第四章 约束优化算法

修贤超

https://xianchaoxiu.github.io

目录

约束优化问题

- 考虑约束优化问题

$$\begin{aligned} \min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & x \in \mathcal{X} \end{aligned}$$

- 相比于无约束问题的困难
  - x 不能随便取值，梯度下降法所得点不一定在可行域内
  - 最优解处目标函数的梯度不一定为零向量
- 将约束优化问题转化为无约束优化问题处理
  - 罚函数法
  - 增广拉格朗日函数法

等式约束的二次罚函数法

- 考虑仅包含等式约束的约束优化问题

$$
\begin{aligned}
\min_{x} \quad & f(x) \\
\text{s.t.} \quad & c_i(x) = 0, \quad i \in \mathcal{E}
\end{aligned}
$$

- 定义 定义二次罚函数为

$$
P_E(x, \sigma) = f(x) + \frac{1}{2}\sigma \sum_{i\in\mathcal{E}} c_i^2(x)
$$

其中等式右端第二项称为罚函数, $\sigma > 0$ 称为罚因子

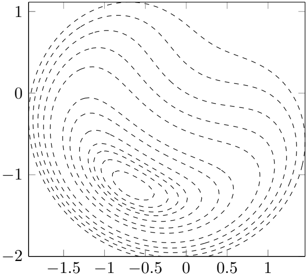
- 对不满足约束的点进行惩罚, 被称为外点罚函数

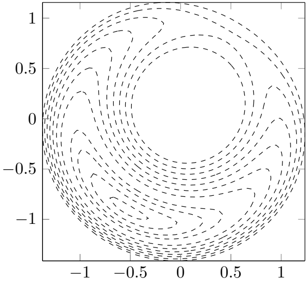
例

- 考虑优化问题

$$
\begin{aligned}
\min \quad & x + \sqrt{3}y \\
\text{s.t.} \quad & x^2 + y^2 = 1
\end{aligned}
$$

- 容易求得最优解为 $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})^\top$
- 考虑二次罚函数 $P_E(x, y, \sigma) = x + \sqrt{3}y + \frac{\sigma}{2}(x^2 + y^2 - 1)^2 \quad (\sigma = 1,\ \sigma = 10)$





例

- 考虑优化问题

$$\begin{aligned} \min \quad & -x^2 + 2y^2 \\ \text{s.t.} \quad & x = 1 \end{aligned}$$

- 容易求得最优解为 $(1,0)^\top$, 然而考虑罚函数

$$P_E(x,y,\sigma) = -x^2 + 2y^2 + \frac{\sigma}{2}(x-1)^2$$

- 对任意的 $\sigma \le 2$, 罚函数无下界

二次罚函数法算法

算法 二次罚函数法

给定 $\sigma_1 > 0, x_0, k \leftarrow 1$. 罚因子增长系数 $\rho > 1$

while 未达到收敛准则 **do**

以 x^k 为初始点，求解 $x^{k+1} = \arg\min_x P_E(x, \sigma_k)$

选取 $\sigma_{k+1} = \rho\sigma_k$

$k \leftarrow k + 1$

end while

===========

- σ_k 增长过快会使子问题求解困难, σ_k 增长过慢则会增加迭代次数
- 检测到迭代点发散就应该立即终止迭代并增大罚因子
- 为保证收敛, 子问题求解误差需要趋于零

收敛性分析

- **定理** 设 x^{k+1} 是 $P_E(x,\sigma_k)$ 的全局极小解, σ_k 单调上升趋于无穷, 则 x^k 的每个极限点 x^* 都是原问题的全局极小解

证明 设 $\bar{x}$ 为原问题的极小解. 由 x^{k+1} 为 $P_E(x,\sigma_k)$ 的极小解, 得 $P_E(x^{k+1},\sigma_k) \leqslant P_E(\bar{x},\sigma_k)$, 即

$$f(x^{k+1}) + \frac{\sigma_k}{2}\sum_{i\in\mathcal{E}} c_i^2(x^{k+1}) \leqslant f(\bar{x}) + \frac{\sigma_k}{2}\sum_{i\in\mathcal{E}} c_i^2(\bar{x}) = f(\bar{x})$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{i\in\mathcal{E}} c_i^2(x^{k+1}) \leqslant \frac{2}{\sigma_k}(f(\bar{x}) - f(x^{k+1}))$$

