

# 2023 年度東大理物答案

しゃんごん (@CEY3944)

2025 年 7 月 26 日

# 物理学

## 問題 4 物理数学

4-1

(a)

$$\hat{g}_\alpha(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{x^2 + \alpha^2} dx = \int_{\infty}^{-\infty} e^{i\omega(-x)} \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{(-x)^2 + \alpha^2} (-dx) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{x^2 + \alpha^2} dx = \hat{g}_\alpha(\omega) \quad (4-1.1)$$

より  $\hat{g}_\alpha(\omega)$  は偶関数

(b)

$$e^{-i\omega z} g_\alpha(z) = \frac{e^{-i\omega z} \alpha}{\pi(z - i\alpha)(z + i\alpha)} \quad (4-1.2)$$

より極は  $z = \pm i\alpha$

(c)

$$\hat{g}_\alpha(\omega) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{-i\omega z} g_\alpha(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}[e^{-i\omega z} g_\alpha(z); z = i\alpha] = 2\pi i \frac{\alpha e^{-i\omega(i\alpha)}}{2\pi i \alpha} = e^{\omega \alpha} \quad (4-1.3)$$

(d)

$$\begin{aligned} (\widehat{g_i * f})(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dx g_1(x - y) f(y) e^{-i\omega x} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dy f(y) e^{-i\omega y} \int_{-\infty}^{\infty} d(x - y) g_1(x - y) f e^{-i\omega(x - y)} = \hat{g}_1(\omega) \hat{f}(\omega) \end{aligned} \quad (4-1.4)$$

(e)

(3) 式をフーリエ変換して整理した後、逆変換をする。

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} [\hat{g}_1(\omega) \hat{f}(\omega) + \hat{g}_\alpha(\omega) - \hat{g}_2(\omega)] \\ \hat{f}(\omega) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\hat{g}_\alpha(\omega) - \hat{g}_2(\omega)}{1 - \hat{g}_1(\omega)} = \frac{1 - e^{2\omega}}{1 - e^\omega} = 1 + e^\omega \end{aligned} \quad (4-1.5)$$

これの右辺は

$$f(x) = \delta(x) + g_1(x) \quad (4-1.6)$$

をフーリエ変換したものとわかるので、これが答えである。

4-2

(a)

$$\operatorname{tr} A(z) = z + z^{-1}, \quad \det A(z) = -(z + z^{-1}) \quad (4-2.1)$$

余因子行列を用いて逆行列を求めると

$$A(z)^{-1} = -\frac{1}{z+z^{-1}} \begin{pmatrix} -1 & -z^{-1} & 1 \\ -z^{-1} & 1 & -z \\ 1 & -z & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{z+z^{-1}} \begin{pmatrix} 1 & z^{-1} & -1 \\ z^{-1} & -1 & z \\ -1 & z & 1 \end{pmatrix} \quad (4-2.2)$$

(c)

固有値方程式より

$$\begin{aligned} 0 &= |A(z) - \lambda I| = \lambda^3 - (z+z^{-1})\lambda^2 - \lambda + (z+z^{-1}) = (\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-(z+z^{-1})) \\ \lambda &= \pm 1, \quad z+z^{-1} \end{aligned} \quad (4-2.3)$$

また、 $\lambda$  が実数となる条件を調べる。 $z = re^{i\theta}$  とおくと

$$z+z^{-1} = \left(r + \frac{1}{r}\right) \cos \theta + i \left(r - \frac{1}{r}\right) \sin \theta \quad (4-2.4)$$

これより、 $r=1$ , or  $\theta=0$

(d)

重複するのは

$$\begin{aligned} z+z^{-1} &= 1 \\ \left(r + \frac{1}{r}\right) \cos \theta + i \left(r - \frac{1}{r}\right) \sin \theta &= 1 \end{aligned} \quad (4-2.5)$$

のときである。なので、 $r=1, \theta = \frac{\pi}{3}$  のとき、固有値  $\lambda=1$  で重複する。

このときの固有空間の次元は

$$A(e^{i\pi/3}) - I = \begin{pmatrix} e^{i\pi/3} - 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & e^{-i\pi/3} - 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} e^{i2\pi/3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & e^{-2i\pi/3} \end{pmatrix} \quad (4-2.6)$$

より固有空間の次元は 1 である。重複しているのにもかかわらず、固有空間の次元が 1 であるため、対角化することはできない。

$B$  をスペクトル分解すると

$$B = \lambda_1 v_1 v_1^T + \lambda_2 v_2 v_2^T + \lambda_3 v_3 v_3^T \quad (4-2.7)$$

である。なので、この 2 次形式を調べると

$$x^T B x = \lambda_1 |x^T v_1|^2 + \lambda_2 |x^T v_2|^2 + \lambda_3 |x^T v_3|^2 \quad (4-2.8)$$

となる。この式を考えると、仮に、 $B$  が負の固有値を持つことがあれば任意の  $x$  に対して  $x^T B x \geq 0$  は成り立たない。

$A(1)$  の固有値は  $\lambda = -1, 1, 2$  であり、これらの固有ベクトルを  $u_1, u_2, u_3$  とすると、(5) 式の右辺は

$$\begin{aligned} B &= -1u_1 u_1^T + 1u_2 u_2^T + 2u_3 u_3^T + 1u_1 u_1^T + 1u_2 u_2^T + 1u_3 u_3^T + vv^T \\ &= 2u_2 u_2^T + 3u_3 u_3^T + vv^T \end{aligned} \quad (4-2.9)$$

これより、

$$x^T B x = 2|x^T u_2|^2 + 3|x^T u_3|^2 + |x^T v|^2 \geq 0 \quad (4-2.10)$$

となるため、任意の  $x$  に対して  $x^T B x \geq 0$  は成り立つことから  $B$  の固有値は 0 以上とわかる。

**感想**