

第五章 对策论

修贤超

机电工程与自动化学院
上海大学

xcxiu@shu.edu.cn

1. 引言
2. 矩阵对策的基本理论
3. 矩阵对策的解法

1. 引言

2. 矩阵对策的基本理论

3. 矩阵对策的解法

■ 对策现象和对策论

- **对策论**: 竞赛论或博弈论, 研究对策现象中各方是否存在最合理的行动方案, 以及如何找到合理的行动方案的数学理论和方法。

■ 对策现象和对策论

- **对策论:** 竞赛论或博弈论, 研究对策现象中各方是否存在最合理的行动方案, 以及如何找到合理的行动方案的数学理论和方法。



JOHN NASH
1928-2015

JOHN NASH: THE MAN WHO INVENTED GAME THEORY
by David Foray
Illustrated by: [unintelligible]

Introduction

John Nash and Margaret Love (Nash's first wife) were married in 1958. The marriage was a success. The Nash family moved to Princeton and lived in the famous Princeton Inn. John Nash was a brilliant mathematician and a brilliant strategist. He was a brilliant strategist in the sense that he was able to find the best strategy in a game. He was a brilliant strategist in the sense that he was able to find the best strategy in a game. He was a brilliant strategist in the sense that he was able to find the best strategy in a game.

Recent Definition and Terminology

In this article, we define the term "game" in a broad sense and we introduce the term "game theory". We define the term "game" in a broad sense and we introduce the term "game theory". We define the term "game" in a broad sense and we introduce the term "game theory". We define the term "game" in a broad sense and we introduce the term "game theory".



■ 对策现象和对策论

- **对策论:** 竞赛论或博弈论, 研究对策现象中各方是否存在最合理的行动方案, 以及如何找到合理的行动方案的数学理论和方法。




- **对策现象:** 具有竞争或对抗性质的现象, 如竞技体育 (下棋、打牌以及足球等)、国际政治谈判、商业谈判等。

■ 对策现象和对策论

- 对策论:** 竞赛论或博弈论, 研究对策现象中各方是否存在最合理的行动方案, 以及如何找到合理的行动方案的数学理论和方法。



-  **对策现象：**具有竞争或对抗性质的现象，如竞技体育（下棋、打牌以及足球等）、国际政治谈判、商业谈判等。



■ 局中人 (players)

- 有权决定自己行动方案的对策参加者称为局中人，通常用 I 表示局中人的集合。如果有 n 个局中人，则

$$I = \{1, 2, \dots, n\}$$

■ 局中人 (players)

- 有权决定自己行动方案的对策参加者称为局中人，通常用 I 表示局中人的集合。如果有 n 个局中人，则

$$I = \{1, 2, \dots, n\}$$

- 一个对策中至少有 2 个局中人，如在“齐王赛马”中，局中人是齐王和田忌；

■ 局中人 (players)

- 有权决定自己行动方案的对策参加者称为局中人，通常用 I 表示局中人的集合。如果有 n 个局中人，则

$$I = \{1, 2, \dots, n\}$$

- 一个对策中至少有 2 个局中人，如在“齐王赛马”中，局中人是齐王和田忌；
- 局中人可以为个人或集体；

■ 局中人 (players)

- 有权决定自己行动方案的对策参加者称为局中人，通常用 I 表示局中人的集合。如果有 n 个局中人，则

$$I = \{1, 2, \dots, n\}$$

- 一个对策中至少有 2 个局中人，如在“齐王赛马”中，局中人是齐王和田忌；
- 局中人可以为个人或集体；
- 对策论中对局中人的假设是每个局中人都是理智的，不存在侥幸心理，不存在利用局中人决策的失误来扩大自身利益的行为。

■ 策略 (strategies)

- 可供局中人选择的一个实际可行的完整的行动方案称为一个策略。
参加对策的每一局中人 i 的策略记为 s_i ，一般每一局中人的策略集中至少应包括两个策略。

■ 策略 (strategies)

- 可供局中人选择的一个实际可行的完整的行动方案称为一个策略。
参加对策的每一局中人 i 的策略记为 s_i ，一般每一局中人的策略集中至少应包括两个策略。
- 在“齐王赛马”中，若用 (上, 中, 下) 表示上马、中马、下马依次参赛，就是一个完整的行动方案，即为一个策略。

■ 策略 (strategies)

- 可供局中人选择的一个实际可行的完整的行动方案称为一个策略。
参加对策的每一局中人 i 的策略记为 s_i ，一般每一局中人的策略集中至少应包括两个策略。
- 在“齐王赛马”中，若用 (上, 中, 下) 表示上马、中马、下马依次参赛，就是一个完整的行动方案，即为一个策略。
- 齐王和田忌各自都有 6 个策略
 - (上, 中, 下)
 - (上, 下, 中)
 - (中, 上, 下)
 - (中, 下, 上)
 - (下, 中, 上)
 - (下, 上, 中)

■ 赢得函数 (支付函数)(payoff function)

- 每一局中人所出策略形成的策略组称为一个**局势**。即设 s_i 是第 i 个局中人的一个策略，则 n 个局中人的策略形成的策略组 $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ 就是一个局势，记 S 为全部局势的集合。

■ 赢得函数 (支付函数)(payoff function)

- 每一局中人所出策略形成的策略组称为一个**局势**。即设 s_i 是第 i 个局中人的一个策略, 则 n 个局中人的策略形成的策略组 $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ 就是一个局势, 记 S 为全部局势的集合。
- 当一个局势 s 出现后, 应该为每一局中人 i 规定一个赢得值 (或所失值) $H_i(s)$, 称为局中人 i 的**赢得函数**。

■ 赢得函数 (支付函数)(payoff function)

- 每一局中人所出策略形成的策略组称为一个**局势**。即设 s_i 是第 i 个局中人的一个策略, 则 n 个局中人的策略形成的策略组 $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ 就是一个局势, 记 S 为全部局势的集合。
- 当一个局势 s 出现后, 应该为每一局中人 i 规定一个赢得值 (或所失值) $H_i(s)$, 称为局中人 i 的**赢得函数**。
- 在“齐王赛马”中
 - 局中人集合 $I = \{1, 2\}$;
 - 齐王和田忌的策略集可分别用 $S_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$ 和 $S_2 = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6\}$ 表示;
 - 齐王的任一策略 α_i 和田忌的任一策略 β_j 就构成了一个局势 s_{ij} ;
 - 如果 $\alpha_1 = (\text{上}, \text{中}, \text{下})$, $\beta_1 = (\text{上}, \text{中}, \text{下})$, 则在局势 s_{11} 下, 齐王的赢得值 $H_1(s_{11}) = 3$, 田忌的赢得值为 $H_2(s_{11}) = -3$ 。

■ 例 1 (市场购买力争夺问题)

- 据预测，某乡镇下一年的饮食品购买力将有 4000 万元。乡镇企业和中心城市企业饮食品的生产情况是：乡镇企业有特色饮食品和低档饮食品两类，中心城市企业有高档饮食品和低档饮食品两类产品。它们争夺这一部分购买力的结局见下表。

乡镇企业策略	出售高档饮食品	出售低档饮食品
出售特色饮食品	2000	3000
出售低档饮食品	1000	3000

■ 例 1 (市场购买力争夺问题)

- 据预测，某乡镇下一年的饮食品购买力将有 4000 万元。乡镇企业和中心城市企业饮食品的生产情况是：乡镇企业有特色饮食品和低档饮食品两类，中心城市企业有高档饮食品和低档饮食品两类产品。它们争夺这一部分购买力的结局见下表。

乡镇企业策略	出售高档饮食品	出售低档饮食品
出售特色饮食品	2000	3000
出售低档饮食品	1000	3000

- 问乡镇企业和中心城市企业应如何选择对自己最有利的产品策略。

■ 例 2 (销售竞争问题)

- 假定企业 I, II 均能向市场出售某一产品, 不妨假定他们可于时间区间 $[0, 1]$ 内任一时间出售。设企业 I 在时刻 x 出售, 企业 II 在时刻 y 出售, 则企业 I 的收益 (赢得) 函数为

$$H(x, y) = \begin{cases} c(y - x) & \text{若 } x < y \\ \frac{1}{2}c(1 - x) & \text{若 } x = y \\ c(1 - x) & \text{若 } x > y \end{cases}$$

- 问这两个企业各选择什么时机出售对自己最有利?

