第 1 章

2 次元の共形場理論

1.1　2 次元の共形対称性

計量テンソルの変換性を通して共形変換を定義した。その際、共形 Killing 方程式を解いていくと $d=1$ や $d=2$ では条件が緩くなることがわかった。これはつまり低次元では対称性がより大きくなることがわかる。物性への応用といったときもここら辺が気になる点である。ここでは $d=2$ の 2 次元系を見ていこう。

この章では座標の無限小変換といったときには

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu$$

のように符号を取り換える。つまり場そのものを並進操作したり回転させていく。2 次元の共形変換の無限小パラメータの満たすべき式は (2.12) 式と (2.13) 式を組み合わせて、

$$\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu = \partial_\rho \epsilon^\rho \eta_{\mu\nu} \tag{1.1}$$

となる。今はユークリッド化をしているのを思い出そう。この式を成分で書き下すと

$$\frac{\partial \epsilon_1(x_1,\, x_2)}{\partial x^1} = \frac{\partial \epsilon_2(x_1,\, x_2)}{\partial x^2} \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial \epsilon_1(x_1,\, x_2)}{\partial x^2} = -\frac{\partial \epsilon_2(x_1,\, x_2)}{\partial x^1} \tag{1.3}$$

となる。これは複素関数論における正則関数のコーシーリーマンの方程式になっている。そこで複素座標を

$$z = x^1 + ix^2, \quad \bar{z} = x^1 - ix^2 \tag{1.4}$$

で定義する。これは x_1 を空間座標、x_2 を時間座標と思ってみると光円錐座標に相当する。また、無限小パラメータの方も

$$\epsilon \equiv \epsilon^z = \epsilon^1 + i\epsilon^2, \quad \bar{\epsilon} \equiv \epsilon^{\bar{z}} = \epsilon^1 - i\epsilon^2 \tag{1.5}$$

というように定義する。これを導入すると、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial x^1}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\partial x^2}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x^2} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{z+\bar{z}}{2}\right)\frac{\partial}{\partial x^1} + \left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)\frac{\partial}{\partial x^2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^1} - i\frac{\partial}{\partial x^2}\right)
\end{aligned}$$

というように微分を書き換えることができるので (3.2) 式と (3.3) 式は

$$\bar{\partial}\epsilon(z,\, \bar{z}) = 0, \quad \bar{\partial}\epsilon(z,\, \bar{z}) = 0 \tag{1.6}$$

のように書き直せる。[*1] ここで微分演算子を

$$\partial \equiv \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^1} - i\frac{\partial}{\partial x^2}\right) \tag{1.7}$$

$$\bar{\partial} \equiv \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^1} + i\frac{\partial}{\partial x^2}\right) \tag{1.8}$$

[*1] 微分形式でかくこともできそうである。

とおいた。

複素座標を用いると線素は

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dz d\bar{z} \tag{1.9}$$

のように書ける。これより計量テンソルは

$$\begin{aligned} g_{z\bar{z}} = g_{\bar{z}z} = \frac{1}{2}, \quad g^{z\bar{z}} = g^{\bar{z}z} = 2 \\ g_{zz} = g_{\bar{z}\bar{z}} = g^{zz} = g^{\bar{z}\bar{z}} = 0 \end{aligned} \tag{1.10}$$

とわかる。

ここまでは無限小変換を考えていたが、有限変換では正則変換

$$w \to w(z), \quad \bar{z} \to \bar{w}(\bar{z}) \tag{1.11}$$

が許される。実際、線素の変わり方を見ると

$$ds^2 = dz d\bar{z} \to dw d\bar{w} = \left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right)\left(\frac{\mathrm{d}\bar{w}}{\mathrm{d}\bar{z}}\right) dz d\bar{z} \tag{1.12}$$

より計量が定数倍のみ変わっているのがわかる。ここまでの結果を微分幾何っぽく表現すると、2 次元の無限小共形変換は正則なベクトル場であり、有限の共形変換は正則な微分同相であるということができる。

局所的に成り立つコーシーリーマンの関係式から変換を見ていったが、これが大域的、つまりリーマン面全体で使えるような変換はどのようなものかを見ていく。このとき、変換の生成子はどのようなものかというのを考えるのが筋である。座標の無限小変換のうち、

$$z \to z' = z + \epsilon(z), \quad \bar{z} \to \bar{z}' = \bar{z} + \bar{\epsilon}(\bar{z}) \tag{1.13}$$

