2007 年度東大物工答案

しゃんごん (@CEY3944)

2025 年 5 月 12 日

第 1 問　量子力学: 2 準位系・相互作用表示・回転波近似

[1]

$$
\begin{aligned}
H_{aa} &= \langle a| H |b\rangle = \hbar\omega_a \\
H_{ab} &= \langle a| H |b\rangle = -\mu\cos\nu t \\
H_{ba} &= \langle b| H |b\rangle = -\mu\cos\nu t \\
H_{bb} &= \langle b| H |b\rangle = \hbar\omega_b
\end{aligned} \tag{1.1}
$$

[2]

$\sigma_x = |a\rangle\langle b| + |b\rangle\langle a|$ とおく。シュレディンガー方程式より

$$
\begin{aligned}
i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle &= (H_0 - \sigma_x\mu\cos\nu t)|\psi(t)\rangle \\
i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Big(e^{-iH_0t/\hbar}|\phi(t)\rangle\Big) &= (H_0 - \sigma_x\mu\cos\nu t)e^{-iH_0t/\hbar}|\phi(t)\rangle \\
e^{-iH_0t/\hbar}i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\phi(t)\rangle &= -\sigma_x\mu\cos\nu t e^{-iH_0t/\hbar}|\phi(t)\rangle \\
i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\phi(t)\rangle &= -\mu\cos\nu t e^{iH_0t/\hbar}\sigma_x e^{-iH_0t/\hbar}|\phi(t)\rangle
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

ここで、

$$
e^{-iH_0t/\hbar} = e^{-i\omega_a t}|a\rangle\langle a| + e^{-i\omega_b t}|b\rangle\langle b| = e^{-i\omega_a t}\big(|a\rangle\langle a| + e^{-i\omega t}|b\rangle\langle b|\big) \tag{2.2}
$$

と表せることを使うと

$$
\begin{aligned}
-\mu\cos\nu t e^{iH_0t/\hbar}\sigma_x e^{-iH_0t/\hbar} &= -\mu\cos\nu t\big(|a\rangle\langle a| + e^{i\omega t}|b\rangle\langle b|\big)\big(|a\rangle\langle b| + |b\rangle\langle a|\big)\big(|a\rangle\langle a| + e^{-i\omega t}|b\rangle\langle b|\big) \\
&= -\frac{\mu}{2}(e^{i\nu t} + e^{-i\nu t})\big(e^{-i\omega t}|a\rangle\langle b| + e^{-i\omega t}|b\rangle\langle a|\big) \\
&= V(t)
\end{aligned} \tag{2.3}
$$

とわかるので、

$$
i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\phi(t)\rangle = V(t)|\phi(t)\rangle \tag{2.4}
$$

[3]

$V(t) = -\mu\sigma_x$ なので

$$
-\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt' V(t') = -\frac{i\mu t}{\hbar}\sigma_x \tag{3.1}
$$

となる。よって

$$
\begin{aligned}
|\phi(t)\rangle &= \exp\left(-\frac{i\mu t}{\hbar}\sigma_x\right)|\phi(0)\rangle \\
&= \left(\cos\frac{\mu t}{\hbar}\sigma_x^2 - i\sin\frac{\mu t}{\hbar}\sigma_x\right)|\phi(0)\rangle \\
&= \cos\frac{\mu t}{\hbar}|a\rangle - i\sin\frac{\mu t}{\hbar}|b\rangle
\end{aligned} \tag{3.2}
$$

[4]

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iH_0t/\hbar}|\phi(t)\rangle = e^{-i\omega_a t}\cos\frac{\mu t}{\hbar}|a\rangle - ie^{-i\omega_b t}\sin\frac{\mu t}{\hbar}|b\rangle \tag{4.1}$$

感想

J.J. Sakurai でブラケット表記を始めて勉強したときにはなかなか行列に見えなくて頭を抱えたもんだなぁと懐かしくなった。

第 2 問　統計力学: 電気双極子モーメント・ゆらぎ

[1]

1 つの双極子モーメントのエネルギー ϵ_i は

$$\epsilon_i = -\vec{\mu}_i \cdot \vec{E} = -\mu E \cos\theta_i \tag{1.1}$$

なので全体ではこれの和をとって

$$\mathcal{E} = \sum_i \epsilon_i = -\mu E \sum_i \cos\theta_i \tag{1.2}$$

[2]