■ 例 2 (销售竞争问题)

- 假定企业 I, II 均能向市场出售某一产品, 不妨假定他们可于时间区间 $[0, 1]$ 内任一时间出售。设企业 I 在时刻 x 出售, 企业 II 在时刻 y 出售, 则企业 I 的收益 (赢得) 函数为

$$H(x, y) = \begin{cases} c(y - x) & \text{若 } x < y \\ \frac{1}{2}c(1 - x) & \text{若 } x = y \\ c(1 - x) & \text{若 } x > y \end{cases}$$

- 问这两个企业各选择什么时机出售对自己最有利?
- 在这个例子中, 企业 I, II 可选择的策略均有无穷多个。

■ 例 3 (拍卖问题)

- 最常见的一种拍卖形式是先由拍卖商把拍卖品描述一番，然后提出第一个报价。接下来由买者报价，每一次报价都要比前一次高，最后谁出的价最高，拍卖品即归谁所有。

■ 例 3 (拍卖问题)

- 最常见的一种拍卖形式是先由拍卖商把拍卖品描述一番，然后提出第一个报价。接下来由买者报价，每一次报价都要比前一次高，最后谁出的价最高，拍卖品即归谁所有。
- 假设有 n 个买主给出的报价分别为 p_1, \dots, p_n ，且不妨设 $p_n > p_{n-1} > \dots > p_1$ ，现买主 n 只要报价略高于 p_{n-1} ，就能买到拍卖品，即拍卖品实际上是在次高价格上卖出的。

■ 例 3 (拍卖问题)

- 最常见的一种拍卖形式是先由拍卖商把拍卖品描述一番，然后提出第一个报价。接下来由买者报价，每一次报价都要比前一次高，最后谁出的价最高，拍卖品即归谁所有。
- 假设有 n 个买主给出的报价分别为 p_1, \dots, p_n ，且不妨设 $p_n > p_{n-1} > \dots > p_1$ ，现买主 n 只要报价略高于 p_{n-1} ，就能买到拍卖品，即拍卖品实际上是在次高价格上卖出的。
- 现在的问题是，各买主之间可能知道他人的估价，也可能不知道他人的估计，每人应如何报价对自己能以较低的价格得到拍卖品最为有利？最后的结果又会怎样？

■ 例 4 (囚犯问题)

- 设有两个嫌疑犯因涉嫌某一大案被警官拘留，警官分别对两人进行审讯。根据法律，如果两个人都承认此案是他们干的，则每人各判刑 7 年；如果两人都不承认，则由于证据不足，两人各判刑 1 年；如果只有一人承认，则承认者予以宽大释放，则不承认者将判刑 9 年。

■ 例 4 (囚犯问题)

- 设有两个嫌疑犯因涉嫌某一大案被警官拘留，警官分别对两人进行审讯。根据法律，如果两个人都承认此案是他们干的，则每人各判刑 7 年；如果两人都不承认，则由于证据不足，两人各判刑 1 年；如果只有一人承认，则承认者予以宽大释放，则不承认者将判刑 9 年。
- 对两个囚犯来说，面临着一个在“承认”和“不承认”这两个策略间进行选择的难题？

■ 对策的分类

- 根据局中人的个数，分为二人对策和多人对策
- 根据各局中人的赢得函数的代数和是否为零，分为零和对策和非零和对策
- 根据各局中人之间是否允许合作，分为合作对策和非合作对策
- 根据局中人的策略集中的策略个数，分为有限对策和无限对策

■ 对策的分类

- 根据局中人的个数，分为**二人对策**和**多人对策**
- 根据各局中人的赢得函数的代数和是否为零，分为**零和对策**和**非零和对策**
- 根据各局中人之间是否允许合作，分为**合作对策**和**非合作对策**
- 根据局中人的策略集中的策略个数，分为**有限对策**和**无限对策**

■ 研究对象

- **二人有限零和对策**，又称为**矩阵对策**，是目前为止在理论研究和求解方法都比较完善的一个对策分支。
- 齐王赛马

■ 小结

📄 对策论

📄 三要素

- 局中人 (players)
- 策略 (strategies)
- 赢得函数 (payoff function)

📄 对策的分类

- 二人对策和多人对策
- 零和对策和非零和对策
- 合作对策和非合作对策
- 有限对策和无限对策

📄 矩阵对策

1. 引言

2. 矩阵对策的基本理论

3. 矩阵对策的解法

矩阵对策的基本理论

■ 矩阵对策的纯策略

□ 二人有限零和对策

矩阵对策的基本理论

■ 矩阵对策的纯策略

□ 二人有限零和对策

- **局中人:** 两人 (I, II), 分别有 m, n 个纯策略可供选择
- **策略集:** $S_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$, $S_2 = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$
- **策略集:** $S_1 \times S_2 = \{(\alpha_i, \beta_j), i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n\}$
- **赢得函数:** $H_1(\alpha_i, \beta_j) = a_{ij}$, $H_2(\alpha_i, \beta_j) = -a_{ij}$, 矩阵表示为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- **矩阵对策:** 局中人 + 策略集 + 赢得函数, 即 $G = \{S_1, S_2; \mathbf{A}\}$

矩阵对策的基本理论

■ 矩阵对策的纯策略

- 在“齐王赛马”中，齐王和田忌各自都有 6 个策略：(上, 中, 下)、(上, 下, 中)、(中, 上, 下)、(中, 下, 上)、(下, 中, 上)、(下, 上, 中)。齐王的赢得矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

矩阵对策的基本理论

■ 矩阵对策的纯策略

- 在“齐王赛马”中，齐王和田忌各自都有 6 个策略：(上, 中, 下)、(上, 下, 中)、(中, 上, 下)、(中, 下, 上)、(下, 中, 上)、(下, 上, 中)。齐王的赢得矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

- 矩阵对策模型给定后，各局中人面临的问题：如何选择对自己最有利的纯策略以取得最大的赢得（或最少所失）？

矩阵对策的基本理论

■ 例 1

□ 设有一矩阵策略 $G = \{S_1, S_2; \mathbf{A}\}$, 其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -6 & 1 & -8 \\ 3 & 2 & 4 \\ 9 & -1 & -10 \\ -3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

矩阵对策的基本理论

■ 例 1

□ 设有一矩阵策略 $G = \{S_1, S_2; \mathbf{A}\}$, 其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -6 & 1 & -8 \\ 3 & 2 & 4 \\ 9 & -1 & -10 \\ -3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

□ 考虑到对方必然会设法使自己所得最少这一点, 就应该从各自可能出现的 most 不利的情形中选择一个最有利的情形作为决策的依据, 这就是所谓的“**理智行为**”。

矩阵对策的基本理论

■ 例 1

□ 设有一矩阵策略 $G = \{S_1, S_2; \mathbf{A}\}$, 其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -6 & 1 & -8 \\ 3 & 2 & 4 \\ 9 & -1 & -10 \\ -3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

- 考虑到对方必然会设法使自己所得最少这一点, 就应该从各自可能出现的 most 不利的情形中选择一个最有利的情形作为决策的依据, 这就是所谓的“**理智行为**”。
- 局中人 I 和 II 的“理智行为”分别是选择纯策略 α_2 和 β_2 , 这是局中人 I 的赢得值和局中人 II 的所失值的绝对值相等, 因此 (α_2, β_2) 称为**平衡局势**, 即**最优纯策略**。

矩阵对策的基本理论

■ 矩阵对策的纯策略

□ **定义 1:** 设 $G = \{S_1, S_2; \mathbf{A}\}$ 为一矩阵对策, 其中
 $S_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$, $S_2 = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$, $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$ 。若

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}$$

成立, 记其值为 V_G , 则称 V_G 为对策的值, 称使上式成立的纯局势 (α_i^*, β_j^*) 为 G 在纯策略意义下的解 (或平衡局势), 称 α_i^* 和 β_j^* 分别为局中人 I 和 II 的最优纯策略。

矩阵对策的基本理论

■ 矩阵对策的纯策略

□ **定义 1:** 设 $G = \{S_1, S_2; \mathbf{A}\}$ 为一矩阵对策, 其中
 $S_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$, $S_2 = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$, $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$ 。若

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}$$

成立, 记其值为 V_G , 则称 V_G 为对策的值, 称使上式成立的纯局势 (α_i^*, β_j^*) 为 G 在纯策略意义下的解 (或平衡局势), 称 α_i^* 和 β_j^* 分别为局中人 I 和 II 的最优纯策略。

□ 矩阵 \mathbf{A} 中平衡局势 (α_2, β_2) 对应的元素 a_{22} 既是其所在行的最小元素, 又是其所在列的最大元素, 即有

$$a_{i2} \leq a_{22} \leq a_{2j}, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad j = 1, 2, 3$$

矩阵对策的基本理论

■ 矩阵对策的纯策略

□ **定理 1:** 矩阵对策 $G = \{S_1, S_2; \mathbf{A}\}$ 在纯策略意义下有解的充要条件是: 存在纯局势 (α_i^*, β_j^*) , 使得对任意 i 和 j , 有

$$a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*} \leq a_{i^*j}$$

矩阵对策的基本理论

■ 矩阵对策的纯策略

- **定理 1:** 矩阵对策 $G = \{S_1, S_2; A\}$ 在纯策略意义下有解的充要条件是: 存在纯局势 (α_i^*, β_j^*) , 使得对任意 i 和 j , 有

$$a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*} \leq a_{i^*j}$$

- (充分性) 设有 i^* 和 j^* 使得

$$\min_j a_{i^*j} = \max_i \min_j a_{ij}, \quad \max_i a_{ij^*} = \min_j \max_i a_{ij}$$