设 x^* 是 x^k 的一个极限点, 令 $k\to\infty$, 得 $\sum_{i\in\mathcal{E}} c_i^2(x^*) = 0$. 易知 x^* 为原问题的可行解, 又 $f(x^{k+1}) \leqslant f(\bar{x})$, 取极限得 $f(x^*) \leqslant f(\bar{x})$, 故 x^* 为全局极小解

收敛性分析

- **定理** 设 $f(x)$ 与 $c_i(x)$ $(i \in \mathcal{E})$ 连续可微, 正数序列 $\varepsilon_k \to 0$, $\sigma_k \to +\infty$. 子问题的解 x^{k+1} 满足
$$\|\nabla_x P_E(x^{k+1}, \sigma_k)\| \leq \varepsilon_k$$
而对 x^k 的任何极限点 x^*, 都有 $\{\nabla c_i(x^*), i \in \mathcal{E}\}$ 线性无关, 则 x^* 是等式约束最优化问题的 KKT 点, 且
$$\lim_{k\to\infty}(-\sigma_k c_i(x^{k+1})) = \lambda_i^*, \quad \forall i \in \mathcal{E}$$
其中 λ_i^* 是约束 $c_i(x^*) = 0$ 对应的拉格朗日乘子
- 精确求解 $\Rightarrow$ 精度需要越来越高

分析 KKT 条件

- 原问题的 KKT 条件

$$\nabla f(x^*) - \sum_{i \in \mathcal{E}} \lambda_i^* \nabla c_i(x^*) = 0$$
$$c_i(x^*) = 0, \quad \forall i \in \mathcal{E}$$

- 添加罚函数项问题的 KKT 条件

$$\nabla f(x) + \sum_{i \in \mathcal{E}} \sigma c_i(x) \nabla c_i(x) = 0$$

- 假设两个问题收敛到同一点, 对比 KKT 条件式成立

$$\sigma c_i(x) \approx -\lambda_i^*, \quad \forall i \in \mathcal{E}$$

- 为使约束 $c_i(x) = 0$ 成立, 需要 $\sigma \to \infty$

分析数值困难

- 考虑罚函数 $P_E(x,\sigma)$ 的海瑟矩阵

$$\nabla_{xx}^2 P_E(x,\sigma) = \nabla^2 f(x) + \sum_{i\in\mathcal{E}} \sigma c_i(x)\nabla^2 c_i(x) + \sigma \nabla c(x)\nabla c(x)^\top$$

$$\Downarrow$$

$$\nabla_{xx}^2 P_E(x,\sigma) \approx \nabla_{xx}^2 L(x,\lambda^*) + \sigma \nabla c(x)\nabla c(x)^\top$$

- $\nabla_{xx}^2 P_E(x,\sigma)$ 条件数越来越大，子问题的难度也会相应地增加
- 在实际应用中，不可能令罚因子趋于正无穷

一般约束问题的二次罚函数法

- 考虑一般约束问题

$$
\begin{aligned}
\min \quad & f(x) \\
\text{s.t.} \quad & c_i(x) = 0, \quad i \in \mathcal{E} \\
& c_i(x) \leqslant 0, \quad i \in \mathcal{I}
\end{aligned}
$$

- 定义二次罚函数

$$
P(x,\sigma) = f(x) + \frac{1}{2}\sigma \left[\sum_{i\in\mathcal{E}} c_i^2(x) + \sum_{i\in\mathcal{I}} \tilde{c}_i^2(x) \right]
$$

其中 $\tilde{c}_i(x) = \max\{c_i(x), 0\}$

二次罚函数法的优缺点

- **优点**
  - 将约束优化问题转化为无约束优化问题
  - 二次罚函数形式简洁直观广泛使用
- **缺点**
  - 需要 $\sigma \to \infty$，导致海瑟矩阵条件数过大
  - 对于不等式约束的问题可能不存在二次可微性质，光滑性降低
  - 不精确，与原问题最优解存在距离

应用举例: LASSO 问题

- 考虑 LASSO 问题

$$\min_x \quad \frac{1}{2}\|Ax-b\|^2 + \mu\|x\|_1$$

以及基追踪（BP）问题

$$\begin{aligned} \min \quad & \|x\|_1 \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \end{aligned}$$