1 つの双極子モーメントの分配関数を考える。エネルギーのボルツマン因子を双極子モーメントの向きの全立体角で和を取って[*1]

$$z = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} \sin\theta d\varphi \exp(\beta\mu E\cos\theta) = 2\pi\left[-\frac{\exp(\beta\mu E\cos\theta)}{\beta\mu E}\right]_0^\pi = 4\pi\frac{\sinh(\beta\mu E)}{\beta\mu E}. \tag{2.1}$$

この系には双極子モーメントが N 個あるので、全体の分配関数は

$$Z = z^N = \left(4\pi\frac{\sinh(\beta\mu E)}{\beta\mu E}\right)^N \tag{2.2}$$

[3]

系の内部エネルギーは

$$U = \langle\mathcal{E}\rangle = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z = -N\mu E\left(\coth(\beta\mu E) - \frac{1}{\beta\mu E}\right) \tag{3.1}$$

電気分極と内部エネルギーの関係は

$$U = -PE \tag{3.2}$$

であるので分極の大きさは

$$P = \frac{U}{E} = N\mu\left(\coth(\beta\mu E) - \frac{1}{\beta\mu E}\right) \tag{3.3}$$

である。

[4]

$x \ll 1$ のとき

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} \simeq \frac{1 + x^2/2!}{x + x^3/3!} \simeq \frac{1}{x}\left(1 + \frac{x^2}{2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{6}\right) \simeq \frac{1}{x} + \frac{x}{3} \tag{4.1}$$

と近似できるので、電場が弱いときの分極は

$$P = N\mu\left(\coth(\beta\mu E) - \frac{1}{\beta\mu E}\right) \simeq N\mu\left(\frac{1}{\beta\mu E} + \frac{\beta\mu E}{3} - \frac{1}{\beta\mu E}\right) = \frac{N\beta\mu^2 E}{3} \tag{4.2}$$

と書ける。よって電気感受率は

$$\chi = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{\partial P}{\partial E}\right)_T = \frac{N\beta\mu^2}{3\varepsilon_0} \tag{4.3}$$

[*1] これよく考えてみると何をやっているのかわかんなくなってきた。回転の運動エネルギーどこ行った?

[5]

$$\left\langle (\mathcal{E} - \langle \mathcal{E} \rangle)^2 \right\rangle = \left\langle \mathcal{E}^2 \right\rangle - \langle \mathcal{E} \rangle^2 = \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2} - \left(-\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial \beta} \right)^2 = -\frac{\partial}{\partial \beta}\left(-\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial \beta} \right) = -\frac{\partial U}{\partial \beta} \tag{5.1}$$

[6]

$$\begin{aligned} \left\langle (\vec{\mu}_{\mathrm{total}} - \langle \vec{\mu}_{\mathrm{total}} \rangle)^2 \right\rangle &= \frac{1}{E^2}\left\langle (\vec{\mu}_{\mathrm{total}} E - \langle \vec{\mu}_{\mathrm{total}} E \rangle)^2 \right\rangle = \frac{1}{E^2}\left\langle (\mathcal{E} - \langle \mathcal{E} \rangle)^2 \right\rangle \\ &= -\frac{1}{E^2}\frac{\partial U}{\partial \beta} \simeq \frac{1}{E^2}\frac{\partial}{\partial \beta}\frac{N\beta\mu^2 E^2}{3} = \frac{N\mu^2}{3} = \frac{\varepsilon_0}{\beta}\frac{N\beta\mu^2}{3\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon_0 \chi}{\beta} \end{aligned} \tag{6.1}$$

感想

最後までまぁやれるけど、設問 2 の分配関数で回転運動の分を考えないという話まわりがよくわからなくなった。設問にある『粒子の位置は固定されているが、回転は自由で、電気双極子間の相互作用は無視できるとする。』の回転は自由でというのが回転運動のエネルギーを無視するというやつに対応しているのだろうか?

