对偶问题的基本性质

修贤超

https://xianchaoxiu.github.io

单纯形法计算的矩阵描述

- 原问题

$$\max\ z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le b_i\ (i=1,\cdots,m)\\ x_j\ge 0\ (j=1,\cdots,n)\end{cases}$$

- 矩阵表达

$$\max\ z=\mathbf{CX}$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases}\mathbf{AX}\le\mathbf{b}\\ \mathbf{X}\ge\mathbf{0}\end{cases}$$

单纯形法计算的矩阵描述

- 引入松弛变量

$$\max\ z = \mathbf{C}\mathbf{X} + 0\mathbf{X}_S$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{I}\mathbf{X}_S = \mathbf{b} \\ \mathbf{X} \geq \mathbf{0},\ \ \mathbf{X}_S \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

  - $\mathbf{I}$ 为 $m \times m$ 单位矩阵，为初始基
  - $\mathbf{X}_S = (x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})^\top$ 为基变量
  - 设迭代若干步后基变量为 $\mathbf{X}_B$，决策变量为 $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_B, \mathbf{X}_N)$
  - 将约束函数的系数矩阵 $\mathbf{A}$ 分为 $\mathbf{A} = (\mathbf{B}, \mathbf{N})$，其中 $\mathbf{B}$ 是基变量 $\mathbf{X}_B$ 的系数矩阵，$\mathbf{N}$ 是非基变量的系数矩阵
  - 将目标函数的系数向量 $\mathbf{C}$ 分为 $\mathbf{C} = (\mathbf{C}_B, \mathbf{C}_N)$，其中 $\mathbf{C}_B$ 是基变量的系数向量，$\mathbf{N}$ 是非基变量的系数向量

例 1

- **写出下面问题的对偶问题**

$$\max\ z = 2x_1 + x_2$$
$$\text{s.t.}\ \begin{cases} 5x_2 \le 15 \\ 6x_1 + 2x_2 \le 24 \\ x_1 + x_2 \le 5 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

- **标准化**

$$\max\ z = 2x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$
$$\text{s.t.}\ \begin{cases} 5x_2 + x_3 = 15 \\ 6x_1 + 2x_2 + x_4 = 24 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

例 1

- 列出初始单纯形表，确定主元 [6]，用 x_1 替换 x_4

$c_j \rightarrow$			2	1	0	0	0
$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{X}_B$	**b**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	15	0	5	1	0	0
0	x_4	24	6	2	0	1	0
0	x_5	5	1	1	0	0	1
$c_j - z_j$			2	1	0	0	0

- 变量重排

	$\mathbf{X}_B$			$\mathbf{X}_N$		$\mathbf{X}_S$		
	x_3	x_1	x_5	x_4	x_2	x_3	x_4	x_5
15	1	0	0	0	5	1	0	0
24	0	6	0	1	2	0	1	0
5	0	1	1	0	1	0	0	1
$\mathbf{b}$	$\mathbf{B}$			$\mathbf{N}$		$\mathbf{I}$		

$$\Downarrow$$

项目			非基变量		基变量
$\mathbf{C}_B$	基	$\mathbf{b}$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{X}_N$	$\mathbf{X}_S$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{X}_S$	$\mathbf{b}$	$\mathbf{B}$	$\mathbf{N}$	$\mathbf{I}$
$c_j - z_j$			$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{C}_N$	$\mathbf{0}$

例 1

- 变量重排

	$\mathbf{X}_B$			$\mathbf{X}_N$		$\mathbf{X}_S$		
	x_3	x_1	x_5	x_4	x_2	x_3	x_4	x_5
15	1	0	0	0	5	1	0	0
4	0	1	0	1/6	2/6	0	1/6	0
5	0	0	1	-1/6	4/6	0	-1/6	1
$\mathbf{b}$	$\mathbf{I}$			$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$		$\mathbf{B}^{-1}$		

$$\Downarrow$$

项目			基变量	非基变量	
$\mathbf{C}_B$	基	$\mathbf{b}$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{X}_N$	$\mathbf{X}_S$
$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{I}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{I} = \mathbf{B}^{-1}$
$c_j - z_j$			$\mathbf{C}_B - \mathbf{C}_B\mathbf{I} = \mathbf{0}$	$\mathbf{C}_N - \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$	$\mathbf{0} - \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}$