- 写成二次罚函数法形式

$$\min_x \quad \|x\|_1 + \frac{\sigma}{2}\|Ax-b\|^2$$

- 仅在 μ 趋于 0 时, LASSO 问题的解收敛于 BP 问题的解
- 当 μ 较小时问题病态, 收敛较慢, 可逐渐缩小 μ 的值求解子问题逼近

LASSO 问题罚函数法算法

给定初值 x_0，最终参数 μ，初始参数 μ_0，因子 $\gamma \in (0,1), k \leftarrow 0$

while $\mu_k \geq \mu$ **do**

以 x^k 为初值，求解问题 $x^{k+1} = \arg\min_x \{\frac{1}{2}\|Ax-b\|^2 + \mu_k\|x\|_1\}$

if $\mu_k = \mu$ **then**

停止迭代，输出 x^{k+1}

else

更新罚因子 $\mu_{k+1} = \max\{\mu, \gamma\mu_k\}$

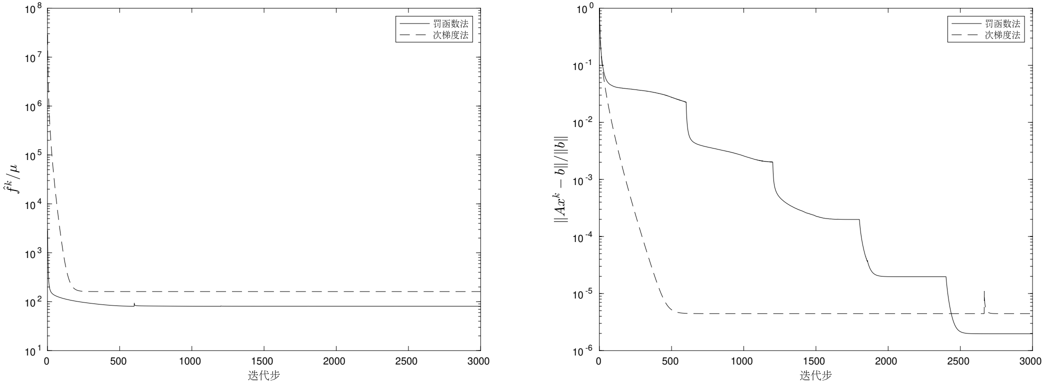
$k \leftarrow k+1$

end if

end while

LASSO 问题——对比罚函数法和次梯度法

- **次梯度法** $\mu = 10^{-3}$
- **罚函数法** $\mu^0 = 10, \gamma = 0.1, \alpha = 0.0002$



其他类型的罚函数法：内点罚函数法

- 考虑不等式约束问题

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & c_i(x) \leqslant 0, \quad i \in \mathcal{I} \end{aligned}$$

- **定义** 定义对数罚函数

$$P_I(x,\sigma) = f(x) - \sigma \sum_{i\in\mathcal{I}} \ln(-c_i(x))$$

- 始终要求自变量 x 不能违反约束，适用于不等式约束优化问题
- 当 x 趋于可行域边界时，$P_I(x,\sigma)$ 会趋于正无穷，这说明对数罚函数的极小值严格位于可行域内部，应调整罚因子 σ 使其趋于 0

对数罚函数法算法

算法　对数罚函数法

```
给定 σ_0 > 0，可行解 x^0，k ← 0. 罚因子缩小系数 ρ ∈ (0,1)
while 未达到收敛准则 do
以 x^k 为初始点，求解 x^{k+1} = argmin_x P_I(x, σ_k)
选取 σ_{k+1} = ρσ_k
k ← k + 1
end while
```

给定 $\sigma_0 > 0$，可行解 x^0，$k \leftarrow 0$. 罚因子缩小系数 $\rho \in (0,1)$

while 未达到收敛准则 **do**

以 x^k 为初始点，求解 $x^{k+1} = \arg\min\limits_x P_I(x, \sigma_k)$

选取 $\sigma_{k+1} = \rho\sigma_k$

$k \leftarrow k+1$

end while

===========

- **初始点 x^0 必须是一个可行点**
- **当 σ 趋于 0 时存在数值困难**
- **常用的收敛准则** $\left|\sigma_k \sum\limits_{i\in\mathcal{I}} \ln(-c_i(x^{k+1}))\right| \le \varepsilon$

