共形場理論入門 基礎からホログラフィへの道：ノート

しゃんごん (@CEY3944)

2024 年 7 月 28 日

目次

第 1 章

場の量子論の基礎

1.1 背景時空の対称性

時間を 1 次元、空間を $(d-1)$ 次元であるとして、線素を

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{1.1}$$

とする。ただしミンコフスキー計量は時間をマイナス、空間をプラスとする。

座標の線形空間

$$x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\nu_\mu x^\nu \tag{1.6}$$

を考える。これが線素の長さを変えないうよな変換である条件は

$$\begin{aligned}\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu &= \eta_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu \\ &= \eta_{\mu\nu} \Lambda_{\rho\sigma} dx^\rho dx^\sigma\end{aligned}$$

より

$$\eta_{\rho\sigma} = \eta_{\mu\nu} \Lambda_{\rho\sigma} \tag{1.7}$$

であればよい。このような変換をローレンツ変換という。またローレンツ変換は群をなし、この群をローレンツ群という。

そして線素は並進変換

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + a^\mu \tag{1.8}$$

に対しても不変である。というのも微分をとると a^μ はなくなるためである。この並進変換とローレンツ変換を合わせた全体の変換は群をなし、ポアンカレ群と呼ばれる。

時間だけ計量がマイナスであるのを嫌って、代わりに時間の成分に $t \to \tau = it$ として虚数を入れることがある。こうすると計量はユークリッド空間と同じクロネッカーのデルタとなる。

ユークリッド化した計量テンソルのもとでは、ローレンツ変換は直交変換と同じものになっている。d 次元の直交変換のなす群を $O(d)$ と書く。また、リー群を考える。直交変換群の単位源の近傍にある無限小変換から生成される群は、固有値が変わらないことから、直交群から鏡映変換を除いたような変換からなる群となる。これを特殊直交群 $SO(d)$ と書かれる。

ユークリッド計量だけではなく、もとのような計量におけるローレンツ変換を分類してみる。時間成分の -1 が p 個で、空間成分の $+1$ が q 個あるような計量 $\eta_{\mu\nu}$ における、無限小変換が生成する変換群 $SO(p,q)$ と書く。

ユークリッド計量の時に、次元が $d = 2n$ のときには

$$z^a = x^{2a-1} + ix^{2a}, \quad \bar{z} = x^\alpha 2a - ix^{2a} \tag{1.11}$$

というように複素座標を導入することができる。このとき、

$$\begin{aligned}dz^a d\bar{z}^a &= (dx^{2a-1} + idx^{2a})(dx^{2a-1} - idx^{2a}) \\ &= \left(dx^{2a-1}\right)^2 + \left(dx^{2a}\right)^2\end{aligned}$$

より

$$ds^2 = \delta_{ab} dz^a d\bar{z}^b \tag{1.12}$$

とできる。

ここで、z のみ (あるいは $\bar{z}$) のみを混ぜる線形変換

$$z^a = M^a_b z^b, \quad \bar{z}^z = (M^a_b)^* \bar{z^b} \tag{1.13}$$

を考える。

ローレンツ変換が長さを変えない条件を考えたのと同様にして

$$\delta_{ab} M^a_c (M^b_d)^* = \delta_{bd} \tag{1.14}$$

というのがわかる。同じように考えて、M^a_b という変換をなす群全体はユニタリ群 $U(n)$ を成している。そして、M^a_b の行列式が 1 を満たすような変換全体の群を特殊ユニタリ群 $(SU(n))$ をなす。

1.2 相関関数の経路積分表示

場の理論では、背景時空上の点 x ごとに異なる値をとる場 $\phi(x)$ が基本要素となっている。これらの場を量子化することで場の量子論が構成される。量子化の方法としては場の交換関係を導入する量子化と、量子状態の遷移を系のラグランジアンから導かれる作用を使って記述する経路積分量子化がある。*1両者は同じ答えを与えると考えられている。*2

経路積分量子化では場の相関関数というのが大事になってくる。背景時空上の n 点上の場の相関関数は

$$\langle \phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)\rangle \tag{1.16}$$

と書かれれる。これがどういったものなのかをざっと見ていく。

経路積分

量子力学では位置演算子 $\hat{q}$ と運動量演算子 $\hat{p}$ の間には正準交換関係

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i \tag{1.17}$$

を満たすとしている。*3場の量子論へ拡張するにはハイゼンベルグ描像

$$\hat{q}(t) = \exp\Big(i\hat{H}t\Big)\hat{q}\exp\Big(-i\hat{H}t\Big) \tag{1.18}$$

にして、演算子に時間依存するようにするとよい。*4 量子力学における重要な物理量として遷移確率がある。時刻 t_i に位置 q_i あった粒子が、時刻 t_f に位置 q_f へと遷移する確率は

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i\rangle = \langle q_f| \exp\Big[-i\hat{H}(t_f - t_i)\Big] |q_i\rangle \tag{1.21}$$

で与えられる。ここで、時間間隔を N 等分して

$$t_m = t_i + m\Delta t, \quad \Delta t = \frac{t_f - t_i}{N} \tag{1.22}$$

と定義すると遷移確率は

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i\rangle = \int dq_{N-1}dq_{N-2}\cdots dq_1 \langle q_N, t_N | q_{N-1}, t_{N-1}\rangle \langle q_{N-1}, t_{N-1} | q_{N-2}, t_{N-2}\rangle \cdots \langle q_2, t_2 | q_1, t_1\rangle \tag{1.23}$$

となる。

積分の中の 1 つのブラケットの中身をこのように書き換えよう

$$\begin{aligned}\langle q_{m+1}, t_{m+1} | q_m, t_m\rangle &= \langle q_{m+1}, t_{m+1}| \exp\Big(-i\hat{H}\Delta t\Big) |q_m, t_m\rangle \\ &= \int dp_m \langle q_{m+1}, t_{m+1} | p_m\rangle \langle p_m | \exp\Big(-i\hat{H}\Delta t\Big) |q_m, t_m\rangle\end{aligned} \tag{1.24}$$

*1 経路積分を知らないので間違ってるかもしれない。
*2 証明がない感じ?
*3 面倒なので $\hbar = 1$ としている。
*4 ハイゼンベルグ描像でいいのかな。相互作用表示だったりしない?

