

第3問 電磁気学: ゼーマン分裂の古典論

[1]

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -k\mathbf{r} + q\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}$$

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -kx + qB\dot{y} \\ m\ddot{y} = -ky - qB\dot{x} \\ m\ddot{z} = -kz \end{cases} \quad (1.1)$$

これより、 z 成分は単振動することがわかるので固有角振動数は

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1.2)$$

[2]

前問の運動方程式に問で与えられた解の形を代入すると

$$\begin{cases} -m\Omega^2 a \cos \Omega t = -ka \cos \Omega t + qB\Omega b \cos \Omega t \\ -m\Omega^2 b \sin \Omega t = -kb \sin \Omega t + qB\Omega a \cos \Omega t \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \omega_0^2 - \Omega^2 & -\frac{qB}{m}\Omega \\ -\frac{qB}{m}\Omega & \omega_0^2 - \Omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \quad (2.1)$$

となる。この連立方程式が非自明な解を持つ条件より

$$0 = (\omega_0^2 - \Omega^2)^2 - \left(\frac{qB}{m}\Omega\right)^2$$

$$= \left(\Omega^2 - \frac{qB}{m}\Omega - \omega_0^2\right) \left(\Omega^2 + \frac{qB}{m}\Omega - \omega_0^2\right)$$

$$\Omega = \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{qB}{2m\omega_0}\right)^2} \pm \frac{qB}{2m}, \quad -\omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{qB}{2m\omega_0}\right)^2} \pm \frac{qB}{2m} \quad (2.2)$$

このうち振動数が正のものが求める解なので

$$\Omega = \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{qB}{2m\omega_0}\right)^2} \pm \frac{qB}{2m} \quad (2.3)$$

[3]

$$\Omega \simeq \omega_0 \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{qB}{2m}\right)^2 \right\} \pm \frac{qB}{2m} = \omega_0 \pm \frac{qB}{2m} + \frac{\omega_0}{2} \left(\frac{qB}{2m\omega_0}\right)^2 \quad (3.1)$$

[4]

磁場を掛ける前には角振動数 ω_0 で右回りと左回りに荷電粒子が回る状態は縮退していたが、磁場を掛けるとローレンツ力によって加速する回り方と減速する回り方になるため、右回りと左回りで回転速度が変わるため。(束縛された荷電粒子の軌道運動が磁場をかけたことによりゼーマン分裂が生じたから。)

[5]

z 方向は減衰するため、定常解には影響しない。 x, y 方向の運動方程式は

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -kx - m\gamma\dot{x} + qB\dot{y} + qE \cos \omega t \\ m\ddot{y} = -ky - m\gamma\dot{y} - qB\dot{x} \\ \ddot{x} = -\omega_0^2 x - \gamma\dot{x} + \frac{qB}{m}\dot{y} + \frac{qE}{m} \cos \omega t \\ \ddot{y} = -\omega_0^2 y - \gamma\dot{y} - \frac{qB}{m}\dot{x} \\ \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}(x + iy) &= -\omega_0^2(x + iy) - \left(\gamma + i\frac{qB}{m}\right)\frac{d}{dt}(x + iy) + \frac{qE}{m} \cos \omega t \\ \frac{d^2}{dt^2}(x - iy) &= -\omega_0^2(x - iy) - \left(\gamma - i\frac{qB}{m}\right)\frac{d}{dt}(x - iy) + \frac{qE}{m} \cos \omega t \end{aligned} \right. \end{cases} \quad (5.1)$$

のようにまとめることができる。ここで、 $u_{\pm} = x \pm iy$ のようにおくと運動方程式は

$$\ddot{u}_{\pm} + \omega_0^2 u_{\pm} + \left(\gamma \pm i\frac{qB}{m}\right)\dot{u}_{\pm} = \frac{qE}{m} \cos \omega t \quad (5.2)$$

のようにまとめれる。

この定常解の形を

$$u_{\pm} = A_{\pm} e^{i\omega t} + B_{\pm} e^{-i\omega t} \quad (5.3)$$

のように置く。すると調べる量は

$$\overline{x(t)^2 + y(t)^2} = \overline{u_+(t)u_-(t)} = \overline{A_+B_- + A_-B_+ + A_+A_-e^{2i\omega t} + B_+B_-e^{-2i\omega t}} = A_+B_- + A_-B_+ \quad (5.4)$$

とわかる。

運動方程式に代入して、 $e^{i\omega t}$ と $e^{-i\omega t}$ の係数を見ると

$$\begin{cases} \left(\omega_0^2 - \omega^2 \mp \omega\frac{qB}{m} + i\omega\gamma\right)A_{\pm} = \frac{qE}{2m} \\ \left(\omega_0^2 - \omega^2 \pm \omega\frac{qB}{m} - i\omega\gamma\right)B_{\pm} = \frac{qE}{2m} \end{cases} \quad (5.5)$$

これより

$$\begin{aligned} A_+B_- &= \left(\frac{qE}{2m}\right)^2 \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - \omega\frac{qB}{m} + i\omega\gamma} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - \omega\frac{qB}{m} - i\omega\gamma} \\ &= \left(\frac{qE}{2m}\right)^2 \frac{1}{\left(\omega_0^2 - \omega^2 - \omega\frac{qB}{m}\right)^2 + \omega^2\gamma^2} \\ A_-B_+ &= \left(\frac{qE}{2m}\right)^2 \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + \omega\frac{qB}{m} + i\omega\gamma} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + \omega\frac{qB}{m} - i\omega\gamma} \\ &= \left(\frac{qE}{2m}\right)^2 \frac{1}{\left(\omega_0^2 - \omega^2 + \omega\frac{qB}{m}\right)^2 + \omega^2\gamma^2} \end{aligned} \quad (5.6)$$

よって

$$\overline{x(t)^2 + y(t)^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{qE}{2m}\right)^2 \left[\frac{1}{\left(\omega_0^2 - \omega^2 - \omega\frac{qB}{m}\right)^2 + \omega^2\gamma^2} + \frac{1}{\left(\omega_0^2 - \omega^2 + \omega\frac{qB}{m}\right)^2 + \omega^2\gamma^2} \right] \quad (5.7)$$

[6]

$\gamma \ll qB/m \ll \omega_0$ の場合

$qB/m \ll \gamma \ll \omega_0$ の場合

$\omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega) \simeq 2\omega_0(\omega_0 - \omega)$ や、 $\gamma\omega \simeq \gamma\omega_0$ を使って整理する。 qB/m の項が無視されるので、

$$\begin{aligned} \overline{x(t)^2 + y(t)^2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{qE}{2m} \right)^2 \left[\frac{1}{\left(\omega_0^2 - \omega^2 - \omega \frac{qB}{m} \right)^2 + \omega^2 \gamma^2} + \frac{1}{\left(\omega_0^2 - \omega^2 + \omega \frac{qB}{m} \right)^2 + \omega^2 \gamma^2} \right] \\ &\simeq \left(\frac{qE}{2m} \right)^2 \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} \\ &\simeq \left(\frac{qE}{2m} \right)^2 \frac{1}{(2\omega_0(\omega_0 - \omega))^2 + 4\omega_0^2 \gamma^2} = \left(\frac{qE}{4m\omega_0} \right)^2 \frac{1}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2} \end{aligned} \quad (6.1)$$

となる。つまり、 γ によるぼやけが強すぎてゼーマン分裂が見えず、単一のローレンツピークとなる。

感想

ゼーマン分裂は量子論でやることが多いけど、古典論でも同じ結果が得られるのは感動しますよね。ただ、後半の計算量が多いように感じた。何か早くやる方法はないのだろうか？