# 2015年度東大理物答案

しゃんごん (@CEY3944)

2025年5月31日

# 物理学

## 問題 1　量子力学: 周期境界条件・デルタ関数ポテンシャル・摂動論

### 1-1

$[S_x, S_y]$ は

$$[S_x, S_y] = \frac{\hbar^2}{4}\left[\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right] \quad = i\hbar\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} = i\hbar S_z \tag{1-1.1}$$

$[H, S_z]$ は

$$[H, S_z] = \left[\frac{p_x^2+p_y^2}{2m}I_{2\times 2} + \frac{\hbar e B_z(x,y)}{2m}\sigma_z, \frac{\hbar}{2}\sigma_z\right] = 0 \tag{1-1.2}$$

### 1-2

問題文に誤植があり、$H = D^2/2m$ の $H$ はゼーマン項を抜いた運動エネルギーの項のみのことを表している。まず

$$\begin{aligned} D &= \begin{pmatrix}0 & p_x - ip_y\\ p_x + ip_y & 0\end{pmatrix}\\ D\sigma_z &= \begin{pmatrix}0 & -p_x + ip_y\\ p_x + ip_y & 0\end{pmatrix}\\ \sigma_z D &= \begin{pmatrix}0 & p_x - ip_y\\ -p_x - ip_y & 0\end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1-2.1}$$

より $D\sigma_z = -\sigma_z D$ がわかる。また

$$\begin{aligned} D^2 &= \begin{pmatrix}0 & p_x - ip_y\\ p_x + ip_y & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & p_x - ip_y\\ p_x + ip_y & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}p_x^2+p_y^2 & 0\\ 0 & p_x^2+p_y^2\end{pmatrix}\\ \frac{D^2}{2m} &= \frac{p_x^2+p_y^2}{2m}I_{2\times 2} = H \end{aligned} \tag{1-2.2}$$

よりハミルトニアン $H$ を $D$ で表すことができた。

### 1-3

$$\langle\Phi_n|\Phi_n\rangle = \langle\Psi_n| D^\dagger D |\Psi_n\rangle = \langle\Psi_n| 2mH |\Psi_n\rangle = 2mE_n \langle\Psi_n|\Psi_n\rangle \tag{1-3.1}$$

### 1-4

$\langle\Phi_n|\Phi_n\rangle > 0, \langle\Psi_n|\Psi_n\rangle > 0$ と (10) 式より

$$E_n = \frac{\langle\Phi_n|\Phi_n\rangle}{2m\langle\Psi_n|\Psi_n\rangle} > 0 \tag{1-4.1}$$

また、

$$\begin{aligned} H|\Phi_n\rangle &= HD|\Psi_n\rangle = DH|\Psi_n\rangle = DE_n|\Psi_n\rangle\\ &= E_n|\Phi_n\rangle \end{aligned} \tag{1-4.2}$$

より $|\Phi_n\rangle$ は $|\Psi_n\rangle$ とおなじ固有エネルギーを持つ。

そして (3) のハミルトニアンはすでに対角化されて、$|\Psi_n\rangle$ は $\sigma_z$ の固有値が $+1$ の状態であることから

$$|\Psi_n\rangle = \begin{pmatrix} |\psi_n\rangle \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1-4.3}$$

と書けるのがわかるこれより

$$|\Phi_n\rangle = \begin{pmatrix} 0 & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\psi_n\rangle \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ (p_x + ip_y)\,|\psi_n\rangle \end{pmatrix} \tag{1-4.4}$$

となる。つまり $|\Phi_n\rangle$ は $\sigma_z$ の固有値が $-1$ の状態である。

## 1-5

$$|D\,|\Psi\rangle|^2 = \langle\Psi|\,D^\dagger D\,|\Psi\rangle = 2mE\,\langle\Psi|\Psi\rangle = 0 \tag{1-5.1}$$

より $|D\,|\Psi\rangle| = 0$ である。ノルムの性質より

$$D\,|\Psi\rangle = 0 \tag{1-5.2}$$

そしてこの式を与えられた波動関数とベクトルポテンシャルを代入して展開していくと、

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{pmatrix} 0 & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_\uparrow(x,y) \\ \psi_\downarrow(x,y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} [-i\hbar(\partial_x - i\partial_y) - ie(\partial_x - i\partial_y)\rho(x,y)]f_\downarrow(x,y)\exp\left[-\frac{e}{\hbar}\rho(x,y)\right] \\ [-i\hbar(\partial_x + i\partial_y) - ie(\partial_x + i\partial_y)\rho(x,y)]f_\uparrow(x,y)\exp\left[\frac{e}{\hbar}\rho(x,y)\right] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \partial_w f_\downarrow(w,\bar{w}) \\ \partial_{\bar{w}} f_\uparrow(w,\bar{w}) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1-5.3}$$

