

問題 1 量子力学: 波数表示・原子核?

1-1

まず $\langle p|\psi\rangle$ は完全系を入れることで

$$\langle p|\psi\rangle = \int d^3x \langle p|x\rangle \langle x|\psi\rangle \quad (1-1.1)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3x e^{-ip\cdot x} \langle x|\psi\rangle \quad (1-1.2)$$

と示せる。同様に $\langle p|\hat{O}|p'\rangle$ は完全系を 2 つ入れることで

$$\langle p|\hat{O}|p'\rangle = \int \int d^3x d^3x' \langle p|x\rangle \langle x|\hat{O}|x'\rangle \langle x'|\psi\rangle \quad (1-1.3)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int d^3x d^3x' e^{-ip\cdot x + ip'\cdot x'} \langle x|\hat{O}|x'\rangle \quad (1-1.4)$$

と示せる。

1-2

前問のように $\langle p|\hat{V}|p'\rangle$ に完全系を挿入して

$$\langle p|\hat{V}|p'\rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int d^3x d^3x' e^{-ip\cdot x + ip'\cdot x'} \left(-\frac{\lambda}{2m} g(x)g(x') \right) \quad (1-2.1)$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\lambda}{2m} \int d^3x e^{-ip\cdot x} g(x) \int d^3x' e^{ip'\cdot x'} g(x') \quad (1-2.2)$$

$h(p)$ を

$$h(p) := \int d^3x e^{-ip\cdot x} g(x) \quad (1-2.3)$$

とおくと、

$$\langle p|\hat{V}|p'\rangle = -\frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\lambda}{2m} h(p)h(-p') \quad (1-2.4)$$

となり示せた。

1-3

前問の結果と $E = -\nu^2/2m$ を運動量表示のシュレーディンガー方程式に入れて

$$\frac{p^2}{2m} - \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\lambda}{2m} h(p) \int d^3p' h(-p') \langle p'|\psi\rangle = -\frac{\nu^2}{2m} \langle p|\psi\rangle \quad (1-3.1)$$

ここで次の量を文字 C でおく。

$$C = \frac{\lambda}{(2\pi)^3} \int d^3p' h(-p') \langle p'|\psi\rangle \quad (1-3.2)$$

これは定数となっている。これをシュレーディンガー方程式に戻して整理すると

$$\langle p|\psi\rangle = C \frac{h(p)}{p^2 + \nu^2} \quad (1-3.3)$$

となる。

1-4

$$h(p) = \int d^3x e^{-ip \cdot x} \frac{e^{-\mu|x|}}{4\pi|x|} \quad (1-4.1)$$

$$= \int_0^\infty dr r^2 \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} \varphi e^{-ipr \cos\theta} \frac{e^{-\mu r}}{4\pi r} \quad (1-4.2)$$

$$= \frac{1}{2ip} \int_0^\infty dr e^{-\mu r} (e^{ipr} - e^{-ipr}) \quad (1-4.3)$$

$$= \frac{1}{p^2 + \mu^2} \quad (1-4.4)$$

1-5

(1-3.2) 式の右辺に $h(p)$ の表式と (1-3.3) 式を代入して

$$C = \frac{\lambda}{(2\pi)^3} \int d^3p' \frac{C}{(p^2 + \nu^2)(p^2 + \mu^2)^2} \quad (1-5.1)$$

$$1 = \frac{\lambda}{8\pi|\mu|(|\mu| + |\nu|)^2} \quad (1-5.2)$$

$$|\nu| = \sqrt{\frac{\lambda}{8\pi|\mu|}} - |\mu| \quad (1-5.3)$$

このような ν が矛盾なくあるには

$$\sqrt{\frac{\lambda}{8\pi|\mu|}} - |\mu| \geq 0 \quad (1-5.4)$$

$$\lambda \geq 8\pi\mu^3 \quad (1-5.5)$$

となる必要がある。束縛状態でエネルギーは負の値になってほしいので、等号は入れない。

1-6

束縛状態の波動関数をフーリエ逆変換して求めてみる。

$$\langle x|\psi\rangle \propto \int d^3p e^{ip \cdot x} \langle p|\psi\rangle \quad (1-6.1)$$

