

問題 1 量子力学: コヒーレント状態

1-1

$$\text{ア: } \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \hat{x} - \frac{i}{\sqrt{m\hbar\omega}} \hat{p} \right) \quad (1-1.1)$$

$$\text{イ: } [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \quad (1-1.2)$$

$$\text{ウ: } \hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \frac{\hat{a} + \hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}} \quad (1-1.3)$$

$$\text{エ: } \hat{p} = -i\sqrt{m\hbar\omega} \frac{\hat{a} - \hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}} \quad (1-1.4)$$

$$\text{オ: } \mathcal{H} = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \quad (1-1.5)$$

$$\text{カ: } E_0 = \frac{1}{2} \hbar\omega \quad (1-1.6)$$

$$\text{キ: } |\phi_{n+1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \hat{a}^\dagger \hat{a} |\phi_n\rangle \quad (1-1.7)$$

$$\text{ク: } E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (1-1.8)$$

1-2

シュレディンガー方程式より

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle &= \mathcal{H} |\psi(t)\rangle \\ \sum_{n=0}^{\infty} i\hbar \frac{d}{dt} c_n(t) |\phi_n\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) c_n(t) |\phi_n\rangle \\ \sum_{n=0}^{\infty} \left[i\hbar \frac{dc_n(t)}{dt} - \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) c_n(t) \right] |\phi_n\rangle &= 0 \end{aligned}$$

これより $c_n(t)$ の時間発展の微分方程式が得られ、これを解くと

$$c_n(t) = c_n(0) \exp \left[-i \left(n + \frac{1}{2} \right) \omega t \right]$$

となる。

1-3

位置の期待値は

$$\begin{aligned} \langle \phi_n | \hat{x} | \phi_n \rangle &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \langle \phi_n | (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) | \phi_n \rangle \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \sqrt{n+1} \left[\langle \phi_{n+1} | \phi_n \rangle + \langle \phi_n | \phi_{n+1} \rangle \right] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (1-3.1)$$

位置の 2 乗の期待値は

$$\begin{aligned} \langle \phi_n | \hat{x}^2 | \phi_n \rangle &= \frac{\hbar}{2m\omega} \langle \phi_n | (\hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger + \hat{a} \hat{a}) | \phi_n \rangle \\ &= \frac{\hbar}{2m\omega} \langle \phi_n | (2\hat{a}^\dagger + 1) | \phi_n \rangle \\ &= \frac{\hbar}{m\omega} \left(n + \frac{1}{2} \right) \end{aligned} \quad (1-3.2)$$

となる。また同様にして運動量の方を計算していく。運動量の期待値は

$$\begin{aligned}\langle \phi_n | \hat{p} | \phi_n \rangle &= -i \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \langle \phi_n | (\hat{a} - \hat{a}^\dagger) | \phi_n \rangle = -i \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \sqrt{n+1} [\langle \phi_{n+1} | \phi_n \rangle - \langle \phi_n | \phi_{n+1} \rangle] \\ &= 0\end{aligned}\quad (1-3.3)$$

運動量の 2 乗の期待値は

$$\begin{aligned}\langle \phi_n | \hat{p}^2 | \phi_n \rangle &= -\frac{m\hbar\omega}{2} \langle \phi_n | (\hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{a} \hat{a}^\dagger + \hat{a} \hat{a}) | \phi_n \rangle \\ &= \frac{m\hbar\omega}{2} \langle \phi_n | (2\hat{a}^\dagger + 1) | \phi_n \rangle \\ &= \frac{m\hbar\omega}{2} \left(n + \frac{1}{2} \right)\end{aligned}\quad (1-3.4)$$

よって

$$\begin{aligned}(\Delta x \cdot \Delta p)^2 &= \frac{\hbar}{m\omega} \left(n + \frac{1}{2} \right) \times \frac{m\hbar\omega}{2} \left(n + \frac{1}{2} \right) \\ \Delta x \cdot \Delta p &= \hbar \left(n + \frac{1}{2} \right)\end{aligned}\quad (1-3.5)$$

