

## 第二章 最优性理论

修贤超

<https://xianchaoxiu.github.io>

- 2.1 最优化问题解的存在性
- 2.2 无约束可微问题的最优性理论
- 2.3 无约束不可微问题的最优性理论
- 2.4 对偶理论
- 2.5 一般约束优化问题的最优性理论
- 2.6 带约束凸优化问题的最优性理论

# 最优化问题解的存在性

## ■ 考虑优化问题

$$\begin{array}{ll}\min_{x \in \mathbb{R}^n} & f(x) \\ \text{s.t.} & x \in \mathcal{X}\end{array}$$

- 首先分析最优解的存在性
- 然后考虑如何求出其最优解

- (Weierstrass 定理) 紧集上的连续函数一定存在最大 (最小) 值
- 而在许多实际问题中, 定义域可能不是紧的, 目标函数也不一定连续

## 推广的 Weierstrass 定理

- 若函数  $f : \mathcal{X} \rightarrow (-\infty, +\infty]$  适当且闭, 且以下条件中任意一个成立

- $\text{dom } f = \{x \in \mathcal{X} : f(x) < +\infty\}$  是有界的
- 存在一个常数  $\bar{\gamma}$  使得下水平集

$$C_{\bar{\gamma}} = \{x \in \mathcal{X} \mid f(x) \leq \bar{\gamma}\}$$

是非空且有界的

- $f$  是强制的, 即对于任一满足  $\|x^k\| \rightarrow +\infty$  的点列  $\{x^k\} \subset \mathcal{X}$ , 都有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x^k) = +\infty$$

则函数  $f$  的最小值点集  $\{x \in \mathcal{X} \mid f(x) \leq f(y), \forall y \in \mathcal{X}\}$  非空且紧

- 三个条件在本质上都是**保证  $f(x)$  的最小值不能在无穷远处取到**

- 当定义域不是有界闭集时, 对于强制函数

$$f(x) = x^2, x \in \mathcal{X} = \mathbb{R}$$

其全局最优解一定存在

- 对于适当且闭的函数

$$f(x) = e^{-x}, x \in \mathcal{X} = \mathbb{R}$$

不满足三个条件中任意一个, 因此不能断言其全局极小值点存在

- 2.1 最优化问题解的存在性
- 2.2 无约束可微问题的最优性理论
- 2.3 无约束不可微问题的最优性理论
- 2.4 对偶理论
- 2.5 一般约束优化问题的最优性理论
- 2.6 带约束凸优化问题的最优性理论

# 无约束可微问题的最优性理论

- 无约束可微优化问题通常表示为

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad (1)$$

- 对于可微函数  $f$  和点  $x \in \mathbb{R}^n$ , 如果存在向量  $d$  满足

$$\nabla f(x)^\top d < 0$$

那么称  $d$  为  $f$  在点  $x$  处的一个下降方向

- 一阶最优性条件是利用梯度 (一阶) 信息来判断给定点的最优性
- 在局部最优点处不能有下降方向

# 一阶必要条件

- 假设  $f$  在全空间  $\mathbb{R}^n$  可微. 如果  $x^*$  是 (1) 的一个局部极小点, 那么

$$\nabla f(x^*) = 0$$

**证明** 任取  $v \in \mathbb{R}^n$ , 考虑  $f$  在点  $x = x^*$  处的泰勒展开

$$\frac{f(x^* + tv) - f(x^*)}{t} = v^\top \nabla f(x^*) + o(1)$$

根据  $x^*$  的最优性, 分别对  $t$  取点 0 处的左、右极限可知

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x^* + tv) - f(x^*)}{t} &= v^\top \nabla f(x^*) \geq 0 \\ \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(x^* + tv) - f(x^*)}{t} &= v^\top \nabla f(x^*) \leq 0\end{aligned}$$

- 称满足  $\nabla f(x) = 0$  的点  $x$  为  $f$  的**稳定点 (或驻点、临界点)**



## 二阶最优性条件

- 对于  $f(x) = x^3$ , 满足  $f'(x) = 0$  的点为  $x^* = 0$ , 但其不是局部最优解
- 假设  $f$  在点  $x$  的一个开邻域内是二阶连续可微的, 考虑

$$f(x + d) = f(x) + \nabla f(x)^\top d + \frac{1}{2}d^\top \nabla^2 f(x)d + o(\|d\|^2)$$

