2017 年度東大理物答案

しゃんごん (@CEY3944)

2025 年 6 月 22 日

物理学

問題 1　量子力学: 摂動論・断熱近似

1-1

$$
\begin{aligned}
(H - E_2 I)\,|2\rangle &= V\,|1\rangle + E_2\,|2\rangle - E_2\,|2\rangle \\
\langle 2|\,(H - E_2 I)\,|2\rangle &= V\,\langle 2|1\rangle = 0 \\
(H - E_2 I)^2\,|2\rangle &= V^2\,|2\rangle + E_2\,|2\rangle - E_2\,|2\rangle \\
\langle 2|\,(H - E_2 I)^2\,|2\rangle &= V^2\,\langle 2|2\rangle = V^2
\end{aligned}
\tag{1-1.1}
$$

1-2

固有値方程式より

$$
\begin{aligned}
0 = |H - EI| &= (E_1 - E)(E_2 - E) - V^2 = E^2 - (E_1 + E_2)E + E_1 E_2 - V^2 \\
E &= \frac{E_1 + E_2}{2} \pm \sqrt{\frac{(E_1 - E_2)^2}{4} + V^2}
\end{aligned}
\tag{1-2.1}
$$

また、固有ベクトルは

$$
\begin{pmatrix} E_1 - E_\pm & V \\ V & E_2 - E_\pm \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle 1|\psi_\pm\rangle \\ \langle 2|\psi_\pm\rangle \end{pmatrix} = 0 \tag{1-2.2}
$$

より、

$$
\begin{aligned}
0 &= (E_1 - E_\pm)\,\langle 1|\psi_\pm\rangle + V\,\langle 2|\psi_\pm\rangle \\
\frac{\langle 2|\psi_\pm\rangle}{\langle 1|\psi_\pm\rangle} &= \frac{E_\pm - E_1}{V} \\
\frac{\langle 2|\psi_+\rangle}{\langle 1|\psi_+\rangle} &= \frac{E_2 - E_1}{2V} + \sqrt{\frac{(E_2 - E_1)^2}{4V^2} + 1} \\
\frac{\langle 2|\psi_-\rangle}{\langle 1|\psi_-\rangle} &= \frac{E_2 - E_1}{2V} - \sqrt{\frac{(E_2 - E_1)^2}{4V^2} + 1}
\end{aligned}
\tag{1-2.3}
$$

1-3

$$
\begin{aligned}
\langle \psi_+|\,H\,|\psi_-\rangle = E_+\,\langle \psi_+|\psi_-\rangle &= E_-\,\langle \psi_+|\psi_-\rangle \\
0 &= (E_+ - E_-)\,\langle \psi_+|\psi_-\rangle
\end{aligned}
\tag{1-3.1}
$$

いま、固有値は異なるので $\langle \psi_+|\psi_-\rangle = 0$ がいえ、固有状態が直交しているのがわかる。

1-4

設問 2 で得られた結果に $E_1 = E_2 - \mathcal{E}\lambda$ を入れると

$$
E_\pm(\lambda) = E_2 - \frac{\mathcal{E}\lambda}{2} \pm \sqrt{\frac{\mathcal{E}^2\lambda^2}{4} + V^2} \tag{1-4.1}
$$

これより

$$
E_+(\lambda) - E_-(\lambda) = 2\sqrt{\frac{\mathcal{E}^2\lambda^2}{4} + V^2} \geq 2\sqrt{V^2} = 2V \tag{1-4.2}
$$

1-5

(i)

シュレディンガー方程式に $|\psi_{\pm}^{(t/T)}\rangle$ の完全系をいれて整理していく。

$$
\begin{aligned}
i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle &= H|\psi(t)\rangle \\
i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Big(|\psi_{+}^{(t/T)}\rangle\langle\psi_{+}^{(t/T)}|\psi(t)\rangle + |\psi_{-}^{(t/T)}\rangle\langle\psi_{-}^{(t/T)}|\psi(t)\rangle\Big) &= |\psi_{+}^{(t/T)}\rangle\langle\psi_{+}^{(t/T)}|H|\psi_{+}^{(t/T)}\rangle\langle\psi_{+}^{(t/T)}|\psi(t)\rangle \\
&\quad + |\psi_{+}^{(t/T)}\rangle\langle\psi_{+}^{(t/T)}|H|\psi_{-}^{(t/T)}\rangle\langle\psi_{-}^{(t/T)}|\psi(t)\rangle \\
&\quad + |\psi_{+}^{(t/T)}\rangle\langle\psi_{+}^{(t/T)}|H|\psi_{+}^{(t/T)}\rangle\langle\psi_{+}^{(t/T)}|\psi(t)\rangle \\
&\quad + |\psi_{-}^{(t/T)}\rangle\langle\psi_{-}^{(t/T)}|H|\psi_{-}^{(t/T)}\rangle\langle\psi_{-}^{(t/T)}|\psi(t)\rangle \\
i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Big(c_{+}(t)|\psi_{+}^{(t/T)}\rangle + c_{-}(t)|\psi_{-}^{(t/T)}\rangle\Big) &= E_{+}(t/T)c_{+}(t)|\psi_{+}^{(t/T)}\rangle + E_{-}(t/T)c_{-}(t)|\psi_{-}^{(t/T)}\rangle
\end{aligned}
\tag{1-5.1}
$$