矩阵对策的基本理论

■ 矩阵对策的纯策略

□ **定理 1:** 矩阵对策 $G = \{S_1, S_2; A\}$ 在纯策略意义下有解的充要条件是: 存在纯局势 (α_i^*, β_j^*) , 使得对任意 i 和 j , 有

$$a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*} \leq a_{i^*j}$$

□ (充分性) 设有 i^* 和 j^* 使得

$$\min_j a_{i^*j} = \max_i \min_j a_{ij}, \quad \max_i a_{ij^*} = \min_j \max_i a_{ij}$$

由于 $\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}$, 有

$$\max_i a_{ij^*} = \min_j a_{i^*j} \leq a_{i^*j^*} \leq \max_i a_{ij^*} = \min_j a_{i^*j}$$

矩阵对策的基本理论

■ 矩阵对策的纯策略

□ **定理 1:** 矩阵对策 $G = \{S_1, S_2; A\}$ 在纯策略意义下有解的充要条件是: 存在纯局势 (α_i^*, β_j^*) , 使得对任意 i 和 j , 有

$$a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*} \leq a_{i^*j}$$

□ (充分性) 设有 i^* 和 j^* 使得

$$\min_j a_{i^*j} = \max_i \min_j a_{ij}, \quad \max_i a_{ij^*} = \min_j \max_i a_{ij}$$

由于 $\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}$, 有

$$\max_i a_{ij^*} = \min_j a_{i^*j} \leq a_{i^*j^*} \leq \max_i a_{ij^*} = \min_j a_{i^*j}$$

因此对任意有 i^* 和 j^* 有

$$a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*} \leq a_{i^*j}$$

矩阵对策的基本理论

■ 矩阵对策的纯策略

□ (必要性) 由 $a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*} \leq a_{i^*j}$ 有 $\max_i a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*} \leq \min_j a_{i^*j}$,
而 $\min_j \max_i a_{ij} \leq \max_i a_{ij^*}$, $\min_j a_{i^*j} \leq \max_i \min_j a_{ij}$, 所以

$$\min_j \max_i a_{ij} \leq a_{i^*j^*} \leq \max_i \min_j a_{ij}$$

矩阵对策的基本理论

■ 矩阵对策的纯策略

□ (必要性) 由 $a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*} \leq a_{i^*j}$ 有 $\max_i a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*} \leq \min_j a_{i^*j}$,
而 $\min_j \max_i a_{ij} \leq \max_i a_{ij^*}$, $\min_j a_{i^*j} \leq \max_i \min_j a_{ij}$, 所以

$$\min_j \max_i a_{ij} \leq a_{i^*j^*} \leq \max_i \min_j a_{ij}$$

对任意 i, j , 有

$$\max_i \min_j a_{ij} \leq \min_j \max_i a_{ij}$$

矩阵对策的基本理论

■ 矩阵对策的纯策略

□ (必要性) 由 $a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*} \leq a_{i^*j}$ 有 $\max_i a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*} \leq \min_j a_{i^*j}$,
而 $\min_j \max_i a_{ij} \leq \max_i a_{ij^*}$, $\min_j a_{i^*j} \leq \max_i \min_j a_{ij}$, 所以

$$\min_j \max_i a_{ij} \leq a_{i^*j^*} \leq \max_i \min_j a_{ij}$$

对任意 i, j , 有

$$\max_i \min_j a_{ij} \leq \min_j \max_i a_{ij}$$

于是

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = a_{i^*j^*}$$

证毕。

矩阵对策的基本理论

■ 矩阵对策的纯策略

- 对任意矩阵 A , 称 $a_{i^*j^*}$ 为矩阵 A 的鞍点。在矩阵对策中, 矩阵 A 的鞍点也称为对策的鞍点。

矩阵对策的基本理论

■ 矩阵对策的纯策略

- 对任意矩阵 A , 称 $a_{i^*j^*}$ 为矩阵 A 的鞍点。在矩阵对策中, 矩阵 A 的鞍点也称为对策的鞍点。
- 一个平衡局势 (α_i^*, β_j^*) 应具有这样的性质: 当局中人 I 选择了纯策略 α_i^* 后, 局中人 II 为了使其所失最少, 只能选择纯策略 β_j^* , 否则就有可能失的更多; 当局中人 II 选择了纯策略 β_j^* 后, 局中人 I 为了得到最大的赢得也只能选择纯策略 α_i^* , 否则就会赢的更少, 双方的竞争在局势 (α_i^*, β_j^*) 下达到了一个平衡状态。

矩阵对策的基本理论

■ 例 2

□ 设有一矩阵策略 $G = \{S_1, S_2; \mathbf{A}\}$, 其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 11 & 8 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 5 & 8 & 7 & 8 \\ 10 & 7 & 9 & 6 \end{bmatrix}$$

矩阵对策的基本理论

■ 例 2

□ 设有一矩阵策略 $G = \{S_1, S_2; \mathbf{A}\}$, 其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 11 & 8 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 5 & 8 & 7 & 8 \\ 10 & 7 & 9 & 6 \end{bmatrix}$$

□ 直接在 \mathbf{A} 提供的赢得矩阵上计算, 有

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = a_{i^*j^*} = 8, \quad i^* = 1, \quad j^* = 2, 4$$

因此 $(\alpha_1, \beta_2), (\alpha_1, \beta_4)$ 都是对策解, 且 $V_G = 8$

矩阵对策的基本理论

■ 矩阵对策的纯策略

- 由上例可知，一般对策的解可以是不惟一的。

矩阵对策的基本理论

■ 矩阵对策的纯策略

- 由上例可知，一般对策的解可以是不惟一的。
- **性质 1:** (无差别性) 若 $(\alpha_{i_1}, \beta_{j_1})$ 和 $(\alpha_{i_2}, \beta_{j_2})$ 是对策 G 的两个解, 则 $a_{i_1 j_1} = a_{i_2 j_2}$ 。
- **性质 2:** (可交换性) 若 $(\alpha_{i_1}, \beta_{j_1})$ 和 $(\alpha_{i_2}, \beta_{j_2})$ 是对策 G 的两个解, 则 $(\alpha_{i_1}, \beta_{j_2})$ 和 $(\alpha_{i_2}, \beta_{j_1})$ 也是对策 G 的解。

矩阵对策的基本理论

■ 矩阵对策的纯策略

- 由上例可知，一般对策的解可以是不惟一的。
- **性质 1:** (无差别性) 若 $(\alpha_{i_1}, \beta_{j_1})$ 和 $(\alpha_{i_2}, \beta_{j_2})$ 是对策 G 的两个解, 则 $a_{i_1 j_1} = a_{i_2 j_2}$ 。
- **性质 2:** (可交换性) 若 $(\alpha_{i_1}, \beta_{j_1})$ 和 $(\alpha_{i_2}, \beta_{j_2})$ 是对策 G 的两个解, 则 $(\alpha_{i_1}, \beta_{j_2})$ 和 $(\alpha_{i_2}, \beta_{j_1})$ 也是对策 G 的解。
- **注意:** 矩阵对策的值是惟一的, 即当一个局中人选择了最优纯策略后, 他的赢得值不依赖于对方的纯策略。

矩阵对策的基本理论

■ 例 3

- 某单位采购员在秋天时要决定冬季取暖用煤的采购量。已知在正常气温条件下需要煤 $15t$ ，在较暖和较冷气温条件下分别需要煤 $10t$ 和 $20t$ 。假定冬季的煤价随天气寒冷程度而变化，在较暖、正常、较冷气温条件下每 t 煤的价格分别为 100 元，150 元和 200 元。又设秋季时每 t 煤的价格为 100 元，在没有关于当年冬季气温情况准确预报的条件下，**秋季时应采购多少 t 煤能使总支出最少？**

矩阵对策的基本理论

■ 例 3

- 某单位采购员在秋天时要决定冬季取暖用煤的采购量。已知在正常气温条件下需要煤 $15t$ ，在较暖和较冷气温条件下分别需要煤 $10t$ 和 $20t$ 。假定冬季的煤价随天气寒冷程度而变化，在较暖、正常、较冷气温条件下每 t 煤的价格分别为 100 元，150 元和 200 元。又设秋季时每 t 煤的价格为 100 元，在没有关于当年冬季气温情况准确预报的条件下，**秋季时应采购多少 t 煤能使总支出最少？**
- 将采购员看成一个局中人，有 3 个策略。在秋天时购买 $10t$ ， $15t$ 或 $20t$ 煤，分别记为 α_1 ， α_2 ， α_3 。