则以下最优性条件成立

- (二阶必要条件) 若  $x^*$  是  $f$  的一个局部极小点, 则

$$\nabla f(x^*) = 0, \nabla^2 f(x^*) \succeq 0$$

- (二阶充分条件) 若满足

$$\nabla f(x^*) = 0, \nabla^2 f(x^*) \succ 0$$

则  $x^*$  是  $f$  的一个局部极小点

- **必要性** 若  $\nabla^2 f(x^*)$  有负的特征值  $\lambda_- < 0$ , 设  $\nabla^2 f(x^*)d = \lambda_- d$ , 则

$$\frac{f(x^* + d) - f(x^*)}{\|d\|^2} = \frac{1}{2} \frac{d^\top}{\|d\|} \nabla^2 f(x^*) \frac{d}{\|d\|} + o(1) = \frac{1}{2} \lambda_- + o(1)$$

当  $\|d\|$  充分小时,  $f(x^* + d) < f(x^*)$ , 这和点  $x^*$  的最优性矛盾

- **充分性** 由  $\nabla f(x^*) = 0$  时的二阶展开

$$\frac{f(x^* + d) - f(x^*)}{\|d\|^2} = \frac{d^\top \nabla^2 f(x^*) d + o(\|d\|^2)}{\|d\|^2} \geq \frac{1}{2} \lambda_{\min} + o(1)$$

当  $\|d\|$  充分小时有  $f(x^* + d) \geq f(x^*)$ , 即二阶充分条件成立

## 例：实数情形的相位恢复

### ■ 考虑

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = \sum_{i=1}^m r_i^2(x)$$

其中  $r_i(x) = (a_i^\top x)^2 - b_i^2, i = 1, 2, \dots, m$

### ■ 计算梯度和的海瑟矩阵

$$\nabla f(x) = 2 \sum_{i=1}^m r_i(x) \nabla r_i(x) = 4 \sum_{i=1}^m ((a_i^\top x)^2 - b_i^2) (a_i^\top x) a_i$$

$$\nabla^2 f(x) = \sum_{i=1}^m (12(a_i^\top x)^2 - 4b_i^2) a_i a_i^\top$$

- 2.1 最优化问题解的存在性
- 2.2 无约束可微问题的最优性理论
- 2.3 无约束不可微问题的最优性理论
- 2.4 对偶理论
- 2.5 一般约束优化问题的最优性理论
- 2.6 带约束凸优化问题的最优性理论

# 无约束不可微问题的最优性理论

## ■ 考虑不可微优化问题

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad (2)$$

■ 假设  $f$  是适当且凸的函数, 则  $x^*$  为 (2) 的全局极小点当且仅当  $0 \in \partial f(x^*)$

□ **必要性** 因  $x^*$  为全局极小点, 有

$$f(y) \geq f(x^*) = f(x^*) + 0^\top (y - x^*), \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

$$\implies 0 \in \partial f(x^*)$$

□ **充分性** 如果  $0 \in \partial f(x^*)$ , 那么根据次梯度的定义

$$f(y) \geq f(x^*) + 0^\top (y - x^*) = f(x^*), \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

$$\implies x^* \text{ 为一个全局极小点}$$

# 复合优化问题的一阶必要条件

- 考虑一般复合优化问题

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad \psi(x) = f(x) + h(x) \quad (3)$$

其中  $f$  为光滑函数 (可能非凸),  $h$  为凸函数 (可能非光滑)

- **定理** 令  $x^*$  为复合优化问题 (3) 的一个局部极小点, 那么

$$-\nabla f(x^*) \in \partial h(x^*)$$

- 由于目标函数可能是整体非凸的, 因此一般没有一阶充分条件

## 例: $\ell_1$ 范数优化问题

### ■ 考虑

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad \psi(x) = f(x) + \mu \|x\|_1$$

