2010 年度東大物工答案

しゃんごん (@CEY3944)

2025 年 6 月 6 日

第 1 問　量子力学: ハイゼンベルグ描像・シュレーディンガー描像

[1]

$$\mathcal{H} = -\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{B}_0 = -\gamma \hbar B_0 S_z \tag{1.1}$$

[2]

[2-1]

$$\frac{\mathrm{d}S_x}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{i\hbar}[S_x, \mathcal{H}] = -i\gamma B_0 [S_x, S_z] = -\gamma B_0 S_y \tag{2.1}$$

[2-2]

前問と同様にして S_y のハイゼンベルグ方程式を書き下すと

$$\frac{\mathrm{d}S_y}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{i\hbar}[S_y, \mathcal{H}] = -i\gamma B_0 [S_y, S_z] = \gamma B_0 S_x \tag{2.2}$$

これと前問の結果を合わせると微分方程式を以下のように解くことができる。

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(S_x + iS_y) & = i\gamma B_0 (S_x + iS_y) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(S_x - iS_y) & = -i\gamma B_0 (S_x - iS_y) \end{cases} \\
\to &\begin{cases} S_x(t) + iS_y(t) & = e^{i\gamma B_0 t}(S_x(0) + iS_y(0)) \\ S_x(t) - iS_y(t) & = e^{-i\gamma B_0 t}(S_x(0) - iS_y(0)) \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.3}$$

これよりスピンの期待値は

$$\begin{aligned}
S_x(t) &= \cos(\gamma B_0 t) S_x(0) + \sin(\gamma B_0 t) S_y(0) \\
\langle S_x(t) \rangle &= \sin(\gamma B_0 t) \langle S_y(0) \rangle
\end{aligned} \tag{2.4}$$

[2-3]

前問よりスピンの y 成分の期待値は x 成分と同様にして

$$\langle S_y(t) \rangle = \cos(\gamma B_0 t) \langle S_y(0) \rangle \tag{2.5}$$

とわかる。スピンの z 成分については、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}S_z} = \frac{1}{i\hbar}[S_z, \mathcal{H}] = -i\gamma B_0 [S_z, S_z] = 0 \tag{2.6}$$

より

$$\langle S_z(t) \rangle = \langle S_z(0) \rangle \tag{2.7}$$

となり初期状態と変わらない。そして

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(S_x^2 + S_y^2\right) = \frac{1}{i\hbar}\left[S_x^2 + S_y^2, \mathcal{H}\right] = -i\gamma B_0 \left[\boldsymbol{S}^2 - S_z^2, S_z\right] = 0 \tag{2.8}$$

より

$$\left\langle S_x^2 + S_y^2 \right\rangle = \left\langle \boldsymbol{S}^2 - S_z^2 \right\rangle = \frac{3}{4} - \left\langle S_z^2(0) \right\rangle \tag{2.9}$$

となる。これらの結果より、スピンは z 成分の大きさをたもちながら x と y 成分が円運動を描くように変化することがわかり、言い換えると歳差運動をしていると言える。

[3]

[3-1]

スピン状態は

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left|t\right\rangle &= \mathcal{H}\left|t\right\rangle \\ \left|t\right\rangle &= \exp\left(-\frac{i\mathcal{H}t}{\hbar}\right)\left|0\right\rangle \\ &= \exp(i\gamma B_0 S_z t)\left|0\right\rangle \end{aligned} \tag{3.1}$$

となるので、スピンの x 成分の期待値は

$$\begin{aligned} \langle S_x\rangle &= \left\langle t\right| S_x \left|t\right\rangle = \left\langle 0\right| \exp(-i\gamma B_0 S_z t) S_x \exp(i\gamma B_0 S_z t)\left|0\right\rangle = \left\langle 0\right| (S_x\cos(\gamma B_0 t) + S_y \sin(\gamma B_0 t))\left|0\right\rangle \\ &= \sin(\gamma B_0 t)\left\langle S_y(0)\right\rangle \end{aligned} \tag{3.2}$$

となり、設問 [2.2] と同じ結果が得られる。

[3-2]

(i)

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\theta} &= -i\exp(-i\theta S_z)S_z S_x \exp(i\theta S_z) + i\exp(-i\theta S_z) S_x S_z \exp(i\theta S_z) = \exp(-i\theta S_z) S_y \exp(i\theta S_z) \\ \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\theta^2} &= -i\exp(-i\theta S_z)S_z S_y \exp(i\theta S_z) + i\exp(-i\theta S_z) S_y S_z \exp(i\theta S_z) = -\exp(-i\theta S_z) S_x \exp(i\theta S_z) \end{aligned} \tag{3.3}$$

