

2011 年度東大物工答案

しゃんごん (@CEY3944)

2025 年 6 月 13 日

第 1 問 量子力学: 変分法

計算ミスを防ぐため、 $\hbar = m = e = /4\pi\epsilon_0 = 1$ の単位系で計算を行い、最後に単位を復活させる。このとき、距離の単位はボーア半径

$$a_B = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{e^2m} \quad (0.1)$$

で、エネルギーの単位は水素原子の基底状態のエネルギーの 2 倍である

$$E_0 = \frac{e^4m}{(4\pi\epsilon_0)^2\hbar^2} \quad (0.2)$$

である。

[1]

波動関数の規格化条件より N は α を使って

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^\infty dr 4\pi r^2 \psi^*(r) \psi(r) = 4\pi |N|^2 \int_0^\infty dr r^2 e^{-2\alpha r} = 4\pi |N|^2 \times \frac{2!}{(2\alpha)^3} \\ N &= \sqrt{\frac{\alpha^3}{\pi}} \end{aligned} \quad (1.1)$$

と書ける。

これよりエネルギーは

$$\begin{aligned} H\psi(r) &= \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \right) - \frac{1}{r} \right] N e^{-\alpha r} = \left[-\frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha-1}{r} \right] N e^{-\alpha r} \\ E &= \int_0^\infty dr 4\pi r^2 \psi^*(r) H\psi(r) = 4\alpha^3 \int_0^\infty dr \left[-\frac{\alpha^2}{2} r^2 + (\alpha-1)r \right] e^{-2\alpha r} \\ &= -4\alpha^3 \frac{\alpha^2}{2} \frac{2}{(2\alpha)^3} + 4\alpha^3 (\alpha-1) \frac{1}{(2\alpha)^2} = \frac{\alpha^2}{2} - \alpha \\ &= \frac{(\alpha-1)^2}{2} - \frac{1}{2} \geq -\frac{1}{2} \end{aligned} \quad (1.2)$$

とわかる。なので基底状態のエネルギーは

$$E = -\frac{E_0}{2} = -\frac{e^4m}{2(4\pi\epsilon_0)^2\hbar^2} \quad (1.3)$$

とわかる。

また、 α は距離の逆数の次元の量なので $\alpha = 1/a_B$ である。これより波動関数は

$$\psi(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_B^3}} e^{-r/a_B} = \sqrt{\frac{e^6 m^3}{\pi (4\pi\epsilon_0)^3 \hbar^3}} \exp \left[-\frac{e^2 m}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2} r \right] \quad (1.4)$$

[2]

波動関数の規格化条件より N は α を使って

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^\infty dr 2\pi r \psi^*(r) \psi(r) = 2\pi |N|^2 \int_0^\infty dr r e^{-2\alpha r} = \frac{2\pi |N|^2}{4\alpha^2} \\ N &= \sqrt{\frac{2\alpha^2}{\pi}} \end{aligned} \quad (2.1)$$

これよりエネルギーは

$$\begin{aligned}
H\psi(r) &= \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) - \frac{1}{r} \right] N e^{-\alpha r} = \left[-\frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha/2 - 1}{r} \right] N e^{-\alpha r} \\
E &= \int_0^\infty dr 2\pi r \psi^*(r) H\psi(r) = 4\alpha^2 \int_0^\infty dr \left[-\frac{\alpha^2}{2} r + (\alpha/2 - 1) \right] e^{-2\alpha r} \\
&= -4\alpha^2 \frac{\alpha^2}{2} \frac{1}{(2\alpha)^2} + 4\alpha^2 (\alpha/2 - 1) \frac{1}{2\alpha} = \frac{\alpha^2}{2} - 2\alpha \\
&= \frac{(\alpha - 2)^2}{2} - 2 \geq -2
\end{aligned} \tag{2.2}$$

とわかる。なので基底状態のエネルギーは

$$E = -2E_0 = -\frac{2e^4 m}{(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} \tag{2.3}$$

とわかる。

また、 α は距離の逆数の次元の量なので $\alpha = 2/a_B$ である。これより波動関数は

$$\psi(r) = \sqrt{\frac{8}{\pi a_B^2}} e^{-r/2a_B} = \sqrt{\frac{8e^4 m^2}{\pi (4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2}} \exp\left[-\frac{2e^2 m}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2} r\right] \tag{2.4}$$

[3]

波動関数の広がりとは 2 次元だと $1/\alpha = a_B/2$ なのに対し、3 次元だと $1/\alpha = a_B$ となっていて、2 次元の方ときのほうが電子は正電荷により近づいているのがわかる。電子が電荷に近づいたことによってクーロンポテンシャルの利得が大きくなるため、変分によって得られたエネルギーは 2 次元ときの方が 3 次元のときのエネルギーよりも低くなると理解できる。

感想

問題文に『2 次元または、3 次元空間中、』にとあるが、この書き方はよくないと思われる。というのも、2 次元空間中といったときに、物質場と電場が両方ともは 2 次元中にあると読めてしまうためである。そうすると、クーロンポテンシャルの形がおかしくなる。2 次元のポアソン方程式を解いてもよいし、ガウスの法則で電気力線の本数を数えてもよい。楽なので後者で計算を進める。半径 r の 2 次元の円周が囲む電荷の量が $+e$ であるので電場は

$$2\pi r E = +e/\epsilon_0 \quad \rightarrow \quad E = \frac{+e}{2\pi\epsilon_0 r}$$

となる。ここで、次元が変わったことにより、誘電率の次元が変わっていることに注意。これ自体はローレンツモデル等を計算すると誘電率は $\epsilon \propto Ne^2/m \propto L^d$ となるのとコンシステントである。この電場による電位 ϕ は

$$\phi = \int dr E = \frac{e}{2\pi\epsilon_0} \ln r + \text{const.}$$

これより $-e$ のポテンシャル $V = -q\phi$ は

$$V = -\frac{e}{2\pi\epsilon_0} \ln r$$

となり、 $\ln r$ の依存性になり、問題で与えられたハミルトニアンとは異なる。この結果自体は 2 次元のスケール不変性のある場の理論からも支持される。

なので、この問題では物質場は 2 次元、光子場は 3 次元的に扱っているとわかる。そのような問題分をそのような意図にするには、『3 次元空間に固定された電荷と電子の状態を求めよ』を [1] にして、『電子が空間を自由に動くことができず、2 次元平面上のみを動くことができる状態を求めよ』を [2] にすればよかったと思われる。

この勘違いの理由としては、物性では 2 次元系と言ったときに物質は 2 次元だが、光子は 3 次元的に扱うのが基本だからである。ゲージ理論的にも 3+1 次元中に U(1) ゲージ場はあるともいえる。

相互作用場が物質よりも高次元の場であってもよいという例にも見える。そうすると重力理論とかであるグラビトンは高次元を伝播するというのもそんなに変なアイデアではないとわかるし、次元によってポテンシャルの冪が変わることから万有引力の冪を実験的に求めようとするというのも納得である。

第2問 統計力学: グランドカノニカル分布

$\beta = 1/k_B T$ とする。

[1]

