共形場理論入門 基礎からホログラフィへの道：ノート

しゃんごん (@CEY3944)

2024 年 8 月 11 日

目次

第 1 章

場の量子論の基礎

1.1 背景時空の対称性

時間を 1 次元、空間を $(d-1)$ 次元であるとして、線素を

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{1.1}$$

とする。ただしミンコフスキー計量は時間をマイナス、空間をプラスとする。

座標の線形空間

$$x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\nu_\mu x^\nu \tag{1.6}$$

を考える。これが線素の長さを変えないうよな変換である条件は

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu &= \eta_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu \\ &= \eta_{\mu\nu} \Lambda_{\rho\sigma} dx^\rho dx^\sigma \end{aligned}$$

より

$$\eta_{\rho\sigma} = \eta_{\mu\nu} \Lambda_{\rho\sigma} \tag{1.7}$$

であればよい。このような変換をローレンツ変換という。またローレンツ変換は群をなし、この群をローレンツ群という。

そして線素は並進変換

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + a^\mu \tag{1.8}$$

に対しても不変である。というのも微分をとると a^μ はなくなるためである。この並進変換とローレンツ変換を合わせた全体の変換は群をなし、ポアンカレ群と呼ばれる。

時間だけ計量がマイナスであるのを嫌って、代わりに時間の成分に $t \to \tau = it$ として虚数を入れることがある。こうすると計量はユークリッド空間と同じクロネッカーのデルタとなる。

ユークリッド化した計量テンソルのもとでは、ローレンツ変換は直交変換と同じものになっている。d 次元の直交変換のなす群を $O(d)$ と書く。また、リー群を考える。直交変換群の単位源の近傍にある無限小変換から生成される群は、固有値が変わらないことから、直交群から鏡映変換を除いたような変換からなる群となる。これを特殊直交群 $SO(d)$ と書かれる。

ユークリッド計量だけではなく、もとのような計量におけるローレンツ変換を分類してみる。時間成分の -1 が p 個で、空間成分の $+1$ が q 個あるような計量 $\eta_{\mu\nu}$ における、無限小変換が生成する変換群 $SO(p,q)$ と書く。

ユークリッド計量の時に、次元が $d=2n$ のときには

$$z^a = x^{2a-1} + ix^{2a}, \quad \bar{z} = x^\alpha 2a - ix^{2a} \tag{1.11}$$

というように複素座標を導入することができる。このとき、

$$\begin{aligned} dz^a d\bar{z}^a &= (dx^{2a-1} + idx^{2a})(dx^{2a-1} - idx^{2a}) \\ &= \left(dx^{2a-1}\right)^2 + \left(dx^{2a}\right)^2 \end{aligned}$$

より

$$ds^2 = \delta_{ab} dz^a d\bar{z}^b \tag{1.12}$$

とできる。

ここで、z のみ (あるいは $\bar{z}$) のみを混ぜる線形変換

$$z^a = M^a_b z^b, \quad \bar{z}^z = (M^a_b)^* \bar{z^b} \tag{1.13}$$

を考える。

ローレンツ変換が長さを変えない条件を考えたのと同様にして

$$\delta_{ab} M^a_c (M^b_d)^* = \delta_{bd} \tag{1.14}$$

というのがわかる。同じように考えて、M^a_b という変換をなす群全体はユニタリ群 $U(n)$ を成している。そして、M^a_b の行列式が 1 を満たすような変換全体の群を特殊ユニタリ群 $(SU(n))$ をなす。

1.2 相関関数の経路積分表示

場の理論では、背景時空上の点 x ごとに異なる値をとる場 $\phi(x)$ が基本要素となっている。これらの場を量子化することで場の量子論が構成される。量子化の方法としては場の交換関係を導入する量子化と、量子状態の遷移を系のラグランジアンから導かれる作用を使って記述する経路積分量子化がある。[*1]両者は同じ答えを与えると考えられている。[*2]

経路積分量子化では場の相関関数というのが大事になってくる。背景時空上の n 点上の場の相関関数は

$$\langle \phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)\rangle \tag{1.16}$$

と書かれれる。これがどういったものなのかをざっと見ていく。

経路積分

量子力学では位置演算子 $\hat{q}$ と運動量演算子 $\hat{p}$ の間には正準交換関係

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i \tag{1.17}$$

を満たすとしている。[*3]場の量子論へ拡張するにはハイゼンベルグ描像

$$\hat{q}(t) = \exp\Bigl(i\hat{H}t\Bigr)\hat{q}\exp\Bigl(-i\hat{H}t\Bigr) \tag{1.18}$$

にして、演算子に時間依存するようにするとよい。[*4] 量子力学における重要な物理量として遷移確率がある。時刻 t_i に位置 q_i あった粒子が、時刻 t_f に位置 q_f へと遷移する確率は

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i\rangle = \langle q_f| \exp\Bigl[-i\hat{H}(t_f - t_i)\Bigr] |q_i\rangle \tag{1.21}$$

で与えられる。ここで、時間間隔を N 等分して

$$t_m = t_i + m\Delta t, \quad \Delta t = \frac{t_f - t_i}{N} \tag{1.22}$$

と定義すると遷移確率は

$$\langle q_f, t_f|q_i, t_i\rangle = \int dq_{N-1}dq_{N-2}\cdots dq_1 \,\langle q_N, t_N|q_{N-1}, t_{N-1}\rangle \langle q_{N-1}, t_{N-1}|q_{N-2}, t_{N-2}\rangle \cdots \langle q_2, t_2|q_1, t_1\rangle \tag{1.23}$$

となる。

積分の中の 1 つのブラケットの中身をこのように書き換えよう

$$\begin{aligned} \langle q_{m+1}, t_{m+1}|q_m, t_m\rangle &= \langle q_{m+1}, t_{m+1}| \exp\Bigl(-i\hat{H}\Delta t\Bigr) |q_m, t_m\rangle \\ &= \int dp_m \,\langle q_{m+1}, t_{m+1}|p_m\rangle \langle p_m| \exp\Bigl(-i\hat{H}\Delta t\Bigr) |q_m, t_m\rangle \end{aligned} \tag{1.24}$$

[*1] 経路積分を知らないので間違ってるかもしれない。

[*2] 証明がない感じ?

[*3] 面倒なので $\hbar = 1$ としている。

[*4] ハイゼンベルグ描像でいいのかな。相互作用表示だったりしない?

ここで、

$$\langle p_m| \exp\Big(-i\hat{H}\Delta t\Big) |q_m,\, t_m\rangle = \langle p_m|q_m\rangle - i \langle p_m| \hat{H} |q_m\rangle \Delta t \tag{1.25}$$

でありそして、

$$\langle p_m| \hat{H}(\hat{p},\, \hat{q}) |q_m\rangle = H(p_m,\, q_m) \langle p_m|q_m\rangle \tag{1.26}$$
$$\langle q_n|p_m\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp^{ip_n q_m}$$

であるので

$$\begin{aligned}\int dp_m \langle q_{m+1},\, t_{m+1}|p_m\rangle \langle p_m| \exp\Big(-i\hat{H}\Delta t\Big) |q_m,\, t_m\rangle &= \int dp_m \exp(-iH(p_m,\, q_m)\Delta t\,) \langle q_{m+1},\, t_{m+1}|p_m\rangle \\ &\simeq \int \frac{dp_m}{2\pi} \exp[ip_m(q_{m+1} - q_m) - iH(p_m,\, q_m)\Delta t\,] \\ &= \int \frac{dp_m}{2\pi} \exp\left[i\left\{p_m \frac{q_{m+1} - q_m}{\Delta t} - H(p_m,\, q_m)\right\}\Delta t\right]\end{aligned} \tag{1.27}$$

よって遷移確率は $N \to \infty$ として

$$\begin{aligned}\langle q_f,\, t_f|q_i,\, t_i\rangle &= \lim_{N\to\infty} \int \left[\prod_{m=1}^{N-1} \frac{dp_m dq_m}{2\pi}\right] \frac{dp_0}{2\pi} \exp\left[i\left\{\sum_{m=0}^{N-1} \left(p_m \frac{q_{m+1} - q_m}{\Delta t} - H(p_m,\, q_m)\right)\Delta t\right\}\right] \\ &= \int [dp\, dq] \exp\left[i \int_{t_i}^{t_f} dt(p\dot{q} - H(p,\, q))\right]\end{aligned} \tag{1.28}$$

$[dp\, dq]$ は積分の測度である。ここでハミルトニアンが

$$\hat{H}(\hat{p},\, \hat{q}) = \frac{1}{2}\hat{p}^2 + V(\hat{q}) \tag{1.29}$$

で与えられるとする。こうすると遷移確率は

$$\begin{aligned}\int [dp\, dq] \exp\left[i \int_{t_i}^{t_f} dt(p\dot{q} - \frac{1}{2}p^2 - V(q))\right] &= \int [dp\, dq] \exp\left[i \int_{t_i}^{t_f} dt\left\{-\frac{1}{2}(p - \dot{q})^2 + \frac{1}{2}\dot{q}^2 - V(q)\right\}\right] \\ &= \int [dq] \exp\left[i \int_{t_i}^{t_f} dt\left\{\frac{1}{2}\dot{q}^2 - V(q)\right\}\right] \\ &= \int [dq] \exp\left[i \int_{t_i}^{t_f} dt\, L(q,\, \dot{q})\right]\end{aligned} \tag{1.30}$$

というようにラグランジアンを用いて表せる。さらに作用

$$S = \int dt\, L(q,\, \dot{q}) \tag{1.31}$$

を導入すると

$$\langle q_f,\, t_f|q_i,\, t_i\rangle = \int [dq] e^{iS}$$

というようにあらわせる。

時間順序積

さらにある時刻 $t_f > t > t_i$ に $q(t)$ を挿入した経路積分を考えてみよう。この経路積分は

$$\int [dq] q(t) \exp\left[i \int_{t_i}^{t_f} dt\, L(q,\, \dot{q})\right] = \int dq \int [dq]' \exp\left[i \int_{t}^{t_f} dt\, L(q,\, \dot{q})\right] q \exp\left[i \int_{t_i}^{t} dt\, L(q,\, \dot{q})\right] \tag{1.32}$$

と表せる。$[dq]'$ は時刻 t での q 積分を取り除いた測度。この式自体は何をしている式かというと、$\langle \hat{q}(t)\rangle$ を求めている。またこの表式は

$$\begin{aligned}\int [dq] q(t) \exp\left[i \int_{t_i}^{t_f} dt\, L(q,\, \dot{q})\right] &= \int dq \langle q_f,\, t_f|q_t,\, t\rangle\, q \langle q,\, t|q_i,\, t_i\rangle \\ &= \int dq \langle q_f,\, t_f| q(t) |q_t,\, t\rangle \langle q,\, t|q_i,\, t_i\rangle \\ &= \int dq \langle q_f,\, t_f| \hat{q}(t) |q_t,\, t\rangle \langle q,\, t|q_i,\, t_i\rangle \\ &= \langle q_f,\, t_f| \hat{q}(t) |q_i,\, t_i\rangle\end{aligned} \tag{1.33}$$

というように演算子 $\hat{q}(t)$ の挿入と同等になる。同様にして $q(t)q(t'),\quad (t_f > t,\, t' > t_i)$ という積を経路積分に入れる。すると、自動的に時間順序に並ぶので

$$\int [dq] q(t) q(t') \exp\left[i \int_{t_i}^{t_f} dt\, L(q,\, \dot{q}) \right] = \langle q_f,\, t_f |\, T[\hat{q}(t),\, \hat{q}(t')]\, | q_i,\, t_i \rangle \tag{1.34}$$

$$T[\hat{A}(t),\, \hat{B}(t')] = \begin{cases} \hat{A}(t)\hat{B}(t') & (t > t') \\ \hat{B}(t')\hat{A}(t) & (t' > t) \end{cases} \tag{1.35}$$

となる。$T[\hat{A}(t),\, \hat{B}(t')]$ を時間順序積という。

虚時間形式と真空振幅

次に $t \to \tau = it$ のようにユークリッド化した場合を考えてみよう。エネルギー固有値を

$$\hat{H} \left| n \right\rangle = E_n \left| n \right\rangle \tag{1.36}$$

とする。遷移確率は

$$\begin{aligned} \langle q_f,\, t_f | q,\, t \rangle &= \langle q_f |\exp\left[-i\hat{H} t_f \right] | q_i,\, t \rangle \\ &= \sum_n \langle q_f | n \rangle \exp[-iE_n t_f] \langle n | q_i,\, t \rangle \\ &= \sum_n \langle q_f | n \rangle \exp[-E_n \tau_f] \langle n | q_i,\, t \rangle \end{aligned} \tag{1.37}$$

ここで $\tau_f \to \infty$ とすると、エネルギーの最も小さい基底状態 $|0\rangle$ のみが残ると考えられる。したがって

$$\begin{aligned} \langle q_f,\, t | q,\, t \rangle &= \exp(-E_0 \tau_j) \langle q_f | 0 \rangle \langle 0 | q,\, t \rangle \\ &= \exp(-E_0(\tau_j - \tau)) \langle q_f | 0 \rangle \langle 0 | q \rangle \end{aligned} \tag{1.38}$$

となる。なんだかきれいになりそうなので、(1.34) 式の初期状態の時刻を無限の過去、終状態の時刻を無限の未来にして、n 点の時刻における位置の積を考えてみると

$$\begin{aligned} &\langle q_f,\, t_f | T[\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)\cdots\hat{q}(t_n)]\, | q_i,\, t_i \rangle \\ &\quad = \int dq\, dq' \langle q_f,\, t_f | q,\, t \rangle\, T[\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)\cdots\hat{q}(t_n)] \langle q',\, t | q_i,\, t_i \rangle \\ &\quad = \int dq\, dq' \langle q_f,\, t_f |\exp\left[-i\hat{H}(t_f - t) \right] | q \rangle\langle q |\, T[\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)\cdots\hat{q}(t_n)]\, | q' \rangle\langle q' | \exp\left[-i\hat{H}(t - t_i) \right] | q_i,\, t_i \rangle \\ &\quad \to \exp(-E_0(\tau_f - \tau_i)) \langle q_f | 0 \rangle \langle 0 |\, T[\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)\cdots\hat{q}(t_n)]\, | 0 \rangle \langle 0 | q_i \rangle \\ &\quad = \langle q_f,\, t_f | q_i,\, t_i \rangle \langle 0 |\, T[\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)\cdots\hat{q}(t_n)]\, | 0 \rangle \end{aligned} \tag{1.39}$$

相関関数は $\langle q_f,\, t_f |\, T[\hat{q}(t_1)\cdots\hat{q}(t_n)]\, | q_t,\, t \rangle \,/\, \langle q_f,\, t_f | q_i,\, t_i \rangle$ のことであるので、n 点の相関数は経路積分の言葉では

$$\begin{aligned} \langle 0 |\, T[\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)\cdots\hat{q}(t_n)]\, | 0 \rangle &= \lim_{(\tau_f,\, \tau_i) \to (\infty,\, -\infty)} \left[\frac{\langle q_f,\, t_f |\, T[\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)\cdots\hat{q}(t_n)]\, | q_i,\, t_i \rangle}{\langle q_f,\, t_f | q_i,\, t_i \rangle} \right] \\ &= \frac{\int [dq] q(t_1) q(t_2) \cdots q(t_n) \exp(-S_E(q,\, \dot{q}))}{\int [dq] \exp(-S_E(q,\, \dot{q}))} \end{aligned} \tag{1.40}$$

のように各位置の時間順序積をエネルギー基底状態で挟みこむことであらわせることがわかる。ここで、ユークリッド化した作用とラグランジアン

$$S_E := \int d\tau L_E(q,\, \partial_\tau q) = -\int d\tau L(q,\, i\partial_\tau q) = iS \tag{1.41}$$

を使った。

柏太郎『経路積分』[1] によると、この式は経路積分の歴史的には結構大事らしい。というのも 1960 年代の人たちは解析力学の作用停留の原理からくる式ではあるので正しいと感じはしていたが、量子論なのに演算子の非可換性や基底状態といったものがあまり露わになっていないというので、経路積分を信用しきれていなかった。ただこの表式を見ると、n 点相関関数というのは基底状態の位置の期待値のような式になっている。つまり、ちゃんと基底状態というのあるというのがわか

るので少し安心したようである。ここら辺のアイデアはファインマンではなく 1971 に韓国の方 による経路積分のレビューで触れられたらしい。

場の量子論への拡張は q のみの 1 自由度系から q^a の多自由度系へと移り、添え字 a として、各点の空間座標 x^j をとればよい。経路積分の測度は

$$\prod_a [dq^a] = \prod_a \prod_\tau dq^a(\tau) \to [d\phi] = \prod_{x^j} \prod_\tau d\phi(x^j,\, \tau) \tag{1.42}$$