ここで、

$$\langle p_m| \exp\Big(-i\hat{H}\Delta t\Big) |q_m,\, t_m\rangle = \langle p_m|q_m\rangle - i\,\langle p_m| \hat{H} |q_m\rangle \Delta t \tag{1.25}$$

でありそして、

$$\begin{aligned} \langle p_m| \hat{H}(\hat{p},\, \hat{q}) |q_m\rangle &= H(p_m,\, q_m) \langle p_m|q_m\rangle \\ \langle q_n|p_m\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp^{ip_n q_m} \end{aligned} \tag{1.26}$$

であるので

$$\begin{aligned} \int dp_m \langle q_{m+1},\, t_{m+1}|p_m\rangle \langle p_m| \exp\Big(-i\hat{H}\Delta t\Big) |q_m,\, t_m\rangle &= \int dp_m \exp(-iH(p_m,\, q_m)\Delta t\,) \langle q_{m+1},\, t_{m+1}|p_m\rangle \\ &\simeq \int \frac{dp_m}{2\pi} \exp[ip_m(q_{m+1}-q_m) - iH(p_m,\, q_m)\Delta t\,] \\ &= \int \frac{dp_m}{2\pi} \exp\left[i\left\{p_m \frac{q_{m+1}-q_m}{\Delta t} - H(p_m,\, q_m)\right\}\Delta t\right] \end{aligned} \tag{1.27}$$

よって遷移確率は $N \to \infty$ として

$$\begin{aligned} \langle q_f,\, t_f|q_i,\, t_i\rangle &= \lim_{N\to\infty} \int \left[\prod_{m=1}^{N-1} \frac{dp_m dq_m}{2\pi}\right] \frac{dp_0}{2\pi} \exp\left[i\left\{\sum_{m=0}^{N-1} \left(p_m \frac{q_{m+1}-q_m}{\Delta t} - H(p_m,\, q_m)\right)\Delta t\right\}\right] \\ &= \int [dp\, dq] \exp\left[i\int_{t_i}^{t_f} dt(p\dot{q} - H(p,\, q))\right] \end{aligned} \tag{1.28}$$

$[dp\, dq]$ は積分の測度である。ここでハミルトニアンが

$$\hat{H}(\hat{p},\, \hat{q}) = \frac{1}{2}\hat{p}^2 + V(\hat{q}) \tag{1.29}$$

で与えられるとする。こうすると遷移確率は

$$\begin{aligned} \int [dp\, dq] \exp\left[i\int_{t_i}^{t_f} dt(p\dot{q} - \frac{1}{2}p^2 - V(q))\right] &= \int [dp\, dq] \exp\left[i\int_{t_i}^{t_f} dt\left\{-\frac{1}{2}(p-\dot{q})^2 + \frac{1}{2}\dot{q}^2 - V(q)\right\}\right] \\ &= \int [dq] \exp\left[i\int_{t_i}^{t_f} dt\left\{\frac{1}{2}\dot{q}^2 - V(q)\right\}\right] \\ &= \int [dq] \exp\left[i\int_{t_i}^{t_f} dt\, L(q,\, \dot{q})\right] \end{aligned} \tag{1.30}$$

というようにラグランジアンを用いて表せる。さらに作用

$$S = \int dt\, L(q,\, \dot{q}) \tag{1.31}$$

を導入すると

$$\langle q_f,\, t_f|q_i,\, t_i\rangle = \int [dq] e^{iS}$$

というようにあらわせる。

時間順序積

さらにある時刻 $t_f > t > t_i$ に $q(t)$ を挿入した経路積分を考えてみよう。この経路積分は

$$\int [dq] q(t) \exp\left[i\int_{t_i}^{t_f} dt\, L(q,\, \dot{q})\right] = \int dq \int [dq]' \exp\left[i\int_{t}^{t_f} dt\, L(q,\, \dot{q})\right] q \exp\left[i\int_{t_i}^{t} dt\, L(q,\, \dot{q})\right] \tag{1.32}$$

と表せる。$[dq]'$ は時刻 t での q 積分を取り除いた測度。この式自体は何をしている式かというと、$\langle \hat{q}(t)\rangle$ を求めている。またこの表式は

$$\begin{aligned} \int [dq] q(t) \exp\left[i\int_{t_i}^{t_f} dt\, L(q,\, \dot{q})\right] &= \int dq \langle q_f,\, t_f|q_t,\, t\rangle\, q \,\langle q,\, t|q_i,\, t_i\rangle \\ &= \int dq \langle q_f,\, t_f| q(t) |q_t,\, t\rangle \langle q,\, t|q_i,\, t_i\rangle \\ &= \int dq \langle q_f,\, t_f| \hat{q}(t) |q_t,\, t\rangle \langle q,\, t|q_i,\, t_i\rangle \\ &= \langle q_f,\, t_f| \hat{q}(t) |q_i,\, t_i\rangle \end{aligned} \tag{1.33}$$

というように演算子 $\hat{q}(t)$ の挿入と同等になる。同様にして $q(t)q(t'),\quad (t_f > t,\, t' > t_i)$ という積を経路積分に入れる。すると、自動的に時間順序に並ぶので

$$\int [dq] q(t)q(t') \exp\left[i \int_{t_i}^{t_f} dt\, L(q,\, \dot{q}) \right] = \langle q_f,\, t_f |\, T[\hat{q}(t),\, \hat{q}(t')]\, | q_i,\, t_i \rangle \tag{1.34}$$

$$T[\hat{A}(t),\, \hat{B}(t')] = \begin{cases} \hat{A}(t)\hat{B}(t') & (t > t') \\ \hat{B}(t')\hat{A}(t) & (t' > t) \end{cases} \tag{1.35}$$

となる。$T[\hat{A}(t),\, \hat{B}(t')]$ を時間順序積という。

虚時間形式と真空振幅

次に $t \to \tau = it$ のようにユークリッド化した場合を考えてみよう。エネルギー固有値を

$$\hat{H} \,|n\rangle = E_n \,|n\rangle \tag{1.36}$$

とする。遷移確率は

$$\begin{aligned} \langle q_f,\, t_f | q,\, t \rangle &= \langle q_f |\, \exp\left[-i\hat{H} t_f \right] | q_i,\, t \rangle \\ &= \sum_n \langle q_f | n \rangle \exp[-iE_n t_f]\, \langle n | q_i,\, t \rangle \\ &= \sum_n \langle q_f | n \rangle \exp[-E_n \tau_f]\, \langle n | q_i,\, t \rangle \end{aligned} \tag{1.37}$$

ここで $\tau_f \to \infty$ とすると、エネルギーの最も小さい基底状態 $|0\rangle$ のみが残ると考えられる。したがって

$$\begin{aligned} \langle q_f,\, t | q,\, t \rangle &= \exp(-E_0 \tau_j)\, \langle q_f | 0 \rangle\, \langle 0 | q,\, t \rangle \\ &= \exp(-E_0 (\tau_j - \tau))\, \langle q_f | 0 \rangle\, \langle 0 | q \rangle \end{aligned} \tag{1.38}$$

となる。なんだかきれいになりそうなので、(1.34) 式の初期状態の時刻を無限の過去、終状態の時刻を無限の未来にして、n 点の時刻における位置の積を考えてみると

$$\begin{aligned} &\langle q_f,\, t_f | T[\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)\cdots\hat{q}(t_n)]\, | q_i,\, t_i \rangle \\ &\quad = \int dq\, dq'\, \langle q_f,\, t_f | q,\, t \rangle\, T[\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)\cdots\hat{q}(t_n)]\, \langle q',\, t | q_i,\, t_i \rangle \\ &\quad = \int dq\, dq'\, \langle q_f,\, t_f |\, \exp\left[-i\hat{H}(t_f - t) \right] | q \rangle\langle q |\, T[\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)\cdots\hat{q}(t_n)]\, | q' \rangle\langle q' |\, \exp\left[-i\hat{H}(t - t_i) \right] | q_i,\, t_i \rangle \\ &\quad \to \exp(-E_0(\tau_f - \tau_i))\, \langle q_f | 0 \rangle\, \langle 0 |\, T[\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)\cdots\hat{q}(t_n)]\, | 0 \rangle\, \langle 0 | q_i \rangle \\ &\quad = \langle q_f,\, t_f | q_i,\, t_i \rangle\, \langle 0 |\, T[\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)\cdots\hat{q}(t_n)]\, | 0 \rangle \end{aligned} \tag{1.39}$$

