第五章 对策论

修贤超

机电工程与自动化学院
上海大学

xcxiu@shu.edu.cn

Outline

1. 引言

2. 矩阵对策的基本理论

3. 矩阵对策的解法

Outline

对策现象和对策论

- **对策论:** 竞赛论或博弈论，研究对策现象中各方是否存在最合理的行动方案，以及如何找到合理的行动方案的数学理论和方法。

ANNALS OF MATHEMATICS
Vol. 54, No. 2, September, 1951

NON-COOPERATIVE GAMES

JOHN NASH

(Received October 11, 1950)

Introduction

Von Neumann and Morgenstern have developed a very fruitful theory of two-person zero-sum games in their book *Theory of Games and Economic Behavior*. This book also contains a theory of *n*-person games of a type which we would call cooperative. This theory is based on an analysis of the interrelationships of the various coalitions which can be formed by the players of the game.

Our theory, in contradistinction, is based on the *absence* of coalitions in that it is assumed that each participant acts independently, without collaboration or communication with any of the others.

The notion of an *equilibrium point* is the basic ingredient in our theory. This notion yields a generalization of the concept of the solution of a two-person zero-sum game. It turns out that the set of equilibrium points of a two-person zero-sum game is simply the set of all pairs of opposing "good strategies."

In the immediately following sections we shall define equilibrium points and prove that a finite non-cooperative game always has at least one equilibrium point. We shall also introduce the notions of solvability and strong solvability of a non-cooperative game and prove a theorem on the geometrical structure of the set of equilibrium points of a solvable game.

As an example of the application of our theory we include a solution of a simplified three person poker game.

Formal Definitions and Terminology

In this section we define the basic concepts of this paper and set up standard terminology and notation. Important definitions will be preceded by a subtitle indicating the concept defined. The non-cooperative idea will be implicit, rather than explicit, below.

Finite Game:

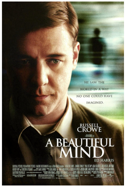
For us an *n-person game* will be a set of *n players*, or *positions*, each with an associated finite set of *pure strategies*; and corresponding to each player, i, a *payoff function*, p_i, which maps the set of all *n*-tuples of pure strategies into the real numbers. When we use the term *n-tuple* we shall always mean a set of n items, with each item associated with a different player.

Mixed Strategy, s_i:

A *mixed strategy* of player i will be a collection of non-negative numbers which have unit sum and are in one to one correspondence with his pure strategies.

We write $s_i = \sum_\alpha c_{i\alpha}\pi_{i\alpha}$ with $c_{i\alpha} \geq 0$ and $\sum_\alpha c_{i\alpha} = 1$ to represent such a mixed strategy, where the $\pi_{i\alpha}$'s are the pure strategies of player i. We regard the s_i's as points in a simplex whose vertices are the $\pi_{i\alpha}$'s. This simplex may be re-

286



- **对策现象:** 具有竞争或对抗性质的现象，如竞技体育 (下棋、打牌以及足球等)、国际政治谈判、商业谈判等。

引言

- 局中人 (players)
  - 有权决定自己行动方案的对策参加者称为局中人，通常用 I 表示局中人的集合。如果有 n 个局中人，则

$$I = \{1, 2, \ldots, n\}$$

  - 一个对策中至少有 2 个局中人，如在“齐王赛马”中，局中人是齐王和田忌;
  - 局中人可以为个人或集体;
  - 对策论中对局中人的假设是每个局中人都是理智的，不存在侥幸心理，不存在利用局中人决策的失误来扩大自身利益的行为。

引言

- **策略 (strategies)**
  - 可供局中人选择的一个实际可行的完整的行动方案称为一个**策略**。参加对策的每一局中人 i 的策略记为 s_i，一般每一局中人的策略集中至少应包括两个策略。
  - 在“齐王赛马”中，若用 (上, 中, 下) 表示以上马、中马、下马依次参赛，就是一个完整的行动方案，即为一个策略。
  - 齐王和田忌各自都有 6 个策略
    - (上, 中, 下)
    - (上, 下, 中)
    - (中, 上, 下)
    - (中, 下, 上)
    - (下, 中, 上)
    - (下, 上, 中)

赢得函数 (支付函数)(payoff function)

- 每一局中人所出策略形成的策略组称为一个**局势**。即设 s_i 是第 i 个局中人的一个策略，则 n 个局中人的策略形成的策略组 $s=(s_1,s_2,\ldots,s_n)$ 就是一个局势，记 S 为全部局势的集合。
- 当一个局势 s 出现后，应该为每一局中人 i 规定一个赢得值 (或所失值)$H_i(s)$，称为局中人 i 的**赢得函数**。
- 在“齐王赛马”中
  - 局中人集合 $I=\{1,2\}$;
  - 齐王和田忌的策略集可分别用 $S_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6\}$ 和 $S_2=\{\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5,\beta_6\}$ 表示;
  - 齐王的任一策略 α_i 和田忌的任一策略 β_j 就构成了一个局势 s_{ij};
  - 如果 $\alpha_1=(\text{上},\text{中},\text{下})$，$\beta_1=(\text{上},\text{中},\text{下})$，则在局势 s_{11} 下，齐王的赢得值 $H_1(s_{11})=3$，田忌的赢得值为 $H_2(s_{11})=-3$。

例 1 (市场购买力争夺问题)

