# 第六章 图论

修贤超

机电工程与自动化学院
上海大学

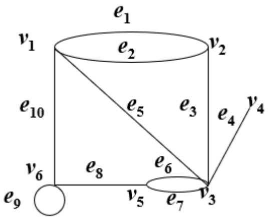
https://xianchaoxiu.github.io

# Outline

# Outline

## 图与网络的基本概念

- **定义**: 一个图是由点集 $V=\{v_j\}$ 和 $V$ 中元素的无序对的一个集合 $E=\{e_k\}$ 构成的二元组，记为 $G=(V,E)$，其中 $V$ 中的元素 $v_j$ 叫做顶点，$V$ 表示图 $G$ 的点集合；$E$ 中的元素 $e_k$ 叫做边，$E$ 表示图 $G$ 的边集合。

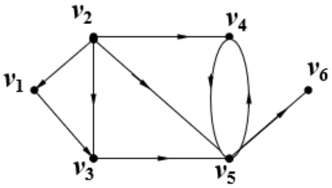



- $V=\{v_1,v_2.v_3.v_4.v_5,v_6\}$
- $E=\{v_1,v_2.v_3.v_4.v_5,v_6\}$
- $e_1=(v_1,v_2)$, $e_2=(v_1,v_2)$, $e_3=(v_2,v_3)$, $e_4=(v_3,v_4)$, $e_5=(v_1,v_3)$, $e_6=(v_3,v_5)$, $e_7=(v_3,v_5)$, $e_8=(v_5,v_6)$, $e_9=(v_6,v_6)$, $e_{10}=(v_1,v_6)$

# 图与网络的基本知识

## 图与网络的基本概念

- 如果一个图是由点和边所构成的，则称其为无向图，记作 $G = (V, E)$，连接点的边记作 $(v_i, v_j)$，或者 $(v_j, v_i)$。
- 如果一个图是由点和弧所构成的，那么称它为有向图，记作 $D = (V, A)$，其中 $V$ 表示有向图 $D$ 的点集合，$A$ 表示有向图 $D$ 的弧集合。一条方向从 $v_i$ 指向 $v_j$ 的弧，记作 $(v_i, v_j)$。

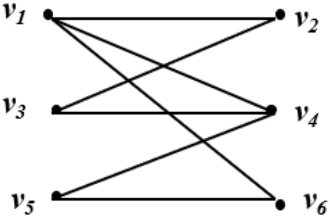



- $V = \{v_1, v_2.v_3.v_4.v_5, v_6\}$
- $A = \{(v_1, v_3), (v_2, v_1), (v_2, v_3), (v_2, v_5), (v_3, v_5), (v_4, v_5), (v_5, v_4), (v_5, v_6)\}$

# 图与网络的基本知识

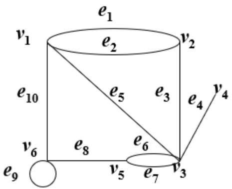
## 图与网络的基本概念

- 一条边的两个端点是相同的，那么称为这条边是环。如果两个端点之间有两条以上的边，那么称为它们为多重边。
- 一个无环，无多重边的图称为简单图，一个无环，有多重边的图称为多重图。
- 每一对顶点间都有边相连的无向简单图称为完全图。有向完全图则是指任意两个顶点之间有且仅有一条有向边的简单图。
- 图 $G=(V,E)$ 的点集 $V$ 可以分为两个非空子集 $X$，$Y$，即 $X\cup Y=V$, $X\cap Y=\varnothing$，使得 $E$ 中每条边的两个端点必有一个端点属于 $X$，另一个端点属于 $Y$，则称 $G$ 为二部图(偶图)，有时记作 $G=(X,Y,E)$。



## 图与网络的基本概念

- 以点 $v$ 为端点的边的个数称为点 $v$ 的度（次），记作 $d(v)$。



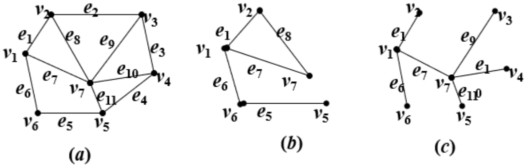

- 例如图中 $d(v_1)=4$，$d(v_6)=4$（环计两度）
- 度为零的点称为弧立点，度为 1 的点称为悬挂点。悬挂点的关联边称为悬挂边。度为奇数的点称为奇点，度为偶数的点称为偶点。

