2019 年度東大理物答案

しゃんごん (@CEY3944)

2025 年 7 月 4 日

物理学

問題 1　量子力学: エンタングルメント・局所実在性

測定結果がとりうる状態というのを、一般の状態にたいして、観測量がとりうる値つまり、観測量の固有値と解釈する。

1-1

σ_z の固有値固有状態のペアは

$$(s_z = +1;\, |\uparrow\rangle), (s_z = -1;\, |\downarrow\rangle) \tag{1-1.1}$$

である。s_z の期待値は

$$\begin{aligned}\langle s_z\rangle &= +1 \times P(\uparrow) - 1 \times P(\downarrow) \\ &= |\langle\uparrow|\uparrow\rangle|^2 - |\langle\downarrow|\uparrow\rangle|^2 \\ &= 1\end{aligned} \tag{1-1.2}$$

1-2

σ_x の固有値固有状態のペアは

$$\left(s_x = +1;\, |+\rangle \equiv \frac{|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle}{\sqrt{2}}\right), \left(s_x = -1;\, |-\rangle \equiv \frac{|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle}{\sqrt{2}}\right) \tag{1-2.1}$$

である。s_x の期待値は

$$\begin{aligned}\langle s_x\rangle &= +1 \times P(+) - 1 \times P(-) \\ &= |\langle+|\uparrow\rangle|^2 - |\langle-|\uparrow\rangle|^2 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0\end{aligned} \tag{1-2.2}$$

1-3

$\sigma(\theta)$ の固有値固有状態のペアは

$$\left(s_\theta = +1;\, |+\theta\rangle \equiv \cos\frac{\theta}{2}|\uparrow\rangle + \sin\frac{\theta}{2}|\downarrow\rangle\right), \left(s_\theta = -1;\, |-\theta\rangle \equiv \sin\frac{\theta}{2}|\uparrow\rangle - \cos\frac{\theta}{2}|\downarrow\rangle\right) \tag{1-3.1}$$

である。s_x の期待値は

$$\begin{aligned}\langle s_x\rangle &= +1 \times P(+\theta) - 1 \times P(-\theta) \\ &= |\langle+\theta|\uparrow\rangle|^2 - |\langle-\theta|\uparrow\rangle|^2 \\ &= \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} = \cos\theta\end{aligned} \tag{1-3.2}$$

1-4

$\sigma_z^A\sigma_z^B$ の固有値固有状態のペアは

$$\begin{aligned}&\left(s_z^A = +1, s_z^B = +1;\, |\uparrow\uparrow\rangle \equiv |\uparrow\rangle_A|\uparrow\rangle_B\right) \\ &\left(s_z^A = +1, s_z^B = -1;\, |\uparrow\downarrow\rangle \equiv |\uparrow\rangle_A|\downarrow\rangle_B\right) \\ &\left(s_z^A = -1, s_z^B = +1;\, |\downarrow\uparrow\rangle \equiv |\downarrow\rangle_A|\uparrow\rangle_B\right) \\ &\left(s_z^A = -1, s_z^B = -1;\, |\downarrow\downarrow\rangle \equiv |\downarrow\rangle_A|\downarrow\rangle_B\right)\end{aligned} \tag{1-4.1}$$

である。$s_z^A s_z^B$ の期待値は

$$\begin{aligned}\left\langle s_z^A s_z^B \right\rangle &= +1\times P(\uparrow\uparrow) - 1\times P(\uparrow\downarrow) - 1\times P(\downarrow\uparrow) + 1\times P(\downarrow\downarrow) \\ &= |\langle\uparrow\uparrow|\Psi\rangle|^2 - |\langle\uparrow\downarrow|\Psi\rangle|^2 - |\langle\downarrow\uparrow|\Psi\rangle|^2 + |\langle\downarrow\downarrow|\Psi\rangle|^2 \\ &= 0 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 0 = -1 \end{aligned} \tag{1-4.2}$$

