# 第七章 复合优化算法

修贤超

https://xianchaoxiu.github.io

# 目录

# 对偶方法

- 梯度法
  - 对偶函数可能不可微，或定义域非平凡
  - 对原始函数加小的强凸项，将对偶函数光滑化
- 增广拉格朗日法
  - 等价于对光滑化的对偶问题做梯度上升
  - 但是光滑化会破坏可分结构
- 近似点梯度法
  - 一项是梯度利普希茨连续函数
  - 另一项有方便计算的近似点算子

# 对偶问题

- 设 $f$，$h$ 是闭凸函数，考虑如下形式的问题

$$(\mathrm{P}) \quad \min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad \psi(x) = f(x) + h(Ax)$$

- 引入新变量 $y = Ax$，考虑问题

$$(\mathrm{P}) \quad \min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad \psi(x) = f(x) + h(y) \quad \text{s.t.} \quad Ax = y$$

- 拉格朗日函数为

$$L(x, y, z) = f(x) + g(y) + z^\top(Ax - y)$$

- 对偶问题

$$(\mathrm{D}) \quad \max_{z} \quad \phi(z) = -f^*(-A^\top z) - h^*(z)$$

# 强凸函数共轭函数的性质

- 引理 7.1 设 $f(x)$ 是适当且闭的强凸函数，强凸参数为 $\mu > 0$，则 $f^*(y)$ 在全空间 $\mathbb{R}^n$ 上有定义，$f^*(y)$ 是梯度 $\frac{1}{\mu}$-利普希茨连续的可微函数
- 考虑在对偶问题上应用近似点梯度算法，每次迭代更新如下

$$z^{k+1} = \mathrm{prox}_{th^*}(z^k + tA\nabla f^*(-A^\top z^k))$$

- 引入变量 $x^{k+1} = \nabla f^*(-A^\mathrm{T} z^k)$，迭代格式等价于

$$x^{k+1} = \arg\min_x \{f(x) + (A^\top z^k)^\top x\}, \quad z^{k+1} = \mathrm{prox}_{th^*}(z^k + tAx^{k+1})$$

  - 如果 $f$ 可分，$x$ 的计算可分解为多个独立的问题
  - 步长 $t$ 可取常数或采取回溯线搜索法
  - 可使用加速近似点梯度法

# Moreau 分解

- **引理 7.2** 设 $f$ 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的适当的闭凸函数，则对任意的 $x \in \mathbb{R}^n$ 有

$$x = \operatorname{prox}_f(x) + \operatorname{prox}_{f^*}(x)$$

$$\Downarrow$$

$$x = \operatorname{prox}_{\lambda f}(x) + \lambda \operatorname{prox}_{\lambda^{-1} f^*}\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

- 对任意的闭凸函数 $f$，空间 $\mathbb{R}^n$ 上的恒等映射总可以分解成两个函数 $f$ 与 $f^*$ 邻近算子的和

## 交替极小的解释

- 取 $\lambda = t$, $f = h^*$，并注意到 $h^{**} = h$，有

$$
\begin{aligned}
z^k + tAx^{k+1} &= \mathrm{prox}_{th^*}(z^k + tAx^{k+1}) + t\mathrm{prox}_{t^{-1}h}\left(\frac{z^k}{t} + Ax^{k+1}\right) \\
&= z^{k+1} + t\mathrm{prox}_{t^{-1}h}(\frac{z^k}{t} + Ax^{k+1})
\end{aligned}
$$

- 由此给出对偶近似点梯度法等价的针对原始问题的更新格式

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= \arg\min_x \left\{ f(x) + (z^k)^\top Ax \right\} \\
y^{k+1} &= \mathrm{prox}_{t^{-1}h}\left(\frac{z^k}{t} + Ax^{k+1}\right) \\
&= \arg\min_y \left\{ h(y) - (z^k)^\top(y - Ax^{k+1}) + \frac{t}{2}\|Ax^{k+1} - y\|_2^2 \right\} \\
z^{k+1} &= z^k + t(Ax^{k+1} - y^{k+1})
\end{aligned}
$$

