2021年度東大理物答案

しゃんごん (@CEY3944)

2025年7月11日

物理学

問題 2　統計力学: BEC

2-1

自由粒子のシュレーディンガー方程式は

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(x,y,z) = E\Psi(x,y,z) \tag{2-1.1}$$

である。これの解は

$$\begin{aligned}(k_x,k_y,k_z) &= \frac{\sqrt{2m}}{\hbar}(E_x,E_y,E_z)\\ E &= E_x+E_y+E_z\end{aligned} \tag{2-1.2}$$

を用いて

$$\Psi(x,y,z) \propto \exp(i(k_x x + k_y y + k_z z)) \tag{2-1.3}$$

と表せる。周期境界条件より、

$$\begin{aligned}\Psi(x+L,y,z) = \Psi(x,y+L,z) = \Psi(x,y,z+L) = \Psi(x,y,z)\\ \exp(ik_x x)\Psi(x,y,z) = \exp(ik_y y)\Psi(x,y,z) = \exp(ik_z z)\Psi(x,y,z) = \Psi(x,y,z)\end{aligned} \tag{2-1.4}$$

となるので、波数とエネルギーは量子化され、

$$\begin{aligned}k_x L = 2\pi n_x, k_y L = 2\pi n_y, k_z L = 2\pi n_z\\ E = \frac{\hbar^2}{2mL^2}\left(n_x^2+n_y^2+n_z^2\right)\end{aligned} \tag{2-1.5}$$

となる。波動関数は

$$\Psi(x,y,z) \propto \exp\left(i\frac{2\pi}{L}(n_x x + n_y y + n_z z)\right) \tag{2-1.6}$$

2-2

分配関数の和は

$$\Xi_i = \sum_{n_i=0}^{\infty}\exp\left(-\frac{(E_i-\mu)n_i}{k_B T}\right) = \frac{1}{1-\exp\left(-\frac{(E_i-\mu)}{k_B T}\right)} \tag{2-2.1}$$

のようにまとめれる。

ボーズ分布関数は

$$\begin{aligned}f(E_i,\mu) &= \frac{1}{\Xi_i}\sum_{n_i=0}^{\infty} n_i \exp\left(-\frac{(E_i-\mu)n_i}{k_B T}\right) = \frac{k_B T}{\Xi_i}\frac{\partial}{\partial\mu}\sum_{n_i=0}^{\infty}\exp\left(-\frac{(E_i-\mu)n_i}{k_B T}\right)\\ &= \frac{k_B T}{\Xi_i}\frac{\partial \Xi_i}{\partial\mu} = k_B T\frac{\partial}{\partial\mu}\ln\Xi_i = -k_B T\frac{\partial}{\partial\mu}\ln\left(1-\exp\left(-\frac{E_i-\mu}{k_B T}\right)\right)\\ &= \frac{\exp\left(-\frac{E_i-\mu}{k_B T}\right)}{1-\exp\left(-\frac{E_i-\mu}{k_B T}\right)} = \frac{1}{\exp\left(\frac{E_i-\mu}{k_B T}\right)-1}\end{aligned} \tag{2-2.2}$$

2-3

1 粒子固有状態の数は次のような積分で求められる。

$$\Omega(E) = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \int_{0\le E_{\boldsymbol{k}}\le E} \mathrm{d}^3\boldsymbol{k} = \frac{V}{8\pi^3} \times \frac{4}{3}\pi\left(\frac{2mE}{\hbar^2}\right)^{3/2} = \frac{V}{6\pi^2}\left(\frac{2mE}{\hbar^2}\right)^{3/2} \tag{2-3.1}$$

なので、状態密度は

$$D(E) = \frac{\mathrm{d}\Omega(E)}{\mathrm{d}E} = \frac{V}{4\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}\sqrt{E} \tag{2-3.2}$$

2-4

$$\begin{aligned} N &= \int_0^\infty \frac{1}{\exp\left(\frac{E}{k_BT}\right)-1} \times \frac{V}{4\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}\sqrt{E}\,\mathrm{d}E = \frac{V}{4\pi^2}\left(\frac{2mk_BT}{\hbar^2}\right)^{3/2}\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{e^x-1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{V}{4\pi^2}\left(\frac{2mk_BT}{\hbar^2}\right)^{3/2} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2}\zeta(3/2) = \zeta(3/2)V\left(\frac{mk_BT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \end{aligned} \tag{2-4.1}$$

2-5

T_c では $N_0 = 0, \mu = 0$ と考えられるので、前問の結果が使えて

$$\begin{aligned} N &= \zeta(3/2)V\left(\frac{mk_BT_c}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \\ T_c &= \left(\frac{N}{\zeta(3/2)V}\right)^{2/3}\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B} \end{aligned} \tag{2-5.1}$$

2-6

$$N_0 = N - \int_0^\infty f(E,\mu=0)D(E)\,\mathrm{d}E = N - \zeta(3/2)V\left(\frac{mk_BT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} = N - N\left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2} \tag{2-6.1}$$

2-7

$$\begin{aligned} E &= N_0E_g + \int_0^\infty Ef(E,\mu=0)D(E)\,\mathrm{d}E \\ C &\propto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}\int_0^\infty \frac{E^{3/2}}{\exp\left(\frac{E}{k_BT}\right)-1}\,\mathrm{d}E = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}(k_BT)^{5/2}\int_0^\infty \frac{x^{3/2}}{e^x-1}\,\mathrm{d}x \propto T^{3/2} \end{aligned} \tag{2-7.1}$$

より、$\gamma = 3/2$

2-8

スピン縮重度は $2S+1$ より、(1) 式は

$$N = (2S+1)\int_0^\infty f(E,\mu)D(E)\,\mathrm{d}E \tag{2-8.1}$$

のようになる。なので設問 5 での式を読み替えることで転移温度は

$$\begin{aligned} N &= \zeta(3/2)(2S+1)V\left(\frac{mk_BT_c'}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \\ T_c' &= \left(\frac{N}{\zeta(3/2)(2S+1)V}\right)^{2/3}\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B} \end{aligned} \tag{2-8.2}$$

のように書ける。

2-9

ゼーマン分裂したときの状態密度は

$$D(E) = \sum_{m_z=-S}^{S} \frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}\sqrt{E+cm_zB} \tag{2-9.1}$$

となるので、T_c' を決める方程式は

$$\begin{aligned} N &= \sum_{m_z=-S}^{S}\int_{-cm_zB}^{\infty}\frac{1}{\exp\left(\frac{E}{k_BT_c'}\right)-1}\times\frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}\sqrt{E+cm_zB}\,\mathrm{d}E \\ &= \frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{2mk_BT_c'}{\hbar^2}\right)^{3/2}\sum_{m_z=-S}^{S}\int_0^{\infty}\frac{\sqrt{x}}{e^xe^{-\frac{cm_zB}{k_BT_c'}}-1}\,\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{2-9.2}$$

となる。

2-10

$m_z<0$ のとき、被積分関数の分母が $cB \gg k_BT_c'$ では発散するので、この場合の総和は考えなくてよい。

感想