

第 1 章

場の量子論の基礎

1.1 背景時空の対称性

時間を 1 次元、空間を $(d-1)$ 次元であるとして、線素を

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.1)$$

とする。ただしミンコフスキー計量は時間をマイナス、空間をプラスとする。

座標の線形空間

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \quad (1.6)$$

を考える。これが線素の長さを変えないような変換である条件は

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu &= \eta_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu \\ &= \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma dx^\rho dx^\sigma \end{aligned}$$

より

$$\eta_{\rho\sigma} = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma \quad (1.7)$$

であればよい。このような変換をローレンツ変換という。またローレンツ変換は群をなし、この群をローレンツ群という。

そして線素は並進変換

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + a^\mu \quad (1.8)$$

に対しても不変である。というのも微分をとると a^μ はなくなるためである。この並進変換とローレンツ変換を合わせた全体の変換は群をなし、ポアンカレ群と呼ばれる。

時間だけ計量がマイナスであることを嫌って、代わりに時間の成分に $t \rightarrow \tau = it$ として虚数を入れることがある。こうすると計量はユークリッド空間と同じクロネッカーのデルタとなる。

ユークリッド化した計量テンソルのもとでは、ローレンツ変換は直交変換と同じものになっている。 d 次元の直交変換のなす群を $O(d)$ と書く。また、リー群を考える。直交変換群の単位元の近傍にある無限小変換から生成される群は、固有値が変わらないことから、直交群から鏡映変換を除いたような変換からなる群となる。これを特殊直交群 $SO(d)$ と書かれる。

ユークリッド計量だけではなく、もとのような計量におけるローレンツ変換を分類してみる。時間成分の -1 が p 個で、空間成分の $+1$ が q 個あるような計量 $\eta_{\mu\nu}$ における、無限小変換が生成する変換群 $SO(p, q)$ と書く。

ユークリッド計量の時に、次元が $d = 2n$ のときには

$$z^a = x^{2a-1} + ix^{2a}, \quad \bar{z} = x^{2a} - ix^{2a-1} \quad (1.11)$$

というように複素座標を導入することができる。このとき、

$$\begin{aligned} dz^a d\bar{z}^a &= (dx^{2a-1} + idx^{2a})(dx^{2a-1} - idx^{2a}) \\ &= (dx^{2a-1})^2 + (dx^{2a})^2 \end{aligned}$$

より

$$ds^2 = \delta_{ab} dz^a d\bar{z}^b \quad (1.12)$$

とできる。

ここで、 z のみ (あるいは \bar{z}) のみを混ぜる線形変換

$$z^a = M_b^a z^b, \quad \bar{z}^{\bar{a}} = (M_b^a)^* \bar{z}^{\bar{b}} \quad (1.13)$$

を考える。

ローレンツ変換が長さを変えない条件を考えたのと同様にして

$$\delta_{ab} M_c^a (M_d^b)^* = \delta_{bd} \quad (1.14)$$

というのがわかる。同じように考えて、 M_b^a という変換をなす群全体はユニタリ群 $U(n)$ を成している。そして、 M_b^a の行列式が 1 を満たすような変換全体の群を特殊ユニタリ群 ($SU(n)$) をなす。

1.2 相関関数の経路積分表示

場の理論では、背景時空上の点 x ごとに異なる値をとる場 $\phi(x)$ が基本要素となっている。これらの場を量子化することで場の量子論が構成される。量子化の方法としては場の交換関係を導入する量子化と、量子状態の遷移を系のラグランジアンから導かれる作用を使って記述する経路積分量子化がある。^{*1}両者は同じ答えを与えると考えられている。^{*2}

経路積分量子化では場の相関関数というのが大事になってくる。背景時空上の n 点上の場の相関関数は

$$\langle \phi(x_1) \phi(x_2) \cdots \phi(x_n) \rangle \quad (1.16)$$

と書かれる。これがどういったものなのかをざっと見ていく。

経路積分

量子力学では位置演算子 \hat{q} と運動量演算子 \hat{p} の間には正準交換関係

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i \quad (1.17)$$

を満たすとしている。^{*3}場の量子論へ拡張するにはハイゼンベルグ描像

$$\hat{q}(t) = \exp(i\hat{H}t) \hat{q} \exp(-i\hat{H}t) \quad (1.18)$$

にして、演算子に時間依存するようにするとよい。^{*4} 量子力学における重要な物理量として遷移確率がある。時刻 t_i に位置 q_i あった粒子が、時刻 t_f に位置 q_f へと遷移する確率は

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = \langle q_f | \exp[-i\hat{H}(t_f - t_i)] | q_i \rangle \quad (1.21)$$

で与えられる。ここで、時間間隔を N 等分して

$$t_m = t_i + m\Delta t, \quad \Delta t = \frac{t_f - t_i}{N} \quad (1.22)$$

と定義すると遷移確率は

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = \int dq_{N-1} dq_{N-2} \cdots dq_1 \langle q_N, t_N | q_{N-1}, t_{N-1} \rangle \langle q_{N-1}, t_{N-1} | q_{N-2}, t_{N-2} \rangle \cdots \langle q_2, t_2 | q_1, t_1 \rangle \quad (1.23)$$