矩阵对策的基本理论

■ 例 3

- 某单位采购员在秋天时要决定冬季取暖用煤的采购量。已知在正常气温条件下需要煤 $15t$ ，在较暖和较冷气温条件下分别需要煤 $10t$ 和 $20t$ 。假定冬季的煤价随天气寒冷程度而变化，在较暖、正常、较冷气温条件下每 t 煤的价格分别为 100 元，150 元和 200 元。又设秋季时每 t 煤的价格为 100 元，在没有关于当年冬季气温情况准确预报的条件下，**秋季时应采购多少 t 煤能使总支出最少？**
- 将采购员看成一个局中人，有 3 个策略。在秋天时购买 $10t$ ， $15t$ 或 $20t$ 煤，分别记为 α_1 ， α_2 ， α_3 。
- 对策的另一局中人可看成是大自然，有 3 个策略。出现较暖、正常或较冷的冬季，分别记为 β_1 ， β_2 ， β_3 。

矩阵对策的基本理论

■ 例 3

- 现把单位冬季用煤的全部费用 (秋季购煤费用与冬季不够时再补够的费用之和) 作为采购员的赢得, 得到赢得矩阵如下

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1000 & -1750 & -3000 \\ -1500 & -1500 & -2500 \\ -2000 & -2000 & -2000 \end{bmatrix}$$

矩阵对策的基本理论

■ 例 3

- 现把单位冬季用煤的全部费用 (秋季购煤费用与冬季不够时再补够的费用之和) 作为采购员的赢得, 得到赢得矩阵如下

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1000 & -1750 & -3000 \\ -1500 & -1500 & -2500 \\ -2000 & -2000 & -2000 \end{bmatrix}$$

由于

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = a_{33} = -2000$$

那么该对策的解为 (α_3, β_3) , 即秋季购煤 20t 较好。

矩阵对策的基本理论

■ 矩阵对策的混合策略

□ 在一个矩阵对策 $G = \{S_1, S_2; \mathbf{A}\}$ 中, 局中人 I 能保证的至少赢得是

$$v_1 = \max_i \min_j a_{ij}$$

局中人 II 能保证的至多所失是

$$v_2 = \min_j \max_i a_{ij}$$

局中人 I 的赢得不会多于局中人 II 的所失, 故总有

$$v_1 \leq v_2$$

矩阵对策的基本理论

■ 矩阵对策的混合策略

□ 在一个矩阵对策 $G = \{S_1, S_2; \mathbf{A}\}$ 中, 局中人 I 能保证的至少赢得是

$$v_1 = \max_i \min_j a_{ij}$$

局中人 II 能保证的至多所失是

$$v_2 = \min_j \max_i a_{ij}$$

局中人 I 的赢得不会多于局中人 II 的所失, 故总有

$$v_1 \leq v_2$$

□ 当 $v_1 = v_2$ 时, 矩阵对策在纯策略意义下有解, 且 $V_G = v_1 = v_2$ 。然而, 实际中出现的更多情形是 $v_1 < v_2$, 这时对策不存在纯策略意义下的解。

矩阵对策的基本理论

■ 矩阵对策的混合策略

□ 例如

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

矩阵对策的基本理论

■ 矩阵对策的混合策略

□ 例如

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

可知

$$v_1 = \max_i \min_j a_{ij} = 4, \quad i^* = 2$$

$$v_2 = \min_j \max_i a_{ij} = 5, \quad j^* = 1$$

$$v_2 = 5 > 4 = v_1$$

矩阵对策的基本理论

■ 矩阵对策的混合策略

□ 例如

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

可知

$$v_1 = \max_i \min_j a_{ij} = 4, i^* = 2$$

$$v_2 = \min_j \max_i a_{ij} = 5, j^* = 1$$

$$v_2 = 5 > 4 = v_1$$

□ 既然局中人没有最优策略可出，是否可以给出一个选择不同策略的**概率分布**？如局中人 I 可制定这样一种策略，分别以概率 x 和 $(1-x)$ 选取纯策略 α_1 和 α_2 ，称这种策略为一个**混合策略**。同样，局中 II 也可以制定这样一种混合策略，分别以概率 y 和 $(1-y)$ 选取纯策略 β_1 和 β_2 。

矩阵对策的基本理论

■ 矩阵对策的混合策略

□ **定义 2:** 设有矩阵对策 $G = \{S_1, S_2; \mathbf{A}\}$, 其中

$$S_1 = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}, S_2 = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}, \mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$$

记

$$S_1^* = \{\mathbf{x} \in E^m \mid x_i \geq 0, i = 1, \dots, m; \sum_{i=1}^m x_i = 1\}$$

$$S_2^* = \{\mathbf{y} \in E^n \mid y_j \geq 0, j = 1, \dots, n; \sum_{j=1}^n y_j = 1\}$$

- 称 S_1^* 和 S_2^* 为局中人 I 和 II 的**混合策略集 (或策略集)**
- 对 $\mathbf{x} \in S_1^*$ 和 $\mathbf{y} \in S_2^*$, 称 \mathbf{x} 和 \mathbf{y} 为**混合策略 (或策略)**, (\mathbf{x}, \mathbf{y}) 为**混合局势 (或局势)**

矩阵对策的基本理论

■ 矩阵对策的混合策略

□ **定义 2:** 设有矩阵对策 $G = \{S_1, S_2; \mathbf{A}\}$, 其中

$$S_1 = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}, S_2 = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}, \mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$$

记

$$S_1^* = \{\mathbf{x} \in E^m \mid x_i \geq 0, i = 1, \dots, m; \sum_{i=1}^m x_i = 1\}$$

$$S_2^* = \{\mathbf{y} \in E^n \mid y_j \geq 0, j = 1, \dots, n; \sum_{j=1}^n y_j = 1\}$$

- 称 S_1^* 和 S_2^* 为局中人 I 和 II 的**混合策略集 (或策略集)**
- 对 $\mathbf{x} \in S_1^*$ 和 $\mathbf{y} \in S_2^*$, 称 \mathbf{x} 和 \mathbf{y} 为**混合策略 (或策略)**, (\mathbf{x}, \mathbf{y}) 为**混合局势 (或局势)**

□ 局中人 I 的赢得函数记为

$$E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{y} = \sum_i \sum_j a_{ij} x_i y_j$$

称 $G^* = \{S_1^*, S_2^*; E\}$ 为对策 G 的混合扩充。

矩阵对策的基本理论

■ 矩阵对策的混合策略

- 纯策略是混合策略的特殊形式

矩阵对策的基本理论

■ 矩阵对策的混合策略

- 纯策略是混合策略的特殊形式
- 一个混合策略 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)^\top$ 可理解为: 如果进行多局对策 G 的话, 局中人 I 分别选取纯策略 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 的频率。若只进行一次对策, 则反映了局中人 I 对各策略的偏爱程度。

矩阵对策的基本理论

■ 矩阵对策的混合策略

- 纯策略是混合策略的特殊形式
- 一个混合策略 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)^\top$ 可理解为: 如果进行**多局对策** G 的话, 局中人 I 分别选取纯策略 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 的**频率**。若只进行**一次对策**, 则反映了局中人 I 对各策略的**偏爱程度**。
- 设两个局中人仍如前所述那样进行理智的对策, 则当局中人 I 选择混合策略 \mathbf{x} 时, 预期所得 (最不利的情形) 是 $\min_{\mathbf{y} \in S_2^*} E(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, 故局中人 I 应选取 $\mathbf{x} \in S_1^*$, 使得

$$v_1 = \max_{\mathbf{x} \in S_1^*} \min_{\mathbf{y} \in S_2^*} E(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

同理, 局中人 II 可失保证的的期望值至多是

$$v_2 = \min_{\mathbf{y} \in S_2^*} \max_{\mathbf{x} \in S_1^*} E(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

则 $v_1 \leq v_2$, 即局中人 I 的预期赢得不会多于局中人 II 的预期所失。

矩阵对策的基本理论

■ 矩阵对策的混合策略

□ **定义 3:** 设矩阵对策 $G^* = \{S_1^*, S_2^*; E\}$ 是矩阵对策 $G = \{S_1, S_2; A\}$ 的混合扩充。如果

$$\max_{\mathbf{x} \in S_1^*} \min_{\mathbf{y} \in S_2^*} E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \min_{\mathbf{y} \in S_2^*} \max_{\mathbf{x} \in S_1^*} E(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

记其值为 V_G ，则称 V_G 为对策 G 的值，称上式成立的混合局势 $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ 为 G 在混合策略意义下的解 (或平衡局势)，称 \mathbf{x}^* 和 \mathbf{y}^* 分别为局中人 I 和 II 的最优混合策略。

矩阵对策的基本理论

■ 矩阵对策的混合策略

□ **定义 3:** 设矩阵对策 $G^* = \{S_1^*, S_2^*; E\}$ 是矩阵对策 $G = \{S_1, S_2; \mathbf{A}\}$ 的混合扩充。如果

$$\max_{\mathbf{x} \in S_1^*} \min_{\mathbf{y} \in S_2^*} E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \min_{\mathbf{y} \in S_2^*} \max_{\mathbf{x} \in S_1^*} E(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