となる。したがって、場の理論での相関関数は

$$\langle \phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)\rangle = \frac{1}{Z}\int [d\phi]\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)\exp(-S(\phi)) \tag{1.43}$$

$$Z = \int [d\phi]\exp(-S(\phi)) \tag{1.44}$$

となる。この Z は真空振幅とも、分配関数とも呼ばれる。

1.3 作用と対称性

場を考えるときにはラグランジアンではなく、ラグランジアン密度を使うとよい。そうしたときの作用は

$$S = \int d^d x\, \mathcal{L}(\phi,\, \partial_\mu \phi) \tag{1.45}$$

のように書ける。この節では古典的な議論がしやすいように虚時間形式は使わない。なので相関関数を計算するときには e^{iS} の重みで計算するとよい。

物理の要請として、実現する運動は作用が停留するという条件がある。なので作用の変分をとると

$$\begin{aligned}\delta S &= \int d^d x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\,\delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\,\delta(\partial_\mu \phi)\right] \\ &= \int d^d x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi}\right]\delta\phi \end{aligned} \tag{1.46}$$

よりオイラーラグランジュ方程式

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\right) = 0 \tag{1.47}$$

が得られる。

ネーターカレントの導出 (不正確)

古典的には運動方程式を不変に保つ場の変形を対称性と呼ぶ。無限小パラメータ ϵ^a と変換の生成子 G_a を導入して場の無限小変換を書くと

$$\phi(x) \to \phi'(x) = \phi(x) + \epsilon^a G_a \phi(x). \tag{1.48}$$

つまり

$$\delta\phi = \epsilon^a G_a \phi$$

というのを作用の変分の式に入れることになる。なので

$$\begin{aligned}\delta S &= \epsilon^a \int d^d x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} G_a \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\partial_\mu(G_a\phi)\right] \\ &= \epsilon^a \int d^d x \left[\left\{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\right)\right\} G_a\phi + \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} G_a \phi\right)\right]\end{aligned} \tag{1.49}$$

場が運動方程式を満たす on-shell 条件のもとでは、一番右にある項は 0 になる。

$$j_a^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} G_a \phi \tag{1.50}$$

という量を定義すると、

$$\partial_\mu j_a^\mu = 0 \tag{1.51}$$

となる。これの第 0 成分を時間成分を取り除いた空間成分で積分した量

$$Q_a = \int d^{d-1}x\, j_a^0 \tag{1.52}$$

を"電荷"と呼ぶ。これは次のようにして保存量だとわかる。

$$\frac{\mathrm{d}Q_a}{\mathrm{d}t} = \int d^{d-1}x\, \partial_0 j_a^0 = -\int d^{d-1}x \partial x^i j_a^i = -\int_\partial d^d x\, j_a^i = 0 \tag{1.53}$$

このように無限小変換に対して不変性があるときには保存量が存在するのがわかる。これをネーターの定理といい、その"電荷"密度と流れをまとめてネーターカレントという。

ネーターカレントの導出 (ちょっとはまし)

座標と場がそれぞれ独立に

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu - \delta x^\mu(x), \quad \phi'(x') = \phi(x) + \delta\phi(x)$$

というように変化するときのラグランジアン密度の変換を追ってみる。

$$\mathcal{L}(\phi'(x),\, \partial'_\mu \phi'(x)) = \mathcal{L}(\phi(x),\, \partial_\mu\phi(x)) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\,\delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\,\delta(\partial_\mu\phi)$$

そして、

$$\begin{aligned}\partial'_\mu \phi'(x) &= \frac{\partial x^\nu}{\partial x'_\mu}\partial_\nu \phi'(x) = (\delta^\nu_\mu + \partial_\mu \delta x^\nu)\partial_\nu(\phi(x) + \delta\phi) \\ \to \quad & \delta(\partial_\mu\phi) = \partial_\mu\,\delta\phi + (\partial_\mu \delta x^\nu)\partial_\nu \phi\end{aligned}$$

よって

$$\mathcal{L}(\phi'(x),\, \partial'_\mu \phi'(x)) = \mathcal{L}(\phi(x),\, \partial_\mu\phi(x)) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\,\delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\,(\partial_\mu\,\delta\phi + (\partial_\mu \delta x^\nu)\partial_\nu\phi)$$

さらに積分測度の変換

$$d^d x' = \det\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right) = (1 - \partial_\mu \delta x^\mu) d^d x$$

も考慮して、これらより作用の変分は

$$\begin{aligned}\delta S &= \int d^d x'\, \mathcal{L}(\phi'(x'),\, \partial'_\mu\phi'(x')) - \int d^d x\, \mathcal{L}(\phi(x),\, \partial_\mu\phi(x)) \\ &= \int d^d x \left[(1 - \partial_\mu \delta x^\mu)\left\{\mathcal{L}(\phi(x),\, \partial_\mu\phi(x)) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\phi}\,\delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\,(\partial_\mu\,\delta\phi + (\partial_\mu\delta x^\nu)\partial_\nu\phi)\right\} - \mathcal{L}\right] \\ &= \int d^d x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\phi}\,\delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\{\partial_\mu\,\delta\phi + (\partial_\mu \delta x^\nu)(\partial_\nu\phi)\} - \mathcal{L}(\partial_\mu\delta x^\mu)\right] \\ &= \int d^d x \left[\partial_\mu\left\{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\underbrace{(\delta\phi + \delta x^\nu \partial_\nu\phi)}_{Lie\ 微分\bar{\delta}\phi} - \mathcal{L}\delta x^\mu\right\} + \underbrace{\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right\}}_{\delta\mathcal{L}/\delta\phi}\delta\phi - \delta x^\nu \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\,(\partial_\nu\phi)\right) + \delta x^\mu \partial_\mu \mathcal{L}\right]\end{aligned}$$

となる。下線の Lie 微分は

$$\bar{\delta}\phi(x) := \phi'(x) - \phi(x) = \phi(x + \delta x) + \delta\phi(x + \delta x) - \phi(x) = \delta\phi(x) + \delta x^\nu \partial_\nu \phi(x)$$

であり、ラグランジアン密度の変分はオイラーラグランジュ方程式のことであることを使った。 あんまり想像できないが、ラグランジアンが座標に陽に依存しているときには

$$\partial_\mu \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\phi}\partial_\mu\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi)}\partial_\mu\partial_\nu\phi + \hat{\partial}_\mu\mathcal{L}$$

というように書ける。ここで $\hat{\partial}_\mu$ はラグランジアンの座標に陽に依存する部分を微分するものである。よって作用の変分は

$$\delta S = \int d^d x \left[\partial_\mu\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\bar{\delta}\phi - \mathcal{L}\delta x^\mu\right\} + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi}\bar{\delta}\phi + \hat{\partial}_\mu\mathcal{L}\delta x^\mu\right]$$

場がオイラーラグランジュ方程式を満たす on-shell 条件かつ、ラグランジアンが座標に陽に依存しないとき、作用の変分は

$$\delta S = \int d^d x \left[\partial_\mu \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \bar{\delta}\phi - \mathcal{L}\delta x^\mu \right\} \right]$$

となる。これが 0 となるには

$$0 = \partial_\mu \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \bar{\delta}\phi - \mathcal{L}\delta x^\mu \right\} =: \epsilon \partial_\mu j^\mu$$

というようになる。ここでの ϵ は変分の微小パラメータのイメージ。この j^μ をネーターカレントといい、Lie 微分を書き下して、外微分の性質による自由度を加えると

$$\epsilon j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi + \delta x^\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi - \delta^\mu_\nu \mathcal{L} \right) + \partial_\nu \underbrace{B^{\mu\nu}}_{\text{反対称}} \tag{1.A}$$

というようになる。スカラー場でないような座標変換とともに場も変化するときには、余った反対称テンソルの成分を使って場の変換を打ち消したりするらしい。

座標変換による変化を見るとなったとき、座標はそのままで場自体が変わる能動的変換では $\delta\phi$ のみが変わり、場は動かさず座標が変わる受動的変換では δx のみが変わる。教科書ではこの両者を混ぜて使っているので混乱の原因になっている。(1.50) 式の指しているネーターカレントは座標系が変わらず場のみが変化している状況である。本文もそのように書いているが (1.57) 式では座標系のみが変化したときのネーターカレントとなっている。この描像の切り替わりについて説明すればよいものを、スカラー場の変換を扱うと言ってごまかしているのだ。

例 1: 並進対称性

スカラー場が並進対称性つまり、座標を

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu - \epsilon^\mu \tag{1.54}$$

というように動かしても、物理が変わらないという対称性を考える。このときスカラー場は

$$\phi'(x') = \phi(x)$$

と変化する。もとの座標 x におけるスカラー場の値は

$$\phi(x) \to \phi'(x) = \phi(x + \epsilon) = \phi(x) + \epsilon^\mu \partial_\mu \phi(x) \tag{1.55}$$

というように書くことができる (Lie 微分)。それとは関係なくネーターカレントの式 (1.A) に $\delta\phi = 0,\ \delta x^\nu = \epsilon^\nu$ を入れてやる。このとき、微小パラメータは 1 成分だけでなく各方向ごとにあるので

$$\epsilon^\mu j^\nu = T^{\mu\nu}$$

のようにネーターカレントの足が増えるので、

$$T^\mu{}_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi - \delta^\mu_\nu \mathcal{L} \tag{1.56}$$

となる。この保存カレントはエネルギー運動量テンソルと呼ばれる。それぞれの対応する保存電荷は

$$H = \int d^{d-1}x\, T^{00} \tag{1.57}$$

$$P^j = \int d^{d-1}x\, T^{0j} \tag{1.58}$$

となる。これらがハミルトニアンと運動量である。

例 2: 回転対称性

回転を表す無限小回転

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu - \epsilon^{\mu\nu} x_\nu$$

とスカラー場を考える。このときのネーターカレントは (1.A) 式より

$$\epsilon j^\mu = \epsilon^{\nu\rho} x_\rho \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi)} (\partial_\nu \phi) - \delta^\mu{}_\nu \mathcal{L} \right) = \epsilon^{\nu\rho} x_\rho T^\mu{}_\nu = \frac{1}{2} \epsilon^{\nu\rho} \left(x_\rho T^\mu{}_\nu - x_\nu T^\mu{}_\rho \right)$$

回転の無限小パラメータは $\epsilon^{\mu\nu}/2$ のようにとる習わしであるので回転変換に対するネーターカレントは

$$j^\mu{}_{\nu\rho} = x_\rho T^\mu{}_\nu - x_\nu T^\mu{}_\rho$$

となる。ここで試しに触ってみたように座標系のみが変換するといったときにはエネルギー運動量テンソルが現れることがわかる。共形場理論においてこのエネルギー運動量テンソルは大事な量なのだ。

1.4 相関関数と対称性

量子論における相関関数 $\langle \phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n) \rangle$ に関する対称性を考える。

ユークリッド背景の下での相関関数は、経路積分の言葉では (1.43) のようにあらわすことができる。場 $\phi(x)$ と結合する外場 $J(x)$ を導入して、生成汎関数

$$Zj = \int [d\phi] \exp\left[-S(\phi) + \int d^d x\, J(x)\phi(x) \right] \tag{1.60}$$

を定義する。すると相関関数は汎関数微分を用いて

$$\langle \phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n) \rangle = \frac{1}{Z[0]} \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \frac{\delta}{\delta J(x_2)} \cdots \frac{\delta}{\delta J(x_n)} Z[J] \bigg|_{J=0} \tag{1.61}$$

で表すことができる。実際

$$\begin{aligned}
\frac{1}{Z[0]} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x_i)} \bigg|_{J=0} &= \frac{1}{Z[0]} \int [d\phi(x)] \exp[-S(\phi)] \frac{\delta}{\delta J(x_i)} \exp\left[\int d^d x\, J(x)\phi(x) \right] \bigg|_{J=0} \\
&= \frac{1}{Z[0]} \int [d\phi(x)] \exp[-S(\phi)] \exp\left[\int d^d x\, J(x)\phi(x) \right] \frac{\delta}{\delta J(x_i)} J(x)\phi(x) \bigg|_{J=0} \\
&= \frac{1}{Z[0]} \int [d\phi] \phi(x_i) \exp\left[-S(\phi) + \int d^d x\, J(x)\phi(x) \right] \bigg|_{J=0} \\
&= \frac{1}{Z[0]} \int [d\phi] \phi(x_i) \exp[-S(\phi)] \\
= \langle \phi(x_i) \rangle
\end{aligned}$$

というようにわかる。

例：自由スカラー場

作用を

$$S = \frac{1}{2} g \int d^d x (\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - m^2 \phi^2) \tag{1.62}$$

とする。[*5] この時の生成汎関数は

$$\begin{aligned}
Z[J] &= \int [d\phi] \exp\left[-\frac{1}{2} \int d^d x d^d y\, \phi(x) K(x, y) \phi(y) + \int d^d x\, J(x)\phi(x) \right] \\
K(x, y) &= g\delta(x - y)(-\partial^\mu \partial_\mu + m^2)
\end{aligned} \tag{1.63}$$

と書ける。

ここ多変数のガウス積分の公式

$$\begin{aligned}
\int d^m \phi \, \exp\left[-\frac{1}{2} \phi_p K^{pq} \phi_q + J^p \phi_p \right] &= \underbrace{\int d^m \phi \exp\left[-\frac{1}{2} (\phi - J)_p K^{pq} (\phi - K)_q \right]}_{J=0\text{ のときの積分と同じ}} \exp\left[\frac{1}{2} J^p (K^{-1})_{pq} J^q \right] \\
&= \sqrt{\frac{(2\pi)^n}{\det a}} \exp\left[\frac{1}{2} J^p (K^{-1})_{pq} J^q \right]
\end{aligned} \tag{1.66}$$

[*5] 本文だと $+m$ になってるが誤植

を参考にすると積分することができる。最後に出た K^{-1} というのは演算子 $K(x,\, y)$ に対する逆操作、つまりグリーン関数のことである。定義としては

$$\int d^d z K(x,\, z) K^{-1}(z,\, y) = \delta(x-y) \tag{1.71}$$

である。

よって

$$Z[J] = Z[0] \exp\left[\frac{1}{2}\int d^d x d^d y\, J(x) K^{-1}(x,y) J(y)\right] \tag{1.67}$$

と書ける。

この式を見ると、自由スカラー場において汎関数微分を奇数回行うと $J(x)$ の項が残ってしまうため、最後に $J(x)=0$ する際に消えてしまうのがわかる。よって

$$\langle \phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_{2n-1})\rangle = 0 \tag{1.68}$$

となる。偶数回やったときには値が残る。試しに 2 点相関関数を求めてみる。

$$\begin{aligned}
&\langle \phi(x_1)\phi(x_2)\rangle \\
&= \frac{1}{Z[0]}\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\frac{\delta}{\delta J(x_2)} Z[J]\bigg|_{J=0} \\
&= \frac{\delta}{\delta J(x_1)}\left\{\exp\left[\frac{1}{2}\int d^d x d^d y\, J(x)K^{-1}(x,y)J(y)\right]\left(\frac{1}{2}\int d^d x J(x) K^{-1}(x,\, x_2) + K^{-1}(x_2,\, x) J(x)\right)\right\}\bigg|_{J=0} \\
&= \exp\left[\frac{1}{2}\int d^d x d^d y\, J(x)K^{-1}(x,y)J(y)\right] \\
&\qquad \left(\frac{1}{2}\int d^d x J(x)K^{-1}(x,\, x_2) + K^{-1}(x_2,\, x)J(x)\right)\left(\frac{1}{2}\int d^d x J(x) K^{-1}(x,\, x_1) + K^{-1}(x_1,\, x)J(x)\right)\bigg|_{J=0} \\
&\qquad + \frac{1}{2}\exp\left[\frac{1}{2}\int d^d x d^d y\, J(x)K^{-1}(x,y)J(y)\right]\left(K^{-1}(x_1,\, x_2) + K^{-1}(x_2,\, x_1)\right)\bigg|_{J=0} \\
&= \frac{1}{2}(K^{-1}(x_1,\, x_2) + K^{-1}(x_2,\, x_1)) \\
&= K^{-1}(x_1,\, x_2)
\end{aligned} \tag{1.70}$$

というように計算できる。では 4 点相関関数はというと、上にある計算結果を途中まで使うことができて、

$$\begin{aligned}
&\langle \phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)\rangle \\
&= \frac{\delta}{\delta J(x_1)}\frac{\delta}{\delta J(x_2)}\left\{\exp\left[\frac{1}{2}\int d^d x d^d y\, J(x)K^{-1}(x,y)J(y)\right]\right. \\
&\qquad \left(\frac{1}{2}\int d^d x J(x)K^{-1}(x,\, x_4) + K^{-1}(x_4,\, x)J(x)\right)\left(\frac{1}{2}\int d^d x J(x)K^{-1}(x,\, x_3) + K^{-1}(x_3,\, x)J(x)\right)\bigg|_{J=0} \\
&\qquad \left. + \frac{1}{2}\exp\left[\frac{1}{2}\int d^d x d^d y\, J(x)K^{-1}(x,y)J(y)\right]\left(K^{-1}(x_3,\, x_4) + K^{-1}(x_4,\, x_3)\right)\bigg|_{J=0}\right\} \\
&= K^{-1}(x_2,\, x_4)K^{-1}(x_1,\, x_3) + K^{-1}(x_1,\, x_4)K^{-1}(x_2,\, x_3) + K^{-1}(x_1,\, x_2)K^{-1}(x_3,\, x_4)
\end{aligned}$$

