2009 年度東大物工答案

しゃんごん (@CEY3944)

2025 年 5 月 25 日

第 1 問　量子力学: 次元解析

[1]

$$
\begin{aligned}
[\mu] &= [\mathrm{Jm^{-2}s^2}] \\
[\hbar] &= [\mathrm{Js}] \\
[K] &= [\mathrm{Jm^{-6}}]
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

[2]

$[\mu^a \hbar^b K^c]$ の a, b, c を適切に決めることで空間的広がり ξ と基底状態のエネルギー E_0 のスケールを求める。まず空間的広がり ξ について、

$$
\begin{aligned}
[\xi] &= [\mu^a \hbar^b K^c] \\
[\mathrm{m}] &= [\mathrm{J}^{a+b+c}\mathrm{m}^{-2a+6b}\mathrm{s}^{2a+b}] \\
&\rightarrow \begin{cases} a+b+c & = 0 \\ -2a-6c & = 1 \\ 2a+b & = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a & = -1/8 \\ b & = 1/4 \\ c & = -1/8 \end{cases}
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

なので

$$
\xi \propto \mu^{-1/8} \hbar^{1/4} K^{-1/8} \tag{2.2}
$$

同様に E_0 についてもやっていく。

$$
\begin{aligned}
[E_0] &= [\mu^a \hbar^b K^c] \\
[\mathrm{J}] &= [\mathrm{J}^{a+b+c}\mathrm{m}^{-2a+6b}\mathrm{s}^{2a+b}] \\
&\rightarrow \begin{cases} a+b+c & = 1 \\ -2a-6c & = 0 \\ 2a+b & = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a & = -3/4 \\ b & = 3/2 \\ c & = 1/4 \end{cases}
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

なので

$$
E_0 \propto \mu^{-3/4} \hbar^{3/2} K^{1/4} \tag{2.4}
$$

[3]

不確定性原理 $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$ より運動量の広がりのオーダーは $p = \hbar/2\xi$ 程度と見積もることができる。これをハミルトニアンの中の運動量に代入して、エネルギーが最小となる位置を求める。エネルギーの式を ξ で微分すると

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{\hbar^2}{8\mu\xi^2} + \frac{K\xi^6}{2} \\
\frac{\partial E}{\partial \xi} &= \frac{\hbar^2}{4\mu}\left(\frac{12\mu K}{\hbar^2}\xi^8 - 1\right)
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

これよりエネルギーが最小となる位置は

$$
\xi = 12^{-1/8} \mu^{-1/8} \hbar^{1/4} K^{-1/8} \tag{3.2}
$$

これをもとのエネルギーの式に入れると

$$
E_0 = \left(\frac{12^{1/4}}{8} + \frac{12^{-3/4}}{2}\right)\mu^{-3/4}\hbar^{3/2}K^{1/4} = \frac{12^{1/4}}{4}\mu^{-3/4}\hbar^{3/2}K^{1/4} \tag{3.3}
$$

感想

系のスケールを表すパラメータが $\mu, \hbar, K$ の 3 種類であるからこれを使って長さとエネルギーのオーダーを見積もらせる問題。設問 3 はハミルトニアンだけだと $\hbar$ がないので、これを導入するために不確定性関係を使っているが、結局やってることは次元解析に対応するものなのであんまり面白くない問題。

第 2 問　統計力学: 2 サイト q 状態強磁性 Potts 模型

[1]

$$Z = \sum_{s_1, s_2} e^{J\delta_{s_1,s_2}/k_BT} = \sum_{s_1} \left[e^{J/k_BT} + (q-1) \right] = q\left(e^{J/k_BT} + q - 1 \right) \tag{1.1}$$

[2]

$$F = -k_BT \ln Z = -k_BT \ln \left[q\left(e^{J/k_BT} + q - 1 \right) \right] \tag{2.1}$$

[3]