- 据预测，某乡镇下一年的饮食品购买力将有 4000 万元。乡镇企业和中心城市企业饮食品的生产情况是：乡镇企业有特色饮食品和低档饮食品两类，中心城市企业有高档饮食品和低档饮食品两类产品。它们争夺这一部分购买力的结局见下表。

乡镇企业策略	出售高档饮食品	出售低档饮食品
出售特色饮食品	2000	3000
出售低档饮食品	1000	3000

- 问乡镇企业和中心城市企业应如何选择对自己最有利的产品策略。

例 2 (销售竞争问题)

- 假定企业 I, II 均能向市场出售某一产品，不妨假定他们可于时间区间 $[0,1]$ 内任一时间出售。设企业 I 在时刻 x 出售，企业 II 在时刻 y 出售，则企业 I 的收益 (赢得) 函数为

$$H(x,y)=\begin{cases} c(y-x) \text{ 若} x<y \\ \frac{1}{2}c(1-x) \text{ 若} x=y \\ c(1-x) \text{ 若} x>y \end{cases}$$

- 问这两个企业各选择什么时机出售对自己最有利？
- 在这个例子中，企业 I, II 可选择的策略均有无穷多个。

例 3 (拍卖问题)

- 最常见的一种拍卖形式是先由拍卖商把拍卖品描述一番，然后提出第一个报价。接下来由买者报价，每一次报价都要比前一次高，最后谁出的价最高，拍卖品即归谁所有。
- 假设有 n 个买主给出的报价分别为 $p_1, \ldots, p_n$，且不妨设 $p_n > p_{n-1} > \ldots > p_1$，现买主 n 只要报价略高于 p_{n-1}，就能买到拍卖品，即拍卖品实际上是在次高价格上卖出的。
- 现在的问题是，各买主之间可能知道他人的估价，也可能不知道他人的估计，每人应如何报价对自己能以较低的价格得到拍卖品最为有利？最后的结果又会怎样？

引言

- 例 4 (囚犯问题)
  - 设有两个嫌疑犯因涉嫌某一大案被警官拘留，警官分别对两人进行审讯。根据法律，如果两个人都承认此案是他们干的，则每人各判刑 7 年; 如果两人都不承认，则由于证据不足，两人各判刑 1 年; 如果只有一人承认，则承认者予以宽大释放，则不承认者将判刑 9 年。
  - 对两个囚犯来说，面临着一个在“承认”和“不承认”这两个策略间进行选择的难题？

引言

对策的分类

- 根据局中人的个数，分为二人对策和多人对策
- 根据各局中人的赢得函数的代数和是否为零，分为零和对策和非零和对策
- 根据各局中人之间是否允许合作，分为合作对策和非合作对策
- 根据局中人的策略集中的策略个数，分为有限对策和无限对策

研究对象

- 二人有限零和对策，又称为矩阵对策，是目前为止在理论研究和求解方法都比较完善的一个对策分支。
- 齐王赛马

引言

小结

- 对策论
- 三要素
  - 局中人 (players)
  - 策略 (strategies)
  - 赢得函数 (payoff function)
- 对策的分类
  - 二人对策和多人对策
  - 零和对策和非零和对策
  - 合作对策和非合作对策
  - 有限对策和无限对策
- 矩阵对策

Outline

矩阵对策的纯策略

二人有限零和对策

- **局中人**: 两人 (I,II)，分别有 m, n 个纯策略可供选择
- **策略集**: $S_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\}$，$S_2 = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$
- **策略集**: $S_1 \times S_2 = \{(\alpha_i, \beta_j),\ i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n\}$
- **赢得函数**: $H_1(\alpha_i, \beta_j) = a_{ij}$, $H_2(\alpha_i, \beta_j) = -a_{ij}$，矩阵表示为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- **矩阵对策**: 局中人 + 策略集 + 赢得函数，即 $G = \{S_1, S_2; \mathbf{A}\}$

矩阵对策的基本理论

矩阵对策的纯策略

- 在“齐王赛马”中，齐王和田忌各自都有 6 个策略：(上，中，下)、(上，下，中)、(中，上，下)、(中，下，上)、(下，中，上)、(下，上，中)。齐王的赢得矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

- 矩阵对策模型给定后，各局中人面临的问题：如何选择对自己最有利的纯策略以取得最大的赢得（或最少所失）？

矩阵对策的基本理论

例 1

- 设有一矩阵策略 $G = \{S_1, S_2; \mathbf{A}\}$，其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -6 & 1 & -8 \\ 3 & 2 & 4 \\ 9 & -1 & -10 \\ -3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

- 考虑到对方必然会设法使自己所得最少这一点，就应该从各自可能出现的最不利的情形中选择一个最有利的情形作为决策的依据，这就是所谓的“理智行为”。
- 局中人 I 和 II 的“理智行为”分别是选择纯策略 α_2 和 β_2，这是局中人 I 的赢得值和局中人 II 的所失值的绝对值相等，因此 (α_2, β_2) 称为平衡局势，即最优纯策略。

矩阵对策的纯策略

- **定义 1:** 设 $G=\{S_1,S_2;\mathbf{A}\}$ 为一矩阵对策，其中 $S_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m\}$，$S_2=\{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n\}$，$\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$。若

$$\max_i \min_j \ a_{ij} = \min_j \max_i \ a_{ij}$$

成立，记其值为 V_G，则称 V_G 为对策的值，称使上式成立的纯局势 (α_i^*,β_j^*) 为 G 在纯策略意义下的解（或平衡局势），称 α_i^* 和 β_j^* 分别为局中人 I 和 II 的最优纯策略。