となる。これを一般化すると

$$\langle \phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)\rangle = K^{-1}(x_1,\, x_2)K^{-1}(x_3,\, x_4)\cdots K^{-1}(x_{2n-1},\, x_{2n}) + \cdots \tag{1.69}$$

というようになる。最後の $\cdots$ は x_j のすべての組み合わせに関する和である。つまり、2 点相関関数の積をすべての場合に関して和をとったものになる。なので自由スカラー場に関しては 2 点相関関数を調べることが重要になる。

では 2 点相関関数はどのような形をしているのか。グリーン関数の定義より

$$\begin{aligned}
\delta(x-y) &= \int d^d z\, K(x,\, z)K^{-1}(z,\, y) \\
&= g(-\partial^\mu\partial_\mu + m^2)K^{-1}(x,\, y)
\end{aligned} \tag{1.71}$$

となる。この後の議論のため、2 次元かつ質量なしの K^{-1} を求める。この関数はスカラー量なので、関数は 2 点間の距離 $r = |x-y|$ の関数になっているので $K^{-1}(x,\, y) = D(r)$ のように置くことができる。また距離で見るとなったら、極座標をとるのがよいので

$$x^1 - y^1 = \rho\sin\theta, \qquad x^2 - y^2 = \rho\cos\theta \tag{1.72}$$

のようにする。(1.71) の両辺を積分して

$$1 = 2\pi g \int_0^r d\rho\,\rho\left(-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\frac{\partial}{\partial\rho}D(\rho)\right) = -2\pi r\partial_r D(r) \tag{1.73}$$

よって

$$D(r) = -\frac{1}{2\pi g}\ln r \tag{1.74}$$

となる。よって 2 点相関関数は

$$\langle\phi(x_1)\phi(x_2)\rangle = -\frac{1}{2\pi g}\ln|x_1 - x_2| \tag{1.75}$$

で与えられる。

作用が

$$x \to x', \qquad \phi(x) \to \phi'(x') = \mathcal{F}(\phi(x)) \tag{1.76}$$

のような有限変換のもとで不変であるとする。すると

$$\begin{aligned}\langle\phi'(x_1')\phi'(x_2')\cdots\phi'(x_n')\rangle &= \frac{1}{Z}\int[d\phi']\phi'(x_1')\phi'(x_2')\cdots\phi'(x_n')\exp[-S(\phi')] \\ &= \frac{1}{Z}\int[d\phi]\mathcal{F}(\phi(x_1))\mathcal{F}(\phi(x_2))\cdots\mathcal{F}(\phi(x_n))\exp[-S(\phi)]\end{aligned} \tag{1.77}$$

となる。2 つ目の等号では作用と積分測度が変換のもと変わらないこと

$$S[\phi'] = S[\phi], \qquad [d\phi'] = [d\phi] \tag{1.78}$$

というのを使った。ただし、積分測度は量子異常により敗れることがある。ここでは労使論でも対称性が成り立っていると仮定している。

(1.77) 式より

$$\langle\phi'(x_1')\phi'(x_2')\cdots\phi'(x_n')\rangle = \langle\mathcal{F}(\phi(x_1))\mathcal{F}(\phi(x_2))\cdots\mathcal{F}(\phi(x_n))\rangle \tag{1.79}$$

となる。

Schwinger-Dyson 方程式 *

経路積分を考えると作用が停留するような運動以外の寄与というのも考えることになる。なので運動方程式 $\delta S/\delta\phi = 0$ が量子論においてどのような補正を受けるかを考える。場が

$$\phi(x) \to \phi'(x) = \phi(x) + \delta\phi(x)$$

のように変わるものとする。場を引数とする関数の期待値は変換によって変わらないという式

$$\langle F[\phi]\rangle = \frac{1}{Z}\int[d\phi]F[\phi]\exp[-S(\phi)] = \frac{1}{Z}\int[d\phi']F[\phi']\exp[-S(\phi')]$$

これの 2 つ目の等号について差をとって、1 次の微小量まで取ると

$$\begin{aligned}0 &= \int[d\phi']\,F[\phi']\exp[-S(\phi')] - \int[d\phi]\,F[\phi]\exp[-S(\phi)] \\ &= \int[d\phi]\,\Big(F[\phi+\delta\phi]\exp[-(S+\delta S)] - F[\phi]\exp[-S(\phi)]\Big) \\ &= \int[d\phi]\left(F[\phi]\exp[-S(\phi)] + \int d^dx\,\frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi}\,\delta\phi\exp[-S(\phi)] - F[\phi]\,\delta S\exp[-S(\phi)] - F[\phi]\exp[-S(\phi)]\right) \\ &= \int[d\phi]\left(\int d^dx\,\frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi}\,\delta\phi\exp[-S(\phi)] - F[\phi]\,\delta S\exp[-S(\phi)]\right) \\ &= \int[d\phi]\int d^dx\ \delta\phi\left(\frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi}\,\delta\phi - F[\phi]\frac{\delta S(\phi)}{\delta\phi}\right)\exp[-S(\phi)]\end{aligned}$$

となる。

したがってこの式より

$$\left\langle \frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi} F[\phi] \right\rangle = \left\langle \frac{\delta F[\phi]}{\delta \phi} \right\rangle$$

となる。特別な場合として $F[\phi] = \phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)$ としたもの、

$$\left\langle \frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi} \phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n) \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \delta(x - x_j) \left\langle \phi(x_1)\phi(x_2)\cdots \cancel{\phi(x_j)} \cdots \phi(x_2) \right\rangle$$

これが Schwinger-Dyson 方程式と呼ばれるものである。量子論において運動方程式 $\delta S[\phi]/\delta\phi \neq 0$ であり、演算子 $\phi(x)$ と同じ一点にあるとき、デルタ関数に比例する寄与をもつ。これを接触項という。

ネーターの定理は作用停留の原理からきていたものなので修正を受けることがわかる。

Ward-高橋恒等式

場の変換として無限小の変換を考える。座標に依存する無限小パラメータ $\epsilon^a(x)$ を導入して、

$$\phi(x) \to \phi'(x) = \phi(x) + \epsilon^a(x) G_a \phi(x) \tag{1.80}$$

のように場を変化させる。すると作用の変分は

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int d^d x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \epsilon^a(x) G_a \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\mu (\epsilon^a(x) G_a \phi) \right] \\
&= \int d^d x \left[\left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) \right\} \epsilon^a(x) G_a \phi + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \epsilon^a(x) G_a \phi \right) \right] \\
&= \int d^d x \, \partial_\mu (j_a^\mu \epsilon^a(x)) \\
&\stackrel{?}{=} - \int d^d x \, (\partial_\mu j_a^\mu) \epsilon^a(x)
\end{aligned} \tag{1.81}$$

となる。

$\langle \mathcal{F}[\phi] \rangle = \langle \mathcal{F}[\phi'] \rangle$ であるので、

$$\begin{aligned}
0 &= \int [d\phi] \left(\int d^d x \, \frac{\delta F[\phi]}{\delta \phi} \delta\phi - F[\phi] \, \delta S \right) \exp[-S(\phi)] \\
&= \int [d\phi] \int d^d x \, \epsilon^a(x) \left(\frac{\delta F[\phi]}{\delta \phi} G_a \phi(x) + F[\phi] (\partial_\mu j_a^\mu(x)) \right) \exp[-S(\phi)]
\end{aligned}$$

というようにでき、これより

$$\langle \partial_\mu j_a^\mu(x) F[\phi] \rangle + \left\langle \frac{\delta F[\phi]}{\delta \phi} G_a \phi(x) \right\rangle = 0$$

という表式が得られる。特に $F[\phi] = \phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)$ としたときにはこの式は

$$\langle \partial_\mu j_a^\mu(x) \phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n) \rangle + \sum_{j=1}^{n} \delta(x - x_j) \langle \phi(x_1)\phi(x_2)\cdots G_a\phi(x_j)\cdots\phi(x_n) \rangle = 0 \tag{1.82}$$

$$\langle \partial_\mu j_a^\mu(x) \phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n) \rangle = -\sum_{j=1}^{n} \delta(x - x_j) \langle \phi(x_1)\phi(x_2)\cdots G_a\phi(x_j)\cdots\phi(x_n) \rangle \tag{1.83}$$

というように表される。これを Ward-高橋恒等式 (の一種) と呼ばれれている。

1.5 角運動量

角運動量について簡単に復習する。角運動量演算子は交換関係

$$[J^i, \, J^j] = i\epsilon^{ijk} J^k \tag{1.84}$$

を満たすものとする。また、Casimir 演算子と昇降演算子を

$$C_2 = J^1 J^1 + J^2 J^2 + J^3 J^3 \tag{1.85}$$

$$J^{\pm} = J^1 \pm i J^2 \tag{1.86}$$

で定義すると、

$$[C_2,\, J^3] = 0, \quad [C_2,\, J^{\pm}] = 0, \quad [J^3,\, J^{\pm}] = \pm J^{\pm}, \quad [J^+,\, J^-] = 2J^3 \tag{1.87}$$

となる。

演算子が可換であるため、同時固有状態

$$C_2 \left| j,\, m \right\rangle = j(j+1) \left| j,\, m \right\rangle \tag{1.88}$$

$$J^3 \left| j,\, m \right\rangle = m \left| j,\, m \right\rangle \tag{1.89}$$

が存在することがわかる。また、昇降演算子は (1.87) 式の交換関係より

$$\left| j,\, m+1 \right\rangle \propto J^+ \left| j,\, m \right\rangle \tag{1.90}$$

$$\left| j,\, m-1 \right\rangle \propto J^- \left| j,\, m \right\rangle \tag{1.91}$$

というのがわかる。これより $J^{\pm}$ の作用により、C_2 の固有値を変えずに J^3 の固有値を整数だけずれた状態を生成することができる。

$\left| j,\, j \right\rangle$ という状態を考える。演算子の間には

$$J^{\mp} J^{\pm} = C_2 - J^3 J^3 \mp J^3 \tag{1.92}$$

という関係があるため、これより $J^- J^+ \left| j,\, j \right\rangle = 0$ となる。よって

$$J^+ \left| j,\, j \right\rangle = 0 \tag{1.93}$$

というのがわかる。また消滅演算子を使うことで、固有状態は

$$\left| j,\, m \right\rangle = (J^-)^{j-m} j,\, j \tag{1.94}$$

を構成できるのがわかる。

のこりは割愛。

第 2 章

一般次元の共形場理論

2.1 一般次元の共形対称性

一章にて、線素が併進と回転変換に関して不変であることを見た。この節ではユークリッド計量の場合を考えるが、ミンコフスキー計量のときであっても同様の議論が成り立つ。

共形変換を考える際にはこれまでの議論を少し拡張する必要がある。一般の計量テンソル $g_{\mu\nu}(x)$ を用意して、線素を

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu \tag{2.1}$$

と書くことにする。この計量テンソルは座標変換 $x \to x'$ のもとで

$$g_{\mu\nu} \to g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}g_{\rho\sigma} \tag{2.2}$$

のように変換する。以下ではこの計量テンソルの変換性を利用することで、対称性の解析を行いたい。

並進・回転変換

まずは計量テンソルを $g_{\mu\nu}(x) = \delta\mu\nu$ というように固定する。このとき、計量テンソルを不変にする変換が並進と回転変換と与えられることを見よう。座標の無限小変換

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu - \epsilon^\mu(x) \tag{2.3}$$

を考える。この変換でのヤコビアンは次のような式を考えるとわかる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} &= \delta^\mu_\nu - \partial_\nu \epsilon^\mu \\ \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} &= \delta^\rho_\sigma + \partial_\sigma \epsilon^\rho\end{aligned}$$

よって計量テンソルは

$$\begin{aligned}g_{\mu\nu} \to g'_{\mu\nu} &= (\delta^\rho_\mu + \partial_\mu\epsilon^\rho)(\delta^\sigma_\nu + \partial_\nu\epsilon^\sigma)g_{\rho\sigma} \\ &= g_{\mu\nu} + \partial_\mu\epsilon_\nu + \partial_\nu\epsilon_\mu\end{aligned} \tag{2.4}$$

最後の等号は ϵ^2 のオーダーの項を無視して、計量テンソルがユークリッド計量ことを使った。

したがって計量テンソルを不変に保つという条件は

$$\partial_\mu\epsilon_\nu + \partial_\nu\epsilon_\mu = 0 \tag{2.5}$$

というのがわかった。(Killing 方程式)

この式に ∂_ρ を作用させると

$$\partial_\rho\partial_\mu\epsilon_\nu + \partial_\rho\partial_\nu\epsilon_\mu = \partial_\mu\partial_\rho\epsilon_\nu + \partial_\nu\partial_\rho\epsilon_\mu = \partial_\mu(-\partial_\nu\epsilon_\rho) + \partial_\nu(-\partial_\mu\epsilon_\rho) = -2\partial_\mu\partial_\nu\epsilon_\rho = 0 \tag{2.6}$$

これより、ϵ は x の一次式

$$\epsilon_\mu = a_\mu + b_{\mu\nu}x^\nu \tag{2.7}$$

で書けることがわかる。これを (2.5) 式に戻すと

$$0 = \partial_\mu(a_\nu + b_{\nu\rho}x^\rho) + \partial_\nu(a_\mu + b_{\mu\rho}\rho) = b_{\mu\nu} + b_{\nu\mu}$$

となり係数 $b_{\mu\nu}$ は反対称だとわかる。よって座標変換は

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu - a^\mu - b^\mu{}_\nu x^\nu$$

というように書ける。つまり a^μ は並進、$b^\mu_\nu x^\nu$ は回転を表している。

無限小変換をリー群のように書きなおすと

$$x^\mu \to x'^\mu = (1 - i\epsilon^\nu G_\nu)x^\mu.$$

つまり、並進の生成子 P_μ は

$$\begin{aligned}(1 - ia^\nu P_\nu)x^\mu &= x^\mu - a^\mu \\ \to \quad P_\mu &= -i\partial_\mu\end{aligned} \tag{2.8}$$

とわかる。また、回転変換の生成子 $L_{\mu\nu}$ は

$$\begin{aligned}\left(1 - i\frac{b^{\nu\rho}}{2}L_{\nu\rho}\right)x^\mu &= x^\mu - b^\mu{}_\sigma x^\sigma \\ b^{\nu\rho}L_{\nu\rho}x^\mu &= -2ib^\mu{}_\sigma x^\sigma \\ L_{\nu\rho}x^\mu &= -ib^{-1}_{\nu\rho}b^{\mu\sigma}x_\sigma \\ &= i(\delta^\mu_\nu\delta^\sigma_\rho - \delta^\sigma_\nu\delta^\mu_\rho)x_\sigma \\ &= i(x_\nu\partial_\rho - x_\rho\partial_\nu)x^\mu \\ \to \quad L_{\mu\nu} &= i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu) \\ &= -(x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu)\end{aligned} \tag{2.9}$$

となる。

これらの生成子の交換関係は

$$\begin{aligned}&[P_\mu, P_\nu] = 0, \quad [P_\mu, L_{\rho\sigma}] = i(\eta_{\mu\rho}P_\sigma - \eta_{\mu\sigma}P_\rho) \\ &[L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}] = i(\eta_{\nu\rho}L_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\rho}L_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma}L_{\mu\rho} + \eta_{\mu\sigma}L_{\nu\rho})\end{aligned} \tag{2.10}$$

となる。実際、

$$\begin{aligned}[P_\mu, L_{\rho\sigma}] &= [P_\mu, -(x_\rho P_\sigma - x_\sigma P_\rho)] \\ &= i(\eta_{\mu\rho}P_\sigma - \eta_{\mu\sigma}P_\rho) \\ [L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}] &= [x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu, x_\rho P_\sigma - x_\sigma P_\rho] \\ &= [x_\mu P_\nu, x_\rho P_\sigma] - [x_\mu P_\nu, x_\sigma P_\rho] - [x_\nu P_\mu, x_\rho P_\sigma] + [x_\nu P_\mu, x_\sigma P_\rho]\end{aligned}$$

そして

$$\begin{aligned}[x_\mu P_\nu, x_\rho P_\sigma] &= [x_\mu, x_\rho P_\sigma]P_\nu + x_\mu[P_\nu, x_\rho P_\sigma] \\ &= i(\eta_{\mu\sigma}x_\rho P_\nu - \eta_{\rho\nu}x_\mu P_\sigma)\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}[L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}] &= i(\eta_{\mu\sigma}x_\rho P_\nu - \eta_{\rho\nu}x_\mu P_\sigma - \eta_{\mu\rho}x_\sigma P_\nu + \eta_{\sigma\nu}x_\mu P_\rho - \eta_{\nu\sigma}x_\rho P_\mu + \eta_{\rho\mu}x_\nu P_\sigma + \eta_{\nu\rho}x_\sigma P_\mu - \eta_{\sigma\mu}x_\nu P_\rho) \\ &= i(-\eta_{\nu\rho}(x_\mu P_\sigma - x_\sigma P_\mu) + \eta_{\mu\rho}(x_\nu P_\sigma - x_\sigma P_\nu) + \eta_{\nu\sigma}(x_\mu P_\rho - x_\rho P_\mu) - \eta_{\mu\sigma}(x_\rho P_\nu - x_\nu P_\rho)) \\ &= i(\eta_{\nu\rho}L_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\rho}L_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma}L_{\mu\rho} + \eta_{\mu\sigma}L_{\nu\rho})\end{aligned}$$