例 1

- 迭代前后对

项目			非基变量		基变量
$\mathbf{C}_B$	基	$\mathbf{b}$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{X}_N$	$\mathbf{X}_S$
0	$\mathbf{X}_S$	$\mathbf{b}$	$\mathbf{B}$	$\mathbf{N}$	$\mathbf{I}$
$c_j - z_j$			$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{C}_N$	$\mathbf{0}$

$$\Downarrow$$

项目			基变量	非基变量	
$\mathbf{C}_B$	基	$\mathbf{b}$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{X}_N$	$\mathbf{X}_S$
$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{I}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{I} = \mathbf{B}^{-1}$
$c_j - z_j$			$\mathbf{C}_B - \mathbf{C}_B\mathbf{I} = \mathbf{0}$	$\mathbf{C}_N - \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$	$\mathbf{0} - \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}$

单纯形法计算的矩阵描述

- 对应初始单纯形表中的单位矩阵 $\mathbf{I}$，迭代后的单纯形表中为 $\mathbf{B}^{-1}$
- 初始单纯形表中基变量 $\mathbf{X}_S = \mathbf{b}$，迭代后的表中 $\mathbf{X}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$

项目			非基变量		基变量
$\mathbf{C}_B$	基	$\mathbf{b}$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{X}_N$	$\mathbf{X}_S$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{X}_S$	$\mathbf{b}$	$\mathbf{B}$	$\mathbf{N}$	$\mathbf{I}$
$c_j - z_j$			$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{C}_N$	$\mathbf{0}$

$$\Downarrow$$

项目			基变量	非基变量	
$\mathbf{C}_B$	基	$\mathbf{b}$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{X}_N$	$\mathbf{X}_S$
$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{I}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{I} = \mathbf{B}^{-1}$
$c_j - z_j$			$\mathbf{C}_B - \mathbf{C}_B\mathbf{I} = \mathbf{0}$	$\mathbf{C}_N - \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$	$\mathbf{0} - \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}$

单纯形法计算的矩阵描述

- 初始单纯形表中约束系数矩阵 $[\mathbf{A},\ \mathbf{I}] = [\mathbf{B},\ \mathbf{N},\ \mathbf{I}]$，迭代后的表中约束系数矩阵为 $[\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A},\ \mathbf{B}^{-1}\mathbf{I}] = [\mathbf{I},\ \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N},\ \mathbf{B}^{-1}]$
- 若初始矩阵中变量 x_j 的系数向量为 $\mathbf{P}_j$，迭代后的为 $\mathbf{P}_j'$，则 $\mathbf{P}_j' = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j$

项目			非基变量		基变量
$\mathbf{C}_B$	基	$\mathbf{b}$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{X}_N$	$\mathbf{X}_S$
0	$\mathbf{X}_S$	$\mathbf{b}$	$\mathbf{B}$	$\mathbf{N}$	$\mathbf{I}$
$c_j - z_j$			$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{C}_N$	$\mathbf{0}$

$$\Downarrow$$

项目			基变量	非基变量	
$\mathbf{C}_B$	基	$\mathbf{b}$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{X}_N$	$\mathbf{X}_S$
$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{I}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{I} = \mathbf{B}^{-1}$
$c_j - z_j$			$\mathbf{C}_B - \mathbf{C}_B\mathbf{I} = \mathbf{0}$	$\mathbf{C}_N - \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$	$\mathbf{0} - \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}$

单纯形法计算的矩阵描述

- 迭代后达到最优，即检验数满足

$$\mathbf{C}_N - \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} \leq 0,\ -\mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1} \leq 0$$

由于 $\mathbf{C}_B - \mathbf{C}_B\mathbf{I} = 0$，得到

$$\mathbf{C} - \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} \leq 0,\ -\mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1} \leq 0$$