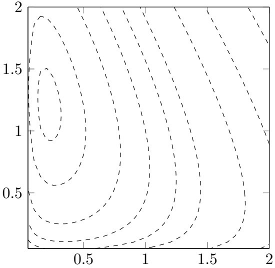
例

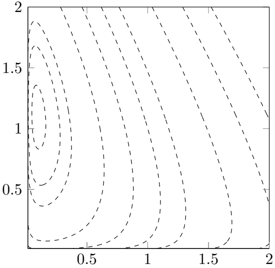
- 考虑优化问题

$$\begin{aligned} \min \quad & x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 2y \\ \text{s.t.} \quad & x \geqslant 0, y \geqslant 0 \end{aligned}$$

- 容易求得最优解为 $(0, 1)$, 考虑对数罚函数 $(\sigma = 1, \sigma = 0.4)$

$$P_I(x, y, \sigma) = x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 2y - \sigma(\ln x + \ln y)$$





其他类型的罚函数法: 精确罚函数法

- 二次罚函数存在数值困难, 并与原问题的解存在误差
- 精确罚函数是一种问题求解时不需要令罚因子趋于正无穷（或零）的罚函数
- 定义 一般约束优化问题的 ℓ_1 罚函数

$$P(x,\sigma) = f(x) + \sigma \left[\sum_{i\in\mathcal{E}} |c_i(x)| + \sum_{i\in\mathcal{I}} \tilde{c}_i(x) \right]$$

- 定理 设 x^* 是一般约束优化问题的一个严格局部极小解, 且满足 KKT 条件, 其对应的拉格朗日乘子为 $\lambda_i^*, i \in \mathcal{E}\cup\mathcal{I}$, 则当罚因子 $\sigma > \sigma^*$ 时, x^* 也为 $P(x,\sigma)$ 的一个局部极小解, 其中

$$\sigma^* = \|\lambda^*\|_\infty \overset{\text{def}}{=} \max_i |\lambda_i^*|$$

精确罚函数法算法

算法 精确罚函数法

给定 $\sigma_1 > 0, x_0, k \leftarrow 1$. 罚因子增长系数 $\rho > 1$
while 未达到收敛准则 **do**
以 x^k 为初始点，求解

$$x^{k+1} = \arg\min_x \{f(x) + \sigma[\sum_{i\in\mathcal{E}} |c_i(x)| + \sum_{i\in\mathcal{I}} \tilde{c}_i(x)]\}$$

选取 $\sigma_{k+1} = \rho\sigma_k$
$k \leftarrow k + 1$
end while

目录

- 4.1 罚函数法
- 4.2 增广拉格朗日函数法

二次罚函数法的数值困难

- 对于等式约束问题

$$\begin{aligned} \min_x \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & c_i(x) = 0, \quad i \in \mathcal{E} \end{aligned}$$

- 二次罚函数

$$\min_x \quad P_E(x,\sigma) = f(x) + \frac{1}{2}\sigma \sum_{i\in\mathcal{E}} c_i^2(x)$$

- 增广拉格朗日函数

$$L_\sigma(x,\lambda) = f(x) + \sum_{i\in\mathcal{E}} \lambda_i c_i(x) + \frac{1}{2}\sigma \sum_{i\in\mathcal{E}} c_i^2(x)$$

等式约束问题的增广拉格朗日函数法

- 在第 k 步迭代, 给定罚因子 σ_k 和乘子 λ^k, 最小值点 x^{k+1} 满足梯度条件

$$\nabla_x L_{\sigma_k}(x^{k+1}, \lambda^k) = \nabla f(x^{k+1}) + \sum_{i\in\mathcal{E}} (\lambda_i^k + \sigma_k c_i(x^{k+1})) \nabla c_i(x^{k+1}) = 0$$

- 对比等式约束问题的 KKT 条件

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i\in\mathcal{E}} \lambda_i^* \nabla c_i(x^*) = 0$$

- 对充分大的 k, 有

$$\lambda_i^* \approx \lambda_i^k + \sigma_k c_i(x^{k+1}) \quad \Rightarrow \quad c_i(x^{k+1}) \approx \frac{1}{\sigma_k}(\lambda_i^* - \lambda_i^k)$$

