2012 年度東大物工答案

しゃんごん (@CEY3944)

2025 年 6 月 15 日

第 1 問　古典力学: 拘束力・回転運動

[1]

質点の運動を拘束する張力 T は運動の方向に垂直なので

(i)

$dW = T\dot{v}dt = 0$ より仕事をしないから、運動エネルギーは保存する。

(ii)

$dN = T \times vdt \neq 0$ よりモーメントが生じるから、角運動量は保存しない。

[2]

点 Q の座標は $(a\cos\varphi, a\sin\varphi)$ で、糸の長さは $l_0 - a\varphi$ より点 Q からみた質点の位置は $-(l_0 - a\varphi)\sin\varphi, (l_0 - a\varphi)\cos\varphi$ なので、質点の座標は

$$r(t) = \Big(a\cos\varphi - (l_0 - a\varphi)\sin\varphi, a\sin\varphi + (l_0 - a\varphi)\cos\varphi\Big) \tag{2.1}$$

となる。

これより速度ベクトルは

$$\dot{r}(t) = -(l_0 - a\varphi)\dot{\varphi}\Big(\cos\varphi, \sin\varphi\Big) \tag{2.2}$$

角運動量は

$$\begin{aligned} L &= -m(l_0 - a\varphi)\dot{\varphi}[\{a\cos\varphi - (l_0 - a\varphi)\sin\varphi\}\sin\varphi - \{a\sin\varphi + (l_0 - a\varphi)\cos\varphi\}\cos\varphi] \\ &= m(l_0 - a\varphi)^2\dot{\varphi} \end{aligned} \tag{2.3}$$

[3]

$$|\dot{r}| = \Big|(l_0 - a\varphi)\dot{\phi}\Big| = |\dot{r}(0)| = v_0 \tag{3.1}$$

より

$$(l_0 - a\varphi)\dot{\varphi} = v_0 \tag{3.2}$$

両辺を時間で積分して

$$l_0 - \frac{a}{2}\varphi^2 = v_0 t \tag{3.3}$$

$\varphi = l/a$ となるときが求める時間 τ なので

$$\begin{aligned} \frac{l_0^2}{a} - \frac{l_0^2}{2a} &= v_0\tau \\ \tau &= \frac{2av_0}{l_0^2} \end{aligned} \tag{3.4}$$

[4]

$$T = \frac{mv_0^2}{l_0 - a\varphi}\Big(\sin\varphi, -\cos\varphi\Big) \tag{4.1}$$

これは、微小時間間隔でみると、半径 $l_0 - a\varphi$ の等速円運動となる。

[5]

張力のモーメントは

$$\begin{aligned} N &= \frac{mv_0^2}{l_0 - a\varphi}[-\{a\cos\varphi - (l_0 - a\varphi)\sin\varphi\}\cos\varphi - \{a\sin\varphi + (l_0 - a\varphi)\cos\varphi\}\sin\varphi] \\ &= -\frac{mv_0^2}{l_0 - a\varphi}a = -mv_0 a\dot{\varphi} \end{aligned} \tag{5.1}$$

角運動量の時間微分は

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigl(m(l_0 - a\varphi)^2\dot{\varphi}\bigr) \\ &= mv_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(l_0 - a\varphi) = -mv_0 a\dot{\varphi} \end{aligned} \tag{5.2}$$

となり確かに

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L(t) = N(t) \tag{5.3}$$

が成り立っているのがわかる。

感想

設問 [4] は先に結果がわかったので、それを満たすように張力をいきなり出してごまかしたけど、正攻法はどうすべきだったのだろうか?

第 2 問　電磁気学: ジュール熱

[1]

[1-1]

散乱の影響を平均化した運動方程式は加速度の項が 0 となるので

$$
\begin{aligned}
0 &= -\frac{m}{2\tau}v_a + qE \\
v_a &= \frac{2q\tau}{m}E
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

[1-2]

速度 v_a 密度 n の電荷 q の作る電流密度 j は

$$
j = nqv_a = \frac{2nq^2\tau}{m}E \tag{1.2}
$$

これより電気伝導率は

$$
\sigma = \frac{2nq^2\tau}{m} \tag{1.3}
$$

となる。また、電流密度を電流、電場の強さを電圧に直すと

$$
I = j \times \pi a^2 = \sigma\pi a^2 E = \frac{\sigma\pi a^2}{L}V \tag{1.4}
$$

より、電流が電圧に比例することがわかる。

[1-3]

