# 第 5 問　ラプラス変換

**[1]**

**[1-1]**

$$L[u(t-a)] = \int_0^\infty u(t-a)e^{-st}dt = \int_a^\infty e^{-st}dt = \frac{e^{-as}}{s} \tag{1.1}$$

**[1-2]**

$$L[f(t-a)u(t-a)] = \int_a^\infty f(t-a)e^{-st}dt = e^{-as}\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = e^{-as}F(s) \tag{1.2}$$

**[1-3]**

微分は

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2} &\to s^2X(s) - sx(0) - \frac{\mathrm{d}x(0)}{\mathrm{d}t} = s^2X(s) \\ \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} &\to sX(s) - x(0) = sX(s) \end{aligned} \tag{1.3}$$

というように変換されるので、

$$\begin{aligned} L\left[\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2} + 4\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + 3x(t)\right] &= L[u(t-2) - u(t-5)] \\ s^2X(s) + 4sX(s) + 3X(s) &= \frac{e^{-2s} - e^{-5s}}{s} \\ X(s) &= \frac{e^{-2s} - e^{-5s}}{s(s+1)(s+3)} \end{aligned} \tag{1.4}$$

これを逆変換する。$\gamma$ を $X(s)$ すべての極の実部よりも大きい値として、

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} X(s)e^{st}ds \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{(t-2)s}}{s(s+1)(s+3)} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{(t-55)s}}{s(s+1)(s+3)} \end{aligned} \tag{1.5}$$

$a = 2, 5$ のいずれかとして、$(t-a) > 0$ のとき、$s = -\infty + i0$ を通る半円の経路での積分の値は無視できて、$(t-a) < 0$ のとき、$s = +\infty + i0$ を通る半円の経路での積分の値は無視できる。この半円に $(\gamma - \infty, \gamma + \infty)$ を合わせた経路で積分をすると、留数定理より、経路の内側の留数だけを取ってくればよい。前者のときは $\gamma$ の取り方よりすべて留数を足し合わせたもの、後者は特異点がないので 0 となる (参考: 図)。よって

$$\begin{aligned} x(t) &== u(t-2)\sum_j \mathrm{Res}\left[\frac{e^{(t-2)s}}{s(s+1)(s+3)}, s_j\right] - u(t-5)\sum_j \mathrm{Res}\left[\frac{e^{(t-5)s}}{s(s+1)(s+3)}, s_j\right] \\ &= u(t-2)\left[\frac{1}{3} - \frac{e^{-(t-2)}}{2} + \frac{e^{-3(t-2)}}{6}\right] - u(t-5)\left[\frac{1}{3} - \frac{e^{-(t-5)}}{2} + \frac{e^{-3(t-5)}}{6}\right] \end{aligned} \tag{1.6}$$

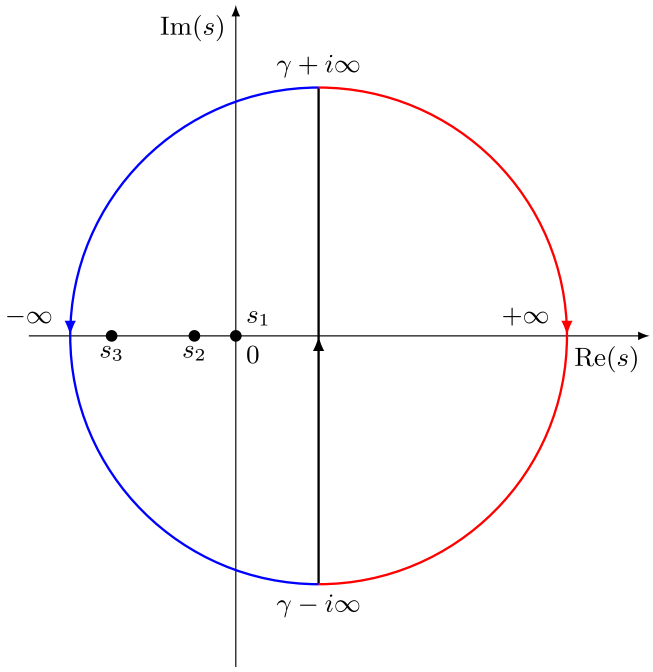


図: 設問 I-3 のラプラス逆変換をする際の積分経路の選択

**[2]**

$$L[h(t)] = \int_0^\infty (-1)^n g(t-nT)e^{-st}dt = (-1)^n \int_{nT}^{(n+1)T} g(t-nT)e^{-st}dt = (-e^{-sT})^n \int_0^T g(t)e^{-st}dt \tag{2.1}$$

よって

$$A(s) = (-e^{sT})^n \tag{2.2}$$