相関関数は $\langle q_f,\, t_f |\, T[\hat{q}(t_1)\cdots\hat{q}(t_n)]\, | q_t,\, t \rangle \,/\, \langle q_f,\, t_f | q_i,\, t_i \rangle$ のことであるので、n 点の相関数は経路積分の言葉では

$$\begin{aligned} \langle 0 |\, T[\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)\cdots\hat{q}(t_n)]\, | 0 \rangle &= \lim_{(\tau_f,\, \tau_i) \to (\infty,\, -\infty)} \left[\frac{\langle q_f,\, t_f |\, T[\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)\cdots\hat{q}(t_n)]\, | q_i,\, t_i \rangle}{\langle q_f,\, t_f | q_i,\, t_i \rangle} \right] \\ &= \frac{\int [dq] q(t_1)q(t_2)\cdots q(t_n) \exp(-S_E(q,\, \dot{q}))}{\int [dq] \exp(-S_E(q,\, \dot{q}))} \end{aligned} \tag{1.40}$$

のように各位置の時間順序積をエネルギー基底状態で挟みこむことであらわせることがわかる。ここで、ユークリッド化した作用とラグランジアン

$$S_E := \int d\tau L_E(q,\, \partial_\tau q) = -\int d\tau L(q,\, i\partial_\tau q) = iS \tag{1.41}$$

を使った。

柏太郎『経路積分』[1] によると、この式は経路積分の歴史的には結構大事らしい。というのも 1960 年代の人たちは解析力学の作用停留の原理からくる式ではあるので正しいと感じはしていたが、量子論なのに演算子の非可換性や基底状態といったものがあまり露わになっていないというので、経路積分を信用しきれていなかった。ただこの表式を見ると、n 点相関関数というのは基底状態の位置の期待値のような式になっている。つまり、ちゃんと基底状態というのあるというのがわか

るので少し安心したようである。ここら辺のアイデアはファインマンではなく 1971 に韓国の方 による経路積分のレビューで触れられたらしい。

場の量子論への拡張は q のみの 1 自由度系から q^a の多自由度系へと移り、添え字 a として、各点の空間座標 x^j をとればよい。経路積分の測度は

$$\prod_a [dq^a] = \prod_a \prod_\tau dq^a(\tau) \to [d\phi] = \prod_{x^j} \prod_\tau d\phi(x^j,\, \tau) \tag{1.42}$$

となる。したがって、場の理論での相関関数は

$$\langle \phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)\rangle = \frac{1}{Z}\int [d\phi]\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)\exp(-S(\phi)) \tag{1.43}$$

$$Z = \int [d\phi]\exp(-S(\phi)) \tag{1.44}$$

となる。この Z は真空振幅とも、分配関数とも呼ばれる。

1.3 作用と対称性

場を考えるときにはラグランジアンではなく、ラグランジアン密度を使うとよい。そうしたときの作用は

$$S = \int d^d x\, \mathcal{L}(\phi,\, \partial_\mu \phi)$$

のように書ける。この節では古典的な議論がしやすいように虚時間形式は使わない。なので相関関数を計算するときには e^{iS} の重みで計算するとよい。

物理の要請として、実現する運動は作用が停留するという条件がある。なので作用の変分をとると

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^d x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\,\delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\,\delta(\partial_\mu \phi)\right] \\ &= \int d^d x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu \phi)}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi}\right)\right]\delta\phi \end{aligned} \tag{1.45}$$

よりオイラーラグランジュ方程式

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\right) = 0 \tag{1.46}$$

が得られる。

運動方程式は座標変換に関して共変的でないとならない。無限小座標変換として、

$$\phi(x) \to \phi'(x) = \phi(x) + \epsilon^a G_a \phi(x) \tag{1.47}$$

というのを考える。つまり

$$\delta\phi = \epsilon^a G_a \phi$$

というのを作用の変分の式に入れることになる。なので

$$\begin{aligned} \delta S &= \epsilon^a \int d^d x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} G_a a\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\partial_\mu(G_a \phi)\right] \\ &= \epsilon^a \int d^d x \left[\left\{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\right)\right\}G_a\phi + \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}G_a\phi\right)\right] \end{aligned} \tag{1.48}$$

この作用は停留するので、一番右にある項は 0 になる。

$$j_a^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}G_a\phi \tag{1.49}$$

という量を定義すると、

$$\partial_\mu j_a^\mu = 0 \tag{1.50}$$

となる。これの第 0 成分を時間成分を取り除いた空間成分で積分した量

$$Q_a = \int d^{d-1}x\, j_a^0 \tag{1.51}$$

を”電荷”と呼ぶ。これは次のようして保存量だとわかる。

$$\frac{\mathrm{d}Q_a}{\mathrm{d}t} = \int d^{d-1}x\, \partial_0 j_a^0 = -\int d^{d-1}x \partial x^i j_a^i = -\int_\partial d^d x\, j_a^i = 0 \tag{1.52}$$

このように無限小変換に対して不変性があるときには保存量が存在するのがわかる。これをネーターの定理といい、その”電荷”密度と流れをまとめてネーターカレントという。

1.4 相関関数と対称性

量子論における相関関数 $\langle\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)\rangle$ に関する対称性を考える。

ユークリッド背景の下での相関関数は、経路積分の言葉では (1.43) のようにあらわすことができる。場 $\phi(x)$ と結合する外場 $J(x)$ を導入して、生成汎関数

$$Zj = \int [d\phi] \exp\left[-S(\phi) + \int d^d x\, J(x)\phi(x)\right] \tag{1.60}$$

を定義する。すると相関関数は汎関数微分を用いて

$$\langle\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)\rangle = \frac{1}{Z[0]}\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\frac{\delta}{\delta J(x_2)}\cdots\frac{\delta}{\delta J(x_n)} Z[J]\bigg|_{J=0} \tag{1.61}$$

で表すことができる。実際

$$\begin{aligned}
\frac{1}{Z[0]}\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x_i)}\bigg|_{J=0} &= \frac{1}{Z[0]}\int [d\phi(x)] \exp[-S(\phi)] \frac{\delta}{\delta J(x_i)} \exp\left[\int d^d x\, J(x)\phi(x)\right]\bigg|_{J=0} \\
&= \frac{1}{Z[0]}\int [d\phi(x)] \exp[-S(\phi)] \exp\left[\int d^d x\, J(x)\phi(x)\right] \frac{\delta}{\delta J(x_i)} J(x)\phi(x)\bigg|_{J=0} \\
&= \frac{1}{Z[0]}\int [d\phi]\phi(x_i) \exp\left[-S(\phi) + \int d^d x\, J(x)\phi(x)\right]\bigg|_{J=0} \\
&= \frac{1}{Z[0]}\int [d\phi]\phi(x_i) \exp[-S(\phi)] \\
&= \langle\phi(x_i)\rangle
\end{aligned}$$

