問題 1　量子力学: エンタングルメント・局所実在性

測定結果がとりうる状態というのを、一般の状態にたいして、観測量がとりうる値つまり、観測量の固有値と解釈する。

1-1

σ_z の固有値固有状態のペアは

$$(s_z = +1;\,|\uparrow\rangle), (s_z = -1;\,|\downarrow\rangle) \tag{1-1.1}$$

である。s_z の期待値は

$$\begin{aligned}\langle s_z\rangle &= +1 \times P(\uparrow) - 1 \times P(\downarrow) \\ &= |\langle\uparrow|\uparrow\rangle|^2 - |\langle\downarrow|\uparrow\rangle|^2 \\ &= 1\end{aligned} \tag{1-1.2}$$

1-2

σ_x の固有値固有状態のペアは

$$\left(s_x = +1;\,|+\rangle \equiv \frac{|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle}{\sqrt{2}}\right), \left(s_x = -1;\,|-\rangle \equiv \frac{|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle}{\sqrt{2}}\right) \tag{1-2.1}$$

である。s_x の期待値は

$$\begin{aligned}\langle s_x\rangle &= +1 \times P(+) - 1 \times P(-) \\ &= |\langle+|\uparrow\rangle|^2 - |\langle-|\uparrow\rangle|^2 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0\end{aligned} \tag{1-2.2}$$

1-3

$\sigma(\theta)$ の固有値固有状態のペアは

$$\left(s_\theta = +1;\,|+\theta\rangle \equiv \cos\frac{\theta}{2}|\uparrow\rangle + \sin\frac{\theta}{2}|\downarrow\rangle\right), \left(s_\theta = -1;\,|-\theta\rangle \equiv \sin\frac{\theta}{2}|\uparrow\rangle - \cos\frac{\theta}{2}|\downarrow\rangle\right) \tag{1-3.1}$$

である。s_x の期待値は

$$\begin{aligned}\langle s_x\rangle &= +1 \times P(+\theta) - 1 \times P(-\theta) \\ &= |\langle+\theta|\uparrow\rangle|^2 - |\langle-\theta|\uparrow\rangle|^2 \\ &= \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} = \cos\theta\end{aligned} \tag{1-3.2}$$

1-4

$\sigma_z^A\sigma_z^B$ の固有値固有状態のペアは

$$\begin{aligned}&\left(s_z^A = +1, s_z^B = +1;\,|\uparrow\uparrow\rangle \equiv |\uparrow\rangle_A|\uparrow\rangle_B\right) \\ &\left(s_z^A = +1, s_z^B = -1;\,|\uparrow\downarrow\rangle \equiv |\uparrow\rangle_A|\downarrow\rangle_B\right) \\ &\left(s_z^A = -1, s_z^B = +1;\,|\downarrow\uparrow\rangle \equiv |\downarrow\rangle_A|\uparrow\rangle_B\right) \\ &\left(s_z^A = -1, s_z^B = -1;\,|\downarrow\downarrow\rangle \equiv |\downarrow\rangle_A|\downarrow\rangle_B\right)\end{aligned} \tag{1-4.1}$$

である。$s_z^A s_z^B$ の期待値は

$$\begin{aligned}\left\langle s_z^A s_z^B\right\rangle &= +1 \times P(\uparrow\uparrow) - 1 \times P(\uparrow\downarrow) - 1 \times P(\downarrow\uparrow) + 1 \times P(\downarrow\downarrow) \\ &= |\langle\uparrow\uparrow|\Psi\rangle|^2 - |\langle\uparrow\downarrow|\Psi\rangle|^2 - |\langle\downarrow\uparrow|\Psi\rangle|^2 + |\langle\downarrow\downarrow|\Psi\rangle|^2 \\ &= 0 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 0 = -1\end{aligned} \tag{1-4.2}$$

1-5

$\sigma_x^A \sigma_x^B$ の固有値固有状態のペアは

$$\begin{aligned}
&\left(s_x^A = +1, s_x^B = +1;\ |{+}{+}\rangle \equiv |+\rangle_A |+\rangle_B = \frac{|\uparrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle}{2}\right)\\
&\left(s_x^A = +1, s_x^B = -1;\ |{+}{-}\rangle \equiv |+\rangle_A |-\rangle_B = \frac{|\uparrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle - |\downarrow\downarrow\rangle}{2}\right)\\
&\left(s_x^A = -1, s_x^B = +1;\ |{-}{+}\rangle \equiv |-\rangle_A |+\rangle_B = \frac{|\uparrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle - |\downarrow\downarrow\rangle}{2}\right)\\
&\left(s_x^A = -1, s_x^B = -1;\ |{-}{-}\rangle \equiv |-\rangle_A |-\rangle_B = \frac{|\uparrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle}{2}\right)
\end{aligned} \tag{1-5.1}$$

