

## 第二章 线性规划

修贤超

<https://xianchaoxiu.github.io>

- 2.1 线性规划问题及其数学模型
- 2.2 图解法
- 2.3 单纯形法原理
- 2.4 单纯形法计算步骤
- 2.5 单纯形法的进一步讨论
- 2.6 线性规划的对偶问题
- 2.7 对偶问题的基本性质

## ■ 考虑求解线性规划问题

$$\max z = -3x_1 + x_3$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 \geq 1 \\ 3x_2 + x_3 = 9 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\max z = -3x_1 + x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_5 = 1 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = 9 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

## ■ 添加人工变量 $x_6, x_7$

$$\max z = -3x_1 + x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_5 = 1 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = 9 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\max z = -3x_1 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 - Mx_6 - Mx_7$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_5 + x_6 = 1 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + x_7 = 9 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{cases}$$

# 大 $M$ 法

## ■ 用单纯形法求解

$c_j \rightarrow$			$-3$	$0$	$1$	$0$	$0$	$-M$	$-M$
$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{b}$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
$0$	$x_4$	$4$	$1$	$1$	$1$	$1$	$0$	$0$	$0$
$-M$	$x_6$	$1$	$-2$	$[1]$	$-1$	$0$	$-1$	$1$	$0$
$-M$	$x_7$	$9$	$0$	$3$	$1$	$0$	$0$	$0$	$1$
$c_j - z_j$			$-3 - 2M$	$4M$	$1$	$0$	$-M$	$0$	$0$
$0$	$x_4$	$3$	$3$	$0$	$2$	$1$	$1$	$-1$	$0$
$0$	$x_2$	$1$	$-2$	$1$	$-1$	$0$	$-1$	$1$	$0$
$-M$	$x_7$	$6$	$[6]$	$0$	$4$	$0$	$3$	$-3$	$1$
$c_j - z_j$			$-3 + 6M$	$0$	$1 + 4M$	$0$	$3M$	$-4M$	$0$

# 大 $M$ 法

## ■ 用单纯形法求解 (续)

$c_j \rightarrow$			$-3$	$0$	$1$	$0$	$0$	$-M$	$-M$
$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{b}$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
$0$	$x_4$	$0$	$0$	$0$	$0$	$1$	$-1/2$	$-1/2$	$1/2$
$0$	$x_2$	$3$	$0$	$1$	$1/3$	$0$	$0$	$0$	$1/3$
$-3$	$x_1$	$1$	$1$	$0$	$[2/3]$	$0$	$1/2$	$-1/2$	$1/6$
$c_j - z_j$			$0$	$0$	$3$	$0$	$3/2$	$-3/2 - M$	$1/2 - M$
$0$	$x_4$	$0$	$0$	$0$	$0$	$1$	$-1/2$	$1/2$	$-1/2$
$0$	$x_2$	$5/2$	$-1/2$	$1$	$0$	$0$	$-1/4$	$1/4$	$1/4$
$1$	$x_3$	$3/2$	$3/2$	$0$	$1$	$0$	$3/4$	$-3/4$	$1/4$
$c_j - z_j$			$-9/2$	$0$	$0$	$0$	$-3/4$	$3/4 - M$	$-1/4 - M$

# 例 1

## ■ 用大 $M$ 法求解线性规划问题

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 6x_1 + 4x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 100 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 120 \\ x_1 = 14 \\ x_2 \geq 22 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

# 例 1

## ■ 标准化, 增加人工变量

$$\begin{aligned} \max z &= 6x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 - Mx_6 - Mx_7 \\ \text{s.t. } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 100 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_4 = 120 \\ x_1 + x_6 = 14 \\ x_2 - x_5 + x_7 = 22 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$



# 例 1

## ■ 用单纯形法求解

$c_j \rightarrow$			6	4	0	0	0	$-M$	$-M$
$C_B$	$X_B$	<b>b</b>	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
0	$x_3$	100	2	3	1	0	0	0	0
0	$x_4$	120	4	2	0	1	0	0	0
$-M$	$x_6$	14	[1]	0	0	0	0	1	0
$-M$	$x_7$	22	0	1	0	0	-1	0	1
$c_j - z_j$			$M + 6$	$M + 4$	0	0	$-M$	0	0
0	$x_3$	72	0	3	1	0	0	-2	0
0	$x_4$	64	0	2	0	1	0	-4	0
6	$x_1$	14	1	0	0	0	0	1	0
$-M$	$x_7$	22	0	[1]	0	0	-1	0	1
$c_j - z_j$			0	$M + 4$	0	0	$-M$	$-6 - M$	0