(ii)

前問より f は次の微分方程式を満たす。

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\theta^2} = -f \tag{3.4}$$

初期条件が $f(0) = S_x, f'(0) = S_y$ の調和振動子の運動方程式なのでこれの解は

$$f(\theta) = S_x\cos\theta + S_y\sin\theta \tag{3.5}$$

となる。

感想

量子力学で使われる 2 つの描像が同じ結果を示すよという問題。なんか物足りないので相互作用描像とか、BCH 公式による計算とか、指数関数行列の具体的な計算とか練習してもいいと思う。

第 2 問　統計力学: 固体比熱

[1]

フェルミ分布を描く (略)。

[2]

電子数 N は状態密度と分布関数を用いて表して、ゾンマーフェルト展開を通して式を整理していく。

$$\begin{aligned} N &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\varepsilon)D(\varepsilon)d\varepsilon \\ &= \int_{-\infty}^{\mu} D(\varepsilon)d\varepsilon + \frac{\pi^2}{6}(k_BT)^2\frac{\mathrm{d}D(\mu)}{\mathrm{d}\varepsilon} + \mathcal{O}(T^4) \\ &= \int_{0}^{\varepsilon_F} D(\varepsilon)d\varepsilon + \int_{\varepsilon_F}^{\mu} D(\varepsilon)d\varepsilon + \frac{\pi^2}{6}(k_BT)^2\frac{\mathrm{d}D(\varepsilon_F)}{\mathrm{d}\varepsilon} + \mathcal{O}(T^4) \\ &= N + (\mu-\varepsilon_F)D_0 + \frac{\pi^2}{6}(k_BT)^2\frac{\mathrm{d}D(\varepsilon_F)}{\mathrm{d}\varepsilon} + \mathcal{O}(T^4) \end{aligned} \tag{2.1}$$

よって

$$\mu = \varepsilon_F - \frac{\pi^2}{6D_0}\frac{\mathrm{d}D(\varepsilon_F)}{\mathrm{d}\varepsilon}(k_BT)^2 \tag{2.2}$$

[3]

$$\begin{aligned} E(T) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\varepsilon)\varepsilon D(\varepsilon)d\varepsilon \\ &\simeq \int_{0}^{\varepsilon_F} \varepsilon D(\varepsilon)d\varepsilon + \int_{\varepsilon_F}^{\mu} \varepsilon D(\varepsilon)d\varepsilon + \frac{\pi^2}{6}(k_BT)^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}(\varepsilon D(\varepsilon))\bigg|_{\varepsilon=\varepsilon_F} \\ &\simeq E(0) + \varepsilon_F D_0(\mu-\varepsilon_F) + \frac{\pi^2\varepsilon_F}{6}(k_BT)^2\frac{\mathrm{d}D(\varepsilon_F)}{\mathrm{d}\varepsilon} + \frac{\pi^2}{6}(k_BT)^2D_0 \\ &= E_0 + \frac{\pi^2}{5}D_0(k_BT)^2 \\ C(T) &= \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}T} = \frac{\pi^2}{3}D_0k_B^2T \end{aligned} \tag{3.1}$$

[4]

ボーズ分布を描く (略)。

[5]

見慣れない notation だが、イバッハ・リュートでの求め方はこんな感じ。

$$\rho(\omega) = \frac{V}{(2\pi)^3}\int_\omega \frac{dk}{|\boldsymbol{\nabla}_k\omega(k)|} = \frac{V}{(2\pi)^3}\frac{4\pi k(\omega)^2}{v} = \frac{V}{2\pi^2v^3}\omega^2 \tag{5.1}$$

[6]

フォノンの振動数の上限を ω_D とおく。このときフォノンの内部エネルギーは低温であることを使いながら変形すると

$$
\begin{aligned}
E &= \int_0^{\omega_D} \frac{3\rho(\omega)\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega}-1} d\omega \\
&= \frac{3V(k_BT)^4}{2\pi^2\hbar^3v^3} \int_0^{\infty} \frac{(\beta\hbar\omega)^3}{e^{\beta\hbar\omega}-1} d(\beta\hbar\omega) \\
&= \frac{\pi^2Vk_B^4}{10\hbar^3v^3} T^4 \\
C &= \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}T} = \frac{2\pi^2Vk_B^4}{5\hbar^3v^3} T^3
\end{aligned}
\tag{6.1}
$$

[7]