记其值为 V_G ，则称 V_G 为对策 G 的值，称上式成立的混合局势 $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ 为 G 在混合策略意义下的解 (或平衡局势)，称 \mathbf{x}^* 和 \mathbf{y}^* 分别为局中人 I 和 II 的最优混合策略。

□ **定理 2:** 矩阵对策 G 在混合策略意义下有解的充要条件是：存在 $\mathbf{x}^* \in S_1^*$ 和 $\mathbf{y}^* \in S_2^*$ ，使得对任意 $\mathbf{x} \in S_1^*$ 和 $\mathbf{y} \in S_2^*$ ，有

$$E(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq E(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \leq E(\mathbf{x}^*, \mathbf{y})$$

矩阵对策的基本理论

■ 矩阵对策的混合策略

□ 例如

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

矩阵对策的基本理论

■ 矩阵对策的混合策略

□ 例如

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

设 $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ 和 $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ 分别为局中人 I 和 II 的混合策略, 则

$$S_1^* = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 = 1\}$$

$$S_2^* = \{(y_1, y_2) \mid y_1, y_2 \geq 0, y_1 + y_2 = 1\}$$

矩阵对策的基本理论

■ 矩阵对策的混合策略

□ 局中人 I 的赢得的期望是

$$\begin{aligned}E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 3x_1y_1 + 6x_1y_2 + 5x_2y_1 + 4x_2y_2 \\&= 3x_1y_1 + 6x_1(1 - y_1) + 5(1 - x_1)y_1 + 4(1 - x_1)(1 - y_1) \\&= -4\left(x_1 - \frac{1}{4}\right)\left(y_1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{9}{2}\end{aligned}$$

矩阵对策的基本理论

■ 矩阵对策的混合策略

□ 局中人 I 的赢得的期望是

$$\begin{aligned}E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 3x_1y_1 + 6x_1y_2 + 5x_2y_1 + 4x_2y_2 \\&= 3x_1y_1 + 6x_1(1 - y_1) + 5(1 - x_1)y_1 + 4(1 - x_1)(1 - y_1) \\&= -4\left(x_1 - \frac{1}{4}\right)\left(y_1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{9}{2}\end{aligned}$$

取 $\mathbf{x}^* = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$, $\mathbf{y}^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, 则

$$E(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = \frac{9}{2}, \quad E(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) = E(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) = \frac{9}{2},$$

即有 $E(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq E(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \leq E(\mathbf{x}^*, \mathbf{y})$

矩阵对策的基本理论

■ 矩阵对策的混合策略

□ 局中人 I 的赢得的期望是

$$\begin{aligned}E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 3x_1y_1 + 6x_1y_2 + 5x_2y_1 + 4x_2y_2 \\&= 3x_1y_1 + 6x_1(1 - y_1) + 5(1 - x_1)y_1 + 4(1 - x_1)(1 - y_1) \\&= -4\left(x_1 - \frac{1}{4}\right)\left(y_1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{9}{2}\end{aligned}$$

取 $\mathbf{x}^* = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$, $\mathbf{y}^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, 则

$$E(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = \frac{9}{2}, \quad E(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) = E(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) = \frac{9}{2},$$

即有 $E(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq E(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \leq E(\mathbf{x}^*, \mathbf{y})$

□ 故 $\mathbf{x}^* = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ 和 $\mathbf{y}^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 分别为局中人 I 和 II 的最优策略, 对策的值 (局中人 I 的赢得的期望值) 为 $V_G = \frac{9}{2}$ 。

矩阵对策的基本理论

■ 矩阵对策的基本定理

- 一般矩阵对策在纯策略意义下的解往往是不存在的

矩阵对策的基本理论

■ 矩阵对策的基本定理

- 一般矩阵对策在纯策略意义下的解往往是不存在的
- 一般矩阵对策在混合策略意义下的解却总是存在的

矩阵对策的基本理论

■ 矩阵对策的基本定理

- 一般矩阵对策在纯策略意义下的解往往是不存在的
- 一般矩阵对策在混合策略意义下的解却总是存在的
- 记 $E(i, \mathbf{y}) = \sum_j a_{ij} y_j$ 局中人 I 取纯策略 α_i 时的赢得函数
 $E(\mathbf{x}, j) = \sum_i a_{ij} x_i$ 局中人 II 取纯策略 β_j 时的赢得函数

矩阵对策的基本理论

■ 矩阵对策的基本定理

- 一般矩阵对策在纯策略意义下的解往往是不存在的
- 一般矩阵对策在混合策略意义下的解却总是存在的
- 记 $E(i, \mathbf{y}) = \sum_j a_{ij} y_j$ 局中人 I 取纯策略 α_i 时的赢得函数
 $E(\mathbf{x}, j) = \sum_i a_{ij} x_i$ 局中人 II 取纯策略 β_j 时的赢得函数
则

$$E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_i \sum_j a_{ij} x_i y_j = \sum_i \left(\sum_j a_{ij} y_j \right) x_i = \sum_i E(i, \mathbf{y}) x_i$$

$$E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_i \sum_j a_{ij} x_i y_j = \sum_j \left(\sum_i a_{ij} x_i \right) y_j = \sum_j E(\mathbf{x}, j) y_j$$

矩阵对策的基本理论

■ 矩阵对策的基本定理

□ **定理 3:** 设 $\mathbf{x}^* \in S_1^*$ 和 $\mathbf{y}^* \in S_2^*$, 则 $G = (\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ 为对策 G 的解的充要条件是: 对任意 $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$, 有

$$E(i, \mathbf{y}^*) \leq E(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \leq E(\mathbf{x}^*, j)$$

矩阵对策的基本理论

■ 矩阵对策的基本定理

- **定理 3:** 设 $\mathbf{x}^* \in S_1^*$ 和 $\mathbf{y}^* \in S_2^*$, 则 $G = (\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ 为对策 G 的解的充要条件是: 对任意 $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$, 有

$$E(i, \mathbf{y}^*) \leq E(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \leq E(\mathbf{x}^*, j)$$

- (充分性) 设 $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ 为对策 G 的解, 则由定理 2 可知下式成立

$$E(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq E(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \leq E(\mathbf{x}^*, \mathbf{y})$$

由于纯策略是混合策略的特例, 故定理 3 成立。

矩阵对策的基本理论

■ 矩阵对策的基本定理

- **定理 3:** 设 $\mathbf{x}^* \in S_1^*$ 和 $\mathbf{y}^* \in S_2^*$, 则 $G = (\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ 为对策 G 的解的充要条件是: 对任意 $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$, 有

$$E(i, \mathbf{y}^*) \leq E(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \leq E(\mathbf{x}^*, j)$$

- (充分性) 设 $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ 为对策 G 的解, 则由定理 2 可知下式成立

$$E(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq E(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \leq E(\mathbf{x}^*, \mathbf{y})$$

由于纯策略是混合策略的特例, 故定理 3 成立。

- (必要性) 设定理 3 中公式成立, 由

$$E(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) = \sum_i E(i, \mathbf{y}^*) x_i \leq E(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \sum_i x_i = E(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$$

$$E(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) = \sum_j E(\mathbf{x}^*, j) y_j \geq E(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \sum_j y_j = E(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$$

即得 $E(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq E(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \leq E(\mathbf{x}^*, \mathbf{y})$ 成立。

矩阵对策的基本理论

■ 矩阵对策的基本定理

□ **定理 4:** 设 $\mathbf{x}^* \in S_1^*$ 和 $\mathbf{y}^* \in S_2^*$, 则 $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ 为对策 G 的解的充要条件是: 存在数 v , 使得 \mathbf{x}^* 和 \mathbf{y}^* 分别是以下不等式组的解, 且 $v = V_G$.

$$\begin{cases} \sum_i a_{ij}x_i \geq v \quad (j = 1, \dots, n) \\ \sum_i x_i = 1 \\ x_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, m) \end{cases}$$
$$\begin{cases} \sum_j a_{ij}y_j \leq v \quad (i = 1, \dots, m) \\ \sum_j y_j = 1 \\ y_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n) \end{cases}$$

矩阵对策的基本理论

■ 矩阵对策的基本定理

- **定理 5:** 对任一矩阵对策 $G = \{S_1, S_2; \mathbf{A}\}$, 一定存在混合策略意义下的解。

矩阵对策的基本理论

■ 矩阵对策的基本定理

□ **定理 5:** 对任一矩阵对策 $G = \{S_1, S_2; \mathbf{A}\}$, 一定存在混合策略意义下的解。

□ **分析:** 由定理 3, 只要证明存在 $\mathbf{x}^* \in S_1^*$ 和 $\mathbf{y}^* \in S_2^*$ 使得定理 3 中公式成立。为此, 考虑如下两个线性规划问题

$$\begin{aligned} \text{(P)} \quad & \max w \\ & \text{s.t.} \quad \begin{cases} \sum_i a_{ij} x_i \geq w \quad (j = 1, \dots, n) \\ \sum_i x_i = 1 \\ x_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, m) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(D)} \quad & \min v \\ & \text{s.t.} \quad \begin{cases} \sum_j a_{ij} y_j \leq v \quad (i = 1, \dots, m) \\ \sum_j y_j = 1 \\ y_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n) \end{cases} \end{aligned}$$