スピンの状態を σ で指定する。 l_x, l_y, l_z, σ で指定される状態の分配関数は

$$\Xi_1(l_x, l_y, l_z, \sigma) = 1 + \exp \left[-\beta \left(\frac{2\pi^2 \hbar^2}{mL^2} (l_x^2 + l_y^2 + l_z^2) - \mu \right) \right] \quad (1.1)$$

今、 σ の状態には注目しないので、 σ をトレースアウトすると

$$\begin{aligned} \Xi_1(l_x, l_y, l_z) &= \sum_{\sigma=\pm 1/2} \Xi_1(l_x, l_y, l_z, \sigma) \\ &= 1 + 2 \exp \left[-\beta \left(\frac{2\pi^2 \hbar^2}{mL^2} (l_x^2 + l_y^2 + l_z^2) - \mu \right) \right] + \exp \left[-2\beta \left(\frac{2\pi^2 \hbar^2}{mL^2} (l_x^2 + l_y^2 + l_z^2) - \mu \right) \right] \end{aligned} \quad (1.2)$$

となる (これ自体は σ の自由度を考えずにはじめから、電子がないとき、スピン up/down が1つあるとき、電子が2つあるときの和をとっても得られる)。また、 Ξ の表式については Ξ_1 をすべての状態についてそれぞれ考え、それらの積を取ればよいので

$$\Xi = \prod_{l_x, l_y, l_z} \Xi_1(l_x, l_y, l_z) \quad (1.3)$$

のように書ける。

[2]

$$\begin{aligned} \langle n_k \rangle &= \frac{1}{\Xi_1(k)} \sum_{n_k=0,1,2} n_k e^{-\beta(\varepsilon_k - \mu)n_k} = \frac{1}{\beta \Xi_1(k)} \frac{\partial}{\partial \mu} \sum_{n_k=0,1,2} e^{-\beta(\varepsilon_k - \mu)n_k} \\ &= \frac{\partial}{\beta \partial \mu} \ln \Xi_1(k) = \frac{\partial}{\beta \partial \mu} \ln \left(1 + 2e^{-\beta(\varepsilon_k - \mu)} + e^{-2\beta(\varepsilon_k - \mu)} \right) \\ &= \frac{2e^{-\beta(\varepsilon_k - \mu)} + 2e^{-2\beta(\varepsilon_k - \mu)}}{1 + 2e^{-\beta(\varepsilon_k - \mu)} + e^{-2\beta(\varepsilon_k - \mu)}} = \frac{2e^{-\beta(\varepsilon_k - \mu)}(1 + e^{-\beta(\varepsilon_k - \mu)})}{(1 + e^{-\beta(\varepsilon_k - \mu)})^2} \\ &= \frac{2}{1 + e^{\beta(\varepsilon_k - \mu)}} \end{aligned} \quad (2.1)$$

のようにフェルミ分布関数がスピン自由度も込みで得られる。

[3]

$$\begin{aligned} J &= -k_B T \ln \Xi = -k_B T \sum_{l_x, l_y, l_z} \ln \left(1 + 2e^{-\beta(\varepsilon_k - \mu)} + e^{-2\beta(\varepsilon_k - \mu)} \right) \\ &= -k_B T L^3 \int d\varepsilon D(\varepsilon) \ln \left(1 + 2e^{-\beta(\varepsilon - \mu)} + e^{-2\beta(\varepsilon - \mu)} \right) = -2k_B T L^3 \int d\varepsilon D(\varepsilon) \ln \left(1 + e^{-\beta(\varepsilon - \mu)} \right) \end{aligned} \quad (3.1)$$

[4]

$E(k)$ の期待値は β と $D(\varepsilon)$ を用いて表すと

$$\begin{aligned}\langle E \rangle &= \frac{1}{L^3 \Xi} \sum_k \sum_{n_k} n_k E(k) e^{-\beta E(k) n_k} = \frac{1}{L^3 \Xi} \sum_k \sum_{n_k} \left(-\frac{\partial}{\partial \beta} E(k) e^{-\beta E(k) n_k} \right) \\ &= -\frac{1}{L^3} \frac{\partial}{\partial \beta} \ln \Xi = -\frac{\partial}{\partial \beta} \int d\varepsilon D(\varepsilon) \ln \left(1 + e^{-\beta(\varepsilon - \mu)} \right) = 2 \int d\varepsilon D(\varepsilon) \frac{E}{1 + e^{\beta E}}\end{aligned}\quad (4.1)$$

と書ける。

[5]

状態密度 $D(\varepsilon)$ の表式は

$$\int d\varepsilon D(\varepsilon) := \frac{1}{(2\pi)^3} \int dk 4\pi k^2 = \int d\varepsilon \frac{dk}{d\varepsilon} \frac{k^2}{2\pi^2} = \int d\varepsilon \frac{1}{2\pi^2} \frac{mk}{\hbar^2} = \int d\varepsilon \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{\varepsilon} \quad (5.1)$$

より

$$D(\varepsilon) = \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{\varepsilon} \quad (5.2)$$

である。

[6]

$E(k)$ の絶対零度での期待値である E_g は

$$E_g = 2 \int_0^\mu d\varepsilon \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{\varepsilon} (\varepsilon - \mu) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \left[\frac{2}{5} \mu^{5/2} - \frac{2}{3} \mu^{5/2} \right] = -\frac{2}{15\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \mu^{5/2} \quad (6.1)$$

である。^{*1}

[7]

粒子数密度は

$$\begin{aligned}\langle \rho \rangle &= \frac{1}{L^3 \Xi} \sum_k \sum_{n_k} n_k e^{-\beta(\varepsilon_k - \mu) n_k} = \frac{1}{L^3 \Xi} \sum_k \sum_{n_k} \frac{\partial}{\partial \beta \mu} e^{-\beta(\varepsilon_k - \mu) n_k} = \frac{1}{L^3} \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \Xi \\ &= 2 \int d\varepsilon D(\varepsilon) \ln \left(1 + e^{-\beta(\varepsilon - \mu)} \right) = 2 \int d\varepsilon \frac{D(\varepsilon)}{1 + e^{\beta(\varepsilon - \mu)}}\end{aligned}\quad (7.1)$$

と表せる。 $\rho = \partial_\mu J / L^3$ でもよい。

絶対零度においては $\mu < 0$ のとき $\langle \rho \rangle = 0$ より $\kappa = 0$ である。 $\mu > 0$ のとき、

$$\langle \rho \rangle = 2 \int_0^\mu d\varepsilon \frac{1}{4\pi} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{\varepsilon} = \frac{1}{3\pi^2} \left(\frac{2m\mu}{\hbar^2} \right)^{3/2} \quad (7.2)$$

より

$$\kappa = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} = 2D(\mu) \quad (7.3)$$

となり、スピンも考慮した状態密度と同じものになっている。

^{*1} 見慣れない表式なのでこの式を観察してみる。エネルギーが負なのは、この問題でのエネルギーの基準が化学ポテンシャルであり、電子はそれより低いエネルギーに詰まっているからとわかる。また、これを物性の本で見えるような表式にする。粒子数は状態密度にスピンの自由度を入れない notation であるので $N = \frac{2}{3} 2D(\varepsilon_F) \varepsilon_F$ となる。これより

$$E_g = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \left[\frac{2}{5} \varepsilon_F^{5/2} - \frac{2}{3} \varepsilon_F^{5/2} \right] = \frac{2}{3} \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{\varepsilon_F} \times \left(\frac{3}{5} - 1 \right) \varepsilon_F = \frac{3}{5} N \varepsilon_F - N \varepsilon_F = -\frac{2}{5} N \varepsilon_F$$