- 矩阵 $\mathbf{A}$ 中平衡局势 (α_2,β_2) 对应的元素 a_{22} 既是其所在行的最小元素，又是其所在列的最大元素，即有

$$a_{i2}\le a_{22}\le a_{2j},\ \ i=1,2,3,4,\ \ j=1,2,3$$

矩阵对策的纯策略

- **定理 1:** 矩阵对策 $G = \{S_1, S_2; \mathbf{A}\}$ 在纯策略意义下有解的充要条件是: 存在纯局势 (α_i^*, β_j^*)，使得对任意 i 和 j，有

$$a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*} \leq a_{i^*j}$$

- (充分性) 设有 i^* 和 j^* 使得

$$\min_j \ a_{i^*j} = \max_i \min_j \ a_{ij}, \quad \max_i \ a_{ij^*} = \min_j \max_i \ a_{ij}$$

由于 $\max\limits_i \min\limits_j \ a_{ij} = \min\limits_j \max\limits_i \ a_{ij}$，有

$$\max_i \ a_{ij^*} = \min_j \ a_{i^*j} \leq a_{i^*j^*} \leq \max_i \ a_{ij^*} = \min_j \ a_{i^*j}$$

因此对任意有 i^* 和 j^* 有

$$a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*} \leq a_{i^*j}$$

矩阵对策的基本理论

矩阵对策的纯策略

- (必要性) 由 $a_{ij^*} \le a_{i^*j^*} \le a_{i^*j}$ 有 $\max\limits_i \ a_{ij^*} \le a_{i^*j^*} \le \min\limits_j \ a_{i^*j}$，而 $\min\limits_j \max\limits_i \ a_{ij} \le \max\limits_i \ a_{ij^*}$， $\min\limits_j \ a_{i^*j} \le \max\limits_i \min\limits_j \ a_{ij}$， 所以

$$\min_j \max_i \ a_{ij} \le a_{i^*j^*} \le \max_i \min_j \ a_{ij}$$

对任意 i, j， 有

$$\max_i \min_j \ a_{ij} \le \min_j \max_i \ a_{ij}$$

于是

$$\max_i \min_j \ a_{ij} = \min_j \max_i \ a_{ij} = a_{i^*j^*}$$

证毕。

矩阵对策的纯策略

- 对任意矩阵 $\mathbf{A}$，称 $a_{i^*j^*}$ 为矩阵 $\mathbf{A}$ 的**鞍点**。在矩阵对策中，矩阵 $\mathbf{A}$ 的鞍点也称为对策的鞍点。
- 一个平衡局势 (α_i^*, β_j^*) 应具有这样的性质：当局中人 I 选择了纯策略 α_i^* 后，局中人 II 为了使其所失最少，只能选择纯策略 β_j^*，否则就有可能失的更多；当局中人 II 选择了纯策略 β_j^* 后，局中人 I 为了得到最大的赢得也只能选择纯策略 α_i^*，否则就会赢的更少，双方的竞争在局势 (α_i^*, β_j^*) 下达到了一个平衡状态。

例 2

- 设有一矩阵策略 $G=\{S_1,S_2;\mathbf{A}\}$，其中

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 9 & 8 & 11 & 8 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 5 & 8 & 7 & 8 \\ 10 & 7 & 9 & 6 \end{bmatrix}$$

- 直接在 $\mathbf{A}$ 提供的赢得矩阵上计算，有

$$\max_i \min_j \ a_{ij} = \min_j \max_i \ a_{ij} = a_{i^* j^*} = 8, \ \ i^* = 1, \ \ j^* = 2, 4$$

因此 (α_1,β_2),(α_1,β_4) 都是对策解，且 $V_G=8$

矩阵对策的基本理论

矩阵对策的纯策略

- 由上例可知，一般对策的解可以是不惟一的。
- 性质 1: (无差别性) 若 $(\alpha_{i_1}, \beta_{j_1})$ 和 $(\alpha_{i_2}, \beta_{j_2})$ 是对策 G 的两个解，则 $a_{i_1 j_1} = a_{i_2 j_2}$。
- 性质 2: (可交换性) 若 $(\alpha_{i_1}, \beta_{j_1})$ 和 $(\alpha_{i_2}, \beta_{j_2})$ 是对策 G 的两个解，则 $(\alpha_{i_1}, \beta_{j_2})$ 和 $(\alpha_{i_2}, \beta_{j_1})$ 也是对策 G 的解。
- 注意:矩阵对策的值是惟一的，即当一个局中人选择了最优纯策略后，他的赢得值不依赖于对方的纯策略。

- 例 3
  - 某单位采购员在秋天时要决定冬季取暖用煤的采购量。已知在正常气温条件下需要煤 15t，在较暖和较冷气温条件下分别需要煤 10t 和 20t。假定冬季的煤价随天气寒冷程度而变化，在较暖、正常、较冷气温条件下每 t 煤的价格分别为 100 元，150 元和 200 元。又设秋季时每 t 煤的价格为 100 元，在没有关于当年冬季气温情况准确预报的条件下，秋季时应采购多少 t 煤能使总支出最少？
  - 将采购员看成一个局中人，有 3 个策略。在秋天时购买 10t, 15t 或 20t 煤，分别记为 α_1，α_2，α_3。
  - 对策的另一局中人可看成是大自然，有 3 个策略。出现较暖、正常或较冷的冬季，分别记为 β_1，β_2，β_3。