で確認できる。回転の無限小変換を繰り返すことで特殊直交群 $SO(d)$ を作る。また、生成子はリー代数 $so(d)$ を成す。

共形変換

並進・回転変換で見たように、計量テンソルの変化を見ることでどのような変換があるのか決まる。計量テンソルが座標変換 $x \to x'$ のもとで、

$$g_{\mu\nu} \to g'_{\mu\nu}(x') = \Lambda(x) g_{\mu\nu}(x) \tag{2.11}$$

の形まで変化してよいとする。このような変化となる変換を共形変換という。

これはどのようなものかというと角度を保つ変換である。内積により角度を決めると

$$\cos\theta = \frac{g_{\mu\nu}u^\mu v^\nu}{\sqrt{(g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu)(g_{\mu\nu}v^\mu v^\nu)}}$$

これに共形変換を加えても値は変わらないのはわかる。

この変換を Killing 方程式を通して具体定期にどのような式となるものか見てみる。始めの計量テンソルを平坦な時空 $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ であるものとする。このとき、座標変換 $x^\mu \to x'^\mu = x^\mu - \epsilon^\mu(x)$ をすると計量テンソルは

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} \to g'_{\mu\nu} &= (\delta^\rho_\mu + \partial_\mu \epsilon^\rho)(\delta^\sigma_\nu + \partial_\nu \epsilon^\sigma) g_{\rho\sigma} \\ &= g_{\mu\nu} + \partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu \end{aligned}$$

となる。よって

$$\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu = f(x) g_{\mu\nu} \tag{2.12}$$

としてやれば、

$$g'_{\mu\nu} = (1 + f(x)) g_{\mu\nu}$$

となり、共形変換となる。ではこの $f(x)$ とはどのような形をしているのだろうか? (2.12) のトレースをとるつまり、両辺に $\eta^{\nu\mu}$ を掛けて添え字について足し合わせると、$\eta^{\nu\mu}\eta_{\mu\nu} = d$ となるので、

$$f(x) = \frac{2}{d}\partial_\mu \epsilon^\mu \tag{2.13}$$

また、(2.12) の両辺を ∂_ρ を作用させて

$$\partial_\rho\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\rho\partial_\nu \epsilon_\mu = \partial_\rho f(x) g_{\mu\nu} \tag{2.14}$$

そして左辺の $\partial_\rho \epsilon_\mu, \partial_\rho \epsilon_\nu$ を (2.12) 式を使って、ϵ の添え字を ρ に変えるように変形すると

$$-2\partial_\mu\partial_\nu \epsilon_\rho = \partial_\rho f(x) g_{\mu\nu} - \partial_\mu f(x) g_{\nu\rho} - \partial_\nu f(x) g_{\rho\mu}. \tag{2.15}$$

さらに両辺のトレースをとって

$$-\partial^\mu\partial_\mu \epsilon_\rho = (d-2)\partial_\rho f(x) \tag{2.16}$$

これより、ϵ がある式には両辺にダランベルシアンを作用させることで $f(x)$ に変えることができるのがわかる。(2.12) の両辺に $\partial^\rho\partial_\rho$ を作用させて

$$(2-d)\partial_\mu\partial_\nu f(x) = \partial^\rho\partial_\rho f(x) g_{\mu\nu} \tag{2.17}$$

これが $f(x)$ の取る条件である。ただ、このままだとわかりにくいので両辺のトレースをとって

$$(d-1)\partial^\rho\partial_\rho f(x) = 0 \tag{2.18}$$

となる。これは $d = 1$ のときには $f(x)$ には何も制約を与えないことを表している。このことは 1 次元では角度が定義できないというのと関連しているそうである。また、$d = 2$ ではそもそもトレースをとる前の (2.17) 式の時点で左辺 $= 0$ となり、条件が緩くなっている。

$d = 2$ のときは次の章で調べることとして、$d > 2$ のときを調べてみる。二階微分が 0 であるため

$$f(x) = \alpha + \beta_\mu x^\mu$$

という形になる。これを (2.15) に入れてみると

$$-2\partial_\mu\partial_\nu \epsilon_\rho = \beta_\rho g_{\mu\nu} - \beta_\mu g_{\nu\rho} - \beta_\nu g_{\rho\mu}.$$

両辺のトレースをとってもいいが、すでに右辺が位置によらない量になっていることに注目すると

$$\epsilon_\mu = a_\mu + b_{\mu\nu}x^\nu + c_{\mu\nu\rho}x^\nu x^\rho \tag{2.19}$$

というような 2 次の式で書けるといえる。a_μ は並進変換を表しているのがわかる。また、2 次の項では x^ν と x^ρ は交換するので、c の後ろ 2 つの添え字は対称である。

(2.13) 式にこれを入れると

$$f(x) = \frac{2}{d}(b^\mu_\mu + c^\mu{}_{\mu\nu}x^\nu + c^\mu{}_{\nu\mu}x^\nu)$$

よって (2.12) 式は

$$b_{\mu\nu} + b_{\nu\mu} + 2(c_{\mu\nu\sigma} + c_{\nu\mu\sigma})x^\sigma = \frac{2}{d}b^\rho_\rho g_{\mu\nu} + \frac{4}{d}g_{\mu\nu}c^\rho{}_{\rho\sigma}x^\sigma$$

0 次の部分を比較して

$$b_{\mu\nu} + b_{\nu\mu} = \frac{2}{d}b^\rho_\rho g_{\mu\nu} \tag{2.20}$$

という条件式が得られる。ここで

$$b_{\mu\nu} = b^A_{\mu\nu} + b^S_{\mu\nu} = b^A_{\mu\nu} + \frac{1}{d}b^\rho_\rho g_{\mu\nu}$$

のように対称な部分と反対称な部分に分けることができる。反対称部分は回転変換に対応している。

対称部分について、この部分だけをもとの座標変換の式に入れると

$$\begin{aligned} x^\mu \to x'^\mu &= x^\mu - \frac{1}{d}b^\rho_\rho x^\mu \\ &=: x^\mu - bx^\mu \\ &= (1 - ib\underbrace{(-ix^\nu\partial_\nu)}_{D})x^\mu \end{aligned} \tag{2.21}$$

となる。この微分方程式を解くと変換パラメータを s として

$$x^\mu_s = x^\mu_0 \exp(-bs)$$

となる。つまりこれはスケール変換に対応している。

そして $c_{\mu\nu\sigma}$ の項については $b_{\mu\nu}$ を導出するのに使った (2.12) 式ではなく、(2.15) 式について考えるとよくて、これに ϵ と $f(x)$ の表式を入れると

$$\begin{aligned} -4c_{\rho\mu\nu} &= \frac{4}{d}(c^\sigma_{\sigma\rho}g_{\mu\nu} - c^\sigma_{\sigma\mu}g_{\nu\rho} - c^\sigma_{\sigma\nu}g_{\rho\mu}) \\ c_{\rho\mu\nu} &= B_\mu g_{\nu\rho} + B_\nu g_{\rho\mu} - B_\rho g_{\mu\nu}, \quad B_\rho = \frac{1}{d}c^\sigma{}_{\sigma\rho} \\ &= 2B_\mu g_{\nu\rho} - B_\rho g_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{2.22}$$

これより、2 次の項による変換は

$$\begin{aligned} x^\mu \to x'^\mu &= x^\mu - 2(x^\nu B_\nu)x^\mu + B^\mu|x|^2 \\ &= \Big(1 - iB^\rho\underbrace{\Big\{-i(2x_\rho x^\nu\partial_\nu - |x|^2\partial_\rho)\Big\}}_{K_\rho}\Big)x^\mu \end{aligned} \tag{2.23}$$

となる。これを特殊共形変換という。

共形変換の中にある無限小変換の生成子が出そろった。

$$\begin{aligned} P_\mu &= -i\partial_\mu \\ D &= -ix^\nu\partial_\nu && = x^\nu P_\nu \\ L_{\mu\nu} &= i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu) && = -(x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu) \end{aligned} \tag{2.24}$$

$$K_\rho = -i(2x_\rho x^\nu\partial_\nu - |x|^2\partial_\rho) = 2x_\rho D - |x|^2 P_\rho \tag{2.25}$$

そしてこれらの生成子は次の交換関係を持つ

$$\begin{aligned} [D,\, K_\mu] &= -iK_\mu, \quad [D,\, P_\mu] = iP_\mu, \\ [K_\mu,\, P_\nu] &= 2i(\eta_{\mu\nu}D - L_{\mu\nu}), \quad [K_\rho,\, L_{\mu\nu}] = i(\eta_{\rho\mu}K_\nu - \eta_{\rho\nu}K_\mu), \\ [P_\rho,\, L_{\mu\nu}] &= i(\eta_{\rho\mu}P_\nu - \eta_{\rho\nu}P_\mu), \\ [L_{\mu\nu},\, L_{\rho\sigma}] &= i(\eta_{\nu\rho}L_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\rho}L_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma}L_{\mu\rho} + \eta_{\mu\sigma}L_{\nu\rho}). \end{aligned} \tag{2.26}$$

ここで触れていないものはすべて可換。そしてこのような交換関係を満たす生成子によって構成される代数を共形代数という[*1]。

実際にこれらの生成子の組み合わせ 10 通りとに加え、x との交換関係を調べておこう。交換関係のライプニッツ則

$$[ABC,\, D] = [A,\, D]BC + A[B,\, D]C + AB[C,\, D]$$

も使って、

$$\begin{aligned}
[x_\mu,\, P_\nu] &= i\eta_{\mu\nu} \\
[P_\mu,\, P_\nu] &= 0 \\
[P_\rho,\, L_{\mu\nu}] &= i(\eta_{\rho\mu}P_\nu - \eta_{\rho\nu}P_\mu) \quad \text{(並進・回転の節でやった。)} \\
[K_\mu,\, P_\nu] &= [2x_\mu D - x_\rho x^\rho P_\mu,\, P_\nu] \\
&= 2i\eta_{\mu\nu}D + 2ix_\mu P_\nu - i\eta_{\rho\nu}x^\rho P_\mu - i\delta^\rho_\nu x_\rho P_\mu \\
&= 2i\eta_{\mu\nu}D + 2i(x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu) \\
&= 2i(\eta_{\mu\nu}D - L_{\mu\nu})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[D,\, x_\mu] &= [x^\nu P_\nu,\, x_\mu] = -ix_\mu \\
[D,\, P_\mu] &= [x^\nu P_\nu,\, P_\mu] = iP_\mu \\
[D,\, D] &= [D,\, x^\mu P_\mu] = -ix^\mu P_\mu + ix^\mu P_\mu = 0 \\
[D,\, L_{\mu\nu}] &= [D,\, -(x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu)] \\
&= ix_\mu P_\nu - ix_\mu P_\nu - (\mu \leftrightarrow \nu) = 0 \\
[D,\, K_\mu] &= [D,\, 2x_\mu D - |x|^2 P_\mu] \\
&= -2ix_\mu D - [D,\, x_\rho]x^\rho P_\mu - x_\rho[D,\, x^\rho]P_\mu - \left|x^2\right|[D,\, P_\mu] \\
&= -2ix_\mu D + 2i|x|^2 P_\mu - i|x|^2 P_\mu \\
&= -i(2x_\mu D - |x|^2 P_\mu) = -iK_\mu
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[x_\mu,\, K_\nu] &= [x_\mu,\, 2x_\nu D - |x|^2 P_\nu] = 2ix_\mu x_\nu - i|x|^2\eta_{\mu\nu} \\
&\to [x^\mu,\, K_\nu]P_\mu = -iK_\nu \\
[K_\mu,\, K_\nu] &= \text{(あとでやるかも)} \\
[K_\rho,\, L_{\mu\nu}] &= \text{(あとでやるかも)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[x_\rho,\, L_{\mu\nu}] &= [x_\rho,\, -(x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu)] = i(\eta_{\rho\mu}x_\nu - \eta_{\nu\rho}x_{[}\mu]) \\
[L_{\mu\nu},\, L_{\rho\sigma}] &= i(\eta_{\nu\rho}L_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\rho}L_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma}L_{\mu\rho} + \eta_{\mu\sigma}L_{\nu\rho}) \quad \text{(並進・回転の節でやった。)}
\end{aligned}$$

また、共形代数の同型らしきものが見える形を導入する。反対称行列 $J_{ab} = -J_{ba} \quad (a,\, b = -1,\, 0,\, 1, \ldots,\, d)$ を導入し、

$$\begin{aligned}
J_{(-1)0} = D, \quad J_{(-1)\mu} = \frac{1}{2}(P_\mu - K_\mu), \\
J_{0\mu} = \frac{1}{2}(P_\mu + K_\mu), \quad J_{\mu\nu} = L\mu\nu
\end{aligned} \tag{2.27}$$

とすると、

$$[J_{ab},\, J_{cd}] = i(\eta_{bc}J_{ad} - \eta_{ac}J_{bd} - \eta_{bd}J_{ac} + \eta_{ad}J_{bc}) \tag{2.28}$$

という関係が成り立つことがわかる。これは $SO(1,\, d+1)$ の生成子のなす交換関係と同じであるため、共形代数は $SO(1,\, d+1)$ と同一視できる。

[*1] なので本文はちょっと不正確

これまでの解析を有限の座標変換に拡張すると

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + a^{\mu} \quad \text{(並進)} \tag{2.29}$$

$$x'^{\mu} = \lambda x^{\mu} \quad \text{(スケール変換)} \tag{2.30}$$

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \quad \text{(回転変換)} \tag{2.31}$$

$$x'^{\mu} = \frac{x^{\mu} + B^{\mu}|x|^2}{1 + 2B^{\nu}x_{\nu} + |B|^2|x|^2} \quad \text{(特殊共形変換)} \tag{2.32}$$

のようになる。特殊共形変換は無限小変換から出すことは自分にはできなかったが、逆は示せた。この有限変換の標識を変換のパラメータ B^{ν} が小さいとして虹の項を無視して分母を分子に持っていくと

$$\begin{aligned}
\frac{x^{\mu} + B^{\mu}|x|^2}{1 + 2B^{\nu}x_{\nu} + |B|^2|x|^2} &\simeq \left(x^{\mu} + B^{\mu}|x|^2\right)(1 - 2B^{\nu}x_{\nu}) \\
&\simeq x^{\mu} + B^{\mu}|x|^2 - 2B^{\nu}x_{\nu}x^{\mu} \\
&= (1 - 2B^{\nu}x_{\nu} + B^{\nu}|x|^2\partial_{\nu})x^{\mu} \\
&= \Bigl(1 - iB^{\rho}\underbrace{\left\{-i(2x_{\rho}x^{\nu}\partial_{\nu} - |x|^2\partial_{\rho})\right\}}_{K_{\rho}}\Bigr)x^{\mu}
\end{aligned}$$

となる。

ポアンカレ群では出てこなかったスケール変換と特殊共形変換について、どのようなものかを見ておこう。スケール変換では計量テンソルは

$$g_{\mu\nu} \to g'_{\mu\nu} = \frac{1}{\lambda^2} g_{\mu\nu} \tag{2.33}$$

となるのはすぐわかるだろう。この本の描像では座標系ではなく物理的実体を動かす方の座標変換になっているので、つまりものが大きくなったり小さくなったりする変換になっている。

特殊共形変換について、これは反転の演算子を I とすると $K_{\mu} = IP_{\mu}I$ のように表すことができる。実際、反転変換は式ににすると

$$x^{\mu} \to x'^{\mu} = \frac{x^{\mu}}{|x|^2} \tag{2.34}$$

という代物である。見てわかるように $x = 0$ では素直には定義できないので無限小変換というのを考えるのができない。おそらく、無限遠点をからめたリー群みたいな話になるのかもしれない。実際に、反転→並進→反転という操作をやると

$$\begin{aligned}
x^{\mu} &\to \frac{x^{\mu}}{|x|^2} \\
&\to \frac{x^{\mu}}{|x|^2} + B^{\mu} \\
&\to \frac{\dfrac{x^{\mu}}{|x|^2} + B^{\mu}}{\left(\dfrac{x^{\nu}}{|x|^2} + B^{\nu}\right)\left(\dfrac{x_{\nu}}{|x|^2} + B_{\nu}\right)} \\
&= \frac{x^{\mu} + B^{\mu}|x|^2}{1 + 2B^{\nu}x_{\nu} + |B|^2|x|^2}
\end{aligned} \tag{2.35}$$

というように表すことができる。このように特殊共形変換が $K_{\mu} = IP_{\mu}I$ という操作であるというのがわかると、変換群の加法性に関しては明らかであるのがわかる。群論における共役作用を取り入れた共役類の計算に相当する気がする。

また、計量テンソルに関しては

$$g_{\mu\nu} \to g'_{\mu\nu} = (1 + 2B^{\rho}x_{\rho} + |B|^2|x|^2)^2 g_{\mu\nu} \tag{2.36}$$