1-4

$$\begin{aligned}\hat{a} |\alpha\rangle &= e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \hat{a} |\phi_n\rangle \\ &= e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \sqrt{n} |\phi_{n-1}\rangle \\ &= \alpha e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^{n-1}}{\sqrt{(n-1)!}} |\phi_{n-1}\rangle \\ &= \alpha |\alpha\rangle\end{aligned}\quad (1-4.1)$$

より $|\alpha\rangle$ は \hat{a} の固有状態。

このことを使うとこの状態での位置の期待値は

$$\begin{aligned}\langle \alpha | \hat{x} | \alpha \rangle &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \langle \alpha | (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) | \alpha \rangle \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\alpha + \alpha^*) \\ &= \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} r \cos \theta\end{aligned}\quad (1-4.2)$$

運動量の期待値は

$$\begin{aligned}\langle \alpha | \hat{p} | \alpha \rangle &= -i \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \langle \alpha | (\hat{a} - \hat{a}^\dagger) | \alpha \rangle \\ &= -i \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} (\alpha - \alpha^*) \\ &= \sqrt{2m\hbar\omega} r \sin \theta\end{aligned}\quad (1-4.3)$$

1-5

設問 2 より $|\phi_n\rangle$ の時間発展は

$$|\phi_n(t)\rangle = c_n(0) \exp \left[-i \left(n + \frac{1}{2} \right) \omega t \right] \quad (1-5.1)$$

と書けるので $|\psi(0)\rangle = |\alpha = r_0\rangle$ の時間発展は

$$\begin{aligned}
 |\psi(t)\rangle &= e^{-r_0^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_0^n}{\sqrt{n!}} e^{-in\omega t} e^{-i\omega t/2} |\phi_n\rangle \\
 &= e^{-i\omega t/2} e^{-r_0^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(r_0 e^{-i\omega t})^n}{\sqrt{n!}} |\phi_n\rangle \\
 &= e^{-i\omega t/2} |\alpha = r_0 e^{-i\omega t}\rangle
 \end{aligned} \tag{1-5.2}$$

となる。先頭の $e^{-i\omega t/2}$ の位相は物理量の期待値には影響しないので無視できる。すると問題の無次元化した位置の期待値は設問 4 で求めたものに $r = r_0$, $\theta = -\omega t$ を入れれば良いことがわかるので、

$$\langle\psi(t)|\hat{X}|\psi(t)\rangle = \sqrt{2}r_0 \cos \omega t \tag{1-5.3}$$

$$\langle\psi(t)|\hat{P}|\psi(t)\rangle = -\sqrt{2}r_0 \sin \omega t \tag{1-5.4}$$

となる。位置と運動量の期待値を位相空間でみると、時計回りに等速円運動するという古典系と同じ運動になっていることがわかる。

感想

コヒーレント状態の話。場の量子論とか量子光学にてやる計算で、交換子と固有状態をうまく組み合わせると楽にできるというやつ。

問題 2 統計力学: BEC

2-1

状態 ϵ_i の状態が n_i 個ある確率は

$$\frac{e^{-\beta(\epsilon_i - \mu)n_i}}{\Theta} \quad (2-1.1)$$

であるので分布関数は

$$\begin{aligned} f(\epsilon_i) &= \sum_{n_i} n_i \frac{e^{-\beta(\epsilon_i - \mu)n_i}}{\Theta} = \sum_{n_i} \frac{1}{\Theta} \times \left(-\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \epsilon_i} e^{-\beta(\epsilon_i - \mu)n_i} \right) \\ &= -\frac{1}{\beta} \frac{1}{\Theta} \frac{\partial \Theta_i}{\partial \epsilon_i} = -\frac{1}{\beta} \frac{1}{\Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial \epsilon_i} = -k_B T \frac{\partial}{\partial \epsilon_i} \ln \Theta \\ &= -k_B T \frac{\partial}{\partial \epsilon_i} \sum_j \ln \left[\sum_{n_j} e^{-\beta(\epsilon_j - \mu)n_j} \right] = -k_B T \sum_j \frac{\partial}{\partial \epsilon_i} \ln \left[\frac{1}{1 - e^{-\beta(\epsilon_j - \mu)}} \right] \\ &= -k_B T \frac{-\beta e^{\beta(\epsilon_j - \mu)}}{1 - e^{-\beta(\epsilon_j - \mu)}} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_j - \mu)} - 1} \end{aligned} \quad (2-1.2)$$