算法 增广拉格朗日函数法

给定坐标 $x^0 \in \mathbb{R}^n$，乘子 λ^0，罚因子 $\sigma_0 > 0$，约束违反度常数 $\varepsilon > 0$，精度 $\eta_k > 0$，迭代步 $k = 0$

for $k = 0, 1, 2, \cdots$ **do**

以 x^k 为初始点，求解 $\min_x \quad L_{\sigma_k}(x, \lambda^k)$ 得到满足需求的精度条件 $\|\nabla_x L_{\sigma_k}(x, \lambda^k)\| \leqslant \eta_k$ 的解 x^{k+1}

if $\|c(x^{k+1})\| \leqslant \varepsilon$ **then**

返回近似解 (x^{k+1}, λ_k)，终止迭代

end if

更新乘子 $\lambda^{k+1} = \lambda^k + \sigma_k c(x^{k+1})$

更新罚因子 $\sigma_{k+1} = \rho\sigma_k$

end for

ρ 与 σ_k 的取值指导

- 增广拉格朗日函数

$$L_\sigma(x,\lambda) = f(x) + \sum_{i\in\mathcal{E}} \lambda_i c_i(x) + \frac{1}{2}\sigma \sum_{i\in\mathcal{E}} c_i^2(x)$$

- σ_k 不应增长过快
  - 随着 σ_k 的增大，$L_{\sigma_k}(x,\lambda^k)$ 海瑟矩阵的条件数也将增大，导致数值困难
  - σ_k 与 σ_{k+1} 接近时，x^k 可以作为求解 x^{k+1} 的初始点，以加快收敛
- σ_k 不应增长过慢
  - 算法整体的收敛速度将变慢
- 一个经验的取法 $\rho \in [2, 10]$

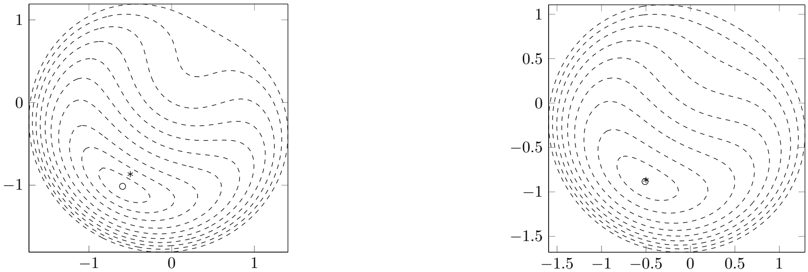
例

- 考虑优化问题

$$\begin{aligned} \min \quad & x + \sqrt{3}y \\ \text{s.t.} \quad & x^2 + y^2 = 1 \end{aligned}$$

- 增广拉格朗日函数（右图）

$$L_\sigma(x, y, \lambda) = x + \sqrt{3}y + \lambda(x^2 + y^2 - 1) + \frac{\sigma}{2}(x^2 + y^2 - 1)^2$$



- **定理** 假设乘子列 $\{\lambda^k\}$ 是有界的, 罚因子 $\sigma_k \to +\infty$, $k \to \infty$, 增广拉格朗日方法中精度 $\eta_k \to 0$, 迭代点列 $\{x^k\}$ 的一个子序列 $\{x^{k_j+1}\}$ 收敛到 x^* , 并且在点 x^* 处 LICQ 成立. 那么存在 λ^*, 满足

$$\lambda^{k_j+1} \to \lambda^*, \quad j \to \infty$$

$$\nabla f(x^*) + \nabla c(x^*)\lambda^* = 0, \quad c(x^*) = 0$$

证明 对于增广拉格朗日函数 $L_{\sigma_k}(x, \lambda^k)$, 有

$$\begin{aligned}
\nabla_x L_{\sigma_k}(x^{k+1}, \lambda^k) &= \nabla f(x^{k+1}) + \nabla c(x^{k+1})(\lambda^k + \sigma_k c(x^{k+1})) \\
&= \nabla f(x^{k+1}) + \nabla c(x^{k+1})\lambda^{k+1} \\
&= \nabla_x L(x^{k+1}, \lambda^{k+1})
\end{aligned}$$

收敛性分析

由于点 x^* 处 LICQ 成立, 故 $\mathrm{rank}(\nabla c(x^{k_j+1})) = |\mathcal{E}|$, 从而成立

$$\lambda^{k_j+1} = (\nabla c(x^{k_j+1})^\top \nabla c(x^{k_j+1}))^{-1} \nabla c(x^{k_j+1})^\top (\nabla_x L_{\sigma_k}(x^{k_j+1}, \lambda^{k_j}) - \nabla f(x^{k_j+1}))$$