また、$|\psi_{+}^{(\lambda)}\rangle$ と $|\psi_{-}^{(\lambda)}\rangle$ が直交していることから

$$
|\psi_{-}^{(t/T)}\rangle = -\sin(\theta(\lambda))|1\rangle + \cos(\theta(\lambda))|2\rangle \tag{1-5.2}
$$

のように書ける。$|\psi_{\pm}^{(t/T)}\rangle$ の基底で書いた時間発展の式を $|1\rangle, |2\rangle$ の基底で書き直すと

$$
\begin{aligned}
&i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Big[\Big\{c_{+}(t)\cos(\theta(t/T)) - c_{-}(t)\sin(\theta(t/T))\Big\}|1\rangle + \Big\{c_{+}(t)\sin(\theta(t/T)) + c_{-}(t)\cos(\theta(t/T))\Big\}|2\rangle\Big] \\
&= \Big\{E_{+}(t/T)c_{+}(t)\cos(\theta(t/T)) - E_{-}(t/T)c_{-}(t)\sin(\theta(t/T))\Big\}|1\rangle \\
&\quad + \Big\{E_{+}(t/T)c_{+}(t)\sin(\theta(t/T)) + E_{-}(t/T)c_{-}(t)\cos(\theta(t/T))\Big\}|2\rangle
\end{aligned}
\tag{1-5.3}
$$

これより各基底の成分を見ると

$$
\begin{aligned}
\Big(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - E_{+}(t/T)\Big)c_{+}(t)\cos(\theta(t/T)) - \Big(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - E_{-}(t/T)\Big)c_{-}(t)\sin(\theta(t/T)) = 0 \\
\Big(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - E_{+}(t/T)\Big)c_{+}(t)\sin(\theta(t/T)) + \Big(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - E_{-}(t/T)\Big)c_{-}(t)\cos(\theta(t/T)) = 0
\end{aligned}
\tag{1-5.4}
$$

(ii)

一般の関数 $f(t)$ に対し、

$$
i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Big[f(t)e^{-\frac{i}{\hbar}\int_{-T}^{t}dt' E_{\pm}(t'/T)}\Big] = e^{-\frac{i}{\hbar}\int_{-T}^{t}dt' E_{\pm}(t'/T)}\Big[-i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + E_{\pm}(t/T)\Big]f(t) \tag{1-5.5}
$$

となるので、$f(t) = \tilde{c}_{\pm}(t)\cos(\theta(t/T)), \tilde{c}_{\pm}(t)\sin(\theta(t/T))$ として前問で得られた時間発展の式に入れると、

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\Big[\tilde{c}_{+}(t)\cos(\theta(t/T)) - \tilde{c}_{-}(t)\sin(\theta(t/T))\Big] = 0 \\
\frac{\partial}{\partial t}\Big[\tilde{c}_{+}(t)\sin(\theta(t/T)) + \tilde{c}_{-}(t)\cos(\theta(t/T))\Big] = 0
\end{aligned}
\tag{1-5.6}
$$

1-6

外部パラメータ λ は磁場で、ゼーマン分裂によるエネルギー準位のシフトを表していると見える。ホッピング V によって二準位は結合性軌道と反結合性軌道になり、磁場を加えてもと 2 準位の上下を入れ替えたとしても、結合性軌道と反結合性軌道は設問 4 により交わることはなく、反結合性軌道はいつまでたっても反結合性軌道の対称性をもつといった感じか。

感想

その場で notation を把握しないといけないのが面倒な問題。

設問 6 でいろいろ与えられたものを使った説明は全く思いつかなかった。ナイーブに設問 5 の結果を使うとうまくいかない。設問 5 で得られた時間発展の式と与えられた初期条件より

$$\begin{aligned}\tilde{c}_+(t)\cos(\theta(t/T)) - \tilde{c}_-(t)\sin(\theta(t/T)) &= \tilde{c}_+(-T)\cos(\theta(-1)) - \tilde{c}_-(-T)\sin(\theta(-1)) = 1 \\ \tilde{c}_+(t)\sin(\theta(t/T)) + \tilde{c}_-(t)\cos(\theta(t/T)) &= \tilde{c}_+(-T)\sin(\theta(-1)) + \tilde{c}_-(-T)\cos(\theta(-1)) = 0\end{aligned}$$