$$= \int d^3p \frac{e^{ip \cdot x}}{(p^2 + \nu^2)(p^2 + \mu^2)} \quad (1-6.2)$$

$$= \frac{4\pi}{|x|} \int_0^\infty dp \frac{p \sin(px)}{(p^2 + \nu^2)(p^2 + \mu^2)} \quad (1-6.3)$$

$$= \frac{4\pi}{|x|} \int_0^\infty dp \frac{1}{\mu^2 - \nu^2} \left(\frac{p \sin(px)}{p^2 + \nu^2} - \frac{p \sin(px)}{p^2 + \mu^2} \right) \quad (1-6.4)$$

$$= \frac{2\pi^2}{\mu^2 - \nu^2} \frac{e^{-\nu|x|} - e^{-\mu|x|}}{|x|} \quad (1-6.5)$$

ここで

$$\int_0^\infty dx \frac{p \sin(px)}{p^2 + a^2} = \frac{\pi}{2} e^{-ax} \quad (1-6.6)$$

を用いた。

感想

なんか元ネタありそうだけど、わかりそうでわからない。原子核 (重水素?) っぽい。最後のところの積分はなかなか怖いけど、グリーン関数を知っていると波動関数の図は運動量表示の波動関数からなんとなくわかる。 $1/(p^2 + m^2)$ は質量 m もしくは相関長が $1/m$ の状態を表していて、クーロンポテンシャルや湯川ポテンシャルになるとわかる。

問題2 統計力学: フラストレーション系

スピン系と言っているが、しばらくそのスピンの大きさは $S = 1/2$ ではなく一般の大きさであることに注意。そうでないとブリュアン関数は全く出てこない。

2-1

この場合はスピン同士の相互作用がないので各スピンの分配関数 z を考えていけばよい。それは

$$z = \sum_{\sigma=-S}^S \exp(\beta\mu H_z \sigma) \quad (2-1.1)$$

$$= \exp(-\beta\mu H_z S) \frac{1 - \exp[(2S+1)\beta\mu H_z]}{1 - \exp[\beta\mu H_z]} \quad (2-1.2)$$

$$= \exp[-\beta\mu H_z S] \exp\left[+\frac{2S+1}{2}\beta\mu H_z\right] \exp\left[-\frac{1}{2}\beta\mu H_z\right] \frac{\exp\left[-\frac{2S+1}{2}\beta\mu H_z\right] - \exp\left[\frac{2S+1}{2}\beta\mu H_z\right]}{\exp\left[-\frac{1}{2}\beta\mu H_z\right] - \exp\left[\frac{1}{2}\beta\mu H_z\right]} \quad (2-1.3)$$

$$= \frac{\sinh\left(\frac{2S+1}{2S}\beta\mu H_z S\right)}{\sinh\left(\frac{1}{2S}\beta\mu H_z S\right)} \quad (2-1.4)$$

である。これが3つあるので系全体の分配関数は

$$Z = z^3 = \left(\frac{\sinh\left(\frac{2S+1}{2S}\beta\mu H_z S\right)}{\sinh\left(\frac{1}{2S}\beta\mu H_z S\right)} \right)^3 \quad (2-1.5)$$

2-2

系の自由エネルギーは

$$F = -k_B T \ln Z \quad (2-2.1)$$

$$= -3k_B T \left[\ln\left(\sinh\left(\frac{2S+1}{2S}\beta\mu H_z S\right)\right) - \ln\left(\sinh\left(\frac{1}{2S}\beta\mu H_z S\right)\right) \right] \quad (2-2.2)$$

$dF = -SdT - M_z dH_z$ より

$$M_z = -\frac{\partial F}{\partial H_z} = 3\mu S B_S(\beta\mu H_z S) \quad (2-2.3)$$

また、帯磁率は

$$\chi = \lim_{H_z \rightarrow 0} \frac{M_z}{H_z} = \beta S(S+1)\mu^2 \quad (2-2.4)$$

