第五章 大数定律及中心极限定理

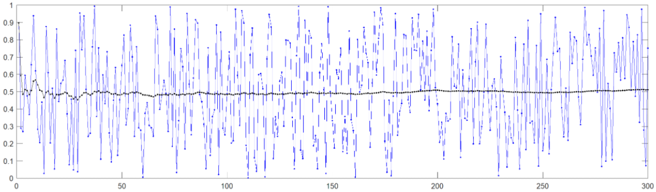
修贤超

https://xianchaoxiu.github.io

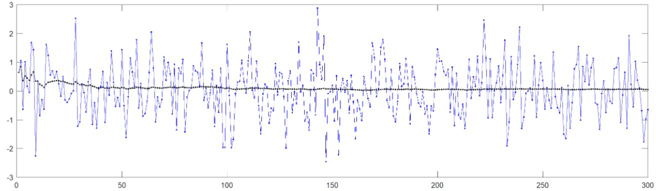
目录

大数定律

- 蓝点——均匀分布随机变量　　黑点——前 n 点平均值



- 蓝点——正态分布随机变量　　黑点——前 n 点平均值



- 定理: 设随机变量 X 具有数学期望 $E(X)=\mu$, 方差 $D(X)=\sigma^2$, 则对于任意正数 ε, 有下列不等式成立

$$P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

证明 根据定义有

$$P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}=\int_{|X-\mu|\geq\varepsilon}f(x)dx\leq\int_{|X-\mu|\geq\varepsilon}\frac{|X-\mu|^2}{\varepsilon^2}dx$$
$$\leq\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{-\infty}^{\infty}|X-\mu|^2dx=\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

- 切比雪夫不等式也可写作

$$P\{|X-\mu|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

伯努利大数定律

- **定理**: 设随机变量 f_A 是 n 次独立重复试验中事件 A 发生的次数, p 是每次试验事件 A 发生的概率, 则对于任意正数 $\varepsilon > 0$, 有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{f_A}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1 \quad \text{或} \quad \lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{f_A}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right\} = 0$$

证明 因为 $f_A \sim b(n,p)$, 有 $f_A = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$ 且 $E(X_k) = p$
根据切比雪夫不等式, 有

$$P\left\{\left|\frac{f_A}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = P\left\{|f_A - np| < n\varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{np(1-p)}{(n\varepsilon)^2} = 1 - \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{f_A}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

- n 次伯努利试验, 事件 A 发生的频率随 n 增加, 趋近于概率 p

- **定理**: 设 $X_1, X_2, \cdots$ 是相互独立、服从同一分布的随机变量序列, 且具有数学期望 $E(X_k) = \mu \ (k = 1, 2, \cdots)$. 作前 n 个变量的算术平均 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$, 则对于任意 $\varepsilon > 0$, 有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \mu\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

证明 仅在随机变量的方差 $D(X_k) = \sigma^2 \ (k = 1, 2, \cdots)$ 存在的条件下证明.
因为

$$E\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \frac{1}{n} n\mu = \mu$$

由独立性得

$$D\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} D(X_k) = \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

辛钦大数定律

证明 由切比雪夫不等式得

$$1 \geq \lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \mu\right| < \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{\sigma^2/n}{\varepsilon^2}$$

取极限得到

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \mu\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

- 辛钦大数定律比伯努利大数定律更具有一般性
- **定义**: 设 $Y_1, Y_2, \cdots$ 是一个随机变量序列, a 是常数. 若对于任意 $\varepsilon > 0$ 有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|Y_n - a| < \varepsilon\} = 1$$

则称序列 $Y_1, Y_2, \cdots$ **依概率收敛于**a, 记作 $Y_n \xrightarrow{P} a$

切比雪夫大数定律

- **定理:** 设 $X_1, X_2, \cdots$ 是相互独立的随机变量序列, 且具有数学期望 $E(X_k) = \mu_k \ (k = 1, 2, \cdots)$ 及方差 $D(X_k) = \sigma_k^2 \ (k = 1, 2, \cdots)$. 若存在正数 C, 使 $D(X_k) < C$, 则对于任意 $\varepsilon > 0$, 有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mu_k\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

证明 因为

$$E\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mu_k$$

由独立性得

$$D\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} D(X_k) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sigma^2 \le \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} C = \frac{C}{n}$$

证明 由切比雪夫不等式得

$$1 \geq \lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mu_k\right| < \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{C/n}{\varepsilon^2}$$

取极限得到

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mu_k\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

- 随机变量序列 $X_1, X_2, \cdots$ 的均值 依概率收敛于期望的算数平均值, 即

$$\bar{X} \xrightarrow{P} \bar{\mu}$$

- 切比雪夫大数定律比辛钦大数定律更具有一般性

- 弱大数定律与强大数定律的区别
  - 弱大数定律: 依概率收敛

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \mu\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

