

第 1 問 電磁気学: 走査型トンネル顕微鏡 (STM)

[1]

[1-1]

静電ポテンシャルはポアソン方程式

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.1)$$

に従う。 $z \neq 0$ では電荷がないのでその方程式は

$$\nabla^2 \phi(x, y, z) = 0 \quad (1.2)$$

$z = 0$ にあるデルタ関数の電荷分布を扱うのに、 $z = 0$ での境界条件を考える必要がある。 $z = 0$ で静電ポテンシャルが不連続であったとすると、静電ポテンシャルの微分から得られる電場 $E = -\nabla \phi$ の値が発散することから、静電ポテンシャルの値は連続である。

さらに、 $z = 0$ 近傍でのポアソン方程式を微小区間 $-\epsilon \leq z \leq \epsilon$ で積分すると得られる関係より、

$$\begin{aligned} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} dz \nabla^2 \phi(x, y, z) &= -\frac{1}{\epsilon_0} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} dz A \cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{2\pi}{a}y\right) \delta(z) \\ \frac{\partial \phi(x, y, z=+0)}{\partial z} - \frac{\partial \phi(x, y, z=-0)}{\partial z} &= -\frac{A}{\epsilon_0} \cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{2\pi}{a}y\right). \end{aligned} \quad (1.3)$$

これら 2 つが静電ポテンシャルが満たすべき境界条件である。

[1-2]

$z = 0$ 面にたいして対称であり、 $z = 0$ で連続であるので、静電ポテンシャルは

$$\phi(x, y, z) = B \cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{2\pi}{a}y\right) e^{-C|z|} \quad (1.4)$$

とおける。

$z \neq 0$ でのポアソン方程式より

$$\begin{aligned} \left[-2\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 + C^2 \right] B \cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{2\pi}{a}y\right) &= 0 \\ \left[-2\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 + C^2 \right] &= 0 \\ C &= \frac{2\sqrt{2}\pi}{a} \end{aligned} \quad (1.5)$$

(1.3) 式より

$$\begin{aligned} -2BC \cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{2\pi}{a}y\right) &= -\frac{A}{\epsilon_0} \cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{2\pi}{a}y\right) \\ 2BC &= \frac{A}{\epsilon_0} \\ B &= \frac{aA}{4\sqrt{2}\pi\epsilon_0} \end{aligned} \quad (1.6)$$

以上より静電ポテンシャルは

$$\phi(x, y, z) = \frac{aA}{4\sqrt{2}\pi\epsilon_0} \cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{2\pi}{a}y\right) \exp\left(-\frac{2\sqrt{2}\pi}{a}|z|\right) \quad (1.7)$$

これより $z > 0$ にある単位電荷 q_0 の感じる静電気力の z 成分は

$$F_z = -q_0 \nabla \phi(x, y, z) = \frac{q_0 A}{2\epsilon_0} \cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{2\pi}{a}y\right) \exp\left(-\frac{2\sqrt{2}\pi}{a}z\right) \quad (1.8)$$

[2]

[2-1]

設問 [1.2] で求めた力の式より、求める減衰距離 l は

$$l = \frac{a}{2\sqrt{2}\pi} = 0.6 \text{ \AA} \quad (2.1)$$

[2-2]

a だけ離れたときの力は

$$F_z = \frac{A}{2\epsilon_0} \exp(-2\sqrt{2}\pi) \cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{2\pi}{a}y\right) \quad (2.2)$$

であるので力の変動幅 ΔF_z は

$$\begin{aligned} \Delta F_z &= \frac{A}{\epsilon_0} \exp(-2\sqrt{2}\pi) = \frac{16q_0^2}{\epsilon_0 a^2} \exp(-2\sqrt{2}\pi) \\ &= \frac{q_0^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \times 64\pi \exp(-2\sqrt{2}\pi) \simeq 7.3 \times 10^{-10} \text{ N} \times 64\pi \times 10^{-4} \simeq 1 \times 10^{-11} \text{ N} \end{aligned} \quad (2.3)$$

感想

設問 1 は電磁気でやるのはそんなに見ないけど、デルタ関数ポテンシャルのシュレーディンガー方程式でよくやるやつではある。あとは有効数字が 1 桁での数値計算なので気楽にやればよい。