指派问题

修贤超

https://xianchaoxiu.github.io

典型的指派问题

- 若干项任务需要若干个人完成，如何分配任务会使所需的成本最低
- 标准形式: n 个人，n 件事，第 i 个人做第 j 件事的费用为 c_{ij}，确定人和事之间一一对应的指派方案，使完成 n 件事的总费用最小
- 一般称 C 为指派问题的效率矩阵或系数矩阵

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

标准指派问题的数学模型

- 引入 n^2 个 0-1 变量

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ 指派第 } i \text{ 个人做第 } j \text{ 件事} \\ 0 \text{ 不指派第 } i \text{ 个人做第 } j \text{ 件事} \end{cases} \quad (i, j = 1, \ldots, n)$$

则标准指派问题的数学模型为

$$\min\ z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \ (j = 1, \ldots, n) & (1) \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \ (i = 1, \ldots, n) & (2) \\ x_{ij} = 0 \text{或} 1 \ (i, j = 1, \ldots, n) \end{cases}$$

- (1) 表示每件事必有且只有一个人去做, (2) 表示每个人必做且只做一件事

例 1

- 某商业公司计划开办 5 家新商店，决定由 5 家建筑公司分别承建。已知建筑公司 A_i $(i=1,\ldots,5)$ 对新商店 B_j $(j=1,\ldots,5)$ 的建造费用的报价 (万元) 为 c_{ij} $(i,j=1,\ldots,5)$，具体如下

建筑公司	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	4	8	7	15	12
A_2	7	9	17	14	10
A_3	6	9	12	8	7
A_4	6	7	14	6	10
A_5	6	9	12	10	6

- 问如仅考虑节省费用，商业公司应当对 5 家建筑公司怎样分配建造任务，才能使总的建造费用最少

例 1

- **引入 0-1 变量**

$$x_{ij}=\begin{cases}1\ 指派第\ i\ 个人做第\ j\ 件事\\ 0\ 不指派第\ i\ 个人做第\ j\ 件事\end{cases}\qquad (i,j=1,\ldots,5)$$

则问题的数学模型为

$$\min\ z=4x_{11}+8x_{12}+\cdots+10x_{54}+6x_{55}$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{5}x_{ij}=1\ (j=1,\ldots,5)\\ \sum\limits_{j=1}^{5}x_{ij}=1\ (i=1,\ldots,5)\\ x_{ij}=0或1\ (i,j=1,\ldots,5)\end{cases}$$

例 1

- 系数矩阵为

$$\mathbf{C} = (c_{ij})_{5\times 5} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 7 & 15 & 12 \\ 7 & 9 & 17 & 14 & 10 \\ 6 & 9 & 12 & 8 & 7 \\ 6 & 7 & 14 & 6 & 10 \\ 6 & 9 & 12 & 10 & 6 \end{bmatrix}$$

- 其中一个 (可行) 解矩阵为

$$\mathbf{X} = (x_{ij})_{5\times 5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 注意: 指派问题有 $n!$ 个可行解，且每行每列只有一个 1

相关性质

- 性质 1: 若从指派问题的系数矩阵 $(c_{ij})_{n\times n}$ 的某行或某列各元素中分别减一个常数 k, 得到的新矩阵与原矩阵有相同的最优解

$$\mathbf{C}' = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 & 11 & 8 \\ 0 & 2 & 10 & 7 & 3 \\ 0 & 3 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 8 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

- 性质 2: 称位于不同行不同列的 0 元素为独立 0 元素，那么 n 个独立 0 元素取值为 1，其余元素取值为 0，是最优解
- 性质 3: 系数矩阵 $(c_{ij})_{n\times n}$ 中独立 0 元素的最多个数等于能覆盖所有 0 元素的最少直线数

解题思路

- 利用性质 1，能够将原系数矩阵变换为含有很多 0 元素的新系数矩阵，而最优解保持不变
- 若能在新系数矩阵 $(c_{ij})'_{n\times n}$ 中找出 n 个独立 0 元素，则令解矩阵 $(x_{ij})_{n\times n}$ 中对应这 n 个独立 0 元素的元素取值为 1，其它元素取值为 0，此时目标函数 $z = C'X = 0$ 为最小值，因此 $(x_{ij})_{n\times n}$ 为含系数矩阵 $(c_{ij})'_{n\times n}$ 的指派问题的最优解，也是原问题的最优解

匈牙利解法 (步骤一)