# 交替极小方法

- 考虑等价问题

$$\min_{x,y} \; f(x) + h(y) \quad \text{s.t.} \quad y = Ax$$

- 定义拉格朗日函数和增广拉格朗日函数

$$L(x, y, z) = f(x) + h(y) - z^\top(y - Ax)$$

$$L_t(x, y, z) = f(x) + h(y) - z^\top(y - Ax) + \frac{t}{2}\|y - Ax\|^2$$

- 等价的交替极小格式是

$$x^{k+1} = \arg\min_x L(x, y^k, z^k)$$

$$y^{k+1} = \arg\min_y {\color{red}L_t}(x^{k+1}, y, z^k)$$

$$z^{k+1} = z^k + t(Ax^{k+1} - y^{k+1})$$

- 对偶近似点梯度法等价于对原始约束问题使用交替极小化方法

# 例 7.9

- 假设 $f$ 是强凸函数，$\|\cdot\|$ 是任意一种范数，考虑

$$\min \quad f(x) + \|Ax - b\|$$

- 对应原始问题有 $h(y) = \|y - b\|$

$$h^*(z) = \begin{cases} b^\top z & \|z\|_* \le 1 \\ +\infty & \text{其他} \end{cases} \qquad \mathrm{prox}_{th^*}(x) = \mathcal{P}_{\|z\|_* \le 1}(x - tb)$$

- 从而对偶问题为

$$\max_{\|z\|_* \le 1} \quad -f^*(-A^\top z) - b^\top z$$

应用对偶近似点梯度法，更新如下

$$x^{k+1} = \arg\min_x \left\{ f(x) + (A^\top z^k)^\top x \right\}$$

$$z^{k+1} = \mathcal{P}_{\|z\|_* \le 1}(z^k + t(Ax^{k+1} - b))$$

# 例 7.9

- **考虑等价问题**

$$\min_{x,y} \quad f(x) + \|y\| \quad \text{s.t.} \quad Ax - b = y$$

- **交替极小化格式**

$$x^{k+1} = \arg\min_{x} \; f(x) + \|y^k\| + (z^k)^\top (Ax - b - y^k)$$

$$y^{k+1} = \arg\min_{y} \; f(x^{k+1}) + \|y\| + (z^k)^\top (Ax^{k+1} - b - y) + \frac{t}{2}\|Ax^{k+1} - b - y\|_2^2$$

$$z^{k+1} = z^k + t(Ax^{k+1} - b - y^{k+1})$$

## 例 7.10

- 假设 $f$ 是强凸函数，考虑

$$\min \quad f(x)+\sum_{i=1}^{p}\|B_i x\|_2$$

- 根据 $\|\cdot\|_2$ 的共轭函数定义，对偶问题

$$\max_{\|z_i\|_2\le 1} \quad -f^*\left(-\sum_{i=1}^{p} B_i^\top z_i\right)$$

- 记 $C_i$ 是 $\mathbb{R}_{m_i}$ 中的单位欧几里得球，对偶近似点梯度法更新如下

$$x^{k+1}=\arg\min_x\left\{f(x)+(\sum_{i=1}^{p} B_i^\top z_i)^\top x\right\}$$
$$z_i^{k+1}=\mathcal{P}_{C_i}(z_i^k+tB_i x^{k+1}), i=1,2,\cdots,p$$

# 例 7.11

- 假设 $f$ 是强凸函数，集合 $C_i$ 为闭凸集，且易于计算投影，考虑

$$\begin{array}{rl} \min & f(x) \\ \text{s.t.} & x \in C_1 \cap C_2 \cap \cdots \cap C_m \end{array}$$

- 令 $h(y_1, y_2, \cdots, y_m) = \sum_{i=1}^{m} I_{C_i}(y_i)$，$A = [I \ I \ \cdots \ I]^\top$
- 对偶问题

$$\max_{z_i \in C_i} \quad -f^*\left(-\sum_{i=1}^{m} z_i\right) - \sum_{i=1}^{m} I_{C_i}^*(z_i),$$

$I_{C_i}^*(z_i)$ 是集合 $C_i$ 的支撑函数，其显式表达式不易求出

# 例 7.11

- 利用 Moreau 分解将迭代格式写成交替极小化方法的形式

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &=_x \left\{ f(x) + \left( \sum_{i=1}^{m} z_i \right)^{\top} x \right\} \\
y_i^{k+1} &= \mathcal{P}_{C_i}\left( \frac{z_i^k}{t} + x^{k+1} \right), \quad i = 1, 2, \cdots, m \\
z_i^{k+1} &= z_i^k + t(x^{k+1} - y_i^{k+1}), \quad i = 1, 2, \cdots, m
\end{aligned}
$$