となる。

2-2

ボース多体系において、十分低温になったとき、マクロな数のボース粒子が基底状態に落ち込む現象。

2-3

$T = T_c$ において ρ' は

$$\begin{aligned} \rho' &= A \int_0^\infty d\epsilon \epsilon^{1/2} f(\epsilon) \\ &= A \int_0^\infty d\epsilon \frac{\epsilon^{1/2}}{e^{\beta\epsilon} - 1} \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{mk_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty dx \frac{x^{1/2}}{e^x - 1} \end{aligned} \quad (2-3.1)$$

積分の中身は $\mathcal{O}(1)$ の定数でこれを C とおくと

$$\begin{aligned} \rho' &= \frac{2C}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\lambda_T^3} \\ \lambda_T &= \left(\frac{2C}{\sqrt{\pi}C} \right)^{1/3} \end{aligned} \quad (2-3.2)$$

これと平均自由行程の式を見比べると $\rho = \rho'$ で $3/4\pi$ と $2C/\sqrt{\pi}$ はともに $\mathcal{O}(1)$ の量なので、これらの長さのオーダーが等しい。

2-4

基底状態に落ち込んだ分のボース粒子は熱揺らぎによって励起しないので、比熱には寄与しない。基底状態に落ち込んでいない分のエネルギーは

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\infty}^\infty d\epsilon D(\epsilon) f(\epsilon) \\ &= A \int_0^\infty d\epsilon \frac{\epsilon^{3/2}}{e^{\beta\epsilon} - 1} \\ &= A(k_B T)^{5/2} \int_0^\infty dx \frac{x^{3/2}}{e^x - 1} \\ &\propto T^{5/2} \end{aligned} \quad (2-4.1)$$

これより比熱は

$$C = \frac{dE}{dT} \propto T^{3/2} \quad (2-4.2)$$

よって $\gamma = 3/2$

2-5

エントロピーは

$$S = \int_0^T dT \frac{C(T)}{T} \quad (2-5.1)$$

であるのでこれを計算すると

$$S \propto \int_0^T dT \frac{T^{3/2}}{T} \propto T^{3/2} \quad (2-5.2)$$

よって $\nu = 3/2$

別の方法として

$$C = T \frac{\partial S}{\partial T} \quad (2-5.3)$$

の両辺の次元を勘定するのもいける。もしかしたら状態数から求めるのもいけるかもしれない。

2-6

ゼーマンエネルギーが温度ゆらぎよりも十分小さいときには、ゼーマン分裂によって分かれた3つの準位をボーズ粒子は自由に遷移する。これより系の内部エネルギーは磁場が無いときと同じ。

一方ゼーマンエネルギーが温度ゆらぎよりも十分大きいときには、ボーズ粒子はもとの基底状態よりも低いエネルギー準位にのみ落ち込む。これより系の内部エネルギーは磁場がないときよりも小さくなることがわかる。断熱的に磁場を掛けていて、内部エネルギーとして減ったエネルギーは周囲の温度のエネルギーになるので、終状態の温度は始状態の温度よりも高くなる。

これを定量的に表すと、磁場がかかっているときの励起状態の密度は

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(\epsilon_z) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon \left(\tilde{D}(\epsilon - \epsilon_z) + \tilde{D}(\epsilon) + \tilde{D}(\epsilon - \epsilon_z) \right) f(\epsilon) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon \left(3\tilde{D}(\epsilon) + \tilde{D}'' \epsilon_z^2 \right) f(\epsilon) \\ &\geq \tilde{\rho}(0) \end{aligned} \quad (2-6.1)$$

より、多くなる。これはつまり熱エネルギーをになう粒子が増えたのと同じことであるので温度が上がったと考えられる。

感想

最後の設問はゼーマン分裂の分裂幅と温度ゆらぎのエネルギースケールが同じ程度というのを踏まえると、超伝導・超流動相の物質に磁場を掛けたときの温度ゆらぎによる影響を定性的に答えなさいというようなものなんでしょうかね？超伝導ちゃんとわかってたら、最後の設問の結果と第二種超伝導体の磁束格子との関連や臨界磁場との結びつきからの答案チェックもできそう。

