第 3 問　電磁気学: ゼーマン分裂の古典論

[1]

$$
\begin{aligned}
&m\ddot{\boldsymbol{r}} = -k\boldsymbol{r} + q\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{B} \\
&\begin{cases}
m\ddot{x} & = -kx + qB\dot{y} \\
m\ddot{y} & = -ky - qB\dot{x} \\
m\ddot{z} & = -kz
\end{cases}
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

これより、z 成分は単振動することがわかるので固有角振動数は

$$
\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{1.2}
$$

[2]

前問の運動方程式に問で与えられた解の形を代入すると

$$
\begin{aligned}
&\begin{cases}
-m\Omega^2 a\cos\Omega t & = -ka\cos\Omega t + qB\Omega b\cos\Omega t \\
-m\Omega^2 b\sin\Omega t & = -kb\sin\Omega t + qB\Omega a\cos\Omega t
\end{cases} \\
&\begin{pmatrix} \omega_0^2 - \Omega^2 & -\frac{qB}{m}\Omega \\ -\frac{qB}{m}\Omega & \omega_0^2 - \Omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

となる。この連立方程式が非自明な解を持つ条件より

$$
\begin{aligned}
0 &= (\omega_0^2 - \Omega^2)^2 - \left(\frac{qB}{m}\Omega\right) \\
&= \left(\Omega^2 - \frac{qB}{m}\Omega - \omega_0^2\right)\left(\Omega^2 + \frac{qB}{m}\Omega - \omega_0^2\right) \\
\Omega &= \omega_0\sqrt{1 + \left(\frac{qB}{2m\omega_0}\right)^2} \pm \frac{qB}{2m}, \quad -\omega_0\sqrt{1 + \left(\frac{qB}{2m\omega_0}\right)^2} \pm \frac{qB}{2m}
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

このうち振動数が正のものが求める解なので

$$
\Omega = \omega_0\sqrt{1 + \left(\frac{qB}{2m\omega_0}\right)^2} \pm \frac{qB}{2m} \tag{2.3}
$$

[3]

$$
\Omega \simeq \omega_0\left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{qB}{2m}\right)^2\right\} \pm \frac{qB}{2m} = \omega_0 \pm \frac{qB}{2m} + \frac{\omega_0}{2}\left(\frac{qB}{2m\omega_0}\right)^2 \tag{3.1}
$$

[4]

磁場を掛ける前には角振動数 ω_0 で右回りと左回りに荷電粒子が回る状態は縮退していたが、磁場を掛けるとローレンツ力によって加速する回り方と減速する回り方になるため、右周りと左回りで回転速度が変わるため。(束縛された荷電粒子の軌道運動が磁場をかけたことによりゼーマン分裂が生じたから。)

[5]

z 方向は減衰するため、定常解には影響しない。x, y 方向の運動方程式は

$$\begin{cases} m\ddot{x} &= -kx - m\gamma\dot{x} + qB\dot{y} + qE\cos\omega t \\ m\ddot{y} &= -ky - m\gamma\dot{y} - qB\dot{x} \end{cases}$$
$$\begin{cases} \ddot{x} &= -\omega_0^2 x - \gamma\dot{x} + \frac{qB}{m}\dot{y} + \frac{qE}{m}\cos\omega t \\ \ddot{y} &= -\omega_0^2 y - \gamma\dot{y} - \frac{qB}{m}\dot{x} \end{cases}$$
$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x+iy) &= -\omega_0^2(x+iy) - \left(\gamma + i\frac{qB}{m}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x+iy) + \frac{qE}{m}\cos\omega t \\ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x-iy) &= -\omega_0^2(x-iy) - \left(\gamma - i\frac{qB}{m}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x-iy) + \frac{qE}{m}\cos\omega t \end{cases} \tag{5.1}$$

のようにまとめることができる。ここで、$u_\pm = x \pm iy$ のようにおくと運動方程式は

$$\ddot{u}_\pm + \omega_0^2 u_\pm + \left(\gamma \pm i\frac{qB}{m}\right)\dot{u}_\pm = \frac{qE}{m}\cos\omega t \tag{5.2}$$

のようにまとめれる。

これの定常解の形を

$$u_\pm = A_\pm e^{i\omega t} + B_\pm e^{-i\omega t} \tag{5.3}$$

のように置く。すると調べる量は

$$\overline{x(t)^2 + y(t)^2} = \overline{u_+(t)u_-(t)} = \overline{A_+B_- + A_-B_+ + A_+A_-e^{2i\omega t} + B_+B_-e^{-2i\omega t}} = A_+B_- + A_-B_+ \tag{5.4}$$

とわかる。

運動方程式に代入して、$e^{i\omega t}$ と $e^{-i\omega t}$ の係数を見ると

$$\begin{aligned} \left(\omega_0^2 - \omega^2 \mp \omega\frac{qB}{m} + i\omega\gamma\right)A_\pm &= \frac{qE}{2m} \\ \left(\omega_0^2 - \omega^2 \pm \omega\frac{qB}{m} - i\omega\gamma\right)B_\pm &= \frac{qE}{2m} \end{aligned} \tag{5.5}$$

