第 2 問　電磁気学: ジュール熱

[1]

[1-1]

散乱の影響を平均化した運動方程式は加速度の項が 0 となるので

$$
\begin{aligned}
0 &= -\frac{m}{2\tau}v_a + qE \\
v_a &= \frac{2q\tau}{m}E
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

[1-2]

速度 v_a 密度 n の電荷 q の作る電流密度 j は

$$
j = nqv_a = \frac{2nq^2\tau}{m}E \tag{1.2}
$$

これより電気伝導率は

$$
\sigma = \frac{2nq^2\tau}{m} \tag{1.3}
$$

となる。また、電流密度を電流、電場の強さを電圧に直すと

$$
I = j \times \pi a^2 = \sigma\pi a^2 E = \frac{\sigma\pi a^2}{L}V \tag{1.4}
$$

より、電流が電圧に比例することがわかる。

[1-3]

単位時間単位体積当たりのジュール熱は

$$
J = \frac{VI}{\pi a^2 L} = \frac{I^2}{\sigma\pi^2 a^4} \tag{1.5}
$$

散乱によって電子が失う運動エネルギーは時間 2τ の間に速度 v_a で qE の力場中を動いたときに得られるエネルギーのことである。なのでそれの単位時間のエネルギー J' は

$$
J' = \frac{2\tau n v_a qE}{2\tau} = jE = \frac{VI}{\pi a^2 L} \tag{1.6}
$$

より、ジュール熱は散乱による運動エネルギーの損失とわかる。

[2]

[2-1]

図の上方向を z 軸として円筒座標を考える。電流の大きさはオームの法則より

$$
\boldsymbol{E} = \frac{I}{\sigma\pi a^2}\boldsymbol{e}_z \tag{2.1}
$$

磁場の大きさはアンペールの法則より

$$
\boldsymbol{H} = \frac{I}{2\pi r}\boldsymbol{e}_\varphi \tag{2.2}
$$

なのでこれよりベクトルポテンシャルは

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} = -\frac{I^2}{2\sigma\pi^2 a^2 r}\boldsymbol{e}_r \tag{2.3}$$

とわかる。

[2-2]

ポインティングベクトルを円柱領域 C の側面で和をとった時に得られるエネルギー J'' は

$$\boldsymbol{J}'' = \boldsymbol{S} \times 2\pi r L = -\frac{I^2 L}{\sigma\pi a^2}\boldsymbol{e}_r = -IV\boldsymbol{e}_r \tag{2.4}$$

となり、ジュール熱と同じ量が得られる。

つまり、導体の中心に向かう成分の電流がジュール熱を担うと解釈できる。

感想

前半はよくあるジュール熱の話だったけど、後半は考えたことなかった状況設定で面白かった。