単位時間単位体積当たりのジュール熱は

$$
J = \frac{VI}{\pi a^2 L} = \frac{I^2}{\sigma\pi^2 a^4} \tag{1.5}
$$

散乱によって電子が失う運動エネルギーは時間 2τ の間に速度 v_a で qE の力場中を動いたときに得られるエネルギーのことである。なのでそれの単位時間のエネルギー J' は

$$
J' = \frac{2\tau n v_a qE}{2\tau} = jE = \frac{VI}{\pi a^2 L} \tag{1.6}
$$

より、ジュール熱は散乱による運動エネルギーの損失とわかる。

[2]

[2-1]

図の上方向を z 軸として円筒座標を考える。電流の大きさはオームの法則より

$$
\boldsymbol{E} = \frac{I}{\sigma\pi a^2}\boldsymbol{e}_z \tag{2.1}
$$

磁場の大きさはアンペールの法則より

$$
\boldsymbol{H} = \frac{I}{2\pi r}\boldsymbol{e}_\varphi \tag{2.2}
$$

なのでこれよりベクトルポテンシャルは

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} = -\frac{I^2}{2\sigma\pi^2 a^2 r}\boldsymbol{e}_r \tag{2.3}$$

とわかる。

[2-2]

ポインティングベクトルを円柱領域 C の側面で和をとった時に得られるエネルギー J'' は

$$\boldsymbol{J}'' = \boldsymbol{S} \times 2\pi r L = -\frac{I^2 L}{\sigma\pi a^2}\boldsymbol{e}_r = -IV\boldsymbol{e}_r \tag{2.4}$$

となり、ジュール熱と同じ量が得られる。

つまり、導体の中心に向かう成分の電流がジュール熱を担うと解釈できる。

感想

前半はよくあるジュール熱の話だったけど、後半は考えたことなかった状況設定で面白かった。

第 2 問　統計力学:1 次元実在気体

[1]

$$
\begin{aligned}
Z_A &= \frac{1}{N!}\left(\frac{1}{2\pi\hbar}\int_0^L dx\int_{-\infty}^{\infty} dp\,\exp\left(-\frac{\beta}{2m}p^2\right)\right)^N \\
&= \frac{1}{N!}\left(\frac{L}{2\pi\hbar}\sqrt{\frac{2\pi m}{\beta}}\right)^N = \frac{1}{N!}\left(\frac{L}{\lambda}\right)^N
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

[2]

自由エネルギーは

$$
\begin{aligned}
F(T,L) &= -k_BT\ln Z_A = -Nk_BT\ln\frac{L}{\lambda} + Nk_BT\ln N - Nk_BT \\
&= -Nk_BT\ln\left(\frac{L}{N\lambda}e\right)
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

[3]

化学ポテンシャルは

$$
\mu(T,L) = \frac{\partial F}{\partial N} = -k_BT\ln\left(\frac{L}{N\lambda}e\right) + k_BT = -k_BT\ln\left(\frac{L}{N\lambda}\right)
\tag{3.1}
$$

[4]

[3] の結果より $\tilde{n}_k$ は

$$
\tilde{n}_k = e^{(\mu-E_k)/k_BT} = \frac{N\lambda}{L}e^{-E_k/k_BT}
\tag{4.1}
$$

と書ける。どんな k でも $\tilde{n}_k \ll 1$ が成り立つので

$$
\begin{aligned}
\frac{N\lambda}{L} &\ll 1 \\
N\lambda &\ll L
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

という条件が出てくる。λ は熱的ド=ブロイ波長で粒子 1 つあたりの広がりを表している。なので $N\lambda$ は粒子すべてをまとめたの広がりをあらわしていて、これが L より十分小さいというのは、粒子が希薄であることを表している。

[5]

粒子の体積分だけ粒子の動ける部分が減った毛糸みなせる。つまり、長さ $L-Nd$ の長さに閉じ込められた体積がない粒子の系を考えればよい。これは [1] の結果を流用でき、分配関数は

$$
Z_B = \frac{1}{N!}\left(\frac{L-Nd}{\lambda}\right)
\tag{5.1}
$$

とわかる。これより系の張力 σ は

$$
\sigma = -\frac{\partial F}{\partial L} = \frac{\partial}{\partial L}\left(Nk_BT\ln\left(\frac{L-Nd}{N\lambda}e\right)\right) = \frac{Nk_BT}{L-Nd}
\tag{5.2}
$$

となるので状態方程式は

$$\sigma(L - Nd) = Nk_B T \tag{5.3}$$

となる。

気体 A との違いは、気体 B の方が張力は大きくなっている。

感想

この年度から分量が増えたからなんか簡単になったように感じた。設問 [5] はまともに斥力ポテンシャルを扱う方法を忘れたので定性的にやったけど、どうやるのだっけ。