第 1 問　量子力学: 2 準位系・相互作用表示・回転波近似

[1]

$$
\begin{aligned}
H_{aa} &= \langle a| H |b\rangle = \hbar\omega_a \\
H_{ab} &= \langle a| H |b\rangle = -\mu\cos\nu t \\
H_{ba} &= \langle b| H |b\rangle = -\mu\cos\nu t \\
H_{bb} &= \langle b| H |b\rangle = \hbar\omega_b
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

[2]

$\sigma_x = |a\rangle\langle b| + |b\rangle\langle a|$ とおく。シュレディンガー方程式より

$$
\begin{aligned}
i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle &= (H_0 - \sigma_x\mu\cos\nu t)|\psi(t)\rangle \\
i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Big(e^{-iH_0t/\hbar}|\phi(t)\rangle\Big) &= (H_0 - \sigma_x\mu\cos\nu t)e^{-iH_0t/\hbar}|\phi(t)\rangle \\
e^{-iH_0t/\hbar}i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\phi(t)\rangle &= -\sigma_x\mu\cos\nu t e^{-iH_0t/\hbar}|\phi(t)\rangle \\
i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\phi(t)\rangle &= -\mu\cos\nu t e^{iH_0t/\hbar}\sigma_x e^{-iH_0t/\hbar}|\phi(t)\rangle
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

ここで、

$$
e^{-iH_0t/\hbar} = e^{-i\omega_a t}|a\rangle\langle a| + e^{-i\omega_b t}|b\rangle\langle b| = e^{-i\omega_a t}\big(|a\rangle\langle a| + e^{-i\omega t}|b\rangle\langle b|\big)
\tag{2.2}
$$

と表せることを使うと

$$
\begin{aligned}
-\mu\cos\nu t e^{iH_0t/\hbar}\sigma_x e^{-iH_0t/\hbar} &= -\mu\cos\nu t\big(|a\rangle\langle a| + e^{i\omega t}|b\rangle\langle b|\big)\big(|a\rangle\langle b| + |b\rangle\langle a|\big)\big(|a\rangle\langle a| + e^{-i\omega t}|b\rangle\langle b|\big) \\
&= -\frac{\mu}{2}(e^{i\nu t} + e^{-i\nu t})\big(e^{-i\omega t}|a\rangle\langle b| + e^{-i\omega t}|b\rangle\langle a|\big) \\
&= V(t)
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

とわかるので、

$$
i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\phi(t)\rangle = V(t)|\phi(t)\rangle
\tag{2.4}
$$

[3]

$V(t) = -\mu\sigma_x$ なので

$$
-\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt' V(t') = -\frac{i\mu t}{\hbar}\sigma_x
\tag{3.1}
$$

となる。よって

$$
\begin{aligned}
|\phi(t)\rangle &= \exp\left(-\frac{i\mu t}{\hbar}\sigma_x\right)|\phi(0)\rangle \\
&= \left(\cos\frac{\mu t}{\hbar}\sigma_x^2 - i\sin\frac{\mu t}{\hbar}\sigma_x\right)|\phi(0)\rangle \\
&= \cos\frac{\mu t}{\hbar}|a\rangle - i\sin\frac{\mu t}{\hbar}|b\rangle
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

[4]

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iH_0 t/\hbar} |\phi(t)\rangle = e^{-i\omega_a t} \cos\frac{\mu t}{\hbar} |a\rangle - ie^{-i\omega_b t} \sin\frac{\mu t}{\hbar} |b\rangle \tag{4.1}$$

感想

J.J. Sakurai でブラケット表記を始めて勉強したときにはなかなか行列に見えなくて頭を抱えたもんだなぁと懐かしくなった。