- 变换系数矩阵使各行各列都出现 0 元素
  - 先对各行元素分别减去本行中的最小元素

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 7 & 15 & 12 \\ 7 & 9 & 17 & 14 & 10 \\ 6 & 9 & 12 & 8 & 7 \\ 6 & 7 & 14 & 6 & 10 \\ 6 & 9 & 12 & 10 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{C}' = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 & 11 & 8 \\ 0 & 2 & 10 & 7 & 3 \\ 0 & 3 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 8 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

匈牙利解法 (步骤一)

- 再对各列元素分别减去本列中最小元素

$$\mathbf{C}' = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 & 11 & 8 \\ 0 & 2 & 10 & 7 & 3 \\ 0 & 3 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 8 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{C}'' = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 11 & 8 \\ 0 & 1 & 7 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

- 系数矩阵中每行及每列至少有一个零元素，同时不出现负元素

匈牙利解法 (步骤二)

- 确定独立 0 元素
  - 从只有一个零元素的行（或列）开始，给这个 0 元素加圈，记作 $\circledcirc$，然后划去 $\circledcirc$ 所在列（或行）的其它 0 元素，记作 ϕ，直到所有 0 元素都被圈出和划掉为止
  - 若仍出现同行 (列) 至少有两个 0 元素的，用试探法，从含有 0 元素最少的行 (列) 开始，比较该行各 0 元素所在列中 0 元素的数目，选择 0 元素少的那列的这个 0 元素加圈，然后划掉同行同列的其它 0 元素，可反复进行，直到所有 0 元素都被圈出和划掉为止
  - 画 $\circledcirc$ 元素数目即为独立 0 元素数。若少于 n 个，则转入下一步

$$\mathbf{C}'' = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 11 & 8 \\ 0 & 1 & 7 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

匈牙利解法 (步骤二)

$$\mathbf{C}'' = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 11 & 8 \\ 0 & 1 & 7 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{C}'' = \begin{bmatrix} \phi & 3 & \circledcirc & 11 & 8 \\ \circledcirc & 1 & 7 & 7 & 3 \\ \phi & 2 & 3 & 2 & 1 \\ \phi & \circledcirc & 5 & \phi & 4 \\ \phi & 2 & 3 & 4 & \circledcirc \end{bmatrix}$$

匈牙利解法 (步骤三)

- 利用性质 3 确定能覆盖所有 0 元素的最少直线数目的直线集合
  - 对没有 $\circledcirc$ 的行打 $\checkmark$
  - 对已打 $\checkmark$ 的行中，对 ϕ 所在列打 $\checkmark$
  - 再对打有 $\checkmark$ 的列中含 $\circledcirc$ 元素的行打 $\checkmark$
  - 重复上述两步直到找不出新的打 $\checkmark$ 的行、列为止
  - 对没有打 $\checkmark$ 的行画一横线，有打 $\checkmark$ 的列画一纵线，就得到覆盖所有 0 元素的最少直线数

$$\mathbf{C}'' = \begin{bmatrix} \phi & 3 & \circledcirc & 11 & 8 \\ \circledcirc & 1 & 7 & 7 & 3 \\ \phi & 2 & 3 & 2 & 1 \\ \phi & \circledcirc & 5 & \phi & 4 \\ \phi & 2 & 3 & 4 & \circledcirc \end{bmatrix}$$

匈牙利解法 (步骤三)

$$
\mathbf{C}'' = \begin{bmatrix}
 & \vdots & & & & & & & & & & \\
\cdots & \phi & \cdots & 3 & \cdots & \circledcirc & \cdots & 11 & \cdots & 8 & \cdots & \\
 & \vdots & & & & & & & & & & \\
 & \circledcirc & & 1 & & 7 & & 7 & & 3 & & \checkmark \\
 & \vdots & & & & & & & & & & \\
 & \phi & & 2 & & 3 & & 2 & & 1 & & \checkmark \\
 & \vdots & & & & & & & & & & \\
\cdots & \phi & \cdots & \circledcirc & \cdots & 5 & \cdots & \phi & \cdots & 4 & \cdots & \\
 & \vdots & & & & & & & & & & \\
\cdots & \phi & \cdots & 2 & \cdots & 3 & \cdots & 4 & \cdots & \circledcirc & \cdots & \\
 & \vdots & & & & & & & & & & \\
 & \checkmark & & & & & & & & & &
\end{bmatrix}
$$

匈牙利解法 (步骤四)