となる。

2-3

この系のエントロピーは

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} \quad (2-3.1)$$

$$= 3k_B \left[\ln\left(\sinh\left(\frac{2S+1}{2S}\beta\mu H_z S\right)\right) - \ln\left(\sinh\left(\frac{1}{2S}\beta\mu H_z S\right)\right) - \beta\mu H_z S B_s(\beta\mu H_z S) \right] \quad (2-3.2)$$

これより比熱は

$$C_v = T \frac{\partial S}{\partial T} = 3k_B(\beta\mu H_z S)^2 B'_S(\beta\mu H_z S) \quad (2-3.3)$$

$$\rightarrow k_B \beta^2 S(S+1) \mu^2 H_z^2 \quad (\beta \rightarrow 0) \quad (2-3.4)$$

別解

$E = -\mu H_z \langle M_z \rangle$ より

$$E = -\mu H_z \times 3\mu S B_s(\beta\mu H_z S) \quad (2-3.5)$$

$$C_v = \frac{dE}{dT} = -k_B \beta^2 \frac{dE}{d\beta} \quad (2-3.6)$$

$$= 3k_B(\beta\mu H_z S)^2 B'_S(\beta\mu H_z S) \quad (2-3.7)$$

2-4

磁場が無いので3番目のスピンはエネルギーには関わって来ない。また、エネルギー固有値は1番目と2番目のスピンの揃っているかどうかなので、エネルギー準位は

$$E(S_1 = \pm 1/2, S_2 = \pm 1/2) = -\frac{J}{4} \quad (2-4.1)$$

$$E(S_1 = \pm 1/2, S_2 = \mp 1/2) = \frac{J}{4} \quad (2-4.2)$$

$$(2-4.3)$$

となる(複号同順)。3番目のスピンの状態も考慮して、縮重度はそれぞれ4つつつ。これらを踏まえるとの $H \neq 0$ の分配関数は

$$Z = \left[\exp\left(\frac{\beta J}{4}\right) (\exp(\beta\mu H_z) + \exp(-\beta\mu H_z)) + 2 \exp\left(-\frac{\beta J}{4}\right) \right] \left[\exp\left(\frac{\beta\mu H_z}{2}\right) + \exp\left(-\frac{\beta\mu H_z}{2}\right) \right] \quad (2-4.4)$$

$$= 4 \left[\exp\left(\frac{\beta J}{4}\right) \cosh(\beta\mu H_z) + \exp\left(-\frac{\beta J}{4}\right) \right] \cosh\left(\frac{\beta\mu H_z}{2}\right) \quad (2-4.5)$$

となる。これでもよいが、ブリュアン関数が見えやすいよう \sinh の形を作っていく。

$$\cosh x = \frac{\sinh 2x}{2 \sinh x} \quad (2-4.6)$$

というのを使うと

$$Z = \left[\exp\left(\frac{\beta J}{4}\right) \frac{\sinh(2\beta\mu H_z)}{\sinh(\beta\mu H_z)} + 2 \exp\left(-\frac{\beta J}{4}\right) \right] \frac{\sinh(\beta\mu H_z)}{\sinh(\beta\mu H_z/2)} \quad (2-4.7)$$

$$= \exp\left(\frac{\beta J}{4}\right) \frac{\sinh(2\beta\mu H_z)}{\sinh(\beta\mu H_z/2)} + 2 \exp\left(-\frac{\beta J}{4}\right) \frac{\sinh(\beta\mu H_z)}{\sinh(\beta\mu H_z/2)} \quad (2-4.8)$$

となる。

2-5

低温 ($\beta \rightarrow \infty$) の極限のもと、 $J \geq 0$ のとき $\exp(-\beta J/4)$ の項が消え、 $J \leq 0$ のときには $\exp(\beta J/4)$ の項が消える。熱力学の極限をとる順番とかはよくわかんないけど、分配関数の時点で先に極限を取ってしまう。 $J \geq 0$ のとき、

$$F = -k_B T \left[\frac{\beta J}{4} + \ln \sinh(2\beta\mu H_z) - \ln \sinh(\beta\mu H_z/2) \right] \quad (2-5.1)$$

$$M_z = \frac{3\mu}{2} B_{3/2}\left(\frac{3}{2}\beta\mu H_z\right) \quad (2-5.2)$$