$= 2D(\varepsilon_F)$

となる。フェルミ準位まで詰まった電子のエネルギーが $\frac{3}{5} N \varepsilon_F$ でそこから、エネルギーの基準点であるフェルミエネルギーの分を除いた量とわかる。

この結果はとなる理由は、化学ポテンシャルを単位エネルギーずらしたときに増える電子の数を言い換えると状態密度に単位エネルギーを掛けて得られる状態数そのものであるから。

つまり、化学ポテンシャルを変化させたとき、フェルミ面付近にどれほど電子が増えるかというのが密度感受率と読むことができる。

[8]

密度のゆらぎは

$$\begin{aligned}\langle \rho^2 \rangle - \langle \rho \rangle^2 &= \frac{1}{L^6 \Xi} \sum_k \sum_{n_k} n_k^2 e^{-\beta(\varepsilon_k - \mu)n_k} - \left(\frac{1}{L^3 \Xi} \sum_k \sum_{n_k} n_k e^{-\beta(\varepsilon_k - \mu)n_k} \right)^2 = \frac{1}{L^6 \Xi} \frac{\partial^2 \Xi}{\partial \beta \partial \mu^2} - \left(\frac{1}{L^3 \Xi} \frac{\partial \Xi}{\partial \beta \partial \mu} \right)^2 \\ &= \frac{\partial}{L^3 \beta \partial \mu} \left(\frac{1}{\Xi} \frac{\partial \Xi}{L^3 \beta \partial \mu} \right) = \frac{\partial \langle \rho \rangle}{L^3 \beta \partial \mu} = k_B T \frac{\kappa}{L^3} \left(= k_B T \frac{2D(\mu)}{L^3} \right)\end{aligned}\quad (8.1)$$

となる。

前問より密度感受率はフェルミ面付近の電子数の変化を表す量であるので、フェルミ面付近の粒子数のゆらぎは $k_B T$ に比例するという結果になる。これはフェルミ分布関数の値の変化する領域が $k_B T$ 程度であるという [2] の結果とも一致する。

感想

グランドカノニカル分布からフェルミ分布を導出する際に、はじめからスピンの自由度を考慮してやるのは初めてやった。これがよくやってる計算と同じ結果になったのは感動した。よくあるスピン自由度を後から考えて状態密度を2倍するという処方だと、エニオンのような分数統計のときには不安になるが、この問題の手順だと安心して考えれる。

第3問 電磁気学: ゼーマン分裂の古典論

[1]

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -k\mathbf{r} + q\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}$$

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -kx + qB\dot{y} \\ m\ddot{y} = -ky - qB\dot{x} \\ m\ddot{z} = -kz \end{cases} \quad (1.1)$$

これより、 z 成分は単振動することがわかるので固有角振動数は

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1.2)$$

[2]

前問の運動方程式に問で与えられた解の形を代入すると

$$\begin{cases} -m\Omega^2 a \cos \Omega t = -ka \cos \Omega t + qB\Omega b \cos \Omega t \\ -m\Omega^2 b \sin \Omega t = -kb \sin \Omega t + qB\Omega a \cos \Omega t \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \omega_0^2 - \Omega^2 & -\frac{qB}{m}\Omega \\ -\frac{qB}{m}\Omega & \omega_0^2 - \Omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \quad (2.1)$$

となる。この連立方程式が非自明な解を持つ条件より

$$0 = (\omega_0^2 - \Omega^2)^2 - \left(\frac{qB}{m}\Omega\right)^2$$

$$= \left(\Omega^2 - \frac{qB}{m}\Omega - \omega_0^2\right) \left(\Omega^2 + \frac{qB}{m}\Omega - \omega_0^2\right)$$

$$\Omega = \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{qB}{2m\omega_0}\right)^2} \pm \frac{qB}{2m}, \quad -\omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{qB}{2m\omega_0}\right)^2} \pm \frac{qB}{2m} \quad (2.2)$$

このうち振動数が正のものが求める解なので

$$\Omega = \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{qB}{2m\omega_0}\right)^2} \pm \frac{qB}{2m} \quad (2.3)$$

[3]

$$\Omega \simeq \omega_0 \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{qB}{2m}\right)^2 \right\} \pm \frac{qB}{2m} = \omega_0 \pm \frac{qB}{2m} + \frac{\omega_0}{2} \left(\frac{qB}{2m\omega_0}\right)^2 \quad (3.1)$$

[4]

磁場を掛ける前には角振動数 ω_0 で右回りと左回りに荷電粒子が回る状態は縮退していたが、磁場を掛けるとローレンツ力によって加速する回り方と減速する回り方になるため、右回りと左回りで回転速度が変わるため。(束縛された荷電粒子の軌道運動が磁場をかけたことによりゼーマン分裂が生じたから。)

[5]

z 方向は減衰するため、定常解には影響しない。 x, y 方向の運動方程式は

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -kx - m\gamma\dot{x} + qB\dot{y} + qE \cos \omega t \\ m\ddot{y} = -ky - m\gamma\dot{y} - qB\dot{x} \\ \ddot{x} = -\omega_0^2 x - \gamma\dot{x} + \frac{qB}{m}\dot{y} + \frac{qE}{m} \cos \omega t \\ \ddot{y} = -\omega_0^2 y - \gamma\dot{y} - \frac{qB}{m}\dot{x} \\ \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}(x + iy) &= -\omega_0^2(x + iy) - \left(\gamma + i\frac{qB}{m}\right) \frac{d}{dt}(x + iy) + \frac{qE}{m} \cos \omega t \\ \frac{d^2}{dt^2}(x - iy) &= -\omega_0^2(x - iy) - \left(\gamma - i\frac{qB}{m}\right) \frac{d}{dt}(x - iy) + \frac{qE}{m} \cos \omega t \end{aligned} \right. \end{cases} \quad (5.1)$$

のようにまとめることができる。ここで、 $u_{\pm} = x \pm iy$ のようにおくと運動方程式は

$$\ddot{u}_{\pm} + \omega_0^2 u_{\pm} + \left(\gamma \pm i\frac{qB}{m}\right) \dot{u}_{\pm} = \frac{qE}{m} \cos \omega t \quad (5.2)$$

のようにまとめれる。

この定常解の形を

$$u_{\pm} = A_{\pm} e^{i\omega t} + B_{\pm} e^{-i\omega t} \quad (5.3)$$

のように置く。すると調べる量は

$$\overline{x(t)^2 + y(t)^2} = \overline{u_+(t)u_-(t)} = \overline{A_+B_- + A_-B_+ + A_+A_-e^{2i\omega t} + B_+B_-e^{-2i\omega t}} = A_+B_- + A_-B_+ \quad (5.4)$$