の形のものが共形変換を生成することが分かった。ここで、無限小変換のパラメータを

$$\epsilon(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^{n+1} \tag{1.14}$$

$$\bar{\epsilon}(\bar{z}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{c}_n \bar{z}^{n+1} \tag{1.15}$$

のように座標で展開してみる。すると座標変換は

$$z \to z' = \left(1 - \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \underbrace{(-z^{n+1}\partial)}_{=:l_n}\right) z$$

というようになる。これより生成子を

$$l_n = -z^{n+1}\partial, \quad \bar{l}_n = -\bar{z}^{n+1}\bar{\partial} \tag{1.16}$$

というように導入できる。この生成子はある意味複素ベクトル場とみなすことができる。生成子を導入したので交換関係を書くと、

$$[l_m, l_n] = (m-n) l_{m+n} \tag{1.17}$$

$$[\bar{l}_m, \bar{l}_n] = (m-n) \bar{l}_{m+n} \tag{1.18}$$

$$[l_m, \bar{l}_n] = 0 \tag{1.19}$$

となる。実際、

$$\begin{aligned} [l_m, l_n] &= [z^{m+1}\partial, z^{n+1}\partial] = z^{m+1}[\partial, z^{n+1}]\partial + z^{n+1}[z^{m+1}, \partial]\partial \\ &= (n+1) z^{m+n+1}\partial - (m+1) z^{m+n+1}\partial = (m-n) l_{m+n} \end{aligned}$$

である。リー代数を考えるときには交換関係のみが大事になる。この変形を見てわかるように無限小パラメータの $\epsilon = \sum c_n z^{n+1}$ の z の次数は適当に決めてもよさそうである。なので $\epsilon = \sum c_n z^{n+10}$ とかにしても問題ないように見える。

3 次元以上では並進・回転・拡大・反並反操作の 4 種類であった生成子が 2 次元では加算無限個あることがわかる。つまり対称性がとんでもなく広がっていると言える。生成子が無限個あることから無限次元のリー代数を作ることになる。そう

いった点が数学的にも注目される点である。また、正則関数 z と反正則関数 $\bar{z}$ が独立になっているのも重要な点になっている。

では無限小変換から大域的な変換に直していこう。生成子が $z=0$ 近傍で正則であるためには $n \geq -1$ である必要があるのがわかる。次に無限遠点 $z=\epsilon$ 近傍で正則であるのを確かめる必要がある。その条件を調べるには $w=1/z$ というように座標変換をして $w=0$ 周りのふるまいを見ればよい。

$$l_n = -z^{n+1}\partial_z = -\left(\frac{1}{w}\right)^{n+1}\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}\right)\partial_w = \left(\frac{1}{w}\right)^{n-1}\partial_w \tag{1.20}$$

これより $n \leq 1$ であればよいことがわかる。リーマン球でこれ以外に特異点はないと考えれる。なので大域的に定義できるのは $n=-1,\,0,\,1$ の場合である。しかもこれらは部分代数となっている。この部分代数を大域的共形代数という。この部分代数の生成子の具体的な表式を見てみよう。まずは $n=-1$ のとき、

$$l_{-1} = -\partial, \quad \bar{l}_{-1} = -\bar{\partial}.$$

これはつまり、複素平面でいうところの $\theta = \pm\pi/4$ 度方向への並進操作に対応している[*2]。座標変換の式で表すと

$$z \to z' = z + b.$$

次に $n=0$ のとき、

$$\begin{aligned} l_0 = -z\partial, \quad \bar{l}_0 = -\bar{z}\bar{\partial} \\ \to l_0 + \bar{l}_0 = x^1\partial_1 + x^2\partial_2 \\ \to i(l_0 - \bar{l}_0) = x^1\partial_2 - x^2\partial_1 \end{aligned}$$

となる。これはつまり拡大と回転を表している。座標変換の式で表すと

$$z \to z' = az.$$

では $l=2$ のとき、

$$\begin{aligned} l_1 = -z^2\partial, \quad \bar{l}_1 = -z^2\bar{\partial} \\ \to l_1 + \bar{l}_1 = (x^{(1)2} - x^{(2)2})\partial_1 - 2x^1x^2\partial_2 \\ \to i(l_1 - \bar{l}_1) = -(x^{(1)2} - x^{(2)2})\partial_2 + 2x^1x^2\partial_1 \end{aligned}$$

となる。これは特殊共形変換 (2.25) の生成子と同じになっている。

[*2] 光円錐座標だと光の世界線上の移動?