1-5

$\sigma_x^A \sigma_x^B$ の固有値固有状態のペアは

$$\begin{aligned}&\left(s_x^A = +1, s_x^B = +1;\ |{+}{+}\rangle \equiv |+\rangle_A |+\rangle_B = \frac{|\uparrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle}{2}\right) \\ &\left(s_x^A = +1, s_x^B = -1;\ |{+}{-}\rangle \equiv |+\rangle_A |-\rangle_B = \frac{|\uparrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle - |\downarrow\downarrow\rangle}{2}\right) \\ &\left(s_x^A = -1, s_x^B = +1;\ |{-}{+}\rangle \equiv |-\rangle_A |+\rangle_B = \frac{|\uparrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle - |\downarrow\downarrow\rangle}{2}\right) \\ &\left(s_x^A = -1, s_x^B = -1;\ |{-}{-}\rangle \equiv |-\rangle_A |-\rangle_B = \frac{|\uparrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle}{2}\right)\end{aligned} \tag{1-5.1}$$

である。$s_x^A s_x^B$ の期待値は

$$\begin{aligned}\left\langle s_x^A s_x^B \right\rangle &= +1\times P(++) - 1\times P(+-) - 1\times P(-+) + 1\times P(--) \\ &= |\langle{+}{+}|\Psi\rangle|^2 - |\langle{+}{-}|\Psi\rangle|^2 - |\langle{-}{+}|\Psi\rangle|^2 + |\langle{-}{-}|\Psi\rangle|^2 \\ &= 0 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 0 = -1 \end{aligned} \tag{1-5.2}$$

1-6

$\sigma_\theta^A \sigma_\theta^B$ の固有値固有状態のペアは

$$\begin{aligned}&\left(s_\theta^A = +1, s_\theta^B = +1;\ |{+\theta}{+\theta}\rangle \equiv |+\theta\rangle_A |+\theta\rangle_B = \cos^2\frac{\theta}{2}|\uparrow\uparrow\rangle + \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}|\uparrow\downarrow\rangle + \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}|\downarrow\uparrow\rangle + \sin^2\frac{\theta}{2}|\downarrow\downarrow\rangle\right) \\ &\left(s_\theta^A = +1, s_\theta^B = -1;\ |{+\theta}{-\theta}\rangle \equiv |+\theta\rangle_A |-\theta\rangle_B = \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}|\uparrow\uparrow\rangle - \cos^2\frac{\theta}{2}|\uparrow\downarrow\rangle + \sin^2\frac{\theta}{2}|\downarrow\uparrow\rangle - \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}|\downarrow\downarrow\rangle\right) \\ &\left(s_\theta^A = -1, s_\theta^B = +1;\ |{-\theta}{+\theta}\rangle \equiv |-\theta\rangle_A |+\theta\rangle_B = \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}|\uparrow\uparrow\rangle + \sin^2\frac{\theta}{2}|\uparrow\downarrow\rangle - \cos^2\frac{\theta}{2}|\downarrow\uparrow\rangle - \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}|\downarrow\downarrow\rangle\right) \\ &\left(s_\theta^A = -1, s_\theta^B = -1;\ |{-\theta}{-\theta}\rangle \equiv |-\theta\rangle_A |-\theta\rangle_B = \sin^2\frac{\theta}{2}|\uparrow\uparrow\rangle - \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}|\uparrow\downarrow\rangle - \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}|\downarrow\uparrow\rangle + \cos^2\frac{\theta}{2}|\downarrow\downarrow\rangle\right)\end{aligned} \tag{1-6.1}$$

である。初期状態 $|\Psi\rangle$ での確率は

$$\begin{aligned}P(+\theta+\theta) &= |\langle +\theta+\theta|\Psi\rangle|^2 = 0 \\ P(+\theta-\theta) &= |\langle +\theta-\theta|\Psi\rangle|^2 = \frac{1}{2} \\ P(-\theta+\theta) &= |\langle -\theta+\theta|\Psi\rangle|^2 = \frac{1}{2} \\ P(-\theta-\theta) &= |\langle -\theta-\theta|\Psi\rangle|^2 = 0\end{aligned} \tag{1-6.2}$$