とわかる。

運動方程式に代入して、 $e^{i\omega t}$ と $e^{-i\omega t}$ の係数を見ると

$$\begin{cases} \left(\omega_0^2 - \omega^2 \mp \omega\frac{qB}{m} + i\omega\gamma\right) A_{\pm} = \frac{qE}{2m} \\ \left(\omega_0^2 - \omega^2 \pm \omega\frac{qB}{m} - i\omega\gamma\right) B_{\pm} = \frac{qE}{2m} \end{cases} \quad (5.5)$$

これより

$$\begin{aligned} A_+B_- &= \left(\frac{qE}{2m}\right)^2 \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - \omega\frac{qB}{m} + i\omega\gamma} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - \omega\frac{qB}{m} - i\omega\gamma} \\ &= \left(\frac{qE}{2m}\right)^2 \frac{1}{\left(\omega_0^2 - \omega^2 - \omega\frac{qB}{m}\right)^2 + \omega^2\gamma^2} \\ A_-B_+ &= \left(\frac{qE}{2m}\right)^2 \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + \omega\frac{qB}{m} + i\omega\gamma} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + \omega\frac{qB}{m} - i\omega\gamma} \\ &= \left(\frac{qE}{2m}\right)^2 \frac{1}{\left(\omega_0^2 - \omega^2 + \omega\frac{qB}{m}\right)^2 + \omega^2\gamma^2} \end{aligned} \quad (5.6)$$

よって

$$\overline{x(t)^2 + y(t)^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{qE}{2m}\right)^2 \left[\frac{1}{\left(\omega_0^2 - \omega^2 - \omega\frac{qB}{m}\right)^2 + \omega^2\gamma^2} + \frac{1}{\left(\omega_0^2 - \omega^2 + \omega\frac{qB}{m}\right)^2 + \omega^2\gamma^2} \right] \quad (5.7)$$

この量は光を入れたときのゼーマン分裂があるときの吸収スペクトルに対応する。

[6]

$\gamma \ll qB/m \ll \omega_0$ の場合

$\gamma \ll qB/m$ というのは、基本 γ を考えなくてもよいが、 $(\omega_0^2 - \omega^2 \mp \omega\frac{qB}{m})^2$ が 0 になるようなときには考慮しなければならないことを意味する。

そのような振動数は $\omega = \Omega = \omega_0 \mp qB/2m$ であると設問 [2] で求めた。そのとき $\omega_0 \gg qB/2m$ より

$$\omega_0^2 \mp \omega \frac{qB}{m} - \omega^2 \simeq \left(\omega_0 \mp \frac{qB}{2m} + \omega \right) \left(\omega_0 \mp \frac{qB}{2m} - \omega \right) \simeq 2 \left(\omega_0 \mp \frac{qB}{2m} \right) \left(\omega_0 \mp \frac{qB}{2m} - \omega \right) \simeq 2\omega_0 \left(\omega_0 \mp \frac{qB}{2m} - \omega \right) \quad (6.1)$$

$$\omega\gamma \simeq \left(\omega_0 \mp \frac{qB}{2m} \right) \gamma \simeq \omega_0 \gamma \quad (6.2)$$

よって

$$\begin{aligned} \overline{x(t)^2 + y(t)^2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{qE}{2m} \right)^2 \left[\frac{1}{\left(\omega_0^2 - \omega^2 - \omega \frac{qB}{m} \right)^2 + \omega^2 \gamma^2} + \frac{1}{\left(\omega_0^2 - \omega^2 + \omega \frac{qB}{m} \right)^2 + \omega^2 \gamma^2} \right] \\ &\simeq \frac{1}{2} \left(\frac{qE}{2m} \right)^2 \left[\frac{1}{4\omega_0^2 \left(\omega_0 - \frac{qB}{2m} - \omega \right)^2 + \omega_0^2 \gamma^2} + \frac{1}{4\omega_0^2 \left(\omega_0 + \frac{qB}{2m} - \omega \right)^2 + \omega_0^2 \gamma^2} \right] \\ &\simeq \frac{1}{2} \left(\frac{qE}{4m\omega_0} \right)^2 \left[\frac{1}{\left(\omega_0 - \frac{qB}{2m} - \omega \right)^2 + \gamma^2/4} + \frac{1}{\left(\omega_0 + \frac{qB}{2m} - \omega \right)^2 + \gamma^2/4} \right] \end{aligned} \quad (6.3)$$

$qB/m \ll \gamma \ll \omega_0$ の場合

1 つ前の場合では $\gamma \ll qB/2m$ という条件を使ってなかった。今の場合ではこれを考慮すればよく、それには $qB/m \rightarrow 0$ とすればよいので、

$$\begin{aligned} \overline{x(t)^2 + y(t)^2} &\simeq \frac{1}{2} \left(\frac{qE}{4m\omega_0} \right)^2 \left[\frac{1}{\left(\omega_0 - \frac{qB}{2m} - \omega \right)^2 + \gamma^2/4} + \frac{1}{\left(\omega_0 + \frac{qB}{2m} - \omega \right)^2 + \gamma^2/4} \right] \\ &= \left(\frac{qE}{4m\omega_0} \right)^2 \frac{1}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2/4} \end{aligned} \quad (6.4)$$

となる。つまり、 γ によるぼやけが強すぎてゼーマン分裂が見えず、単一のローレンツピークとなったと解釈できる。
(<https://www.desmos.com/calculator/qboaxcxtuc>)

感想

ゼーマン分裂は量子論でやることが多いけど、古典論でも同じ結果が得られるのは感動しますよね。ただ、後半の計算量が多いように感じた。何か早くやる方法はないのだろうか？

第 4 問 固体物理：結晶場分裂・禁制遷移

[1]

(a)

$$Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{4}}(3\cos^2 - 1) = \sqrt{\frac{5}{4}} \frac{3r^2 \cos^2 - r^2}{r^2} \propto 3z^2 - r^2 \quad (1.1)$$

より (ii)

(b)

$$Y_{22} + Y_{2-2} = \frac{\sqrt{15}}{4\sqrt{2\pi}} \sin \theta (e^{2i\varphi} + e^{-2i\varphi}) = \frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2\pi}} \frac{r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi - r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi}{r^2} \propto x^2 - y^2 \quad (1.2)$$

より (v)

(c)

$$Y_{21} + Y_{2-1} = -\frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2\pi}} \cos \theta \sin \theta (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) = -i\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \frac{r \cos \theta r \sin \theta \sin \varphi}{r^2} \propto yz \quad (1.3)$$

より (iii)

(d)

$$Y_{21} - Y_{2-1} = -\frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2\pi}} \cos \theta \sin \theta (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) = -\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \frac{r \cos \theta r \sin \theta \cos \varphi}{r^2} \propto zx \quad (1.4)$$

より (iv)

(e)

$$Y_{22} - Y_{2-2} = \frac{\sqrt{15}}{4\sqrt{2\pi}} \sin \theta (e^{2i\varphi} - e^{-2i\varphi}) = i\frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2\pi}} \frac{r \sin \theta \cos \varphi \times r \sin \theta \cos \varphi}{r^2} \propto xy \quad (1.5)$$

より (i)

[2]