# 例 1

## ■ 用单纯形法求解 (续)

$c_j \rightarrow$			6	4	0	0	0	$-M$	$-M$
$C_B$	$X_B$	$b$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
0	$x_3$	6	0	0	1	0	[3]	-2	-3
0	$x_4$	20	0	0	0	1	2	-4	-2
6	$x_1$	14	1	0	0	0	0	1	0
4	$x_2$	22	0	1	0	0	-1	0	1
$c_j - z_j$			0	0	0	0	4	$-6 - M$	$-4 - M$
0	$x_5$	2	0	0	1/3	0	1	-2/3	-1
0	$x_4$	16	0	0	-2/3	1	0	-8/3	0
6	$x_1$	14	1	0	0	0	0	1	0
4	$x_2$	24	0	1	1/3	0	0	-2/3	0
$c_j - z_j$			0	0	-4/3	0	0	$-10/3 - M$	$-M$

# 两阶段法

## ■ 对于标准形式线性规划问题

$$\begin{aligned} \max \quad & z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, \dots, m) \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n) \end{cases} \end{aligned}$$

## ■ 引入辅助问题

$$\begin{aligned} \min \quad & w = \sum_{i=1}^m y_i \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + y_i = b_i \quad (i = 1, \dots, m) \\ x_j, y_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n) \end{cases} \end{aligned}$$

# 两阶段法

## ■ 第一阶段: 采用单纯形法求解, 求解辅助问题

当人工变量取值为 0 时, 目标函数值也为 0。这时候的最优解就是原线性规划问题的一个基可行解。如果第一阶段求解结果最优解的目标函数值不为 0, 也即最优解的基变量中含有非零的人工变量, 表明原线性规划问题无可行解

## ■ 第二阶段: 在第一阶段已求得原问题的一个初始基可行解的基础上, 再求原问题的最优解

对第一阶段的最优单纯形表稍加改动, 首先把第一行的价值向量替换成原问题的价值向量, 人工变量全部从表中去掉, 然后继续用单纯形法计算

## ■ 原问题有可行解时, 辅助问题最优值为 0

## 例 2

### ■ 求解线性规划问题

$$\begin{aligned} \max z &= -3x_1 + x_3 \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 \geq 1 \\ 3x_2 + x_3 = 9 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

### ■ 大 $M$ 法

$$\begin{aligned} \max z &= -3x_1 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 - Mx_6 - Mx_7 \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 - x_5 + x_6 = 1 \\ 3x_2 + x_3 + x_7 = 9 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

## 例 2

### ■ 第一阶段

$$\begin{aligned} \min w &= x_6 + x_7 \quad (\max w' = -x_6 - x_7) \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 - x_5 + x_6 = 1 \\ 3x_2 + x_3 + x_7 = 9 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

### ■ 第二阶段

$$\begin{aligned} \max z &= -3x_1 + 0x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 - x_5 = 1 \\ 3x_2 + x_3 = 9 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

# 例 2

## ■ 第一阶段

$c_j \rightarrow$			0	0	0	0	0	-1	-1
$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{b}$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
0	$x_4$	4	1	1	1	1	0	0	0
-1	$x_6$	1	-2	[1]	-1	0	-1	1	0
-1	$x_7$	9	0	3	1	0	0	0	1
$c_j - z_j$			-2	4	0	0	-1	0	0
0	$x_4$	3	3	0	2	1	1	-1	0
0	$x_2$	1	-2	1	-1	0	-1	1	0
-1	$x_7$	6	[6]	0	4	0	3	-3	1
$c_j - z_j$			6	0	4	0	3	-4	0
0	$x_4$	0	0	0	0	1	-1/2	1/2	-1/2
0	$x_2$	3	0	1	1/3	0	0	0	1/3
0	$x_1$	1	1	0	2/3	0	1/2	-1/2	1/6
$c_j - z_j$			0	0	0	0	0	-1	-1