# 例 7.12

- 假设 $f_i$ 是强凸函数，$h_i^*$ 有易于计算的邻近算子．考虑

$$\min \quad \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j) + \sum_{i=1}^{m} h_i(A_{i1}x_1 + A_{i2}x_2 + \cdots + A_{in}x_N)$$

- 对偶问题

$$\max \quad -\sum_{i=1}^{m} h_i^*(z_i) - \sum_{j=1}^{n} f_j^*(-A_{1j}^\top z_1 - A_{2j}^\top z_2 - \cdots - A_{mj}^\top z_m)$$

- 对偶近似点梯度法更新如下

$$\begin{aligned} x_j^{k+1} &= \arg\min_{x_j} \left\{ f_j(x_j) + (\sum_{i=1}^{m} A_{ij} z_i^k)^\top x_j \right\}, \quad j = 1, 2, \cdots, n \\ z_i^{k+1} &= \mathrm{prox}_{th_i^*}\left( z_i + t\sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j^{k+1} \right), \quad i = 1, 2, \cdots, m \end{aligned}$$

# 鞍点问题

- 令 $f,h$ 是适当的闭凸函数. 考虑原始问题

$$\min \quad f(x)+h(Ax)$$

- 由于 $h$ 有自共轭性，将问题变形为

$$(\mathrm{L_{PD}}) \quad \min_x \ \max_z \quad \psi_{PD}(x,z)=f(x)-h^*(z)+z^\top Ax$$

- 另一种常用的鞍点问题定义方式构造拉格朗日函数

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n, y\in\mathbb{R}^m} \quad f(x)+h(y) \quad \text{s.t.} \quad y=Ax$$

- 相应的鞍点问题形式如下

$$(\mathrm{L_P}) \quad \min_{x,y} \ \max_z \quad f(x)+h(y)+z^\top(Ax-y)$$

# PDHG 算法

- PDHG 算法的思想就是分别对两类变量应用近似点梯度算法
- 交替更新原始变量以及对偶变量，迭代格式如下

$$
\begin{aligned}
z^{k+1} &= \arg\max_{z} \left\{ -h^*(z) + \langle Ax^k, z - z^k \rangle - \frac{1}{2\delta_k} \|z - z^k\|_2^2 \right\} \\
&= \mathrm{prox}_{\delta_k h^*}(z^k + \delta_k A x^k) \\
x^{k+1} &= \arg\min_{x} \left\{ f(x) + (z^{k+1})^\top A(x - x^k) + \frac{1}{2\alpha_k} \|x - x^k\|_2^2 \right\} \\
&= \mathrm{prox}_{\alpha_k f}(x^k - \alpha_k A^\top z^{k+1})
\end{aligned}
$$

- 原始变量和对偶变量的更新顺序是无关紧要的

# Chambolle-Pock 算法

- PDHG 算法的收敛性需要比较强的条件，有些情形下未必收敛
- Chambolle-Pock 算法与 PDHG 算法的区别在于多了一个外推步
- 具体的迭代格式如下

$$\begin{aligned}
z^{k+1} &= \mathrm{prox}_{\delta_k h^*}(z^k + \delta_k A y^k) \\
x^{k+1} &= \mathrm{prox}_{\alpha_k f}(x^k - \alpha_k A^\top z^{k+1}) \\
y^{k+1} &= 2x^{k+1} - x^k
\end{aligned}$$

# 应用举例: LASSO 问题求解

- 考虑 LASSO 问题

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad \psi(x) = \mu\|x\|_1 + \frac{1}{2}\|Ax-b\|_2^2$$

- 取 $f(x) = \mu\|x\|_1$ 和 $h(x) = \frac{1}{2}\|x-b\|_2^2$，相应的鞍点问题

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \max_{z\in\mathbb{R}^m} \quad f(x) - h^*(z) + z^\top Ax$$

- 根据共轭函数的定义

$$h^*(z) = \sup_{y\in\mathbb{R}^m} \quad \left\{ y^\top z - \frac{1}{2}\|y-b\|_2^2 \right\} = \frac{1}{2}\|z\|_2^2 + b^\top z$$