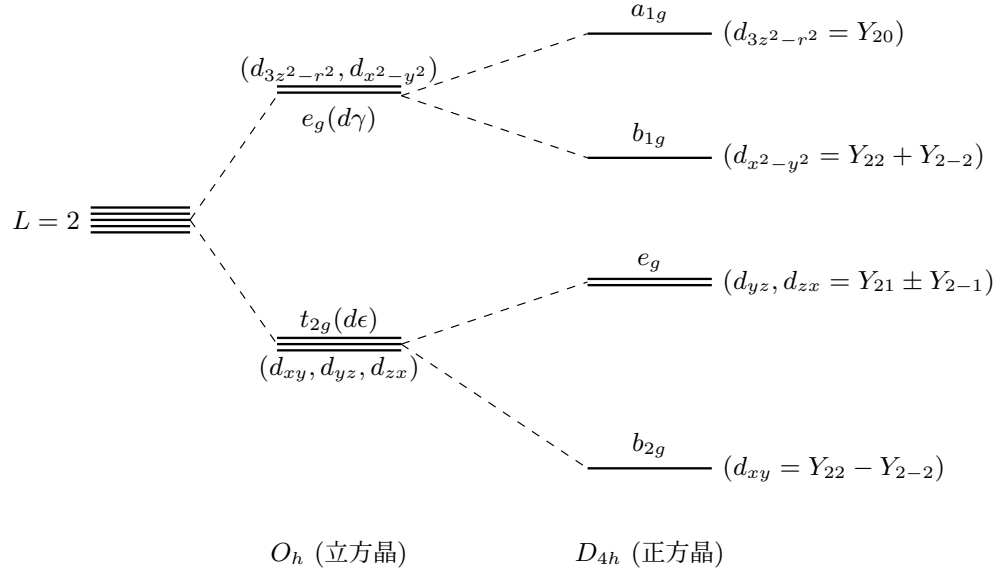


図: 結晶場分裂による軌道準位の変化

[3]

電気双極子相互作用のハミルトニアンを以下のように 1 階の球テンソルに分けて考える。

$$\begin{aligned}
 H_E &= exE_x + eyE_y + ezE_z = e \left(-\frac{x+iy}{\sqrt{2}} \right) \underbrace{\left(-\frac{E_x+iE_y}{\sqrt{2}} \right)^*}_{E_1^*} + ezE_z + e \left(\frac{x-iy}{\sqrt{2}} \right) \underbrace{\left(\frac{E_x-iE_y}{\sqrt{2}} \right)^*}_{E_{-1}^*} \\
 &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} er (Y_{1,1}E_+^* + Y_{1,0}E_z + Y_{1,-1}E_-^*)
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

これは円偏光 $E_{\pm 1}$ を入れたときに電気双極子 $P_{\pm 1} \propto rY_{1m}$ が活性になるというように読み替えたものに対応する。

これらはの要素は独立であるので、

$$H_{Em} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} r Y_{1m} E_{1m}^* \tag{3.2}$$

のように円偏光を入れたときの遷移を調べ、これの重ね合わせによって他の遷移を表すことができる。

始状態と終状態を $|2, m_i\rangle = R_{32}(r)Y_{2m_i}(\Omega)$, $|2, m_f\rangle = R_{32}(r)Y_{2m_f}(\Omega)$ とおいて、遷移要素 $\langle 2, m_f | H_{Em} | 2, m_i \rangle$ を調べる。

$$\langle 2, m_f | H_{Em} | 2, m_i \rangle = \int_0^\infty r^2 dr P_{32}^2(r) \sqrt{\frac{3}{4\pi}} er \int d\Omega Y_{2m_f}^*(\Omega) Y_{1m}(\Omega) Y_{2m_i}(\Omega) \tag{3.3}$$

角度方向の積分だけ注目すると Gaunt 積分と呼ばれる積分になる。

$$\int d\Omega Y_{2m_f}^* Y_{1m} Y_{2m_i} = \sqrt{\frac{5 \times 3 \times 5}{4\pi}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ m_f & m & m_i \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

1 つ目の 3j 記号の列の反対称性によりこの積分は 0 になるので、3d 電子内での双極子相互作用による遷移はどの準位間での生じない。

実は、こんな大道具使わずとも d 電子が偶関数、双極子が奇関数であるので、遷移要素を計算する被積分関数のパリティが奇になるので、全領域で積分すると 0 となるから電気双極子遷移が生じないという説明で十分である。

3j 記号について

3j 記号は角運動量の合成にあらわれる Clebsh-Gordan 係数を拡張したようなものになっている。

$$\langle l_1 m_1; l_2 m_2 | L, M \rangle = (-1)^{l_1-l_2+M} \sqrt{2L+1} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & L \\ m_1 & m_2 & -M \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

角運動量の合成の合成であるので 3j 記号内の数字の組で、角運動量の合成則を守らないようなときには値が 0 になる。具体的には、

$$m_1 + m_2 - M = 0, \quad l_1 + l_2 + L \in \mathbb{Z}, \quad |l_1 - l_2| \leq L \leq l_1 + l_2 \quad (3.6)$$

である。

3j は列の奇置換に関して位相因子が表れる。これは角運動量の空間反転の対称性のようなものである。

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1+j_2+j_3} \begin{pmatrix} j_2 & j_1 & j_3 \\ m_2 & m_1 & m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1+j_2+j_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_3 & j_2 \\ m_1 & m_3 & m_2 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

また磁気量子数の反転に関しても位相因子が表れる。これは角運動量の時間反転の対称性のようなものである。

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1+j_2+j_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ -m_1 & -m_2 & -m_3 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

[4]

磁気双極子相互作用は

$$\begin{aligned} H_M &= \mu_B H_x l_x + \mu_B H_y l_y + \mu_B H_z l_z \\ &= \mu_B \underbrace{\left(-\frac{H_x + iH_y}{\sqrt{2}} \right)^*}_{H_1^*} \left(-\frac{l_x + il_y}{\sqrt{2}} \right) + \mu_B H_z^* l_z + \mu_B \underbrace{\left(\frac{H_x - iH_y}{\sqrt{2}} \right)^*}_{H_{-1}^*} \left(\frac{l_x - il_y}{\sqrt{2}} \right) \end{aligned} \quad (4.1)$$

と書ける。

問題文で与えられているのは光電場の偏光のほうこうなので、磁場に読み替える必要がある。ファラデーの式をフーリエ変換したものより、

$$\begin{aligned} -\frac{\partial B}{\partial t} &= \nabla \times E \\ i\omega \mu H &= ik \times E \\ H &\propto k \times E \end{aligned} \quad (4.2)$$

磁場と光の偏光の向きの関係がわかる。

この式より、 x 方向に進む光電場が y 方向の直線偏光を持っているとすると、磁場は z 方向に振動する。なので、このときの磁気双極子相互作用は

$$H_M = \mu_B H_z^* l_z \quad (4.3)$$

である。これより

$$\begin{aligned} l_z |d_{3z^2-r^2}\rangle &\propto l_z Y_{20} = 0 \\ l_z |d_{x^2-y^2}\rangle &\propto l_z (Y_{22} + Y_{2-2}) \propto Y_{22} - Y_{2-2} \propto |d_{xy}\rangle \\ l_z |d_{yz}\rangle &\propto l_z (Y_{21} + Y_{2-1}) \propto Y_{21} - Y_{2-1} \propto |d_{zx}\rangle \\ l_z |d_{zx}\rangle &\propto l_z (Y_{21} - Y_{2-1}) \propto Y_{21} + Y_{2-1} \propto |d_{yz}\rangle \\ l_z |d_{xy}\rangle &\propto l_z (Y_{22} - Y_{2-2}) \propto Y_{22} + Y_{2-2} \propto |d_{x^2-y^2}\rangle \end{aligned} \quad (4.4)$$