というようにわかる。

例：自由スカラー場

作用を

$$S = \frac{1}{2}g \int d^d x (\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - m^2\phi^2) \tag{1.62}$$

とする。[*5] この時の生成汎関数は

$$\begin{aligned}
Z[J] &= \int [d\phi] \exp\left[-\frac{1}{2}\int d^d x d^d y\, \phi(x) K(x,\, y)\phi(y) + \int d^d x\, J(x)\phi(x)\right] \\
K(x,\, y) &= g\delta(x-y)(-\partial^\mu\partial_\mu + m^2)
\end{aligned} \tag{1.63}$$

と書ける。

ここ多変数のガウス積分の公式

$$\begin{aligned}
\int d^m\phi\, \exp\left[-\frac{1}{2}\phi_p K^{pq}\phi_q + J^p\phi_p\right] &= \int d^m\phi \underbrace{\exp\left[-\frac{1}{2}(\phi-J)_p K^{pq}(\phi-K)_q\right]}_{J=0\ \text{のときの積分と同じ}} \exp\left[\frac{1}{2}J^p (K^{-1})_{pq} J^q\right] \\
&= \sqrt{\frac{(2\pi)^n}{\det a}} \exp\left[\frac{1}{2}J^p (K^{-1})_{pq} J^q\right]
\end{aligned} \tag{1.66}$$

[*5] 本文だと $+m$ になってるが誤植

を参考にすると積分することができる。最後に出た K^{-1} というのは演算子 $K(x,\,y)$ に対する逆操作、つまりグリーン関数のことである。定義としては

$$\int d^dzK(x,\,z)K^{-1}(z,\,y)=\delta(x-y) \tag{1.71}$$

である。

よって

$$Z[J]=Z[0]\exp\left[\frac{1}{2}\int d^dxd^dy\,J(x)K^{-1}(x,y)J(y)\right] \tag{1.67}$$

と書ける。

この式を見ると、自由スカラー場において汎関数微分を奇数回行うと $J(x)$ の項が残ってしまうため、最後に $J(x)=0$ する際に消えてしまうのがわかる。よって

$$\langle\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_{2n-1})\rangle=0 \tag{1.68}$$

となる。偶数回やったときには値が残る。試しに 2 点相関関数を求めてみる。

$$\begin{aligned}
&\langle\phi(x_1)\phi(x_2)\rangle\\
&=\ \frac{1}{Z[0]}\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\frac{\delta}{\delta J(x_2)}Z[J]\bigg|_{J=0}\\
&=\ \frac{\delta}{\delta J(x_1)}\left\{\exp\left[\frac{1}{2}\int d^dxd^dy\,J(x)K^{-1}(x,y)J(y)\right]\left(\frac{1}{2}\int d^dxJ(x)K^{-1}(x,\,x_2)+K^{-1}(x_2,\,x)J(x)\right)\right\}\bigg|_{J=0}\\
&=\exp\left[\frac{1}{2}\int d^dxd^dy\,J(x)K^{-1}(x,y)J(y)\right]\\
&\qquad\left(\frac{1}{2}\int d^dxJ(x)K^{-1}(x,\,x_2)+K^{-1}(x_2,\,x)J(x)\right)\left(\frac{1}{2}\int d^dxJ(x)K^{-1}(x,\,x_1)+K^{-1}(x_1,\,x)J(x)\right)\bigg|_{J=0}\\
&\qquad+\frac{1}{2}\ \exp\left[\frac{1}{2}\int d^dxd^dy\,J(x)K^{-1}(x,y)J(y)\right]\left(K^{-1}(x_1,\,x_2)+K^{-1}(x_2,\,x_1)\right)\bigg|_{J=0}\\
&=\frac{1}{2}(K^{-1}(x_1,\,x_2)+K^{-1}(x_2,\,x_1))\\
&=K^{-1}(x_1,\,x_2)
\end{aligned} \tag{1.70}$$

というように計算できる。では 4 点相関関数はというと、上にある計算結果を途中まで使うことができて、

$$\begin{aligned}
&\langle\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)\rangle\\
&=\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\frac{\delta}{\delta J(x_2)}\left\{\exp\left[\frac{1}{2}\int d^dxd^dy\,J(x)K^{-1}(x,y)J(y)\right]\right.\\
&\qquad\left(\frac{1}{2}\int d^dxJ(x)K^{-1}(x,\,x_4)+K^{-1}(x_4,\,x)J(x)\right)\left(\frac{1}{2}\int d^dxJ(x)K^{-1}(x,\,x_3)+K^{-1}(x_3,\,x)J(x)\right)\bigg|_{J=0}\\
&\qquad\left.+\frac{1}{2}\ \exp\left[\frac{1}{2}\int d^dxd^dy\,J(x)K^{-1}(x,y)J(y)\right]\left(K^{-1}(x_3,\,x_4)+K^{-1}(x_4,\,x_3)\right)\bigg|_{J=0}\right\}\\
&=K^{-1}(x_2,\,x_4)K^{-1}(x_1,\,x_3)+K^{-1}(x_1,\,x_4)K^{-1}(x_2,\,x_3)+K^{-1}(x_1,\,x_2)K^{-1}(x_3,\,x_4)
\end{aligned}$$

となる。これを一般化すると

$$\langle\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)\rangle=K^{-1}(x_1,\,x_2)K^{-1}(x_3,\,x_4)\cdots K^{-1}(x_{2n-1},\,x_{2n})+\cdots \tag{1.69}$$

というようになる。最後の $\cdots$ は x_j のすべての組み合わせに関する和である。つまり、2 点相関関数の積をすべての場合に関して和をとったものになる。なので自由スカラー場に関しては 2 点相関関数を調べることが重要になる。

では 2 点相関関数はどのような形をしているのか。グリーン関数の定義より

$$\begin{aligned}
\delta(x-y)&=\int d^dz\,K(x,\,z)K^{-1}(z,\,y)\\
&=g(-\partial^\mu\partial_\mu+m^2)K^{-1}(x,\,y)
\end{aligned} \tag{1.71}$$

となる。この後の議論のため、2 次元かつ質量なしの K^{-1} を求める。この関数はスカラー量なので、関数は 2 点間の距離 $r=|x-y|$ の関数になっているので $K^{-1}(x,\,y)=D(r)$ のように置くことができる。また距離で見るとなったら、極座標をとるのがよいので

$$x^1-y^1=\rho\sin\theta,\qquad x^2-y^2=\rho\cos\theta \tag{1.72}$$

のようにする。(1.71) の両辺を積分して

$$1 = 2\pi g\int_0^r d\rho\,\rho\left(-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\frac{\partial}{\partial\rho}D(\rho)\right) = -2\pi r\partial_r D(r) \tag{1.73}$$

よって

$$D(r) = -\frac{1}{2\pi g}\ln r \tag{1.74}$$

となる。よって 2 点相関関数は

$$\langle\phi(x_1)\phi(x_2)\rangle = -\frac{1}{2\pi g}\ln|x_1 - x_2| \tag{1.75}$$