内部エネルギー U は

$$\begin{aligned} U &= F - T\frac{\partial F}{\partial T} \\ &= -k_BT \ln \left[q\left(e^{J/k_BT} + q - 1 \right) \right] + T\frac{\partial}{\partial T} k_BT \ln \left[q\left(e^{J/k_BT} + q - 1 \right) \right] \\ &= -k_BT \ln \left[q\left(e^{J/k_BT} + q - 1 \right) \right] + k_BT \ln \left[q\left(e^{J/k_BT} + q - 1 \right) \right] - \frac{Je^{J/k_BT}}{e^{J/k_BT} + q - 1} \\ &= -\frac{J}{1 + (q-1)e^{-J/k_BT}} \end{aligned} \tag{3.1}$$

$q = 2$ のときには

$$U = -\frac{J}{1 + e^{-J/k_BT}} \tag{3.2}$$

である。$T \to 0$ のとき $U \to -J$, $T \to \infty$ のとき $U \to -J/2$ となるフェルミ分布のような関数形。

[4]

比熱 C は

$$C = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}T} = k_B(q-1)\left(\frac{J}{k_BT}\right)^2 \frac{e^{-J/k_BT}}{\left(1 + (q-1)e^{-J/k_BT}\right)^2} \tag{4.1}$$

$q = 2$ のとき、

$$C = k_B\left(\frac{J/k_BT}{2\cosh J/k_BT}\right)^2 = k_B\left(\frac{J}{2k_BT}\right)^2\left(1 - \tanh^2\frac{J}{k_BT}\right) \tag{4.2}$$

$T \to 0$ のとき

$$\begin{aligned} C &= k_B\left(\frac{J}{2k_BT}\right)^2\left\{1 - \left(\frac{1 - e^{-2J/k_BT}}{1 + e^{-2J/k_BT}}\right)^2\right\} \simeq k_B\left(\frac{J}{2k_BT}\right)^2\left\{1 - \left(1 - e^{-2J/k_BT}\right)^4\right\} \\ &\simeq k_B\left(\frac{J}{2k_BT}\right)^2\left\{1 - \left(1 - 4e^{-2J/k_BT}\right)\right\} = k_B\left(\frac{J}{k_BT}\right)^2 e^{-2J/k_BT} \end{aligned} \tag{4.3}$$

$U \to \infty$ のとき

$$C \simeq k_B\left(\frac{J}{k_BT}\right)^2 \tag{4.4}$$

のように振舞う。

[5]

分配関数は

$$
\begin{aligned}
Z &= \sum_{s_1,s_2} \exp\left[\frac{J\delta_{s_1,s_2} + h(\delta_{s_1,1} + \delta_{s_2,1})}{k_B T}\right] \\
&= \sum_{s_1,s_2 \neq 1} \exp\left[\frac{J\delta_{s_1,s_2} + h(\delta_{s_1,1} + \delta_{s_2,1})}{k_B T}\right] + \sum_{s_1 \neq 1} \exp\left[\frac{J\delta_{s_1,1} + h(\delta_{s_1,1} + 1)}{k_B T}\right] \\
&\quad + \sum_{s_2 \neq 1} \exp\left[\frac{J\delta_{1,s_2} + h(1 + \delta_{s_2,1})}{k_B T}\right] + \exp\left[\frac{J + 2h}{k_B T}\right] \\
&= (q-1)\Big\{e^{J/k_B T} + (q-2)\Big\} + 2e^{h/k_B T} + e^{(J+2h)/k_B T} \qquad (5.1)
\end{aligned}
$$