となる。

積分の中の 1 つのブラケットの中身をこのように書き換えよう

$$\begin{aligned} \langle q_{m+1}, t_{m+1} | q_m, t_m \rangle &= \langle q_{m+1}, t_{m+1} | \exp(-i\hat{H}\Delta t) | q_m, t_m \rangle \\ &= \int dp_m \langle q_{m+1}, t_{m+1} | p_m \rangle \langle p_m | \exp(-i\hat{H}\Delta t) | q_m, t_m \rangle \end{aligned} \quad (1.24)$$

^{*1} 経路積分を知らないのでは間違ってるかもしれない。

^{*2} 証明がない感じ？

^{*3} 面倒なので $\hbar = 1$ としている。

^{*4} ハイゼンベルグ描像でいいのかな。相互作用表示だったりしない？

ここで、

$$\langle p_m | \exp(-i\hat{H}\Delta t) | q_m, t_m \rangle = \langle p_m | q_m \rangle - i \langle p_m | \hat{H} | q_m \rangle \Delta t \quad (1.25)$$

でありそして、

$$\begin{aligned} \langle p_m | \hat{H}(\hat{p}, \hat{q}) | q_m \rangle &= H(p_m, q_m) \langle p_m | q_m \rangle \\ \langle q_n | p_m \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp^{ip_n q_m} \end{aligned} \quad (1.26)$$

であるので

$$\begin{aligned} \int dp_m \langle q_{m+1}, t_{m+1} | p_m \rangle \langle p_m | \exp(-i\hat{H}\Delta t) | q_m, t_m \rangle &= \int dp_m \exp(-iH(p_m, q_m)\Delta t) \langle q_{m+1}, t_{m+1} | p_m \rangle \\ &\simeq \int \frac{dp_m}{2\pi} \exp[i p_m (q_{m+1} - q_m) - iH(p_m, q_m)\Delta t] \\ &= \int \frac{dp_m}{2\pi} \exp\left[i \left\{ p_m \frac{q_{m+1} - q_m}{\Delta t} - H(p_m, q_m) \right\} \Delta t\right] \end{aligned} \quad (1.27)$$

よって遷移確率は $N \rightarrow \infty$ として

$$\begin{aligned} \langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \left[\prod_{m=1}^{N-1} \frac{dp_m dq_m}{2\pi} \right] \frac{dp_0}{2\pi} \exp\left[i \left\{ \sum_{m=0}^{N-1} \left(p_m \frac{q_{m+1} - q_m}{\Delta t} - H(p_m, q_m) \right) \Delta t \right\}\right] \\ &= \int [dp dq] \exp\left[i \int_{t_i}^{t_f} dt (p\dot{q} - H(p, q))\right] \end{aligned} \quad (1.28)$$

$[dp dq]$ は積分の測度である。ここでハミルトニアンが

$$\hat{H}(\hat{p}, \hat{q}) = \frac{1}{2}\hat{p}^2 + V(\hat{q}) \quad (1.29)$$

で与えられるとする。こうすると遷移確率は

$$\begin{aligned} \int [dp dq] \exp\left[i \int_{t_i}^{t_f} dt (p\dot{q} - \frac{1}{2}p^2 - V(q))\right] &= \int [dp dq] \exp\left[i \int_{t_i}^{t_f} dt \left\{ -\frac{1}{2}(p - \dot{q})^2 + \frac{1}{2}\dot{q}^2 - V(q) \right\}\right] \\ &= \int [dq] \exp\left[i \int_{t_i}^{t_f} dt \left\{ \frac{1}{2}\dot{q}^2 - V(q) \right\}\right] \\ &= \int [dq] \exp\left[i \int_{t_i}^{t_f} dt L(q, \dot{q})\right] \end{aligned} \quad (1.30)$$

というようにラグランジアンを用いて表せる。さらに作用

$$S = \int dt L(q, \dot{q}) \quad (1.31)$$

を導入すると

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = \int [dq] e^{iS}$$

というようにあらわせる。

時間順序積

さらにある時刻 $t_f > t > t_i$ に $q(t)$ を挿入した経路積分を考えてみよう。この経路積分は

$$\int [dq] q(t) \exp\left[i \int_{t_i}^{t_f} dt L(q, \dot{q})\right] = \int dq \int [dq]' \exp\left[i \int_t^{t_f} dt L(q, \dot{q})\right] q \exp\left[i \int_{t_i}^t dt L(q, \dot{q})\right] \quad (1.32)$$

と表せる。 $[dq]'$ は時刻 t での q 積分を取り除いた測度。この式自体は何をしている式かというと、 $\langle \hat{q}(t) \rangle$ を求めている。またこの表式は

$$\begin{aligned} \int [dq] q(t) \exp\left[i \int_{t_i}^{t_f} dt L(q, \dot{q})\right] &= \int dq \langle q_f, t_f | q_t, t \rangle q \langle q, t | q_i, t_i \rangle \\ &= \int dq \langle q_f, t_f | q(t) | q_t, t \rangle \langle q, t | q_i, t_i \rangle \\ &= \int dq \langle q_f, t_f | \hat{q}(t) | q_t, t \rangle \langle q, t | q_i, t_i \rangle \\ &= \langle q_f, t_f | \hat{q}(t) | q_i, t_i \rangle \end{aligned} \quad (1.33)$$