で与えられる。

作用が

$$x \to x', \qquad \phi(x) \to \phi'(x') = \mathcal{F}(\phi(x)) \tag{1.76}$$

のような有限変換のもとで不変であるとする。すると

$$\begin{aligned}\langle\phi'(x'_1)\phi'(x'_2)\cdots\phi'(x'_n)\rangle &= \frac{1}{Z}\int[d\phi']\phi'(x'_1)\phi'(x'_2)\cdots\phi'(x'_n)\exp[-S(\phi')]\\ &= \frac{1}{Z}\int[d\phi]\mathcal{F}(\phi(x_1))\mathcal{F}(\phi(x_2))\cdots\mathcal{F}(\phi(x_n))\exp[-S(\phi)]\end{aligned} \tag{1.77}$$

となる。2 つ目の等号では作用と積分測度が変換のもと変わらないこと

$$S[\phi'] = S[\phi], \qquad [d\phi'] = [d\phi] \tag{1.78}$$

というのを使った。ただし、積分測度は量子異常により敗れることがある。ここでは労使論でも対称性が成り立っていると仮定している。

(1.77) 式より

$$\langle\phi'(x'_1)\phi'(x'_2)\cdots\phi'(x'_n)\rangle = \langle\mathcal{F}(\phi(x_1))\mathcal{F}(\phi(x_2))\cdots\mathcal{F}(\phi(x_n))\rangle \tag{1.79}$$

となる。

Schwinger-Dyson 方程式 *

経路積分を考えると作用が停留するような運動以外の寄与というのも考えることになる。なので運動方程式 $\delta S/\delta\phi = 0$ が量子論においてどのような補正を受けるかを考える。場が

$$\phi(x) \to \phi'(x) = \phi(x) + \delta\phi(x)$$

のように変わるものとする。場を引数とする関数の期待値は変換によって変わらないという式

$$\langle F[\phi]\rangle = \frac{1}{Z}\int[d\phi]F[\phi]\exp[-S(\phi)] = \frac{1}{Z}\int[d\phi']F[\phi']\exp[-S(\phi')]$$

これの 2 つ目の等号について差をとって、1 次の微小量まで取ると

$$\begin{aligned}0 &= \int[d\phi']\,F[\phi']\exp[-S(\phi')] - \int[d\phi]\,F[\phi]\exp[-S(\phi)]\\ &= \int[d\phi]\,\Big(F[\phi+\delta\phi]\exp[-(S+\delta S)] - F[\phi]\exp[-S(\phi)]\Big)\\ &= \int[d\phi]\left(F[\phi]\exp[-S(\phi)] + \int d^dx\,\frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi}\,\delta\phi\exp[-S(\phi)] - F[\phi]\,\delta S\exp[-S(\phi)] - F[\phi]\exp[-S(\phi)]\right)\\ &= \int[d\phi]\left(\int d^dx\,\frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi}\,\delta\phi\exp[-S(\phi)] - F[\phi]\,\delta S\exp[-S(\phi)]\right)\\ &= \int[d\phi]\int d^dx\;\delta\phi\left(\frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi}\,\delta\phi - F[\phi]\frac{\delta S(\phi)}{\delta\phi}\right)\exp[-S(\phi)]\end{aligned}$$

となる。

したがってこの式より

$$\left\langle \frac{\delta S[\phi]}{\delta\phi} F[\phi] \right\rangle = \left\langle \frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi} \right\rangle$$

となる。特別な場合として $F[\phi] = \phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)$ としたもの、

$$\left\langle \frac{\delta S[\phi]}{\delta\phi} \phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n) \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \delta(x-x_j) \left\langle \phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\cancel{\phi(x_j)}\cdots\phi(x_2) \right\rangle$$

これが Schwinger-Dyson 方程式と呼ばれるものである。量子論において運動方程式 $\delta S[\phi]/\delta\phi \neq 0$ であり、演算子 $\phi(x)$ と同じ一点にあるとき、デルタ関数に比例する寄与をもつ。これを接触項という。

ネーターの定理は作用停留の原理からきていたものなので修正を受けることがわかる。

Ward-高橋恒等式

場の変換として無限小の変換を考える。座標に依存する無限小パラメータ $\epsilon^a(x)$ を導入して、

$$\phi(x) \to \phi'(x) = \phi(x) + \epsilon^a(x) G_a \phi(x) \tag{1.80}$$

のように場を変化させる。すると作用の変分は

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int d^d x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} \epsilon^a(x) G_a \phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \partial_\mu(\epsilon^a(x) G_a\phi) \right] \\
&= \int d^d x \left[\left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right) \right\} \epsilon^a(x) G_a\phi + \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \epsilon^a(x) G_a \phi \right) \right] \\
&= \int d^d x \, \partial_\mu(j_a^\mu \epsilon^a(x)) \\
&\overset{?}{=} -\int d^d x \, (\partial_\mu j_a^\mu) \epsilon^a(x)
\end{aligned} \tag{1.81}$$

となる。

$\langle \mathcal{F}[\phi] \rangle = \langle \mathcal{F}[\phi'] \rangle$ であるので、

$$\begin{aligned}
0 &= \int [d\phi] \left(\int d^d x \, \frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi} \delta\phi - F[\phi] \, \delta S \right) \exp[-S(\phi)] \\
&= \int [d\phi] \int d^d x \, \epsilon^a(x) \left(\frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi} G_a \phi(x) + F[\phi](\partial_\mu j_a^\mu(x)) \right) \exp[-S(\phi)]
\end{aligned}$$

というようにでき、これより

$$\langle \partial_\mu j_a^\mu(x) F[\phi] \rangle + \left\langle \frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi} G_a \phi(x) \right\rangle = 0$$

という表式が得られる。特に $F[\phi] = \phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)$ としたときにはこの式は

$$\langle \partial_\mu j_a^\mu(x) \phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n) \rangle + \sum_{j=1}^{n} \delta(x-x_j) \langle \phi(x_1)\phi(x_2)\cdots G_a\phi(x_j)\cdots\phi(x_n) \rangle = 0 \tag{1.82}$$

$$\langle \partial_\mu j_a^\mu(x) \phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n) \rangle = -\sum_{j=1}^{n} \delta(x-x_j) \langle \phi(x_1)\phi(x_2)\cdots G_a\phi(x_j)\cdots\phi(x_n) \rangle \tag{1.83}$$

というように表される。これを Ward-高橋恒等式 (の一種) と呼ばれれている。

1.5 角運動量

角運動量について簡単に復習する。角運動量演算子は交換関係

$$[J^i, \, J^j] = i\epsilon^{ijk} J^k \tag{1.84}$$

を満たすものとする。また、Casimir 演算子と昇降演算子を

$$C_2 = J^1 J^1 + J^2 J^2 + J^3 J^3 \tag{1.85}$$

$$J^{\pm} = J^1 \pm i J^2 \tag{1.86}$$

で定義すると、

$$[C_2,\, J^3] = 0, \quad [C_2,\, J^{\pm}] = 0, \quad [J^3,\, J^{\pm}] = \pm J^{\pm}, \quad [J^+,\, J^-] = 2J^3 \tag{1.87}$$

