j^{'}$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} \sum_j a_{ij} y_j^{'} \le 1\ (i = 1, \dots, m) \\ y_j^{'} \ge 0\ (j = 1, \dots, n) \end{cases}$$

- 利用单纯形法求解 (P') 和 (D')，得到 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ 和 w, v
- 利用变换式得到对策问题的解和值

例 4

- 利用线性规划方法求解矩阵对策，其赢得矩阵为

$$\begin{bmatrix} 7 & 2 & 9 \\ 2 & 9 & 0 \\ 9 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

例 4

- **求解可以转化成两个互为对偶的线性规划问题**

$$
\begin{aligned}
&\text{(P)} \quad \min\ (x_1 + x_2 + x_3) \\
&\qquad \text{s.t.} \begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 9x_3 \geq 1 \\ 2x_1 + 9x_2 \geq 1 \\ 9x_1 + 11x_3 \geq 1 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\text{(D)} \quad \max\ (y_1 + y_2 + y_3) \\
&\qquad \text{s.t.} \begin{cases} 7y_1 + 2y_2 + 9y_3 \leq 1 \\ 2y_1 + 9y_2 \leq 1 \\ 9y_1 + 11y_3 \leq 1 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

例 4

- **上述线性规划的解为**

$$\mathbf{x} = \left(\frac{1}{20}, \frac{1}{10}, \frac{1}{20}\right)^\top, \quad w = \frac{1}{5}$$

$$\mathbf{y} = \left(\frac{1}{20}, \frac{1}{10}, \frac{1}{20}\right)^\top, \quad v = \frac{1}{5}$$

因此对策问题的解为

$$V_G = \frac{1}{w} = \frac{1}{v} = 5$$

$$\mathbf{x}^* = V_G \mathbf{x} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)^\top$$

$$\mathbf{y}^* = V_G \mathbf{y} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)^\top$$

课堂练习 1

- 用图解法求解矩阵对策 $G=\{S_1,S_2;A\}$，其中

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

课堂练习 2

- 用线性规划方法求解矩阵对策，其中赢得矩阵 $\mathbf{A}$ 为

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

小结

- 图解法
  - 赢得矩阵为 $2 \times n$ 或 $m \times 2$ 阶
  - 从几何上理解对策论的思想
- 方程组法
  - 优超原则
  - 鞍点判断
- 线性规划法
  - 任一矩阵对策一定存在混合策略下的解
  - 单纯形法
- 课后作业: P376, 习题 12.5

Q&A

Thank you!

感谢您的聆听和反馈