动态规划在经济管理中的应用

修贤超

https://xianchaoxiu.github.io

背包问题

- 一位旅行者携带背包去登山，已知他所能承受的背包重量限度为 $a$kg，现有 n 种可供他选择背入背包，第 i 种物品的单件重量为 $a_i$kg，其价值是携带数量 x_i 的函数 $c_i(x_i)$ $(i = 1, 2, , n)$。问旅行者应如何选择携带各种物品的件数，以使总价值最大

- 设 x_i 为第 i 种物品装入的件数，则背包问题可归结为整数规划模型

$$\max\ z = \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i)$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i \le a \\ x_i \ge 0 \text{ 且为整数 } (i = 1, \ldots, n) \end{cases}$$

动态规划顺序解法

- **阶段**: 将可装入物品按 $1, \ldots, n$ 排序，每段装一种物品，共划分为 n 个阶段，即 $k = 1, \ldots, n$
- **状态变量**: 在第 k 段开始时，背包中允许装入前 k 种物品的总重量为 s_{k+1}
- **决策变量**: 装入第 k 种物品的件数，记 x_k
- **状态转移方程**: $s_k = s_{k+1} - a_k x_k$
- **允许决策集合**: $D_k(s_{k+1}) = \{x_k \mid 0 \le x_k \le [s_{k+1}/a_k],\ x_k\text{为整数}\}$
- **最优指标函数**: 表示在背包中允许装入物品的总重量不超过 s_{k+1} kg，采用最优策略只装前 k 种物品时的最大使用价值，记 $f_k(s_{k+1})$

动态规划顺序解法

- 顺序递推方程

$$
\begin{cases}
f_k(s_{k+1}) = \max\limits_{x_k=0,1,\ldots,[s_{k+1}/a_k]} \{c_k(x_k) + f_{k-1}(s_{k+1} - a_k x_k)\} \\
f_0(s_1) = 0
\end{cases}
$$

- 用前向动态规划方法逐步计算出 $f_1(s_2), f_2(s_3), \ldots, f_n(s_{n+1})$ 及相应的决策函数 $x_1(s_1), x_2(s_3), \ldots, x_n(s_{n+1})$，最后得到的 $f_n(a)$ 即为所求的最大价值，相应的最优策略则由反推计算得出
- 当 x_i 仅表示装入 (取 1) 和不装 (取 0) 第 i 种物品，即 0-1 背包问题

例 1

- 有一辆最大货运量为 10t 的卡车，用以装载 3 种货物，每种货物的单位重量及相应单位价值如下。**应如何装载可使总价值最大**

货物编号 i	1	2	3
单位重量 $(t)(a_i)$	3	4	5
单位价值 c_i	4	5	6

- 设第 i 种货物装载的件数为 x_i $(i = 1, 2, 3)$，则问题可表为

$$\max\ z = 4x_1 + 5x_2 + 6x_3$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 10 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0\text{且为整数} \end{cases}$$

例 1

- 当 $k=1$ 时，有

$$f_1(s_2)=\max_{0\le 3x_1\le s_2,\ x_1\text{为整数}}\{4x_1\}$$

或

$$f_1(s_2)=\max_{0\le x_1\le s_2/3,\ x_1\text{为整数}}\{4x_1\}=4[s_2/3]$$

s_2	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f_1(s_2)$	0	0	0	4	4	4	8	8	8	12	12
x_1^*	0	0	0	1	1	1	2	2	2	3	3

例 1

- 当 $k=2$ 时，有

$$f_2(s_3) = \max_{0 \leq 4x_2 \leq s_s,\ x_2\text{为整数}} \{5x_2 + f_1(s_3 - 4x_2)\}$$

或

$$f_2(s_3) = \max_{0 \leq x_2 \leq s_3/4,\ x_2\text{为整数}} \{5x_2 + f_1(s_3 - 4x_2)\}$$

s_2	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_2	0	0	0	0	0 1	0 1	0 1	0 1	0 1 2	0 1 2	0 1 2
$c_2 + f_2$	0	0	0	4	4 5	4 5	8 5	8 9	8 9 10	12 9 10	12 13 10
$f_2(s_3)$	0	0	0	4	5	5	8	9	10	12	13
x_2^*	0	0	0	0	1	1	0	1	2	0	1

例 1

- 当 $k=3$ 时，有

$$
\begin{aligned}
f_3(s_4) &= \max_{0\le x_3\le [s_4/5]} \{6x_3 + f_2(s_4 - 5x_3)\} \\
&= \max_{x_3=0,1,2} \{3x_3 + f_2(10 - 5x_3)\} \\
&= \max\ \{f_2(10), 6 + f_2(5), 12 + f_2(0)\} \\
&= \max\ \{13, 6+5, 12+0\} \\
&= 13
\end{aligned}
$$

- 最大价值为 13
- $x_3^* = 0$，倒推可得 $x_1^* = 2, x_2^* = 1$

小结

- 背包问题
- 生产经营问题
- 设备更新问题
- 复合系统工作可靠性问题
- 货郎担问题
- 马氏决策规划

Q&A

Thank you!

感谢您的聆听和反馈