第 1 問　電磁気学: 共振器

[1]

光学長は nL であるので位相変化は

$$\theta = \frac{\omega}{c} nL = \frac{\omega n L}{c} \tag{1.1}$$

[2]

$$\begin{aligned} 2\pi m &= \frac{\omega_m n L}{c} \\ \omega_m &= \frac{2\pi c}{nL} m \end{aligned} \tag{2.1}$$

[3]

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{E_0}{2}\left[\cos\left(\frac{2\pi ct}{nL}(m-1)\right) + 2\cos\left(\frac{2\pi ct}{nL}m\right) + \cos\left(\frac{2\pi ct}{nL}(m+1)\right)\right] \\ &= E_0\left(1 + \cos\frac{2\pi ct}{nL}\right)\cos\frac{2\pi ct}{nL}m \\ &= 2E_0 \cos^2\frac{\pi ct}{nL}\cos\frac{2\pi ct}{nL}m \end{aligned} \tag{3.1}$$

いま $n = 1$ の時を考えているので、包絡線は

$$A(t) = 2E_0 \cos^2 \frac{\pi ct}{L} \tag{3.2}$$

で極大となる時間間隔は L/c である。

[4]

屈折率は角振動数と波数を用いて

$$n = \frac{ck}{\omega} = \frac{c}{\omega}\left(k_0 + \frac{\omega}{v_g}\right) = \frac{ck_0}{\omega} + \frac{c}{v_g} \tag{4.1}$$

と表せる。

[5]

波数が変わったので、これをもとに [1] と [2] で行ったのと同様のことをすると

$$\begin{aligned} 2\pi m &= kL = k_0 L + \frac{\omega L}{v_g} \\ \omega &= -v_g k_0 + \frac{2\pi v_g}{L} m \end{aligned} \tag{5.1}$$

[6]

設問 [3] と同様にやって

$$
\begin{aligned}
E(t) &= \frac{E_0}{2}\left(\cos\left[\left(-v_g k_0 t + \frac{2\pi v_g t}{L}\right) - \frac{2\pi v_g t}{L}\right] + \cos\left[-v_g k_0 t + \frac{2\pi v_g t}{L}\right] + \cos\left[\left(-v_g k_0 t + \frac{2\pi v_g t}{L}\right) + \frac{2\pi v_g t}{L}\right]\right) \\
&= E_0\left(1 + \cos\frac{2\pi v_g}{L}t\right)\cos\left[-v_g k_0 t + \frac{2\pi v_g t}{L}\right] \\
&= 2E_0 \cos^2\frac{\pi v_g t}{L}\cos\left[-v_g k_0 t + \frac{2\pi v_g t}{L}\right] \qquad (6.1)
\end{aligned}
$$

これより包絡線の隣り合う極大間の時間間隔は L/v_g

[7]

i 番目の極大時刻は $t = iL/v_g$ であるので、$\Delta\phi$ は

$$
\Delta\phi = \left|\left(-v_g k_0 + \frac{2\pi v_g}{L}m\right)\frac{L}{v_g}\right| = k_0 L = \left|\frac{\omega_0}{\omega_{rep}}\right| \qquad (7.1)
$$

分散がないときには $k = \omega/c$ より、分散があるときの式を $k_0 = 0, v_g = c$ にすることで得られる。$\Delta\phi$ は k_0 によって生じているのがわかるので、これより光に分散関係がある、つまり群速度と位相測度が違うことによって $\Delta\phi$ が生じているのがわかる。

感想

設問 3 で隣接する共振モード 3 本を外部に取り出すとあるが、実際どうやって 1 : 2 : 1 の振幅になるように取り出しているのだろうか?