第 1 問　電磁気学: 電磁流体力学

[1]

(1) 式に (2)-(5) 式を代入して 2 次の微小項を無視していくと

$$
\begin{aligned}
m(n_0+\delta n)\frac{\partial \delta \boldsymbol{u}}{\partial t} + m(n_0+\delta n)(\delta \boldsymbol{u}\cdot\nabla)\delta\boldsymbol{u} &= -q(n_0+\delta n)(\delta\boldsymbol{E}+\delta\boldsymbol{u}\times\delta\boldsymbol{B}) \\
mn_0\frac{\partial \delta \boldsymbol{u}}{\partial t} &= -qn_0\delta\boldsymbol{E} \\
m\frac{\partial \delta \boldsymbol{u}}{\partial t} &= -q\delta\boldsymbol{E} \qquad (1.1)
\end{aligned}
$$

[2]

(11) 式をフーリエ変換すると

$$
\begin{aligned}
i\boldsymbol{k}\times\delta\hat{\boldsymbol{E}} &= i\omega\delta\hat{\boldsymbol{B}} \\
\delta\hat{\boldsymbol{B}} &= \frac{1}{\omega}\boldsymbol{k}\times\delta\hat{\boldsymbol{E}} \qquad (2.1)
\end{aligned}
$$

これをフーリエ変換した (12) 式に代入すると

$$
\begin{aligned}
i\boldsymbol{k}\times\delta\boldsymbol{B} &= -\mu_0 qn_0\delta\boldsymbol{u} - i\frac{\omega}{c^2}\delta\hat{\boldsymbol{E}} \\
\boldsymbol{k}\times\left(\frac{1}{\omega}\boldsymbol{k}\times\delta\hat{\boldsymbol{E}}\right) &= -i\mu_0 qn_0\delta\boldsymbol{u} + \frac{\omega}{c^2}\delta\hat{\boldsymbol{E}} \\
\boldsymbol{k}\times\left(\boldsymbol{k}\times\delta\hat{\boldsymbol{E}}\right) &= -i\mu_0 qn_0\omega\delta\boldsymbol{u} + \frac{\omega^2}{c^2}\delta\hat{\boldsymbol{E}} \qquad (2.2)
\end{aligned}
$$

[3]

(6) をフーリエ変換すると

$$
\begin{aligned}
-im\omega\delta\hat{\boldsymbol{u}} &= -q\delta\hat{\boldsymbol{E}} \\
\delta\hat{\boldsymbol{u}} &= -i\frac{q}{m\omega}\delta\hat{\boldsymbol{E}} \qquad (3.1)
\end{aligned}
$$

(13) 式を整理していく。左辺はベクトル解析の公式より

$$
\boldsymbol{k}\times\left(\boldsymbol{k}\times\delta\hat{\boldsymbol{E}}\right) = (\boldsymbol{k}\cdot\delta\hat{\boldsymbol{E}})\boldsymbol{k} - k^2\delta\hat{\boldsymbol{E}} = -k^2\delta\hat{\boldsymbol{E}} \qquad (3.2)
$$

なので (13) 式は

$$
\begin{aligned}
k^2\delta\hat{\boldsymbol{E}} &= -\mu_0\epsilon_0\frac{q^2n_0}{\epsilon_0 m}\delta\hat{\boldsymbol{E}} + \frac{\omega^2}{c^2}\delta\hat{\boldsymbol{E}} \\
0 &= \left(\omega^2 - k^2c^2 - \frac{q^2n_0}{\epsilon_0 m}\right)\delta\hat{\boldsymbol{E}} \qquad (3.3)
\end{aligned}
$$

電場の振動成分がある、つまり $\delta\hat{\boldsymbol{E}} \neq 0$ なので

$$
\begin{aligned}
0 &= \omega^2 - k^2c^2 - \frac{q^2n_0}{\epsilon_0 m} \\
\omega^2 &= k^2c^2 + \frac{q^2n_0}{\epsilon_0 m} \qquad (3.4)
\end{aligned}
$$

[4]

分散関係が成り立ち、電場の振動成分があるので (11) 式のフーリエ変換の式を見ると

$$\delta\hat{\boldsymbol{B}} = \frac{1}{\omega}\boldsymbol{k} \times \delta\hat{\boldsymbol{E}} \neq 0 \tag{4.1}$$

[5]

(14) 式をプラズマ振動数を用いて表すと

$$\omega = \sqrt{k^2c^2 + \omega_p^2} \tag{5.1}$$

なので位相速度は

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \sqrt{c^2 + \frac{\omega_p^2}{k^2}} > c \tag{5.2}$$

群速度は

$$v_g = \frac{\partial\omega}{\partial k} = \frac{c^2k}{\sqrt{k^2c^2 + \omega_p^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 + (\omega_p/ck)^2}} < c \tag{5.3}$$

より

$$v_g < c < v_p \tag{5.4}$$

[6]

屈折率 N を ω の関数で表すと

$$N = \frac{c}{v_p} = \frac{ck}{\omega} = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \tag{6.1}$$

これより振動数 $\omega < \omega_p$ の光は金属中の電子ガス中には存在できないため、金属に入射した光は全て反射する。これが金属光沢の由来である。

感想

誘導に乗っていくだけではあるが、プラズマ振動数の名前の由来がそのまんま金属中のプラズマの振動数と知れたのは面白かった。