因为 $\|\nabla_x L_{\sigma_k}(x^{k_j+1}, \lambda^{k_j})\| \leqslant \eta_{k_j} \to 0$, 有

$$\lambda^{k_j+1} \to \lambda^* \overset{\text{def}}{=} -(\nabla c(x^*)^\top \nabla c(x^*))^{-1} \nabla c(x^*)^\top \nabla f(x^*)$$
$$\nabla_x L(x^*, \lambda^*) = 0$$

而乘子列 $\{\lambda^k\}$ 是有界的, 且 $\lambda^{k_j} + \sigma_{k_j} c(x^{k_j+1}) \to \lambda^*$, 故 $\{\sigma_{k_j} c(x^{k_j+1})\}$ 有界. 又 $\sigma_k \to +\infty$, 则 $c(x^*) = 0$

- **定理** 假设 x^*, λ^* 分别是等式约束优化问题的严格局部极小解和相应的乘子，则存在充分大的常数 $\bar{\sigma} > 0$ 和充分小的常数 $\delta > 0$，如果对某个 k，有

$$\frac{1}{\sigma_k}\|\lambda^k - \lambda^*\| < \delta, \quad \sigma_k \geqslant \bar{\sigma}$$

则

$$\lambda^k \to \lambda^*, \quad x^k \to x^*$$

同时，如果

- $\limsup \sigma_k < +\infty$ 且 $\lambda^k \neq \lambda^*, \forall k$，则 $\{\lambda^k\}$ 收敛的速度是 Q-线性
- $\limsup \sigma_k = +\infty$ 且 $\lambda^k \neq \lambda^*, \forall k$，则 $\{\lambda^k\}$ 收敛的速度是 Q-超线性

- 一般约束优化问题

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & c_i(x) = 0, i \in \mathcal{E} \\ & c_i(x) \leqslant 0, i \in \mathcal{I} \end{aligned}$$

- 引入松弛变量，得到如下等价形式

$$\begin{aligned} \min_{x,s} \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & c_i(x) = 0, i \in \mathcal{E} \\ & c_i(x) + s_i = 0, i \in \mathcal{I} \\ & s_i \geqslant 0, i \in \mathcal{I} \end{aligned}$$

构造增广拉格朗日函数

- **构造拉格朗日函数**

$$L_\sigma(x,s,\lambda,\mu) = f(x) + \sum_{i\in\mathcal{E}} \lambda_i c_i(x) + \sum_{i\in\mathcal{I}} \mu_i(c_i(x)+s_i) + \frac{\sigma}{2} p(x,s)$$

$$s_i \geqslant 0, i \in \mathcal{I}$$

其中

$$p(x,s) = \sum_{i\in\mathcal{E}} c_i^2(x) + \sum_{i\in\mathcal{I}} (c_i(x)+s_i)^2$$

- **投影梯度法**
- **消元法**

凸优化问题的增广拉格朗日函数法

- **考虑凸优化问题**

$$
\begin{aligned}
\min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad & f(x) \\
\text{s.t.} \quad & c_i(x) \leqslant 0, i = 1, 2, \cdots, m
\end{aligned}
$$

- **增广拉格朗日函数**

$$
L_\sigma(x,\lambda) = f(x) + \frac{\sigma}{2}\sum_{i=1}^{m}(\max\{\frac{\lambda_i}{\sigma} + c_i(x), 0\}^2 - \frac{\lambda_i^2}{\sigma^2})
$$

- **给定一列单调递增的乘子** $\sigma_k \uparrow \sigma_\infty$ **和初始乘子** λ^0, **增广拉格朗日函数法为**

$$
\begin{cases}
x^{k+1} \approx \underset{x\in\mathbb{R}^n}{\arg\min} L_{\sigma_k}(x, \lambda^k) \\
\lambda^{k+1} = \max\{0, \lambda^k + \sigma_k c(x^{k+1})\}
\end{cases}
$$

不精确条件

- 为保证收敛性, $\phi_k(x) = L_{\sigma_k}(x, \lambda^k)$ 的近似解至少满足不精确条件. 例如

$$\phi_k(x^{k+1}) - \inf \phi_k \leqslant \frac{\varepsilon_k^2}{2\sigma_k}, \quad \varepsilon_k \geqslant 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < +\infty$$