例 3

- 现把单位冬季用煤的全部费用 (秋季购煤费用与冬季不够时再补够的费用之和) 作为采购员的赢得，得到赢得矩阵如下

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} -1000 & -1750 & -3000 \\ -1500 & -1500 & -2500 \\ -2000 & -2000 & -2000 \end{bmatrix}$$

由于

$$\max_i \min_j \ a_{ij} = \min_j \max_i \ a_{ij} = a_{33} = -2000$$

那么该对策的解为 (α_3, β_3)，即秋季购煤 20t 较好。

矩阵对策的混合策略

- 在一个矩阵对策 $G = \{S_1, S_2; \mathbf{A}\}$ 中，局中人 I 能保证的至少赢得是

$$v_1 = \max_i \min_j \ a_{ij}$$

局中人 II 能保证的至多所失是

$$v_2 = \min_j \max_i \ a_{ij}$$

局中人 I 的赢得不会多于局中人 II 的所失，故总有

$$v_1 \leq v_2$$

- 当 $v_1 = v_2$ 时，矩阵对策在纯策略意义下有解，且 $V_G = v_1 = v_2$。然而，实际中出现的更多情形是 $v_1 < v_2$，这时对策不存在纯策略意义下的解。

矩阵对策的混合策略

- 例如

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

可知

$$v_1 = \max_i \min_j \ a_{ij} = 4, \ i^* = 2$$

$$v_2 = \min_j \max_i \ a_{ij} = 5, \ j^* = 1$$

$$v_2 = 5 > 4 = v_1$$

- 既然局中人没有最优策略可出，是否可以给出一个选择不同策略的概率分布？如局中人 I 可制定这样一种策略，分别以概率 x 和 $(1-x)$ 选取纯策略 α_1 和 α_2，称这种策略为一个混合策略。同样，局中 II 也可以制定这样一种混合策略，分别以概率 y 和 $(1-y)$ 选取纯策略 β_1 和 β_2。

矩阵对策的基本理论

矩阵对策的混合策略

- **定义 2:** 设有矩阵对策 $G = \{S_1, S_2; \mathbf{A}\}$，其中

$$S_1 = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\},\ S_2 = \{\beta_1, \dots, \beta_n\},\ \mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$$

记

$$S_1^* = \{\mathbf{x} \in E^m \mid x_i \geq 0,\ i = 1, \dots, m;\ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1\}$$

$$S_2^* = \{\mathbf{y} \in E^n \mid y_j \geq 0,\ j = 1, \dots, n;\ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1\}$$

  - 称 S_1^* 和 S_2^* 为局中人 I 和 II 的混合策略集 (或策略集)
  - 对 $\mathbf{x} \in S_1^*$ 和 $\mathbf{y} \in S_2^*$，称 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 为混合策略 (或策略)，$(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 为混合局势 (或局势)

- 局中人 I 的赢得函数记为

$$E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^\top A \mathbf{y} = \sum_i \sum_j a_{ij} x_i y_j$$

称 $G^* = \{S_1^*, S_2^*; E\}$ 为对策 G 的混合扩充。

矩阵对策的混合策略

- 纯策略是混合策略的特殊形式
- 一个混合策略 $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)^\top$ 可理解为：如果进行多局对策G的话，局中人 I 分别选取纯策略 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ 的频率。若只进行一次对策，则反映了局中人 I 对各策略的偏爱程度。
- 设两个局中人仍如前所述那样进行理智的对策，则当局中人 I 选择混合策略 $\mathbf{x}$ 时，预期所得 (最不利的情形) 是 $\min\limits_{\mathbf{y}\in S_2^*} E(\mathbf{x}, \mathbf{y})$，故局中人 I 应选取 $\mathbf{x} \in S_1^*$，使得

$$v_1 = \max_{\mathbf{x}\in S_1^*} \min_{\mathbf{y}\in S_2^*} E(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

同理，局中人 II 可失保证的所的期望值至多是

$$v_2 = \min_{\mathbf{y}\in S_2^*} \max_{\mathbf{x}\in S_1^*} E(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

则 $v_1 \le v_2$，即局中人 I 的预期赢得不会多于局中人 II 的预期所失。

矩阵对策的混合策略

- **定义 3:** 设矩阵对策 $G^* = \{S_1^*, S_2^*; E\}$ 是矩阵对策 $G = \{S_1, S_2; \mathbf{A}\}$ 的混合扩充。如果

$$\max_{\mathbf{x}\in S_1^*} \min_{\mathbf{y}\in S_2^*} E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \min_{\mathbf{y}\in S_2^*} \max_{\mathbf{x}\in S_1^*} E(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

记其值为 V_G，则称 V_G 为对策 G 的值，称上式成立的混合局势 $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ 为 G 在混合策略意义下的解 (或平衡局势)，称 $\mathbf{x}^*$ 和 $\mathbf{y}^*$ 分别为局中人 I 和 II 的最优混合策略。

- **定理 2:** 矩阵对策 G 在混合策略意义下有解的充要条件是: 存在 $\mathbf{x}^* \in S_1^*$ 和 $\mathbf{y}^* \in S_2^*$，使得对任意 $\mathbf{x} \in S_1^*$ 和 $\mathbf{y} \in S_2^*$，有

$$E(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \le E(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \le E(\mathbf{x}^*, \mathbf{y})$$