問題 3 解析力学: 電磁場のラグランジアン

3-1

i 成分のオイラーラグランジュ方程式は次のとおりである。

$$\frac{\partial L}{\partial r_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} = 0 m \ddot{\mathbf{r}} + q \frac{d\mathbf{A}}{dt} - q \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}) + q \nabla \varphi = 0$$

3-2

ラグランジアンをベクトルの成分とアインシュタインの縮約を使って書くと^{*1}、

$$\begin{aligned} 0 &= q \dot{r}_j \partial_j A_i - q \partial_j \varphi - \frac{d}{dt} (m r_j + q A_j) \\ m \ddot{r}_j &= -q \partial_j \varphi - q \partial_t A_j + q \dot{r}_i (\partial_j A_i - \partial_i A_j) \\ &= -q \partial_j \varphi - q \partial_t A_j + q \varepsilon_{jik} \dot{r}_i (\varepsilon_{mnk} \partial_m A_n) \end{aligned} \quad (3-2.1)$$

となる、ベクトル解析での notation に直すと

$$m \ddot{\mathbf{r}} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + q \dot{\mathbf{r}} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \quad (3-2.2)$$

ここで、電場と磁場は

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (3-2.3)$$

であるので、運動方程式は以下の通りである。

$$m \ddot{\mathbf{r}} = q \mathbf{E} + q \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} \quad (3-2.4)$$

3-3

ゲージ変換されたポテンシャルによる電場を \mathbf{E}' としてこれを整理すると

$$\mathbf{E}' = -\nabla \varphi' - \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \frac{\partial \Lambda}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \Lambda = \mathbf{E} \quad (3-3.1)$$

となり、電場はゲージ変換によって変わらない。同様にゲージ変換されたポテンシャルによる磁場を \mathbf{B}' としてこれを整理すると

$$\mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \nabla \Lambda = \mathbf{B} \quad (3-3.2)$$

となり、磁場もゲージ変換によって変わらない。

また、ゲージ変換したときのラグランジアンは

$$\begin{aligned} L' &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} + q \dot{\mathbf{r}} \cdot (\mathbf{A} + \nabla \Lambda) - q \left(\varphi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \right) \\ &= L + q \left(\dot{\mathbf{r}} \nabla \Lambda + \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \right) = L + q \frac{d}{dt} \Lambda \end{aligned}$$

となり、ラグランジアンはスカラー関数の全微分の項が余計につくようになる。運動方程式はラグランジアンを時間積分した作用が停留する、つまり作用の変分が 0 というから得られるため、時間の全微分の項は変分の際に消えるため同じオイラーラグランジュ方程式となる。直接オイラーラグランジュ方程式に代入してスカラー関数が消えることを確かめてもよい。

^{*1} ベクトル解析の表記がわからないからこれでやる。

3-4

磁場は

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \left(0, 0, \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Bx}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{By}{2} \right) \right) = (0, 0, B) \quad (3-4.1)$$

電場は

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = (\alpha x, \alpha y, -2\alpha z) \quad (3-4.2)$$

となる。

3-5

z 方向の運動方程式は

$$m\ddot{z} = -2q\alpha z \quad (3-5.1)$$

である。これは z 方向に単振動する運動

3-6

xy 平面の運動方程式は

$$\begin{cases} m\ddot{x} = q\alpha x + qB\dot{y} \\ m\ddot{y} = q\alpha y - qB\dot{x} \end{cases} \quad (3-6.1)$$

である。これに $x = C_x e^{i\omega t}$, $y = C_y e^{i\omega t}$ を代入して整理すると

$$\begin{pmatrix} q\alpha + m\omega^2 & iqB\omega \\ -iqB\omega & q\alpha + m\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_x \\ C_y \end{pmatrix} = 0 \quad (3-6.2)$$