となる。この結果は $s_\theta^A = s_\theta^B$ になることはなく、必ず $s_\theta^A = -s_\theta^B = \pm1$ になるということを表す。

1-7

$\sigma_\theta^A \sigma_\varphi^B$ の固有値固有状態のペアは

$$\left(s_\theta^A = +1, s_\varphi^B = +1; \left|+\theta+\varphi\right\rangle \equiv \left|+\theta\right\rangle_A \left|+\varphi\right\rangle_B = \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\left|\uparrow\uparrow\right\rangle + \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\left|\uparrow\downarrow\right\rangle + \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\left|\downarrow\uparrow\right\rangle + \sin\frac{\theta}{2}\frac{\varphi}{2}\left|\downarrow\downarrow\right\rangle\right)$$
$$\left(s_\theta^A = +1, s_\varphi^B = -1; \left|+\theta-\varphi\right\rangle \equiv \left|+\theta\right\rangle_A \left|-\varphi\right\rangle_B = \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\left|\uparrow\uparrow\right\rangle - \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\left|\uparrow\downarrow\right\rangle + \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\left|\downarrow\uparrow\right\rangle - \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\left|\downarrow\downarrow\right\rangle\right)$$
$$\left(s_\theta^A = -1, s_\varphi^B = +1; \left|-\theta+\varphi\right\rangle \equiv \left|-\theta\right\rangle_A \left|+\varphi\right\rangle_B = \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\left|\uparrow\uparrow\right\rangle + \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\left|\uparrow\downarrow\right\rangle - \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\left|\downarrow\uparrow\right\rangle - \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\left|\downarrow\downarrow\right\rangle\right)$$
$$\left(s_\theta^A = -1, s_\varphi^B = -1; \left|-\theta-\varphi\right\rangle \equiv \left|-\theta\right\rangle_A \left|-\varphi\right\rangle_B = \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\left|\uparrow\uparrow\right\rangle - \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\left|\uparrow\downarrow\right\rangle - \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\left|\downarrow\uparrow\right\rangle + \cos\frac{\theta}{2}\frac{\varphi}{2}\left|\downarrow\downarrow\right\rangle\right) \tag{1-7.1}$$

である。$s_\theta^A s_\varphi^B$ の期待値は

$$\begin{aligned}\left\langle s_x^A s_x^B \right\rangle &= +1\times P(+\theta+\varphi) - 1\times P(+\theta-\varphi) - 1\times P(-\theta+\varphi) + 1\times P(-\theta-\varphi) \\ &= \left|\left\langle +\theta+\varphi|\Psi\right\rangle\right|^2 - \left|\left\langle +\theta-\varphi|\Psi\right\rangle\right|^2 - \left|\left\langle -\theta+\varphi|\Psi\right\rangle\right|^2 + \left|\left\langle -\theta-\varphi|\Psi\right\rangle\right|^2 \\ &= \frac{1}{2}\sin^2(\theta-\varphi) - \frac{1}{2}\cos^2(\theta-\varphi) - \frac{1}{2}\cos^2(\theta-\varphi) + \frac{1}{2}\sin^2(\theta-\varphi) \\ &= -\cos(2\theta-2\varphi)\end{aligned} \tag{1-7.2}$$

1-8

$s^A s^B$ の散りうる値は

$$(s^A, s^B) = (+1,+1), (+1,-1), (-1,+1), (-1,-1) \tag{1-8.1}$$

$s^A s^B$ の期待値を考える。θ と φ が同じ角度になる確率は 1/3 で期待値は -1 である。θ と φ が違う角度になる確率は 2/3 で期待値は $-\cos(120°) = \frac{1}{2}$ である。なので

$$\left\langle s^A s^B \right\rangle - 1\times\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\times\frac{2}{3} = 0 \tag{1-8.2}$$

1-9

(i)

θ と φ がどの方向でも $s^A s^B = -1$ なので、

$$\left\langle s^A s^B \right\rangle = -1 \tag{1-9.1}$$

(ii)