### ■ $\|x\|_1$ 不是可微的, 但可以计算其次微分

$$\partial_i \|x\|_1 = \begin{cases} \{1\}, & x_i > 0 \\ [-1, 1], & x_i = 0 \\ \{-1\}, & x_i < 0 \end{cases}$$

### ■ 若 $x^*$ 是局部最优解, 则 $-\nabla f(x^*) \in \mu \partial \|x^*\|_1$ , 即

$$\nabla_i f(x^*) = \begin{cases} -\mu, & x_i^* > 0 \\ a \in [-\mu, \mu], & x_i^* = 0 \\ \mu, & x_i^* < 0 \end{cases}$$

## ■ 无约束优化问题及其最优性条件

问题	一阶条件	二阶条件
可微问题	$\nabla f(x^*) = 0$ (必要)	必要/充分
凸问题	$0 \in \partial f(x^*)$ (充要)	—
复合优化问题	$-\nabla f(x^*) \in \partial h(x^*)$ (必要)	—
非凸非光滑	$0 \in \partial f(x^*)$ (必要)	—



- 2.1 最优化问题解的存在性
- 2.2 无约束可微问题的最优性理论
- 2.3 无约束不可微问题的最优性理论
- 2.4 对偶理论
- 2.5 一般约束优化问题的最优性理论
- 2.6 带约束凸优化问题的最优性理论

## ■ 一般的约束优化问题

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & c_i(x) \leq 0, \quad i \in \mathcal{I} \\ & c_i(x) = 0, \quad i \in \mathcal{E} \end{aligned}$$

## ■ 可行域定义为

$$\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid c_i(x) \leq 0, \quad i \in \mathcal{I} \text{ 且 } c_i(x) = 0, \quad i \in \mathcal{E}\}$$

- 通过将  $\mathcal{X}$  的示性函数加到目标函数中可以得到无约束优化问题, 但是转化后问题的目标函数是**不连续的、不可微的以及不是有限的**

# 拉格朗日函数

- 拉格朗日函数  $L: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$

$$L(x, \lambda, \nu) = f(x) + \sum_{i \in \mathcal{I}} \lambda_i c_i(x) + \sum_{i \in \mathcal{E}} \nu_i c_i(x)$$

- $\lambda_i$  为第  $i$  个不等式约束对应的拉格朗日乘子
- $\nu_i$  为第  $i$  个等式约束对应的拉格朗日乘子

- 拉格朗日对偶函数  $g: \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}^p \rightarrow [-\infty, +\infty)$

$$\begin{aligned} g(\lambda, \nu) &= \inf_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \lambda, \nu) \\ &= \inf_{x \in \mathbb{R}^n} (f(x) + \sum_{i \in \mathcal{I}} \lambda_i c_i(x) + \sum_{i \in \mathcal{E}} \nu_i c_i(x)) \end{aligned}$$

# 拉格朗日对偶问题

## ■ 拉格朗日对偶问题

$$\max_{\lambda \geq 0, \nu} g(\lambda, \nu) = \max_{\lambda \geq 0, \nu} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \lambda, \nu)$$

■ 设  $p^*$  是原始问题的最优解,  $q^*$  是对偶问题的最优解

■ **弱对偶性**  $q^* \leq p^*$

- 对凸问题与非凸问题都成立
- 可导出复杂问题的非平凡下界

■ **强对偶性**  $q^* = p^*$

- (通常) 对凸问题成立
- 称保证凸问题强对偶性成立的条件为约束品性

## 例：线性规划问题的对偶

### ■ 考虑线性规划问题

$$\begin{aligned} \min_x \quad & c^\top x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

### ■ 拉格朗日函数

$$L(x, s, \nu) = c^\top x + \nu^\top (Ax - b) - s^\top x = -b^\top \nu + (A^\top \nu - s + c)^\top x$$

### ■ 对偶函数

$$g(s, \nu) = \inf_x L(x, s, \nu) = \begin{cases} -b^\top \nu, & A^\top \nu - s + c = 0 \\ -\infty, & \text{其他} \end{cases}$$

