第 1 問　電磁気学: 走査型トンネル顕微鏡 (STM)

[1]

[1-1]

静電ポテンシャルはポアソン方程式

$$\boldsymbol{\nabla}\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{1.1}$$

に従う。$z \neq 0$ では電荷がないのでその方程式は

$$\nabla^2\phi(x,y,z) = 0 \tag{1.2}$$

$z=0$ にあるデルタ関数の電荷分布を扱うのに、$z=0$ での境界条件を考える必要がある。$z=0$ で静電ポテンシャルが不連続であったとすると、静電ポテンシャルの微分から得られる電場 $E=-\boldsymbol{\nabla}\phi$ の値が発散することから、静電ポテンシャルの値は連続である。

さらに、$z=0$ 近傍でのポアソン方程式を微小区間 $-\epsilon \leq z \leq \epsilon$ で積分すると得られる関係より、

$$\begin{aligned}\int_{-\epsilon}^{\epsilon} dz\nabla^2\phi(x,y,z) &= -\frac{1}{\varepsilon_0}\int_{-\epsilon}^{\epsilon} dz\, A\cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{2\pi}{a}y\right)\delta(z) \\ \frac{\partial\phi(x,y,z=+0)}{\partial z} - \frac{\partial\phi(x,y,z=-0)}{\partial z} &= -\frac{A}{\varepsilon_0}\cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{2\pi}{a}y\right).\end{aligned} \tag{1.3}$$

これら 2 つが静電ポテンシャルが満たすべき境界条件である。

[1-2]

$z=0$ 面にたいして対称であり、$z=0$ で連続であるので、静電ポテンシャルは

$$\phi(x,y,z) = B\cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{2\pi}{a}y\right)e^{-C|z|} \tag{1.4}$$

とおける。

$z \neq 0$ でのポアソン方程式より

$$\begin{aligned}\left[-2\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 + C^2\right]B\cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{2\pi}{a}y\right) &= 0 \\ \left[-2\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 + C^2\right] &= 0 \\ C &= \frac{2\sqrt{2}\pi}{a}\end{aligned} \tag{1.5}$$

(1.2) 式より

$$\begin{aligned}-2BC\cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{2\pi}{a}y\right) &= -\frac{A}{\varepsilon_0}\cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{2\pi}{a}y\right) \\ 2BC &= \frac{A}{\varepsilon_0} \\ B &= \frac{aA}{4\sqrt{2}\pi\varepsilon_0}\end{aligned} \tag{1.6}$$

以上より静電ポテンシャルは

$$\phi(x,y,z) = \frac{aA}{4\sqrt{2}\pi\varepsilon_0}\cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{2\pi}{a}y\right)\exp\left(-\frac{2\sqrt{2}\pi}{a}|z|\right) \tag{1.7}$$

これより $z > 0$ にある単位電荷 q_0 の感じる静電気力の z 成分は

$$F_z = -q_0\boldsymbol{\nabla}\phi(x,y,z) = \frac{q_0 A}{2\varepsilon_0}\cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{2\pi}{a}y\right)\exp\left(-\frac{2\sqrt{2}\pi}{a}z\right) \tag{1.8}$$

[2]

[2-1]

設問 [1.2] で求めた力の式より、求める減衰距離 l は

$$l = \frac{a}{2\sqrt{2}\pi} = 0.6\,\text{Å} \tag{2.1}$$

[2-2]

a だけ離れたときの力は

$$F_z = \frac{A}{2\varepsilon_0}\exp\left(-2\sqrt{2}\pi\right)\cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{2\pi}{a}y\right) \tag{2.2}$$

であるので力の変動幅 ΔF_z は

$$\begin{aligned}\Delta F_z &= \frac{A}{\varepsilon_0}\exp\left(-2\sqrt{2}\pi\right) = \frac{16q_0^2}{\varepsilon_0 a^2}\exp\left(-2\sqrt{2}\pi\right)\\ &= \frac{q_0^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\times 64\pi\exp\left(-2\sqrt{2}\pi\right) \simeq 7.3\times10^{-10}\,\mathrm{N}\times 64\pi\times10^{-4} \simeq 1\times10^{-11}\,\mathrm{N}\end{aligned} \tag{2.3}$$

感想

設問 1 は電磁気でやるのはそんなに見ないけど、デルタ関数ポテンシャルのシュレーディンガー方程式でよくやるやつではある。あとは有効数字が 1 桁での数値計算なので気楽にやればよい。