这里 $\mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}$ 称为单纯形乘子。若令 $\mathbf{Y}^\top = \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}$，则上式可以改写为

$$\mathbf{A}^\top\mathbf{Y} \geq \mathbf{C}^\top,\ \mathbf{Y} \geq 0$$

- 上式表明 $\mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}$ 的转置为其对偶问题的一个可行解，即

$$w = \mathbf{Y}^\top\mathbf{b} = \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = z$$

当原问题为最优解时，对偶问题为可行解，且两者具有相同的目标函数值

弱对偶性

- **性质** 如果 $\overline{x}_j\ (j=1,\ldots,n)$ 是原问题的可行解，$\overline{y}_i\ (i=1,\ldots,m)$ 是其对偶问题的可行解，则恒有

$$\sum_{j=1}^{n} c_j\overline{x}_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i\overline{y}_i$$

证明 根据定义易知

$$\sum_{j=1}^{n} c_j\overline{x}_j \leq \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\overline{y}_i\right)\overline{x}_j = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{x}_j\overline{y}_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} b_i\overline{y}_i \geq \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{x}_j\right)\overline{y}_i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{y}_i\overline{x}_j$$

推论

- **性质** 如果 $\overline{x}_j\ (j=1,\dots,n)$ 是原问题的可行解，$\overline{y}_i\ (i=1,\dots,m)$ 是其对偶问题的可行解，则恒有

$$\sum_{j=1}^{n} c_j\overline{x}_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i\overline{y}_i$$

- **推论 1** 原问题任一可行解的目标函数值是其对偶问题目标函数值的下界，反之，对偶问题任一可行解的目标函数值是其原问题目标函数值的上界
- **推论 2** 若原问题有可行解且目标函数值无界，则其对偶问题无可行解，反之，对偶问题有无界解，则原问题无可行解
- **推论 3** 若原问题有可行解，对偶问题无可行解，则原问题目标函数值无界，反之，对偶问题有可行解，而原问题无可行解，则对偶问题的目标函数值无界

最优性

- **性质** 如果 $\hat{x}_j\ (j=1,\ldots,n)$ 是原问题的可行解，$\hat{y}_i\ (i=1,\ldots,m)$ 是其对偶问题的可行解，且有 $\sum\limits_{j=1}^{n} c_j\hat{x}_j = \sum\limits_{i=1}^{m} b_i\hat{y}_i$ 则 $\hat{x}_j\ (j=1,\ldots,n)$ 是原问题的最优解，$\hat{y}_i\ (i=1,\ldots,m)$ 是其对偶问题的最优解

  证明 设 $x_j^*\ (j=1,\ldots,n)$ 是原问题的最优解，$y_i^*\ (i=1,\ldots,m)$ 是其对偶问题的最优解，有

$$\sum_{j=1}^{n} c_j\hat{x}_j \leq \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^*,\ \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* \leq \sum_{i=1}^{m} b_i\hat{y}_i$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j\hat{x}_j = \sum_{i=1}^{m} b_i\hat{y}_i,\ \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j\hat{x}_j = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* = \sum_{i=1}^{m} b_i\hat{y}_i$$

强对偶性

- **弱对偶性** 如果 $\bar{x}_j$ $(j = 1, \dots, n)$ 是原问题的可行解，$\bar{y}_i$ $(i = 1, \dots, m)$ 是其对偶问题的可行解，则恒有

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \bar{x}_j \le \sum_{i=1}^{m} b_i \bar{y}_i$$

- **强对偶性** 若原问题有最优解，对偶问题也有最优解，且目标函数值相等。或若原问题与对偶问题均具有可行解，则两者均具有最优解，且它们最优解的目标函数值相等

互补松弛性

- 性质 在线性规划问题的最优解中，如果对应某一约束条件的对偶变量值为零，则改约束条件取严格等式; 反之，如果约束条件取严格不等式，则其对应的对偶变量一定为零。也即
  - 若 $\hat{y}_i > 0$，则有 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\hat{x}_j = b_i$, 即 $\hat{x}_{si} = 0$
  - 若 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\hat{x}_j < b_i$，即 $\hat{x}_{si} = 0$，则有 $\hat{y}_i = 0$