## 图与网络的基本概念

- 定理 1: 所有顶点度数之和等于所有边数的 2 倍。
- 定理 2: 在任一图中，奇点的个数必为偶数。
- 有向图中，以 $v_i$ 为始点的边数称为点 $v_i$ 的出次，用 $d^+(v_i)$ 表示；以 $v_i$ 为终点的边数称为点 $v_i$ 的入次，用 $d^-(v_i)$ 表示；$v_i$ 点的出次和入次之和就是该点的次。所有顶点的入次之和等于所有顶点的出次之和。

## 图与网络的基本概念

- 图 $G=(V,E)$，若 $E'$ 是 $E$ 的子集，$V'$ 是 $V$ 的子集，且 $E'$ 中的边仅与 $V'$ 中的顶点相关联，则称 $G'=(V',E')$ 是 $G$ 的一个子图。特别是，若 $V'=V$，则 $G'$ 称为 $G$ 的生成子图 (支撑子图)。




- 在实际应用中，给定一个图 $G=V,E$ 或有向图 $D=V,A$, 在 $V$ 中指定两个点，一个称为始点（或发点)，记作 $v_1$ ，一个称为终点（或收点)，记作 $v_n$ ，其余的点称为中间点。对每一条弧 $(v_i,v_j)\in A$，对应一个数 $w_{ij}$ ，称为弧上的权。通常把这种赋权的图称为网络。

## 连通图

- 无向图 $G = (V, E)$，若图 $G$ 中某些点与边的交替序列可以排成 $(v_{i0}, e_{i1}, v_{i1}, e_{i2}, \ldots, v_{ik-1}, e_{ik}, v_{ik})$ 的形式，且 $e_{it} = (v_{it-1}, v_{it})$ $(t = 1, \ldots, k)$，则称这个点边序列为连接 $v_{i0}$ 与 $v_{ik}$ 的一条链，链长为 $k$。点边列中没有重复的点和重复边者为初等链。
- 无向图 $G$ 中，连结 $v_{i0}$ 与 $v_{ik}$ 的一条链，当 $v_{i0}$ 与 $v_{ik}$ 是同一个点时，称此链为圈。圈中既无重复点也无重复边者为初等圈。
- 对于有向图可以类似于无向图定义链和圈，初等链、圈，此时不考虑边的方向。而当链 (圈) 上的边方向相同时，称为道路 (回路)。对于无向图来说，道路与链、回路与圈意义相同。
- 一个图中任意两点间至少有一条链相连，则称此图为连通图。任何一个不连通图都可以分为若干个连通子图，每一个称为原图的一个分图。

## 图的矩阵表示

- 对于网络（赋权图）$G = V, E$, 其中边有权 $(v_i, v_j)$, 构造矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$, 其中:

$$a_{ij} = \begin{cases} w_{ij} \ (v_i, v_j) \in E \\ 0 \ \text{其他} \end{cases}$$

  称矩阵 $A$ 为网络 $G$ 的权矩阵。

- 设图 $G = V, E$ 中顶点的个数为 $n$，构造一个矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ ，其中:

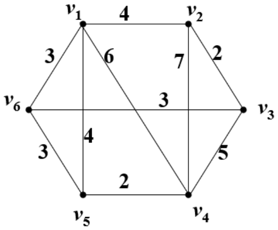
$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \ (v_i, v_j) \in E \\ 0 \ (v_i, v_j) \notin E \end{cases}$$

  称矩阵 $A$ 为网络 $G$ 的邻接矩阵。

- 当 $G$ 为无向图时，邻接矩阵为对称矩阵。

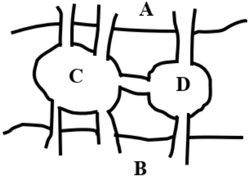
## 图的矩阵表示

- 试写出权矩阵和邻接矩阵



## 欧拉回路

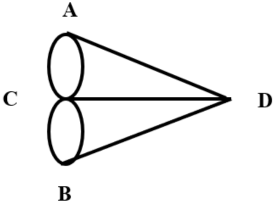
- 连通图 $G$ 中，若存在一条道路，经过每边一次且仅一次，则称这条路为欧拉道路。若存在一条回路，经过每边一次且仅一次，则称这条回路为欧拉回路。具有欧拉回路的图称为欧拉图（$E$ 图）。