である。$s_x^A s_x^B$ の期待値は

$$\begin{aligned}
\langle s_x^A s_x^B \rangle &= +1 \times P(++) - 1 \times P(+-) - 1 \times P(-+) + 1 \times P(--)\\
&= |\langle{+}{+}|\Psi\rangle|^2 - |\langle{+}{-}|\Psi\rangle|^2 - |\langle{-}{+}|\Psi\rangle|^2 + |\langle{-}{-}|\Psi\rangle|^2\\
&= 0 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 0 = -1
\end{aligned} \tag{1-5.2}$$

1-6

$\sigma_\theta^A \sigma_\theta^B$ の固有値固有状態のペアは

$$\begin{aligned}
&\left(s_\theta^A = +1, s_\theta^B = +1;\ |{+\theta}{+\theta}\rangle \equiv |{+\theta}\rangle_A |{+\theta}\rangle_B = \cos^2\frac{\theta}{2}|\uparrow\uparrow\rangle + \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}|\uparrow\downarrow\rangle + \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}|\downarrow\uparrow\rangle + \sin^2\frac{\theta}{2}|\downarrow\downarrow\rangle\right)\\
&\left(s_\theta^A = +1, s_\theta^B = -1;\ |{+\theta}{-\theta}\rangle \equiv |{+\theta}\rangle_A |{-\theta}\rangle_B = \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}|\uparrow\uparrow\rangle - \cos^2\frac{\theta}{2}|\uparrow\downarrow\rangle + \sin^2\frac{\theta}{2}|\downarrow\uparrow\rangle - \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}|\downarrow\downarrow\rangle\right)\\
&\left(s_\theta^A = -1, s_\theta^B = +1;\ |{-\theta}{+\theta}\rangle \equiv |{-\theta}\rangle_A |{+\theta}\rangle_B = \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}|\uparrow\uparrow\rangle + \sin^2\frac{\theta}{2}|\uparrow\downarrow\rangle - \cos^2\frac{\theta}{2}|\downarrow\uparrow\rangle - \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}|\downarrow\downarrow\rangle\right)\\
&\left(s_\theta^A = -1, s_\theta^B = -1;\ |{-\theta}{-\theta}\rangle \equiv |{-\theta}\rangle_A |{-\theta}\rangle_B = \sin^2\frac{\theta}{2}|\uparrow\uparrow\rangle - \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}|\uparrow\downarrow\rangle - \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}|\downarrow\uparrow\rangle + \cos^2\frac{\theta}{2}|\downarrow\downarrow\rangle\right)
\end{aligned} \tag{1-6.1}$$

である。初期状態 $|\Psi\rangle$ での確率は

$$\begin{aligned}
P(+\theta+\theta) &= |\langle{+\theta}{+\theta}|\Psi\rangle|^2 = 0\\
P(+\theta-\theta) &= |\langle{+\theta}{-\theta}|\Psi\rangle|^2 = \frac{1}{2}\\
P(-\theta+\theta) &= |\langle{-\theta}{+\theta}|\Psi\rangle|^2 = \frac{1}{2}\\
P(-\theta-\theta) &= |\langle{-\theta}{-\theta}|\Psi\rangle|^2 = 0
\end{aligned} \tag{1-6.2}$$

となる。この結果は $s_\theta^A = s_\theta^B$ になることはなく、必ず $s_\theta^A = -s_\theta^B = \pm 1$ になるということを表す。