となる。[*2]実際ヤコビアンを計算すると B^{μ} の一次の項まで残して計算するとわかる。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} &= \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\left\{\frac{x^{\mu} + B^{\mu}|x|^2}{1 + 2B^{\rho}x_{\rho} + |B|^2|x|^2}\right\} \\
&= \frac{1}{1 + 2B^{\rho}x_{\rho} + |B|^2|x|^2}\left\{\delta^{\mu}{}_{\nu} + 2B^{\mu}x_{\nu} - 2(x^{\mu} + 2B^{\mu}|x|^2)(B_{\nu} + |B|^2x_{\nu})\right\} = \frac{\delta^{\mu}{}_{\nu}}{1 + 2B^{\rho}x_{\rho} + |B|^2|x|^2}
\end{aligned}$$

[*2] 誤植だった。

2.2 準プライマリ場とその変換性

変換性

共形変換に対する変換性によって場 $\mathcal{O}(x)$ の分類を行う。

まず回転変換でスカラーとして変換する場 $\mathcal{O}(x)$ を考える。ここで、共形変換のもとで

$$\mathcal{O}(x) \to \mathcal{O}'(x') = \Lambda(x)^{\Delta/2}\mathcal{O}(x) \tag{2.37}$$

のように変換するものを準プライマリ場 (quasi primary field) と呼ぶ。一般次元ではこれは準というのを付けずに単にプライマリ場と呼ぶそうだが、2 次元での用語にあわせるとこのようになるらしい。

スケール変換では $\Lambda(x) = \lambda^{-2}$ であるので

$$\mathcal{O}(x) \to \mathcal{O}'(\lambda x) = \lambda^{-\Delta}\mathcal{O}(x) \tag{2.38}$$

というように変換することがわかる。これより Δ は質量次元に関係する物理量であることがわかるのでこれを共形次元と呼ぶ。

次に回転変換のもとでテンソルとして変換する場 $\mathcal{O}_{\mu_1\cdots\mu_l}$ を考える。この場合、dx^μ を使って

$$\mathcal{O}_{\mu_1\cdots\mu_l}dx^{\mu_1}\cdots dx^{\mu_l} \tag{2.39}$$

のように添え字をつぶすことで共形次元が $\Delta - l$ のスカラー場として扱うことができる。どういうことかというとこれをスケール変換するとよい。スケール変換すると

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_{\mu_1\cdots\mu_l}(x)\ dx^{\mu_1}\cdots dx^{\mu_l} &\to \mathcal{O}'_{\mu_1\cdots\mu_l}(\lambda x)\ d(\lambda x)^{\mu_1}\cdots d(\lambda x)^{\mu_l}\\ &= \lambda^{-\Delta}\mathcal{O}_{\mu_1\cdots\mu_l}(x)\ d(\lambda x)^{\mu_1}\cdots d(\lambda x)^{\mu_l}\\ &= \lambda^{-(\Delta-l)}\mathcal{O}_{\mu_1\cdots\mu_l}(x)\ dx^{\mu_1}\cdots dx^{\mu_l}(x)\end{aligned}$$

となるからである。

したがって、スピン l を持つ準プライマリ場は

$$\mathcal{O}_{\mu_1\cdots\mu_l}(x) \to \mathcal{O}'_{\mu_1\cdots\mu_l}(x') = \Lambda(x)^{(\Delta-l)/2}\frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x'^{\mu_1}}\cdots\frac{\partial x^{\nu_l}}{\partial x'^{\mu_l}}\mathcal{O}_{\nu_1\cdots\nu_l}(x) \tag{2.40}$$

のように変換される。[*3]

準プライマリ場が無限小変換 $x'^\mu = x^\mu - \epsilon^\mu(x)$ のもとでどのように変換するか考える。スカラー場の同じ座標点 x での変化分は

$$\begin{aligned}\mathcal{O}(x) \to \mathcal{O}'(x) &= \mathcal{O}'(x'+\epsilon)\\ &= \Lambda(x+\epsilon)^{\Delta/2}\mathcal{O}(x+\epsilon)\\ &= (1+f(x))^{\Delta/2}(1+\epsilon^\mu\partial_\mu)\mathcal{O}(x)\\ &= \left(1+\frac{\Delta}{2}\frac{2}{d}\epsilon^\mu\partial_\mu\right)(1+\epsilon^\mu\partial_\mu)\mathcal{O}(x)\\ &= \left[1+\epsilon^\mu\partial_\mu+\frac{\Delta}{d}(\partial_\mu\epsilon^\mu)\right]\mathcal{O}(x)\end{aligned} \tag{2.41}$$

となる。テンソル場に関しても同様に調べることができる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} &= \delta^\nu{}_\mu + \partial^\nu\epsilon_\mu\\ &= \delta^\nu{}_\mu + \frac{1}{2}\partial^\nu\epsilon_\mu + \frac{1}{2}\left(-\partial_\mu\epsilon^\nu + f(x)\delta^\nu{}_\mu\right)\\ &= \left\{1+\frac{1}{d}(\partial^\rho\epsilon_\rho)\right\}\delta^\nu{}_\mu + \frac{1}{2}(\partial^\nu\epsilon_\mu - \partial_\mu\epsilon^\nu)\end{aligned} \tag{2.42}$$

[*3] スピン l とテンソルの足が l 個あることの関連がわからない。

よってテンソル場の方の変換性は

$$
\begin{aligned}
\mathcal{O}_{\mu_1\cdots\mu_l}(x) &\to \mathcal{O}'_{\mu_1\cdots\mu_l}(x)\\
&= \mathcal{O}'_{\mu_1\cdots\mu_l}(x'+\epsilon)\\
&= \Lambda(x+\epsilon)^{(\Delta-l)/2}\frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x'^{\mu_1}}\cdots\frac{\partial x^{\nu_l}}{\partial x'^{\mu_l}}\mathcal{O}_{\nu_1\cdots\nu_l}(x)\\
&= \left(1+\frac{\Delta-l}{d}\epsilon^\mu\partial_\mu\right)\left[\left\{1+\frac{1}{d}(\partial^\rho\epsilon_\rho)\right\}\delta^{\nu_1}{}_{\mu_1}+\frac{1}{2}(\partial^{\nu_1}\epsilon_{\mu_1}-\partial_{\mu_1}\epsilon^{\nu_1})\right]\\
&\quad\cdots\left[\left\{1+\frac{1}{d}(\partial^\rho\epsilon_\rho)\right\}\delta^{\nu_l}{}_{\mu_l}+\frac{1}{2}(\partial^{\nu_l}\epsilon_{\mu_l}-\partial_{\mu_l}\epsilon^{\nu_l})\right](1+\epsilon^\mu\partial_\mu)\mathcal{O}_{\nu_1\cdots\nu_l}(x)\\
&= \mathcal{O}_{\mu_1\cdots\mu_l}(x)+\frac{l}{d}(\partial^\rho\epsilon_\rho)\mathcal{O}_{\mu_1\cdots\mu_l}(x)+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{l}\left(\partial^{\nu_j}\epsilon_{\mu_j}-\partial_{\mu_j}\epsilon^{\nu_j}\right)\mathcal{O}_{\mu_1\cdots\mu_{j-1}\nu_j\mu_{j+1}\cdots\mu_l}(x)+\epsilon^\mu\partial_\mu\mathcal{O}_{\mu_1\cdots\mu_l}(x)\\
&\quad+\frac{\Delta-l}{d}\epsilon^\mu\partial_\mu\mathcal{O}_{\mu_1\cdots\mu_l}(x)\\
&= \left[1+\epsilon^\mu\partial_\mu+\frac{\Delta}{d}(\partial_\mu\epsilon^\mu)\right]\mathcal{O}_{\mu_1\cdots\mu_l}(x)-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{l}\left(\partial_{\mu_j}\epsilon^{\nu_j}-\partial^{\nu_j}\epsilon_{\mu_j}\right)\mathcal{O}_{\mu_1\cdots\mu_{j-1}\nu_j\mu_{j+1}\cdots\mu_l}(x) \qquad (2.43)
\end{aligned}
$$

を得ることができる。

$$\epsilon_\mu = a_\mu + b_{\mu\nu}x^\nu + c_{\mu\nu\rho}x^\nu x^\rho \qquad (2.10)$$

を入れて考えてみる。a_μ のみのときそれは平行移動を表している。$\epsilon_\mu = a_\mu$ を (2.43) に入れて

$$
\begin{aligned}
\mathcal{O}'_{\mu_1\cdots\mu_l}(x) &= (1+a^\mu\partial_\mu)\mathcal{O}_{\mu_1\cdots\mu_l}(x)\\
&= (1+ia^\mu\underbrace{(-i\partial_\mu)}_{\mathscr{P}_\mu})\mathcal{O}_{\mu_1\cdots\mu_l}(x)\\
\mathscr{P}_\mu &:= -i\partial_\mu \qquad (2.44)
\end{aligned}
$$

というように準プライマリ場対する並進変換の生成子 $\mathscr{P}_\mu$ が得られた。ここで場の無限小変換は座標とは違い、

$$\mathcal{O}' = (1+iG_a\epsilon^a)\mathcal{O}$$

というように生成子の前の符号はプラスとなる。[*4]

次に $b_{\mu\nu}$ の対称成分だけ取り出してスケール変換をしてみるとする。すると $\epsilon_\mu = b\eta_{\mu\nu}x^\nu$ を入れて

$$
\begin{aligned}
\mathcal{O}'_{\mu_1\cdots\mu_l}(x) &= (1+bx^\mu\partial_\mu+b\Delta)\mathcal{O}_{\mu_1\cdots\mu_l}(x)-\frac{b}{2}\sum_{j=1}^{l}\underbrace{\left(\partial_{\mu_j}\delta^{\nu_j}{}_\rho x^\rho-\partial^{\nu_j}\eta_{\nu_j\rho}x^\rho\right)}_{=0}\mathcal{O}_{\mu_1\cdots\mu_{j-1}\nu_j\mu_{j+1}\cdots\mu_l}(x)\\
&= \left[1+ib\underbrace{\left\{-i(x^\mu\partial_\mu+\Delta)\right\}}_{\mathscr{D}}\right]\mathcal{O}_{\mu_1\cdots\mu_l}(x)\\
\mathscr{D} &:= -i(x^\mu\partial_\mu+\Delta). \qquad (2.45)
\end{aligned}
$$

というように準プライマリ場に対するスケール変換の生成子 $\mathscr{D}$ が得られた。

[*4] ただし、ここでは物理でよくやる手続きで生成子をエルミートにするために虚数をつけているが、この虚数は別に必要ではない。なんならこの後 Ward-高橋恒等式 に使う際、この本では虚数を外す。Fracesco はそのままつけてる。

そして $b_{\mu\nu}$ の反対称成分だけにして回転変換をしてみる。すると $\epsilon_\mu = b_{\mu\nu}x^\nu$ を入れて、

$$
\begin{aligned}
\mathcal{O}'_{\mu_1\cdots\mu_l}(x) &= \left[1 + b^\mu{}_\nu x^\nu \partial_\mu + \frac{\Delta}{d}(\partial_\mu b^\mu{}_\nu x^\nu)\right]\mathcal{O}_{\mu_1\cdots\mu_l}(x) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{l}\left(\partial_{\mu_j} b^{\nu_j}{}_\nu x^\nu - \partial^{\nu_j} b_{\mu_j\nu}x^\nu\right)\mathcal{O}_{\mu_1\cdots\mu_{j-1}\nu_j\mu_{j+1}\cdots\mu_l}(x) \\
&= [1 + b^{\mu\nu}x_\nu\partial_\mu]\mathcal{O}_{\mu_1\cdots\mu_l}(x) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{l}\left(b^{\mu\nu}\delta^{\nu_j}{}_\mu \partial_{\mu_j}x_\nu - b^{\mu\nu}\eta_{\mu\mu_j}\partial^{\nu_j}x_\nu\right)\mathcal{O}_{\mu_1\cdots\mu_{j-1}\nu_j\mu_{j+1}\cdots\mu_l}(x) \\
&= \left[1 + \frac{b^{\mu\nu}}{2}(x_\nu\partial_\mu - x_\mu\partial_\nu)\right]\mathcal{O}_{\mu_1\cdots\mu_l}(x) - \frac{b^{\mu\nu}}{2}\underbrace{\sum_{j=1}^{l}\left(\eta_{\mu_j\nu}\delta^{\nu_j}{}_\mu - \eta_{\mu\mu_j}\delta^{\nu_j}{}_\nu\right)\mathcal{O}_{\mu_1\cdots\mu_{j-1}\nu_j\mu_{j+1}\cdots\mu_l}(x)}_{\Sigma_{\mu\nu}\mathcal{O}_{\mu_1\cdots\mu_l}(x)} \\
&= \left[1 - \frac{b^{\mu\nu}}{2}(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu + \Sigma_{\mu\nu})\right]\mathcal{O}_{\mu_1\cdots\mu_l}(x) \\
&= \left[1 + i\frac{b^{\mu\nu}}{2}\underbrace{\left\{i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu + \Sigma_{\mu\nu})\right\}}_{\mathscr{L}_{\mu\nu}}\right]\mathcal{O}_{\mu_1\cdots\mu_l}(x)
\end{aligned}
$$

$$\mathscr{L}_{\mu\nu} = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu + \Sigma_{\mu\nu}) \tag{2.46}$$

というようにして準プライマリ場に対する回転変換の生成子 $\mathscr{L}_{\mu\nu}$ が得られた。

最後に $c_{\mu\nu\rho}$ の部分だけを取り出して特殊共形変換をするというのもよいが、反転と並進を組み合わせて生成子を作ろう? これより

$$\mathscr{K}_\mu = -i(2x_\mu x^\nu\partial_\nu - |x|^2\partial_\mu + 2\Delta x_\mu + 2x^\nu\Sigma_{\mu\nu}) \tag{2.47}$$

となる。

これらの変換の様子を調べるため、局所座標系の原点 $x=0$ 周りでの場の変換を見ると

$$\mathscr{P}_\mu\mathcal{O}(0) = -i\partial_\mu\mathcal{O}(0) \tag{2.49}$$
$$\mathscr{D}\mathcal{O}(0) = -i\Delta\mathcal{O}(0) \tag{2.50}$$
$$\mathscr{L}_{\mu\nu}\mathcal{O}(0) = i\Sigma_{\mu\nu}\mathcal{O}(0) \tag{2.51}$$
$$\mathscr{K}_\mu\mathcal{O}(0) = 0 \tag{2.52}$$

となる。した 3 つは右辺にかかっているのがある定数の固有値方程式の形になっている。

準プライマリ場の特徴づけ

(2.52) 式は準プライマリ場の定義とすることもできる。つまり反転して平行移動してまた反転しても変わらないような場というのがプライマリ場であるといえる。実際に構成していこう。スケール変換と回転変換は交換するので同時固有状態をとってくることができる。なので適宜規定をとってくれば (2.50) と (2.51) を満たすように $\mathcal{O}(0)$ の基底をとることができる。また場は演算子であるため、位置依存性は

$$\mathcal{O}(x) = e^{ix^\rho\mathscr{P}_\rho}\mathcal{O}(0)e^{-ix^\rho\mathscr{P}_\rho} \tag{2.53}$$

というようにして導入できる。

ディセンダント場 *

無限小変換の生成子による定義

$$\mathscr{K}_\mu\mathcal{O}(0) = 0 \tag{2.59}$$

について考えてみよう。準プライマリ場に $\mathscr{P}_\mu$ を何回か作用していってできる場は準プライマリ場ではない。実際、

$$\mathscr{K}_\mu\mathscr{P}_\nu\mathcal{O}(0) = [\mathscr{K}_\mu,\, \mathscr{P}_\nu]\mathcal{O}(0) = 2(\eta_{\mu\nu}\Delta + \Sigma_{\mu\nu})\mathcal{O}(0) \neq 0 \tag{2.60}$$

である。また、$x \to x' = \lambda x$ のスケール変換のものでは

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu}\mathcal{O}'(x') = \lambda^{-(\Delta+1)}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\mathcal{O}(x) \tag{2.61}$$

と変化することより、場 $\mathscr{P}_\mu \mathcal{O}(0)$ の共形次元は $\Delta+1$ となる。同様に場 $\mathscr{P}_{\mu_1} \cdots \mathscr{P}_{\mu_n} \mathcal{O}(0)$ の共形次元は $\Delta+n$ である。このことは $[D,\, \mathscr{P}_\mu] = i\mathscr{P}_\mu$ を用いても示すことができる。つまり、$[D,\, \mathscr{K}_\mu] = -i\mathscr{K}_\mu$ より $\mathscr{K}_\mu$ を場に作用させると共形次元を 1 つ下げることができる。このように $\mathscr{P}_\mu$ や $\mathscr{K}_\mu$ を $\mathcal{O}(0)$ に作用させてできる場をディセンダント場という。

ここで理論が物理的に正常である、すなわちユニタリ性を保つように要請すると共形次元 Δ に加減がついて

$$\Delta \geq d/2 - 1 \quad (l = 0), \tag{2.62}$$

$$\Delta \geq l + d - 2 \quad (l = 1, 2, \dots) \tag{2.63}$$

となることが知られている。

ここまでの議論を表現論っぽく言うと、プライマリ場は最低ウェイト状態であり、一般の場はプライマリ場に $\mathscr{P}_\mu$ を作用させて構成できる。プライマリ場 $\mathcal{O}(x)$ とその微分をまとめて共形族という。