  因此一定有 $\hat{x}_{si} \cdot \hat{y}_i = 0$

  证明 由弱对偶性知

$$\sum_{j=1}^{n} c_j\hat{x}_j \leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\hat{x}_j\hat{y}_i \leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_i\hat{y}_i$$

  又根据最优性 $\sum_{j=1}^{n} c_j\hat{x}_j = \sum_{i=1}^{m} b_i\hat{y}_i$，故上式中全为等式

由右端等式得

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\hat{x}_j-b_i\right)\hat{y}_i=0$$

由于 $\hat{y}_i\geq 0$, $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\hat{x}_j-b_i\leq 0$，故对所有 $i=1,\ldots,m$ 有

$$\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\hat{x}_j-b_i\right)\hat{y}_i=0$$

- 当$\hat{y}_i>0$ 时，必有 $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\hat{x}_j-b_i=0$
- 当 $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\hat{x}_j-b_i<0$ 时，必有 $\hat{y}_i=0$

互补松弛性

- 将互补松弛性质应用于其对偶问题时，可以描述为
  - 如果有 $\hat{x}_i > 0$，则有 $\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}\hat{y}_i = c_j$
  - 如果有 $\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}\hat{y}_j > c_j$，即 $\hat{x}_j = 0$
- 上述针对对称形式证明得对偶问题得性质，同样适用于非对称形式
- 互补松弛性质是理解非线性规划中 KKT 条件得重要基础

例 2

- **试用对偶理论证明上述线性规划问题无最优解**

$$\max\ z = x_1 + x_2$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 \leq 1 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

例 2

- 上述问题的对偶问题

$$\min\ w = 2y_1 + y_2$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} -y_1 - 2y_2 \geq 1 \\ y_1 + y_2 \geq 1 \\ y_1 - y_2 \geq 0 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

- 由第 1 个约束条件知对偶问题无可行解，因而无最优解
- 由推论 3知原问题也无最优解

例 3

- **已知线性规划问题**

$$\min\ w = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \geq 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \geq 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

已知其对偶问题的最优解为 $y_1^* = 4/5, y_2^* = 3/5, z = 5$**，试用对偶理论找出原问题的最优解**

例 3

- **原问题**

$$\min\ w = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5$$
$$\text{s.t.}\ \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \geq 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \geq 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

- **对偶问题**

$$\max\ z = 4y_1 + 3y_2$$
$$\text{s.t.}\ \begin{cases} y_1 + 2y_2 \leq 2 & (1) \\ y_1 - y_2 \leq 3 & (2) \\ 2y_1 + 3y_2 \leq 5 & (3) \\ y_1 + y_2 \leq 2 & (4) \\ 3y_1 + y_2 \leq 3 & (5) \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

例 3

- 将$y_1^* = 4/5, y_2^* = 3/5$ 的值代入约束条件得

$$(2) = 1/5 < 3,\ (3) = 17/5 < 5, (4) = 7/5 < 2$$

它们为严格不等式，由互补松弛性得 $x_2^* = x_3^* = x_4^* = 0$。

- 由于 $y_1^*, y_2^* > 0$，由互补松弛性可知原问题的两个约束条件应取等式，即

$$x_1^* + 3x_5^* = 4,\ 2x_1^* + x_5^* = 3$$

求解后得到 $x_1^* = 1,\ x_5^* = 1$。

- 因此原问题的最优解为 $X^* = (1, 0, 0, 0, 1)^\top$，最优值为 $w^* = 5$

小结

- 单纯形计算的矩阵描述
- 对偶问题的基本性质
  - 弱对偶定理
  - 最优性定理
  - 对偶定理
  - 互补松弛性
- 课后作业: P75, 习题 2.5, 2.6

Q&A

Thank you!

感谢您的聆听和反馈