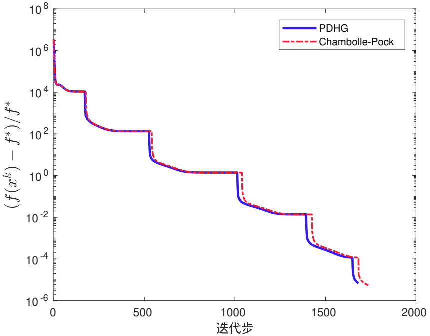
- 应用 PDHG 算法, $x^{k+1}$ 和 $z^{k+1}$ 的更新格式分别为

$$z^{k+1} = \mathrm{prox}_{\delta_k h^*}(z^k + \delta_k Ax^k) = \frac{1}{\delta_k + 1}\left(z^k + \delta_k Ax^k - \delta_k b\right)$$

$$x^{k+1} = \mathrm{prox}_{\alpha_k\mu\|\cdot\|_1}(x^k - \alpha_k A^\top z^{k+1})$$

- Chambolle-Pock 算法格式为

$$
\begin{aligned}
z^{k+1} &= \frac{1}{\delta_k + 1}(z^k + \delta_k A y^k - \delta_k b) \\
x^{k+1} &= \mathrm{prox}_{\alpha_k \mu \|\cdot\|_1}(x^k - \alpha_k A^\top z^{k+1}) \\
y^{k+1} &= 2x^{k+1} - x^k
\end{aligned}
$$



# TV-$L^1$ 模型

- 考虑去噪情形下的 TV-$L^1$ 模型

$$\min_{U\in\mathbb{R}^{n\times n}} \quad \|U\|_{TV} + \lambda\|U-B\|_1$$

- 对任意的 $W, V \in \mathbb{R}^{n\times n\times 2}$，记

$$\|W\| = \sum_{1\le i,j\le n} \|w_{ij}\|_2, \quad \langle W, V\rangle = \sum_{1\le i,j\le n, 1\le k\le 2} w_{i,j,k} v_{i,j,k}$$

- 利用 $\|\cdot\|$ 的定义，有

$$\|U\|_{TV} = \|DU\|$$

- 取 $D$ 为相应的线性算子，并取

$$f(U) = \lambda\|U-B\|_1, \quad U\in\mathbb{R}^{n\times n}, \quad h(W) = \|W\|, \quad W\in\mathbb{R}^{n\times n\times 2}$$

# TV-$L^1$ 模型

- 相应的鞍点问题如下

$$(\mathrm{L_{PD}}) \quad \min_{U\in\mathbb{R}^{n\times n}} \max_{V\in\mathbb{R}^{n\times n\times 2}} f(U) - h^*(V) + \langle V, DU\rangle$$

- 根据共轭函数的定义

$$h^*(V) = \sup_{U\in\mathbb{R}^{n\times n\times 2}} \{\langle U, V\rangle - \|U\|\} = \begin{cases} 0, & \max\limits_{i,j} \|v_{ij}\|_2 \le 1 \\ +\infty, & \text{其他} \end{cases}$$

- 记 $\mathcal{V} = \{V \in \mathbb{R}^{n\times n\times 2} \mid \max\limits_{ij} \|v_{ij}\|_2 \le 1\}$，其示性函数记为 $I_{\mathcal{V}}(V)$，则问题 $(\mathrm{L_{PD}})$ 可以整理为

$$\min_U \max_V \quad f(U) + \langle V, DU\rangle - I_{\mathcal{V}}(V)$$

# TV-$L^1$ 模型

- 应用 PDHG 算法，则 $V^{k+1}$ 的更新为

$$V^{k+1} = \mathrm{prox}_{sI_{\mathcal{V}}}(V^k + sDU^k) = \mathcal{P}_{\mathcal{V}}(V^k + sDU^k)$$

- $U^{k+1}$ 的更新如下

$$\begin{aligned} U^{k+1} &= \mathrm{prox}_{tf}(U^k + tGV^{k+1}) \\ &= \arg\min_U \left\{ \lambda\|U - B\|_1 + \langle V^{k+1}, DU\rangle + \frac{1}{2t}\|U - U^k\|_F^2 \right\} \end{aligned}$$

其中 $G : \mathbb{R}^{n\times n\times 2} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ 为离散的散度算子，其满足

$$\langle V, DU\rangle = -\langle GV, U\rangle, \quad \forall\, U \in \mathbb{R}^{n\times n},\ V \in \mathbb{R}^{n\times n\times 2}$$

*Q&A*

*Thank you!*

感谢您的聆听和反馈