- 定理 3: 无向连通图 $G$ 是欧拉图，当且仅当 $G$ 中无奇点。
- 无向连通图 $G$ 为欧拉图，当且仅当 $G$ 的边集可划分为若干个初等回路。
- 无向连通图 $G$ 有欧拉道路，当且仅当 $G$ 中且有两个奇点。

## 欧拉回路

- 欧拉回路的算法：从图 $G$ 中的任一点 $v_1$ 出发，找一个初等回路 $c_1$，再从途中去掉 $c_1$，在剩余的图中再找初等回路 $c_2$，一直做到图中所有的边都被包含在这些初等回路中，再把这些回路连续起来即得这个图的欧拉回路。




- 定理 4：连通有向图 $G$ 是欧拉图，当且仅当它每个顶点的出次等于入次。

# 图与网络的基本知识

## 中国邮递员问题

- 一个邮递员，负责某一地区的信件投递。他每天要从邮局出发，走遍该地区所有街道再返回邮局，问应如何安排送信的路线可以使所走的总路程最短？这个问题是我国管梅谷教授在 1962 年首先提出的。因此国际上通称为中国邮路问题。用图论的语言描述给定一个连通图 $G$，每边有非负权 $l(e)$，要求一条回路过每边至少一次，且满足总权最小。
- 定理 5: 已知图 $G^* = G + E_1$ 无奇点，则 $L(E_l) = \sum_{e \in E_l} l(e)$ 最小的充分必要条件为:
  - 每条边最多重复一次；
  - 对图 $G$ 中每个初等圈来讲，重复边的长度和不超过圈长的一半。
- 奇偶点图上作业法

## 小结

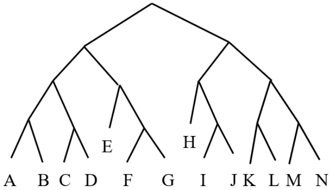
- 图与网络的基本概念
  - 图、顶点、边、简单图、完全图
  - 顶点的次、奇点、偶点
  - 子图、生成子图
  - 权、网络
- 连通图
- 图的矩阵表示
- 欧拉回路与中国邮路问题

# Outline

# 树

## 树的概念和性质

- 连通且不含圈的无向图称为**树**。树中次为 1 的点称为树叶，次大于 1 的点称为**分枝点**。

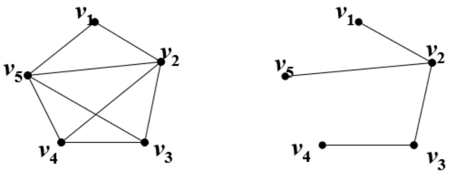



- 图 $T=(V,E)$，$|V|=n$，$|E|=m$，则下列关于树的说法是等价的。
  - $T$ 是一个树。
  - $T$ 无圈，且 $m=n-1$。
  - $T$ 连通，且 $m=n-1$。
  - $T$ 无圈，但每加一新边即得惟一一个圈。
  - $T$ 连通，但任舍去一边就不连通。
  - $T$ 中任意两点，有惟一链相连。

# 树

## 图的生成树

- 设图 $K=(V,E_1)$ 是图 $G=(V,E)$ 的一支撑子图，如果图 $K=(V,E_1)$ 是一个树, 那么称 $K$ 是 $G$ 的一个生成树（支撑树），或简称为图 $G$ 的树。图 $G$ 中属于生成树的边称为树枝，不在生成树中的边称为弦。




- 定理: 一个图 $G$ 有生成树的充要条件是 $G$ 是连通图。

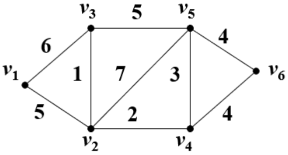
## 图的生成树

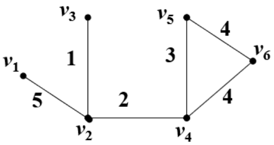
- 避圈法: 设在图中任取一条边 $e_1$，找一条与 $e_1$ 不构成圈的边 $e_2$，再找一条与 $\{e_1 e_2\}$ 不构成圈的边 $e_3$。一般设已有 $\{e_1 e_2 \ldots, e_k\}$，找一条与 $\{e_1 e_2, \ldots e_k\}$ 中任何一些边不构成圈的边 $e_{k+1}$，重复这个过程，直到不能进行为止。