とわかる。つまり、 y 方向の偏光直線偏光によって、

$$|d_{xy}\rangle \leftrightarrow |d_{x^2-y^2}\rangle, \quad |d_{yz}\rangle \leftrightarrow |d_{zx}\rangle \quad (4.5)$$

間の遷移が可能であるとわかる。

z 方向の直線偏光の光電場の磁場は y 方向に振動する。なので磁気双極子相互作用は

$$H_M = -i\mu_B H_y l_+ + i\mu_B H_y l_- \quad (4.6)$$

と書ける。これより、

$$\begin{aligned} (-l_+ + l_-) |d_{3z^2-r^2}\rangle &\propto (-l_+ + l_-) Y_{20} = -Y_{21} + Y_{2-1} \propto |d_{zx}\rangle \\ (-l_+ + l_-) |d_{x^2-y^2}\rangle &\propto (-l_+ + l_-) (Y_{22} + Y_{2-2}) \propto Y_{21} - Y_{2-1} \propto |d_{zx}\rangle \\ (-l_+ + l_-) |d_{yz}\rangle &\propto (-l_+ + l_-) (Y_{21} + Y_{2-1}) \propto -Y_{22} + Y_{2-2} \propto |d_{xy}\rangle \\ (-l_+ + l_-) |d_{zx}\rangle &\propto (-l_+ + l_-) (Y_{21} - Y_{2-1}) \propto -Y_{22} - Y_{2-2} + 2Y_{20} \propto |d_{x^2-y^2}\rangle + |d_{3z^2-r^2}\rangle \\ (-l_+ + l_-) |d_{xy}\rangle &\propto (-l_+ + l_-) (Y_{22} - Y_{2-2}) \propto Y_{21} + Y_{2-1} \propto |d_{yz}\rangle \end{aligned} \quad (4.7)$$

とわかる。つまり、 y 方向の偏光直線偏光によって、

$$|d_{3z^2-r^2}\rangle, |d_{x^2-y^2}\rangle \leftrightarrow |d_{zx}\rangle, \quad |d_{xy}\rangle \leftrightarrow |d_{yz}\rangle \quad (4.8)$$

間の遷移が可能であるとわかる。

いま、光の吸収が両者であったことから電子は $|d_{xy}\rangle$ まで詰まっているとわかるため、吸収される入射光のエネルギーが大きい (A) は y 偏光の光電場、吸収される入射光のエネルギーが小さい (B) は z 偏光の光電場とわかる。

感想

私の専門なのでニコニコしながら解いてた。そのまま卒論の素材に使いたいのので、必要以上に記述している。J.J. Sakurai の 3 章にある回転の表現や球テンソル演算子については追ったことある人もいるだろうけど、具体例がないのでなかなか馴染めてない人多そう。

ここら辺の光学遷移則は黙って計算するか、結果だけ認めて使うのでも十分ではあるが、球テンソル演算子表記にすると光の角運動量が 1 であるというような表現の由来がわかるのも良い。ベクトルは 1 階のテンソルであり、Wigner-Eckart の定理により回転に対して共変な 1 階の球テンソルは $L = 1$ の角運動量に比例定数をつけた恰好になるというのが、抽象的な表現論での言い方である。それはこの問題で追ってみたように、1 階の球テンソルは光を独立な円偏光と z 偏光の重ね合わせとみなして、それに対応する演算子は電気双極子だったら Y_{1m} , 磁気双極子だったら l_z, l_{\pm} が出てくるのでそれらは角運動量とよく結びついているとわかる。

最後の [4] はこれで合ってるのだろうけど、 z 軸のひずみが小さいとしているので、(B) の遷移は大分小さくて見えないんじゃないかなと思う。もしかして $0 < 1 - \frac{c}{a} \ll 1$ という式は正方晶での結晶場分裂がよく見える程度にはゆがんでいるが、もともとの結晶の形を大きく変化はしていないというのを表しているのだろうか？

第 1 問 積分・偏微分方程式

[1]

[1-1]

$x = a \tan \theta$ と置換すると

$$I_{n+1} = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n+1}} = \int \frac{1}{a^{2n+2}(1 + \tan^2 \theta)^{n+1}} \frac{a d\theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{a^{2n+1}} \int \cos^{2n} \theta d\theta \quad (1.1)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \int \cos^{2n} \theta d\theta &= \int \cos^{2n-2} \theta (1 - \sin^2 \theta) d\theta \\ &= \int \cos^{2n-2} \theta d\theta - \int \left(-\frac{1}{2n-1} \cos^{2n-1} \theta \right)' \sin \theta d\theta \\ &= \int \cos^{2n-2} \theta d\theta + \frac{1}{2n-1} \cos^{2n-1} \theta \sin \theta + C - \frac{1}{2n-1} \int \cos^{2n} \theta d\theta \\ \frac{2n}{2n-1} \int \cos^{2n} \theta d\theta &= \int \cos^{2n-2} \theta d\theta + \frac{1}{2n-1} \cos^{2n} \theta \tan \theta + C \\ \int \cos^{2n} \theta d\theta &= \frac{2n-1}{2n} \int \cos^{2n-2} \theta d\theta + \frac{\tan \theta}{2n(1 + \tan^2 \theta)^n} + C \end{aligned} \quad (1.2)$$

より、

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \frac{2n-1}{2na^2} I_n + \frac{1}{2na^2} \frac{a \tan \theta}{a^{2n}(1 + \tan^2 \theta)^n} + C \\ &= \frac{1}{2na^2} \left[(2n-1) I_n + \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} \right] + C \end{aligned} \quad (1.3)$$

[1-2]

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} \\ I_2 &= \frac{1}{2a^2} \left[I_1 + \frac{x}{x^2 + a^2} \right] = \frac{1}{2a^3} \tan^{-1} \frac{x}{a} + \frac{x}{2a^2(x^2 + a^2)} \end{aligned} \quad (1.4)$$

[1-3]

被積分関数を以下のように部分分数分解をする。

$$\frac{4x^2 + 2x^3 + 10x^2 + 3x + 9}{(x+1)(x^2+2)^2} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2+2} + \frac{dx+e}{(x^2+2)^2} = \frac{2}{x+1} + \frac{2x}{x^2+2} + \frac{-2x+1}{(x^2+2)^2} \quad (1.5)$$

これより

$$\begin{aligned} \int \frac{4x^2 + 2x^3 + 10x^2 + 3x + 9}{(x+1)(x^2+2)^2} dx &= \int \left(\frac{2}{x+1} + \frac{2x}{x^2+2} + \frac{-2x}{(x^2+2)^2} + \frac{1}{(x^2+2)^2} \right) dx \\ &= 2 \ln |x+1| + \ln |x^2+2| + \ln |(x^2+2)^2| + \frac{1}{4\sqrt{2}} \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{x}{4(x^2+2)} \\ &= \ln [(x+1)^2(x^2+2)^3] + \frac{1}{4\sqrt{2}} \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{x}{4(x^2+2)} \end{aligned} \quad (1.6)$$