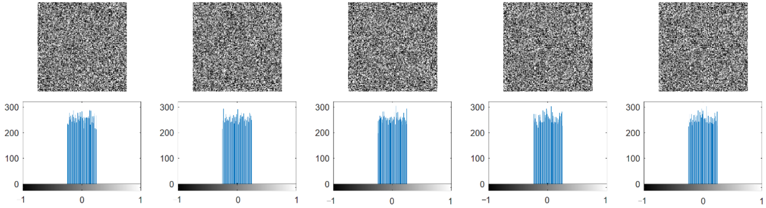
  - 强大数定律: 依概率 1 收敛

$$P\left\{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k = \mu\right\} = 1$$

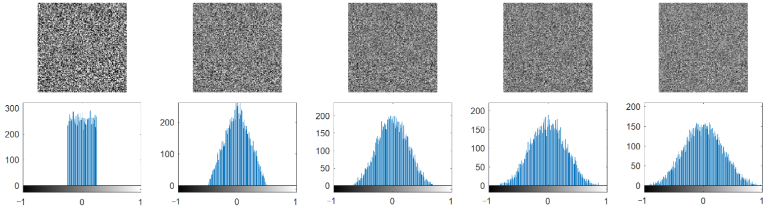
目录

中心极限定理

- 均匀分布图像噪声



- 前 n 幅图像噪声的和



独立同分布的中心极限定理

- **定理 1:** 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立、服从同一分布, 且具有数学期望 $E(X_k) = \mu\ (k = 1, 2, \cdots)$, 方差 $D(X_k) = \sigma^2\ (k = 1, 2, \cdots)$, 则随机变量之和 $\sum_{k=1}^{n} X_k$ 的标准化变量

$$Y_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - E(\sum_{k=1}^{n} X_k)}{\sqrt{D(\sum_{k=1}^{n} X_k)}} = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$$

的分布函数 $F_n(x)$ 对于任意 x 满足

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} < x\right\}$$
$$= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt = \Phi(x)$$

独立同分布的中心极限定理

- 独立同分布随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 之和 $\sum_{k=1}^{n} X_k$ 的标准化变量, 当 n 充分大时, 近似服从标准正态分布

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \overset{\text{近似地}}{\sim} N(0,1)$$

- 独立同分布随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的平均值 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ 的标准化变量, 当 n 充分大时, 近似服从正态分布

$$\bar{X} \overset{\text{近似地}}{\sim} N(\mu, \sigma^2/n)$$

李雅普诺夫定理

- **定理 2:** 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立, 且具有数学期望和方差

$$E(X_k) = \mu_k\ ,\ D(X_k) = \sigma_k^2\ (k = 1, 2, \cdots)$$

记 $B_n^2 = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2$. 若存在正数 δ, 使得当 $n \to \infty$ 时,

$$\frac{1}{B_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^n E\{|X_k - \mu_k|^{2+\delta}\} \to 0$$

则随机变量之和 $\sum_{k=1}^n X_k$ 的标准化变量

$$Z_n = \frac{\sum_{k=1}^n X_k - E(\sum_{k=1}^n X_k)}{\sqrt{D(\sum_{k=1}^n X_k)}} = \frac{\sum_{k=1}^n X_k - \sum_{k=1}^n \mu}{B_k}$$

的分布函数 $F_n(x)$ 对于任意 x 满足

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum_{k=1}^n X_k - \sum_{k=1}^n \mu}{B_k} < x\right\} = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt = \Phi(x)$$

李雅普诺夫定理

- 独立随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 之和 $\sum_{k=1}^{n} X_k$ 的标准化变量

$$Z_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - \sum_{k=1}^{n} \mu}{B_k}$$

当 n 充分大时, 近似服从正态分布

$$\sum_{k=1}^{n} X_k \overset{\text{近似地}}{\sim} N\left(\sum_{k=1}^{n} \mu_k, \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2\right) = N\left(\sum_{k=1}^{n} \mu_k, B_n^2\right)$$

- 与独立同分布的中心极限定理相比, 李雅普诺夫定理更具有一般性

棣莫弗-拉普拉斯定理

- **定理 3:** 设随机变量 $\eta_n\ (n=1,2,\cdots)$ 服从参数 $n,p\ (0<p<1)$ 的二项分布，则对于任意 x，有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\eta_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le x\right\}=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}dt=\Phi(x)$$

证明 引入随机变量

$$X_k=\begin{cases}1, & 第\ k\ 次试验\ A\ 发生\\ 0, & 第\ k\ 次试验\ A\ 不发生\end{cases}$$

于是

$$P\{X_k=1\}=p,\ P\{X_k=0\}=1-p$$

$$E(X_k)=p,\ D(X_k)=p(1-p),\ \eta_n=\sum_{k=1}^{n}X_k$$

证明 由切比雪夫不等式得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\eta_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le x\right\} &= \lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le x\right\} \\ &= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt = \Phi(x)\end{aligned}$$

- 正态分布是二项分布的极限分布
- 当 n 充分大时, 可用正态分布近似计算二项分布的概率

例 1

- 一加法器同时收到 20 个噪声电压 V_k $(k=1,2,\cdots,20)$, 设他们是互相独立的随机变量, 且都在区间 $(0,10)$ 服从均匀分布. 记叠加电压 $V=\sum_{k=1}^{20} V_k$, 求 $P\{V>105\}$ 的近似值