となる。

演算子が可換であるため、同時固有状態

$$C_2 \,|j,\, m\rangle = j(j+1)\,|j,\, m\rangle \tag{1.88}$$

$$J^3 \,|j,\, m\rangle = m\,|j,\, m\rangle \tag{1.89}$$

が存在することがわかる。また、昇降演算子は (1.87) 式の交換関係より

$$|j,\, m+1\rangle \propto J^+ \,|j,\, m\rangle \tag{1.90}$$

$$|j,\, m-1\rangle \propto J^- \,|j,\, m\rangle \tag{1.91}$$

というのがわかる。これより $J^{\pm}$ の作用により、C_2 の固有値を変えずに J^3 の固有値を整数だけずれた状態を生成することができる。

$|j,\, j\rangle$ という状態を考える。演算子の間には

$$J^{\mp} J^{\pm} = C_2 - J^3 J^3 \mp J^3 \tag{1.92}$$

という関係があるため、これより $J^- J^+ \,|j,\, j\rangle = 0$ となる。よって

$$J^+ \,|j,\, j\rangle = 0 \tag{1.93}$$

というのがわかる。また消滅演算子を使うことで、固有状態は

$$|j,\, m\rangle = (J^-)^{j-m} j,\, j \tag{1.94}$$

を構成できるのがわかる。

のこりは割愛。

第 2 章

一般次元の共形場理論

2.1　一般次元の共形対称性

一章にて、線素が併進と回転変換に関して不変であることを見た。この節ではユークリッド計量の場合を考えるが、ミンコフスキー計量のときであっても同様の議論が成り立つ。

共形変換を考える際にはこれまでの議論を少し拡張する必要がある。一般の計量テンソル $g_{\mu\nu}(x)$ を用意して、線素を

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu \tag{2.1}$$

と書くことにする。この計量テンソルは座標変換 $x \to x'$ のもとで

$$g_{\mu\nu} \to g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}g_{\rho\sigma} \tag{2.2}$$

のように変換する。以下ではこの計量テンソルの変換性を利用することで、対称性の解析を行いたい。

並進・回転変換

まずは計量テンソルを $g_{\mu\nu}(x) = \delta\mu\nu$ というように固定する。このとき、計量テンソルを不変にする変換が並進と回転変換と与えられることを見よう。座標の無限小変換

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu - \epsilon^\mu(x) \tag{2.3}$$

を考える。この変換でのヤコビアンは次のような式を考えるとわかる。

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \delta^\mu_\nu - \partial_\nu\epsilon^\mu$$
$$\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} = \delta^\rho_\sigma + \partial_\sigma\epsilon^\rho$$

よって計量テンソルは

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} \to g'_{\mu\nu} &= (\delta^\rho_\mu + \partial_\mu\epsilon^\rho)(\delta^\sigma_\nu + \partial_\nu\epsilon^\sigma)g_{\rho\sigma} \\ &= g_{\mu\nu} + \partial_\mu\epsilon_\nu + \partial_\nu\epsilon_\mu \end{aligned} \tag{2.4}$$

最後の等号は ϵ^2 のオーダーの項を無視して、計量テンソルがユークリッド計量ことを使った。

したがって計量テンソルを不変に保つという条件は

$$\partial_\mu\epsilon_\nu + \partial_\nu\epsilon_\mu = 0 \tag{2.5}$$

というのがわかった。(Killing 方程式)

この式に ∂_ρ を作用させると

$$\partial_\rho\partial_\mu\epsilon_\nu + \partial_\rho\partial_\nu\epsilon_\mu = \partial_\mu\partial_\rho\epsilon_\nu + \partial_\nu\partial_\rho\epsilon_\mu = \partial_\mu(-\partial_\nu\epsilon_\rho) + \partial_\nu(-\partial_\mu\epsilon_\rho) = -2\partial_\mu\partial_\nu\epsilon_\rho = 0 \tag{2.6}$$

これより、ϵ は x の一次式

$$\epsilon_\mu = a_\mu + b_{\mu\nu}x^\nu \tag{2.7}$$

で書けることがわかる。これを (2.5) 式に戻すと

$$0 = \partial_\mu(a_\nu + b_{\nu\rho}x^\rho) + \partial_\nu(a_\mu + b_{\mu\rho}\rho) = b_{\mu\nu} + b_{\nu\mu}$$

となり係数 $b_{\mu\nu}$ は反対称だとわかる。よって座標変換は

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu - a^\mu - b^\mu{}_\nu x^\nu$$

というように書ける。つまり a^μ は並進、$b^\mu_\nu x^\nu$ は回転を表している。

無限小変換をリー群のように書きなおすと

$$x^\mu \to x'^\mu = (1 - i\epsilon^\nu G_\nu)x^\mu.$$

つまり、並進の生成子 P_μ は

$$\begin{aligned}(1 - ia^\nu P_\nu)x^\mu &= x^\mu - a^\mu \\ \to \quad P_\mu &= -i\partial_\mu\end{aligned} \tag{2.8}$$

とわかる。また、回転変換の生成子 $L_{\mu\nu}$ は

$$\begin{aligned}(1 - ib^{\nu\rho}L_{\nu\rho})x^\mu &= x^\mu - b^\mu{}_\sigma x^\sigma \\ b^{\nu\rho}L_{\nu\rho}x^\mu &= -ib^\mu{}_\sigma x^\sigma \\ L_{\nu\rho}x^\mu &= -ib^{-1}_{\nu\rho}b^{\mu\sigma}x_\sigma \\ &\stackrel{?}{=} i(\delta^\mu_\nu\delta^\sigma_\rho - \delta^\sigma_\nu\delta^\mu_\rho)x_\sigma \\ &= i(x_\nu\partial_\rho - x_\rho\partial_\nu)x^\mu \\ \to \quad L_{\mu\nu} &= i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu) \\ &= -(x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu)\end{aligned} \tag{2.9}$$

となる。

これらの生成子の交換関係は

$$\begin{aligned}&[P_\mu, P_\nu] = 0, \quad [P_\mu, L_{\rho\sigma}] = i(\eta_{\mu\rho}P_\sigma - \eta_{\mu\sigma}P_\rho) \\ &[L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}] = i(\eta_{\nu\rho}L_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\rho}L_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma}L_{\mu\rho} + \eta_{\mu\sigma}L_{\nu\rho})\end{aligned} \tag{2.10}$$

となる。実際、

$$\begin{aligned}[P_\mu, L_{\rho\sigma}] &= [P_\mu, -(x_\rho P_\sigma - x_\sigma P_\rho)] \\ &= i(\eta_{\mu\rho}P_\sigma - \eta_{\mu\sigma}P_\rho) \\ [L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}] &= [x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu, x_\rho P_\sigma - x_\sigma P_\rho] \\ &= [x_\mu P_\nu, x_\rho P_\sigma] - [x_\mu P_\nu, x_\sigma P_\rho] - [x_\nu P_\mu, x_\rho P_\sigma] + [x_\nu P_\mu, x_\sigma P_\rho]\end{aligned}$$

