第二章 线性规划

修贤超

https://xianchaoxiu.github.io

目录

线性规划问题的数学模型

- 标准形式

$$\max\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ (i = 1, \cdots, m) \\ x_j \geq 0 \ (j = 1, \cdots, n) \end{cases}$$

- 满足约束条件的 $x_j\ (j = 1, \cdots, n)$ 称为可行解
- 全部可行解的集合称为可行域
- 使目标函数达到最优的可行解称为最优解

适用范围

- 只有两个变量的线性规划问题

$$\max\ z = c_1x_1 + c_2x_2$$
$$\text{s.t.}\ \begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i\ (i = 1, \cdots, m) \\ x_1x_2 \geq 0 \end{cases}$$

- 具体步骤
  - 第一步: 建立平面直角坐标系
  - 第二步: 图示约束条件, 找出可行域
  - 第三步: 图示目标函数
  - 第四步: 确定最优解

例 1

- 用图解法求解线性规划问题

$$\max\ z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

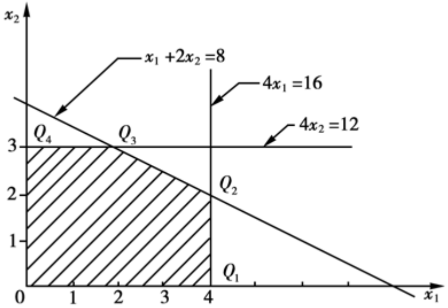
  - 决策变量: x_1, x_2
  - 目标函数: $\max\ \ z = 2x_1 + 3x_2$
  - 约束条件: $x_1 + 2x_2 \le 8$, $4x_1 \le 16$, $4x_2 \le 12$, $x_1, x_2 \ge 0$

具体步骤

- 第一步: 建立平面直角坐标系
- 第二步: 图示约束条件，找出可行域

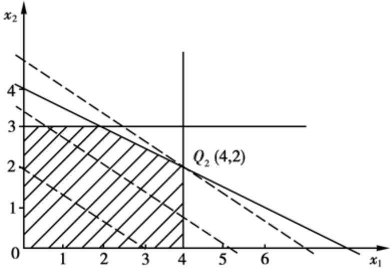
$$\max\ z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 4x_1 \leq 16 \\ 4x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$



具体步骤

- 第一步：建立平面直角坐标系
- 第二步：图示约束条件，找出可行域
- 第三步：图示目标函数 $\max \ z = 2x_1 + 3x_2$



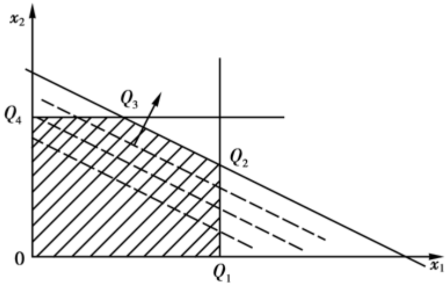
- 第四步：确定最优解为 $x_1 = 4, x_2 = 2$，最优值为 $z^* = 14$

无穷多最优解

- 目标函数的直线族与约束条件平行

$$\max\ z = 2x_1 + 4x_2$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

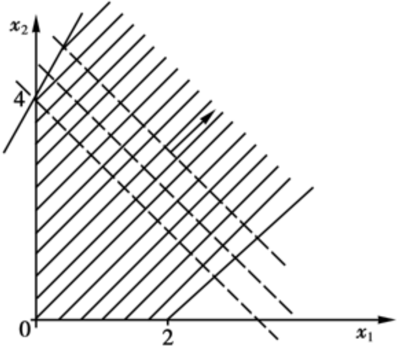


无界解

- 建立数学模型时遗漏了某些必要的资源约束条件

$$\max\ z = x_1 + x_2$$

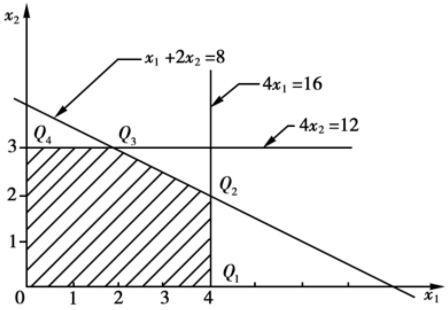
$$\text{s.t.} \begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 - x_2 \le 2 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$



- 当存在矛盾的约束条件时会出现无可行域

$$\max\ z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 10 \\ x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 4x_1 \leq 16 \\ 4x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

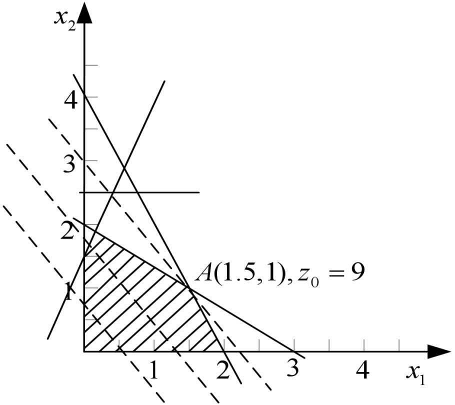


例 2

- **用图解法求解线性规划问题**

$$\max\ z = 4x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 6 \\ -3x_1 + 2x_2 \le 3 \\ 2x_1 + x_2 \le 4 \\ 2x_2 \le 5 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$



课堂练习 1

- 用图解法求解线性规划问题

$$\max\ z = 2x_1 + 3x_2$$

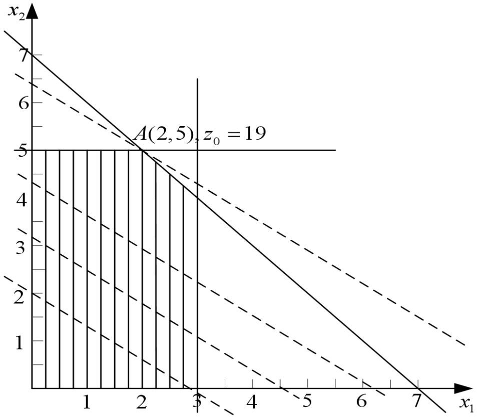
$$\text{s.t.}\ \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 14 \\ 4x_1 \le 12 \\ 3x_2 \le 15 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

课堂练习 1 (答案)

- 用图解法求解线性规划问题

$$\max\ z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ 4x_1 \leq 12 \\ 3x_2 \leq 15 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$



启示

- 若线性规划问题的可行域存在，则可行域是一个凸集
- 若线性规划问题的最优解存在，则最优解一定是凸集的某个顶点
- 解题思路
  - 先找出凸集的任一顶点，计算在顶点处的目标函数值
  - 比较周围相邻顶点的目标函数值是否比这个值大，如果为否，则该顶点就是最优解的点，否则转到比这个点的目标函数值更大的另一顶点
  - 重复上述过程，一直到找出使目标函数值达到最大的顶点为止

小结

- 图解法仅求解两个变量的线性规划问题
- 解的存在性
  - 唯一解
  - 无穷多解
  - 无界解
  - 无解/无可行解
- 课后作业: P43, 习题 1.1

Q&A

Thank you!

感谢您的聆听和反馈