この連立方程式に非自明な解がある条件は左の行列式の値が 0 であることである。よって周波数が $\omega > 0$ の方は

$$\begin{aligned} (q\alpha m\omega^2)^2 - q^2 B^2 \omega^2 &= 0 \\ q\alpha + m\omega^2 &= qB\omega \\ \omega &= \frac{qB}{2m} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4m\alpha}{qB^2}} \right) \end{aligned} \quad (3-6.3)$$

となる。このときの振幅は $m\omega^2 = qB\omega - q\alpha$ を使うと

$$\begin{pmatrix} qB\omega & iqB\omega \\ -iqB\omega & qB\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_x \\ C_y \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} C_x \\ C_y \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad (3-6.4)$$

となる。 $\omega < 0$ の方は

$$\begin{aligned} (q\alpha m\omega^2)^2 - q^2 B^2 \omega^2 &= 0 \\ q\alpha + m\omega^2 &= -qB\omega \\ \omega &= -\frac{qB}{2m} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4m\alpha}{qB^2}} \right) \end{aligned} \quad (3-6.5)$$

となる。このときの振幅は $m\omega^2 = -qB\omega - q\alpha$ を使うと

$$\begin{pmatrix} -qB\omega & iqB\omega \\ -iqB\omega & -qB\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_x \\ C_y \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} C_x \\ C_y \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \quad (3-6.6)$$

となる。実際の電子の動きはいま求めた x, y の実部をとるので、運動としては円運動となる。

感想

電磁場との相互作用ラグランジアンからオイラーラグランジュ方程式を使ってローレンツ力を出すというのは、ベクトル解析でやると 1 成分しか見ない分にはおもったより楽。ただ、3 成分全部となると書く量が増えて面倒か。最後の設問は根

気よく連立微分方程式を解いていくしかない。ゼーマン分裂を古典電磁気で説明したみたいな答えになっているが、電場の効き方がよくわからない。電場が弱いときには振動数の解は

$$\omega = \frac{qB}{m}, \frac{\alpha}{B} \quad (3-6.7)$$

が出る。前者は単にサイクロトロン共鳴が見えるねといった感じだ。後者はなんなんだ？ また、運動が減衰しない程度の電場のときには振動数は1つだけで

$$\omega = \frac{qB}{2m} \quad (3-6.8)$$

である。

電場は回転座標系で見たときの遠心力、磁場はコリオリ力みたいなものなのだろうか。

問題 4 電気回路: ジョンソン-ナイキストノイズ

4-1

与えられた運動方程式の両辺を粒子数で和をとると

$$\begin{aligned}
 m \frac{d}{dt} \sum_i v_i + \eta \sum_i v_i &= \sum f_i \\
 \frac{ml}{q} \frac{d}{dt} \frac{q}{l} \sum_i v_i + \frac{\eta l}{q} \frac{q}{l} \sum_i v_i &= \frac{qN}{l} \frac{l}{N} \sum_i E_i \\
 \frac{ml}{q} \frac{dI}{dt} + \frac{\eta l}{q} I &= \frac{qN}{l} V \\
 \frac{ml^2}{q^2 N} \frac{dI}{dt} \frac{\eta l^2}{q^2 N} I &= V \\
 \frac{ml^2}{qnA} \frac{dI}{dt} + \frac{\eta l}{q^2 nA} I &= V
 \end{aligned} \tag{4-1.1}$$

よって

$$L = \frac{ml^2}{qnA} \quad R = \frac{\eta l}{q^2 nA} \tag{4-1.2}$$

4-2

(2) 式の左辺をフーリエ変換してまとめてやれば

$$Z(\omega) = R + j\omega L \tag{4-2.1}$$

4-3

$$\begin{aligned}
 \frac{L}{2} \langle I^2(t) \rangle &= \frac{L}{2} \left\langle \frac{q^2}{l^2} \sum_{ij} v_i v_j \right\rangle \\
 &= \frac{ml^2}{2q^2 N} \frac{q^2}{l^2} \sum_{ij} \langle v_i v_j \rangle \\
 &= \frac{1}{2} m \langle v_i^2 \rangle = \frac{1}{2} k_B T
 \end{aligned} \tag{4-3.1}$$

