

## 第二章 线性规划

修贤超

<https://xianchaoxiu.github.io>

- 2.1 线性规划问题及其数学模型
- 2.2 图解法
- 2.3 单纯形法原理
- 2.4 单纯形法计算步骤
- 2.5 单纯形法的进一步讨论
- 2.6 线性规划的对偶问题
- 2.7 对偶问题的基本性质

# 单纯形法计算的矩阵描述

## ■ 原问题

$$\begin{aligned} \max z &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.t. } &\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = 1, \dots, m) \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n) \end{cases} \end{aligned}$$

## ■ 矩阵表达

$$\begin{aligned} \max z &= \mathbf{CX} \\ \text{s.t. } &\begin{cases} \mathbf{AX} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{X} \geq \mathbf{0} \end{cases} \end{aligned}$$

# 单纯形法计算的矩阵描述

- 引入松弛变量

$$\begin{aligned} \max \quad & z = \mathbf{C}\mathbf{X} + \mathbf{0}\mathbf{X}_S \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{I}\mathbf{X}_S = \mathbf{b} \\ \mathbf{X} \geq \mathbf{0}, \mathbf{X}_S \geq \mathbf{0} \end{cases} \end{aligned}$$

- $\mathbf{I}$  为初始基

- $\mathbf{X}_S = (x_{n+1}, \dots, x_{n+m})^\top$  为基变量

- 决策变量为  $\mathbf{X} = [\mathbf{X}_B, \mathbf{X}_N]$

- 约束函数的系数矩阵为  $\mathbf{A} = [\mathbf{B}, \mathbf{N}]$

- 目标函数的系数向量为  $\mathbf{C} = [\mathbf{C}_B, \mathbf{C}_N]$

# 例 1

## ■ 写出下面问题的对偶问题

$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} 5x_2 \leq 15 \\ 6x_1 + 2x_2 \leq 24 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

## ■ 标准化

$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} 5x_2 + x_3 = 15 \\ 6x_1 + 2x_2 + x_4 = 24 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

# 例 1

- 列出初始单纯形表, 确定主元 [6], 用  $x_1$  替换  $x_4$

$c_j \rightarrow$			2	1	0	0	0
$C_B$	$X_B$	$b$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
0	$x_3$	15	0	5	1	0	0
0	$x_4$	24	[6]	2	0	1	0
0	$x_5$	5	1	1	0	0	1
$c_j - z_j$			2	1	0	0	0

# 例 1

## ■ 变量重排

	$\mathbf{X}_B$			$\mathbf{X}_N$		$\mathbf{X}_S$		
	$x_3$	$x_1$	$x_5$	$x_4$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
15	1	0	0	0	5	1	0	0
24	0	6	0	1	2	0	1	0
5	0	1	1	0	1	0	0	1
<b>b</b>	<b>B</b>			<b>N</b>		<b>I</b>		



项目			非基变量		基变量
$\mathbf{C}_B$	基	<b>b</b>	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{X}_N$	$\mathbf{X}_S$
<b>0</b>	$\mathbf{X}_S$	<b>b</b>	<b>B</b>	<b>N</b>	<b>I</b>
$c_j - z_j$			$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{C}_N$	<b>0</b>

# 例 1

## ■ 变量重排

	$\mathbf{X}_B$			$\mathbf{X}_N$		$\mathbf{X}_S$		
	$x_3$	$x_1$	$x_5$	$x_4$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
15	1	0	0	0	5	1	0	0
4	0	1	0	1/6	2/6	0	1/6	0
5	0	0	1	-1/6	4/6	0	-1/6	1
<b>b</b>	<b>I</b>			<b>B<sup>-1</sup>N</b>		<b>B<sup>-1</sup></b>		

⇓

项目			基变量	非基变量	
$\mathbf{C}_B$	基	<b>b</b>	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{X}_N$	$\mathbf{X}_S$
$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{I}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{I} = \mathbf{B}^{-1}$
$c_j - z_j$			$\mathbf{C}_B - \mathbf{C}_B\mathbf{I} = 0$	$\mathbf{C}_N - \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$	$0 - \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}$