# 例：线性规划问题的对偶

## ■ 对偶问题

$$\begin{array}{ll} \max_{s, \nu} & -b^\top \nu \\ \text{s.t.} & A^\top \nu - s + c = 0 \\ & s \geq 0 \end{array} \quad y \stackrel{-}{=} -\nu \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{ll} \max_{s, y} & b^\top y \\ \text{s.t.} & A^\top y + s = c \\ & s \geq 0 \end{array}$$

## ■ 若保留约束 $x \geq 0$ , 则拉格朗日函数为

$$L(x, y) = c^\top x - y^\top (Ax - b) = b^\top y + (c - A^\top y)^\top x$$

## ■ 对偶问题需要将 $x \geq 0$ 添加到约束里

$$\max_y \{ \inf_x b^\top y + (c - A^\top y)^\top x \quad \text{s.t.} \quad x \geq 0 \} \Rightarrow \begin{array}{ll} \max_y & b^\top y \\ \text{s.t.} & A^\top y \leq c \end{array}$$

## 例：线性规划问题的对偶

- 将  $\max b^\top y$  改写为  $\min -b^\top y$ , 对偶问题的拉格朗日函数为

$$L(y, x) = -b^\top y + x^\top (A^\top y - c) = -c^\top x + (Ax - b)^\top y$$

- 得到对偶函数

$$g(x) = \inf_y L(y, x) = \begin{cases} -c^\top x, & Ax = b \\ -\infty, & \text{其他} \end{cases}$$

- 相应的对偶问题是

$$\begin{aligned} \max_x \quad & -c^\top x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

- 该问题与原始问题完全等价, 表明线性规划问题与其对偶问题互为对偶

## 例: $\ell_1$ 正则化问题的对偶

### ■ 考虑

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad \frac{1}{2} \|Ax - b\|^2 + \mu \|x\|_1$$

### ■ 令 $r = Ax - b$ , 问题等价于

$$\begin{aligned} \min_{x, r} \quad & \frac{1}{2} \|r\|^2 + \mu \|x\|_1 \\ \text{s.t.} \quad & r = Ax - b \end{aligned}$$

### ■ 拉格朗日函数

$$\begin{aligned} L(x, r, \lambda) &= \frac{1}{2} \|r\|^2 + \mu \|x\|_1 - \langle \lambda, Ax - b - r \rangle \\ &= \frac{1}{2} \|r\|^2 + \lambda^\top r + \mu \|x\|_1 - (A^\top \lambda)^\top x + b^\top \lambda \end{aligned}$$



## 例: $\ell_1$ 正则化问题的对偶

### ■ 对偶函数

$$g(\lambda) = \inf_{x,r} L(x, r, \lambda) = \begin{cases} b^\top \lambda - \frac{1}{2} \|\lambda\|^2, & \|A^\top \lambda\|_\infty \leq \mu \\ -\infty, & \text{其他} \end{cases}$$

### ■ 对偶问题

$$\begin{aligned} \max_{\lambda} \quad & b^\top \lambda - \frac{1}{2} \|\lambda\|^2 \\ \text{s.t.} \quad & \|A^\top \lambda\|_\infty \leq \mu \end{aligned}$$

## 例：半定规划问题的对偶问题

### ■ 考虑

$$\begin{aligned} \min_{X \in \mathcal{S}^n} \quad & \langle C, X \rangle \\ \text{s.t.} \quad & \langle A_i, X \rangle = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ & X \succeq 0 \end{aligned}$$

### ■ 拉格朗日函数

$$L(X, y, S) = \langle C, X \rangle - \sum_{i=1}^m y_i (\langle A_i, X \rangle - b_i) - \langle S, X \rangle, \quad S \succeq 0$$

## 例：半定规划对偶问题的对偶问题

### ■ 对偶函数

$$g(y, S) = \inf_X L(X, y, S) = \begin{cases} b^\top y, & \sum_{i=1}^m y_i A_i - C + S = 0 \\ -\infty, & \text{其他} \end{cases}$$

### ■ 对偶问题

$$\begin{aligned} \min_{y \in \mathbb{R}^m} \quad & -b^\top y \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^m y_i A_i - C + S = 0 \\ & S \succeq 0 \end{aligned}$$