そして

$$\begin{aligned}[x_\mu P_\nu, x_\rho P_\sigma] &= [x_\mu, x_\rho P_\sigma]P_\nu + x_\mu[P_\nu, x_\rho P_\sigma] \\ &= i(\eta_{\mu\sigma}x_\rho P_\nu - \eta_{\rho\nu}x_\mu P_\sigma)\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}[L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}] &= i(\eta_{\mu\sigma}x_\rho P_\nu - \eta_{\rho\nu}x_\mu P_\sigma - \eta_{\mu\rho}x_\sigma P_\nu + \eta_{\sigma\nu}x_\mu P_\rho - \eta_{\nu\sigma}x_\rho P_\mu + \eta_{\rho\mu}x_\nu P_\sigma + \eta_{\nu\rho}x_\sigma P_\mu - \eta_{\sigma\mu}x_\nu P_\rho) \\ &= i(-\eta_{\nu\rho}(x_\mu P_\sigma - x_\sigma P_\mu) + \eta_{\mu\rho}(x_\nu P_\sigma - x_\sigma P_\nu) + \eta_{\nu\sigma}(x_\mu P_\rho - x_\rho P_\mu) - \eta_{\mu\sigma}(x_\rho P_\nu - x_\nu P_\rho)) \\ &= i(\eta_{\nu\rho}L_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\rho}L_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma}L_{\mu\rho} + \eta_{\mu\sigma}L_{\nu\rho})\end{aligned}$$

で確認できる。回転の無限小変換を繰り返すことで特殊直交群 $SO(d)$ を作る。また、生成子はリー代数 $so(d)$ を成す。

共形変換

並進・回転変換で見たように、計量テンソルの変化を見ることでどのような変換があるのか決まる。計量テンソルが座標変換 $x \to x'$ のもとで、

$$g_{\mu\nu} \to g'_{\mu\nu}(x') = \Lambda(x) g_{\mu\nu}(x) \tag{2.11}$$

の形まで変化してよいとする。このような変化となる変換を共形変換という。

この変換を Killing 方程式を通してどのようなものか見てみる。始めの計量テンソルを平坦な時空 $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ であるものとする。このとき、座標変換 $x^\mu \to x'^\mu = x^\mu - \epsilon^\mu(x)$ をすると計量テンソルは

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} \to g'_{\mu\nu} &= (\delta^\rho_\mu + \partial_\mu \epsilon^\rho)(\delta^\sigma_\nu + \partial_\nu \epsilon^\sigma) g_{\rho\sigma} \\ &= g_{\mu\nu} + \partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu \end{aligned}$$

となる。よって

$$\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu = f(x) g_{\mu\nu} \tag{2.12}$$

としてやれば、

$$g'_{\mu\nu} = (1 + f(x)) g_{\mu\nu}$$

となり、共形変換となる。ではこの $f(x)$ とはどのような形をしているのだろうか? (2.12) のトレースをとるつまり、両辺に $\eta^{\nu\mu}$ を掛けて添え字について足し合わせると、$\eta^{\nu\mu}\eta_{\mu\nu} = d$ となるので、

$$f(x) = \frac{2}{d} \partial_\mu \epsilon^\mu \tag{2.13}$$

また、(2.12) の両辺を ∂_ρ を作用させて

$$\partial_\rho \partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\rho \partial_\nu \epsilon_\mu = \partial_\rho f(x) g_{\mu\nu} \tag{2.14}$$

そして左辺の $\partial_\rho \epsilon_\mu, \partial_\rho \epsilon_\nu$ を (2.12) 式を使って、ϵ の添え字を ρ に変えるように変形すると

$$-2\partial_\mu \partial_\nu \epsilon_\rho = \partial_\rho f(x) g_{\mu\nu} - \partial_\mu f(x) g_{\nu\rho} - \partial_\nu f(x) g_{\rho\mu}. \tag{2.15}$$

さらに両辺のトレースをとって

$$-\partial^\mu \partial_\mu \epsilon_\rho = (d-2) \partial_\rho f(x) \tag{2.16}$$

これより、ϵ がある式には両辺にダランベルシアンを作用させることで $f(x)$ に変えることができるのがわかる。(2.12) の両辺に $\partial^\rho \partial_\rho$ を作用させて

$$(2-d) \partial_\mu \partial_\nu f(x) = \partial^\rho \partial_\rho f(x) g_{\mu\nu} \tag{2.17}$$

これが $f(x)$ の取る条件である。ただ、このままだとわかりにくいので両辺のトレースをとって

$$(d-1) \partial^\rho \partial_\rho f(x) = 0 \tag{2.18}$$

となる。これは $d = 1$ のときには $f(x)$ には何も制約を与えないことを表している。このことは 1 次元では角度が定義できないというのと関連しているそうである。また、$d = 2$ ではそもそもトレースをとる前の (2.17) 式の時点で左辺 $= 0$ となり、条件が緩くなっている。

$d = 2$ のときは次の章で調べることとして、$d > 2$ のときを調べてみる。二階微分が 0 であるため

$$f(x) = \alpha + \beta_\mu x^\mu$$

という形になる。これを (2.15) に入れてみると

$$-2\partial_\mu \partial_\nu \epsilon_\rho = \beta_\rho g_{\mu\nu} - \beta_\mu g_{\nu\rho} - \beta_\nu g_{\rho\mu}.$$

両辺のトレースをとってもいいが、すでに右辺が位置によらない量になっていることに注目すると

$$\epsilon_\mu = a_\mu + b_{\mu\nu} x^\nu + c_{\mu\nu\rho} x^\nu x^\rho \tag{2.19}$$

というような 2 次の式で書けるといえる。a_μ は並進変換を表しているのがわかる。また、2 次の項では x^ν と x^ρ は交換するので、c の後ろ 2 つの添え字は対称である。

(2.13) 式にこれを入れると

$$f(x) = \frac{2}{d}(b^\mu_\mu + c^\mu{}_{\mu\nu}x^\nu + c^\mu{}_{\nu\mu}x^\nu)$$

よって (2.12) 式は

$$b_{\mu\nu} + b_{\nu\mu} + 2(c_{\mu\nu\sigma} + c_{\nu\mu\sigma})x^\sigma = \frac{2}{d}b^\rho_\rho g_{\mu\nu} + \frac{4}{d}g_{\mu\nu}c^\rho{}_{\rho\sigma}x^\sigma$$

0 次の部分を比較して

$$b_{\mu\nu} + b_{\nu\mu} = \frac{2}{d}b^\rho_\rho g_{\mu\nu} \tag{2.20}$$

という条件式が得られる。ここで

$$b_{\mu\nu} = b^A_{\mu\nu} + b^S_{\mu\nu} = b^A_{\mu\nu} + \frac{1}{d}b^\rho_\rho g_{\mu\nu}$$

のように対称な部分と反対称な部分に分けることができる。反対称部分は回転変換に対応している。

対称部分について、この部分だけをもとの座標変換の式に入れると

$$\begin{aligned} x^\mu \to x'^\mu &= x^\mu - \frac{1}{d}b^\rho_\rho x^\mu \\ &=: x^\mu - bx^\mu \\ &= (1 - ib\underbrace{(-ix^\nu\partial_\nu)}_{D})x^\mu \end{aligned} \tag{2.21}$$