矩阵对策的混合策略

- 例如

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

设 $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ 和 $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ 分别为局中人 I 和 II 的混合策略，则

$$S_1^* = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 = 1\}$$
$$S_2^* = \{(y_1, y_2) \mid y_1, y_2 \geq 0, y_1 + y_2 = 1\}$$

矩阵对策的混合策略

- 局中人 I 的赢得的期望是

$$\begin{aligned} E(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= 3x_1y_1 + 6x_1y_2 + 5x_2y_1 + 4x_2y_2 \\ &= 3x_1y_1 + 6x_1(1-y_1) + 5(1-x_1)y_1 + 4(1-x_1)(1-y_1) \\ &= -4(x_1-\frac{1}{4})(y_1-\frac{1}{2}) + \frac{9}{2} \end{aligned}$$

取 $\mathbf{x}^* = (\frac{1}{4},\frac{3}{4}), \mathbf{y}^* = (\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，则

$$E(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*) = \frac{9}{2},\ E(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}) = E(\mathbf{x},\mathbf{y}^*) = \frac{9}{2},$$

即有 $E(\mathbf{x},\mathbf{y}^*) \le E(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*) \le E(\mathbf{x}^*,\mathbf{y})$

- 故 $\mathbf{x}^* = (\frac{1}{4},\frac{3}{4})$ 和 $\mathbf{y}^* = (\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 分别为局中人 I 和 II 的最优策略，对策的值 (局中人 I 的赢得的期望值) 为 $V_G = \frac{9}{2}$。

矩阵对策的基本定理

- 一般矩阵对策在纯策略意义下的解往往是不存在的
- 一般矩阵对策在混合策略意义下的解却总是存在的
- 记 $E(i,\mathbf{y})=\sum_j a_{ij}y_j$ 局中人 I 取纯策略 α_i 时的赢得函数
  $E(\mathbf{x},j)=\sum_i a_{ij}x_i$ 局中人 II 取纯策略 β_j 时的赢得函数
  则

$$E(\mathbf{x},\mathbf{y})=\sum_i\sum_j a_{ij}x_iy_j=\sum_i(\sum_j a_{ij}y_j)x_i=\sum_i E(i,\mathbf{y})x_i$$

$$E(\mathbf{x},\mathbf{y})=\sum_i\sum_j a_{ij}x_iy_j=\sum_j(\sum_i a_{ij}x_i)y_j=\sum_j E(\mathbf{x},j)y_j$$

矩阵对策的基本定理

- 定理 3: 设 $\mathbf{x}^* \in S_1^*$ 和 $\mathbf{y}^* \in S_2^*$，则 $G = (\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ 为对策 G 的解的充要条件是: 对任意 $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$，有

$$E(i, \mathbf{y}^*) \leq E(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \leq E(\mathbf{x}^*, j)$$

- (充分性) 设 $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ 为对策 G 的解，则由定理 2 可知下式成立

$$E(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq E(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \leq E(\mathbf{x}^*, \mathbf{y})$$

由于纯策略是混合策略的特例，故定理 3 成立。

- (必要性) 设定理 3 中公式成立，由

$$E(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) = \sum_i E(i, \mathbf{y}^*) x_i \leq E(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \sum_i x_i = E(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$$

$$E(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) = \sum_j E(\mathbf{x}^*, j) y_j \geq E(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \sum_j y_j = E(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$$

即得 $E(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq E(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \leq E(\mathbf{x}^*, \mathbf{y})$ 成立。

矩阵对策的基本定理

- **定理 4:** 设 $\mathbf{x}^* \in S_1^*$ 和 $\mathbf{y}^* \in S_2^*$，则 $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ 为对策 G 的解的充要条件是: 存在数 v，使得 $\mathbf{x}^*$ 和 $\mathbf{y}^*$ 分别是以下不等式组的解，且 $v = V_G$。

$$\begin{cases} \sum_i a_{ij} x_i \geq v \ (j = 1, \ldots, n) \\ \sum_i x_i = 1 \\ x_i \geq 0 \ (i = 1, \ldots, m) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_j a_{ij} y_j \leq v \ (i = 1, \ldots, m) \\ \sum_j y_j = 1 \\ y_j \geq 0 \ (j = 1, \ldots, n) \end{cases}$$

矩阵对策的基本理论

矩阵对策的基本定理

- **定理 5:** 对任一矩阵对策 $G=\{S_1,S_2;\mathbf{A}\}$，一定存在混合策略意义下的解。
- **分析:** 由定理 3，只要证明存在 $\mathbf{x}^*\in S_1^*$ 和 $\mathbf{y}^*\in S_2^*$ 使得定理 3 中公式成立。为此，考虑如下两个线性规划问题

$$
\text{(P)} \quad \max\ w
$$

$$
\text{s.t.} \begin{cases} \sum\limits_i a_{ij}x_i \geq w\ (j=1,\ldots,n) \\ \sum\limits_i x_i = 1 \\ x_i \geq 0\ (i=1,\ldots,m) \end{cases}
$$

$$
\text{(D)} \quad \min\ v
$$

$$
\text{s.t.} \begin{cases} \sum\limits_j a_{ij}y_j \leq v\ (i=1,\ldots,m) \\ \sum\limits_j y_j = 1 \\ y_j \geq 0\ (j=1,\ldots,n) \end{cases}
$$