これより

$$\tilde{c}_+(t) = \cos(\theta(t/T)), \quad \tilde{c}_-(t) = -\sin(\theta(t/T))$$

なので、$t = T$ では

$$\tilde{c}_+(T) = 0, \quad \tilde{c}_-(T) = 1$$

となって意図しない解が出てしまっている。

問題 2　統計力学: 理想気体

2-1

(i)

$$
\begin{aligned}
Z &= \frac{1}{N!}\left[\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int_V d^3r \int d^3p\, \exp\left(-\frac{\beta p^2}{2m}\right)\right]^N \\
&= \frac{1}{N!}\left[V\left(\frac{mk_BT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}\right]
\end{aligned}
\tag{2-1.1}
$$

これより内部エネルギーは

$$
\begin{aligned}
V &= -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z = -\frac{\partial}{\partial\beta}\left[N\ln\frac{V}{N}\left(\frac{m}{2\pi\hbar^2\beta}\right)^{3/2} 2\right] \\
&= \frac{3N}{2\beta} = \frac{3}{2}Nk_BT
\end{aligned}
\tag{2-1.2}
$$

(ii)

$$
\begin{aligned}
F &= -k_BT\ln Z = -Nk_BT\ln\left[\frac{V}{N}\left(\frac{m}{2\pi\hbar^2\beta}\right)^{3/2} e\right] \\
p &= -\frac{\partial F}{\partial V} = \frac{Nk_BT}{V}
\end{aligned}
\tag{2-1.3}
$$

(iii)

$$
S = -\frac{\partial F}{\partial T} = Nk_B\ln\left[\frac{V}{N}\left(\frac{mk_BT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} e\right] + \frac{3}{2}Nk_B \tag{2-1.4}
$$

なので

$$
\Delta S(T_0, T_0/2) = S(T_0) - S(T_0/2) = Nk_B\ln 2 \tag{2-1.5}
$$

2-2

(i)

大分配関数は

$$
\Xi = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left[V\left(\frac{mk_BT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}\right]^n e^{\beta\mu n} = \exp\left[V\left(\frac{mk_BT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} e^{\beta\mu}\right] \tag{2-2.1}
$$

より、グランドポテンシャルは

$$
J = -k_BT\ln\Xi = -Vk_BT\left[\left(\frac{mk_BT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} e^{\beta\mu}\right] \tag{2-2.2}
$$

となる。なので粒子数は

$$
\begin{aligned}
\langle N(T)\rangle &= -\frac{\partial J}{\partial\mu} = V\left(\frac{mk_BT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} e^{\beta\mu} \\
\frac{\langle N(T_1)\rangle}{\langle N(T_2)\rangle} &= \frac{T_1^{3/2}e^{\mu/k_BT_1}}{T_2^{3/2}e^{\mu/k_BT_2}}
\end{aligned}
\tag{2-2.3}
$$

(ii)

圧力は

$$p = -\frac{\partial J}{\partial V} = -kB_T\left(\frac{mk_BT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} e^{\beta\mu} \tag{2-2.4}$$

より、

$$\frac{\langle N(T)\rangle}{V} = \left(\frac{mk_BT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} e^{\beta\mu} = \frac{p}{k_BT} \tag{2-2.5}$$

2-3

(i)

$(n_x, n_y, n_z) = (1, 1, 1)$ の状態が基底状態なので、これのエネルギー E_0 は

$$E_0 = \frac{\pi^2}{2m}\frac{\hbar^2(1+1+1/4)}{L^2} = \frac{9\pi^2\hbar^2}{8mL^2} \tag{2-3.1}$$

である。第 1 励起状態は $(n_x, n_y, n_z) = (1, 1, 2)$ であるので、これのエネルギー E_1 は

$$E_1 = \frac{\pi^2}{2m}\frac{\hbar^2(1+1+1)}{L^2} = \frac{3\pi^2\hbar^2}{2mL^2} \tag{2-3.2}$$

である。

(ii)

系が十分低温であるので分配関数を考えるときの状態は基底状態と第 1 励起状態だけを考えればよい。なので分配関数は

$$Z = \sum_{k=0}^{N} {}_NC_k e^{-(N-k)\beta E_0} e^{-k\beta E_1} = \left(e^{-\beta E_0} + e^{-\beta E_1}\right)^N \tag{2-3.3}$$