# 例 1

## ■ 迭代前后对

项目			非基变量		基变量
$C_B$	基	$b$	$X_B$	$X_N$	$X_S$
0	$X_S$	$b$	$B$	$N$	$I$
$c_j - z_j$			$C_B$	$C_N$	0

⇓

项目			基变量	非基变量	
$C_B$	基	$b$	$X_B$	$X_N$	$X_S$
$C_B$	$X_B$	$B^{-1}b$	$B^{-1}B = I$	$B^{-1}N$	$B^{-1}I = B^{-1}$
$c_j - z_j$			$C_B - C_B I = 0$	$C_N - C_B B^{-1}N$	$0 - C_B B^{-1}$

# 单纯形法计算的矩阵描述

- 对应初始单纯形表中的单位矩阵  $I$ , 迭代后的单纯形表中为  $B^{-1}$
- 初始单纯形表中基变量  $X_S = b$ , 迭代后的表中  $X_B = B^{-1}b$

项目			非基变量		基变量
$C_B$	基	$b$	$X_B$	$X_N$	$X_S$
$0$	$X_S$	$b$	$B$	$N$	$I$
$c_j - z_j$			$C_B$	$C_N$	$0$



项目			基变量	非基变量		
$C_B$	基	$b$	$X_B$	$X_N$	$X_S$	
$C_B$	$X_B$	$B^{-1}b$	$B^{-1}B = I$	$B^{-1}N$	$B^{-1}I = B^{-1}$	
$c_j - z_j$			$C_B - C_B I = 0$	$C_N - C_B B^{-1}N$	$0 - C_B B^{-1}$	

# 单纯形法计算的矩阵描述

- 初始单纯形表中约束系数矩阵  $[A, I] = [B, N, I]$ , 迭代后的表中约束系数矩阵为  $[B^{-1}A, B^{-1}I] = [I, B^{-1}N, B^{-1}]$
- 若初始矩阵中变量  $x_j$  的系数向量为  $P_j$ , 迭代后的为  $P'_j$ , 则  $P'_j = B^{-1}P_j$

项目			非基变量		基变量
$C_B$	基	b	$X_B$	$X_N$	$X_S$
0	$X_S$	b	B	N	I
$c_j - z_j$			$C_B$	$C_N$	0



项目			基变量	非基变量	
$C_B$	基	b	$X_B$	$X_N$	$X_S$
$C_B$	$X_B$	$B^{-1}b$	$B^{-1}B = I$	$B^{-1}N$	$B^{-1}I = B^{-1}$
$c_j - z_j$			$C_B - C_B I = 0$	$C_N - C_B B^{-1}N$	$0 - C_B B^{-1}$

# 单纯形法计算的矩阵描述

- 迭代后达到最优，即检验数满足

$$C_N - C_B B^{-1} N \leq 0, -C_B B^{-1} \leq 0$$

由于  $C_B - C_B I = 0$ ，得到

$$C - C_B B^{-1} A \leq 0, -C_B B^{-1} \leq 0$$

这里  $C_B B^{-1}$  称为**单纯形乘子**。若令  $Y^T = C_B B^{-1}$ ，则上式可以改写为

$$A^T Y \geq C^T, Y \geq 0$$

- 上式表明  $C_B B^{-1}$  的转置为其对偶问题的一个可行解，即

$$w = Y^T b = C_B B^{-1} b = z$$

当原问题为最优解时，对偶问题为可行解，且两者具有相同的目标函数值

# 弱对偶性

- 如果  $\bar{x}_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) 是原问题的可行解,  $\bar{y}_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) 是其对偶问题的可行解, 则恒有

$$\sum_{j=1}^n c_j \bar{x}_j \leq \sum_{i=1}^m b_i \bar{y}_i$$

证明 根据定义易知

$$\sum_{j=1}^n c_j \bar{x}_j \leq \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^m a_{ij} \bar{y}_i \right) \bar{x}_j = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{x}_j \bar{y}_i$$

$$\sum_{i=1}^m b_i \bar{y}_i \geq \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{x}_j \right) \bar{y}_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{y}_i \bar{x}_j$$