# 例 2

## ■ 第二阶段

$c_j \rightarrow$			-3	0	1	0	0
$C_B$	$X_B$	$b$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
0	$x_4$	0	0	0	0	1	$-1/2$
0	$x_2$	3	0	1	$1/3$	0	0
-3	$x_1$	1	1	0	$[2/3]$	0	$1/2$
$c_j - z_j$			0	0	3	0	$3/2$
0	$x_4$	0	0	0	0	1	$-1/2$
0	$x_2$	$5/2$	$-1/2$	1	0	0	$-1/4$
1	$x_3$	$3/2$	$3/2$	0	1	0	$3/4$
$c_j - z_j$			$-9/2$	0	0	0	$-3/4$



## 单纯形法计算中的几个问题

- 当所有  $\sigma_j \leq 0$ , 且某个非基变量的检验数为 0 时, 那么线性规划问题有无穷多最优解 (见例 3)
- 当结果出现所有  $\sigma_j \leq 0$  时, 如基变量中仍含有非零的人工变量(两阶段法求解时第一阶段目标函数值不等于零), 表明问题无可行解 (见例 4)
- 当目标函数求极小化时, 解的判别以  $\sigma_j \geq 0$  作为判别最优解的标准 (见例 5)

## 例 3: 无穷多解

### ■ 考虑求解线性规划问题

$$\max z = x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 \leq 4 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\max z = x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_3 = 4 \\ x_2 + x_4 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_5 = 8 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

## 例 3: 无穷多解

### ■ 用单纯形法求解

$c_j \rightarrow$			1	2	0	0	0
$C_B$	$X_B$	$b$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
0	$x_3$	4	1	0	1	0	0
0	$x_4$	3	0	[1]	0	1	0
0	$x_5$	8	1	2	0	0	1
$c_j - z_j$			1	2	0	0	0
0	$x_3$	4	1	0	1	0	0
0	$x_2$	3	0	1	0	1	0
0	$x_5$	2	[1]	0	0	-2	1
$c_j - z_j$			1	0	0	-2	0

## 例 3: 无穷多解

### ■ 用单纯形法求解 (续)

$c_j \rightarrow$			1	2	0	0	0
$C_B$	$X_B$	$b$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
0	$x_3$	2	0	0	1	[2]	-1
2	$x_2$	3	0	1	0	1	0
1	$x_1$	2	1	0	0	-2	1
$c_j - z_j$			0	0	0	0	-1
0	$x_4$	1	0	0	[1/2]	1	-1/2
2	$x_2$	2	0	1	-1/2	0	1/2
1	$x_1$	4	1	0	1	0	0
$c_j - z_j$			0	0	0	0	-1

■  $X_1 = (2, 3, 2, 0, 0)^\top$ ,  $X_2 = (4, 2, 0, 1, 0)^\top, \dots$

## 例 4: 无可行解

### ■ 考虑求解线性规划问题

$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 + x_2 \\ \text{s.t. } &\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 2 \\ 2x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$\Downarrow$

$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 - Mx_5 \\ \text{s.t. } &\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 = 6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

## 例 4: 无可行解

### ■ 用单纯形法求解

$c_j \rightarrow$			2	1	0	0	$-M$
$C_B$	$X_B$	$b$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
0	$x_3$	2	[1]	1	1	0	0
$-M$	$x_5$	6	2	2	0	-1	1
$c_j - z_j$			$2 + 2M$	$1 + 2M$	0	$-M$	0
2	$x_1$	2	1	1	1	0	0
$-M$	$x_5$	2	0	0	-2	-1	1
$c_j - z_j$			0	-1	$-2 - 2M$	$-M$	0

■ 当所有  $\sigma_j \leq 0$  时, 基变量中仍含有非零的人工变量  $x_5 = 2$ , 故无可行解

## 例 5: 极小化

### ■ 考虑求解线性规划问题

$$\begin{aligned} \min \quad & z = x_1 - x_2 + x_3 - 3x_5 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 6 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 5 \\ 2x_2 + x_4 + 3x_5 + x_6 = 8 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

## 例 5: 极小化

### ■ 用单纯形法求解

$c_j \rightarrow$			1	-1	1	0	-3	0
$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{b}$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$
1	$x_3$	6	0	1	1	-1	2	0
1	$x_1$	5	1	2	0	-2	0	0
0	$x_6$	8	0	2	0	1	[3]	1
$c_j - z_j$			0	-4	0	3	-5	0
1	$x_3$	2/3	0	-1/3	1	-5/3	0	-2/3
1	$x_1$	5	1	[2]	0	-2	0	0
-3	$x_5$	8/3	0	2/3	0	1/3	1	1/3
$c_j - z_j$			0	-2/3	0	14/3	0	5/3