そして秩序変数の期待値は

$$
\begin{aligned}
\langle m \rangle &= \frac{1}{Z} \sum_{s_1,s_2} \left(\delta_{s_1,1} + \delta_{s_2,1} - \frac{2}{q}\right) \exp\left[\frac{J\delta_{s_1,s_2} + h(\delta_{s_1,1} + \delta_{s_2,1})}{k_B T}\right] \\
&= \frac{1}{Z} \sum_{s_1,s_2} \left(k_B T \frac{\partial}{\partial h} - \frac{2}{q}\right) \exp\left[\frac{J\delta_{s_1,s_2} + h(\delta_{s_1,1} + \delta_{s_2,1})}{k_B T}\right] \\
&= \frac{1}{Z} \left(k_B T \frac{\partial}{\partial h} - \frac{2}{q}\right) Z \\
&= k_B T \frac{\partial}{\partial h} \ln Z - \frac{2}{q} \\
&= \frac{2e^{h/k_B T} + 2e^{(J+2h)/k_B T}}{(q-1)\big\{e^{J/k_B T} + (q-2)\big\} + 2e^{h/k_B T} + e^{(J+2h)/k_B T}} - \frac{2}{q} \qquad (5.2)
\end{aligned}
$$

これより帯磁率は

$$
\begin{aligned}
\chi &= \frac{1}{k_B T}\ \frac{2e^{h/k_B T} + 4e^{(J+2h)/k_B T}}{(q-1)\big\{e^{J/k_B T} + (q-2)\big\} + 2e^{h/k_B T} + e^{(J+2h)/k_B T}}\Bigg|_{h=0} \\
&\quad - \frac{1}{k_B T}\left[\frac{2e^{h/k_B T} + 2e^{(J+2h)/k_B T}}{(q-1)\big\{e^{J/k_B T} + (q-2)\big\} + 2e^{h/k_B T} + e^{(J+2h)/k_B T}}\right]^2\Bigg|_{h=0} \\
&= \frac{1}{k_B T} \frac{2 + 4e^{J/k_B T}}{qe^{J/k_B T} + q(q-1)} - \frac{1}{k_B T}\left[\frac{2 + 2e^{J/k_B T}}{qe^{J/k_B T} + q(q-1)}\right]^2 \qquad (5.3)
\end{aligned}
$$

となる。

感想

設問 4 まではそのままやるだけではあるが、設問 5 でやることが多くなって計算ミスが生じやすくなりそう。

q 通りの状態をもつってなんだよと思ったけど、調べてみると軌道内でのスピン配置とかをイメージするとよさそうなのがわかった。結晶場を考えると軌道の準位が分裂しているので磁場をかけたときに特定の軌道になりやすいと考えることができる。軌道とスピンが関わってるので多極子秩序の模型としても使えるらしい。

また、q 種類の元素が関わる合金のモデルとも読める気はする。

第 3 問　電磁気学: 電磁流体力学

[1]

(1) 式に (2)-(5) 式を代入して 2 次の微小項を無視していくと

$$\begin{aligned} m(n_0+\delta n)\frac{\partial \delta \boldsymbol{u}}{\partial t} + m(n_0+\delta n)(\delta \boldsymbol{u}\cdot\nabla)\delta\boldsymbol{u} &= -q(n_0+\delta n)(\delta \boldsymbol{E} + \delta\boldsymbol{u}\times\delta\boldsymbol{B}) \\ mn_0\frac{\partial \delta\boldsymbol{u}}{\partial t} &= -qn_0\delta\boldsymbol{E} \\ m\frac{\partial \delta\boldsymbol{u}}{\partial t} &= -q\delta\boldsymbol{E} \end{aligned} \tag{1.1}$$

[2]

(11) 式をフーリエ変換すると

$$\begin{aligned} i\boldsymbol{k}\times\delta\hat{\boldsymbol{E}} &= i\omega\delta\hat{\boldsymbol{B}} \\ \delta\hat{\boldsymbol{B}} &= \frac{1}{\omega}\boldsymbol{k}\times\delta\hat{\boldsymbol{E}} \end{aligned} \tag{2.1}$$