というように演算子 $\hat{q}(t)$ の挿入と同等になる。同様にして $q(t)q(t')$, $(t_f > t, t' > t_i)$ という積を経路積分に入れる。すると、自動的に時間順序に並ぶので

$$\int [dq] q(t)q(t') \exp \left[i \int_{t_i}^{t_f} dt L(q, \dot{q}) \right] = \langle q_f, t_f | T[\hat{q}(t), \hat{q}(t')] | q_i, t_i \rangle \quad (1.34)$$

$$T[\hat{A}(t), \hat{B}(t')] = \begin{cases} \hat{A}(t)\hat{B}(t') & (t > t') \\ \hat{B}(t')\hat{A}(t) & (t' > t) \end{cases} \quad (1.35)$$

となる。 $T[\hat{A}(t), \hat{B}(t')]$ を時間順序積という。

虚時間形式と真空振幅

次に $t \rightarrow \tau = it$ のようにユークリッド化した場合を考えてみよう。エネルギー固有値を

$$\hat{H} |n\rangle = E_n |n\rangle \quad (1.36)$$

とする。遷移確率は

$$\begin{aligned} \langle q_f, t_f | q, t \rangle &= \langle q_f | \exp[-i\hat{H}t_f] | q_i, t \rangle \\ &= \sum_n \langle q_f | n \rangle \exp[-iE_n t_f] \langle n | q_i, t \rangle \\ &= \sum_n \langle q_f | n \rangle \exp[-E_n \tau_f] \langle n | q_i, t \rangle \end{aligned} \quad (1.37)$$

ここで $\tau_f \rightarrow \infty$ とすると、エネルギーの最も小さい基底状態 $|0\rangle$ のみが残ると考えられる。したがって

$$\begin{aligned} \langle q_f, t_f | q, t \rangle &= \exp(-E_0 \tau_f) \langle q_f | 0 \rangle \langle 0 | q, t \rangle \\ &= \exp(-E_0(\tau_f - \tau)) \langle q_f | 0 \rangle \langle 0 | q \rangle \end{aligned} \quad (1.38)$$

となる。なんだかきれいになりそうなので、(1.34) 式の初期状態の時刻を無限の過去、終状態の時刻を無限の未来にして、 n 点の時刻における位置の積を考えてみると

$$\begin{aligned} \langle q_f, t_f | T[\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)\cdots\hat{q}(t_n)] | q_i, t_i \rangle &= \int dq dq' \langle q_f, t_f | q, t \rangle T[\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)\cdots\hat{q}(t_n)] \langle q', t | q_i, t_i \rangle \\ &= \int dq dq' \langle q_f, t_f | \exp[-i\hat{H}(t_f - t)] | q \rangle \langle q | T[\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)\cdots\hat{q}(t_n)] | q' \rangle \langle q' | \exp[-i\hat{H}(t - t_i)] | q_i, t_i \rangle \\ &\rightarrow \exp(-E_0(\tau_f - \tau_i)) \langle q_f | 0 \rangle \langle 0 | T[\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)\cdots\hat{q}(t_n)] | 0 \rangle \langle 0 | q_i \rangle \\ &= \langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle \langle 0 | T[\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)\cdots\hat{q}(t_n)] | 0 \rangle \end{aligned} \quad (1.39)$$

相関関数は $\langle q_f, t_f | T[\hat{q}(t_1)\cdots\hat{q}(t_n)] | q_t, t \rangle / \langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle$ のことであるので、 n 点の相関関数は経路積分の言葉では

$$\begin{aligned} \langle 0 | T[\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)\cdots\hat{q}(t_n)] | 0 \rangle &= \lim_{(\tau_f, \tau_i) \rightarrow (\infty, -\infty)} \left[\frac{\langle q_f, t_f | T[\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)\cdots\hat{q}(t_n)] | q_i, t_i \rangle}{\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle} \right] \\ &= \frac{\int [dq] q(t_1)q(t_2)\cdots q(t_n) \exp(-S_E(q, \dot{q}))}{\int [dq] \exp(-S_E(q, \dot{q}))} \end{aligned} \quad (1.40)$$

のように各位置の時間順序積をエネルギー基底状態で挟みこむことであらわせることがわかる。ここで、ユークリッド化した作用とラグランジアン

$$S_E := \int d\tau L_E(q, \partial_\tau q) = - \int d\tau L(q, i\partial_\tau q) = iS \quad (1.41)$$

を使った。

柏太郎『経路積分』[?]によると、この式は経路積分の歴史的には結構大事ならしい。というのも1960年代の人たちは解析力学の作用停留の原理からくる式ではあるので正しいと感じはしていたが、量子論なのに演算子の非可換性や基底状態といったものがあり露わになっていないというので、経路積分を信用しきれていなかった。ただこの表式を見ると、 n 点相関関数というのは基底状態の位置の期待値のような式になっている。つまり、ちゃんと基底状態というのあるというのがわか

るので少し安心したようである。ここら辺のアイデアはファインマンではなく 1971 に韓国の方 による経路積分のレビューで触れられたらしい。

場の量子論への拡張は q のみの 1 自由度系から q^a の多自由度系へと移り、添え字 a として、各点の空間座標 x^j をとればよい。経路積分の測度は

$$\prod_a [dq^a] = \prod_a \prod_\tau dq^a(\tau) \rightarrow [d\phi] = \prod_{x^j} \prod_\tau d\phi(x^j, \tau) \quad (1.42)$$

