

第3問 複素解析

[1]

極は $z = i$ であり、そこでの留数は

$$\operatorname{Res}[f, z = i] = \lim_{z \rightarrow i} (z - i)f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{\log(z + i)}{z + i} = \frac{\ln 2 + i\pi/2}{2i} = \frac{\pi}{4} - i\frac{\ln 2}{2} \quad (1.1)$$

となる。

[2]

留数定理より

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}[f, z = i] = \pi \ln 2 + i\frac{\pi^2}{2} \quad (2.1)$$

[3]

三角不等式を使うと

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_1} \frac{\log(z + i)}{z^2 + i} dz \right| &= \left| \int_{C_1} \frac{\log(z + i)}{z^2 + i} dz \right| \\ &\leq \int_{C_1} \frac{|\log(z + i)|}{|z^2 + i|} |dz| \end{aligned} \quad (3.1)$$

耐えられた不等式と

$$|z^2 + i| = \sqrt{1 + R^4 + 2R^2 \sin 2\theta} > \sqrt{R^4 - 2R^2 + 1} = R^2 - 1 \quad (3.2)$$

を使うと

$$\left| \int_{C_1} \frac{\log(z + i)}{z^2 + i} dz \right| < \int_0^\pi \frac{\ln(R + 1) + 3\pi/2}{R^2 - 1} |dz| = \pi R \frac{\ln(R + 1) + 3\pi/2}{R^2 - 1} \quad (3.3)$$

[4]

$g(z)$ の極は $z = -i$ で留数は

$$\operatorname{Res}[g, z = -i] = \lim_{z \rightarrow -i} (z + i)g(z) = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{\log(z - i)}{z - i} = \frac{\ln 2 - i\pi/2}{-2i} = \frac{\pi}{4} + i\frac{\ln 2}{2} \quad (4.1)$$

これより留数定理を使うと

$$\int_\Gamma g(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}[g, z = -i] = -\pi \ln 2 + i\frac{\pi^2}{2} \quad (4.2)$$