4-4

自己相関関数を展開して整理していく。まず $\tau \geq 0$ のとき

$$\begin{aligned}
 \langle I(t) I(t + \tau) \rangle &= \left\langle I(t) \int_0^\tau dt' \frac{dI(t + t')}{dt'} \right\rangle \\
 \phi_I(t) &= \int_0^\tau dt' \left\langle I(t) \left(\frac{V(t + t')}{L} \right) - \frac{R}{L} I(t + t') \right\rangle \\
 &= \int_0^\tau dt' \left[\frac{1}{L} \langle I(t) V(t + t') \rangle - \frac{R}{L} \langle I(t) I(t + t') \rangle \right] \\
 &= -\frac{R}{L} \int_0^\tau dt' \phi_I(t')
 \end{aligned} \tag{4-4.1}$$

ここで両辺微分して

$$\frac{d\phi_I}{dt} = -\frac{R}{L} \phi_I. \tag{4-4.2}$$

これより

$$\phi_I(\tau) = \phi_I(0) e^{-R\tau/L} = \frac{k_B T}{L} e^{-R\tau/L} \tag{4-4.3}$$

となる*2。

また $\tau \leq 0$ のとき、

$$\langle I(t)I(t-|\tau|) \rangle = \langle I(t+|\tau|)I(t+|\tau|-|\tau|) \rangle = \langle I(t)I(t+|\tau|) \rangle = \frac{k_B T}{L} e^{-R|t|/L} \quad (4-4.4)$$

となる。よって自己相関関数は

$$\phi(\tau) = \frac{k_B T}{L} e^{-R|\tau|/L}. \quad (4-4.5)$$

また、これをフーリエ変換すると

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_I(\omega) &:= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \phi_I(\tau) e^{-i\omega\tau} \\ &= \frac{k_B T}{\pi L} \int_0^{\infty} d\tau e^{-R\tau/L} \cos \omega\tau \\ &= \frac{k_B T}{\pi L} \frac{R/L}{\omega^2 + (R/L)^2} \\ &= \frac{k_B T}{\pi} \frac{R}{R^2 + L^2 \omega^2} \end{aligned} \quad (4-4.6)$$

4-5

電圧のパワースペクトルは

$$\begin{aligned} S_V(\omega) &= \lim_{\mathcal{T} \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{\mathcal{T}} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\mathcal{T}/2}^{\mathcal{T}/2} dt V(t) e^{-i\omega t} \right|^2 \\ &= \lim_{\mathcal{T} \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi \mathcal{T}} \int_{-\mathcal{T}/2}^{\mathcal{T}/2} dt \int_{-\mathcal{T}/2}^{\mathcal{T}/2} dt' V(t) V^*(t') e^{-i\omega(t-t')} \\ &= \lim_{\mathcal{T} \rightarrow \infty} \frac{|Z(\omega)|^2}{2\pi \mathcal{T}} \int_{-\mathcal{T}/2}^{\mathcal{T}/2} dt \int_{-\mathcal{T}/2+t}^{\mathcal{T}/2+t} dt' I(t) I(t+t') e^{-i\omega t'} \\ &\stackrel{?}{=} \frac{|Z(\omega)|^2}{2\pi} \lim_{\mathcal{T} \rightarrow \infty} \int_{-\mathcal{T}/2}^{\mathcal{T}/2} dt' \phi_I(t') e^{-i\omega t'} \\ &= |Z(\omega)|^2 \tilde{\phi}(\omega) \\ &= (R^2 + \omega^2 L^2) \frac{k_B T}{\pi} \frac{R}{R^2 + L^2 \omega^2} \\ &= \frac{k_B T R}{\pi} \end{aligned} \quad (4-5.1)$$

感想

確率微分方程式のところは隠して非平衡系をやった問題。理論で確率過程を扱うにしろ、実験で測定データを分析するのにしろ、役立つのには違いないので覚えておきたい。

*2 そのままやるとこれが答えでいいやとなるけど、 $\tau \rightarrow -\infty$ の極限を考えるとすごい昔の電流と今の電流が似てるというのが出るので、 τ の正負で場合分けする必要に気づける。