となる。したがって、場の理論での相関関数は

$$\langle \phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n) \rangle = \frac{1}{Z} \int [d\phi] \phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n) \exp(-S(\phi)) \quad (1.43)$$

$$Z = \int [d\phi] \exp(-S(\phi)) \quad (1.44)$$

となる。この Z は真空振幅とも、分配関数とも呼ばれる。

1.3 作用と対称性

場を考えるとときにはラグランジアンではなく、ラグランジアン密度を使うとよい。そうしたときの作用は

$$S = \int d^d x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \quad (1.45)$$

のように書ける。この節では古典的な議論がしやすいように虚時間形式は使わない。なので相関関数を計算するときには e^{iS} の重みで計算するとよい。

物理の要請として、実現する運動は作用が停留するという条件がある。なので作用の変分をとると

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^d x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta(\partial_\mu \phi) \right] \\ &= \int d^d x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right] \delta \phi \end{aligned} \quad (1.46)$$

よりオイラーラグランジュ方程式

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) = 0 \quad (1.47)$$

が得られる。

ネーターカレントの導出 (不正確)

古典的には運動方程式を不変に保つ場の変形を対称性と呼ぶ。無限小パラメータ ϵ^a と変換の生成子 G_a を導入して場の無限小変換を書くと

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(x) + \epsilon^a G_a \phi(x). \quad (1.48)$$

つまり

$$\delta \phi = \epsilon^a G_a \phi$$

というのを作用の変分の式に入れることになる。なので

$$\begin{aligned} \delta S &= \epsilon^a \int d^d x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} G_a \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\mu (G_a \phi) \right] \\ &= \epsilon^a \int d^d x \left[\left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) \right\} G_a \phi + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} G_a \phi \right) \right] \end{aligned} \quad (1.49)$$

場が運動方程式を満たす on-shell 条件のもとでは、一番右にある項は 0 になる。

$$j_a^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} G_a \phi \quad (1.50)$$

という量を定義すると、

$$\partial_\mu j_a^\mu = 0 \quad (1.51)$$

となる。これの第 0 成分を時間成分を取り除いた空間成分で積分した量

$$Q_a = \int d^{d-1}x j_a^0 \quad (1.52)$$

を”電荷”と呼ぶ。これは次のようにして保存量だとわかる。

$$\frac{dQ_a}{dt} = \int d^{d-1}x \partial_0 j_a^0 = - \int d^{d-1}x \partial x^i j_a^i = - \int_{\partial} d^d x j_a^i = 0 \quad (1.53)$$

このように無限小変換に対して不変性があるときには保存量が存在するのがわかる。これをネーターの定理といい、その”電荷”密度と流れをまとめてネーターカレントという。

ネーターカレントの導出 (ちょっとはまし)

座標と場がそれぞれ独立に

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu - \delta x^\mu(x), \quad \phi'(x') = \phi(x) + \delta\phi(x)$$

というように変化するときのラグランジアン密度の変換を追ってみる。

$$\mathcal{L}(\phi'(x), \partial'_\mu \phi'(x)) = \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta(\partial_\mu \phi)$$

そして、

$$\begin{aligned} \partial'_\mu \phi'(x) &= \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \partial_\nu \phi'(x) = (\delta_\mu^\nu + \partial_\mu \delta x^\nu) \partial_\nu (\phi(x) + \delta\phi) \\ &\rightarrow \delta(\partial_\mu \phi) = \partial_\mu \delta\phi + (\partial_\mu \delta x^\nu) \partial_\nu \phi \end{aligned}$$

よって

$$\mathcal{L}(\phi'(x), \partial'_\mu \phi'(x)) = \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} (\partial_\mu \delta\phi + (\partial_\mu \delta x^\nu) \partial_\nu \phi)$$

さらに積分測度の変換

$$d^d x' = \det\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right) = (1 - \partial_\mu \delta x^\mu) d^d x$$

も考慮して、これらより作用の変分は

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^d x' \mathcal{L}(\phi'(x'), \partial'_\mu \phi'(x')) - \int d^d x \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) \\ &= \int d^d x \left[(1 - \partial_\mu \delta x^\mu) \left\{ \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} (\partial_\mu \delta\phi + (\partial_\mu \delta x^\nu) \partial_\nu \phi) \right\} - \mathcal{L} \right] \\ &= \int d^d x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \{ \partial_\mu \delta\phi + (\partial_\mu \delta x^\nu) (\partial_\nu \phi) \} - \mathcal{L}(\partial_\mu \delta x^\mu) \right] \\ &= \int d^d x \left[\partial_\mu \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \underbrace{(\delta\phi + \delta x^\nu \partial_\nu \phi)}_{\text{Lie 微分 } \bar{\delta}\phi} - \mathcal{L} \delta x^\mu \right\} + \underbrace{\left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right\}}_{\delta \mathcal{L} / \delta \phi} \delta\phi - \delta x^\nu \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} (\partial_\nu \phi) \right) + \delta x^\mu \partial_\mu \mathcal{L} \right] \end{aligned}$$

となる。下線の Lie 微分は

$$\bar{\delta}\phi(x) := \phi'(x) - \phi(x) = \phi(x + \delta x) + \delta\phi(x + \delta x) - \phi(x) = \delta\phi(x) + \delta x^\nu \partial_\nu \phi(x)$$

であり、ラグランジアン密度の変分はオイラーラグランジュ方程式のことであることを使った。あんまり想像できないが、ラグランジアンが座標に陽に依存しているときには

$$\partial_\mu \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \partial_\mu \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi)} \partial_\mu \partial_\nu \phi + \hat{\partial}_\mu \mathcal{L}$$