- 由于 $\inf \phi_k$ 是未知的, 直接验证不可行. 假设 ϕ_k 是 α-强凸函数, 存在

$$\phi_k(x) - \inf \phi_k \leqslant \frac{1}{2\alpha} \operatorname{dist}^2(0, \partial \phi_k(x))$$

- 构造如下数值可验证的不精确条件

$$\operatorname{dist}(0, \partial \phi_k(x^{k+1})) \leqslant \sqrt{\frac{\alpha}{\sigma_k}} \varepsilon_k, \quad \varepsilon_k \geqslant 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < +\infty$$

凸问题的增广拉格朗日函数法的收敛性

- **定理** 假设$\{x^k\},\{\lambda^k\}$ 为生成的序列, x^{k+1} 满足不精确条件. 如果 Slater 约束品性成立, 那么序列 $\{\lambda^k\}$ 是有界序列且收敛到 λ^∞ . 进一步, 如果存在一个 γ, 使得下水平集 $\{x \in \mathcal{X} \mid f(x) \leqslant \gamma\}$ 是非空有界的, 那么序列 $\{x^k\}$ 也是有界的, 并且所有的聚点都是最优解

定理 假设乘子列 $\{\lambda^k\}$ 是有界的，罚因子 $\sigma_k \to +\infty$，$k \to \infty$，增广拉格朗日方法中精度 $\eta_k \to 0$，迭代点列 $\{x^k\}$ 的一个子序列 $\{x^{k_j+1}\}$ 收敛到 x^* ，并且在点 x^* 处 LICQ 成立. 那么存在 λ^*，满足

$$\lambda^{k_j+1} \to \lambda^*, \quad j \to \infty$$

$$\nabla f(x^*) + \nabla c(x^*)\lambda^* = 0, \quad c(x^*) = 0$$

基追踪问题 (BP)

- 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}(m \leqslant n)$, $b \in \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^n$, 基追踪问题被描述为

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad \|x\|_1 \quad \text{s.t.} \quad Ax = b$$

- 考虑其对偶问题

$$\min_{y\in\mathbb{R}^m} \quad b^\top y \quad \text{s.t.} \quad \|A^\top y\|_\infty \leqslant 1$$

$$\Downarrow$$

$$\min_{y\in\mathbb{R}^m,\ s\in\mathbb{R}^n} \quad b^\top y \quad \text{s.t.} \quad A^\top y - s = 0,\ \|s\|_\infty \leqslant 1$$

- 对比原始问题和对偶问题的增广拉格朗日函数法

原始问题的增广拉格朗日函数法

- 引入罚因子 σ 和乘子 λ, 原始问题的增广拉格朗日函数为

$$L_\sigma(x, \lambda) = \|x\|_1 + \lambda^\top (Ax - b) + \frac{\sigma}{2}\|Ax - b\|_2^2$$

- 固定 σ, 第 k 步迭代更新格式

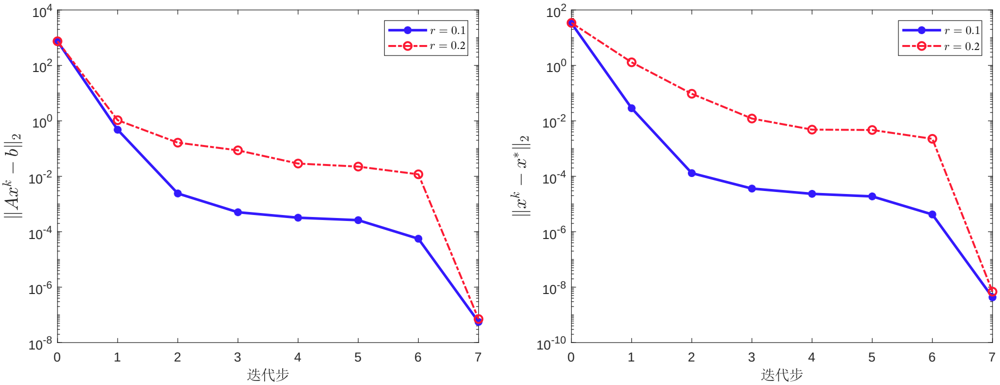
$$\begin{cases} x^{k+1} = \mathop{\arg\min}\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \{\|x\|_1 + \frac{\sigma}{2}\|Ax - b + \frac{\lambda^k}{\sigma}\|_2^2\} \\ \lambda^{k+1} = \lambda^k + \sigma(Ax^{k+1} - b) \end{cases}$$