これより、内部エネルギーは

$$Z = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z = N\frac{E_0 e^{-\beta E_0} + E_1 e^{-\beta}}{e^{-\beta E_0} + e^{-\beta E_1}} = NE_0 + N\frac{E_1 - E_0}{1 + e^{\beta(E_1 - E_0)}} \tag{2-3.4}$$

となる。古典系とは違い、内部エネルギーは温度に比例せず基底状態のエネルギーに漸近していく。

(iii)

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = -k_B\beta^2\frac{\partial U}{\partial\beta} = Nk_B\left(\frac{(E_1 - E_0)/2k_BT}{\cosh(E_1 - E_0)/2k_BT}\right)^2 \tag{2-3.5}$$

2-4　(iv)

$$\delta S(T_0, T_0/2) = \int_{T_0/2}^{T_0}\frac{C_V(T)}{T}dT \simeq \frac{C_V(T_0/2)}{T_0/2}\left(T_0 - \frac{T_0}{2}\right) = C_V(T_0/2) \to 0 \qquad (T_0 \to 0) \tag{2-4.1}$$

古典的には $3N$ 次元位相空間の半径 $\sqrt{2mE}$ の球の表面積に比例する。これの対数をとったのがボルツマンエントロピーなので、ΔS は状態数の比の対数となる。実際状態を求めると

$$W(E)dE = \frac{a_d}{N!}\left[V\left(\frac{mE}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}\right]^N \frac{dE}{E} \tag{2-4.2}$$

となる。$E \propto T$ になることを使うと

$$\frac{W(T_0)}{W(T_0/2)} = 2^N$$
$$\Delta S(T_0, T_0/2) = Nk_B \ln 2 \tag{2-4.3}$$

同じ結果が得られる。

量子的に扱ったときの振る舞いは $T_0 \to 0$ とすると、ボース粒子がとれる状態は基底状態の 1 通りのみになる。なのでボルツマンエントロピーは

$$S = k_B \ln 1 = 0 \tag{2-4.4}$$

となる。このことから $T_0 \to 0$ の振る舞いがわかる。

感想

理想気体を古典・量子ともに、ミクロカノニカル分布・カノニカル分布・グランドカノニカル分布にして調べていく問題。よく短くまとめたなぁという感じた。最後の古典系でのボルツマンエントロピーが $\Delta S \propto Nk_B$ になるのは、これで十分な感じもするが、量子系みたいにもっと直感的で完結に説明できないものだろうかと思ってしまった。

問題 3　電磁気学: 電磁波の放射

3-1

スカラーポテンシャルは

$$\begin{aligned}\phi_0(\boldsymbol{r}) &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2 - rd\cos\theta + d^2/4}} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2 + rd\cos\theta + d^2/4}} \\ &\simeq \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(1 + \frac{d}{2r}\cos\theta\right) - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(1 - \frac{d}{2r}\cos\theta\right) \\ &= \frac{qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{p\cdot r}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\end{aligned} \tag{3-1.1}$$

これより静電場は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= -\boldsymbol{\nabla}\phi_0(\boldsymbol{r}) \\ &= -\left(\boldsymbol{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\theta\frac{\partial}{r\partial\theta} + \boldsymbol{e}_\varphi\frac{\partial}{r\sin\theta\partial\varphi}\right)\frac{qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \\ &= \frac{qd}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(2\cos\theta\boldsymbol{e}_r + \sin\theta\boldsymbol{e}_\theta)\end{aligned} \tag{3-1.2}$$

3-2

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = -\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{r},t) - \frac{\partial\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}, \quad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) \tag{3-2.1}$$

3-3

まず、スカラーポテンシャルについて

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\boldsymbol{\nabla}\phi + \frac{\partial A}{\partial t}\right) &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla^2\phi + \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0}\end{aligned} \tag{3-3.1}$$

次に、ベクトルポテンシャルについて

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} &= \mu_0\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right) &= \mu_0\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}) - \nabla^2\boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2} &= \mu_0\boldsymbol{j} \\ \nabla^2\boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} &= -\mu_0\boldsymbol{j}\end{aligned} \tag{3-3.2}$$

3-4

電荷保存則より

$$q = \int dt\int dS j_z(\boldsymbol{r},t)dt = \frac{I_0}{i\omega}e^{i\omega t} \tag{3-4.1}$$

3-5

電磁波の放射で最も低次の放射は双極子放射で、これは設問 1 で見たように $1/r^2$ の依存性になるので、これより高次の $1/r^3$ といった項は適宜落としていきながら変形して行く。よってベクトルポテンシャルは