というように書ける。ここで $\hat{\partial}_\mu$ はラグランジアンが座標に陽に依存する部分を微分するものである。よって作用の変分は

$$\delta S = \int d^d x \left[\partial_\mu \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \bar{\delta}\phi - \mathcal{L} \delta x^\mu \right\} + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} \bar{\delta}\phi + \hat{\partial}_\mu \mathcal{L} \delta x^\mu \right]$$

場がオイラーラグランジュ方程式を満たす on-shell 条件かつ、ラグランジアンが座標に陽に依存しないとき、作用の変分は

$$\delta S = \int d^d x \left[\partial_\mu \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \bar{\delta} \phi - \mathcal{L} \delta x^\mu \right\} \right]$$

となる。これが 0 となるには

$$0 = \partial_\mu \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \bar{\delta} \phi - \mathcal{L} \delta x^\mu \right\} =: \epsilon \partial_\mu j^\mu$$

というようになる。ここでの ϵ は変分の微小パラメータのイメージ。この j^μ をネーターカレントといい、Lie 微分を書き下して、外微分の性質による自由度を加えると

$$\epsilon j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta \phi + \delta x^\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi - \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \right) + \partial_\nu \frac{B^{\mu\nu}}{\text{反対称}} \quad (1.A)$$

というようになる。スカラー場でないような座標変換とともに場も変化するときには、余った反対称テンソルの成分を使って場の変換を打ち消したりするらしい。

座標変換による変化を見るとき、座標はそのまま場自体が変わる能動変換では $\delta \phi$ のみが変わり、場は動かさず座標が変わる受動変換では δx のみが変わる。教科書ではこの両者を混ぜて使っているので混乱の原因になっている。(1.50) 式の指しているネーターカレントは座標系が変わらず場のみが変化している状況である。本文もそのように書いているが (1.57) 式では座標系のみが変化したときのネーターカレントとなっている。この描像の切り替わりについて説明すればよいものを、スカラー場の変換を扱うと言ってごまかしているのだ。

例 1: 並進対称性

スカラー場が並進対称性つまり、座標を

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu - \epsilon^\mu \quad (1.54)$$

というように動かしても、物理が変わらないという対称性を考える。このときスカラー場は

$$\phi'(x') = \phi(x)$$

と変化する。もとの座標 x におけるスカラー場の値は

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(x + \epsilon) = \phi(x) + \epsilon^\mu \partial_\mu \phi(x) \quad (1.55)$$

というように書くことができる (Lie 微分)。それとは関係なくネーターカレントの式 (1.A) に $\delta \phi = 0$, $\delta x^\nu = \epsilon^\nu$ を入れてやる。このとき、微小パラメータは 1 成分だけでなく各方向ごとにあるので

$$\epsilon^\mu j^\nu = T^{\mu\nu}$$

のようにネーターカレントの足が増えるので、

$$T^\mu{}_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi - \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \quad (1.56)$$

となる。この保存カレントはエネルギー運動量テンソルと呼ばれる。それぞれの対応する保存電荷は

$$H = \int d^{d-1} x T^{00} \quad (1.57)$$

$$P^j = \int d^{d-1} x T^{0j} \quad (1.58)$$

となる。これらがハミルトニアンと運動量である。

例 2: 回転対称性

回転を表す無限小回転

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu - \epsilon^{\mu\nu} x_\nu$$

とスカラー場を考える。このときのネーターカレントは (1.A) 式より

$$\epsilon j^\mu = \epsilon^{\nu\rho} x_\rho \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi)} (\partial_\nu \phi) - \delta^\mu_\nu \mathcal{L} \right) = \epsilon^{\nu\rho} x_\rho T^\mu_\nu = \frac{1}{2} \epsilon^{\nu\rho} (x_\rho T^\mu_\nu - x_\nu T^\mu_\rho)$$

回転の無限小パラメータは $\epsilon^{\mu\nu}/2$ のようにとる習わしであるので回転変換に対するネーターカレントは

$$j^\mu_{\nu\rho} = x_\rho T^\mu_\nu - x_\nu T^\mu_\rho$$

となる。ここで試しに触ってみたように座標系のみが変換するといったときにはエネルギー運動量テンソルが現れることがわかる。共形場理論においてこのエネルギー運動量テンソルは大事な量なのだ。

1.4 相関関数と対称性

量子論における相関関数 $\langle \phi(x_1) \phi(x_2) \cdots \phi(x_n) \rangle$ に関する対称性を考える。

ユークリッド背景の下での相関関数は、経路積分の言葉では (1.43) のようにあらわすことができる。場 $\phi(x)$ と結合する外場 $J(x)$ を導入して、生成汎関数

$$Z[J] = \int [d\phi] \exp \left[-S(\phi) + \int d^d x J(x) \phi(x) \right] \quad (1.60)$$

を定義する。すると相関関数は汎関数微分を用いて

$$\langle \phi(x_1) \phi(x_2) \cdots \phi(x_n) \rangle = \frac{1}{Z[0]} \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \frac{\delta}{\delta J(x_2)} \cdots \frac{\delta}{\delta J(x_n)} Z[J] \Big|_{J=0} \quad (1.61)$$