これより $f_\downarrow$ は $\bar{w}$ のみなる関数、$f_\uparrow$ は $w$ からなる関数とわかる。言い換えると $f_\downarrow$ は $\bar{w}$ の正則関数、$f_\uparrow$ は $w$ の正則関数である。

## 1-6

$r \to \infty$ のときには

$$\rho(x,y) = \frac{bR^2}{2}\left(\frac{1}{2} + \ln\frac{r}{R}\right) \sim \frac{bR^2}{4} \tag{1-6.1}$$

となるため、スピン上向きの波動関数にある $\exp(e\rho/\hbar)$ が発散する。$f_\uparrow$ は有限次多項式なのでこの発散は抑えられず、$\psi_\uparrow$ は無限遠での存在確率が大きくなる不合理な解となるため上向きでは存在しない。

$\psi_\downarrow$ の縮退はわからなかった。どうやら磁場の大きさが関わっているらしい。

## 感想

論文を元ネタにした問題で楽しかった。論文曰くとても単純に解けて、2 次元ユークリッド Dirac 方程式に Atiyah-Singer の指数定理を適用した例になっているそうである。これはだいぶ先駆的な論文で最近だと ”Topologically Protected Flatness in Chiral Moiré Heterostructures” Phys.Rev.X 15,021056 で引かれてたりする。トポロジカルフラットバンドと Atiyah-Singer の指数定理って関係あるそうだ。

## 問題 2　統計力学: 固体の比熱

### 2-1

この系の古典的な分配関数は

$$
\begin{aligned}
Z &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^N}\left(\int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\beta p^2/2m} e^{-\beta m\omega(x-a)^2/2}\right)^N \\
&= \frac{1}{(2\pi\hbar)^N}\left(\sqrt{\frac{2m\pi}{\beta}}\sqrt{\frac{2\pi}{\beta m\omega^2}}\right)^N = \left(\frac{k_BT}{\hbar\omega}\right)^N
\end{aligned}
\tag{2-1.1}
$$

よって内部エネルギーは

$$
\frac{U}{N} = -\frac{1}{N}\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z = k_BT^2\frac{\partial}{\partial T}\ln\frac{k_BT}{\hbar\omega} = kB_T
\tag{2-1.2}
$$

比熱は

$$
C = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}T} = k_B
\tag{2-1.3}
$$

となる。位置の期待値を求める。1 つの粒子の分配関数を考えることにより $\langle x_1\rangle$ は

$$
\begin{aligned}
\langle x_i\rangle &= \frac{\int dp\, e^{-\beta p^2/2m}\int dx\, xe^{-\beta m\omega^2(x-a)^2/2}}{\int dp\, e^{-\beta p^2/2m}\int dx\, e^{-\beta m\omega^2(x-a)^2/2}} \\
&= a
\end{aligned}
\tag{2-1.4}
$$

そして $\left\langle x_1^2\right\rangle$ は

$$
\begin{aligned}
\langle x_i\rangle &= \frac{\int dp\, e^{-\beta p^2/2m}\int dx\, x^2 e^{-\beta m\omega^2(x-a)^2/2}}{\int dp\, e^{-\beta p^2/2m}\int dx\, e^{-\beta m\omega^2(x-a)^2/2}} \\
&= \frac{\int dx\left[(x-a)^2+2a(x-a)+a^2\right]e^{-\beta m\omega^2(x-a)^2/2}}{\int dx\, e^{-\beta m\omega^2(x-a)^2/2}} \\
&= \frac{k_BT}{m\omega^2}+a^2
\end{aligned}
\tag{2-1.5}
$$

となる。よって分散は

$$
\left\langle x_1^2\right\rangle - \langle x_1\rangle^2 = \frac{k_BT}{m\omega^2}
\tag{2-1.6}
$$

### 2-2

1 つの質点の分散関係は

$$
Z = \sum_{n=0}^{\infty}\langle n|\, e^{-\beta H}\,|n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\hbar\omega(n+1/2)} = \frac{e^{-\beta\hbar\omega/2}}{1-e^{-\beta\hbar\omega}} = \frac{1}{2\sinh(\beta\hbar\omega/2)}
\tag{2-2.1}
$$

これより位置の期待値は

$$
\langle x\rangle = \frac{1}{Z}\sum_{n=0}^{\infty}\langle n|\, Xe^{-\beta H}\,|n\rangle = \frac{1}{Z}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\hbar\omega(n+1/2)}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,\langle n|\left(\sqrt{n}\,|n-1\rangle + \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle\right) = 0
\tag{2-2.2}
$$

