第 1 問　積分・偏微分方程式

[1]

[1-1]

$x = a\tan\theta$ と置換すると

$$I_{n+1} = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}} = \int \frac{1}{a^{2n*2}(1+\tan^2\theta)^{n+1}} \frac{ad\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{a^{2n+1}} \int \cos^{2n}\theta\, d\theta \tag{1.1}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
\int \cos^{2n}\theta\, d\theta &= \int \cos^{2n-2}\theta(1-\sin\theta^2)d\theta \\
&= \int \cos^{2n-2}\theta\, d\theta - \int \left(-\frac{1}{2n-1}\cos^{2n-1}\theta\right)' \sin\theta\, d\theta \\
&= \int \cos^{2n-2}\theta\, d\theta + \frac{1}{2n-1}\cos^{2n-1}\theta\sin\theta + C - \frac{1}{2n-1}\int \cos^{2n}\theta\, d\theta \\
\frac{2n}{2n-1}\int \cos^{2n}\theta\, d\theta &= \int \cos^{2n-2}\theta\, d\theta + \frac{1}{2n-1}\cos^{2n}\theta\tan\theta + C \\
\int \cos^{2n}\theta\, d\theta &= \frac{2n-1}{2n}\int \cos^{2n-2}\theta\, d\theta + \frac{\tan\theta}{2n(1+\tan^2\theta)^n} + C
\end{aligned} \tag{1.2}$$

より、

$$\begin{aligned}
I_{n+1} &= \frac{2n-1}{2na^2} I_n + \frac{1}{2na^2}\frac{a\tan\theta}{a^{2n}(1+\tan^2\theta)^n} + C \\
&= \frac{1}{2na^2}\left[(2n-1)I_n + \frac{x}{(x^2+a^2)^n}\right] + C
\end{aligned} \tag{1.3}$$

[1-2]

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} \\
I_2 &= \frac{1}{2a^2}\left[I_1 + \frac{x}{x^2+a^2}\right] = \frac{1}{2a^3}\tan^{-1}\frac{x}{a} + \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)}
\end{aligned} \tag{1.4}$$

[1-3]

被積分関数を以下のように部分分数分解をする。

$$\frac{4x^2+2x^3+10x^2+3x+9}{(x+1)(x^2+2)^2} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2+2} + \frac{dx+e}{(x^2+2)^2} = \frac{2}{x+1} + \frac{2x}{x^2+2} + \frac{-2x+1}{(x^2+2)^2} \tag{1.5}$$

これより

$$\begin{aligned}
\int \frac{4x^2+2x^3+10x^2+3x+9}{(x+1)(x^2+2)^2}dx &= \int \left(\frac{2}{x+1} + \frac{2x}{x^2+2} + \frac{-2x}{(x^2+2)^2} + \frac{1}{(x^2+2)^2}\right)dx \\
&= 2\ln|x+1| + \ln\left|x^2+2\right| + \ln\left|(x^2+2)^2\right| + \frac{1}{4\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{x}{4(x^2+2)} \\
&= \ln[(x+1)^2(x^2+2)^3] + \frac{1}{4\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{x}{4(x^2+2)}
\end{aligned} \tag{1.6}$$

[2]

[2-1]

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \eta} = c\left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta}\right) \\
\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

より、

$$
\begin{aligned}
0 &= \left(\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u \\
&= \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - 2\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - 2\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta}\right)u \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}
\end{aligned} \tag{2.2}
$$

となり、問の前半が示せた。

後半については、前半で得られた関係式の両辺を η で積分すると

$$
0 = \int \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} d\eta = \frac{\partial u}{\partial \zeta} + f(\xi) \tag{2.3}
$$

さらに ξ で微分して

$$
\begin{aligned}
0 &= \int \left(\frac{\partial u}{\partial \zeta} + f(\xi)\right) = u + \int f(\xi) d\xi + g(\eta) \\
u &= -\int f(\xi) d\xi - g(\eta)
\end{aligned} \tag{2.4}
$$

そして改めて ξ の関数である $\int f(\xi)d\xi$ を $\phi(\xi)$, η の関数である $-g(\eta)$ を $\varphi(\eta)$ とおきなおすと

$$
u = \phi(\xi) + \varphi(\eta) = \phi(x+ct) + \varphi(x-ct) \tag{2.5}
$$

となり、一般解の形が得られた。

[2-2]

$g(x)$ の原始関数を $G(x)$ とおくと式 (5) は

$$
u(x,t) = \frac{1}{2}(f(x+ct) + f(x-xt)) + \frac{1}{2c}(G(x+ct) - G(x-ct)) \tag{2.6}
$$

となり、一般解の形を満たすため、偏微分方程式の解の候補であるのがわかる。境界条件を満たすかを確かめていく。1 つ目の境界条件は

$$
u(x,0) = \frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0)) + \frac{1}{2c}\int_{x-0}^{x+0} g(s)ds = f(x) \tag{2.7}
$$

より満たしているのがわかる。2 つ目の境界条件は

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) &= \frac{1}{2c}(f'(x+ct) - f'(x-ct)) + \frac{1}{2}(g(x+ct) + g(x-xt)) \\
\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)\bigg|_{t=0} &= g(x)
\end{aligned} \tag{2.8}
$$

より満たしているのがわかる。以上より式 (5) は求める解であるのがわかる。

[2-3]

この境界条件は全問で調べた形であるので、解はヘヴィサイドの階段関数 $\theta(x)$ を用いて

$$
u(x,t) = \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} c_0\delta(s)ds = \frac{c_0}{2c}[\theta(x+ct) - \theta(x-ct)] \tag{2.9}
$$

となる。この解は単一矩形波が伝播しているような解である。