で表すことができる。実際

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z[0]} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x_i)} \Big|_{J=0} &= \frac{1}{Z[0]} \int [d\phi(x)] \exp[-S(\phi)] \frac{\delta}{\delta J(x_i)} \exp \left[\int d^d x J(x) \phi(x) \right] \Big|_{J=0} \\ &= \frac{1}{Z[0]} \int [d\phi(x)] \exp[-S(\phi)] \exp \left[\int d^d x J(x) \phi(x) \right] \frac{\delta}{\delta J(x_i)} J(x) \phi(x) \Big|_{J=0} \\ &= \frac{1}{Z[0]} \int [d\phi] \phi(x_i) \exp \left[-S(\phi) + \int d^d x J(x) \phi(x) \right] \Big|_{J=0} \\ &= \frac{1}{Z[0]} \int [d\phi] \phi(x_i) \exp[-S(\phi)] \\ &= \langle \phi(x_i) \rangle \end{aligned}$$

というようにわかる。

例：自由スカラー場

作用を

$$S = \frac{1}{2} g \int d^d x (\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - m^2 \phi^2) \quad (1.62)$$

とする。^{*5} この時の生成汎関数は

$$\begin{aligned} Z[J] &= \int [d\phi] \exp \left[-\frac{1}{2} \int d^d x d^d y \phi(x) K(x, y) \phi(y) + \int d^d x J(x) \phi(x) \right] \\ K(x, y) &= g \delta(x - y) (-\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \end{aligned} \quad (1.63)$$

と書ける。

ここ多変数のガウス積分の公式

$$\begin{aligned} \int d^m \phi \exp \left[-\frac{1}{2} \phi_p K^{pq} \phi_q + J^p \phi_p \right] &= \int d^m \phi \exp \left[-\frac{1}{2} (\phi - J)_p K^{pq} (\phi - J)_q \right] \exp \left[\frac{1}{2} J^p (K^{-1})_{pq} J^q \right] \\ &\quad \underbrace{\int d^m \phi \exp \left[-\frac{1}{2} (\phi - J)_p K^{pq} (\phi - J)_q \right]}_{J=0 \text{ のときの積分と同じ}} \\ &= \sqrt{\frac{(2\pi)^n}{\det a}} \exp \left[\frac{1}{2} J^p (K^{-1})_{pq} J^q \right] \end{aligned} \quad (1.66)$$

^{*5} 本文だと $+m$ になっているが誤植

を参考にすると積分することができる。最後に出た K^{-1} というのは演算子 $K(x, y)$ に対する逆操作、つまりグリーン関数のことである。定義としては

$$\int d^d z K(x, z) K^{-1}(z, y) = \delta(x - y) \quad (1.71)$$

である。

よって

$$Z[J] = Z[0] \exp \left[\frac{1}{2} \int d^d x d^d y J(x) K^{-1}(x, y) J(y) \right] \quad (1.67)$$

と書ける。

この式を見ると、自由スカラー場において汎関数微分を奇数回行くと $J(x)$ の項が残ってしまうため、最後に $J(x) = 0$ する際に消えてしまうのがわかる。よって

$$\langle \phi(x_1) \phi(x_2) \cdots \phi(x_{2n-1}) \rangle = 0 \quad (1.68)$$

となる。偶数回やったときには値が残る。試しに 2 点相関関数を求めてみる。

$$\begin{aligned} & \langle \phi(x_1) \phi(x_2) \rangle \\ &= \frac{1}{Z[0]} \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \frac{\delta}{\delta J(x_2)} Z[J] \Big|_{J=0} \\ &= \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \left\{ \exp \left[\frac{1}{2} \int d^d x d^d y J(x) K^{-1}(x, y) J(y) \right] \left(\frac{1}{2} \int d^d x J(x) K^{-1}(x, x_2) + K^{-1}(x_2, x) J(x) \right) \right\} \Big|_{J=0} \\ &= \exp \left[\frac{1}{2} \int d^d x d^d y J(x) K^{-1}(x, y) J(y) \right] \\ & \quad \left(\frac{1}{2} \int d^d x J(x) K^{-1}(x, x_2) + K^{-1}(x_2, x) J(x) \right) \left(\frac{1}{2} \int d^d x J(x) K^{-1}(x, x_1) + K^{-1}(x_1, x) J(x) \right) \Big|_{J=0} \\ & \quad + \frac{1}{2} \exp \left[\frac{1}{2} \int d^d x d^d y J(x) K^{-1}(x, y) J(y) \right] (K^{-1}(x_1, x_2) + K^{-1}(x_2, x_1)) \Big|_{J=0} \\ &= \frac{1}{2} (K^{-1}(x_1, x_2) + K^{-1}(x_2, x_1)) \\ &= K^{-1}(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (1.70)$$

というように計算できる。では 4 点相関関数とはいうと、上にある計算結果を途中まで使うことができ、

$$\begin{aligned} & \langle \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) \phi(x_4) \rangle \\ &= \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \frac{\delta}{\delta J(x_2)} \left\{ \exp \left[\frac{1}{2} \int d^d x d^d y J(x) K^{-1}(x, y) J(y) \right] \right. \\ & \quad \left(\frac{1}{2} \int d^d x J(x) K^{-1}(x, x_4) + K^{-1}(x_4, x) J(x) \right) \left(\frac{1}{2} \int d^d x J(x) K^{-1}(x, x_3) + K^{-1}(x_3, x) J(x) \right) \Big|_{J=0} \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} \exp \left[\frac{1}{2} \int d^d x d^d y J(x) K^{-1}(x, y) J(y) \right] (K^{-1}(x_3, x_4) + K^{-1}(x_4, x_3)) \Big|_{J=0} \right\} \\ &= K^{-1}(x_2, x_4) K^{-1}(x_1, x_3) + K^{-1}(x_1, x_4) K^{-1}(x_2, x_3) + K^{-1}(x_1, x_2) K^{-1}(x_3, x_4) \end{aligned}$$