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3\boldsymbol{r}'\,\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c})}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \\
A_z(\boldsymbol{r},t) &= \frac{\mu_0 I_0}{4\pi}e^{i\omega t}\int d^3\boldsymbol{r}'\,\frac{e^{-ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \\
&\simeq \frac{\mu_0 I_0}{4\pi}e^{i\omega t}\int d^3\boldsymbol{r}'\,\frac{e^{-ik\left(r-r'\cos\theta'\right)}}{r}\left(1+\frac{r'\cos\theta'}{r}\right)\delta(x)\delta(y) \\
&\simeq \frac{\mu_0 I_0}{4\pi}\frac{e^{i(\omega t-kr)}}{r}\int_{-d/2}^{d/2}dz'\,e^{ikz'} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi}\frac{e^{i(\omega t-kr)}}{kr}\sin\frac{kd}{2} \\
&\simeq \frac{\mu_0 I_0 d}{4\pi}\frac{e^{i(\omega t-kr)}}{r} \\
\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) &= \frac{\mu_0 I_0 d}{4\pi}\frac{e^{i(\omega t-kr)}}{r}(\cos\theta\boldsymbol{e}_r-\sin\theta\boldsymbol{e}_\theta) \qquad (3\text{-}5.1)
\end{aligned}
$$

そして、r の次数を増やさないように磁場を求める。微分演算子をみると $\nabla=\boldsymbol{e}_r\partial_r+\boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{r}\partial_\theta+\boldsymbol{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\partial_\varphi$ となっていて、r 方向以外の微分は r の次数を増やすことがわかる。なので r 方向の微分だけに注目するの十分である。

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) &= \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) \\
&\simeq \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\mu_0 I_0 d}{4\pi}\frac{e^{i(\omega t-kr)}}{r}\right]\boldsymbol{e}_r\times(\cos\theta\boldsymbol{e}_r-\sin\theta\boldsymbol{e}_\theta) \\
&\simeq -i\frac{\mu_0 I_0 kd}{4\pi}\frac{e^{i(\omega t-kr)}}{r}\sin\theta\boldsymbol{e}_\varphi = -i\frac{\mu_0 I_0 d\omega}{4\pi c}\frac{e^{i(\omega t-kr)}}{r}\sin\theta\boldsymbol{e}_\varphi \qquad (3\text{-}5.2)
\end{aligned}
$$

となる。2 つ目の近似は考えているスケールでは分母の r はほぼ一定とみなして振動成分の微分だけ見るというものに対応する。次に電場は、r 付近に電流源はないので

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} &= \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) \\
i\omega\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) &\simeq \boldsymbol{e}_r\times\boldsymbol{e}_\varphi\frac{\partial}{\partial r}\left[-i\frac{\mu_0 I_0 d\omega}{4\pi c}\frac{e^{i(\omega t-kr)}}{r}\sin\theta\right] \\
\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) &\simeq -i\frac{\mu_0 I_0 d\omega}{4\pi}\frac{e^{i(\omega t-kr)}}{r}\sin\theta\boldsymbol{e}_\theta \qquad (3\text{-}5.3)
\end{aligned}
$$

3-6

問題の指示に従わず、複素表示でポインティングベクトルを計算する。そのままだと実表示した電磁場の時間平均と同じ値にならず、同じ値にするには少し定義が変わって以下のように計算する。

$$
\boldsymbol{S} = \frac{1}{2\mu_0}\boldsymbol{E}^*\times\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{2c}\left(\frac{I_0 d\omega}{4\pi}\right)^2\frac{\sin^2\theta}{r^2}\boldsymbol{e}_r \qquad (3\text{-}6.1)
$$

3-7

波源との距離は

$$
\begin{cases} R_1^2 &= r^2+\frac{D^2}{4}-rD\cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right) \\ R_2^2 &= r^2+\frac{D^2}{4}-rD\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) \end{cases}
\quad\rightarrow\quad
\begin{cases} R_1 &\simeq r\sqrt{1+\frac{D}{r}\sin\varphi} \\ R_2 &\simeq r\sqrt{1-\frac{D}{r}\sin\varphi} \end{cases}
\quad\rightarrow\quad
\begin{cases} R_1 &\simeq r+\frac{D}{2}\sin\varphi \\ R_2 &\simeq r-\frac{D}{2}\sin\varphi \end{cases}
\qquad (3\text{-}7.1)
$$