絶対零度では $J \geq 0$ よりスピン 1, スピン 2 同士は揃っていてなおかつ磁場の方向に揃うように動くので、磁化は $3/2$ になることから予想される。 $J \leq 0$ のとき、

$$F = -k_B T \left[-\frac{\beta J}{4} + \ln \sinh(\beta \mu H_z) - \ln \sinh(\beta \mu H_z/2) \right] \quad (2-5.3)$$

$$M_z = \frac{1}{2} \mu B_{1/2}(\beta \mu H_z/2) \quad (2-5.4)$$

絶対零度では $J \geq 0$ よりスピン 1, スピン 2 同士は反平行で、次に磁場の方向に揃うように動くので、磁化は $1/2$ になることから予想される。

2-6

スピンの配列の仕方は 8 通りで、それらのエネルギーは

$$E(S = \{\pm \pm \pm\}) = -3J \quad (2-6.1)$$

となる 2 通り、

$$E(S = \{\pm \pm \mp\}) = E(S = \{\pm \mp \pm\}) = E(S = \{\mp \mp \pm\}) = J \quad (2-6.2)$$

となる 6 通りある (複号同順)。

そして低温極限における磁化の大きさは問題 5 での解釈を考えると、 $J \geq 0$ のとき、

$$M_z = \frac{3\mu}{2} B_{3/2} \left(\frac{3}{2} \beta \mu H_z \right) \quad (2-6.3)$$

$J \leq 0$ のとき、

$$M_z = \frac{1}{2} \mu B_{1/2}(\beta \mu H_z/2) \quad (2-6.4)$$

感想

ブリュアン関数を用いて表せでずっとやるのは初めて見た。やったことあるとききれいな形になるということを知っている
ので点を取りやすいが、初めてだとなかなか怖い問題。おそらく問題 5, 問題 6 は定性的な議論で十分なのだろう。

問題 3 電磁気学: サイクロトロン

3-1

粒子の進行方向と直交する方向に常に力が加えられていて、それは仕事にならないから。

3-2

向心力が qv_0B の等速円運動なのでその半径 r は

$$\frac{mv_0^2}{r} = qv_0B \quad (3-2.1)$$

$$r = \frac{mv_0}{qB} \quad (3-2.2)$$

またそのときの円運動の中心座標は $(a+r, 0, 0)$ でこれが原点であるために

$$a = -\frac{mv_0}{qB} \quad (3-2.3)$$

という関係になる。時計回りに動くので

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \cos \frac{qBt}{m} \\ -\sin \frac{qBt}{m} \end{pmatrix} \quad (3-2.4)$$

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = v_0 \begin{pmatrix} \sin \frac{qBt}{m} \\ \cos \frac{qBt}{m} \end{pmatrix} \quad (3-2.5)$$

3-3

運動方程式を立てると

$$\begin{cases} m \frac{dv_x}{dt} = qBv_y + qE \\ m \frac{dv_y}{dt} = -qBv_x \\ m \frac{dv_z}{dt} = 0 \end{cases} \quad (3-3.1)$$

まず z 成分はこれより $v_z = 0, z = 0$ である。そして運動方程式の y 成分を i 倍して x 成分に足すと

$$m \frac{d}{dt}(v_x + iv_y) = -iqB(v_x + iv_y) + qE \quad (3-3.2)$$

$$v_x + iv_y = i \left(v_0 + \frac{E}{B} \right) e^{-iqBt/m} - i \frac{E}{B} \quad (3-3.3)$$

これより

$$v_x = \left(v_0 + \frac{E}{B} \right) \sin \left(\frac{qB}{m} t \right) \quad (3-3.4)$$

$$v_y = \left(v_0 + \frac{E}{B} \right) \cos \left(\frac{qB}{m} t \right) - \frac{E}{B} \quad (3-3.5)$$

これを積分して

$$x = \left(a - \frac{mE}{qB^2} \right) \cos \left(\frac{qB}{m} t \right) + \frac{mE}{qB^2} \quad (3-3.6)$$

$$y = - \left(a - \frac{mE}{qB^2} \right) \sin \left(\frac{qB}{m} t \right) - \frac{E}{B} t \quad (3-3.7)$$

