

图解法

修贤超

<https://xianchaoxiu.github.io>

线性规划问题的数学模型

■ 标准形式

$$\begin{aligned} \max \quad & z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, \dots, m) \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n) \end{cases} \end{aligned}$$

- 满足约束条件的 x_j ($j = 1, \dots, n$) 称为**可行解**
- 全部可行解的集合称为**可行域**
- 使目标函数达到最优的可行解称为**最优解**

■ 只有两个变量的线性规划问题

$$\begin{aligned} \max \quad & z = c_1x_1 + c_2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i \quad (i = 1, \dots, m) \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

■ 具体步骤

- 第一步: 建立平面直角坐标系
- 第二步: 图示约束条件, 找出可行域
- 第三步: 图示目标函数
- 第四步: 确定最优解

例 1

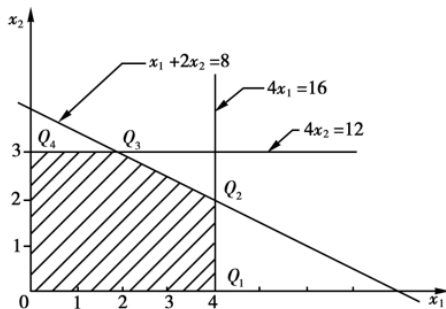
■ 用图解法求解线性规划问题

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 4x_1 \leq 16 \\ 4x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

- 决策变量: x_1, x_2
- 目标函数: $\max \quad z = 2x_1 + 3x_2$
- 约束条件: $x_1 + 2x_2 \leq 8, 4x_1 \leq 16, 4x_2 \leq 12, x_1, x_2 \geq 0$

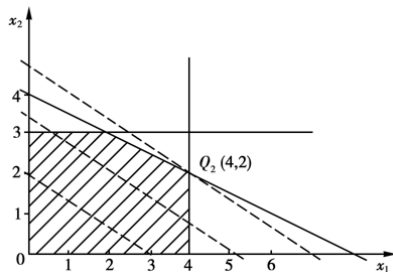
具体步骤

- 第一步: 建立平面直角坐标系
- 第二步: 图示约束条件, 找出可行域



具体步骤

- 第一步: 建立平面直角坐标系
- 第二步: 图示约束条件, 找出可行域
- 第三步: 图示目标函数 $\max z = 2x_1 + 3x_2$

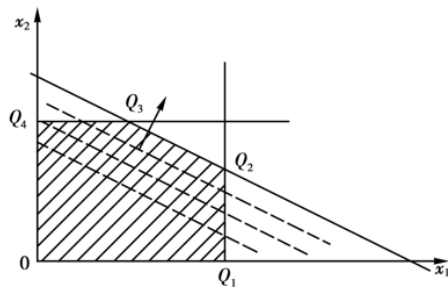


- 第四步: 确定最优解为 $x_1 = 4, x_2 = 2$, 最优值为 $z = 14$

无穷多最优解

■ 目标函数的直线族与约束条件平行

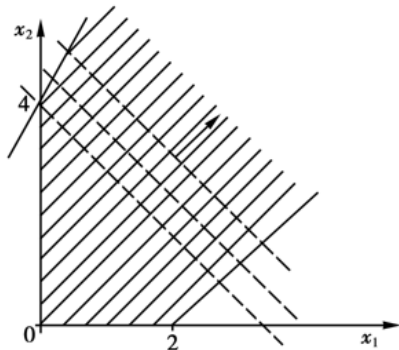
$$\begin{array}{ll}\max & z = 2x_1 + 4x_2 \\ \text{s.t.} & \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 4x_1 \leq 16 \\ 4x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}\end{array}$$



无界解

- 建立数学模型时遗漏了某些必要的资源约束条件

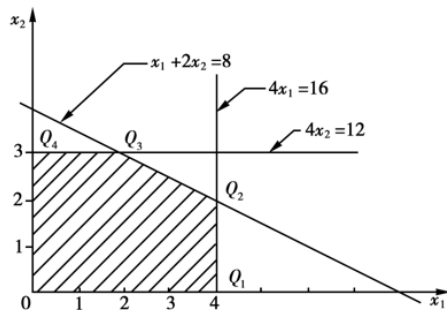
$$\begin{aligned} \max \quad & z = x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$



无可行解

- 当存在矛盾的约束条件时会出现无可行域

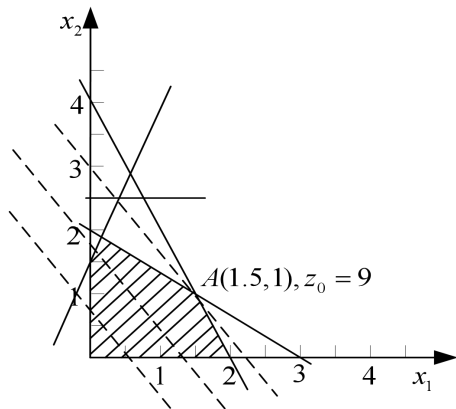
$$\begin{array}{ll} \max & z = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.} & \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 10 \\ x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 4x_1 \leq 16 \\ 4x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{array}$$



例 1

■ 用图解法求解线性规划问题

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 4x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ -3x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ 2x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$



课堂练习 1

■ 用图解法求解线性规划问题

$$\begin{array}{ll}\max z = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.} \quad \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ 4x_1 \leq 12 \\ 3x_2 \leq 15 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}\end{array}$$

小结

- 求解两个变量的线性规划问题
- 解的存在性
 - 唯一解
 - 无穷多解
 - 无界解
 - 无可行解
- 课后作业: P43, 习题 1.1

Q&A

Thank you!

感谢您的聆听和反馈