# 第 1 問　古典力学: 拘束力・回転運動

## [1]

質点の運動を拘束する張力 $T$ は運動の方向に垂直なので

### (i)

$dW = T\dot{v}dt = 0$ より仕事をしないから、運動エネルギーは保存する。

### (ii)

$dN = T \times vdt \neq 0$ よりモーメントが生じるから、角運動量は保存しない。

## [2]

点 Q の座標は $(a\cos\varphi, a\sin\varphi)$ で、糸の長さは $l_0 - a\varphi$ より点 Q からみた質点の位置は $-(l_0 - a\varphi)\sin\varphi, (l_0 - a\varphi)\cos\varphi$ なので、質点の座標は

$$r(t) = \Big(a\cos\varphi - (l_0 - a\varphi)\sin\varphi, a\sin\varphi + (l_0 - a\varphi)\cos\varphi\Big) \tag{2.1}$$

となる。

これより速度ベクトルは

$$\dot{r}(t) = -(l_0 - a\varphi)\dot{\varphi}\Big(\cos\varphi, \sin\varphi\Big) \tag{2.2}$$

角運動量は

$$\begin{aligned} L &= -m(l_0 - a\varphi)\dot{\varphi}[\{a\cos\varphi - (l_0 - a\varphi)\sin\varphi\}\sin\varphi - \{a\sin\varphi + (l_0 - a\varphi)\cos\varphi\}\cos\varphi] \\ &= m(l_0 - a\varphi)^2\dot{\varphi} \end{aligned} \tag{2.3}$$

## [3]

$$|\dot{r}| = \Big|(l_0 - a\varphi)\dot{\phi}\Big| = |\dot{r}(0)| = v_0 \tag{3.1}$$

より

$$(l_0 - a\varphi)\dot{\varphi} = v_0 \tag{3.2}$$

両辺を時間で積分して

$$l_0 - \frac{a}{2}\varphi^2 = v_0 t \tag{3.3}$$

$\varphi = l/a$ となるときが求める時間 $\tau$ なので

$$\begin{aligned} \frac{l_0^2}{a} - \frac{l_0^2}{2a} &= v_0\tau \\ \tau &= \frac{2av_0}{l_0^2} \end{aligned} \tag{3.4}$$

## [4]

$$T = \frac{mv_0^2}{l_0 - a\varphi}\Big(\sin\varphi, -\cos\varphi\Big) \tag{4.1}$$

これは、微小時間間隔でみると、半径 $l_0 - a\varphi$ の等速円運動となる。

**[5]**

張力のモーメントは

$$
\begin{aligned}
N &= \frac{mv_0^2}{l_0 - a\varphi}[-\{a\cos\varphi - (l_0 - a\varphi)\sin\varphi\}\cos\varphi - \{a\sin\varphi + (l_0 - a\varphi)\cos\varphi\}\sin\varphi] \\
&= -\frac{mv_0^2}{l_0 - a\varphi}a = -mv_0 a\dot{\varphi}
\end{aligned} \tag{5.1}
$$

角運動量の時間微分は

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m(l_0 - a\varphi)^2\dot{\varphi}\right) \\
&= mv_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(l_0 - a\varphi) = -mv_0 a\dot{\varphi}
\end{aligned} \tag{5.2}
$$

となり確かに

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L(t) = N(t) \tag{5.3}
$$

が成り立っているのがわかる。

**感想**

設問 [4] は先に結果がわかったので、それを満たすように張力をいきなり出してごまかしたけど、正攻法はどうすべきだったのだろうか?