- 如果  $\bar{x}_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) 是原问题的可行解,  $\bar{y}_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) 是其对偶问题的可行解, 则恒有

$$\sum_{j=1}^n c_j \bar{x}_j \leq \sum_{i=1}^m b_i \bar{y}_i$$

- **推论 1** 原问题任一可行解的目标函数值是其对偶问题目标函数值的下界, 反之, 对偶问题任一可行解的目标函数值是其原问题目标函数值的上界
- **推论 2** 若原问题有可行解且目标函数值无界, 则其对偶问题无可行解, 反之, 对偶问题有无界解, 则原问题无可行解
- **推论 3** 若原问题有可行解, 对偶问题无可行解, 则原问题目标函数值无界, 反之, 对偶问题有可行解, 原问题无可行解, 则对偶问题的目标函数值无界

# 最优性

- 如果  $\hat{x}_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) 是原问题的可行解,  $\hat{y}_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) 是其对偶问题的可行解, 且有  $\sum_{j=1}^n c_j \hat{x}_j = \sum_{i=1}^m b_i \hat{y}_i$  则  $\hat{x}_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) 是原问题的最优解,  $\hat{y}_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) 是其对偶问题的最优解

**证明** 设  $x_j^*$  ( $j = 1, \dots, n$ ) 是原问题的最优解,  $y_i^*$  ( $i = 1, \dots, m$ ) 是其对偶问题的最优解, 有

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n c_j \hat{x}_j &\leq \sum_{j=1}^n c_j x_j^*, & \sum_{i=1}^m b_i y_i^* &\leq \sum_{i=1}^m b_i \hat{y}_i \\ \sum_{j=1}^n c_j \hat{x}_j &= \sum_{i=1}^m b_i \hat{y}_i, & \sum_{j=1}^n c_j x_j^* &\leq \sum_{i=1}^m b_i y_i^* \\ \sum_{j=1}^n c_j \hat{x}_j &= \sum_{j=1}^n c_j x_j^* = \sum_{i=1}^m b_i y_i^* = \sum_{i=1}^m b_i \hat{y}_i\end{aligned}$$

# 强对偶性

- 若原问题及其对偶问题均具有可行解，则两者均具有最优解，且它们最优解的目标函数值相等

**证明** 由于两者均有可行解，根据弱对偶性的推论 1，对原问题的目标函数值具有上界，对偶问题的目标函数值具有下界，因此两者均具有最优解

当原问题为最优解时，其对偶问题的解为可行解，且有  $z = w$ ，由最优性知，这时两者的解均为最优解



- 在线性规划问题的最优解中，如果对应某一约束条件的对偶变量值为零，则改约束条件取严格等式；反之，如果约束条件取严格不等式，则其对应的对偶变量一定为零。也即

□ 若  $\hat{y}_i > 0$ ，则有  $\sum_{j=1}^n a_{ij}\hat{x}_j = b_i$ ，即  $\hat{x}_{si} = 0$

□ 若  $\sum_{j=1}^n a_{ij}\hat{x}_j < b_i$ ，即  $\hat{x}_{si} = 0$ ，则有  $\hat{y}_i = 0$

因此一定有  $\hat{x}_{si} \cdot \hat{y}_i = 0$

**证明** 由弱对偶性知

$$\sum_{j=1}^n c_j \hat{x}_j \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} \hat{x}_j \hat{y}_i \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n b_i \hat{y}_i$$

又根据最优性  $\sum_{j=1}^n c_j \hat{x}_j = \sum_{i=1}^m b_i \hat{y}_i$ ，故上式中全为等式

由右端等式得

$$\sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} \hat{x}_j - b_i \right) \hat{y}_i = 0$$