ウェイトという言葉が出てきた。これは d 次元共形代数は $SO(1, d+1)$ 代数と同型であるため、こちらの言葉を使ったものである。$SO(3)$ に対する全角運動量のように、(2.27) の各生成子と可換になる Casimir 演算子というのも考えれる。共形 Casimir 演算子は次で定められる。

$$J^2 = \frac{1}{2} J_{ab} J^{ab} = \frac{1}{2} M_{\mu\nu} M^{\mu\nu} - D^2 + \frac{1}{2}(P_\mu K^\mu + K^\mu P_\mu)$$

これは共形代数のすべての演算子と交換する。この Casimir 演算子は

$$J^2 = \frac{1}{2} M_{\mu\nu} M^{\mu\nu} - D(D-d) + P_\mu K^\mu$$

と変形できる。これをプライマリ場に作用させると

$$J^2 \mathcal{O}(0) = -\left(\frac{1}{2} \Sigma_{\mu\nu} \Sigma^{\mu\nu} + \Delta(\Delta - d)\right) \mathcal{O}(0)$$

というようになる。$\mathcal{O}(0)$ をスピン l のテンソル*5とすれば

$$\frac{1}{2} \Sigma_{\mu\nu} \Sigma^{\mu\nu} \mathcal{O}(0) = -l(l+d-2) \mathcal{O}(0)$$

となるらしいので

$$J^2 \mathcal{O}(0) = -\lambda_{\Delta,\, l} \mathcal{O}(0), \quad \lambda_{\Delta,\, l} = l(l+2-2) + \Delta(\Delta - d)$$

となる。

2.3 相関関数への制約

準プライマリ場の相関関数を調べる。簡単のため、スカラー場についてのみ取り扱うことにする。準プライマリ場は

$$\mathcal{O}(x) \to \mathcal{O}'(x') = \mathcal{O}(x') = \Lambda(x)^{\Delta/2} \mathcal{O}(x)$$

というようにヤコビアンが付かずに変換する。$\Lambda(x)$ 自体は場の関数ではないので期待値をすり抜けることに気付くと、このときの準プライマリ場の相関関数は

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}'_1(x'_1) \cdots \mathcal{O}'_n(x'_n) \rangle &= \left\langle \Lambda(x_1)^{\Delta_1/2} \mathcal{O}_1(x_1) \cdots \Lambda(x_n)^{\Delta_n/2} \mathcal{O}_n(x_n) \right\rangle \\ \langle \mathcal{O}_1(x_1) \cdots \mathcal{O}_n(x_n) \rangle &= \Lambda(x_1)^{-\Delta_1/2} \cdots \Lambda(x_n)^{-\Delta_n/2} \langle \mathcal{O}_1(x'_1) \cdots \mathcal{O}_n(x'_n) \rangle \end{aligned} \tag{2.64}$$

というように変わることがわかる。これが、共形変換による相関関数の制限となる。どこまで制限できるのか見ていく。

2 点相関関数

まずは 2 点相関関数を見ていく。スケール変換 $x \to x' = \lambda x$ のもとでは $\Lambda(x) = \lambda^{-2}$ より、

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1) O_2(x_2) \rangle = \lambda^{\Delta_1 + \Delta_2} \langle \mathcal{O}_1(x'_1) \mathcal{O}_2(x'_2) \rangle \tag{2.65}$$

*5 l 階の対称トレースレステンソルのこと。

これを満たす関数について考える。並進変換と回転変換で変わらないことと、2 点相関関数でスカラーであることから、$\langle \mathcal{O}(x_1)\mathcal{O}(x_2)\rangle$ は $|x_1 - x_2|$ の関数であることがわかる。これより、$f(x) = \langle \mathcal{O}(x)\mathcal{O}(0)\rangle$, $\lambda = 1 + \epsilon$ とおいて、微分方程式を書くと

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+\epsilon)^{\Delta_1+\Delta_2} f(x+\epsilon) \\ &= f(x) + \epsilon\left\{(\Delta_1+\Delta_2)f(x) + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\epsilon x\right\} \end{aligned}$$

これを解くと

$$f(x) = \frac{C_{12}}{|x|^{\Delta_1+\Delta_2}}$$

となるのがわかる。よって相関関数は

$$\langle \mathcal{O}(x_1)\mathcal{O}(x_2)\rangle = \frac{C_{12}}{|x_1 - x_2|^{\Delta_1+\Delta_2}} \tag{2.66}$$

特殊共形変換を考える。このとき計量は

$$g_{\mu\nu} \to g'_{\mu\nu} = (1 + 2B^\nu x_\nu + |B|^2)^2 g_{\mu\nu}$$

のように変換するため、

$$\Lambda(x_j)^{-\Delta/2} = \frac{1}{(1 + 2B_\nu x_j^\nu + |B|^2|x|^2)^\Delta}$$

というようになる。この分母を

$$\gamma_j = 1 + 2B_\nu x_j^\nu + |B|^2|x|^2 \tag{2.68}$$

というようにおくと、2 点相関関数は

$$\langle \mathcal{O}(x_1)\mathcal{O}(x_2)\rangle = \frac{1}{\gamma_1^{\Delta_1}\gamma_2^{\Delta_2}} \langle \mathcal{O}_1(x'_1)\mathcal{O}_2(x'_2)\rangle \tag{2.67}$$

と書ける。 相関関数の形は (2.66) のような形をしているとわかっているので、この形がどのように変換するかを考えればよい。私は反転操作に慣れていないので思いつかないが、このようにするとよい。2 点 x'_1, x'_2 は反転操作によって得られたものであるため、このような量を考える。

$$\left(\frac{s_1}{s_1}^2 - \frac{s_2}{s_2^2}\right)^2 = \frac{(s_1 - s_2)^2}{s_1^2 s_2^2}$$

これより、

$$(x'_1 - x'_2)^2 = \frac{\left\{\left(\dfrac{x_1}{x_1^2} + B\right) - \left(\dfrac{x_2}{x_2^2} + B\right)\right\}^2}{\left(\dfrac{x_1}{x_1^2} + B\right)^2\left(\dfrac{x_2}{x_2^2} + B\right)^2} = \frac{x_1^2 x_2^2\left(\dfrac{1}{x_1} - \dfrac{1}{x_2}\right)^2}{(1 + Bx_1)^2(1 + Bx_2)^2} = \frac{(x_1 - x_2)^2}{\gamma_1\gamma_2} \tag{2.69}$$

となるので、(2.67) 式の両辺は

$$\frac{C_{12}}{|x_1 - x_2|} = \frac{(\gamma_1\gamma_2)^{(\Delta_1+\Delta_2)/2}}{\gamma_1^{\Delta_1}\gamma_2^{\Delta_2}} \frac{C_{12}}{|x_1 - x_2|} \tag{2.70}$$

というように書ける。これが任意の γ_1, γ_2 で成り立つ必要があるので

$$\gamma_1^{(\Delta_2-\Delta_1)/2}\gamma_2^{(\Delta_1-\Delta_2)/2} = 1$$

つまり共形次元がおなじである $\Delta_1 = \Delta_2$ のときだけである。よって 2 点相関関数は

$$\langle \mathcal{O}(x_1)\mathcal{O}(x_2)\rangle = \frac{C_{12}\delta_{\Delta_1\Delta_2}}{|x_1 - x_2|^{\Delta_1+\Delta_2}} \tag{2.71}$$

という形まで制限される。[*6] ここの残った定数は準プライマリ場の再定義で吸収できるため物理的な意味のある量ではない。

[*6] 自由スカラー場のときは対数だったのに対し、こっちはべき則になってる。なにかあるのかしら。

3 点相関関数

次に 3 点の相関関数を考える。2 点と同様に並進変換と回転変換で変わらないこととからこの関数は

$$r_{jl} = |x_j - x_l| \tag{2.72}$$

のみの関数であることがわかる。また、スケール変換を考えると

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{O}'_1(x'_1)\mathcal{O}'_2(x'_2)\mathcal{O}'_3(x'_3)\rangle &= \left\langle \Lambda(x_1)^{\Delta_1/2}\mathcal{O}_1(x_1)\Lambda(x_2)^{\Delta_2/2}\mathcal{O}_n(x_2)\Lambda(x_3)^{\Delta_3/2}\mathcal{O}_3(x_3)\right\rangle \\
\langle \mathcal{O}_1(x_1)\mathcal{O}_2(x_2)\mathcal{O}_3(x_3)\rangle &= \Lambda(x_1)^{-\Delta_1/2}\Lambda(x_2)^{-\Delta_2/2}\Lambda(x_3)^{-\Delta_3/2}\left\langle \mathcal{O}_1(x'_1)\mathcal{O}_2(x'_2)\mathcal{O}_3(x'_3)\right\rangle \\
&= \lambda^{\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3}\left\langle \mathcal{O}_1(x'_1)\mathcal{O}_2(x'_2)\mathcal{O}_3(x'_3)\right\rangle
\end{aligned}$$

である。この式と (2.72) 式を組み合わせる。

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1)\mathcal{O}_2(x_2)\mathcal{O}_3(x_3)\rangle = f(r_{12},\, r_{23},\, r_{31})$$

として、スケール変換

$$(r'_{12},\, r'_{23},\, r'_{31}) \to \lambda(r_{12},\, r_{23},\, r_{31}) = (1+\epsilon)(r_{12},\, r_{23},\, r_{31})$$

を入れると、

$$\begin{aligned}
f(r_{12},\, r_{23},\, r_{31}) &= (1+\epsilon)^{\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3} f(r'_{12},\, r'_{23},\, r'_{31}) \\
&= f(r_{12},\, r_{23},\, r_{31}) + \epsilon(\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3) f(r_{12},\, r_{23},\, r_{31}) \\
&\quad + \epsilon\left(r_{12}\frac{\partial}{\partial r_{12}} + r_{23}\frac{\partial}{\partial r_{23}} + r_{31}\frac{\partial}{\partial r_{31}}\right) f(r_{12},\, r_{23},\, r_{31}) \\
-(\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3) f(r_{12},\, r_{23},\, r_{31}) &= \left(r_{12}\frac{\partial}{\partial r_{12}} + r_{23}\frac{\partial}{\partial r_{23}} + r_{31}\frac{\partial}{\partial r_{31}}\right) f(r_{12},\, r_{23},\, r_{31})
\end{aligned}$$

これを満たす $f(r_{12},\, r_{23},\, r_{31})$ は

$$f(r_{12},\, r_{23},\, r_{31}) = \frac{C}{r_{12}^a r_{23}^b r_{31}^c}, \quad a+b+c = \Delta_1+\Delta_2+\Delta_3$$

である。なので相関関数はこの形の線形結合

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1)\mathcal{O}_2(x_2)\mathcal{O}_3(x_3)\rangle = \sum_{a,\, b,\, c} \frac{C_{123}^{abc}}{r_{12}^a r_{23}^b r_{31}^c} \tag{2.73}$$

$$a+b+c = \Delta_1+\Delta_2+\Delta_3 \tag{2.74}$$

がスケール変換により制限される形である。さらに特殊共形変換に関してはさっきと同様にして

$$(x'_1 - x'_2)^2(x'_2 - x'_3)^2(x'_3 - x'_1)^2 = \frac{(x_1-x_2)^2}{\gamma_1\gamma_2}\frac{(x_2-x_3)^2}{\gamma_2\gamma_3}\frac{(x_3-x_1)^2}{\gamma_3\gamma_1}$$

という関係が示せるので

$$\frac{C_{123}^{abc}}{r_{12}^a r_{23}^b r_{31}^c} = \frac{(\gamma_1\gamma_2)^{a/2}(\gamma_2\gamma_3)^{b/2}(\gamma_3\gamma_1)^{c/2}}{\gamma_1^{\Delta_1}\gamma_2^{\Delta_2}\gamma_3^{\Delta_3}}\frac{C_{123}^{abc}}{r_{12}^a r_{23}^b r_{31}^c} \tag{2.75}$$

この等号が成り立つには

$$c+a = 2\Delta_1, \quad a+b = 2\Delta_2, \quad b+c = 2\Delta_3 \tag{2.76}$$

$$a = \Delta_1+\Delta_2-\Delta_3 \tag{2.77}$$

$$b = \Delta_1-\Delta_2+\Delta_3 \tag{2.78}$$

$$c = -\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3 \tag{2.79}$$

というのが総和の添え字の条件となる。よって相関関数は

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1)\mathcal{O}_2(x_2)\mathcal{O}_3(x_3)\rangle = \frac{C_{123}}{r_{12}^{\Delta_1+\Delta_2-\Delta_3} r_{23}^{\Delta_1-\Delta_2+\Delta_3} r_{31}^{-\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3}} \tag{2.80}$$

という形になる。なので座標依存性を一意的に決定できた。

4 点相関関数

では 4 点関数はどうなるか、ここまでの式変形を追っていると、並進変換と回転変換とスケール変換によって

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1)\mathcal{O}_2(x_2)\mathcal{O}_3(x_3)\mathcal{O}_4(x_4)\rangle = \sum_{a,b,c,d,e,f} \frac{C_{1234}^{abcdef}}{r_{12}^a r_{13}^b r_{14}^c r_{23}^d r_{24}^e r_{34}^f} \tag{2.81}$$

という形になることがわかる。ただ、特殊共形変換によって形は完全に決まるかというとそうではない。実際 (2.75) 式に相当する式を作ると

$$\frac{C_{1234}^{abcdef}}{r_{12}^a r_{13}^b r_{14}^c r_{23}^d r_{24}^e r_{34}^f} = \frac{(\gamma_1\gamma_2)^{a/2}(\gamma_1\gamma_3)^{b/2}(\gamma_1\gamma_4)^{c/2}(\gamma_2\gamma_3)^{d/2}(\gamma_2\gamma_4)^{e/2}(\gamma_3\gamma_4)^{f/2}}{\gamma_1^{\Delta_1}\gamma_2^{\Delta_2}\gamma_3^{\Delta_3}\gamma_4^{\Delta_4}} \frac{C_{1234}^{abcdef}}{r_{12}^a r_{13}^b r_{14}^c r_{23}^d r_{24}^e r_{34}^f}$$

となり連立方程式を完全に解くことができず、不定性が残るのがわかる。[*7] この連立方程式を解くと

$$\begin{aligned} a &= 2\Delta_1 - (b+c) \\ d &= -\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_4 + c \\ e &= -\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3 + \Delta_4 + b \\ f &= -\Delta_1 - \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 - (b+c) \end{aligned}$$

この自由度は連立方程式の Ker である。よって Ker b 部分は

$$a = -(b+c), \quad d = c, \quad e = b, \quad f = -(b+c)$$

なので相関関数には

$$\frac{r_{12}r_{34}}{r_{13}r_{24}}, \quad \frac{r_{12}r_{34}}{r_{14}r_{23}} \tag{2.82}$$

というのを自由に掛けることができるので、

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1)\mathcal{O}_2(x_2)\mathcal{O}_3(x_3)\mathcal{O}_4(x_4)\rangle \propto F\left(\frac{r_{12}r_{34}}{r_{13}r_{24}}, \frac{r_{12}r_{34}}{r_{14}r_{23}}\right)$$

という形となる。

Ker の分の自由度はどのようにとっても良いが、

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{3}(2\Delta_1 - \Delta_2 + 2\Delta_3 - \Delta_4) \\ c &= \frac{1}{3}(2\Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3 + 2\Delta_4) \end{aligned}$$

というようにすると、総和の添え字は $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4$ として

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{3}(2\Delta_1 + 2\Delta_2 - \Delta_3 - \Delta_4) = \Delta_1 - \Delta_2 - \frac{\Delta}{3} \\ b &= \frac{1}{3}(2\Delta_1 - \Delta_2 + 2\Delta_3 - \Delta_4) = \Delta_1 - \Delta_3 - \frac{\Delta}{3} \\ c &= \frac{1}{3}(2\Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3 + 2\Delta_4) = \Delta_1 - \Delta_4 - \frac{\Delta}{3} \\ d &= \frac{1}{3}(\Delta_1 + 2\Delta_2 + 2\Delta_3 - \Delta_4) = \Delta_2 - \Delta_3 - \frac{\Delta}{3} \\ e &= \frac{1}{3}(\Delta_1 + 2\Delta_2 - \Delta_3 + 2\Delta_4) = \Delta_2 - \Delta_4 - \frac{\Delta}{3} \\ f &= \frac{1}{3}(\Delta_1 - \Delta_2 + 2\Delta_3 + 3\Delta_4) = \Delta_3 - \Delta_4 - \frac{\Delta}{3} \end{aligned}$$

というようにきれいな形になる。これを使うと 4 点相関関数は

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1)\mathcal{O}_2(x_2)\mathcal{O}_3(x_3)\mathcal{O}_4(x_4)\rangle = F\left(\frac{r_{12}r_{34}}{r_{13}r_{24}}, \frac{r_{12}r_{34}}{r_{14}r_{23}}\right) \prod_{j>l} r_{jl}^{\Delta/3 - (\Delta_j + \Delta_l)} \tag{2.83}$$