- 继续变换系数矩阵
  - 在未被直线覆盖的元素中找出一个最小元素
  - 打 ✓ 行中各元素都减去最小元素，出现新的 0 元素
  - 打 ✓ 列中各元素都加上最小元素。返回步骤二

$$\mathbf{C}'' = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 11 & 8 \\ 0 & 1 & 7 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

匈牙利解法 (步骤四)

$$\mathbf{C}'' \to \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 11 & 8 \\ -1 & 0 & 6 & 6 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{C}''' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 11 & 8 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

- **返回步骤二**

$$\mathbf{C}''' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 11 & 8 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{C}''' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & \circledcirc & 11 & 8 \\ \phi & \circledcirc & 6 & 6 & 2 \\ \circledcirc & 1 & 2 & 1 & \phi \\ 1 & \phi & 5 & \circledcirc & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \circledcirc \end{bmatrix}$$

匈牙利解法 (步骤四)

- $\mathbf{C}''$ 中已有 5 个独立零元素，故最优指派方案为

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- A_1 承建 B_3，A_2 承建 B_2，A_3 承建 B_1，A_4 承建 B_4，A_5 承建 B_5
- 总的建造费用为 $7+9+6+6+6+6=34$

非标准形式的指派问题

- **最大化指派问题:** 设最大化指派问题系数矩阵 $C=(c_{ij})_{n\times n}$，其中最大元素为 m。令矩阵 $B=(b_{ij})_{n\times n}=(m-c_{ij})_{n\times n}$，则以 B 为系数矩阵的最小化指派问题和以 C 为系数矩阵的原最大化指派问题有相同最优解
- **人数和事数不等的指派问题:** 若人少事多, 则添上一些虚拟的“人”。这些虚拟的“人”做各事的费用系数可取 0, 理解为这些费用实际上不会发生。若人多事少, 则添上一些虚拟的“事”。这些虚拟的“事”被各人做的费用系数同样也取 0
- **一个人可做几件事的指派问题:** 若某个人可做几件事, 则可将该人化作相同的几个“人”来接受指派。这几个“人”做同一件事的费用系数当然都一样
- **某事一定不能由某人做的指派问题:** 若某事一定不能由某个人做, 则可将相应的费用系数取作足够大的数 M

非标准形式的指派问题

- 为了保证工程质量，舍弃建筑公司 A_4 和 A_5，而让技术力量较强的建筑公司 A_1，A_2 和 A_3 来承建。求使总费用最少的指派方案
- 由于每家建筑公司最多承建两家商店，系数矩阵变为

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 7 & 15 & 12 \\ 7 & 9 & 17 & 14 & 10 \\ 6 & 9 & 12 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{M}' = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 7 & 15 & 12 \\ 4 & 8 & 7 & 15 & 12 \\ 7 & 9 & 17 & 14 & 10 \\ 7 & 9 & 17 & 14 & 10 \\ 6 & 9 & 12 & 8 & 7 \\ 6 & 9 & 12 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

非标准形式的指派问题

- 为了使“人”和“事”的数目相同，引入一件虚事使之成为标准指派问题，系数矩阵变为

$$\mathbf{M}'' = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 7 & 15 & 12 & 0 \\ 4 & 8 & 7 & 15 & 12 & 0 \\ 7 & 9 & 17 & 14 & 10 & 0 \\ 7 & 9 & 17 & 14 & 10 & 0 \\ 6 & 9 & 12 & 8 & 7 & 0 \\ 6 & 9 & 12 & 8 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

- 用匈牙利解法以 M'' 为系数矩阵的最小化指派问题，得最优指派方案为由 A_1 承建 B_1 和 B_3，A_2 承建 B_2，A_3 承建 B_4 和 B_5
- 总的建造费用为 $4+7+9+8+7=35$

课堂练习 1

- 有一份中文说明书，需译成英、日、德、俄四种文字，分别记做 E、J、G、R。现有甲、乙、丙、丁 4 人，他们将中文说明书翻译成不同语种的说明书所需的时间如下

人员	E	J	G	R
甲	2	15	13	4
乙	10	4	14	15
丙	9	14	16	13
丁	7	8	11	9

- 问应指派何人去完成何种工作，使所需总时间最少

小结

- 指派问题的标准形式
- 匈牙利解法
- 非标准形式的指派问题
  - 最大化指派问题
  - 人数和事数不等的指派问题
  - 一个人可做几件事的指派问题
  - 某事一定不能由某人做的指派问题
- 课后作业: P147, 习题 5.8

Q&A

Thank you!

感谢您的聆听和反馈