- 假设 x^{k+1} 为 $L_\sigma(x, \lambda^k)$ 的一个全局极小解, 则

$$0 \in \partial\|x^{k+1}\|_1 + \sigma A^\top (Ax^{k+1} - b + \frac{\lambda^k}{\sigma}) \quad \Rightarrow \quad -A^\top \lambda^{k+1} \in \partial\|x^{k+1}\|_1$$

BP 问题的实例与解

- 考虑 $b = Au$, 其中 $u \in \mathbb{R}^{1024}$ 服从正态分布, 稀疏度 $r = 0.1$ 或 0.2



对偶问题的增广拉格朗日函数法

- **考虑对偶问题**

$$\min_{y\in\mathbb{R}^m, s\in\mathbb{R}^n} \quad b^\top y \quad \text{s.t.} \quad A^\top y - s = 0, \quad \|s\|_\infty \leqslant 1$$

- **引入拉格朗日乘子 λ 和罚因子 σ, 作增广拉格朗日函数**

$$L_\sigma(y,s,\lambda) = b^\top y + \lambda^\top (A^\top y - s) + \frac{\sigma}{2}\|A^\top y - s\|_2^2, \quad \|s\|_\infty \leqslant 1$$

- **增广拉格朗日函数法的迭代格式为**

$$\begin{cases} (y^{k+1}, s^{k+1}) = \mathop{\arg\min}\limits_{y, \|s\|_\infty \leqslant 1} \{ b^\top y + \frac{\sigma_k}{2}\|A^\top y - s + \frac{\lambda}{\sigma_k}\|_2^2 \} \\ \lambda^{k+1} = \lambda^k + \sigma_k (A^\top y^{k+1} - s^{k+1}) \\ \sigma_{k+1} = \min\{\rho\sigma_k, \bar{\sigma}\} \end{cases}$$

消元法求解子问题

- 关于 s 的极小化问题为

$$\min_{s} \quad \frac{\sigma}{2}\|A^\top y - s + \frac{\lambda}{\sigma}\|_2^2 \quad \text{s.t.} \quad \|s\|_\infty \leqslant 1$$

- 问题的解为

$$s = \mathcal{P}_{\|s\|_\infty \leqslant 1}(A^\top y + \frac{\lambda}{\sigma})$$

其中 $\mathcal{P}_{\|s\|_\infty \leqslant 1}(z)$ 为集合 $\{s \mid \|s\|_\infty \leqslant 1\}$ 的投影算子, 即

$$\mathcal{P}_{\|s\|_\infty \leqslant 1}(z) = \max\{\min\{z,\ 1\},\ -1\}$$

消元法求解子问题

- 将上述 s 的表达式代入的增广拉格朗日函数法的迭代格式, 得

$$\begin{cases} (y^{k+1}, s^{k+1}) = \mathop{\arg\min}\limits_{y, \|s\|_\infty \leqslant 1} \{ b^\top y + \dfrac{\sigma_k}{2} \| A^\top y - s + \dfrac{\lambda}{\sigma_k} \|_2^2 \} \\ \qquad\quad \lambda^{k+1} = \lambda^k + \sigma_k (A^\top y^{k+1} - s^{k+1}) \\ \qquad\quad \sigma_{k+1} = \min\{\rho\sigma_k, \bar{\sigma}\} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} y^{k+1} = \mathop{\arg\min}\limits_{y} \{ b^\top y + \frac{\sigma}{2} \| \psi(A^\top y + \frac{\lambda}{\sigma}) \|_2^2 \} \\ \lambda^{k+1} = \sigma_k \psi(A^\top y^{k+1} + \frac{\lambda^k}{\sigma_k}) \\ \sigma_{k+1} = \min\{\rho\sigma_k, \bar{\sigma}\} \end{cases}$$

其中 $\psi(x) = \operatorname{sign}(x) \max\{|x| - 1, 0\}$

Q&A

Thank you!

感谢您的聆听和反馈