- 2.1 最优化问题解的存在性
- 2.2 无约束可微问题的最优性理论
- 2.3 无约束不可微问题的最优性理论
- 2.4 对偶理论
- 2.5 一般约束优化问题的最优性理论
- 2.6 带约束凸优化问题的最优性理论

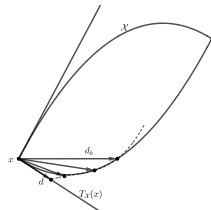
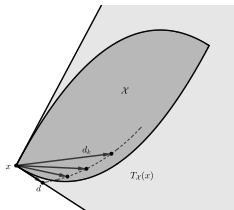
# 切锥

- 给定可行域  $\mathcal{X}$  及  $x \in \mathcal{X}$ , 若存在序列  $\{z_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{X}$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = x$  以及正标量序列  $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ ,  $t_k \rightarrow 0$  满足

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{z_k - x}{t_k} = d$$

则称向量  $d$  为  $\mathcal{X}$  在点  $x$  处的一个**切向量**

- 所有点  $x$  处的切向量构成的集合称为**切锥**, 用  $T_{\mathcal{X}}(x)$  表示



# 几何最优性条件

## ■ 一般优化问题

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & c_i(x) \leq 0, \quad i \in \mathcal{I} \\ & c_i(x) = 0, \quad i \in \mathcal{E} \end{aligned} \tag{4}$$

■ **定理** 假设可行点  $x^*$  是问题 (4) 的一个局部极小点. 如果  $f(x)$  和  $c_i(x)$ ,  $i \in \mathcal{I} \cup \mathcal{E}$  在点  $x^*$  处是可微的, 那么

$$d^\top \nabla f(x^*) \geq 0, \quad \forall d \in T_{\mathcal{X}}(x^*)$$

等价于

$$T_{\mathcal{X}}(x^*) \cap \{d \mid \nabla f(x^*)^\top d < 0\} = \emptyset$$

# 线性化可行锥

- **定义** 对于可行点  $x \in \mathcal{X}$ , 定义积极集  $\mathcal{A}(x) = \mathcal{E} \cup \{i \in \mathcal{I} \mid c_i(x) = 0\}$ , 点  $x$  处的线性化可行方向锥定义为

$$\mathcal{F}(x) = \left\{ d \mid \begin{array}{l} d^\top \nabla c_i(x) = 0, \forall i \in \mathcal{E} \\ d^\top \nabla c_i(x) \leq 0, \forall i \in \mathcal{A}(x) \cap \mathcal{I} \end{array} \right\}$$

- **命题** 设  $c_i(x), i \in \mathcal{E} \cup \mathcal{I}$  一阶连续可微, 则对任意可行点  $x$  有  $T_{\mathcal{X}}(x) \subseteq \mathcal{F}(x)$
- 线性可行化方向锥容易计算, 但不能反映可行域  $\mathcal{X}$  的本质特征
- 切锥能反映可行域  $\mathcal{X}$  的本质特征, 但不容易计算
- **引入约束品性, 确保  $T_{\mathcal{X}}(x^*) = \mathcal{F}(x^*)$ , 从而用  $\mathcal{F}(x)$  取代  $T_{\mathcal{X}}(x)$**

■ **定理** 假设  $x^*$  是一般优化问题 (4) 的一个局部最优点

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & c_i(x) \leq 0, \quad i \in \mathcal{I} \\ & c_i(x) = 0, \quad i \in \mathcal{E} \end{aligned}$$

如果  $T_{\mathcal{X}}(x^*) = \mathcal{F}(x^*)$  成立, 那么存在拉格朗日乘子  $\lambda_i^*$  使得

**稳定性条件**  $\nabla_x L(x^*, \lambda^*) = \nabla f(x^*) + \sum_{i \in \mathcal{I} \cup \mathcal{E}} \lambda_i^* \nabla c_i(x^*) = 0$

