問題 1　電磁気学: 相対論的電磁気学

1-1

$|x| \gg a$ では並べられた荷電粒子群は線電荷密度 q/a を持った直線とみなせる。このとき、直線を中心とした $r = x$, $0 \geq z \geq l$ の円筒のについてガウスの法則を使うと、対称性より円筒の側面だけ考えればよく、

$$2\pi x l E_x = \frac{ql}{a\epsilon_0}$$
$$E_x = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 a x} \tag{1-1.1}$$

となる。電場に他の成分はない。また、磁場に関しては今の系に電流はないので

$$\boldsymbol{B} = 0 \tag{1-1.2}$$

1-2

2 つの隣接した荷電粒子を考える。ぞれぞれの位置を $\mathcal{O}$ 系で $z = z_0, z_0 + a$ にあるあるものとする。これらを Lorentz 変換すると

$$z_0 \to \gamma(z_0 - v_z t), \quad z_0 + a \to \gamma(z_0 + a - v_z t) \tag{1-2.1}$$

となる。これらの差が $\mathcal{O}'$ 系での荷電粒子の間隔 a' なので

$$a' = \gamma(z_0 + a - v_z t) - \gamma(z_0 - v_z t) = \gamma a \tag{1-2.2}$$

1-3

電場は設問 1 の電荷密度 q/a が $\gamma q/a$ に変わったものとなるので

$$E'_x = \gamma\frac{qx'}{2\pi\epsilon_0 a(x'^2 + y'^2)}, \quad E'_y = \gamma\frac{qy'}{2\pi\epsilon_0 a(x'^2 + y'^2)}, \quad E'_z = 0 \tag{1-3.1}$$

磁場について、$\mathcal{O}'$ 系では $-z$ 方向に速度 v で電荷密度 $\gamma q/a$ が動いているので $-\gamma q v_z/a$ の電流が流れているとみなせる。アンペールの法則より磁場は円筒座標の φ 成分だけ残って

$$2\pi\sqrt{x'^2 + y'^2}B'_\varphi = -\gamma\frac{\mu_0 q v_z}{a}$$
$$B'_\varphi = -\frac{\beta\gamma}{c}\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 a\sqrt{x'^2 + y'^2}} \tag{1-3.2}$$

よって直交座標で表すと

$$B'_x = \frac{\beta\gamma}{c}\frac{qy'}{2\pi\varepsilon_0 a(x'^2 + y'^2)}, \quad B'_y = -\frac{\beta\gamma}{c}\frac{qx'}{2\pi\varepsilon_0 a(x'^2 + y'^2)}, \quad B'_z = 0 \tag{1-3.3}$$

1-4

電磁場の Lorentz 変換の式より E_x は

$$\begin{aligned} E_x &= \gamma(E'_x + c\beta B'_y) = \gamma\left(\gamma\frac{qx'}{2\pi\epsilon_0 a(x'^2 + y'^2)} - \beta^2\gamma\frac{qx'}{2\pi\varepsilon_0 a(x'^2 + y'^2)}\right) \\ &= \gamma^2(1 - \beta^2)\frac{qx}{2\pi\epsilon_0 a(x^2 + y^2)} = \frac{qx}{2\pi\epsilon_0 a(x^2 + y^2)} \end{aligned} \tag{1-4.1}$$

E_y は

$$\begin{aligned} E_y &= \gamma(E'_y - c\beta B'_x) = \gamma\left(\gamma\frac{qy'}{2\pi\epsilon_0 a(x'^2 + y'^2)} - \beta^2\gamma\frac{qy'}{2\pi\varepsilon_0 a(x'^2 + y'^2)}\right) \\ &= \gamma^2(1 - \beta^2)\frac{qy}{2\pi\epsilon_0 a(x^2 + y^2)} = \frac{qy}{2\pi\epsilon_0 a(x^2 + y^2)} \end{aligned} \tag{1-4.2}$$

E_z は

$$E_z = E'_z = 0 \tag{1-4.3}$$

B_x は

$$B_x = \gamma\left(B'_x - \frac{\beta}{c}E'_y\right) = \gamma\left(\frac{\beta\gamma}{c}\frac{qy'}{2\pi\varepsilon_0 a(x'^2+y'^2)} - \frac{\beta\gamma}{c}\frac{qy'}{2\pi\varepsilon_0 a(x'^2+y'^2)}\right) = 0 \tag{1-4.4}$$

B_y は

$$B_x = \gamma\left(B'_y + \frac{\beta}{c}E'_x\right) = \gamma\left(-\frac{\beta\gamma}{c}\frac{qx'}{2\pi\varepsilon_0 a(x'^2+y'^2)} + \frac{\beta\gamma}{c}\frac{qx'}{2\pi\varepsilon_0 a(x'^2+y'^2)}\right) = 0 \tag{1-4.5}$$

B_z は

$$B_z = B'_z = 0 \tag{1-4.6}$$

となりコンシステントな結果が得られる。

1-5

$\mathcal{O}'$ において、電流はなく、中心に点電荷があるだけであるので

$$E'_x = \frac{qx'}{4\pi\epsilon_0 a(x'^2+y'^2+z'^2)^{3/2}}, \quad E'_y = \frac{qy'}{4\pi\epsilon_0 a(x'^2+y'^2+z'^2)^{3/2}}, \quad E'_z = \frac{qz'}{4\pi\epsilon_0 a(x'^2+y'^2+z'^2)^{3/2}} \tag{1-5.1}$$

$$\boldsymbol{B} = 0 \tag{1-5.2}$$

1-6

$x' = x, y' = y = 0, z' = \gamma(z - \beta ct) = -\gamma v_z t$ に注意して電磁場の Lorentz 変換をすると

$$E_x = \gamma\frac{qx}{4\pi\epsilon_0(x^2+\gamma^2 v_z^2 t^2)^{3/2}}, \quad E_y = 0, \quad E_z = \gamma\frac{-qv_z t}{4\pi\epsilon_0(x^2+\gamma^2 v_z^2 t^2)^{3/2}} \tag{1-6.1}$$

$$B_x = 0, \quad B_y = \gamma\frac{\mu_0 qx}{4\pi(x^2+\gamma^2 v_z^2 t^2)^{3/2}}, \quad B_z = 0 \tag{1-6.2}$$

感想

荷電粒子が直線状に並んでいるという系から、電磁場の Lorentz 変換が出るという話。久しぶりにやったもんだから、思い出すのに時間がかかかった。問題文に Lorentz 変換の式が出てるおかげで、答えがあってるかのチェックはやりやすかった。