由于  $\hat{y}_i \geq 0$ ,  $\sum_{j=1}^n a_{ij} \hat{x}_j - b_i \leq 0$ , 故对所有  $i = 1, \dots, m$  有

$$\left( \sum_{j=1}^n a_{ij} \hat{x}_j - b_i \right) \hat{y}_i = 0$$

□ 当  $\hat{y}_i > 0$  时, 必有  $\sum_{j=1}^n a_{ij} \hat{x}_j - b_i = 0$

□ 当  $\sum_{j=1}^n a_{ij} \hat{x}_j - b_i < 0$  时, 必有  $\hat{y}_i = 0$

# 互补松弛性

- 将互补松弛性质应用于其对偶问题时，可以描述为
  - 如果有  $\hat{x}_i > 0$ ，则有  $\sum_{i=1}^m a_{ij}\hat{y}_i = c_j$
  - 如果有  $\sum_{i=1}^m a_{ij}\hat{y}_j > c_j$ ，即  $\hat{x}_j = 0$
- 上述针对对称形式证明得对偶问题得性质，同样适用于非对称形式
- 互补松弛性质是理解非线性规划中 KKT 条件得重要基础

## 例 2

- 试用对偶理论证明上述线性规划问题无最优解

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + x_2 \\ \text{s.t. } &\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 \leq 1 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

## 例 2

- 上述问题的对偶问题

$$\begin{aligned} \min \quad & w = 2y_1 + y_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} -y_1 - 2y_2 \geq 1 \\ y_1 + y_2 \geq 1 \\ y_1 - y_2 \geq 0 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

- 由第 1 个约束条件知对偶问题无可行解，因而无最优解
- 由推论 3 知原问题也无最优解

## 例 3

### ■ 已知线性规划问题

$$\begin{aligned} \min \quad & w = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \geq 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \geq 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

已知其对偶问题的最优解为  $y_1^* = 4/5, y_2^* = 3/5, z = 5$ , 试用对偶理论找出原问题的最优解

## 例 3

### ■ 原问题

$$\begin{aligned} \min \quad & w = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \geq 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \geq 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

### ■ 对偶问题

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 4y_1 + 3y_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} y_1 + 2y_2 \leq 2 & (1) \\ y_1 - y_2 \leq 3 & (2) \\ 2y_1 + 3y_2 \leq 5 & (3) \\ y_1 + y_2 \leq 2 & (4) \\ 3y_1 + y_2 \leq 3 & (5) \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

### 例 3

- 将  $y_1^* = 4/5, y_2^* = 3/5$  的值代入约束条件得

$$(2) = 1/5 < 3, (3) = 17/5 < 5, (4) = 7/5 < 2$$

它们为严格不等式, 由**互补松弛性**得  $x_2^* = x_3^* = x_4^* = 0$ 。

- 由于  $y_1^*, y_2^* > 0$ , 由**互补松弛性**可知原问题的两个约束条件应取等式, 即

$$x_1^* + 3x_5^* = 4, 2x_1^* + x_5^* = 3$$

求解后得到  $x_1^* = 1, x_5^* = 1$ 。

- 因此原问题的最优解为  $X^* = (1, 0, 0, 0, 1)^\top$ , 最优值为  $w^* = 5$



# 课堂练习 1

## ■ 已知线性规划问题

$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 \\ \text{s.t. } &\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_4 \leq 8 \\ 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_2 + x_3 + x_4 \leq 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 9 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

□ 写出其对偶问题

□ 原问题的最优解为  $(2, 2, 4, 0)$ ，试根据对偶理论直接求对偶问题的最优解

## 课堂练习 1 (答案)

### ■ 对偶问题

$$\begin{aligned} \min w &= 8y_1 + 6y_2 + 6y_3 + 9y_4 \\ \text{s.t. } &\begin{cases} y_1 + 2y_2 + y_4 \geq 2 \\ 3x_1 + y_2 + y_3 + y_4 \geq 4 \\ y_3 + y_4 \geq 1 \\ y_1 + y_3 \geq 1 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

■ 对偶问题最优解为  $y = (4/5, 3/5, 1, 0)^\top$ , 最优值  $w^* = 16$

# 小结

- 单纯形计算的矩阵描述
- 对偶问题的基本性质
  - 弱对偶定理
  - 最优性定理
  - 对偶定理
  - 互补松弛性
- 课后作业: P75, 习题 2.5 和练习 1

*Q&A*

*Thank you!*

感谢您的聆听和反馈