矩阵对策的基本定理

- 问题 (P) 和 (D) 是互为对偶的线性规划，而且

$$\mathbf{x} = (1, 0, \ldots, 0)^\top \in E^m, \; w = \min_j \; a_{1j}$$

是问题 (P) 的一个可行解，

$$\mathbf{y} = (1, 0, \ldots, 0)^\top \in E^n, \; v = \max_i \; a_{i1}$$

是问题 (D) 的一个可行解。

- 由线性规划对偶定理可知，问题 (P) 和 (D) 分别存在最优解 $(\mathbf{x}^*, w^*)$ 和 $(\mathbf{y}^*, v^*)$，且 $w^* = v^*$。即存在 $\mathbf{x}^* \in S_1^*$ 和 $\mathbf{y}^* \in S_2^*$ 和数 v^*，使得对任意 $i = 1, \ldots, m$，$j = 1, \ldots, n$，有

$$\sum_j a_{ij} y_j^* \le v^* \le \sum_i a_{ij} x_i^* \text{ 或 } E(i, \mathbf{y}^*) \le v^* \le E(\mathbf{x}^*, j)$$

矩阵对策的基本定理

- 又由

$$E(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*)=\sum_i E(i,\mathbf{y}^*)x_i^* \le v^*\sum_i x_i^* = v^*$$

$$E(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*)=\sum_j E(\mathbf{x}^*,j)y_j^* \ge v^*\sum_j y_j^* = v^*$$

得到 $v^*=E(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*)$，故定理 3 中的

$$E(i,\mathbf{y}^*)\le E(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*)\le E(\mathbf{x}^*,j)$$

成立。

矩阵对策的基本理论

矩阵对策的基本定理

- **定理 6:** 设 $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ 是矩阵对策 G 的解，且 $v = V_G$，则

1. 若 $x_i^* > 0$，则 $\sum_j a_{ij} y_j^* = v$
2. 若 $y_j^* > 0$，则 $\sum_i a_{ij} x_i^* = v$
3. 若 $\sum_j a_{ij} y_j^* < v$，则 $x_i^* = 0$
4. 若 $\sum_i a_{ij} x_i^* > v$，则 $y_j^* = 0$

矩阵对策的基本理论

矩阵对策的基本定理

- 由 $v = \max_{\mathbf{x} \in S_1^*} E(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*)$ 有

$$v - \sum_j a_{ij} y_j^* = \max_{\mathbf{x} \in S_1^*} E(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) - E(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \geq 0$$

又因

$$\sum_i x_i^* (v - \sum_j a_{ij} y_j^*) = v - \sum_i \sum_j a_{ij} x_i^* y_j^* = 0$$

1. 当 $x_i^* > 0$，必有 $\sum_j a_{ij} y_j^* = v$
2. 当 $\sum_j a_{ij} y_j^* < v$，必有 $x_i^* = 0$

即 (1)，(3) 得证，同理可证 (2)，(4)。

矩阵对策的基本定理

- **定理 7**: 记 $T(G)$ 为矩阵对策 G 的解集。设有两个矩阵对策 $G_1=\{S_1,S_2;\mathbf{A}_1\}$ 和 $G_2=\{S_1,S_2;\mathbf{A}_2\}$，其中 $\mathbf{A}_1=(a_{ij})$ 和 $\mathbf{A}_2=(a_{ij}+L)$，L 为一任意常数，则
  - $V_{G_2}=V_{G_1}+L$
  - $T(G_1)=T(G_2)$
- **定理 8**: 设有两个矩阵对策 $G_1=\{S_1,S_2;\mathbf{A}\}$ 和 $G_2=\{S_1,S_2;\alpha\mathbf{A}\}$，其中 $\alpha>0$ 为一任意常数，则
  - $V_{G_2}=\alpha V_{G_1}$
  - $T(G_1)=T(G_2)$
- **定理 9**: 设 $G_1=\{S_1,S_2;\mathbf{A}\}$ 为一矩阵对策，且 $\mathbf{A}=-\mathbf{A}^\top$ 为斜对策矩阵，则
  - $V_G=0$
  - $T(G_1)=T(G_2)$

  其中，$T_1(G)$ 和 $T_2(G)$ 分别为局中人 I 和 II 的最优策略集。

课堂练习 1

- 设有一矩阵策略 $G = \{S_1, S_2; \mathbf{A}\}$，其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 6 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & -1 \\ 8 & 5 & 7 & 5 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

求矩阵对策 G 的值。

- 具体思路

$$\max_i \min_j \ a_{ij} = \max_i \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = 5, \ \ i^* = 1, 3$$

$$\min_j \max_i \ a_{ij} = \min_j [8 \ 5 \ 7 \ 5] = 5, \ \ j^* = 2, 4$$

其最优纯策略解为 (α_1, β_2), (α_1, β_4), (α_3, β_2), (α_3, β_4)，值为 5

课堂练习 2

- 设有一矩阵策略 $G = \{S_1, S_2; \mathbf{A}\}$，其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -7 & 2 \\ 4 & 7 & 3 \\ 10 & -9 & 0 \\ -1 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

求矩阵对策 G 的值。

- 具体思路

$$\max_i \min_j \ a_{ij} = \max_i \begin{bmatrix} -7 \\ 3 \\ -9 \\ -1 \end{bmatrix} = 3, \ \ i^* = 2$$

$$\min_j \max_i \ a_{ij} = \min_j [1 \ \ 0 \ \ 9 \ \ 3] = 3, \ \ j^* = 3$$

其最优纯策略解为 (α_2, β_3)，值为 3

矩阵对策的基本理论

小结

- 纯策略
  - 矩阵对策
  - 理智行为
- 混合策略
  - 混合扩充
  - 鞍点定理
- 基本定理
  - 一定存在混合策略意义下的解
  - 线性规划求解矩阵对策的思路

