线性规划问题及其数学模型

修贤超

https://xianchaoxiu.github.io

例 1

- 美佳公司计划制造 I、II 两种家电产品。已知各制造一件时分别占用的设备 A、设备 B 的台时、调试工序时间及每天可用于这两种家电的能力、各售出一件时的获利情况

项目	产品 I	产品 II	每天可用能力
设备 A/h	0	5	15
设备 B/h	6	2	24
调试工序/h	1	1	5
利润/元	2	1	

- 问该公司应制造两种家电各多少件，使获取的利润为最大

例 1

- 设两种家电产量分别为变量 x_1, x_2，于是

$$\max\ z = 2x_1 + x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 5x_2 \leq 15 \\ 6x_1 + 2x_2 \leq 24 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

  - **决策变量**: x_1, x_2
  - **目标函数**: $\max\ \ z = 2x_1 + x_2$
  - **约束条件**: $5x_2 \leq 15$, $6x_1 + 2x_2 \leq 24$, $x_1 + x_2 \leq 5$, $x_1, x_2 \geq 0$

例 2

- 捷运公司拟在下一年度的 1-4 月的 4 个月内需租用仓库堆放物资。已知各月份所需仓库面积

月份	1	2	3	4
所需仓库面积 $(100m^2)$	15	10	20	12

仓库租借费用随合同期限而定，合同期越长折扣越大。租借仓库的合同每月初都可办理，每份合同具体规定租用面积和期限

合同租借期限	1 个月	2 个月	3 个月	4 个月
合同期内的租费 (元$/100m^2$)	2800	4500	6000	7300

- 试确定该公司签订租借合同的最优决策，使所付租借费用最小

例 2

- 设x_{ij} 表示在第 i $(i=1,2,3,4)$ 个月初签订的租借期为 j $(j=1,2,3,4)$ 个月的仓库面积的合同
  - 决策变量: x_{ij} $(i,j=1,2,3,4)$
  - 目标函数:

$$\begin{aligned}\min\ z =\ & 2800(x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41})+4500(x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42})\\ & +6000(x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43})+7300(x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44})\end{aligned}$$

  - 约束条件:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}\geq 15\\ x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{21}+x_{22}+x_{23}\geq 10\\ x_{13}+x_{14}+x_{22}+x_{23}+x_{31}+x_{32}\geq 20\\ x_{14}+x_{23}+x_{32}+x_{41}\geq 12\\ x_{ij}\geq 0\end{cases}$$

课堂练习 1

- 某工厂用三种原料 P_1、原料 P_2、原料 P_3 生产三种产品 Q_1、产品 Q_2、产品 Q_3，如表所示

单位产品所需原料数量	产品 Q_1	产品 Q_2	产品 Q_3	原料可用量
原料 P_1/公斤	2	3	0	1500
原料 P_2/公斤	0	2	4	800
原料 P_3/公斤	3	2	5	2000
位产品的利润/千元	3	5	4	

- 试制订总利润最大的生产计划

线性规划问题的数学模型

- 三要素：决策变量，目标函数，约束条件

$$\max\ z = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 1500 \\ 2x_2 + 4x_3 \le 800 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 2000 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

  - 决策变量的取值是连续的
  - 目标函数是决策变量的线性函数
  - 约束条件是含决策变量的线性等式或不等式

线性规划问题的数学模型

- 一般形式

$$
\max(\min)\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n
$$

$$
\text{s.t.} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le (=, \ge) b_1 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le (=, \ge) b_m \\ x_1, \cdots, x_n \ge 0 \end{cases}
$$

- x_j: 决策变量
- c_j: 价值系数
- b_i: 资源量/右端项
- a_{ij}: 技术系数/工艺系数

■ 线性规划问题的数学模型

$$\max(\min)\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq (=,\geq)b_1 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq (=,\geq)b_m \\ x_1, \cdots, x_n \geq 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\max(\min)\ z = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq (=,\geq)b_i\ (i = 1,\cdots,m) \\ x_j \geq 0\ (j = 1,\cdots,n) \end{cases}$$

线性规划问题的数学模型

- 记

$$\mathbf{C} = [c_1 \dots c_n] \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

- 用矩阵和向量表示

$$\max(\min)\ z = \mathbf{CX}$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} \mathbf{P}_j x_j \le (=, \ge)\mathbf{b} \\ \mathbf{X} \ge 0 \end{cases}$$

$$\max(\min)\ z = \mathbf{CX}$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} \mathbf{AX} \le (=, \ge)\mathbf{b} \\ \mathbf{X} \ge 0 \end{cases}$$

线性规划问题的数学模型

- 标准形式

$$\max\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i\ (i = 1, \cdots, m) \\ x_j \geq 0\ (j = 1, \cdots, n) \end{cases}$$

