問題 1　量子力学: 調和振動子・摂動論

1-1

交換関係は

$$\begin{aligned}
[a, a^\dagger] &= \frac{m\omega}{2\hbar}\left[x + \frac{ip}{m\omega}, x - \frac{ip}{m\omega}\right] \\
&= \frac{m\omega}{2\hbar}\left[x, -\frac{ip}{m\omega}\right] + \frac{m\omega}{2h}\left[\frac{ip}{m\omega}, x\right] \\
&= \frac{-i}{2\hbar} i\hbar + \frac{i}{2\hbar}(-i\hbar) = 1
\end{aligned} \tag{1-1.1}$$

$$[N, a] = [a^\dagger a, a] = [a^\dagger, a]a = -a \tag{1-1.2}$$

$$[N, a^\dagger] = [a^\dagger a, a^\dagger] = a^\dagger [a, a^\dagger] a = a^\dagger \tag{1-1.3}$$

また、

$$\begin{aligned}
N &= \frac{m\omega}{2\hbar}\left(x - \frac{ip}{m\omega}\right)\left(x - \frac{ip}{m\omega}\right) \\
&= \frac{m\omega}{2\hbar}\left(x^2 + \frac{i}{m\omega}[x, p] + \frac{p^2}{m^2\omega^2}\right) \\
\hbar\omega &= \frac{1}{2}m\omega^2 + \frac{1}{2m}p^2 - \frac{1}{2}\hbar\omega = H_0 - \frac{1}{2}\hbar\omega \\
H_0 &= \hbar\omega\left(N + \frac{1}{2}\right)
\end{aligned} \tag{1-1.4}$$

よって

$$\alpha = 1,\, \beta = \frac{1}{2} \tag{1-1.5}$$

1-2

(i)

N の固有ケットを $|\phi_0\rangle$, 固有値を n_0 とする。

$$\begin{aligned}
\langle \psi_0 | N | \psi_0 \rangle &= n \langle \psi_0 | \psi_0 \rangle = n \\
\langle \psi_0 | a^\dagger a | \psi_0 \rangle &= |a\, |[\rangle\, \psi_0]|^2 \geq 0
\end{aligned} \tag{1-2.1}$$

より N の固有値 n は非負である。

(ii)

最低固有値を取るケットを $|0\rangle$, 固有値を n_0 とする。$n_0 \neq 0$ とすると、

$$Na\,|0\rangle = (aN + [N, a])\,|0\rangle = (n_0 - 1)a\,|0\rangle \tag{1-2.2}$$

となり、n_0 より小さい固有値を作ることができるので、矛盾。なので、最小の固有値は $n_0 = 0$ である。

適当な固有ケット $|k\rangle$ と固有値 k を考える。

$$\begin{aligned}
Na^\dagger\,|k\rangle &= (a^\dagger N + [N, a^\dagger])\,|k\rangle = (k+1)\,|k\rangle \\
N\,|k+1\rangle &= (k+1)\,|k+1\rangle
\end{aligned} \tag{1-2.3}$$

なので、$a^\dagger$ は固有値を 1 つ増やす状態であるのがわかる。これと最低固有値が 0 であることを組み合わせると、N の固有値は整数であるとわかる。

1-3

前問より、N の n 番目の固有値は n であるので、ハミルトニアンの n 番目のエネルギーは

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \tag{1-3.1}$$

前問より、$|n\rangle \propto (a^\dagger)^n |0\rangle$ になることがわかる。規格化条件により帰納的に比例定数を求める。

$$\begin{aligned} 1 &= ||n\rangle|^2 \\ &\propto \left|a^\dagger |n-1\rangle\right|^2 = \langle n-1| aa^\dagger |n-1\rangle = \langle n-1| (N+1) |n-1\rangle = n \end{aligned} \tag{1-3.2}$$

これより

$$|n\rangle = \frac{a^\dagger}{n} |n-1\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle \tag{1-3.3}$$

1-4

(i)

摂動を受けた固有ケットを

$$|n\rangle' = |n\rangle + \left|n^{(1)}\right\rangle + \left|n^{(2)}\right\rangle + \cdots \tag{1-4.1}$$

のように右上に V の次数を書く。

このときの固有値方程式は

$$(H_0 + V) |n\rangle' = (E_n^{(0)} + E_n^{(2)} + E_n^{(2)} + \cdots) |n\rangle \tag{1-4.2}$$

のように書かれる。この式について、V の 1 次の項を取り出すと

$$H_0 \left|n^{(1)}\right\rangle + V |n\rangle = E_n^{(0)} \left|n^{(1)}\right\rangle + E_n^{(1)} |n\rangle \tag{1-4.3}$$

これの左から $\langle m|$ を作用させると

$$E_m^{(0)} \left\langle m \middle| n^{(1)}\right\rangle + V_{mn} = E_n^{(0)} \left\langle m \middle| n^{(1)}\right\rangle + E_n^{(1)} \delta_{mn} \tag{1-4.4}$$

$m = n$ の場合を考えると

$$E_n^{(1)} = V_{nn} \tag{1-4.5}$$

$m \neq n$ の場合を考えると

$$\left\langle m \middle| n^{(1)}\right\rangle = -\frac{V_{mn}}{E_m^{(0)} - E_n^{(0)}} \tag{1-4.6}$$

固有値方程式の V の 2 次の項は

$$H_0 \left|n^{(2)}\right\rangle + V \left|n^{(1)}\right\rangle = E_n^{(0)} \left|n^{(2)}\right\rangle + E_n^{(1)} \left|n^{(1)}\right\rangle + E_n^{(2)} |n\rangle \tag{1-4.7}$$

これに $\langle n|$ を左から作用させると、

$$\begin{aligned} \langle n| V \left|n^{(1)}\right\rangle &= E_n^{(2)} \\ E_n^{(2)} &= \sum_{l=0}^{\infty} \langle n| V |l\rangle \left\langle l \middle| n^{(1)}\right\rangle = -\sum_{l=0}^{\infty} \frac{|V_{lm}|^2}{E_l^{(0)} - E_n^{(0)}} \end{aligned} \tag{1-4.8}$$

(ii)

感想