矩阵对策的基本理论

■ 矩阵对策的基本定理

□ 问题 (P) 和 (D) 是互为对偶的线性规划, 而且

$$\mathbf{x} = (1, 0, \dots, 0)^\top \in E^m, \quad w = \min_j a_{1j}$$

是问题 (P) 的一个可行解,

$$\mathbf{y} = (1, 0, \dots, 0)^\top \in E^n, \quad v = \max_i a_{i1}$$

是问题 (D) 的一个可行解。

矩阵对策的基本理论

■ 矩阵对策的基本定理

□ 问题 (P) 和 (D) 是互为对偶的线性规划, 而且

$$\mathbf{x} = (1, 0, \dots, 0)^\top \in E^m, \quad w = \min_j a_{1j}$$

是问题 (P) 的一个可行解,

$$\mathbf{y} = (1, 0, \dots, 0)^\top \in E^n, \quad v = \max_i a_{i1}$$

是问题 (D) 的一个可行解。

□ 由线性规划对偶定理可知, 问题 (P) 和 (D) 分别存在最优解 (\mathbf{x}^*, w^*) 和 (\mathbf{y}^*, v^*) , 且 $w^* = v^*$ 。即存在 $\mathbf{x}^* \in S_1^*$ 和 $\mathbf{y}^* \in S_2^*$ 和数 v^* , 使得对任意 $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$, 有

$$\sum_j a_{ij} y_j^* \leq v^* \leq \sum_i a_{ij} x_i^* \text{ 或 } E(i, \mathbf{y}^*) \leq v^* \leq E(\mathbf{x}^*, j)$$

矩阵对策的基本理论

■ 矩阵对策的基本定理

□ 又由

$$E(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = \sum_i E(i, \mathbf{y}^*) x_i^* \leq v^* \sum_i x_i^* = v^*$$

$$E(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = \sum_j E(\mathbf{x}^*, j) y_j^* \geq v^* \sum_j y_j^* = v^*$$

得到 $v^* = E(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$, 故定理 3 中的

$$E(i, \mathbf{y}^*) \leq E(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \leq E(\mathbf{x}^*, j)$$

成立。

矩阵对策的基本理论

■ 矩阵对策的基本定理

□ **定理 6:** 设 $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ 是矩阵对策 G 的解, 且 $v = V_G$, 则

① 若 $x_i^* > 0$, 则 $\sum_j a_{ij}y_j^* = v$

② 若 $y_j^* > 0$, 则 $\sum_i a_{ij}x_i^* = v$

③ 若 $\sum_j a_{ij}y_j^* < v$, 则 $x_i^* = 0$

④ 若 $\sum_i a_{ij}x_i^* > v$, 则 $y_j^* = 0$

矩阵对策的基本理论

■ 矩阵对策的基本定理

□ 由 $v = \max_{\mathbf{x} \in S_1^*} E(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*)$ 有

$$v - \sum_j a_{ij} y_j^* = \max_{\mathbf{x} \in S_1^*} E(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) - E(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \geq 0$$

矩阵对策的基本理论

■ 矩阵对策的基本定理

□ 由 $v = \max_{\mathbf{x} \in S_1^*} E(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*)$ 有

$$v - \sum_j a_{ij} y_j^* = \max_{\mathbf{x} \in S_1^*} E(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) - E(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \geq 0$$

又因

$$\sum_i x_i^* (v - \sum_j a_{ij} y_j^*) = v - \sum_i \sum_j a_{ij} x_i^* y_j^* = 0$$

矩阵对策的基本理论

■ 矩阵对策的基本定理

□ 由 $v = \max_{\mathbf{x} \in S_1^*} E(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*)$ 有

$$v - \sum_j a_{ij} y_j^* = \max_{\mathbf{x} \in S_1^*} E(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) - E(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \geq 0$$

又因

$$\sum_i x_i^* (v - \sum_j a_{ij} y_j^*) = v - \sum_i \sum_j a_{ij} x_i^* y_j^* = 0$$

① 当 $x_i^* > 0$, 必有 $\sum_j a_{ij} y_j^* = v$

② 当 $\sum_j a_{ij} y_j^* < v$, 必有 $x_i^* = 0$

即 (1), (3) 得证, 同理可证 (2), (4)。

矩阵对策的基本理论

■ 矩阵对策的基本定理

□ **定理 7:** 记 $T(G)$ 为矩阵对策 G 的解集。设有两个矩阵对策 $G_1 = \{S_1, S_2; \mathbf{A}_1\}$ 和 $G_2 = \{S_1, S_2; \mathbf{A}_2\}$, 其中 $\mathbf{A}_1 = (a_{ij})$ 和 $\mathbf{A}_2 = (a_{ij} + L)$, L 为一任意常数, 则

- $V_{G_2} = V_{G_1} + L$
- $T(G_1) = T(G_2)$

矩阵对策的基本理论

■ 矩阵对策的基本定理

□ **定理 7:** 记 $T(G)$ 为矩阵对策 G 的解集。设有两个矩阵对策 $G_1 = \{S_1, S_2; \mathbf{A}_1\}$ 和 $G_2 = \{S_1, S_2; \mathbf{A}_2\}$, 其中 $\mathbf{A}_1 = (a_{ij})$ 和 $\mathbf{A}_2 = (a_{ij} + L)$, L 为一任意常数, 则

- $V_{G_2} = V_{G_1} + L$
- $T(G_1) = T(G_2)$

□ **定理 8:** 设有两个矩阵对策 $G_1 = \{S_1, S_2; \mathbf{A}\}$ 和 $G_2 = \{S_1, S_2; \alpha \mathbf{A}\}$, 其中 $\alpha > 0$ 为一任意常数, 则

- $V_{G_2} = \alpha V_{G_1}$
- $T(G_1) = T(G_2)$

矩阵对策的基本理论

■ 矩阵对策的基本定理

□ **定理 7:** 记 $T(G)$ 为矩阵对策 G 的解集。设有两个矩阵对策 $G_1 = \{S_1, S_2; \mathbf{A}_1\}$ 和 $G_2 = \{S_1, S_2; \mathbf{A}_2\}$, 其中 $\mathbf{A}_1 = (a_{ij})$ 和 $\mathbf{A}_2 = (a_{ij} + L)$, L 为一任意常数, 则

- $V_{G_2} = V_{G_1} + L$
- $T(G_1) = T(G_2)$

□ **定理 8:** 设有两个矩阵对策 $G_1 = \{S_1, S_2; \mathbf{A}\}$ 和 $G_2 = \{S_1, S_2; \alpha \mathbf{A}\}$, 其中 $\alpha > 0$ 为一任意常数, 则

- $V_{G_2} = \alpha V_{G_1}$
- $T(G_1) = T(G_2)$

□ **定理 9:** 设 $G_1 = \{S_1, S_2; \mathbf{A}\}$ 为一矩阵对策, 且 $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^\top$ 为斜对策矩阵, 则

- $V_G = 0$
- $T(G_1) = T(G_2)$

其中, $T_1(G)$ 和 $T_2(G)$ 分别为局中人 I 和 II 的最优策略集。

矩阵对策的基本理论

■ 课堂练习 1

□ 设有一矩阵策略 $G = \{S_1, S_2; \mathbf{A}\}$, 其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 6 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & -1 \\ 8 & 5 & 7 & 5 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

求矩阵对策 G 的值。

矩阵对策的基本理论

■ 课堂练习 1

□ 设有一矩阵策略 $G = \{S_1, S_2; \mathbf{A}\}$, 其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 6 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & -1 \\ 8 & 5 & 7 & 5 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

求矩阵对策 G 的值。

□ 具体思路

$$\max_i \min_j a_{ij} = \max_i \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = 5, \quad i^* = 1, 3$$

$$\min_j \max_i a_{ij} = \min_j [8 \ 5 \ 7 \ 5] = 5, \quad j^* = 2, 4$$

其最优纯策略解为 $(\alpha_1, \beta_2), (\alpha_1, \beta_4), (\alpha_3, \beta_2), (\alpha_3, \beta_4)$, 值为 5

矩阵对策的基本理论

■ 课堂练习 2

□ 设有一矩阵策略 $G = \{S_1, S_2; \mathbf{A}\}$, 其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -7 & 2 \\ 4 & 7 & 3 \\ 10 & -9 & 0 \\ -1 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

求矩阵对策 G 的值。

矩阵对策的基本理论

■ 课堂练习 2

□ 设有一矩阵策略 $G = \{S_1, S_2; \mathbf{A}\}$, 其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -7 & 2 \\ 4 & 7 & 3 \\ 10 & -9 & 0 \\ -1 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