A が $0°$, $120°$、かつ B が $0°, 120°$ のとなる確率は 4/9 A が $240°$、かつ B が $240°$ のとなる確率は 1/9 である。なので $s^A s^B = -1$ となる確率は 5/9。残りが $s^A s^B = 1$ となる状況で、その確率は 4/9. なので

$$\left\langle s^A s^B \right\rangle = -1\times\frac{5}{9} + 1\times\frac{4}{9} = -\frac{1}{9} \tag{1-9.2}$$

(iii)

考えるべき場合は一見 8 通りあるが、s の値がすべて同じとき、s の値が 1 つだけ違うときの 2 種類にわけれて、このときの $\left\langle s^A s^B \right\rangle$ の値は既に (i)(ii) で調べた。両者とも期待値の値は負であるので、古典的に扱ったときの $s^A s^B$ の期待値は量子的に扱った場合と違って負の値となる。

感想

量子情報をやったことない人には”測定した”の意味が分かりくく、やるべきことを読み取れなかったら大門全部落としだし、やったことある人にとっては簡単で同じ内容をただひたすら書くだけのただ手が疲れて時間がとられるというひどい問題。

量子情報が流行り始めたは 2019 年 10 月の Google による実機の量子計算機での量子超越性が示されたというのがきっかけで、この試験が行われた直後での話なので、本番でのできはひどそう。これ解けた人は J.J.Sakurai での SG 実験の問題をやっていたか、上田先生まわりの量子光学をやってる人ぐらいな気がする。

この問題では量子力学の物理量は測定する前には決まっていないということを追っかけていたが、部分系 A と部分系 B を十分離して片方だけ測定するという設定にしてこれをナイーブに考えると、測定による相互作用が光速を超えるという結果が得られて相対論に反する結果となるのがわかる。これを問題にするのは難しそう。

問題 1　統計力学: 理想気体

1-1

(2) 式にハミルトニアンを代入する。分配関数は位置の積分を先にやって

$$
\begin{aligned}
Z(T,V,N) &= \frac{V^N}{N!h^{3N}}\left(\int \mathrm{d}p_x\,\mathrm{d}p_y\,\mathrm{d}p_z\, e^{-\frac{\beta\hbar^2}{2m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)}\right)^N \\
&= \frac{V^N}{N!}\left(\frac{mk_BT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3N/2}
\end{aligned}
\tag{1-1.1}
$$

これより、自由エネルギーは

$$
\begin{aligned}
F &= -k_BT\ln Z \\
&= -Nk_BT\ln\left[\frac{V}{N}\left(\frac{mk_BT}{2\pi\hbar^2}\right)e\right]
\end{aligned}
\tag{1-1.2}
$$

よって圧力は

$$
p = -\frac{\partial F}{\partial V} = \frac{Nk_BT}{V} \tag{1-1.3}
$$

1-2

$1/N!$ の因子がついていないときの分配関数 Z' は

$$
Z' = V^N\left(\frac{mk_BT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3N/2} \tag{1-2.1}
$$

より、これから得られるヘルムホルツの自由エネルギー F' は

$$
F' = -Nk_BT\ln\left[V\left(\frac{mk_BT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}\right] \tag{1-2.2}
$$

である。ヘルムホルツの自由エネルギーは示量性を持つはずだが、右辺の体積と粒子数を λ 倍しても F' が λ 倍になっていないことから、示量性という熱力学的性質を満たしていないのがわかる。

1-3

エントロピーは

$$
S = -\frac{\partial F}{\partial T} = Nk_B\ln\left[\frac{V}{N}\left(\frac{mk_BT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}e\right] + \frac{3}{2}Nk_B = Nk_B\ln\left[\frac{V}{N}\left(\frac{mk_BT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}e^{5/2}\right] \tag{1-3.1}
$$