Outline

矩阵对策的解法

- 图解法
  - 主要用于求解赢得矩阵为 $2 \times n$ 或 $m \times 2$ 阶的对策问题
  - 从几何上理解对策论的思想
- 基本步骤
  - 第一步: 设局中人的混合策略
  - 第二步: 过 0 和 1 作两条垂线
  - 第三步: 画出对策矩阵
  - 第四步: 确定最优策略

矩阵对策的解法

例 1

- 用图解法求解矩阵对策 $G = \{S_1, S_2; \mathbf{A}\}$，其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

- 局中人 I 的最优混合策略为 $\mathbf{x}^* = \left(\frac{3}{11}, \frac{8}{11}\right)^\top$，局中人 II 的最优混合策略为 $\mathbf{y}^* = \left(0, \frac{9}{11}, \frac{2}{11}\right)^\top$，$V_G = \frac{49}{11}$

矩阵对策的解法

例 2

- 用图解法求解矩阵对策 $G = \{S_1, S_2; A\}$，其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 6 \\ 11 & 2 \end{bmatrix}$$

- 局中人 I 的最优混合策略为 $\mathbf{x}^* = (0,1,0)^\top$，即纯策略 α_2; 局中人 II 的最优混合策略为 $\mathbf{y}^* = (y, 1-y)^\top$，$V_G = 6$

矩阵对策的解法

课堂练习 1

- 用图解法求解矩阵对策 $G=\{S_1,S_2;A\}$，其中

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

- 局中人 I 的最优混合策略为 $\mathbf{x}^*=\left(\frac{1}{3},0,\frac{2}{3},0\right)^\top$，局中人 II 的最优混合策略为 $\mathbf{y}^*=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)^\top$，$V_G=\frac{8}{3}$

方程组法

- (定理 4) 设 $\mathbf{x}^* \in S_1^*$ 和 $\mathbf{y}^* \in S_2^*$，则 $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ 为对策 G 的解的充要条件是：存在数 v，使得 $\mathbf{x}^*$ 和 $\mathbf{y}^*$ 分别是以下不等式组的解，且 $v = V_G$。

$$\begin{cases} \sum_i a_{ij} x_i \geq v \ (j = 1, \ldots, n) \\ \sum_i x_i = 1 \\ x_i \geq 0 \ (i = 1, \ldots, m) \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} \sum_j a_{ij} y_j \leq v \ (i = 1, \ldots, m) \\ \sum_j y_j = 1 \\ y_j \geq 0 \ (j = 1, \ldots, n) \end{cases} \tag{2}$$

- 求矩阵对策解 $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ 的问题等价于求解不等式组(1)和(2)

矩阵对策的解法

方程组法

- 若最优策略中的 $\mathbf{x}^*$ 和 $\mathbf{y}^*$ 均不为零，则上述两不等式组的求解问题转化为下面两个方程组的求解问题

$$\begin{cases} \sum_i a_{ij} x_i = v \ (j = 1, \ldots, n) \\ \sum_i x_i = 1 \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} \sum_j a_{ij} y_j = v \ (i = 1, \ldots, m) \\ \sum_j y_j = 1 \end{cases} \tag{4}$$

- 若方程组(3)和(4)存在非负解 $\mathbf{x}^*$ 和 $\mathbf{y}^*$，便求得了对策的一个解。
- 若这两个方程组不存在非负解，则可将式(3)和(4)中的某些等式改成不等式，继续试求解，直至求得对策的解。
- 若最优策略的某些分量为零，则式(3)和(4)可能无解。

矩阵对策的解法

方程组法

- 针对赢得矩阵为 2×2 阶的对策问题

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

如果 $\mathbf{A}$ 有鞍点，则很容易求出各局中人的最优纯策略; 如果 $\mathbf{A}$ 没有鞍点，则可以证明各局中人最优混合策略中的 $\mathbf{x}^*$ 和 $\mathbf{y}^*$ 均大于零。于是，可求下列方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 = v \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 = v \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 = v \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 = v \\ y_1 + y_2 = 1 \end{cases}$$

矩阵对策的解法

方程组法

- 一定有严格的非负解（也就是两个局中人的最优策略）

$$
\begin{aligned}
x_1^* &= \frac{a_{22} - a_{21}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})} \\
x_2^* &= \frac{a_{11} - a_{12}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})} \\
y_1^* &= \frac{a_{22} - a_{12}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})} \\
y_2^* &= \frac{a_{11} - a_{21}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})} \\
v^* &= \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})} = V_G
\end{aligned}
$$

矩阵对策的解法

方程组法

- 给定矩阵对策 $G = \{S_1, S_2; \mathbf{A}\}$，$\mathbf{A}$ 是 $m \times n$ 的矩阵
  - 如果 $a_{kj} \geq a_{lj}$，$j = 1, \ldots, n$，则称局中人 I 的策略 k优超于策略 l
  - 如果 $a_{ik} \geq a_{il}$，$i = 1, \ldots, m$，则称局中人 II 的策略 k优超于策略 l
- 局中人 I 的策略 k 优超于策略 l 说明对局中人 I 而言当其采用策略 k，无论局中人 II 采用任何策略，其获得都比采用策略 l 来的好。因而策略 l 出现的概率为 0，可以在赢得矩阵中删除该策略对应的行。