となる。この微分方程式を解くと変換パラメータを s として

$$x^\mu_s = x^\mu_0 \exp(-bs)$$

となる。つまりこれはスケール変換に対応している。

そして $c_{\mu\nu\sigma}$ の項については $b_{\mu\nu}$ を導出するのに使った (2.12) 式ではなく、(2.15) 式について考えるとよくて、これに ϵ と $f(x)$ の表式を入れると

$$\begin{aligned} -4c_{\rho\mu\nu} &= \frac{4}{d}(c^\sigma_{\sigma\rho}g_{\mu\nu} - c^\sigma_{\sigma\mu}g_{\nu\rho} - c^\sigma_{\sigma\nu}g_{\rho\mu}) \\ c_{\rho\mu\nu} &= B_\mu g_{\nu\rho} + B_\nu g_{\rho\mu} - B_\rho g_{\mu\nu}, \quad B_\rho = \frac{1}{d}c^\sigma{}_{\sigma\rho} \\ &= 2B_\mu g_{\nu\rho} - B_\rho g_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{2.22}$$

これより、2 次の項による変換は

$$\begin{aligned} x^\mu \to x'^\mu &= x^\mu - 2(x^\nu B_\nu)x^\mu + B^\mu|x|^2 \\ &= \Big(1 - iB^\rho\underbrace{\Big\{-i(2x_\rho x^\nu\partial_\nu - |x|^2\partial_\rho)\Big\}}_{K_\rho}\Big)x^\mu \end{aligned} \tag{2.23}$$

となる。これを特殊共形変換という。

共形変換の中にある無限小変換の生成子が出そろった。

$$\begin{aligned} P_\mu &= -i\partial_\mu \\ D &= -ix^\nu\partial_\nu && = x^\nu P_\nu \\ L_{\mu\nu} &= i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu) && = -(x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu) \end{aligned} \tag{2.24}$$

$$K_\rho = -i(2x_\rho x^\nu\partial_\nu - |x|^2\partial_\rho) = 2x_\rho D - |x|^2 P_\rho \tag{2.25}$$

そしてこれらの生成子は次の交換関係を持つ

$$\begin{aligned} [D, K_\mu] &= -iK_\mu, \quad [D, P_\mu] = iP_\mu, \\ [K_\mu, P_\nu] &= 2i(\eta_{\mu\nu}D - L_{\mu\nu}), \quad [K_\rho, L_{\mu\nu}] = i(\eta_{\rho\mu}K_\nu - \eta_{\rho\nu}K_\mu), \\ [P_\rho, L_{\mu\nu}] &= i(\eta_{\rho\mu}P_\nu - \eta_{\rho\nu}P_\mu), \\ [L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}] &= i(\eta_{\nu\rho}L_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\rho}L_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma}L_{\mu\rho} + \eta_{\mu\sigma}L_{\nu\rho}). \end{aligned} \tag{2.26}$$

ここで触れていないものはすべて可換。そしてこのような交換関係を満たす生成子によって構成される代数を共形代数という[*1]。

[*1] なので本文はちょっと不正確

実際にこれらの生成子の組み合わせ 10 通りとに加え、x との交換関係を調べておこう。交換関係のライプニッツ則

$$[ABC,\, D] = [A,\, D]BC + A[B,\, D]C + AB[C,\, D]$$

も使って、

$$\begin{aligned}
[x_\mu,\, P_\nu] &= i\eta_{\mu\nu} \\
[P_\mu,\, P_\nu] &= 0 \\
[P_\rho,\, L_{\mu\nu}] &= i(\eta_{\rho\mu}P_\nu - \eta_{\rho\nu}P_\mu) \quad \text{(並進・回転の節でやった。)} \\
[K_\mu,\, P_\nu] &= [2x_\mu D - x_\rho x^\rho P_\mu,\, P_\nu] \\
&= 2i\eta_{\mu\nu}D + 2ix_\mu P_\nu - i\eta_{\rho\nu}x^\rho P_\mu - i\delta^\rho_\nu x_\rho P_\mu \\
&= 2i\eta_{\mu\nu}D + 2i(x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu) \\
&= 2i(\eta_{\mu\nu}D - L_{\mu\nu})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[D,\, x_\mu] &= [x^\nu P_\nu,\, x_\mu] = -ix_\mu \\
[D,\, P_\mu] &= [x^\nu P_\nu,\, P_\mu] = iP_\mu \\
[D,\, D] &= [D,\, x^\mu P_\mu] = -ix^\mu P_\mu + ix^\mu P_\mu = 0 \\
[D,\, L_{\mu\nu}] &= [D,\, -(x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu)] \\
&= ix_\mu P_\nu - ix_\mu P_\nu - (\mu \leftrightarrow \nu) = 0 \\
[D,\, K_\mu] &= [D,\, 2x_\mu D - |x|^2 P_\mu] \\
&= -2ix_\mu D - [D,\, x_\rho]x^\rho P_\mu - x_\rho[D,\, x^\rho]P_\mu - \left|x^2\right|[D,\, P_\mu] \\
&= -2ix_\mu D + 2i|x|^2 P_\mu - i|x|^2 P_\mu \\
&= -i(2x_\mu D - |x|^2 P_\mu) = iK_\mu
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[x_\mu,\, K_\nu] &= [x_\mu,\, 2x_\nu D - |x|^2 P_\nu] = 2ix_\mu x_\nu - i|x|^2\eta_{\mu\nu} \\
&\to [x^\mu,\, K_\nu]P_\mu = -iK_\nu \\
[K_\mu,\, K_\nu] &= \\
[K_\rho,\, L_{\mu\nu}] &=
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[x_\rho,\, L_{\mu\nu}] &= [x_\rho,\, -(x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu)] = i(\eta_{\rho\mu}x_\nu - \eta_{\nu\rho}x_{[}\mu]) \\
[L_{\mu\nu},\, L_{\rho\sigma}] &= i(\eta_{\nu\rho}L_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\rho}L_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma}L_{\mu\rho} + \eta_{\mu\sigma}L_{\nu\rho}) \quad \text{(並進・回転の節でやった。)}
\end{aligned}$$

また、共形代数の同型らしきものが見える形を導入する。反対称行列 $J_{ab} = -J_{ba} \quad (a,\, b = -1,\, 0,\, 1,\, \dots,\, d)$ を導入し、

$$\begin{aligned}
J_{(-1)0} = D, \quad J_{(-1)\mu} = \frac{1}{2}(P_\mu - K_\mu), \\
J_{0\mu} = \frac{1}{2}(P_\mu + K_\mu), \quad J_{\mu\nu} = L\mu\nu
\end{aligned} \tag{2.27}$$

とすると、

$$[J_{ab},\, J_{cd}] = i(\eta_{bc}J_{ad} - \eta_{ac}J_{bd} - \eta_{bd}J_{ac} + \eta_{ad}J_{bc}) \tag{2.28}$$

という関係が成り立つことがわかる。

第 3 章

2 次元の共形場理論

第 4 章

ビラソロ代数の表現

第 5 章

ミニマル模型

第 6 章

カレント代数とコセット模型

第 7 章

W 代数とその表現

第 8 章

ホログラフィの基礎

第 9 章

高階スピン重力とホログラフィ

参考文献

[1] 柏太郎. 経路積分. 裳華房, 2015.