という形となる。ここで出てきた Ker の部分

$$\frac{r_{ij}r_{kl}}{r_{ik}r_{jl}} \tag{2.84}$$

は交差比と呼ばれている。

[*7] おそらく、この不定性は対称群、交換子群、可解群、ガロア理論らへんと関係がある。

2.4 エネルギー運動量テンソル

並進運動に対応する保存カレントであるエネルギー運動量テンソルは共形場理論において非常に重要な役割を果たすらしい。変換パラメータを $x^\mu \to x'^\mu = x^\mu - \epsilon^\mu(x)$ というように位置に依存するとき、保存カレントと作用の変分の関係は (1.81) 式より、

$$\delta S = \int d^d x \, T^{\mu\nu} \partial_\mu \epsilon_\nu(x) \tag{2.85}$$

となる。一方、カレントには

$$j^\mu \to= j'^\mu + \partial_\nu B^{\nu\mu}, \quad B^{\nu\mu} = -B^{\mu\nu} \tag{2.86}$$

のように反対称テンソルの微分の分だけの不定性がある。この不定性によりエネルギー運動量テンソルを対称テンソルにすることができる。

$$T'^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \partial_\rho B^{\rho\mu\nu}, \quad B^{\rho\mu\nu} = -B^{\mu\rho\nu}$$

このように対称化したエネルギー運動量テンソルを Belinfante エネルギー運動量テンソルと呼ばれる。対称にしたとき、作用の変分は

$$\delta S = \frac{1}{2} \int d^d x \, T^{\mu\nu} (\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu) \tag{2.87}$$

というようになる。

この形は共形変換における計量の変化に似ているのでこれと比較してみよう。共形変換のときの計量の変化とは微妙に違うが、$\delta g_{\mu\nu} = \partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu$ というように変えてみる。これこの節で初めにした変換に対応する計量の変化である。これを使うと作用の変分は

$$\delta S = \int d^d x \, \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} \, (\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu) \tag{2.88}$$

となる。作用の力学変数を座標と計量の 2 つがあるとすると[*8]、作用の変分の合計は

$$\delta S = \int d^d x \left(\frac{1}{2} T^{\mu\nu} + \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} \right) (\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu)$$

となる。これが 0 になるのでエネルギー運動量テンソルは

$$T^{\mu\nu} = -2 \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} \tag{2.89}$$

となる。一般に曲がった背景上では

$$T^{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{\det g}} \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} \tag{2.90}$$

である。[*9]

では共形変換をしてみよう。この場合、計量は $\delta g_{\mu\nu} = \partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu = \frac{2}{d} \partial_\rho \epsilon^\rho g_{\mu\nu}$ と変化する。なのでこれを (2.87) にいれて、

$$\delta S = \frac{1}{d} \int d^d x \, T^{\mu\nu} \frac{2}{d} \partial_\rho \epsilon^\rho g_{\mu\nu} = \frac{1}{d} \int d^d x \, T^\mu{}_\mu \, \partial_\nu \epsilon^\nu \tag{2.91}$$

となる。任意の共形変換に対して作用の変分が 0 となるのは

$$T^\mu{}_\mu = 0 \tag{2.92}$$

というトレースレス条件が付く[*10]。

さらに具体的な変換をしてみる。回転変換は

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu - \epsilon^\mu, \quad \epsilon^\mu = \epsilon^{\mu\nu} x_\nu, \quad (\epsilon^{\mu\nu} = -\epsilon^{\nu\mu}) \tag{2.93}$$

[*8] いままでは平坦なユークリッド計量なので計量の変分は考えてなかった。ここでしか曲がった時空は考えたない。

[*9] 重力との関連? 一般相対論の結果をさらっと引用? 曲がった背景上での場の量子論とのつながり?

[*10] これ結局どういう状況?

というように表される。このとき、スカラー場とラグランジアンは

$$\phi(x) \to \phi'(x) = \phi(x) + \epsilon^{\mu\nu} x_\nu \partial_\mu \phi(x) \tag{2.94}$$

$$\mathcal{L}(x) \to \mathcal{L}'(x) = \mathcal{L}(x) + \epsilon^{\mu\nu} x_\nu \partial_\mu \mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(x) + \epsilon^{\mu\nu} x_\nu \partial_\mu \mathcal{L}(x) \tag{2.95}$$

というように変換する。このときのネーターカレントは (1.A) 式より

$$\epsilon j^\mu = \epsilon^{\nu\rho} x_\rho \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi)} (\partial_\nu \phi) - \delta^\mu{}_\nu \mathcal{L} \right) = \epsilon^{\nu\rho} x_\rho T^\mu{}_\nu = \frac{1}{2} \epsilon^{\nu\rho} \big(x_\rho T^\mu{}_\nu - x_\nu T^\mu{}_\rho \big)$$

回転の無限小パラメータは $\epsilon^{\mu\nu}/2$ のようにとる習わしであるので回転変換に対するネーターカレントは

$$j^\mu{}_{\nu\rho} = x_\rho T^\mu{}_\nu - x_\nu T^\mu{}_\rho \tag{2.96}$$

となる。

次にスケール変換

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu - \omega^\mu(x), \quad \omega^\mu(x) = \epsilon x^\mu \tag{2.97}$$

をする。このとき、準プライマリ場[*11]のように変換する共形次元が Δ の場 φ とラグランジアン密度は

$$\varphi(x) \to \varphi'(x) = \varphi(x) + \epsilon(x^\mu \partial_\mu + \Delta)\varphi(x) = \Delta\varphi(x) + \epsilon^\nu \partial_\nu \varphi \tag{2.98}$$

$$\mathcal{L}(x) \to \mathcal{L}(x') = \mathcal{L}(x) + \epsilon(x^\mu \partial_\mu + d)\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(x) + \epsilon \partial_\mu x^\mu \mathcal{L}(x) \tag{2.99}$$

というように変化する。つまりこのような場の変分は $\delta\varphi = \Delta\varphi(x)$ である。(1.A) 式より、場の変分も考慮したネーターカレントは

$$\epsilon j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \Delta\varphi(x) + \epsilon x^\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi - \delta^\mu_\nu \mathcal{L} \right)$$

$$j^\mu = T^\mu{}_\nu x^\nu + V^\mu \tag{2.100}$$

$$V^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \Delta\varphi(x) \tag{2.101}$$

と書ける。ここで新しく導入した V^μ はビリアルカレントと呼ばれる。ただ、このビリアルカレントはネーターカレントの外微分による自由度で

$$V^\mu = \partial_\nu \sigma^{\mu\nu} \tag{2.102}$$

となるように取れば、カレントから取り除くことができる。なのでこういった準プライマリ場であっても普通のスカラー場と同様にカレントを

$$j^\mu = T^\mu{}_\nu x^\nu \tag{2.103}$$

とできる。また、エネルギー運動量テンソルは座標に陽に依存しないとしてこれの湧き出しを計算すると

$$0 = \partial_\mu j^\mu = T^\mu{}_\mu \tag{2.104}$$

というトレースレス条件が付く。

Ward-高橋恒等式とエネルギー運動量テンソル

保存カレントがあるので Ward-高橋恒等式が得られる。まずは並進操作について考えよう。ここで教科書はなぜか生成子のエルミート化をやめて

$$G^\mu \mathcal{O} = \partial^\mu \mathcal{O} \tag{2.105}$$

と生成子をとりなおしている。すると Ward-高橋恒等式より

$$\partial_\mu \langle T^{\mu\nu} \mathcal{O}_1(x_1) \cdots \mathcal{O}_n(x_n) \rangle = -\sum_{j=1}^n \delta(x - x_j) \langle \mathcal{O}_1(x_1) \cdots [\partial_j^\nu \mathcal{O}_j(x_j)] \cdots \mathcal{O}_n(x_n) \rangle \tag{2.106}$$

となる[*12]。ここでは微分の線形性を使って外に出した。

---

*11 本文だとスカラー場だと言ってるがそれなら共形次元は現れるはずがない。

*12 生成子をエルミート化したときには右辺に i がかかる。

回転のときには生成子を

$$G^{\mu\nu}\mathcal{O} = -(x^\mu\partial^\nu - x^\nu\partial^\mu + \Sigma^{\mu\nu})\mathcal{O} \tag{2.107}$$

としたとき、Ward-高橋恒等式は

$$\partial_\mu \langle (T^{\mu\nu}x^\rho - T^{\mu\rho}x^\nu)\mathcal{O}_1(x_1)\cdots\mathcal{O}_n(x_n)\rangle = \sum_{j=1}^{n}\delta(x-x_j)\left\langle \mathcal{O}_1(x_1)\cdots[(x_j^\nu\partial_j^\rho - x_j^\rho\partial_j^\nu + \Sigma_j^{\nu\rho})\mathcal{O}_j(x_j)]\cdots\mathcal{O}_n(x_n)\right\rangle \tag{2.108}$$

$$\langle (T^{\rho\nu} - T^{\nu\rho})\mathcal{O}_1(x_1)\cdots\mathcal{O}_n(x_n)\rangle = \sum_{j=1}^{n}\delta(x-x_j)\left\langle \mathcal{O}_1(x_1)\cdots[\Sigma_j^{\nu\rho}\mathcal{O}_j(x_j)]\cdots\mathcal{O}_n(x_n)\right\rangle \tag{2.109}$$

となる。 演算子が挿入されている点以外では、エネルギー運動量テンソルは対称テンソルになっている[*13]。

最後にスケール変換については生成子は

$$G\mathcal{O} = (x^\mu\partial_\mu + \Delta)\mathcal{O} \tag{2.110}$$

なので Ward-高橋恒等式は

$$\partial_\mu \langle T^{\mu\nu}x_\nu\mathcal{O}_1(x_1)\cdots\mathcal{O}_n(x_n)\rangle = -\sum_{j=1}^{n}\delta(x-x_j)\left\langle \mathcal{O}_1(x_1)\cdots[(x_j^\mu\partial_{j\mu} + \Delta_j)\mathcal{O}_j(x_j)]\cdots\mathcal{O}_n(x_n)\right\rangle \tag{2.111}$$

$$\left\langle T^\mu{}_\mu\,\mathcal{O}_1(x_1)\cdots\mathcal{O}_n(x_n)\right\rangle = -\sum_{j=1}^{n}\delta(x-x_j)\Delta_j\langle \mathcal{O}_1(x_1)\cdots\mathcal{O}_n(x_n)\rangle \tag{2.112}$$

[*13] 反対称では?

第 3 章

2 次元の共形場理論

3.1　2 次元の共形対称性

計量テンソルの変換性を通して共形変換を定義した。その際、共形 Killing 方程式を解いていくと $d=1$ や $d=2$ では条件が緩くなることがわかった。これはつまり低次元では対称性がより大きくなることがわかる。物性への応用といったときもここら辺が気になる点である。ここでは $d=2$ の 2 次元系を見ていこう。

この章では座標の無限小変換といったときには

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu$$

のように符号を取り換える。つまり場そのものを並進操作したり回転させていく。2 次元の共形変換の無限小パラメータの満たすべき式は (2.12) 式と (2.13) 式を組み合わせて、

$$\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu = \partial_\rho \epsilon^\rho \eta_{\mu\nu} \tag{3.1}$$

となる。今はユークリッド化をしているのを思い出そう。この式を成分で書き下すと

$$\frac{\partial \epsilon_1(x_1,\, x_2)}{\partial x^1} = \frac{\partial \epsilon_2(x_1,\, x_2)}{\partial x^2} \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial \epsilon_1(x_1,\, x_2)}{\partial x^2} = -\frac{\partial \epsilon_2(x_1,\, x_2)}{\partial x^1} \tag{3.3}$$

となる。これは複素関数論における正則関数のコーシーリーマンの方程式になっている。そこで複素座標を

$$z = x^1 + ix^2, \quad \bar{z} = x^1 - ix^2 \tag{3.4}$$

で定義する。これは x_1 を空間座標、x_2 を時間座標と思ってみると光円錐座標に相当する。また、無限小パラメータの方も

$$\epsilon \equiv \epsilon^z = \epsilon^1 + i\epsilon^2, \quad \bar{\epsilon} \equiv \epsilon^{\bar{z}} = \epsilon^1 - i\epsilon^2 \tag{3.5}$$

というように定義する。これを導入すると、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial x^1}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\partial x^2}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x^2} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{z+\bar{z}}{2}\right)\frac{\partial}{\partial x^1} + \left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)\frac{\partial}{\partial x^2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^1} - i\frac{\partial}{\partial x^2}\right)
\end{aligned}$$

というように微分を書き換えることができるので (3.2) 式と (3.3) 式は

$$\bar{\partial}\epsilon(z,\, \bar{z}) = 0, \quad \bar{\partial}\epsilon(z,\, \bar{z}) = 0 \tag{3.6}$$

のように書き直せる。[*1] ここで微分演算子を

$$\partial \equiv \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^1} - i\frac{\partial}{\partial x^2}\right) \tag{3.7}$$

$$\bar{\partial} \equiv \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^1} + i\frac{\partial}{\partial x^2}\right) \tag{3.8}$$

[*1] 微分形式でかくこともできそうである。

とおいた。

複素座標を用いると線素は

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dz d\bar{z} \tag{3.9}$$

のように書ける。これより計量テンソルは

$$\begin{aligned} g_{z\bar{z}} = g_{\bar{z}z} = \frac{1}{2}, \quad g^{z\bar{z}} = g^{\bar{z}z} = 2 \\ g_{zz} = g_{\bar{z}\bar{z}} = g^{zz} = g^{\bar{z}\bar{z}} = 0 \end{aligned} \tag{3.10}$$

とわかる。

ここまでは無限小変換を考えていたが、有限変換では正則変換

$$w \to w(z), \quad \bar{z} \to \bar{w}(\bar{z}) \tag{3.11}$$

が許される。実際、線素の変わり方を見ると

$$ds^2 = dz d\bar{z} \to dw d\bar{w} = \left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right)\left(\frac{\mathrm{d}\bar{w}}{\mathrm{d}\bar{z}}\right) dz d\bar{z} \tag{3.12}$$

より計量が定数倍のみ変わっているのがわかる。ここまでの結果を微分幾何っぽく表現すると、2 次元の無限小共形変換は正則なベクトル場であり、有限の共形変換は正則な微分同相であるということができる。

局所的に成り立つコーシーリーマンの関係式から変換を見ていったが、これが大域的、つまりリーマン面全体で使えるような変換はどのようなものかを見ていく。このとき、変換の生成子はどのようなものかというのを考えるのが筋である。座標の無限小変換のうち、

$$z \to z' = z + \epsilon(z), \quad \bar{z} \to \bar{z}' = \bar{z} + \bar{\epsilon}(\bar{z}) \tag{3.13}$$

の形のものが共形変換を生成することが分かった。ここで、無限小変換のパラメータを

$$\epsilon(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^{n+1} \tag{3.14}$$

$$\bar{\epsilon}(\bar{z}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{c}_n \bar{z}^{n+1} \tag{3.15}$$

のように座標で展開してみる。すると座標変換は

$$z \to z' = \left(1 - \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \underbrace{(-z^{n+1}\partial)}_{=:l_n}\right) z$$

というようになる。これより生成子を

$$l_n = -z^{n+1}\partial, \quad \bar{l}_n = -\bar{z}^{n+1}\bar{\partial} \tag{3.16}$$

というように導入できる。この生成子はある意味複素ベクトル場とみなすことができる。生成子を導入したので交換関係を書くと、

$$[l_m, l_n] = (m-n) l_{m+n} \tag{3.17}$$

$$[\bar{l}_m, \bar{l}_n] = (m-n) \bar{l}_{m+n} \tag{3.18}$$

$$[l_m, \bar{l}_n] = 0 \tag{3.19}$$

となる。実際、

$$\begin{aligned} [l_m, l_n] &= [z^{m+1}\partial, z^{n+1}\partial] = z^{m+1}[\partial, z^{n+1}]\partial + z^{n+1}[z^{m+1}, \partial]\partial \\ &= (n+1) z^{m+n+1}\partial - (m+1) z^{m+n+1}\partial = (m-n) l_{m+n} \end{aligned}$$

である。リー代数を考えるときには交換関係のみが大事になる。この変形を見てわかるように無限小パラメータの $\epsilon = \sum c_n z^{n+1}$ の z の次数は適当に決めてもよさそうである。なので $\epsilon = \sum c_n z^{n+10}$ とかにしても問題ないように見える。

3 次元以上では並進・回転・拡大・反並反操作の 4 種類であった生成子が 2 次元では加算無限個あることがわかる。つまり対称性がとんでもなく広がっていると言える。生成子が無限個あることから無限次元のリー代数を作ることになる。そう

いった点が数学的にも注目される点である。また、正則関数 z と反正則関数 $\bar{z}$ が独立になっているのも重要な点になっている。

では無限小変換から大域的な変換に直していこう。生成子が $z=0$ 近傍で正則であるためには $n \geq -1$ である必要があるのがわかる。次に無限遠点 $z=\epsilon$ 近傍で正則であるのを確かめる必要がある。その条件を調べるには $w=1/z$ というように座標変換をして $w=0$ 周りのふるまいを見ればよい。

$$l_n = -z^{n+1}\partial_z = -\left(\frac{1}{w}\right)^{n+1}\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}\right)\partial_w = \left(\frac{1}{w}\right)^{n-1}\partial_w \tag{3.20}$$