となる。これを一般化すると

$$\langle \phi(x_1) \phi(x_2) \cdots \phi(x_n) \rangle = K^{-1}(x_1, x_2) K^{-1}(x_3, x_4) \cdots K^{-1}(x_{2n-1}, x_{2n}) + \cdots \quad (1.69)$$

というようになる。最後の \cdots は x_j のすべての組み合わせに関する和である。つまり、2 点相関関数の積をすべての場合に関して和をとったものになる。なので自由スカラー場に関しては 2 点相関関数を調べるのが重要になる。

では 2 点相関関数はどのような形をしているのか。グリーン関数の定義より

$$\begin{aligned} \delta(x - y) &= \int d^d z K(x, z) K^{-1}(z, y) \\ &= g(-\partial^\mu \partial_\mu + m^2) K^{-1}(x, y) \end{aligned} \quad (1.71)$$

となる。この後の議論のため、2 次元かつ質量なしの K^{-1} を求める。この関数はスカラー量なので、関数は 2 点間の距離 $r = |x - y|$ の関数になっているので $K^{-1}(x, y) = D(r)$ のように置くことができる。また距離で見るとなったら、極座標をとるのがよいので

$$x^1 - y^1 = \rho \sin \theta, \quad x^2 - y^2 = \rho \cos \theta \quad (1.72)$$

のようにする。(1.71) の両辺を積分して

$$1 = 2\pi g \int_0^r d\rho \rho \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} D(\rho) \right) = -2\pi r \partial_r D(r) \quad (1.73)$$

よって

$$D(r) = -\frac{1}{2\pi g} \ln r \quad (1.74)$$

となる。よって 2 点相関関数は

$$\langle \phi(x_1) \phi(x_2) \rangle = -\frac{1}{2\pi g} \ln |x_1 - x_2| \quad (1.75)$$

で与えられる。

作用が

$$x \rightarrow x', \quad \phi(x) \rightarrow \phi'(x') = \mathcal{F}(\phi(x)) \quad (1.76)$$

のような有限変換のもとで不変であるとする。すると

$$\begin{aligned} \langle \phi'(x'_1) \phi'(x'_2) \cdots \phi'(x'_n) \rangle &= \frac{1}{Z} \int [d\phi'] \phi'(x'_1) \phi'(x'_2) \cdots \phi'(x'_n) \exp[-S(\phi')] \\ &= \frac{1}{Z} \int [d\phi] \mathcal{F}(\phi(x_1)) \mathcal{F}(\phi(x_2)) \cdots \mathcal{F}(\phi(x_n)) \exp[-S(\phi)] \end{aligned} \quad (1.77)$$

となる。2 つ目の等号では作用と積分測度に変換のもとで変わらないこと

$$S[\phi'] = S[\phi], \quad [d\phi'] = [d\phi] \quad (1.78)$$

というのを使った。ただし、積分測度は量子異常により敗れることがある。ここでは労使論でも対称性が成り立っていると仮定している。

(1.77) 式より

$$\langle \phi'(x'_1) \phi'(x'_2) \cdots \phi'(x'_n) \rangle = \langle \mathcal{F}(\phi(x_1)) \mathcal{F}(\phi(x_2)) \cdots \mathcal{F}(\phi(x_n)) \rangle \quad (1.79)$$

となる。

Schwinger-Dyson 方程式 *

経路積分を考えると作用が停留するような運動以外の寄与というのにも考えることになる。なので運動方程式 $\delta S / \delta \phi = 0$ が量子論においてどのような補正を受けるかを考える。場が

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(x) + \delta \phi(x)$$

のように変わるものとする。場を引数とする関数の期待値は変換によって変わらないという式

$$\langle F[\phi] \rangle = \frac{1}{Z} \int [d\phi] F[\phi] \exp[-S(\phi)] = \frac{1}{Z} \int [d\phi'] F[\phi'] \exp[-S(\phi')]$$

これの 2 つ目の等号について差をとって、1 次の微小量まで取ると

$$\begin{aligned} 0 &= \int [d\phi'] F[\phi'] \exp[-S(\phi')] - \int [d\phi] F[\phi] \exp[-S(\phi)] \\ &= \int [d\phi] \left(F[\phi + \delta \phi] \exp[-(S + \delta S)] - F[\phi] \exp[-S(\phi)] \right) \\ &= \int [d\phi] \left(F[\phi] \exp[-S(\phi)] + \int d^d x \frac{\delta F[\phi]}{\delta \phi} \delta \phi \exp[-S(\phi)] - F[\phi] \delta S \exp[-S(\phi)] - F[\phi] \exp[-S(\phi)] \right) \\ &= \int [d\phi] \left(\int d^d x \frac{\delta F[\phi]}{\delta \phi} \delta \phi \exp[-S(\phi)] - F[\phi] \delta S \exp[-S(\phi)] \right) \\ &= \int [d\phi] \int d^d x \delta \phi \left(\frac{\delta F[\phi]}{\delta \phi} \delta \phi - F[\phi] \frac{\delta S(\phi)}{\delta \phi} \right) \exp[-S(\phi)] \end{aligned}$$