**原始可行性条件**  $c_i(x^*) = 0, \quad \forall i \in \mathcal{E}$

**原始可行性条件**  $c_i(x^*) \leq 0, \quad \forall i \in \mathcal{I}$

**对偶可行性条件**  $\lambda_i^* \geq 0, \quad \forall i \in \mathcal{I}$

**互补松弛条件**  $\lambda_i^* c_i(x^*) = 0, \quad \forall i \in \mathcal{I}$



- 若  $x^*$  是满足 KKT 条件的点, 假设  $T_{\mathcal{X}}(x^*) = \mathcal{F}(x^*)$ , 则  $\forall d \in \mathcal{F}(x^*)$  有

$$d^\top \nabla f(x^*) = - \sum_{i \in \mathcal{E}} \underbrace{\lambda_i^* d^\top \nabla c_i(x^*)}_{=0} - \sum_{i \in \mathcal{A}(x^*) \cap \mathcal{I}} \underbrace{\lambda_i^* d^\top \nabla c_i(x^*)}_{\leq 0} \geq 0$$

- **定义** 设  $(x^*, \lambda^*)$  是满足 KKT 条件的 KKT 对, 定义**临界锥**为

$$\mathcal{C}(x^*, \lambda^*) = \{d \in \mathcal{F}(x^*) \mid d^\top \nabla c_i(x^*) = 0, \forall i \in \mathcal{A}(x^*) \cap \mathcal{I} \text{ 且 } \lambda_i^* > 0\}$$

- 当  $d \in \mathcal{C}(x^*, \lambda^*)$  时,  $\forall i \in \mathcal{E} \cup \mathcal{I}$  有  $\lambda_i^* \nabla c_i(x^*)^\top d = 0$ , 故

$$d^\top \nabla f(x^*) = \sum_{i \in \mathcal{E} \cup \mathcal{I}} \lambda_i^* d^\top \nabla c_i(x^*) = 0$$

## 二阶最优性条件

- **定理 (二阶必要条件)** 假设  $x^*$  是一个局部最优解, 且  $T_{\mathcal{X}}(x^*) = \mathcal{F}(x^*)$ . 令  $\lambda^*$  为相应的拉格朗日乘子, 即  $(x^*, \lambda^*)$  满足 KKT 条件, 那么

$$d^\top \nabla_{xx}^2 L(x^*, \lambda^*) d \geq 0, \quad \forall d \in \mathcal{C}(x^*, \lambda^*)$$

- **定理 (二阶充分条件)** 假设在可行点  $x^*$  处, 存在一个拉格朗日乘子  $\lambda^*$ , 使得  $(x^*, \lambda^*)$  满足 KKT 条件. 如果

$$d^\top \nabla_{xx}^2 L(x^*, \lambda^*) d > 0, \quad \forall d \in \mathcal{C}(x^*, \lambda^*), \quad d \neq 0$$

那么  $x^*$  为一个严格局部极小解

- 回顾无约束优化问题的二阶最优性条件

## ■ 考虑

$$\min \quad x_1^2 + x_2^2 \quad \text{s.t.} \quad \frac{x_1^2}{4} + x_2^2 - 1 = 0$$

## ■ 拉格朗日函数为

$$L(x, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda\left(\frac{x_1^2}{4} + x_2^2 - 1\right)$$

■ 该问题可行域在任意一点  $x = (x_1, x_2)^\top$  处的线性化可行方向锥为

$$\mathcal{F}(x) = \{(d_1, d_2) \mid \frac{x_1}{4}d_1 + x_2d_2 = 0\}$$

■ 根据  $\mathcal{C}(x, \lambda) = \mathcal{F}(x)$ , 计算出 4 个 KKT 对

$$(x^\top, \lambda) = (2, 0, -4), (-2, 0, -4), (0, 1, -1), (0, -1, -1)$$

- 第一个 KKT 对  $y = (2, 0, -4)$ , 计算可得

$$\nabla_{xx}^2 L(y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{C}(y) = \{(d_1, d_2) \mid d_1 = 0\}$$

取  $d = (0, 1)$ , 则  $d^\top \nabla_{xx}^2 L(y) d = -6 < 0$ , 因此  $y$  不是局部最优点

- 第三个 KKT 对  $z = (0, 1, -1)$ , 计算可得

$$\nabla_{xx}^2 L(z) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{C}(z) = \{(d_1, d_2) \mid d_2 = 0\}$$

