第 2 問　線形代数: 対称行列と 2 次形式

[1]

アインシュタインの縮約を使い、ベクトル表示と成分表示を行き来することにする。$x^\mathsf{T} Ax/2 - x^\mathsf{T} b$ の停留値となる x の条件は

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla\left(\frac{1}{2}x^\mathsf{T} Ax - x^\mathsf{T} b\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{2}A_{jk}x_j x_k - x_j b_j\right) \\ &= \frac{1}{2}\delta_{ij}A_{jk}x_k + \frac{1}{2}\delta_{ik}A_{jk}x_j - \delta_{ij}b_j = \frac{A_{ij}+A_{ji}}{2}x_j - b_i \end{aligned} \tag{1.1}$$

いま、A は対称行列で $A_{ij} = A_{ji}$ より

$$\begin{aligned} 0 &= A_{ij}x_j - b = Ax - b \\ Ax &= b \end{aligned} \tag{1.2}$$

これを逆にたどれば、$Ax = b$ を x について解いたものは $x^\mathsf{T} Ax/2 - x^\mathsf{T} b$ の停留値となるのもわかるので示せた。

[2]

B の固有値方程式を考える。固有値を λ とすると、

$$\begin{aligned} 0 = |B - cI| &= \begin{vmatrix} 6-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 7-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)\begin{vmatrix} 6-\lambda & 2 \\ 2 & 7-\lambda \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 7-\lambda & 0 \end{vmatrix} \\ &= (5-\lambda)(6-\lambda)(7-\lambda) - 4(5-\lambda) - 4(7-\lambda) = (5-\lambda)(6-\lambda)(7-\lambda) - 8(6-\lambda) \\ &= (6-\lambda)(\lambda^2 - 12\lambda + 27) = (6-\lambda)(3-\lambda)(9-\lambda) \end{aligned} \tag{2.1}$$

これより $c_1 = 9, c_2 = 6, c_3 = 3$ となる。また、A は対称行列であるため、固有値に対応する大きさ 1 の固有ベクトルを並べることで A を対角化する D を作ることができる。よって D は

$$D = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

[3]

$$B^k\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = B^k\left(2\begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}\right) = \left(2\times 9^k\begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} + 3^k\begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}\right) \tag{3.1}$$

これより

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{4\times 9^k + 2\times 3^k}{4\times 9^k - 3^k} \to 1 \quad (k\to\infty) \tag{3.2}$$

となる。

[4]

$y = (y_1\, y_2\, y_3)^\mathsf{T}, z = (z_1\, z_2\, z_3)^\mathsf{T}$ とする。このとき、D は直交行列であるので $z^\mathsf{T} z = y^\mathsf{T} y$ が成り立つことに注意して f を変形していく。

$$f = \frac{1}{4} + \frac{y^\mathsf{T} By^\mathsf{T}}{4y^\mathsf{T} y} = \frac{1}{4} + \frac{z^\mathsf{T} Cz^\mathsf{T}}{4z^\mathsf{T} z} = \frac{1}{4} + \frac{9z_1^2 + 6z_2^2 + 3z_3^2}{4z^\mathsf{T} z} = 1 + \frac{3}{4}\frac{3z_1^2 + 2z_2^2}{z^\mathsf{T} z} \tag{4.1}$$

ここで、$z_1 = r\sin\theta\cos\varphi, z_2 = r\sin\theta\sin\varphi, z_3 = r\cos\theta$ として極座標で表示すると

$$f = 1 + \frac{3}{4}\sin^2\theta(3\cos^2\varphi + 2\sin^2\varphi) = 1 + \frac{3}{4}\sin^2\theta(\cos^2\varphi + 2) \geq 1 \tag{4.2}$$

となるので最小値は 1