なので分散は

$$
\begin{aligned}
\left\langle x^2\right\rangle &= \frac{1}{Z}\sum_{n=0}^{\infty}\langle n|\, Xe^{-\beta H}\,|n\rangle \\
&= \frac{1}{Z}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\hbar\omega(n+1/2)}\frac{\hbar}{2m\omega}\,\langle n|\left(\sqrt{n(n-1)}\,|n-2\rangle + n\,|n\rangle + (n+1)\,|n\rangle + \sqrt{(n+1)(n+2)}\,|n+2\rangle\right) \\
&= \frac{1}{Z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{m\omega^2}\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)e^{-\beta\hbar(n+1/2)} = -\frac{1}{m\omega^2}\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z = \frac{\hbar}{2m\omega}\coth\frac{\beta\hbar\omega}{2}
\end{aligned}
\tag{2-2.3}
$$

また、内部エネルギーは

$$U = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z = \frac{\partial}{\partial\beta}\ln\sinh\frac{\beta\hbar\omega}{2} = \frac{\hbar\omega}{2}\coth\frac{\beta\hbar\omega}{2} \tag{2-2.4}$$

比熱は

$$C = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}T} = -k_B\beta^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta}\coth\frac{\beta\hbar\omega}{2} = k_B\left(\frac{\hbar\omega}{2k_BT}\right)^2\left[\frac{\cosh^2\beta\hbar\omega/2}{\sinh^2\beta\hbar\omega/2} - 1\right] = k_B\left(\frac{\hbar\omega/2k_BT}{\sinh\hbar\omega/2k_BT}\right)^2 \tag{2-2.5}$$

となる。$T\to\infty$ の高温極限では $\sinh\hbar\omega/2k_BT \simeq \hbar\omega/2k_BT$ より

$$C = k_B\left(\frac{\hbar\omega/2k_BT}{\sinh\hbar\omega/2k_BT}\right)^2 \simeq k_B \tag{2-2.6}$$

となる。なので古典的に扱ったときと同じ結果になる。$T\to 0$ の低温極限では $\sinh\hbar\omega/2k_BT \simeq \exp[\hbar\omega/2k_BT/2]$ より

$$C \simeq k_B\left(\frac{\hbar\omega}{k_BT}\right)^2 e^{-\hbar\omega/2k_BT} \tag{2-2.7}$$

となり低温では温度特性があるとわかる。

## 2-3

$x_0 = 0, x_{N+1} = a(N+1)$ とする。するとハミルトニアンは

$$H = \sum_{n=1}^{N+1}\left(\frac{m\omega^2}{2}(x_n - x_{n-1} - a)^2 + \frac{p_n^2}{2m}\right) \tag{2-3.1}$$

**答案 1**

固定端条件の波動解になると期待されるので質点の位置を質点の平衡位置を基準としたフーリエ級数で表す。

$$\begin{aligned} x_n(t) - an &= \sum_{l=1}^{N}\tilde{x}_l(t)\exp\left[i\frac{\pi ln}{N+1}\right] \\ p_n(t) - an &= \sum_{l=1}^{N}\tilde{p}_l(t)\exp\left[i\frac{\pi ln}{N+1}\right] \end{aligned} \tag{2-3.2}$$

ハミルトニアンを複素振幅で表すと

$$\begin{aligned} H &= \sum_{n=1}^{N+1}\left[\frac{1}{2}m\omega^2|x_n - x_{n-1} - a|^2 + \frac{1}{2m}p_n^2\right] \\ &= \sum_{n=1}^{N+1}\left[\frac{1}{2}m\omega^2\left|\sum_{l=1}^{N}\left[1 - \exp\left(-i\frac{\pi l}{N+1}\right)\right]\tilde{x}_l(t)\exp\left[i\frac{\pi ln}{N+1}\right]\right|^2 + \frac{1}{2m}\left|\sum_{l=-N}^{N}\tilde{p}_l(t)\exp\left[i\frac{\pi ln}{N+1}\right]\right|^2\right] \\ &= (N+1)\sum_{l=1}^{N}\left[\frac{1}{2}m\omega^2\left(2 - 2\cos\left(\frac{l}{N+1}\pi\right)\right)|\tilde{x}_l(t)|^2 + \frac{1}{2}m|\tilde{p}_l(t)|^2\right] \end{aligned} \tag{2-3.3}$$

となり、各モード $l$ ごとに分離した調和振動子ポテンシャルとなっている。ポテンシャルの形より固有振動数は

$$\begin{aligned} \omega_l^2 &= \omega^2\left(2 - 2\cos\left(\frac{l}{N+1}\pi\right)\right) \\ \omega_l &= \omega\sqrt{2 - 2\cos\left(\frac{l}{N+1}\pi\right)} \end{aligned} \tag{2-3.4}$$