$T\to 0$ では $S\to -\infty$ になり、発散するため熱力学第 3 法則に反する結果となっている。

1-4

$$
\begin{aligned}
\frac{C_V}{T} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial T^2} = -\frac{\partial S}{\partial T} \\
C_V &= \frac{3}{2}Nk_B
\end{aligned}
\tag{1-4.1}
$$

1-5

自由粒子の波動関数は

$$
\psi(x,y,z) = e^{i(k_xx+k_yy+k_zz)} \tag{1-5.1}
$$

のように書け、周期境界条件

$$\psi(x+L,y,z)=\psi(x,y+L,z)=\psi(x,y,z+L)=\psi(x,y,z) \tag{1-5.2}$$

を満たさないといけないので波数は整数 n_x,n_y,n_z を用いて

$$(k_x,k_y,k_z)=\frac{2\pi}{L}(n_x,n_y,n_z) \tag{1-5.3}$$

のように書ける。

1-6

$$\begin{aligned}\bar{N}&=\frac{1}{\Xi}\prod_k\sum_{n_k=0,1}n_k e^{-\beta(\varepsilon_k-\mu)n_k}=\frac{1}{\Xi}\frac{\partial}{\beta\partial\mu}\prod_k(1+e^{-\beta(\varepsilon_k-\mu)})\\&=\frac{\partial}{\beta\partial\mu}\ln\Xi=\frac{\partial}{\beta\partial\mu}\sum_k\ln\left(1+e^{-\beta(\varepsilon_k-\mu)}\right)=\sum_k\frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_k-\mu)}+1}=\sum_k f(\varepsilon_k)\end{aligned} \tag{1-6.1}$$

1-7

$$\begin{aligned}N&=\sum_k e^{-\beta(\varepsilon_k-\mu)}=\frac{V}{(2\pi)^3}e^{\beta\mu}\int\mathrm{d}^3k\,e^{-\beta\varepsilon_k}\\&=\frac{V}{2\pi^2}e^{\beta\mu}\int_0^\infty k^2\,\mathrm{d}k\,e^{-\frac{\beta\hbar^2}{2m}k^2}=\frac{V}{2\pi^2}\frac{\sqrt{\pi}}{4}\left(\frac{2mk_BT}{\hbar^2}\right)^{3/2}e^{\beta\mu}=V\left(\frac{mk_BT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}e^{\beta\mu}\\e^{-\beta\mu}&=\frac{V}{N}\left(\frac{mk_BT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}\\\mu&=-k_BT\ln\left[\frac{V}{N}\left(\frac{mk_BT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}\right]\end{aligned} \tag{1-7.1}$$

1-8

エントロピーはグランドポテンシャル $J=-k_BT\ln\Xi$ を使って $S=-\partial J/\partial T$ と表せるので、

$$\begin{aligned}S&=\frac{\partial}{\partial T}\sum_k k_BT\ln\left(1+e^{-\beta(\varepsilon_k-\mu)}\right)\\&\simeq\frac{\partial}{\partial T}\sum_k k_BTe^{-\beta(\varepsilon_k-\mu)}=\frac{\partial}{\partial T}Nk_BT=k_BT\frac{\partial N}{\partial T}+Nk_B=Nk_B\left[\frac{5}{2}-\frac{\mu}{k_BT}\right]\\&\simeq-\frac{\mu}{T}N\end{aligned} \tag{1-8.1}$$

1-9

温度が高いときの比熱の温度特性は

$$C_V=T\frac{\partial S}{\partial T}=-\frac{\mu}{T}N-N\frac{\partial\mu}{\partial T}=-\frac{\mu}{T}N+\frac{3}{2}Nk_B+\frac{\mu}{T}N=\frac{3}{2}Nk_B \tag{1-9.1}$$

となり、古典的に扱ったときと同じ結果になる。

これとフェルミオンの比熱が低温では T に比例することと併せてグラフを書ける。

感想

理想気体の典型問題。

最後、自由フェルミ気体の比熱の高温極限を調べるとき、$\partial\mu/\partial T$ じゃなくて、$\partial N/\partial T$ でやってしまって変な答えになってしまった。