となる。

したがってこの式より

$$\left\langle \frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi} F[\phi] \right\rangle = \left\langle \frac{\delta F[\phi]}{\delta \phi} \right\rangle$$

となる。特別な場合として $F[\phi] = \phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)$ としたもの、

$$\left\langle \frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi} \phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n) \right\rangle = \sum_{j=1}^n \delta(x - x_j) \langle \phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\cancel{\phi(x_j)}\cdots\phi(x_n) \rangle$$

これが Schwinger-Dyson 方程式と呼ばれるものである。量子論において運動方程式 $\delta S[\phi]/\delta \phi \neq 0$ であり、演算子 $\phi(x)$ と同じ一点にあるとき、デルタ関数に比例する寄与をもつ。これを接触項という。

ネーターの定理は作用停留の原理からきていたものなので修正を受けることがわかる。

Ward-高橋恒等式

場の変換として無限小の変換を考える。座標に依存する無限小パラメータ $\epsilon^a(x)$ を導入して、

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(x) + \epsilon^a(x) G_a \phi(x) \quad (1.80)$$

のように場を変化させる。すると作用の変分は

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^d x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \epsilon^a(x) G_a \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\mu (\epsilon^a(x) G_a \phi) \right] \\ &= \int d^d x \left[\left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \right\} \epsilon^a(x) G_a \phi + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \epsilon^a(x) G_a \phi \right) \right] \\ &= \int d^d x \partial_\mu (j_a^\mu \epsilon^a(x)) \\ &\stackrel{?}{=} - \int d^d x (\partial_\mu j_a^\mu) \epsilon^a(x) \end{aligned} \quad (1.81)$$

となる。

$\langle \mathcal{F}[\phi] \rangle = \langle \mathcal{F}[\phi'] \rangle$ であるので、

$$\begin{aligned} 0 &= \int [d\phi] \left(\int d^d x \frac{\delta F[\phi]}{\delta \phi} \delta \phi - F[\phi] \delta S \right) \exp[-S(\phi)] \\ &= \int [d\phi] \int d^d x \epsilon^a(x) \left(\frac{\delta F[\phi]}{\delta \phi} G_a \phi(x) + F[\phi] (\partial_\mu j_a^\mu(x)) \right) \exp[-S(\phi)] \end{aligned}$$

というようにでき、これより

$$\langle \partial_\mu j_a^\mu(x) F[\phi] \rangle + \left\langle \frac{\delta F[\phi]}{\delta \phi} G_a \phi(x) \right\rangle = 0$$

という表式が得られる。特に $F[\phi] = \phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)$ としたときにはこの式は

$$\langle \partial_\mu j_a^\mu(x) \phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n) \rangle + \sum_{j=1}^n \delta(x - x_j) \langle \phi(x_1)\phi(x_2)\cdots G_a \phi(x_j) \cdots \phi(x_n) \rangle = 0 \quad (1.82)$$

$$\langle \partial_\mu j_a^\mu(x) \phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n) \rangle = - \sum_{j=1}^n \delta(x - x_j) \langle \phi(x_1)\phi(x_2)\cdots G_a \phi(x_j) \cdots \phi(x_n) \rangle \quad (1.83)$$

というように表される。これを Ward-高橋恒等式 (の一種) と呼ばれている。

1.5 角運動量

角運動量について簡単に復習する。角運動量演算子は交換関係

$$[J^i, J^j] = i\epsilon^{ijk} J^k \quad (1.84)$$

を満たすものとする。また、Casimir 演算子と昇降演算子を

$$C_2 = J^1 J^1 + J^2 J^2 + J^3 J^3 \quad (1.85)$$

$$J^\pm = J^1 \pm iJ^2 \quad (1.86)$$

で定義すると、

$$[C_2, J^3] = 0, \quad [C_2, J^\pm] = 0, \quad [J^3, J^\pm] = \pm J^\pm, \quad [J^+, J^-] = 2J^3 \quad (1.87)$$

となる。

演算子が可換であるため、同時固有状態

$$C_2 |j, m\rangle = j(j+1) |j, m\rangle \quad (1.88)$$

$$J^3 |j, m\rangle = m |j, m\rangle \quad (1.89)$$

が存在することがわかる。また、昇降演算子は (1.87) 式の交換関係より

$$|j, m+1\rangle \propto J^+ |j, m\rangle \quad (1.90)$$

$$|j, m-1\rangle \propto J^- |j, m\rangle \quad (1.91)$$

というのがわかる。これより J^\pm の作用により、 C_2 の固有値を変えずに J^3 の固有値を整数だけずれた状態を生成することができる。

$|j, j\rangle$ という状態を考える。演算子の間には

$$J^\mp J^\pm = C_2 - J^3 J^3 \mp J^3 \quad (1.92)$$

という関係があるため、これより $J^- J^+ |j, j\rangle = 0$ となる。よって

$$J^+ |j, j\rangle = 0 \quad (1.93)$$

というのがわかる。また消滅演算子を使うことで、固有状態は

$$|j, m\rangle = (J^-)^{j-m} |j, j\rangle \quad (1.94)$$

を構成できるのがわかる。

のこりは割愛。