例 3

- 求解矩阵对策 $G=\{S_1,S_2;\mathbf{A}\}$，其中

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3&4&0&3&0\\5&0&2&5&9\\7&3&9&5&9\\4&6&8&7&6\\6&0&8&8&3\end{bmatrix}$$

- 应用优超原则依次简化得到矩阵

$$\mathbf{A}_1=\begin{bmatrix}7&3&9&5&9\\4&6&8&7&6\\6&0&8&8&3\end{bmatrix}\quad \mathbf{A}_2=\begin{bmatrix}7&3\\4&6\\6&0\end{bmatrix}\quad \mathbf{A}_3=\begin{bmatrix}7&3\\4&6\end{bmatrix}$$

例 3

- 易知 $\mathbf{A}_3$ 没有鞍点，由定理 6 得到方程组

$$\begin{cases} 7x_3 + 4x_4 = v \\ 3x_3 + 6x_4 = v \\ x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} 7y_1 + 3y_2 = v \\ 4y_1 + 6y_2 = v \\ y_1 + y_2 = 1 \end{cases}$$

得到非负解为

$$x_3^* = \frac{1}{3},\ x_4^* = \frac{2}{3},\ y_1^* = \frac{1}{2},\ y_2^* = \frac{1}{2},\ v^* = 5$$

于是，以矩阵 $\mathbf{A}$ 为赢得矩阵的对策的一个解为

$$\mathbf{x}^* = \left(0, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right)^\top,\ \mathbf{y}^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0\right)^\top,\ V_G = 5$$

线性规划法

- (定理 5) 任一矩阵对策一定存在混合策略下的解。
- 求解矩阵对策可等价地转化为求解互为对偶的线性规划问题 (P) 和 (D)，故在问题 (P) 中令 ${x_i}' = \frac{x_i}{w}$，$i = 1, \ldots, m$，则约束转化为

$$\begin{cases} \sum_i a_{ij} x_i^{'} \geq 1 \ (j = 1, \ldots, n) \\ \sum_i x_i^{'} = \frac{1}{w} \\ x_i^{'} \geq 0 \ (i = 1, \ldots, m) \end{cases}$$

则 (P) 等价于线性规划问题

$$(\mathrm{P}') \quad \min \sum_i x_i^{'}$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} \sum_i a_{ij} x_i^{'} \geq 1 \ (j = 1, \ldots, n) \\ x_i^{'} \geq 0 \ (i = 1, \ldots, m) \end{cases}$$

矩阵对策的解法

- **线性规划法**
  - 同理，作变换

$$y_j{}' = \frac{x_j}{v},\ j = 1, \ldots, n$$

则问题 (D) 等价于线性规划问题

$$(\mathrm{D}') \quad \max \sum_j y_j^{'}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum\limits_j a_{ij} y_j^{'} \leq 1 \ (i = 1, \ldots, m) \\ y_j^{'} \geq 0 \ (j = 1, \ldots, n) \end{cases}$$

  - 利用单纯形法求解 (P') 和 (D')，得到 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ 和 w, v
  - 利用变换式得到对策问题的解和值

矩阵对策的解法

- 例 4
  - 利用线性规划方法求解矩阵对策，其赢得矩阵为

$$\begin{bmatrix} 7 & 2 & 9 \\ 2 & 9 & 0 \\ 9 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

- 例 4
  - 求解可以转化成两个互为对偶的线性规划问题

$$
\text{(P)} \quad \min \ (x_1 + x_2 + x_3)
$$

$$
\text{s.t.} \begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 9x_3 \geq 1 \\ 2x_1 + 9x_2 \geq 1 \\ 9x_1 + 11x_3 \geq 1 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}
$$

$$
\text{(D)} \quad \max \ (y_1 + y_2 + y_3)
$$

$$
\text{s.t.} \begin{cases} 7y_1 + 2y_2 + 9y_3 \leq 1 \\ 2y_1 + 9y_2 \leq 1 \\ 9y_1 + 11y_3 \leq 1 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}
$$

矩阵对策的解法

- **例 4**
  - 上述线性规划的解为

$$\mathbf{x} = \left(\frac{1}{20}, \frac{1}{10}, \frac{1}{20}\right)^\top, \quad w = \frac{1}{5}$$

$$\mathbf{y} = \left(\frac{1}{20}, \frac{1}{10}, \frac{1}{20}\right)^\top, \quad v = \frac{1}{5}$$

因此对策问题的解为

$$V_G = \frac{1}{w} = \frac{1}{v} = 5$$

$$\mathbf{x}^* = V_G \mathbf{x} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)^\top$$

$$\mathbf{y}^* = V_G \mathbf{y} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)^\top$$

矩阵对策的解法

- ## 课堂练习 2
  - 用线性规划方法求解矩阵对策，其中赢得矩阵 $\mathbf{A}$ 为

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

矩阵对策的解法

- 小结
  - 图解法
    - 赢得矩阵为 $2 \times n$ 或 $m \times 2$ 阶
    - 从几何上理解对策论的思想
  - 方程组法
    - 优超原则
    - 鞍点判断
  - 线性规划法
    - 任一矩阵对策一定存在混合策略下的解
    - 单纯形法
- 课后作业: P376, 习题 12.5

Q&A

Thank you!

感谢您的聆听和反馈