[2]

[2-1]

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \eta} = c \left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}\end{aligned}\quad (2.1)$$

より、

$$\begin{aligned}0 &= \left(\frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \right) u \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\end{aligned}\quad (2.2)$$

となり、問の前半が示せた。

後半については、前半で得られた関係式の両辺を η で積分すると

$$0 = \int \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} d\eta = \frac{\partial u}{\partial \xi} + f(\xi) \quad (2.3)$$

さらに ξ で微分して

$$\begin{aligned}0 &= \int \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + f(\xi) \right) d\xi = u + \int f(\xi) d\xi + g(\eta) \\ u &= - \int f(\xi) d\xi - g(\eta)\end{aligned}\quad (2.4)$$

そして改めて ξ の関数である $\int f(\xi) d\xi$ を $\phi(\xi)$, η の関数である $-g(\eta)$ を $\varphi(\eta)$ とおきなおすと

$$u = \phi(\xi) + \varphi(\eta) = \phi(x + ct) + \varphi(x - ct) \quad (2.5)$$

となり、一般解の形が得られた。

[2-2]

$g(x)$ の原始関数を $G(x)$ とおくと式 (5) は

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(f(x + ct) + f(x - ct)) + \frac{1}{2c}(G(x + ct) - G(x - ct)) \quad (2.6)$$

となり、一般解の形を満たすため、偏微分方程式の解の候補であるのがわかる。境界条件を満たすかを確かめていく。1 目の境界条件は

$$u(x, 0) = \frac{1}{2}(f(x + 0) + f(x - 0)) + \frac{1}{2c} \int_{x-0}^{x+0} g(s) ds = f(x) \quad (2.7)$$

より満たしているのがわかる。2 目の境界条件は

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) &= \frac{1}{2c}(f'(x + ct) - f'(x - ct)) + \frac{1}{2}(g(x + ct) + g(x - ct)) \\ \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) \Big|_{t=0} &= g(x)\end{aligned}\quad (2.8)$$

より満たしているのがわかる。以上より式 (5) は求める解であるのがわかる。

[2-3]

この境界条件は全問で調べた形であるので、解はヘヴィサイドの階段関数 $\theta(x)$ を用いて

$$u(x, t) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} c_0 \delta(s) ds = \frac{c_0}{2c} [\theta(x + ct) - \theta(x - ct)] \quad (2.9)$$

となる。この解は単一矩形波が伝播しているような解である。

第 2 問 線形代数: 対称行列と 2 次形式

[1]

アインシュタインの縮約を使い、ベクトル表示と成分表示を行き来することにする。 $x^T Ax/2 - x^T b$ の停留値となる x の条件は

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla \left(\frac{1}{2} x^T Ax - x^T b \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{2} A_{jk} x_j x_k - x_j b_j \right) \\ &= \frac{1}{2} \delta_{ij} A_{jk} x_k + \frac{1}{2} \delta_{ik} A_{jk} x_j - \delta_{ij} b_j = \frac{A_{ij} + A_{ji}}{2} x_j - b_i \end{aligned} \quad (1.1)$$

いま、 A は対称行列で $A_{ij} = A_{ji}$ より

$$\begin{aligned} 0 &= A_{ij} x_j - b_i = Ax - b \\ Ax &= b \end{aligned} \quad (1.2)$$

これを逆にたどれば、 $Ax = b$ を x について解いたものは $x^T Ax/2 - x^T b$ の停留値となるのもわかるので示せた。

[2]

B の固有値方程式を考える。固有値を λ とすると、

$$\begin{aligned} 0 &= |B - cI| = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 7-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda) \begin{vmatrix} 6-\lambda & 2 \\ 2 & 7-\lambda \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 7-\lambda & 0 \end{vmatrix} \\ &= (5-\lambda)(6-\lambda)(7-\lambda) - 4(5-\lambda) - 4(7-\lambda) = (5-\lambda)(6-\lambda)(7-\lambda) - 8(6-\lambda) \\ &= (6-\lambda)(\lambda^2 - 12\lambda + 27) = (6-\lambda)(3-\lambda)(9-\lambda) \end{aligned} \quad (2.1)$$

これより $c_1 = 9, c_2 = 6, c_3 = 3$ となる。また、 A は対称行列であるため、固有値に対応する大きさ 1 の固有ベクトルを並べることで A を対角化する D を作ることができる。よって D は

$$D = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

[3]

$$B^k \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = B^k \left(2 \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} \right) = \left(2 \times 9^k \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} + 3^k \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} \right) \quad (3.1)$$

これより

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{4 \times 9^k + 2 \times 3^k}{4 \times 9^k - 3^k} \rightarrow 1 \quad (k \rightarrow \infty) \quad (3.2)$$

となる。

[4]

$y = (y_1 \ y_2 \ y_3)^T, z = (z_1 \ z_2 \ z_3)^T$ とする。このとき、 D は直交行列であるので $z^T z = y^T y$ が成り立つことに注意して f を変形していく。

$$f = \frac{1}{4} + \frac{y^T B y^T}{4 y^T y} = \frac{1}{4} + \frac{z^T C z^T}{4 z^T z} = \frac{1}{4} + \frac{9z_1^2 + 6z_2^2 + 3z_3^2}{4 z^T z} = 1 + \frac{3}{4} \frac{3z_1^2 + 2z_2^2}{z^T z} \quad (4.1)$$

ここで、 $z_1 = r \sin \theta \cos \varphi, z_2 = r \sin \theta \sin \varphi, z_3 = r \cos \theta$ として極座標で表示すると

$$f = 1 + \frac{3}{4} \sin^2 \theta (3 \cos^2 \varphi + 2 \sin^2 \varphi) = 1 + \frac{3}{4} \sin^2 \theta (\cos^2 \varphi + 2) \geq 1 \quad (4.2)$$

となるので最小値は 1

第3問 複素解析

[1]

極は $z = i$ であり、そこでの留数は

$$\operatorname{Res}[f, z = i] = \lim_{z \rightarrow i} (z - i)f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{\log(z + i)}{z + i} = \frac{\ln 2 + i\pi/2}{2i} = \frac{\pi}{4} - i\frac{\ln 2}{2} \quad (1.1)$$

となる。

[2]

留数定理より

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}[f, z = i] = \pi \ln 2 + i\frac{\pi^2}{2} \quad (2.1)$$

[3]

三角不等式を使うと

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_1} \frac{\log(z + i)}{z^2 + i} dz \right| &= \left| \int_{C_1} \frac{\log(z + i)}{z^2 + i} dz \right| \\ &\leq \int_{C_1} \frac{|\log(z + i)|}{|z^2 + i|} |dz| \end{aligned} \quad (3.1)$$

耐えられた不等式と

$$|z^2 + i| = \sqrt{1 + R^4 + 2R^2 \sin 2\theta} > \sqrt{R^4 - 2R^2 + 1} = R^2 - 1 \quad (3.2)$$