円運動の半径が電場の無いときより小さくなり、中心が $(mE/qB^2, -Et/B)$ のように動く螺旋運動。

3-4

磁場の非一様性のないときの運動

$$x = a \cos \frac{qBt}{m}, \quad v_x = v_0 \sin \frac{qBt}{m}, \quad v_y = v_0 \cos \frac{qBt}{m} \quad (3-4.1)$$

を $f(x, v)$ に入れて

$$f(x, v) = qv_0 a B'(0) \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{qBt}{m} \\ -\sin \frac{qBt}{m} \cos \frac{qBt}{m} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3-4.2)$$

$\langle \cos^2 \omega t \rangle = 1/2$, $\langle \sin \omega t \cos \omega t \rangle = 0$ より、 $\langle f(x, v) \rangle$ は x 成分のみで

$$\langle f(x, v) \rangle = \frac{1}{2} qv_0 a B'(0) \quad (3-4.3)$$

3-5

問題 3 で考えた y 軸方向に電場を掛けたのと同じ影響が現れる。

磁場の非一様性を打ち消すにはそれに応じて y 方向に電場をかければよいのがわかる。

感想

問題 4 で中心座標が変わっていくので、 $f(x, v)$ が摂動に過ぎないので影響は限定的という仮定に反するのでどうしたものかという感じ。それ以外は雑に微分方程式を解かなければ大丈夫 (私は雑に解いてボロボロだった)。

問題 4 原子核散乱

4-1

^{14}N と ^{27}Al が接触したとき、それぞれの重心からの距離は

$$1.2 \times 14^{1/3}\text{fm} + 1.2 \times 27^{1/3}\text{fm} \simeq 1.2 \times 5.41\text{fm} \quad (4-1.1)$$

この距離のクーロンポテンシャルが求めるエネルギーである。それは

$$\frac{7e \times 13e}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{91\alpha\hbar c}{r} = \frac{91 \times 1.44\text{MeVfm}}{1.2 \times 5.41\text{fm}} \simeq 20\text{MeV} \quad (4-1.2)$$

である。

4-2

原子核同士の話であるので古典的なエネルギー保存則で十分である。 ^{14}N の運動エネルギーを K , Ca の質量を M としたとき、

$$K = \frac{1}{2}M(\beta c)^2 \quad (4-2.1)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{2K}{Mc^2}} = \sqrt{\frac{2 \times 70\text{MeV}}{41 \times 10^3\text{MeV}}} = \frac{1}{10} \sqrt{\frac{14}{41}} \quad (4-2.2)$$

$$\simeq \frac{1}{10\sqrt{3}} \simeq 0.058 \quad (4-2.3)$$

4-3

図 1 の右方向を z 軸、下方向を x 方向として、実験室系でのガンマ線の 4 元運動量を $(E'/c, p'_x, 0, p'_z)$, $^{33}\text{S}^*$ が静止する慣性系でのガンマ線を $1.0\text{MeV}/c, p_x, 0, p_z$ とおく。ローレンツ変換の式より、

$$E'/c = \gamma(1\text{MeV}/c - \beta p_z) \quad (4-3.1)$$

$$p'_z = \gamma(-\beta \times 1\text{MeV}/c + \beta p_z) \quad (4-3.2)$$

これらから p_z を消去して

$$E'/c + \beta p'_z = \sqrt{1 - \beta^2} \times 1\text{MeV}/c \quad (4-3.3)$$

となる (逆変換を考えた方がシンプル)。このときの検出器の角度より

$$p'_x = \sqrt{3}p'_z \quad (4-3.4)$$

であり、光子の分散関係より

$$E'^2/c^2 = p_x'^2 + p_z'^2 = 4p_z'^2 \quad (4-3.5)$$

$$E'/c = 2p'_z \quad (4-3.6)$$

となる (ベクトルの大きさ考えてもよい)。これより

$$E = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \beta/2} \text{MeV} \quad (4-3.7)$$

$$\simeq \left(1 - \frac{\beta^2}{2}\right) \left(1 - \frac{\beta}{2}\right) \simeq 0.97\text{MeV} \quad (4-3.8)$$