これより

$$\begin{aligned} A_+B_- &= \left(\frac{qE}{2m}\right)^2 \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - \omega\frac{qB}{m} + i\omega\gamma}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - \omega\frac{qB}{m} - i\omega\gamma} \\ &= \left(\frac{qE}{2m}\right)^2 \frac{1}{\left(\omega_0^2 - \omega^2 - \omega\frac{qB}{m}\right)^2 + \omega^2\gamma^2} \\ A_-B_+ &= \left(\frac{qE}{2m}\right)^2 \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + \omega\frac{qB}{m} + i\omega\gamma}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + \omega\frac{qB}{m} - i\omega\gamma} \\ &= \left(\frac{qE}{2m}\right)^2 \frac{1}{\left(\omega_0^2 - \omega^2 + \omega\frac{qB}{m}\right)^2 + \omega^2\gamma^2} \end{aligned} \tag{5.6}$$

よって

$$\overline{x(t)^2 + y(t)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{qE}{2m}\right)^2\left[\frac{1}{\left(\omega_0^2 - \omega^2 - \omega\frac{qB}{m}\right)^2 + \omega^2\gamma^2} + \frac{1}{\left(\omega_0^2 - \omega^2 + \omega\frac{qB}{m}\right)^2 + \omega^2\gamma^2}\right] \tag{5.7}$$

この量は光を入れたときのゼーマン分裂があるときの吸収スペクトルに対応する。

[6]

$\gamma \ll qB/m \ll \omega_0$ の場合

$\gamma \ll qB/m$ というのは、基本 γ を考えなくてもよいが、$(\omega_0^2 - \omega^2 \mp \omega\frac{qB}{m})^2$ が 0 になるようなときには考慮しなければならないことを意味する。

そのような振動数は $\omega=\Omega=\omega_0\mp qB/2m$ であると設問 [2] で求めた。そのとき $\omega_0\gg qB/2m$ より

$$\omega_0^2\mp\omega\frac{qB}{m}-\omega^2\simeq\left(\omega_0\mp\frac{qB}{2m}+\omega\right)\left(\omega_0\mp\frac{qB}{2m}-\omega\right)\simeq 2\left(\omega_0\mp\frac{qB}{2m}\right)\left(\omega_0\mp\frac{qB}{2m}-\omega\right)\simeq 2\omega_0\left(\omega_0\mp\frac{qB}{2m}-\omega\right) \tag{6.1}$$

$$\omega\gamma\simeq\left(\omega_0\mp\frac{qB}{2m}\right)\gamma\simeq\omega_0\gamma \tag{6.2}$$

よって

$$\begin{aligned}\overline{x(t)^2+y(t)^2}&=\frac{1}{2}\left(\frac{qE}{2m}\right)^2\left[\frac{1}{\left(\omega_0^2-\omega^2-\omega\frac{qB}{m}\right)^2+\omega^2\gamma^2}+\frac{1}{\left(\omega_0^2-\omega^2+\omega\frac{qB}{m}\right)^2+\omega^2\gamma^2}\right]\\&\simeq\frac{1}{2}\left(\frac{qE}{2m}\right)^2\left[\frac{1}{4\omega_0^2\left(\omega_0-\frac{qB}{2m}-\omega\right)^2+\omega_0^2\gamma^2}+\frac{1}{4\omega_0^2\left(\omega_0+\frac{qB}{2m}-\omega\right)^2+\omega_0^2\gamma^2}\right]\\&\simeq\frac{1}{2}\left(\frac{qE}{4m\omega_0}\right)^2\left[\frac{1}{\left(\omega_0-\frac{qB}{2m}-\omega\right)^2+\gamma^2/4}+\frac{1}{\left(\omega_0+\frac{qB}{2m}-\omega\right)^2+\gamma^2/4}\right]\end{aligned} \tag{6.3}$$

$qB/m\ll\gamma\ll\omega_0$ の場合

1 つ前の場合では $\gamma\ll qB/2m$ という条件を使ってなかった。今の場合ではこれを考慮すればよく、それには $qB/m\to 0$ とすればよいので、

$$\begin{aligned}\overline{x(t)^2+y(t)^2}&\simeq\frac{1}{2}\left(\frac{qE}{4m\omega_0}\right)^2\left[\frac{1}{\left(\omega_0-\frac{qB}{2m}-\omega\right)^2+\gamma^2/4}+\frac{1}{\left(\omega_0+\frac{qB}{2m}-\omega\right)^2+\gamma^2/4}\right]\\&=\left(\frac{qE}{4m\omega_0}\right)^2\frac{1}{\left(\omega_0-\omega\right)^2+\gamma^2/4}\end{aligned} \tag{6.4}$$

となる。つまり、γ によるぼやけが強すぎてゼーマン分裂が見えず、単一のローレンツピークとなったと解釈できる。(https://www.desmos.com/calculator/qboaxcxtuc)

感想

ゼーマン分裂は量子論でやることが多いけど、古典論でも同じ結果が得られるのは感動しますよね。ただ、後半の計算量が多いように感じた。何か早くやる方法はないのだろうか?