求矩阵对策 G 的值。

□ 具体思路

$$\max_i \min_j a_{ij} = \max_i \begin{bmatrix} -7 \\ 3 \\ -9 \\ -1 \end{bmatrix} = 3, i^* = 2$$

$$\min_j \max_i a_{ij} = \min_j [1 \ 0 \ 9 \ 3] = 3, j^* = 3$$

其最优纯策略解为 (α_2, β_3) , 值为 3

矩阵对策的基本理论

■ 小结

□ 纯策略

- 矩阵对策
- 理智行为

□ 混合策略

- 混合扩充
- 鞍点定理

□ 基本定理

- 一定存在混合策略意义下的解
- 线性规划求解矩阵对策的思路

1. 引言
2. 矩阵对策的基本理论
3. 矩阵对策的解法

矩阵对策的解法

■ 图解法

- 主要用于求解赢得矩阵为 $2 \times n$ 或 $m \times 2$ 阶的对策问题
- 从几何上理解对策论的思想

矩阵对策的解法

■ 图解法

- 主要用于求解赢得矩阵为 $2 \times n$ 或 $m \times 2$ 阶的对策问题
- 从几何上理解对策论的思想

■ 基本步骤

- **第一步:** 设局中人的混合策略
- **第二步:** 过 0 和 1 作两条垂线
- **第三步:** 画出对策矩阵
- **第四步:** 确定最优策略

矩阵对策的解法

■ 例 1

□ 用图解法求解矩阵对策 $G = \{S_1, S_2; \mathbf{A}\}$, 其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

矩阵对策的解法

■ 例 1

□ 用图解法求解矩阵对策 $G = \{S_1, S_2; \mathbf{A}\}$, 其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

□ 局中人 I 的最优混合策略为 $\mathbf{x}^* = (\frac{3}{11}, \frac{8}{11})^\top$, 局中人 II 的最优混合策略为 $\mathbf{y}^* = (0, \frac{9}{11}, \frac{2}{11})^\top$, $V_G = \frac{49}{11}$

矩阵对策的解法

■ 例 2

□ 用图解法求解矩阵对策 $G = \{S_1, S_2; A\}$, 其中

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 6 \\ 11 & 2 \end{bmatrix}$$

矩阵对策的解法

■ 例 2

□ 用图解法求解矩阵对策 $G = \{S_1, S_2; A\}$, 其中

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 6 \\ 11 & 2 \end{bmatrix}$$

□ 局中人 I 的最优混合策略为 $\mathbf{x}^* = (0, 1, 0)^\top$, 即纯策略 α_2 ; 局中人 II 的最优混合策略为 $\mathbf{y}^* = (y, 1 - y)^\top$, $V_G = 6$

矩阵对策的解法

■ 课堂练习 1

□ 用图解法求解矩阵对策 $G = \{S_1, S_2; A\}$, 其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

矩阵对策的解法

■ 课堂练习 1

□ 用图解法求解矩阵对策 $G = \{S_1, S_2; A\}$, 其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

□ 局中人 I 的最优混合策略为 $\mathbf{x}^* = (\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}, 0)^\top$, 局中人 II 的最优混合策略为 $\mathbf{y}^* = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})^\top$, $V_G = \frac{8}{3}$

矩阵对策的解法

■ 方程组法

□ (定理 4) 设 $\mathbf{x}^* \in S_1^*$ 和 $\mathbf{y}^* \in S_2^*$, 则 $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ 为对策 G 的解的充要条件是: 存在数 v , 使得 \mathbf{x}^* 和 \mathbf{y}^* 分别是以下不等式组的解, 且 $v = V_G$.

$$\begin{cases} \sum_i a_{ij} x_i \geq v \quad (j = 1, \dots, n) \\ \sum_i x_i = 1 \\ x_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, m) \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \sum_j a_{ij} y_j \leq v \quad (i = 1, \dots, m) \\ \sum_j y_j = 1 \\ y_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n) \end{cases} \quad (2)$$

矩阵对策的解法

■ 方程组法

□ (定理 4) 设 $\mathbf{x}^* \in S_1^*$ 和 $\mathbf{y}^* \in S_2^*$, 则 $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ 为对策 G 的解的充要条件是: 存在数 v , 使得 \mathbf{x}^* 和 \mathbf{y}^* 分别是以下不等式组的解, 且 $v = V_G$.

$$\begin{cases} \sum_i a_{ij} x_i \geq v \quad (j = 1, \dots, n) \\ \sum_i x_i = 1 \\ x_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, m) \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \sum_j a_{ij} y_j \leq v \quad (i = 1, \dots, m) \\ \sum_j y_j = 1 \\ y_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n) \end{cases} \quad (2)$$

□ 求矩阵对策解 $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ 的问题等价于求解不等式组(1)和(2)

矩阵对策的解法

■ 方程组法

- 若最优策略中的 x^* 和 y^* 均不为零, 则上述两不等式组的求解问题转化为下面两个方程组的求解问题

$$\begin{cases} \sum_i a_{ij}x_i = v \quad (j = 1, \dots, n) \\ \sum_i x_i = 1 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \sum_j a_{ij}y_j = v \quad (i = 1, \dots, m) \\ \sum_j y_j = 1 \end{cases} \quad (4)$$

矩阵对策的解法

■ 方程组法

- 若最优策略中的 x^* 和 y^* 均不为零, 则上述两不等式组的求解问题转化为下面两个方程组的求解问题

$$\begin{cases} \sum_i a_{ij}x_i = v \quad (j = 1, \dots, n) \\ \sum_i x_i = 1 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \sum_j a_{ij}y_j = v \quad (i = 1, \dots, m) \\ \sum_j y_j = 1 \end{cases} \quad (4)$$

- 若方程组(3)和(4)存在非负解 x^* 和 y^* , 便求得了对策的一个解。

矩阵对策的解法

■ 方程组法

- 若最优策略中的 x^* 和 y^* 均不为零, 则上述两不等式组的求解问题转化为下面两个方程组的求解问题

$$\begin{cases} \sum_i a_{ij} x_i = v \quad (j = 1, \dots, n) \\ \sum_i x_i = 1 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \sum_j a_{ij} y_j = v \quad (i = 1, \dots, m) \\ \sum_j y_j = 1 \end{cases} \quad (4)$$

- 若方程组(3)和(4)存在非负解 x^* 和 y^* , 便求得了对策的一个解。
- 若这两个方程组不存在非负解, 则可将式(3)和(4)中的某些等式改成不等式, 继续试求解, 直至求得对策的解。

矩阵对策的解法

■ 方程组法

- 若最优策略中的 x^* 和 y^* 均不为零, 则上述两不等式组的求解问题转化为下面两个方程组的求解问题

$$\begin{cases} \sum_i a_{ij}x_i = v \quad (j = 1, \dots, n) \\ \sum_i x_i = 1 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \sum_j a_{ij}y_j = v \quad (i = 1, \dots, m) \\ \sum_j y_j = 1 \end{cases} \quad (4)$$

- 若方程组(3)和(4)存在非负解 x^* 和 y^* , 便求得了对策的一个解。
- 若这两个方程组不存在非负解, 则可将式(3)和(4)中的某些等式改成不等式, 继续试求解, 直至求得对策的解。
- 若最优策略的某些分量为零, 则式(3)和(4)可能无解。

矩阵对策的解法

■ 方程组法

□ 针对赢得矩阵为 2×2 阶的对策问题

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

如果 \mathbf{A} 有鞍点, 则很容易求出各局中人的最优纯策略; 如果 \mathbf{A} 没有鞍点, 则可以证明各局中人最优混合策略中的 x^* 和 y^* 均大于零。于是, 可求下列方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 = v \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 = v \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 = v \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 = v \\ y_1 + y_2 = 1 \end{cases}$$

矩阵对策的解法

■ 方程组法

□ 一定有严格的非负解（也就是两个局中人的最优策略）

$$x_1^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})}$$

$$x_2^* = \frac{a_{11} - a_{12}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})}$$

$$y_1^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})}$$

$$y_2^* = \frac{a_{11} - a_{21}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})}$$

$$v^* = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})} = V_G$$

矩阵对策的解法

■ 方程组法

□ 给定矩阵对策 $G = \{S_1, S_2; \mathbf{A}\}$, \mathbf{A} 是 $m \times n$ 的矩阵

- 如果 $a_{kj} \geq a_{lj}$, $j = 1, \dots, n$, 则称局中人 I 的策略 k 优越于策略 l

矩阵对策的解法

■ 方程组法

□ 给定矩阵对策 $G = \{S_1, S_2; \mathbf{A}\}$, \mathbf{A} 是 $m \times n$ 的矩阵

- 如果 $a_{kj} \geq a_{lj}$, $j = 1, \dots, n$, 则称局中人 I 的策略 k 优越于策略 l
- 如果 $a_{ik} \geq a_{il}$, $i = 1, \dots, m$, 则称局中人 II 的策略 k 优越于策略 l