# 树

## 最小生成树

- 如果图 $T=(V,E_1)$ 是图 $G$ 的一个生成树，那么称 $E_1$ 上所有边的权的和为生成树 $T$ 的权，记作 $S(T)$。如果图 $G$ 的生成树 $T^*$ 的权 $S(T^*)$，在 $G$ 的所有生成树 $T$ 中的权最小，即 $S(T^*)=\min_T S(T)$，那么称 $T^*$ 是 $G$ 的最小生成树。
- 某六个城市之间的道路网如图所示，要求沿着已知长度的道路联结六个城市的电话线网，使电话线的总长度最短。




- 根据破圈法和避圈法两种方式得到了图的两个不同的支撑树，由此可以看到连通图的支撑树不是唯一的。

# 树

## 根树及其应用

- 若一个有向图在不考虑边的方向时是一棵树，则称这个有向图为有向树。
- 有向树 T，恰有一个结点入次为 0，其余各点入次均为 1，则称 T 为根树 (又称外向树)。
- 在根树中，若每个顶点的出次小于或等于 $m$，称这棵树为$m$ 叉树。若每个顶点的出次恰好等于 $m$ 或零，则称这棵树为完全 $m$ 叉树。当 $m = 2$ 时，称为二叉树、完全二叉树。

## 小结

- 树
- 生成树
  - 深探法
  - 广探法
- 最小生成树
  - Kruskal 算法
  - 破圈法
- 根树

# Outline

# 最短路问题

## 问题描述

- 最短路问题是网络理论中应用最广泛的问题之一，例如设备更新、管道铺设、线路安排、厂区布局等。
- 设 $G=(V,E)$ 为连通图，图中各边 $(v_i,v_j)$ 有权 $l_{ij}$（$l_{ij}=\infty$ 表示 $v_i,v_j$ 之间没有边），$v_s,v_t$ 为图中任意两点，求一条路 $\mu$，使它为从 $v_s$ 到 $v_t$ 的所有路中总权最短。即: $L(\mu)=\sum\limits_{(v_i,v_j)\in\mu} l_{ij}$ 最小。
- Dijkstra 算法是在 1959 年提出来的。目前公认，在所有的权 $w_{ij}\geq 0$ 时，这个算法是寻求最短路问题最好的算法。并且，这个算法实际上也给出了寻求从一个始定点 $v_s$ 到任意一个点 $v_j$ 的最短路。

# 最短路问题

## Dijkstra 算法

- 给始点 $v_s$ 以 $P$ 标号 $P(v_s)=0$，这表示从 $v_s$ 到 $v_s$ 的最短距离为 0，其余节点均给 $T$ 标号，$T(v_i)=+\infty\ (i=2,3,\ldots,n)$。
- 设节点 $v_i$ 为刚得到 $P$ 标号的点，考虑点 $v_j$，其中 $(v_i,v_j)\in E$，且 $v_j$ 为 $T$ 标号。对 $v_j$ 的 $T$ 标号进行如下修改:

$$T(v_j)=\min[T(v_j),P(v_j)+l_{ij}]$$

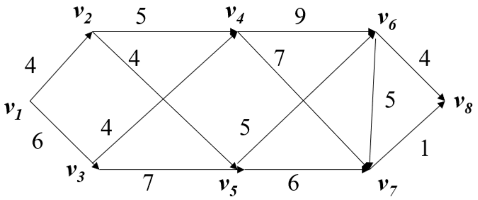
- 比较所有具有 $T$ 标号的节点，把最小者改为 $P$ 标号，即:

$$P(v_k)=\min[T(v_i)]$$

当存在两个以上最小者时，可同时改为 $P$ 标号。若全部节点均为 $P$ 标号，则停止，否则用 $v_k$ 代替 $v_i$，返回上一步。

# 最短路问题

- 求下图从 $v_1$ 到 $v_8$ 的最短路




- 首先给 $v_1$ 以 $P$ 标号，$P(v_1)=0$; 给其余所有点 $T$ 标号, $T(v_i)=+\infty\ (i=2,3,\ldots,8)$。
- $T(v_2)=\min[T(v_2),P(v_1)+l_{12}]=\min[+\infty,0+4]=4$
  $T(v_3)=\min[T(v_3),P(v_1)+l_{13}]=\min[+\infty,0+6]=6$
  比较所有 $T$ 标号，$T(v_2)$ 最小，令 $P(v_2)=4$，并记录路径 $(v_1,v_2)$。
- $T(v_4)=\min[T(v_4),P(v_2)+l_{24}]=\min[+\infty,4+5]=9$
  $T(v_5)=\min[T(v_5),P(v_2)+l_{25}]=\min[+\infty,4+4]=8$
  比较所有 $T$ 标号，$T(v_3)$ 最小，令 $P(v_3)=6$，并记录路径 $(v_1,v_3)$。

## 求下图从 $v_1$ 到 $v_8$ 的最短路

- $T(v_4)=\min[T(v_4),P(v_3)+l_{34}]=\min[9,4+9]=9$
  $T(v_5)=\min[T(v_5),P(v_3)+l_{35}]=\min[8,6+7]=8$
  比较所有 $T$ 标号，$T(v_5)$ 最小，令 $P(v_5)=8$，并记录路径 $(v_2,v_3)$。
- $T(v_6)=\min[T(v_6),P(v_5)+l_{56}]=\min[+\infty,8+5]=13$
  $T(v_7)=\min[T(v_7),P(v_5)+l_{57}]=\min[+\infty,8+6]=14$
  比较所有 $T$ 标号，$T(v_4)$ 最小，令 $P(v_4)=9$，并记录路径 $(v_2,v_4)$。
- $T(v_6)=\min[T(v_6),P(v_4)+l_{46}]=\min[13,9+9]=13$
  $T(v_7)=\min[T(v_7),P(v_4)+l_{47}]=\min[14,9+7]=14$
  比较所有 $T$ 标号，$T(v_6)$ 最小，令 $P(v_6)=13$，并记录路径 $(v_5,v_6)$。
- $T(v_7)=\min[T(v_6),P(v_6)+l_{67}]=\min[14,13+5]=14$
  $T(v_8)=\min[T(v_8),P(v_6)+l_{68}]=\min[+\infty,13+4]=17$
  比较所有 $T$ 标号，$T(v_7)$ 最小，令 $P(v_7)=14$，并记录路径 $(v_7,v_8)$。
- $T(v_8)=\min[T(v_8),P(v_7)+l_{78}]=\min[17,14+1]=15$
  因为只有一个 $T$ 标号 $T(v_8)$ 最小，令 $P(v_8)=15$, 并记录路径 $(v_7,v_8)$，$v_1$ 到 $v_8$ 之最短路为: $v_1\rightarrow v_2\rightarrow v_5\rightarrow v_7\rightarrow v_8$

# 最短路问题

## Floyd 算法

- 可直接求出网络中任意两点间的最短路。
- 令网路的权矩阵为 $D=(d_{ij})_{n\times n}$，$l_{ij}$ 为 $v_i$ 到 $v_j$ 的距离

$$d_{ij}=\begin{cases} l_{ij} & \text{当}(v_i,v_j)\in E \\ \infty & \text{其他} \end{cases}$$

- 算法基本步骤
  - 输入权矩阵 $D^{(0)}=D$
  - 计算 $D^{(k)}=(d_{ij}^{(k)})_{n\times n}\ (k=1,2,\ldots,n)$，其中 $d_{ij}=\min[d_{ij}^{(k-1)},d_{ik}^{(k-1)}+d_{kj}^{k-1}]$
  - $D^{(n)}=(d_{ij}^{(n)})_{n\times n}$ 中元素 $d_{ij}^{(n)}$ 就是 $v_i$ 到 $v_j$ 的最短路长。

# 最短路问题

## 小结

- Dijkstra 算法
  - 求无负权网络最短路问题的最好方法
  - 指定两点间的最短路
  - 标号法
- Floyd 算法
  - 任意两点间的最短路

*Q&A*

*Thank you!*

感谢您的聆听和反馈