電子比熱とフォノン比熱をそれぞれ $\alpha T, \gamma T^3$ のように表すと

$$
\begin{aligned}
C_V &= \alpha T + \gamma T^3 \\
\frac{C_V}{T} &= \alpha + \gamma T^3
\end{aligned}
\tag{7.1}
$$

となる。これより C_V/T を T^2 にたいしてプロットすると直線状に並ぶことがわかる。$T \to 0$ の外挿で電子比熱の α が、傾きからフォノン比熱の γ が求まる。また、C_T/T が $T \to 0$ で 0 になるのは比熱に電子比熱が関わっていないことを表す。比熱はフェルミ面付近の電子が担っているので、このような結晶は半導体や絶縁体である。

感想

固体の比熱の話の総おさらい。初見のときにゾンマーフェルト展開を ε_F でいったん発想が思いつかないけど、物性をいろいろやってると結構自然な発想だというのに気付けた。

低温での半導体の比熱の測定とかやったことないけど、本当にそうなるんですか?

第 3 問　電磁気学: 共振器

[1]

光学長は nL であるので位相変化は

$$\theta = \frac{\omega}{c} nL = \frac{\omega nL}{c} \tag{1.1}$$

[2]

$$\begin{aligned} 2\pi m &= \frac{\omega_m nL}{c} \\ \omega_m &= \frac{2\pi c}{nL} m \end{aligned} \tag{2.1}$$

[3]

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{E_0}{2}\left[\cos\left(\frac{2\pi ct}{nL}(m-1)\right) + 2\cos\left(\frac{2\pi ct}{nL}m\right) + \cos\left(\frac{2\pi ct}{nL}(m+1)\right)\right] \\ &= E_0\left(1 + \cos\frac{2\pi ct}{nL}\right)\cos\frac{2\pi ct}{nL}m \\ &= 2E_0\cos^2\frac{\pi ct}{nL}\cos\frac{2\pi ct}{nL}m \end{aligned} \tag{3.1}$$

いま $n = 1$ の時を考えているので、包絡線は

$$A(t) = 2E_0\cos^2\frac{\pi ct}{L} \tag{3.2}$$

で極大となる時間間隔は L/c である。

[4]

屈折率は角振動数と波数を用いて

$$n = \frac{ck}{\omega} = \frac{c}{\omega}\left(k_0 + \frac{\omega}{v_g}\right) = \frac{ck_0}{\omega} + \frac{c}{v_g} \tag{4.1}$$

と表せる。

[5]

波数が変わったので、これをもとに [1] と [2] で行ったのと同様のことをすると

$$\begin{aligned} 2\pi m &= kL = k_0 L + \frac{\omega L}{v_g} \\ \omega &= -v_g k_0 + \frac{2\pi v_g}{L} m \end{aligned} \tag{5.1}$$

[6]

設問 [3] と同様にやって

$$\begin{aligned}
E(t) &= \frac{E_0}{2}\left(\cos\left[\left(-v_g k_0 t + \frac{2\pi v_g t}{L}\right) - \frac{2\pi v_g t}{L}\right] + \cos\left[-v_g k_0 t + \frac{2\pi v_g t}{L}\right] + \cos\left[\left(-v_g k_0 t + \frac{2\pi v_g t}{L}\right) + \frac{2\pi v_g t}{L}\right]\right) \\
&= E_0\left(1 + \cos\frac{2\pi v_g}{L}t\right)\cos\left[-v_g k_0 t + \frac{2\pi v_g t}{L}\right] \\
&= 2E_0\cos^2\frac{\pi v_g t}{L}\cos\left[-v_g k_0 t + \frac{2\pi v_g t}{L}\right]
\end{aligned} \tag{6.1}$$

これより包絡線の隣り合う極大間の時間間隔は L/v_g

[7]

i 番目の極大時刻は $t = iL/v_g$ であるので、$\Delta\phi$ は

$$\Delta\phi = \left|\left(-v_g k_0 + \frac{2\pi v_g}{L}m\right)\frac{L}{v_g}\right| = k_0 L = \left|\frac{\omega_0}{\omega_{rep}}\right| \tag{7.1}$$

分散がないときには $k = \omega/c$ より、分散があるときの式を $k_0 = 0, v_g = c$ にすることで得られる。$\Delta\phi$ は k_0 によって生じているのがわかるので、これより光に分散関係がある、つまり群速度と位相測度が違うことによって $\Delta\phi$ が生じているのがわかる。

感想

設問 3 で隣接する共振モード 3 本を外部に取り出すとあるが、実際どうやって 1 : 2 : 1 の振幅になるように取り出しているのだろうか?