对于任意的  $d = (d_1, 0)$  且  $d_1 \neq 0$ , 有  $d^\top \nabla_{xx}^2 L(z) d = \frac{3}{2} d_1^2 > 0$ , 因此  $z$  是一个严格局部最优点

- 2.1 最优化问题解的存在性
- 2.2 无约束可微问题的最优性理论
- 2.3 无约束不可微问题的最优性理论
- 2.4 对偶理论
- 2.5 一般约束优化问题的最优性理论
- 2.6 带约束凸优化问题的最优性理论

## ■ 考虑带约束的凸优化问题

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathcal{D}} \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & c_i(x) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ & Ax = b \end{aligned} \tag{5}$$

- $f(x)$  为适当的凸函数
- $c_i(x)$  是凸函数且  $\text{dom } c_i = \mathbb{R}^n$
- 集合  $\mathcal{D}$  表示自变量  $x$  的定义域, 即  $\mathcal{D} = \{x \mid f(x) < +\infty\}$

# Slater 约束品性与强对偶原理

- **定义** 集合  $\mathcal{D}$  的相对内点集定义为

$$\text{relint } \mathcal{D} = \{x \in \mathcal{D} \mid \exists r > 0, \text{ 使得 } B(x, r) \cap \text{affine } \mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}\}$$

- **定义** 若对凸优化问题 (5) 存在  $x \in \text{relint } \mathcal{D}$  满足

$$c_i(x) < 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad Ax = b$$

则称满足 Slater 约束条件

- **定理** 若凸优化问题满足 Slater 条件, 则强对偶原理成立

# 一阶充要条件

- **定理** 对于凸优化问题 (5), 如果 Slater 条件成立, 那么  $x^*, \lambda^*$  分别是原始、对偶全局最优解当且仅当

**稳定性条件**  $0 \in \partial f(x^*) + \sum_{i \in \mathcal{I}} \lambda_i^* \partial c_i(x^*) + \sum_{i \in \mathcal{E}} \lambda_i^* a_i$

**原始可行性条件**  $Ax^* = b, \forall i \in \mathcal{E}$

**原始可行性条件**  $c_i(x^*) \leq 0, \forall i \in \mathcal{I}$

**对偶可行性条件**  $\lambda_i^* \geq 0, \forall i \in \mathcal{I}$

**互补松弛条件**  $\lambda_i^* c_i(x^*) = 0, \forall i \in \mathcal{I}$



## 例：仿射空间的投影问题

### ■ 考虑

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad \frac{1}{2} \|x - y\|_2^2 \quad \text{s.t.} \quad Ax = b$$

### ■ 拉格朗日函数 $L(x, \lambda) = \frac{1}{2} \|x - y\|^2 + \lambda^\top (Ax - b)$

### ■ KKT 条件

$$\begin{cases} x^* - y + A^\top \lambda^* = 0 \\ Ax^* = b \end{cases}$$

### ■ 第一式左右两边同时左乘 $A$ 可得

$$Ax^* - Ay + AA^\top \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^* = (AA^\top)^{-1}(Ay - b)$$

### ■ 将 $\lambda^*$ 代回第一式可知

$$x^* = y - A^\top (AA^\top)^{-1}(Ay - b)$$

## ■ 无约束优化问题及其最优性条件

问题	一阶条件	二阶条件
可微问题	$\nabla f(x^*) = 0$ (必要)	必要/充分
凸问题	$0 \in \partial f(x^*)$ (充要)	—
复合优化问题	$-\nabla f(x^*) \in \partial h(x^*)$ (必要)	—
非凸非光滑	$0 \in \partial f(x^*)$ (必要)	—

## ■ 约束优化问题的最优性条件和相应约束品性

问题	一阶条件	二阶条件	约束品性
一般问题	KKT 条件 (必要)	必要/充分	LICQ
凸问题	KKT 条件 (充要)	—	Slater

*Q&A*

*Thank you!*

感谢您的聆听和反馈