これより $n \leq 1$ であればよいことがわかる。リーマン球でこれ以外に特異点はないと考えれる。なので大域的に定義できるのは $n=-1,\,0,\,1$ の場合である。しかもこれらは部分代数となっている。この部分代数を大域的共形代数という。この部分代数の生成子の具体的な表式を見てみよう。まずは $n=-1$ のとき、

$$l_{-1} = -\partial, \quad \bar{l}_{-1} = -\bar{\partial}.$$

これはつまり、複素平面でいうところの $\theta = \pm\pi/4$ 度方向への並進操作に対応している*2。座標変換の式で表すと

$$z \to z' = z + b.$$

次に $n=0$ のとき、

$$\begin{aligned} l_0 &= -z\partial, \quad \bar{l}_0 = -\bar{z}\bar{\partial} \\ &\to l_0 + \bar{l}_0 = x^1\partial_1 + x^2\partial_2 \\ &\to i(l_0 - \bar{l}_0) = x^1\partial_2 - x^2\partial_1 \end{aligned}$$

となる。これはつまり拡大と回転を表している。座標変換の式で表すと

$$z \to z' = az.$$

では $l=2$ のとき、

$$\begin{aligned} l_1 &= -z^2\partial, \quad \bar{l}_1 = -z^2\bar{\partial} \\ &\to l_1 + \bar{l}_1 = (x^{(1)2} - x^{(2)2})\partial_1 - 2x^1x^2\partial_2 \\ &\to i(l_1 - \bar{l}_1) = -(x^{(1)2} - x^{(2)2})\partial_2 + 2x^1x^2\partial_1 \end{aligned}$$

となる。これは特殊共形変換 (2.25) の生成子と同じになっている。これは座標変換の式で表すと

$$\frac{1}{z'} = \frac{1}{z} + c \to z' = \frac{z}{cz+1}$$

と書くことができる。これらの生成子から生成される無限小変換によって座標は

$$z \to z' = \frac{az+b}{cz+d} \quad (ad-bc=1) \tag{3.21}$$

と変換されるのがわかる。また、$z = z_1/z_2$ というように z が射影空間の元だということを明記するとこの変換は

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad (ad-bc=1) \tag{3.22}$$

というように書くことができる。つまり射影空間 CP に $SL(2,\,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$ が作用していると言える。ただしこの $\mathbb{Z}_2$ は反転操作 $(a,\,b,\,c,\,d) \to (-a,\,-b,\,-c,\,-d)$ をしても作用が変わらないことを表している。

*2 光円錐座標だと光の世界線上の移動?

3.2 プライマリ場と相関関数

2 次元の共形変換に関して、場がどう変わるかを調べる。座標変換 $z \to w(z)$ のもとで場が

$$\mathcal{O}'(w,\,\bar{w}) = \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}w}\right)^h \left(\frac{\mathrm{d}\bar{z}}{\mathrm{d}\bar{w}}\right)^{\bar{h}} \mathcal{O}(z,\,\bar{z}) \tag{3.23}$$

というように変換するものに注目する。これは

$$\mathcal{O}_{z_1\cdots z_h\bar{z}_1\cdots\bar{z}_{\bar{h}}} dz^1 \cdots dz^h d\bar{z}^1 \cdots d\bar{z}^{\bar{h}}$$

というテンソル場と同じ変換をしている。このパラメータ $(h,\,\bar{h})$ は共形ウェイトと呼ばれ、共形次元を Δ, 2 次元回転のスピンを s としたとき、

$$\Delta = h + \bar{h}, \quad s = h - \bar{h} \tag{3.24}$$

で関係づけられる。このことはスケール変換 $w = \lambda z$ と回転変換 $w = e^{i\theta}z$ に対して

$$\mathcal{O}'(\lambda z,\,\lambda\bar{z}) = \lambda^{-(h+\bar{h})}\mathcal{O}(z,\,\bar{z}) \tag{3.25}$$

$$\mathcal{O}'(e^{i\theta}z,\,e^{-i\theta}\bar{z}) = e^{-i(h-\bar{h})\theta}\mathcal{O}(z,\,\bar{z}) \tag{3.26}$$

というように変換することからわかる。(3.21) 式の分数変換で与えられる大域的共形変換において、(3.23) 式を満たす場を準プライマリ場という。一方、任意の正則関数 $w(z)$ に関して成り立つ場合にはプライマリ場と呼ぶ。この定義より、プライマリ場ならば準プライマリ場であるが、準プライマリ場ならばプライマリ場とは限らない。

プライマリ場は局所共形変換に対する変換で特徴づけることができる。無限小変換 $z \to z' = z - \epsilon(z)$ を考える。空間そのものが共形変換して、座標と場両方とも変化して生じる差分 $\delta\mathcal{O} = \mathcal{O}'(w,\,\bar{w}) - \mathcal{O}(z,\,\bar{z})$ は

$$\begin{aligned}\mathcal{O}'(w,\,\bar{w}) &= (1-\partial\epsilon)^h(1-\bar{\partial}\bar{\epsilon})^{\bar{h}}\mathcal{O}(z,\,\bar{z}) = \mathcal{O}(z,\,\bar{z}) + (\partial\epsilon + \bar{\partial}\bar{\epsilon})\mathcal{O}(z,\,\bar{z}) \\ &\to \delta\mathcal{O} = (\partial\epsilon + \bar{\partial}\bar{\epsilon})\mathcal{O}(z,\,\bar{z})\end{aligned}$$

である。一方共形変換したとき、同じ位置における場の変化の差分 $\bar{\delta}\mathcal{O} = \mathcal{O}'(z,\,\bar{z}) - \mathcal{O}(z,\,\bar{z})$ は

$$\begin{aligned}\bar{\delta}\mathcal{O} &= \mathcal{O}'(z,\,\bar{z}) - \mathcal{O}'(w,\,\bar{w}) + \mathcal{O}'(w,\,\bar{w}) - \mathcal{O}(z,\,\bar{z}) \\ &= \mathcal{O}'(z,\,\bar{z}) - \big(\mathcal{O}'(z,\,\bar{z}) - \epsilon\partial\mathcal{O}'(z,\,\bar{z}) - \bar{\epsilon}\bar{\partial}\mathcal{O}'(z,\,\bar{z})\big) + \delta\mathcal{O} \\ &= \epsilon\partial\mathcal{O} - \bar{\epsilon}\bar{\partial}\mathcal{O} + (\partial\epsilon + \bar{\partial}\bar{\epsilon})\mathcal{O}(z,\,\bar{z}) \\ &= (h\partial + \epsilon\partial)\mathcal{O}(z,\,\bar{z}) + (\bar{h}\bar{\partial} + \bar{\epsilon}\bar{\partial})\mathcal{O}(z,\,\bar{z})\end{aligned} \tag{3.27}$$

というようになる。同じ位置における場の変換則によって場を特徴づけできるのでこれをプライマリ場の定義式とみなすことができる[*3]。またこの式を見るとプライマリ場は共形ウェイト $(h,\,0)$ を持つ正則部分と $(0,\,\bar{h})$ を持つ反正則部分に因子化しているのがわかる。つまり、

$$\mathcal{O}_{h,\,\bar{h}}(z,\,\bar{z}) = \mathcal{O}_h(z)\mathcal{O}_{\bar{h}}(\bar{z})$$

なのでこれを使うと大域的共形変換に対する相関関数の制約は 2 章でやった結果をそのまま流用できるのがわかる。残りこの節は割愛。

3.3 共形 Ward-高橋恒等式

Ward-高橋恒等式のデルタ関数を留数定理による表現に変えてみる。目標は

$$\delta(z,\,\bar{z}) = \frac{1}{\pi}\bar{\partial}\frac{1}{z}, \quad \delta(z,\,\bar{z}) = \frac{1}{\pi}\partial\frac{1}{\bar{z}} \tag{3.41}$$

である。ここで左辺のデルタ関数は $z = 0,\,\bar{z} = 0$ のときの値を返すものである。そのためにグリーンの定理

$$\int_R d^2x\left(-\frac{\partial v^1(x^1,\,x^2)}{\partial x^2} + \frac{\partial v^2(x^1,\,x^2)}{\partial x^1}\right) = \int_{\partial R} v^1(x^1,\,x^2)dx^1 + v^2(x^1,\,x^2)dx^2 \tag{3.42}$$

[*3] 江口読んでると何か勘違いしてるような気がして来る

を複素関数に利用する。1 次元の複素数の 1-form 等は

$$dz = dx^1 + idx^2, \quad d\bar{z} = dx^1 - idx^2 \tag{3.43}$$

$$\partial_1 = \partial + \bar{\partial}, \qquad \partial_2 = i(\partial - \bar{\partial})$$
$$v^1 = \frac{v + \bar{v}}{2}, \qquad v^2 = \frac{v - \bar{v}}{2i}$$

であるので、複素微分形式に対するグリーンの定理は

$$\int_R dz d\bar{z}(\partial v - \bar{\partial}\bar{z}) = -\frac{1}{2i}\int_{\partial R}(v d\bar{z} + \bar{v}dz) \tag{3.44}$$

というようにできる。

ある正則な関数 $f(z)$ を用意して、領域 R を $z = 0$ を含むようにとると

$$\frac{1}{\pi}\int_R dz d\bar{z} f(z)\bar{\partial}\frac{1}{z} = \frac{1}{\pi}\int_R dz d\bar{z}\bar{\partial}\left(\frac{f(z)}{z}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R} dz \frac{f(z)}{z} = f(0) \tag{3.46}$$

というようにしてデルタ関数と同じ役割をすることを示せた。

ではこれを Ward-高橋恒等式に入れてみる。T^{12} から $T^{z\bar{z}}$ の変換も忘れずに整理していく。

$$\partial_\mu \langle T^{\mu\nu}\mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_n\rangle = -\sum_{j=1}^{n}\delta(x - x_j)\left\langle \mathcal{O}_1 \cdots [\partial_j^\nu \mathcal{O}_j] \cdots \mathcal{O}_n\right\rangle$$
$$\partial \langle T^{z\nu}\mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_n\rangle + \bar{\partial}\left\langle T^{\bar{z}\nu}\mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_n\right\rangle = -\sum_{j=1}^{n}\delta(x - x_j)\partial_j^\nu \langle \mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_n\rangle$$

この式を $(\nu = 1$ のとき$) - i(\nu = 2$ のとき$)$ というようにすると

$$\partial\left\langle T^{z\bar{z}}\mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_n\right\rangle + \bar{\partial}\left\langle T^{\bar{z}\bar{z}}\mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_n\right\rangle = -\sum_{j=1}^{n}\delta(z - z_j,\, \bar{z} - \bar{z}_j) 2\partial_j \langle \mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_n\rangle$$
$$2\pi\partial \langle T_{\bar{z}z}\mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_n\rangle + 2\pi\bar{\partial}\langle T_{zz}\mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_n\rangle = -\sum_{j=1}^{n}\bar{\partial}\left(\frac{1}{z - z_j}\right)\partial_j \langle \mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_n\rangle \tag{3.47}$$

また $(\nu = 1$ のとき$) + i(\nu = 2$ のとき$)$ というようにすると

$$\partial \langle T^{zz}\mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_n\rangle + \bar{\partial}\left\langle T^{\bar{z}z}\mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_n\right\rangle = -\sum_{j=1}^{n}\delta(z - z_j,\, \bar{z} - \bar{z}_j) 2\bar{\partial}_j \langle \mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_n\rangle$$
$$2\pi\partial \langle T_{\bar{z}\bar{z}}\mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_n\rangle + 2\pi\bar{\partial}\langle T_{z\bar{z}}\mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_n\rangle = -\sum_{j=1}^{n}\partial\left(\frac{1}{\bar{z} - \bar{z}_j}\right)\bar{\partial}_j \langle \mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_n\rangle \tag{3.48}$$

というようにできる。

回転変換に関しては

$$2\langle T_{\bar{z}z}\mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_n\rangle - \left\langle T^{z\bar{z}}\mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_n\right\rangle = -\sum_{j=1}^{n}\delta(z - z_j,\, \bar{z} - \bar{z}_j)s_j \langle \mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_n\rangle \tag{3.49}$$

$$\Sigma_{z\bar{z}}\mathcal{O}_{z_1 \ldots z_h \bar{z}_1 \ldots \bar{z}_{\bar{h}}} = -\frac{h - \bar{h}}{2}\mathcal{O}_{z_1 \ldots z_h \bar{z}_1 \ldots \bar{z}_{\bar{h}}} = -\frac{s}{2}\mathcal{O}_{z_1 \ldots z_h \bar{z}_1 \ldots \bar{z}_{\bar{h}}} \tag{3.50}$$

というようになる。

また、スケール変換に関しては

$$\left\langle T^\mu{}_\mu \mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_n\right\rangle = -\sum_{j=1}^{n}\delta(z - z_j,\, \bar{z} - \bar{z}_j)\Delta_j \langle \mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_n\rangle$$
$$2\langle T_{\bar{z}z}\mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_n\rangle + 2\langle T_{z\bar{z}}\mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_n\rangle = -\sum_{j=1}^{n}\delta(z - z_j,\, \bar{z} - \bar{z}_j)\Delta_j \langle \mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_n\rangle \tag{3.51}$$

となる。回転変換とスケール変換の式 (3.49) と (3.51) を組み合わせてデルタ関数を書き直すと

$$2\pi \langle T_{\bar{z}z}\mathcal{O}_1\cdots\mathcal{O}_n\rangle = -\sum_{j=1}^{n}\bar{\partial}\left(\frac{1}{z-z_j}\right)h_j\langle\mathcal{O}_1\cdots\mathcal{O}_n\rangle \tag{3.52}$$

$$2\pi \langle T_{z\bar{z}}\mathcal{O}_1\cdots\mathcal{O}_n\rangle = -\sum_{j=1}^{n}\partial\left(\frac{1}{\bar{z}-\bar{z}_j}\right)\bar{h}_j\langle\mathcal{O}_1\cdots\mathcal{O}_n\rangle \tag{3.53}$$

となる。これを使うと並進変換の式 (3.47),(3.48) から $T_{\bar{z}z}$, $T_{z\bar{z}}$ の項を消すことができる。

$$\bar{\partial}\left[\langle T(z,\,\bar{z})\mathcal{O}_1\cdots\mathcal{O}_n\rangle - \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{z-z_j}\frac{\partial}{\partial z_j}+\frac{h_j}{(z-z_j)^2}\right)\langle\mathcal{O}_1\cdots\mathcal{O}_n\rangle\right]=0 \tag{3.54}$$

$$\partial\left[\left\langle \bar{T}(z,\,\bar{z})\mathcal{O}_1\cdots\mathcal{O}_n\right\rangle - \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{\bar{z}-\bar{z}_j}\frac{\partial}{\partial z_j}+\frac{\bar{h}_j}{(\bar{z}-\bar{z}_j)^2}\right)\langle\mathcal{O}_1\cdots\mathcal{O}_n\rangle\right]=0 \tag{3.55}$$

と書ける。ここで

$$T = -2\pi T_{zz}, \quad \bar{T} = -2\pi T_{\bar{z}\bar{z}} \tag{3.56}$$

とした。また、この式を次のようにも書き換えておく。

$$\langle T(z,\,\bar{z})\mathcal{O}_1\cdots\mathcal{O}_n\rangle = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{z-z_j}\frac{\partial}{\partial z_j}+\frac{h_j}{(z-z_j)^2}\right)\langle\mathcal{O}_1\cdots\mathcal{O}_n\rangle + \cdots \tag{3.57}$$

$$\left\langle \bar{T}(z,\,\bar{z})\mathcal{O}_1\cdots\mathcal{O}_n\right\rangle = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{\bar{z}-\bar{z}_j}\frac{\partial}{\partial z_j}+\frac{\bar{h}_j}{(\bar{z}-\bar{z}_j)^2}\right)\langle\mathcal{O}_1\cdots\mathcal{O}_n\rangle + \cdots \tag{3.58}$$

うしろの $\cdots$ は $z\to z_j$ で発散しない微分で消える z か $\bar{z}$ の正則関数を表す。

参考文献

[1] 柏太郎. 経路積分. 裳華房, 2015.

[2] 疋田泰章. 共形場理論 基礎からホログラフィへの道. 講談社, 2020. 正直日本語で書いてあるという点しかよいところないんじゃない疑惑がある。 地の文の説明が省略されてたり、描像の混乱が見られるように感じる。

[3] Philippe Francesco, Pierre Mathieu, and David Sénéchal. *Conformal Filed Theory*. Springer, 1997. 辞書みたいに使う本とは言われてる。

[4] 政岡凜太郎. 共形ブーストトラップ入門, 2023. 読みやすい共形場理論について書かれた pdf https://event.phys.s.u-tokyo.ac.jp/physlab2023/groups/statistic-physics/.

[5] 江口徹, 菅原祐二. 共形場理論. 岩波書店, 2015. 一発目に読むには厳しいかもしれないが、微分幾何と場の理論をちゃんとわかってる人にはいい本かもしれない。