1-7

$\sigma_\theta^A \sigma_\varphi^B$ の固有値固有状態のペアは

$$\begin{aligned}
&\left(s_\theta^A = +1, s_\varphi^B = +1;\ |{+\theta}{+\varphi}\rangle \equiv |{+\theta}\rangle_A |{+\varphi}\rangle_B = \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}|\uparrow\uparrow\rangle + \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}|\uparrow\downarrow\rangle + \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}|\downarrow\uparrow\rangle + \sin\frac{\theta}{2}\frac{\varphi}{2}|\downarrow\downarrow\rangle\right)\\
&\left(s_\theta^A = +1, s_\varphi^B = -1;\ |{+\theta}{-\varphi}\rangle \equiv |{+\theta}\rangle_A |{-\varphi}\rangle_B = \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}|\uparrow\uparrow\rangle - \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}|\uparrow\downarrow\rangle + \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}|\downarrow\uparrow\rangle - \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}|\downarrow\downarrow\rangle\right)\\
&\left(s_\theta^A = -1, s_\varphi^B = +1;\ |{-\theta}{+\varphi}\rangle \equiv |{-\theta}\rangle_A |{+\varphi}\rangle_B = \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}|\uparrow\uparrow\rangle + \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}|\uparrow\downarrow\rangle - \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}|\downarrow\uparrow\rangle - \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}|\downarrow\downarrow\rangle\right)\\
&\left(s_\theta^A = -1, s_\varphi^B = -1;\ |{-\theta}{-\varphi}\rangle \equiv |{-\theta}\rangle_A |{-\varphi}\rangle_B = \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}|\uparrow\uparrow\rangle - \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}|\uparrow\downarrow\rangle - \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}|\downarrow\uparrow\rangle + \cos\frac{\theta}{2}\frac{\varphi}{2}|\downarrow\downarrow\rangle\right)
\end{aligned} \tag{1-7.1}$$

である。$s_\theta^A s_\varphi^B$ の期待値は

$$\begin{aligned}\left\langle s_x^A s_x^B \right\rangle &= +1\times P(+\theta+\varphi) - 1\times P(+\theta-\varphi) - 1\times P(-\theta+\varphi) + 1\times P(-\theta-\varphi) \\ &= \left|\langle +\theta+\varphi|\Psi\rangle\right|^2 - \left|\langle +\theta-\varphi|\Psi\rangle\right|^2 - \left|\langle -\theta+\varphi|\Psi\rangle\right|^2 + \left|\langle -\theta-\varphi|\Psi\rangle\right|^2 \\ &= \frac{1}{2}\sin^2(\theta-\varphi) - \frac{1}{2}\cos^2(\theta-\varphi) - \frac{1}{2}\cos^2(\theta-\varphi) + \frac{1}{2}\sin^2(\theta-\varphi) \\ &= -\cos(2\theta-2\varphi) \end{aligned} \tag{1-7.2}$$

1-8

$s^A s^B$ の散りうる値は

$$(s^A, s^B) = (+1,+1),(+1,-1),(-1,+1),(-1,-1) \tag{1-8.1}$$

$s^A s^B$ の期待値を考える。θ と φ が同じ角度になる確率は 1/3 で期待値は -1 である。θ と φ が違う角度になる確率は 2/3 で期待値は $-\cos(120^\circ) = \frac{1}{2}$ である。なので

$$\left\langle s^A s^B \right\rangle - 1\times\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\times\frac{2}{3} = 0 \tag{1-8.2}$$

1-9

(i)

θ と φ がどの方向でも $s^A s^B = -1$ なので、

$$\left\langle s^A s^B \right\rangle = -1 \tag{1-9.1}$$

(ii)

A が 0°, 120°、かつ B が $0^\circ, 120^\circ$ のとなる確率は 4/9 A が 240°、かつ B が 240° のとなる確率は 1/9 である。なので $s^A s^B = -1$ となる確率は 5/9。残りが $s^A s^B = 1$ となる状況で、その確率は 4/9. なので

$$\left\langle s^A s^B \right\rangle = -1\times\frac{5}{9} + 1\times\frac{4}{9} = -\frac{1}{9} \tag{1-9.2}$$

(iii)

考えるべき場合は一見 8 通りあるが、s の値がすべて同じとき、s の値が 1 つだけ違うときの 2 種類にわけれて、このときの $\left\langle s^A s^B \right\rangle$ の値は既に (i)(ii) で調べた。両者とも期待値の値は負であるので、古典的に扱ったときの $s^A s^B$ の期待値は量子的に扱った場合と違って負の値となる。

感想

量子情報をやったことない人には”測定した”の意味が分かりくく、やるべきことを読み取れなかったら大門全部落としだし、やったことある人にとっては簡単で同じ内容をただひたすら書くだけのただ手が疲れて時間がとられるというひどい問題。

量子情報が流行り始めたは 2019 年 10 月の Google による実機の量子計算機での量子超越性が示されたというのがきっかけで、この試験が行われた直後での話なので、本番でのできはひどそう。これ解けた人は J.J.Sakurai での SG 実験の問題をやっていたか、上田先生まわりの量子光学をやってる人ぐらいな気がする。

この問題では量子力学の物理量は測定する前には決まっていないということを追っかけていたが、部分系 A と部分系 B を十分離して片方だけ測定するという設定にしてこれをナイーブに考えると、測定による相互作用が光速を超えるという結果が得られて相対論に反する結果となるのがわかる。これを問題にするのは難しそう。