矩阵对策的解法

■ 方程组法

□ 给定矩阵对策 $G = \{S_1, S_2; \mathbf{A}\}$, \mathbf{A} 是 $m \times n$ 的矩阵

- 如果 $a_{kj} \geq a_{lj}$, $j = 1, \dots, n$, 则称局中人 I 的策略 k 优超于策略 l
- 如果 $a_{ik} \geq a_{il}$, $i = 1, \dots, m$, 则称局中人 II 的策略 k 优超于策略 l

□ 局中人 I 的策略 k 优超于策略 l 说明对局中人 I 而言当其采用策略 k , 无论局中人 II 采用任何策略, 其获得都比采用策略 l 来的好。因而策略 l 出现的概率为 0, 可以在赢得矩阵中删除该策略对应的行。

矩阵对策的解法

■ 例 3

□ 求解矩阵对策 $G = \{S_1, S_2; \mathbf{A}\}$, 其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 2 & 5 & 9 \\ 7 & 3 & 9 & 5 & 9 \\ 4 & 6 & 8 & 7 & 6 \\ 6 & 0 & 8 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

矩阵对策的解法

■ 例 3

□ 求解矩阵对策 $G = \{S_1, S_2; \mathbf{A}\}$, 其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 2 & 5 & 9 \\ 7 & 3 & 9 & 5 & 9 \\ 4 & 6 & 8 & 7 & 6 \\ 6 & 0 & 8 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

□ 应用优超原则依次简化得到矩阵

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 9 & 5 & 9 \\ 4 & 6 & 8 & 7 & 6 \\ 6 & 0 & 8 & 8 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

矩阵对策的解法

■ 例 3

□ 易知 A_3 没有鞍点, 由定理 6 得到方程组

$$\begin{cases} 7x_3 + 4x_4 = v \\ 3x_3 + 6x_4 = v \\ x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} 7y_1 + 3y_2 = v \\ 4y_1 + 6y_2 = v \\ y_1 + y_2 = 1 \end{cases}$$

得到非负解为

$$x_3^* = \frac{1}{3}, x_4^* = \frac{2}{3}, y_1^* = \frac{1}{2}, y_2^* = \frac{1}{2}, v^* = 5$$

矩阵对策的解法

■ 例 3

□ 易知 A_3 没有鞍点, 由定理 6 得到方程组

$$\begin{cases} 7x_3 + 4x_4 = v \\ 3x_3 + 6x_4 = v \\ x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} 7y_1 + 3y_2 = v \\ 4y_1 + 6y_2 = v \\ y_1 + y_2 = 1 \end{cases}$$

得到非负解为

$$x_3^* = \frac{1}{3}, x_4^* = \frac{2}{3}, y_1^* = \frac{1}{2}, y_2^* = \frac{1}{2}, v^* = 5$$

于是, 以矩阵 A 为赢得矩阵的对策的一个解为

$$\mathbf{x}^* = \left(0, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right)^{\top}, \mathbf{y}^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0\right)^{\top}, V_G = 5$$

矩阵对策的解法

■ 线性规划法

□ (定理 5) 任一矩阵对策一定存在混合策略下的解。

矩阵对策的解法

■ 线性规划法

- (定理 5) 任一矩阵对策一定存在混合策略下的解。
- 求解矩阵对策可等价地转化为求解互为对偶的线性规划问题 (P) 和 (D), 故在问题 (P) 中令 $x_i' = \frac{x_i}{w}$, $i = 1, \dots, m$, 则约束转化为

$$\begin{cases} \sum_i a_{ij} x_i' \geq 1 \quad (j = 1, \dots, n) \\ \sum_i x_i' = \frac{1}{w} \\ x_i' \geq 0 \quad (i = 1, \dots, m) \end{cases}$$

矩阵对策的解法

■ 线性规划法

- (定理 5) 任一矩阵对策一定存在混合策略下的解。
- 求解矩阵对策可等价地转化为求解互为对偶的线性规划问题 (P) 和 (D), 故在问题 (P) 中令 $x_i' = \frac{x_i}{w}$, $i = 1, \dots, m$, 则约束转化为

$$\begin{cases} \sum_i a_{ij} x_i' \geq 1 \quad (j = 1, \dots, n) \\ \sum_i x_i' = \frac{1}{w} \\ x_i' \geq 0 \quad (i = 1, \dots, m) \end{cases}$$

则 (P) 等价于线性规划问题

$$\begin{aligned} (P') \quad & \min \sum_i x_i' \\ & \text{s.t.} \quad \begin{cases} \sum_i a_{ij} x_i' \geq 1 \quad (j = 1, \dots, n) \\ x_i' \geq 0 \quad (i = 1, \dots, m) \end{cases} \end{aligned}$$

矩阵对策的解法

■ 线性规划法

□ 同理，作变换

$$y_j' = \frac{x_j}{v}, \quad j = 1, \dots, n$$

则问题 (D) 等价于线性规划问题

$$\begin{aligned} (D') \quad & \max \sum_j y_j' \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \sum_j a_{ij} y_j' \leq 1 \quad (i = 1, \dots, m) \\ y_j' \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n) \end{cases} \end{aligned}$$

矩阵对策的解法

■ 线性规划法

□ 同理，作变换

$$y_j' = \frac{x_j}{v}, \quad j = 1, \dots, n$$

则问题 (D) 等价于线性规划问题

$$\begin{aligned} (D') \quad & \max \sum_j y_j' \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \sum_j a_{ij} y_j' \leq 1 \quad (i = 1, \dots, m) \\ y_j' \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n) \end{cases} \end{aligned}$$

□ 利用单纯形法求解 (P') 和 (D'), 得到 \mathbf{x}, \mathbf{y} 和 w, v

矩阵对策的解法

■ 线性规划法

□ 同理，作变换

$$y_j' = \frac{x_j}{v}, \quad j = 1, \dots, n$$

则问题 (D) 等价于线性规划问题

$$\begin{aligned} (D') \quad & \max \sum_j y_j' \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \sum_j a_{ij} y_j' \leq 1 \quad (i = 1, \dots, m) \\ y_j' \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n) \end{cases} \end{aligned}$$

□ 利用单纯形法求解 (P') 和 (D'), 得到 \mathbf{x}, \mathbf{y} 和 w, v

□ 利用变换式得到对策问题的解和值

矩阵对策的解法

■ 例 4

□ 利用线性规划方法求解矩阵对策，其赢得矩阵为

$$\begin{bmatrix} 7 & 2 & 9 \\ 2 & 9 & 0 \\ 9 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

矩阵对策的解法

■ 例 4

□ 求解可以转化成两个互为对偶的线性规划问题

$$\begin{aligned} \text{(P)} \quad & \min (x_1 + x_2 + x_3) \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 9x_3 \geq 1 \\ 2x_1 + 9x_2 \geq 1 \\ 9x_1 + 11x_3 \geq 1 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(D)} \quad & \max (y_1 + y_2 + y_3) \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 7y_1 + 2y_2 + 9y_3 \leq 1 \\ 2y_1 + 9y_2 \leq 1 \\ 9y_1 + 11y_3 \leq 1 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

矩阵对策的解法

■ 例 4

□ 上述线性规划的解为

$$\mathbf{x} = \left(\frac{1}{20}, \frac{1}{10}, \frac{1}{20} \right)^{\top}, \quad w = \frac{1}{5}$$

$$\mathbf{y} = \left(\frac{1}{20}, \frac{1}{10}, \frac{1}{20} \right)^{\top}, \quad v = \frac{1}{5}$$

矩阵对策的解法

■ 例 4

□ 上述线性规划的解为

$$\mathbf{x} = \left(\frac{1}{20}, \frac{1}{10}, \frac{1}{20} \right)^{\top}, \quad w = \frac{1}{5}$$

$$\mathbf{y} = \left(\frac{1}{20}, \frac{1}{10}, \frac{1}{20} \right)^{\top}, \quad v = \frac{1}{5}$$

因此对策问题的解为

$$V_G = \frac{1}{w} = \frac{1}{v} = 5$$

$$\mathbf{x}^* = V_G \mathbf{x} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right)^{\top}$$

$$\mathbf{y}^* = V_G \mathbf{y} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right)^{\top}$$

矩阵对策的解法

■ 课堂练习 2

□ 用线性规划方法求解矩阵对策，其中赢得矩阵 A 为

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

矩阵对策的解法

■ 小结

□ 图解法

- 赢得矩阵为 $2 \times n$ 或 $m \times 2$ 阶
- 从几何上理解对策论的思想

□ 方程组法

- 优超原则
- 鞍点判断

□ 线性规划法

- 任一矩阵对策一定存在混合策略下的解
- 单纯形法

矩阵对策的解法

■ 小结

□ 图解法

- 赢得矩阵为 $2 \times n$ 或 $m \times 2$ 阶
- 从几何上理解对策论的思想

□ 方程组法

- 优超原则
- 鞍点判断

□ 线性规划法

- 任一矩阵对策一定存在混合策略下的解
- 单纯形法

■ 课后作业: P376, 习题 12.5

Q&A

Thank you!

感谢您的聆听和反馈