である。なので電場は

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E} &= \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 \\
&= \boldsymbol{e}_z E_0[\cos(\omega t - kR_1 - \delta_1) + \cos(\omega t - kR_2 - \delta_2)] \\
&= \boldsymbol{e}_z 2E_0 \cos\left(\frac{k(R_1 - R_2) + \delta_1 - \delta_2}{2}\right)\cos\left(\omega t - \frac{k(R_1 + R_2) + \delta_1 + \delta_2}{2}\right) \\
&= \boldsymbol{e}_z 2E_0 \cos\left(\frac{kD\sin\varphi + \delta_1 - \delta_2}{2}\right)\cos\left(\omega t - kr - \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}\right)
\end{aligned}
\tag{3-7.2}
$$

となる。

$\delta_n = 0$ のときには

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E} &= \boldsymbol{e}_z 2E_0 \cos\left(\frac{kD\sin\varphi}{2}\right)\cos(\omega t - kr) \\
I &= 4\cos^2\left(\frac{kD\sin\varphi}{2}\right)\cos^2(\omega t - kr)
\end{aligned}
\tag{3-7.3}
$$

となる。強度が最大値となる角度は

$$
\begin{aligned}
\frac{kD\sin\varphi}{2} &= n\pi \\
\sin\varphi &= \frac{2\pi}{kD}n
\end{aligned}
\tag{3-7.4}
$$

である。問題文の書き方だとわかりにくいが、波動の位相は kr のスケールで変化するので、電磁波の波長は r 程度である。よって $r \gg D$ というのは $kD \sim D/r \ll 1$ というのを表している。なのでここで現れた整数は $n = 0$ しかとることができない。つまり強度が最大になる角度は $\varphi = 0$ である。

これを中心として強度が最大値の半分になる角度は

$$
\begin{aligned}
\frac{kD\sin\varphi}{2} &= \pm\frac{\pi}{4} \\
\sin\varphi &= \pm\frac{\pi}{2kD}
\end{aligned}
\tag{3-7.5}
$$

とわかる。よってその角度幅は

$$
\delta\varphi = \arcsin\left(\frac{\pi}{2kD}\right) - \arcsin\left(-\frac{\pi}{2kD}\right) = 2\arcsin\left(\frac{\pi}{2kD}\right) \tag{3-7.6}
$$

である。この値を小さくするには kD を小さくすればよい。よって D を小さくすればよい。

次に電場の強度が最大になる方向が $\varphi = \varphi_0$ となるには

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{kD\sin\varphi_0 + \delta_1 - \delta_2}{2} \\
\delta_2 - \delta_1 &= kD\sin\varphi_0
\end{aligned}
\tag{3-7.7}
$$

感想

砂川理論電磁気とかジャクソン電磁気を読んだことあるかを聞かれてるのかと思った。この本だと計算がただただ面倒という印象しかなかったが、試験問題に収まるように設定を見直すと思ったより単純な計算で双極子放射を求められたので、勉強になった。

設問 5 の近似は、双極子放射なので影響は何もかも $1/r$ に依存して、$1/r^2$ より高次の項は 4 極子以上の放射であるので無視するというのが肝。

問題 5　物性: X 線回折

5-1

$$
\begin{aligned}
I &= C\left|\int_V \sum_{p=0}^{N-1} n_0\delta(x)\delta(y)\delta(z-ap)e^{iq\cdot r}dr\right|^2 \\
&= C\left|\sum_{p=0}^{N-1} n_0 e^{iq_z ap}\right|^2 = C\left|n_0\frac{1-e^{iq_z aN}}{1-e^{iq_z a}}\right|^2 \\
&= Cn_0^2\frac{1-e^{iq_z aN}}{1-e^{iq_z a}}\frac{1-e^{-iq_z aN}}{1-e^{-iq_z a}} = Cn_0^2\frac{1-\cos(q_z aN)}{1-\cos(q_z a)}
\end{aligned}
\tag{5-1.1}
$$

5-2

前問と同様にやると

$$
\begin{aligned}
I &= C\left|\int_V \sum_{p_x,p_y,p_z} n_0\delta(x-ap_x)\delta(y-ap_y)\delta(z-ap_z)e^{iq\cdot r}dr\right|^2 \\
&= C\left|\sum_{p_x,p_y,p_z}^{N-1} n_0 e^{iq_x ap_x}e^{iq_y ap_y}e^{iq_z ap_z}\right|^2 = C\left|n_0\frac{1-e^{iq_x aN}}{1-e^{iq_x a}}\frac{1-e^{iq_y aN}}{1-e^{iq_y a}}\frac{1-e^{iq_z aN}}{1-e^{iq_z a}}\right|^2 \\
&= Cn_0^2\frac{1-\cos(q_x aN)}{1-\cos(q_x a)}\frac{1-\cos(q_y aN)}{1-\cos(q_y a)}\frac{1-\cos(q_z aN)}{1-\cos(q_z a)}
\end{aligned}
\tag{5-2.1}
$$