**答案 2**

$x_0 = 0, x_{N+1} = a(N+1)$ とする。するとハミルトニアンは

$$H = \sum_{n=1}^{N+1}\left(\frac{m\omega^2}{2}(x_n - x_{n-1} - a)^2 + \frac{p_n^2}{2m}\right) \tag{2-3.5}$$

正準方程式より $n=1,\cdots,N$ の運動方程式は

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\partial H}{\partial x_i}\end{cases} \to \begin{cases}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} &= \frac{p_i}{m} \\ \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} &= -m\omega^2(-x_{n-1}+2x_n-x_{n+1})\end{cases} \tag{2-3.6}$$

これより

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_i}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2(-x_{n-1}+2x_n-x_{n+1}) \tag{2-3.7}$$

この微分方程式の解として固定端条件を満たす形

$$x_n(t) = Q_l \sin\left(\frac{l\pi}{N+1}n\right)e^{-i\omega_l t} + an, \qquad l=1,2,\cdots,N \tag{2-3.8}$$

を式に代入して整理すると

$$-\omega_l^2 Q_l \sin\left(\frac{l\pi}{N+1}n\right)e^{-i\omega_l t} = -\omega^2\left[2-2\cos\left(\frac{l\pi}{N+1}\right)\right]Q_l \sin\left(\frac{l\pi}{N+1}n\right)e^{-i\omega_l t} \tag{2-3.9}$$

これより

$$\omega_l = \omega\sqrt{2-2\cos\left(\frac{l\pi}{N+1}\right)} \tag{2-3.10}$$

## 2-4

前問よりハミルトニアンをフーリエ変換すると独立な調和振動子になる。古典的に扱った時には比熱は振動数によらず、各モード 1 つあたりが質点 1 個当たりの自由度に対応する。なので比熱は設問 1 で求めたのと同じ

$$C_1 = k_B \tag{2-4.1}$$

となる。

## 感想

物量が苦しい。固定端条件でのフォノン分散とか初めてやった気がする。

# 問題 3　力学: 相対論的力学

## 3-1

ロケット本体の運動量変化は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m(t)v(t) = m(t)a + \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}v(t) \tag{3-1.1}$$

時刻 $t$ の微小時間 $dt$ に放出されたガス $dm$ が持っている運動量は

$$dm(v(t) - v_{gas}) = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}dt \tag{3-1.2}$$

とわかる。運動量保存則よりこれらの和が 0 であるので

$$\begin{aligned} m(t)a + \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}v(t) &= \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} &= -\frac{a}{v_{gas}}m(t) \end{aligned} \tag{3-1.3}$$

## 3-2

線形微分方程式より解は

$$m(t) = m_0 e^{-at/v_{gas}} \tag{3-2.1}$$

## 3-3

イ:

$$d\tau = cdt \tag{3-3.1}$$

ロ:

$$u^\mu \odot u^\mu = -u^0u^0 + u^1u^1 = \frac{-c^2dt^2 + dx^2}{d\tau^2} = c^2\frac{ds^2}{-ds^2} = -c^2 \tag{3-3.2}$$

ハ:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(u^\mu \odot u^\mu) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(-c^2\right) \\ u^\mu \odot a^\mu &= 0 \end{aligned} \tag{3-3.3}$$

ニ・ホ: $a^0$ について

$$\begin{aligned} u^0 &= \frac{\mathrm{d}ct}{\mathrm{d}\tau} = \frac{c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ a^0 &= \frac{\mathrm{d}u^0}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}u^0}{\mathrm{d}t} = \frac{v/c}{(1 - v^2/c^2)^2}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \end{aligned} \tag{3-3.4}$$

$a^1$ について

$$\begin{aligned} u^1 &= \frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}t} = \frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ a^1 &= \frac{\mathrm{d}u^1}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}u^1}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{v^2/c^2}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}\right)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^2}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \end{aligned} \tag{3-3.5}$$

これより $\alpha$ は

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= -a^0a^0 + a^1a^1 = \frac{1 - v^2/c^2}{(1 - v^2/c^2)^4}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^3}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2 \\ \alpha &= \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \end{aligned} \tag{3-3.6}$$

$\alpha$ を使って $\alpha^0, \alpha^1$ を表すと

$$a^0 = \alpha\frac{u^1}{c}, \quad a^1 = \alpha\frac{u^0}{c} \tag{3-3.7}$$

## 感想

相対論的力学とか使わないからもう忘れた。それでもこれを知ってるよねと問われたので苦しい。