となる。

4-4

$$N = N_0 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{\tau n}\right)^n = N_0 \exp(-t/\tau) \quad (4-4.1)$$

4-5

スペクトルの 2 つのピークの大きさが同じであることは、ストッパーで止まった後にガンマ線を出した $^{33}\text{S}^*$ の数と、止まる前にガンマ線を出した $^{33}\text{S}^*$ の数が同じであることを表している。これより $^{33}\text{S}^*$ がターゲットからストッパーに到達するまでの時間が半減期であるとわかる。 $^{33}\text{S}^*$ の速度は $\beta c = 1.7 \times 10^7 \text{m/s}$ であり、この速度で $12\mu\text{m}$ を通過するのでその時間は

$$t_0 = 0.68 \text{ps} \quad (4-5.1)$$

感想

問題 3 とか公式がありそうだけど、原子核の実験なんてやったことないから地道に連立方程式を解いていくしかないんだなあ。それ以外は電卓をくださいという感じ。

問題 5 光電効果

問題 6 Balmer 線の測定

6-1

水素原子のエネルギー準位は

$$E_n = -13.6 \times \frac{1}{n^2} \text{ eV} \quad (6-1.1)$$

これより H_α 線のエネルギーは

$$E_3 - E_2 = -\frac{13.6}{9} \text{ eV} + \frac{13.6}{4} \text{ eV} = 1.9 \text{ eV} \quad (6-1.2)$$

この時の波長は

$$E(\text{eV}) = \frac{1240 \text{ nm eV}}{\lambda(\text{nm})} \quad (6-1.3)$$

より

$$\lambda = 656 \text{ nm} \quad (6-1.4)$$

の橙色

6-2

1 μA の電流を流すには電子正孔対が 1 秒間あたり 5×10^{-7} 個生成する必要がある。光子 1 つにつき 80% の確率で電子正孔対ができるので、必要な光子の数は

$$5 \times 10^{-7} / 80\% = 6.25 \times 10^{-7} \quad (6-2.1)$$

個の光子が 1 秒あたりに必要。

6-3

(1)

pn 接合の界面はキャリアの空乏そうになっていて、n から p への電場がかかっている。この界面で電子正孔対が生成され、そのとき n 側に電子が、p 側に正孔が流れていくので流れる電流は正

(2)

また、IV 特性は $V > 0$ の時には光の強さに応じた定数分だけ倍されたような格好になる。 $V < 0$ のときはよくわからない。

(3)

光の強さを直接測定するには微弱な電流でも電圧が読み取れるように、 R_L は十分大きくしたい。

6-4

オペアンプのゲインの式より

$$G(0 - V_2) = V_0 \quad (6-4.1)$$

Z_f による電圧変化は

$$V_2 - V_0 = I_f Z_f = I_i Z_f \quad (6-4.2)$$

これらより

$$V_0 = -\frac{1}{1 + 1/G} I_i Z_f \quad (6-4.3)$$

$$\rightarrow -I_i Z_f \quad (G \rightarrow \infty) \quad (6-4.4)$$

6-5

Z_f は抵抗とコンデンサを並列接続したものなので

$$\frac{1}{Z_f} = \frac{1}{R_f} + i\omega C_f \quad (6-5.1)$$

$$Z_f = \frac{R_f}{1 + (\omega C_f R_f)^2} - i \frac{\omega C_f R_f^2}{1 + (\omega C_f R_f)^2} \quad (6-5.2)$$

$I_i = 1\text{ }\mu\text{A}$ の直流電流を $V_0 = 100\text{ mV}$ にするので

$$R_f = 100\text{ k}\Omega \quad (6-5.3)$$

またカットオフ周波数は

$$f = \frac{1}{2\pi C_f R_f} \quad (6-5.4)$$

であり、 $f = 100\text{ kHz}$ で設計するので

$$C_f = 630\text{ pF} \quad (6-5.5)$$

感想

問題 2 の桁があってるのかわからない……