# 单纯形法的进一步讨论

## ■ 用单纯形法求解 (续)

$c_j \rightarrow$			1	-1	1	0	-3	0
$C_B$	$X_B$	$b$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$
1	$x_3$	3/2	1/6	0	1	-2	0	-2/3
-1	$x_2$	5/2	1/2	1	0	-1	0	0
-3	$x_5$	1	-2/3	0	0	1	1	1/3
$c_j - z_j$			1/3	0	0	4	0	5/3

■ 最优解  $X = (0, 5/2, 3/2, 0, 1)^T$

■ 最优值  $z^* = -4$

# 单纯形法计算中的几个问题

- 按最小比值  $\theta$  来确定换出基的变量时，有时出现存在两个以上相同的最小比值，从而使下一个表的基可行解中出现一个或多个基变量等于零的**退化解**
- 退化解的出现原因是模型中存在多余的约束，使多个基可行解对应同一顶点
- 当存在退化解时，就有可能出现迭代计算的循环
- **解决办法**
  - 当存在多个  $\sigma_j > 0$  时，始终选取中下标值为**最小**的变量作为换入变量
  - 当计算  $\theta$  值出现两个以上相同的最小比值时，始终选取下标值为**最小**的变量作为换出变量

# 课堂练习 1

- 已知初始单纯形表和用迭代后单纯形法，试求括弧中的值

项目		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
$x_4$	6	(b)	(c)	(d)	1	0
$x_5$	1	-1	3	(e)	0	1
$c_j - z_j$		(a)	-1	2	0	0
$x_1$	(f)	(g)	2	-1	1/2	0
$x_5$	4	(h)	(i)	1	1/2	1
$c_j - z_j$		0	-7	(j)	(k)	(l)

### ■ 用大 $M$ 法求解线性规划问题

$$\begin{aligned} \min z &= -3x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{s.t. } &\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 3 \\ -2x_1 + x_3 = 1 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

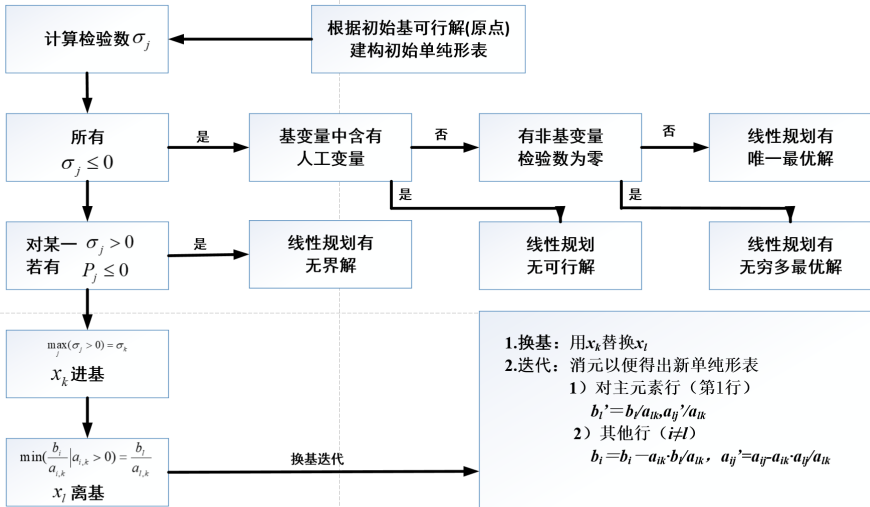
## 课堂练习 2 (答案)

- 标准化并添加人工变量后得到

$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 - x_2 - x_3 + 0x_4 + 0x_5 - Mx_6 - Mx_7 \\ \text{s.t. } \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_6 = 3 \\ -2x_1 + x_3 + x_7 = 1 \\ x_j \geq 0 \ (j = 1, \dots, 7) \end{cases} \end{aligned}$$

- 最优解  $\mathbf{X} = (4, 1, 9)^\top$ , 最优值  $z^* = -2$

# 小结



单纯形法完整计算步骤

*Q&A*

*Thank you!*

感谢您的聆听和反馈