第 3 問　電磁気学: 走査型トンネル顕微鏡 (STM)

[1]

[1-1]

静電ポテンシャルはポアソン方程式

$$\boldsymbol{\nabla}\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{1.1}$$

に従う。$z \neq 0$ では電荷がないのでその方程式は

$$\nabla^2\phi(x, y, z) = 0 \tag{1.2}$$

$z = 0$ にあるデルタ関数の電荷分布を扱うのに、$z = 0$ での境界条件を考える必要がある。$z = 0$ で静電ポテンシャルが不連続であったとすると、静電ポテンシャルの微分から得られる電場 $E = -\boldsymbol{\nabla}\phi$ の値が発散することから、静電ポテンシャルの値は連続である。

さらに、$z = 0$ 近傍でのポアソン方程式を微小区間 $-\epsilon \leq z \leq \epsilon$ で積分すると得られる関係より、

$$\begin{aligned}\int_{-\epsilon}^{\epsilon} dz \nabla^2\phi(x, y, z) &= -\frac{1}{\varepsilon_0}\int_{-\epsilon}^{\epsilon} dz\, A\cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{2\pi}{a}y\right)\delta(z) \\ \frac{\partial\phi(x, y, z=+0)}{\partial z} - \frac{\partial\phi(x, y, z=-0)}{\partial z} &= -\frac{A}{\varepsilon_0}\cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{2\pi}{a}y\right).\end{aligned} \tag{1.3}$$

これら 2 つが静電ポテンシャルが満たすべき境界条件である。

[1-2]

$z = 0$ 面にたいして対称であり、$z = 0$ で連続であるので、静電ポテンシャルは

$$\phi(x, y, z) = B\cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{2\pi}{a}y\right)e^{-C|z|} \tag{1.4}$$

とおける。

$z \neq 0$ でのポアソン方程式より

$$\begin{aligned}\left[-2\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 + C^2\right]B\cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{2\pi}{a}y\right) &= 0 \\ \left[-2\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 + C^2\right] &= 0 \\ C &= \frac{2\sqrt{2}\pi}{a}\end{aligned} \tag{1.5}$$

(1.2) 式より

$$\begin{aligned}-2BC\cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{2\pi}{a}y\right) &= -\frac{A}{\varepsilon_0}\cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{2\pi}{a}y\right) \\ 2BC &= \frac{A}{\varepsilon_0} \\ B &= \frac{aA}{4\sqrt{2}\pi\varepsilon_0}\end{aligned} \tag{1.6}$$

以上より静電ポテンシャルは

$$\phi(x,y,z) = \frac{aA}{4\sqrt{2}\pi\varepsilon_0}\cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{2\pi}{a}y\right)\exp\left(-\frac{2\sqrt{2}\pi}{a}|z|\right) \tag{1.7}$$

これより $z > 0$ にある単位電荷 q_0 の感じる静電気力の z 成分は

$$F_z = -q_0\boldsymbol{\nabla}\phi(x,y,z) = \frac{q_0 A}{2\varepsilon_0}\cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{2\pi}{a}y\right)\exp\left(-\frac{2\sqrt{2}\pi}{a}z\right) \tag{1.8}$$

[2]

[2-1]

設問 [1.2] で求めた力の式より、求める減衰距離 l は

$$l = \frac{a}{2\sqrt{2}\pi} = 0.6\,\text{Å} \tag{2.1}$$

[2-2]

a だけ離れたときの力は

$$F_z = \frac{A}{2\varepsilon_0}\exp\left(-2\sqrt{2}\pi\right)\cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{2\pi}{a}y\right) \tag{2.2}$$

であるので力の変動幅 ΔF_z は

$$\begin{aligned}\Delta F_z &= \frac{A}{\varepsilon_0}\exp\left(-2\sqrt{2}\pi\right) = \frac{16q_0^2}{\varepsilon_0 a^2}\exp\left(-2\sqrt{2}\pi\right) \\ &= \frac{q_0^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\times 64\pi\exp\left(-2\sqrt{2}\pi\right) \simeq 7.3\times 10^{-10}\,\mathrm{N}\times 64\pi\times 10^{-4} \simeq 1\times 10^{-11}\,\mathrm{N}\end{aligned} \tag{2.3}$$

感想

設問 1 は電磁気でやるのはそんなに見ないけど、デルタ関数ポテンシャルのシュレーディンガー方程式でよくやるやつではある。あとは有効数字が 1 桁での数値計算なので気楽にやればよい。

第 4 問　物性: 金属・パウリ常磁性・ゾンマーフェルト展開

略

感想

金属まわりで出しやすい話はここら辺なのかな。自分が印象に残ってるゾンマーフェルト展開の覚えた方は

$$-\frac{\partial f}{\partial \epsilon} = \delta(\epsilon - \epsilon_F) + \frac{\pi^2}{6}(k_B T)^2 \delta''(\epsilon - \epsilon_F) + \mathcal{O}(k_B T^4)$$

というようにみなすやり方。「金属絶縁体相転移」っていう本のなかで紹介されてた。