を使うと

$$\left| \int_{C_1} \frac{\log(z + i)}{z^2 + i} dz \right| < \int_0^\pi \frac{\ln(R + 1) + 3\pi/2}{R^2 - 1} |dz| = \pi R \frac{\ln(R + 1) + 3\pi/2}{R^2 - 1} \quad (3.3)$$

[4]

$g(z)$ の極は $z = -i$ で留数は

$$\operatorname{Res}[g, z = -i] = \lim_{z \rightarrow -i} (z + i)g(z) = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{\log(z - i)}{z - i} = \frac{\ln 2 - i\pi/2}{-2i} = \frac{\pi}{4} + i\frac{\ln 2}{2} \quad (4.1)$$

これより留数定理を使うと

$$\int_\Gamma g(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}[g, z = -i] = -\pi \ln 2 + i\frac{\pi^2}{2} \quad (4.2)$$

[5]

半径 R の経路を $C_1(R), \Gamma_1(R)$ のように書くことにすると、

$$\begin{aligned}
\int_{C_2+C_1} \frac{\log(z+i)}{z^2+1} dz + \int_{-\Gamma_1-\Gamma_2} \frac{\log(z+i)}{z^2+1} dz &= \int_{-R}^R \frac{\ln(z+i) + \ln(z-i)}{z^2+1} dz + \int_{C_1(R)} \frac{\log(z+i)}{z^2+1} dz - \int_{\Gamma_1(R)} \frac{\log(z-i)}{z^2+1} dz \\
\pi \ln 2 + i \frac{\pi^2}{2} - \left(-\pi \ln 2 + i \frac{\pi^2}{2} \right) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1} dx + \int_{C_1(\infty)} \frac{\log(z+i)}{z^2+1} dz - \int_{\Gamma_1(\infty)} \frac{\log(z-i)}{z^2+1} dz \\
2\pi \ln 2 &= 2 \int_0^{\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1} dx \\
\int_0^{\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1} dx &= \pi \ln 2
\end{aligned} \tag{5.1}$$

[6]

前問で得られた積分の変数を $x = \tan \theta$ に変えると、

$$\begin{aligned}
\pi \ln 2 &= \int_0^{\pi/2} \frac{\ln(\tan^2 \theta + 1)}{\tan^2 \theta + 1} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} \\
&= -2 \int_0^{\pi/2} \ln(\cos \theta) d\theta = -2I \\
I &= -\frac{\pi}{2} \ln 2
\end{aligned} \tag{6.1}$$

第 5 問 ラプラス変換

[1]

[1-1]

$$L[u(t-a)] = \int_0^{\infty} u(t-a)e^{-st} dt = \int_a^{\infty} e^{-st} dt = \frac{e^{-as}}{s} \quad (1.1)$$

[1-2]

$$L[f(t-a)u(t-a)] = \int_a^{\infty} f(t-a)e^{-st} dt = e^{-as} \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = e^{-as} F(s) \quad (1.2)$$

[1-3]

微分は

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x(t)}{dt^2} &\rightarrow s^2 X(s) - sx(0) - \frac{dx(0)}{dt} = s^2 X(s) \\ \frac{dx(t)}{dt} &\rightarrow sX(s) - x(0) = sX(s) \end{aligned} \quad (1.3)$$

というように変換されるので、

$$\begin{aligned} L\left[\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 4\frac{dx(t)}{dt} + 3x(t)\right] &= L[u(t-2) - u(t-5)] \\ s^2 X(s) + 4sX(s) + 3X(s) &= \frac{e^{-2s} - e^{-5s}}{s} \\ X(s) &= \frac{e^{-2s} - e^{-5s}}{s(s+1)(s+3)} \end{aligned} \quad (1.4)$$

これを逆変換する。 γ を $X(s)$ すべての極の実部よりも大きい値として、

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} X(s)e^{st} ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{(t-2)s}}{s(s+1)(s+3)} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{(t-5)s}}{s(s+1)(s+3)} \end{aligned} \quad (1.5)$$

$a = 2, 5$ のいずれかとして、 $(t-a) > 0$ のとき、 $s = -\infty + i0$ を通る半円の経路での積分の値は無視できて、 $(t-a) < 0$ のとき、 $s = +\infty + i0$ を通る半円の経路での積分の値は無視できる。この半円に $(\gamma - \infty, \gamma + \infty)$ を合わせた経路で積分をすると、留数定理より、経路の内側の留数だけを取ってくればよい。前者のときは γ の取り方よりすべて留数を足し合わせたもの、後者は特異点がないので 0 となる (参考: 図)。よって

$$\begin{aligned} x(t) &= u(t-2) \sum_j \text{Res}\left[\frac{e^{(t-2)s}}{s(s+1)(s+3)}, s_j\right] - u(t-5) \sum_j \text{Res}\left[\frac{e^{(t-5)s}}{s(s+1)(s+3)}, s_j\right] \\ &= u(t-2) \left[\frac{1}{3} - \frac{e^{-(t-2)}}{2} + \frac{e^{-3(t-2)}}{6}\right] - u(t-5) \left[\frac{1}{3} - \frac{e^{-(t-5)}}{2} + \frac{e^{-3(t-5)}}{6}\right] \end{aligned} \quad (1.6)$$

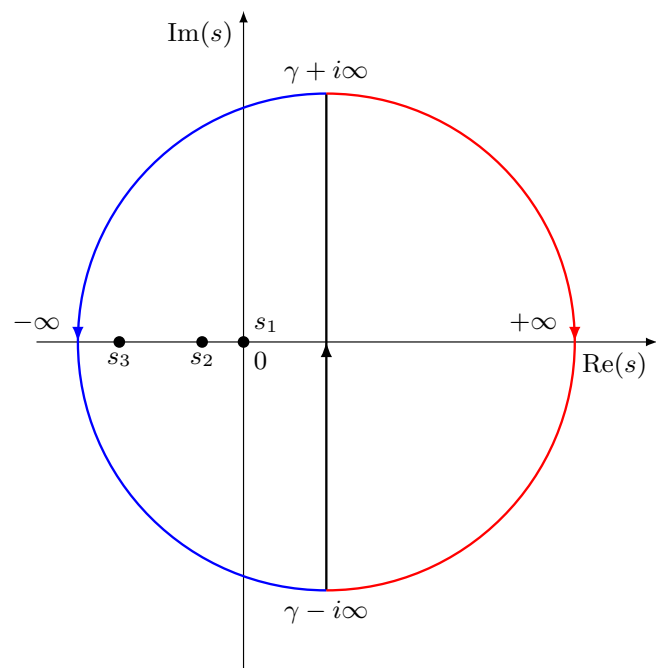


図: 設問 I-3 のラプラス逆変換をする際の積分経路の選択

[2]

$$L[h(t)] = \int_0^{\infty} (-1)^n g(t - nT) e^{-st} dt = (-1)^n \int_{nT}^{(n+1)T} g(t - nT) e^{-st} dt = (-e^{-sT})^n \int_0^T g(t) e^{-st} dt \quad (2.1)$$

よって

$$A(s) = (-e^{sT})^n \quad (2.2)$$