5-3

$q = \boldsymbol{e}_z\frac{4\pi}{\lambda}\sin\theta$ より

$$
I = Cn_0^2\frac{1-\cos(q_z aN)}{1-\cos(q_z a)} \tag{5-3.1}
$$

散乱強度が大きくなるのはこれの分母が 0 になるようなとき、つまり $\cos q_z a = 1$ のときなので、

$$
\begin{aligned}
q_z a &= 2\pi n \\
\frac{4\pi}{\lambda}\sin\theta a &= 2\pi n \\
2a\sin\theta &= n\lambda
\end{aligned}
\tag{5-3.2}
$$

5-4

$n = 1$ のピークが 13° にあるので、

$$
a = \frac{\lambda}{2\sin 13^\circ} = \frac{0.15\,\mathrm{nm}}{2\times 0.23} = 3.26\,\text{Å} \tag{5-4.1}
$$

5-5

散乱振幅は $\delta = a(1/2, 1/2, 1/2)$ とおいて、

$$
\int (n(r) + n(r-\delta))e^{iqr}dr = (1+e^{iq\delta})\int n(r)e^{iqr} \tag{5-5.1}
$$

と書けるので、散乱強度は

$$
\begin{aligned}
I &= C\left|(1+e^{iq\delta})\int n(r)e^{iqr}dr\right|^2 \\
&= C\left|n_0(1+e^{iq\delta})\frac{1-e^{iq_x aN}}{1-e^{iq_x a}}\frac{1-e^{iq_y aN}}{1-e^{iq_y a}}\frac{1-e^{iq_z aN}}{1-e^{iq_z a}}\right|^2 \\
&= 2Cn_0^2(1+\cos(q\delta))\frac{1-\cos(q_z aN)}{1-\cos(q_z a)} \qquad (5\text{-}5.2)
\end{aligned}
$$

となる。$1+\cos(q\delta)=0$ となる波数、つまり

$$
\begin{aligned}
q\delta &= (2n+1)\pi \\
\frac{4\pi}{\lambda}\sin\theta\frac{a}{2} &= (2n+1)\pi \\
2a\sin\theta &= (2n+1)\lambda \qquad (5\text{-}5.3)
\end{aligned}
$$

を満たすときには、ピークが消える。なので、アとウのピークは消える。

5-6

前問より原子 B の副格子によって消えないピークの強度は

$$
I = 4Cn_0^2\frac{1-\cos(q_z aN)}{1-\cos(q_z a)} \qquad (5\text{-}6.1)
$$

そして、$\epsilon=0$ のときに消えるピークの強度は

$$
\begin{aligned}
I &= 2Cn_0^2(1+\cos(q(\delta+\epsilon)))\frac{1-\cos(q_z aN)}{1-\cos(q_z a)} \\
&\simeq 2Cn_0^2\left(1+\cos(q\delta)-(q\epsilon)\sin(q\delta)-\frac{(q\epsilon)^2}{2}\cos(q\epsilon)\right)\frac{1-\cos(q_z aN)}{1-\cos(q_z a)} \\
&= C(q\epsilon)^2\frac{1-\cos(q_z aN)}{1-\cos(q_z a)} \qquad (5\text{-}6.2)
\end{aligned}
$$

となる。つまり、ピークの強さの比が $(q\epsilon)^2/4$ に対応するので、これから変位量を求められる。

感想

最後の設問の解答あってるのかわからん。

問題 6　天文学: プラズマ放射

6-1

リュードベリ定数と $k_B T$ とが同じになる温度が求める温度であるので、

$$T = \frac{R_y}{k_B} = \frac{13.6\,\mathrm{eV}}{8.6 \times 10^5\,\mathrm{eVK}^{-1}} = 2 \times 10^5\,\mathrm{K} \tag{6-1.1}$$

6-2

問題文の地の文の前半で $\omega\tau \gg 1$ のときに $\tilde{\boldsymbol{d}} = 0$ というのが何を指しているのかわからなかったので、それも追ってみる。今の系はプラズマ化した水素ガス中を動き回る電子の運動を考えている。そのため、電子は陽子に束縛されず、図 1 のような軌跡で動き回る。この特徴的な時間スケールは τ の電子が陽子を横切るじかんであるので、時間の単位を τ として考えてみたいというのがある。すると ω を単位とすると、$\omega\tau \gg 1$ は

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{T}\tau &\gg 1 \\ \tau &\gg T \end{aligned} \tag{6-2.1}$$