これをフーリエ変換した (12) 式に代入すると

$$\begin{aligned} i\boldsymbol{k}\times\delta\boldsymbol{B} &= -\mu_0 qn_0\delta\boldsymbol{u} - i\frac{\omega}{c^2}\delta\hat{\boldsymbol{E}} \\ \boldsymbol{k}\times\left(\frac{1}{\omega}\boldsymbol{k}\times\delta\hat{\boldsymbol{E}}\right) &= -i\mu_0 qn_0\delta\boldsymbol{u} + \frac{\omega}{c^2}\delta\hat{\boldsymbol{E}} \\ \boldsymbol{k}\times\left(\boldsymbol{k}\times\delta\hat{\boldsymbol{E}}\right) &= -i\mu_0 qn_0\omega\delta\boldsymbol{u} + \frac{\omega^2}{c^2}\delta\hat{\boldsymbol{E}} \end{aligned} \tag{2.2}$$

[3]

(6) をフーリエ変換すると

$$\begin{aligned} -im\omega\delta\hat{\boldsymbol{u}} &= -q\delta\hat{\boldsymbol{E}} \\ \delta\hat{\boldsymbol{u}} &= -i\frac{q}{m\omega}\delta\hat{\boldsymbol{E}} \end{aligned} \tag{3.1}$$

(13) 式を整理していく。左辺はベクトル解析の公式より

$$\boldsymbol{k}\times\left(\boldsymbol{k}\times\delta\hat{\boldsymbol{E}}\right) = (\boldsymbol{k}\cdot\delta\hat{\boldsymbol{E}})\boldsymbol{k} - k^2\delta\hat{\boldsymbol{E}} = -k^2\delta\hat{\boldsymbol{E}} \tag{3.2}$$

なので (13) 式は

$$\begin{aligned} k^2\delta\hat{\boldsymbol{E}} &= -\mu_0\epsilon_0\frac{q^2n_0}{\epsilon_0 m}\delta\hat{\boldsymbol{E}} + \frac{\omega^2}{c^2}\delta\hat{\boldsymbol{E}} \\ 0 &= \left(\omega^2 - k^2c^2 - \frac{q^2n_0}{\epsilon_0 m}\right)\delta\hat{\boldsymbol{E}} \end{aligned} \tag{3.3}$$

電場の振動成分がある、つまり $\delta\hat{\boldsymbol{E}} \neq 0$ なので

$$\begin{aligned} 0 &= \omega^2 - k^2c^2 - \frac{q^2n_0}{\epsilon_0 m} \\ \omega^2 &= k^2c^2 + \frac{q^2n_0}{\epsilon_0 m} \end{aligned} \tag{3.4}$$

[4]

分散関係が成り立ち、電場の振動成分があるので (11) 式のフーリエ変換の式を見ると

$$\delta\hat{\boldsymbol{B}} = \frac{1}{\omega}\boldsymbol{k} \times \delta\hat{\boldsymbol{E}} \neq 0 \tag{4.1}$$

[5]

(14) 式をプラズマ振動数を用いて表すと

$$\omega = \sqrt{k^2c^2 + \omega_p^2} \tag{5.1}$$

なので位相速度は

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \sqrt{c^2 + \frac{\omega_p^2}{k^2}} > c \tag{5.2}$$

群速度は

$$v_g = \frac{\partial\omega}{\partial k} = \frac{c^2k}{\sqrt{k^2c^2 + \omega_p^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 + (\omega_p/ck)^2}} < c \tag{5.3}$$

より

$$v_g < c < v_p \tag{5.4}$$

[6]

屈折率 N を ω の関数で表すと

$$N = \frac{c}{v_p} = \frac{ck}{\omega} = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \tag{6.1}$$

これより振動数 $\omega < \omega_p$ の光は金属中の電子ガス中には存在できないため、金属に入射した光は全て反射する。これが金属光沢の由来である。

感想

誘導に乗っていくだけではあるが、プラズマ振動数の名前の由来がそのまんま金属中のプラズマの振動数と知れたのは面白かった。