- 目标函数是求最大值
- 所有约束条件均用等式表示
- 所有决策变量均取非负数
- 所有右端项常数均为非负数

非标准型转化为标准形式

- 基本思路

$$\text{目标函数} \Rightarrow \text{约束条件} \Rightarrow \text{决策变量}$$

- 第一步: 目标函数的转换

$$\min z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \Rightarrow \max z' = -\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

非标准型转化为标准形式

- 第二步: 约束条件的转换
  - 右端项常数的转换

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ b_i < 0 \quad \Rightarrow \quad -\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = -b_i$$

  - 不等式的转换——引入松弛变量

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + s_i = b_i,\ s_i \ge 0$$

  - 不等式的转换——引入剩余变量

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - s_i = b_i,\ s_i \ge 0$$

非标准型转化为标准型

- 第三步：决策变量的转换
  - 取值无约束的转化

$$x_k\text{取值无约束} \quad \Rightarrow \quad x_k = x_k' - x_k'',\ x_k', x_k'' \geq 0$$

  - 取值非正的转化

$$x_k \leq 0 \quad \Rightarrow \quad x_k' = -x_k$$

例 3

- 请将下式转化为线性规划标准形式

$$
\begin{aligned}
&\min\ z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\
&\text{s.t.}\ \begin{cases}
-2x_1 + x_2 + x_3 \leq 9 \\
-3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 4 \\
\ 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -6 \\
x_1 \leq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3\text{取值无约束}
\end{cases}
\end{aligned}
$$

  - 第一步: 目标函数的转换
  - 第二步: 约束条件的转换
  - 第三步: 决策变量的转换

第一步：目标函数的转换

- 令$z' = -z$，于是

$$\max\ z' = -x_1 - 2x_2 - 3x_3$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 \le 9 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 4 \\ 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -6 \\ x_1 \le 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3\text{取值无约束} \end{cases}$$

第二步：约束条件的转换

- **右端项常数的转换**

$$\max\ z' = -x_1 - 2x_2 - 3x_3$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 \leq 9 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 4 \\ -4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ x_1 \leq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3\text{取值无约束} \end{cases}$$

- **不等式的转换，松弛变量 x_4，剩余变量 x_5**

$$\max\ z' = -x_1 - 2x_2 - 3x_3' + 3x_3'' + 0x_4 + 0x_5$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 = 4 \\ -4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ x_1 \leq 0,\ x_2, x_4, x_5 \geq 0,\ x_3\text{取值无约束} \end{cases}$$

第三步: 决策变量的转换

- 令 $x_3 = x_3' - x_3'',\ x_3', x_3'' \geq 0$

$$\max\ z' = -x_1 - 2x_2 - 3x_3' + 3x_3'' + 0x_4 + 0x_5$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3' - x_3'' + x_4 = 9 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3' - 2x_3'' - x_5 = 4 \\ -4x_1 + 2x_2 + 3x_3' - 3x_3'' = 6 \\ x_1 \leq 0,\ x_2, x_3', x_3'', x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

- 令 $x_1' = -x_1$，于是

$$\max\ z' = x_1' - 2x_2 - 3x_3' + 3x_3'' + 0x_4 + 0x_5$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} 2x_1' + x_2 + x_3' - x_3'' + x_4 = 9 \\ 3x_1' + x_2 + 2x_3' - 2x_3'' - x_5 = 4 \\ 4x_1' + 2x_2 + 3x_3' - 3x_3'' = 6 \\ x_1', x_2, x_3', x_3'', x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

- **标准型通常记为**

$$\max\ z' = x_1' - 2x_2 - 3x_3' + 3x_3'' + 0x_4 + 0x_5$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 2x_1' + x_2 + x_3' - x_3'' + x_4 = 9 \\ 3x_1' + x_2 + 2x_3' - 2x_3'' - x_5 = 4 \\ 4x_1' + 2x_2 + 3x_3' - 3x_3'' = 6 \\ x_1', x_2, x_3', x_3'', x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\max\ z = x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 3x_4$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 9 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 - x_6 = 4 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

课堂练习 2

- **请将下式转化为线性规划标准形式**

$$
\begin{aligned}
&\min\ z = -x_1 + 2x_2 - 3x_3 \\
&\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 7 \\ x_1 - x_2 + x_3 \ge 2 \\ x_1, x_2 \ge 0,\ x_3\text{取值无约束} \end{cases}
\end{aligned}
$$

小结

- 线性规划问题的标准形式

$$\max\ z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i\ (i=1,\cdots,m)\\ x_j\geq 0\ (j=1,\cdots,n)\end{cases}$$

- 三要素：决策变量，目标函数，约束条件
- 非标准型转化为标准形式

目标函数 $\Rightarrow$ 约束条件 $\Rightarrow$ 决策变量

- 课后作业：P43，习题 1.2

Q&A

Thank you!

感谢您的聆听和反馈