と書き直せる。なので双極子の振動がとても遅いとき、見方を変えると双極子の振動の周期よりも圧倒的に早く電子が陽子のそばを通過したとき調べている。

このとき、(1) 式は計算すると

$$\begin{aligned} -\omega^2 \tilde{\boldsymbol{d}}(\omega) &= -\frac{e}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} e^{i\omega t} dt \\ -\frac{4\pi^2}{T^2}\tilde{\boldsymbol{d}}(\omega) &\leq -\frac{e}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} dt = -\frac{e}{2\pi}\int dv = -\frac{e\delta\boldsymbol{v}}{2\pi} \\ \tilde{\boldsymbol{d}}(\omega) &= \frac{e\delta\boldsymbol{v}}{(2\pi)^3}T^2 \ll \frac{e\delta\boldsymbol{v}}{(2\pi)^3}\tau^2 \end{aligned} \tag{6-2.2}$$

となる。途中の不等式は三角不等式を使った。この系で生き残るオーダーの量は τ であるので、消えてしまうのがわかる。

次に、$\omega\tau \ll 1$ のときを考える。このとき、$s = t/\tau$ の無次元量で (1) 式の積分を表すと

$$\begin{aligned} -\omega^2 \tilde{\boldsymbol{d}}(\omega) &= -\frac{e}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}s} e^{i\omega\tau s} ds = -\frac{e}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}s} \left(e^{i\omega\tau}\right)^s ds \\ &\simeq -\frac{e}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}s} \left(1 + i\omega\tau - \frac{(\omega\tau)^2}{2} + \mathcal{O}(\omega\tau)^3\right)^s ds \\ &\simeq -\frac{e}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}s} ds = -\frac{e\delta\boldsymbol{v}}{2\pi} \\ \tilde{\boldsymbol{d}}(\omega) &= \frac{e\delta\boldsymbol{v}}{2\pi\omega^2} \end{aligned} \tag{6-2.3}$$

6-3

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \frac{2\omega^4}{3\epsilon_0 c^3}\left|\boldsymbol{d}(\tilde{\omega})\right|^2 = \frac{2\omega^4}{3\epsilon_0 c^3}\left|\frac{e\delta\boldsymbol{v}}{2\pi\omega^2}\right|^2 = \frac{e^2}{6\pi^2\epsilon_0 c^3}|\delta\boldsymbol{v}|^2 = \frac{2}{3\pi c^3}\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}|\delta\boldsymbol{v}|^2 \tag{6-3.1}$$

6-4

$t = 0$ の時に電子が陽子に引き付けられる力は電子の速度が光速ほど早くないのでクーロン相互作用によるものとすると、速さの変化は

$$|\delta\boldsymbol{v}| = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m b^2} dt = \frac{e^2\tau}{4\pi\epsilon_0 m b^2} \tag{6-4.1}$$

これよりスペクトルは

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\omega} = \frac{2\tau^2}{3\pi m^2 c^3}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^3 \frac{1}{b^4} = \frac{8}{3\pi m^2 v^2 c^3}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^3 \frac{1}{b^2} \tag{6-4.2}$$

6-5

ア

半径 b, 幅 db の円環の面積は $2\pi b\,db$ でこの面を速度 v, 密度 n の電子が通り抜けるので

$$2\pi bnv\,db \tag{6-5.1}$$

イ

設問 4 の結果は 1 個の電子が最近接距離 b で散乱するとき話なので、これがアの分だけあるので

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\omega} \times 2\pi bnv\,db = \frac{16n}{3m^2vc^3}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^3 \frac{db}{b} \tag{6-5.2}$$

ウ

イの過程が陽子の数だけ起こるので

$$\text{イ} \times n = \frac{16n^2}{3m^2vc^3}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^3 \frac{db}{b} \tag{6-5.3}$$

6-6

全放射スペクトルは

$$\int_{b_{\min}}^{b_{\max}} \frac{16n^2}{3m^2vc^3}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^3 \frac{db}{b} = \frac{16n^2}{3m^2vc^3}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^3 \ln\left(\frac{b_{\max}}{b_{\min}}\right) = \frac{16n^2}{3m^2vc^3}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^3 G \tag{6-6.1}$$

一見、ω の依存性がないように見えるが、G の中の $b_{\min}, b_{\max}$ にある。例えば、電子が陽子のより近くを通って向きを大きく変えられるときには、双極子の変化する速さが大きく、振動数が大きいというのを表している。

感想

設問 2 の地の文にあるように物理的描像で $e^{i\omega t}$ を処理するのはわかるけど、ちゃんと形式的な評価でやれるのか気になったのでやってみた。解析学みたいにきっちりやってはないけどこれくらいでどうだろうか。