  解答　易知

$$\mu = E(V_k) = \frac{10+0}{2} = 5$$

$$\sigma^2 = D(V_k) = \frac{(10-0)^2}{2}$$

  随机变量为

$$Z = \frac{\sum_{k=1}^{20} V_k - 20\times 5}{\sqrt{100/12}\sqrt{20}} = \frac{V-20\times 5}{\sqrt{100/12}\sqrt{20}}$$

例 1

解答 由定理 1, Z 近似服从正态分布 $(0,1)$, 于是

$$
\begin{aligned}
P\{V>105\} &= P\left\{\frac{V-20\times 5}{\sqrt{100/12}\sqrt{20}} > \frac{105-20\times 5}{\sqrt{100/12}\sqrt{20}}\right\} \\
&= P\left\{\frac{V-20\times 5}{\sqrt{100/12}\sqrt{20}} > 0.387\right\} \\
&= 1-P\left\{\frac{V-20\times 5}{\sqrt{100/12}\sqrt{20}} \le 0.387\right\} \\
&\approx 1-\int_{-\infty}^{0.387}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}dt \\
&= 1-\Phi(0.387) \\
&= 0.348
\end{aligned}
$$

例 2

- 一船舶在海上航行, 已知每遭受一次海浪冲击, 纵摇角大于 3 度的概率为 $p = 1/3$, 若船遭受了 90000 次波浪冲击, 问其中有 29500 30500 次纵摇角大于 3 度的概率是多少

解答 根据定理 3, 有

$$P\{29500 < X < 30500\} = P\left\{\frac{29500 - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le \frac{30500 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right\}$$

$$= \int_{\frac{29500-np}{\sqrt{np(1-p)}}}^{\frac{30500-np}{\sqrt{np(1-p)}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt = \Phi\left(\frac{30500 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{29500 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

其中 $n = 90000$, $p = 1/3$. 即有

$$P\{29500 < X < 30500\} = \Phi\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right) - \Phi\left(-\frac{5\sqrt{2}}{2}\right) = 0.995$$

例 3

- 对于一名学生而言，参加家长会的人数是随机变量，0、1、2 名家长参会的概率分别是 0.05、0.8、0.15. 学校共有学生 400 名，各学生参会家长人数相互独立. (1) 求参会家长超过 450 名的概率

解答 设第 k 名学生家长参会人数为随机变量 X_k，则有

$$\mu = E(X_k) = 0.05 \times 0 + 0.8 \times 1 + 0.15 \times 2 = 1.1$$

$$\sigma^2 = D(X_k) = E(X_k^2) - [E(X_k)]^2$$

$$= 0.05 \times 0^2 + 0.8 \times 1^2 + 0.15 \times 2^2 1.1^2 = 0.19$$

参会家长总人数 $X = \sum_{k=1}^{400} X_k$，由定理 1，其标准化随机变量近似服从正态分布 $(0, 1)$，于是

$$P\{V > 450\} = P\left\{Z > \frac{450 - 400 \times 1.1}{\sqrt{400}\sqrt{0.19}}\right\} = P\{Z > 1.147\}$$

$$= 1 - \Phi(1.147) = 0.1251$$

例 3

- 对于一名学生而言，参加家长会的人数是随机变量，0、1、2 名家长参会的概率分别是 0.05、0.8、0.15. 学校共有学生 400 名，各学生参会家长人数相互独立. (2) 求一名家长参会学生人数不多于 340 的概率

  解答 设有 1 名学生家长参会人数为随机变量 Y，则有 $Y \sim b(400, 0.8)$. 由定理 3 知

$$
\begin{aligned}
P\{Y \leq 450\} &= P\left\{\frac{Y - 400 \times 0.8}{\sqrt{400 \times 0.8 \times 0.2}} \leq \frac{349 - 400 \times 0.8}{\sqrt{400 \times 0.8 \times 0.2}}\right\} \\
&= P\left\{\frac{Y - 400 \times 0.8}{\sqrt{400 \times 0.8 \times 0.2}} \leq 2.5\right\} \\
&= \Phi(2.5) \\
&= 0.9938
\end{aligned}
$$

小结

- 考试内容
  - 切比雪夫（Chebyshev）不等式、切比雪夫大数定律、伯努利（Bernoulli) 大数定律、辛钦（Khinchine）大数定律、棣莫弗－拉普拉斯（DeMoivre －laplace）定理、列维－林德伯格（Levy-Lindberg）定理
- 考试要求
  - 了解切比雪夫不等式
  - 了解切比雪夫大数定律、伯努利大数定律和辛钦大数定律 (独立同分布随机变量序列的大数定律)
  - 了解棣莫弗-拉普拉斯定理（二项分布以正态分布为极限分布）和列维-林德伯格定理（独立同分布随机变量序列的中心极限定理）

Q&A

Thank you!

感谢您的聆听和反馈