

2022 年度東大理物答案

しゃんごん (@CEY3944)

2025 年 7 月 29 日

物理学

問題 1 量子力学: 2 次元等方調和振動子・隠れた対称性

1-1

感想

おまけ: 隠れた対称性とリー群・リー代数

SO(2) 対称性と軌道角運動量

ハミルトニアンは xy 平面内の回転に対して不変である。この連続的な回転対称性はリー群 SO(2) で記述され、その生成子は z 軸周りの軌道角運動量演算子 L_z である。

$$L_z = xp_y - yp_x = -i\hbar(a_x^\dagger a_y - a_y^\dagger a_x) \quad (1-1.1)$$

$[H, L_z] = 0$ であるため、エネルギー固有状態は同時に L_z の固有状態でもあり、軌道角運動量量子数 m でラベル付けできる。しかし、SO(2) 対称性だけでは、なぜ $n+1$ 個もの状態が同じエネルギーを持つのか（偶然の縮退）を説明できない。

この系の真の動的対称性は、2x2 ユニタリ行列の群 U(2) である。この対称性の下では、同じエネルギーを持つ縮退した状態が互いに変換される。この対称性を記述するのが、リー代数 $u(2)$ である。

$u(2)$ 代数の生成子は、4 つの演算子 $\hat{E}_{ij} = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j$ ($i, j = 1, 2$) で構成される。これらの演算子は、ハミルトニアンと可換である。

$$[\hat{H}, \hat{E}_{ij}] = 0 \quad (1-1.2)$$

この $u(2)$ 代数は、物理的に重要な 2 つの部分、すなわち中心 $u(1)$ と $su(2)$ の直和に分解できる。

$$u(2) \cong u(1) \oplus su(2) \quad (1-1.3)$$

- $u(1)$ 部分: 全数演算子 $\hat{N} = \hat{E}_{11} + \hat{E}_{22}$ で生成される。その固有値 n がエネルギー準位 E_n を決定し、ヒルベルト空間を縮退した部分空間にブロック分けする。
- $su(2)$ 部分: エネルギーが同じ縮退部分空間内での対称性を記述する。

$su(2)$ 代数と試験問題の演算子

$su(2)$ リー代数の 3 つの生成子は、以下のように構成できる。

$$\hat{J}_x = \frac{\hbar}{2}(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1) \quad (1-1.4)$$

$$\hat{J}_y = \frac{\hbar}{2i}(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 - \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1) \quad (1-1.5)$$

$$\hat{J}_z = \frac{\hbar}{2}(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 - \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2) \quad (1-1.6)$$

これらの演算子は、角運動量と同様の交換関係 $[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{J}_k$ を満たす。

ここで、試験問題で定義された角運動量演算子 $\hat{L} = \hat{X}_1 \hat{P}_2 - \hat{X}_2 \hat{P}_1$ を生成・消滅演算子で書き直すと（設問 5）、

$$\hat{L} = -i\hbar(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 - \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1) \quad (1-1.7)$$

となる。これを上記の生成子と比較すると、

$$\hat{L} = 2\hat{J}_y \quad (1-1.8)$$

であることがわかる。すなわち、この問題で扱う角運動量演算子 \hat{L} は、隠れた $su(2)$ 対称性の生成子そのものである。

$\mathfrak{su}(2)$ の既約表現と物理状態

群論によれば、エネルギー E_n を持つ $n+1$ 個の縮退した状態は、 $\mathfrak{su}(2)$ の 1 つの既約表現を形成する。

- カシミア演算子: $\mathfrak{su}(2)$ の全ての生成子と可換なカシミア演算子 $\hat{J}^2 = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2$ は、既約表現を特徴づける。計算すると、 $\hat{J}^2 = \hbar^2 \frac{\hat{N}}{2} (\frac{\hat{N}}{2} + 1)$ となり、表現のラベル j が $j = n/2$ であることとわかる。これにより、縮重度が $2j+1 = n+1$ と正しく与えられる。
- 昇降演算子: 試験問題の設問 6, 7 で構成する演算子 \hat{A}_{\pm}^{\dagger} は物理的には円偏光の量子を生成する演算子であり、 $SU(2)$ 代数の観点からは昇降演算子に対応する。これらは、 \hat{L} (すなわち \hat{J}_y) の固有値を変化させる。

$$[\hat{L}, \hat{A}_{\pm}^{\dagger}] = \pm \hbar \hat{A}_{\pm}^{\dagger} \quad (1-1.9)$$

これは、同じエネルギー準位（同じ既約表現）の中で、異なる角運動量の状態へと遷移させる演算子であることを意味する。

最終的に、設問 8 で構成する状態 $|n, l\rangle = c_{n,l} (\hat{A}_+^{\dagger})^l (\hat{A}_-^{\dagger})^{n-l} |0\rangle$ は基底状態 $|0\rangle$ から始めて、昇降演算子を繰り返し作用させることで、 $\mathfrak{su}(2)$ の $(n+1)$ 次元既約表現の全ての基底状態を網羅的に作り出していることに他ならない。

問題 3 電磁気学: 電気多極子

3-1

r_0 と r の間の角を θ_0 とすると

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| = \sqrt{r^2 - 2r_0r \cos \theta_0 + r_0^2} = r \left(1 - \cos \theta \frac{r_0}{r} \right) \quad (3-1.1)$$

3-2

\mathbf{d} と \mathbf{r} の間のなす角を θ_1 とすると

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{d}/2|} - \frac{e}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} + \mathbf{d}/2|} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0r} \left(1 + \cos \theta_1 \frac{r_0}{r} \right) - \frac{e}{4\pi\epsilon_0r} \left(1 + \cos \theta_1 \frac{r_0}{r} \right) \\ &= \frac{ed \cos \theta_1}{4\epsilon_0r^2} = \frac{edy}{4\epsilon_0r^3} \end{aligned} \quad (3-2.1)$$

3-3

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= -\nabla\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{ed}{4\pi\epsilon_0r^3}\mathbf{e}_y + \frac{3edy}{4\pi\epsilon_0r^4} \left(\frac{x}{r}\mathbf{e}_x + \frac{y}{r}\mathbf{e}_y + \frac{z}{r}\mathbf{e}_z \right) \\ &= \frac{3edxy}{4\pi\epsilon_0r^5}\mathbf{e}_x + \frac{ed(3y^2 - r^2)}{4\pi\epsilon_0r^5}\mathbf{e}_y + \frac{3edyz}{4\pi\epsilon_0r^5}\mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (3-3.1)$$

3-4

$$\mathbf{E}(0, a, 0) = \frac{ed}{2\pi\epsilon_0a^3}\mathbf{e}_y \quad (3-4.1)$$

より、

$$U = -\frac{ed}{2\pi\epsilon_0a^3} \cdot ed \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = -\frac{e^2d^2}{2\pi\epsilon_0a^3} \sin \theta \quad (3-4.2)$$

3-5

前問より、 $\theta = \pi/2$ が最小。

3-6

電気単極子は

$$q = \int \rho(\mathbf{r}') d^3r = \int \left[-e\delta\left(y - \frac{d}{2}\right) + 2e\delta(y) - e\delta\left(y + \frac{d}{2}\right) \right] \delta(x)\delta(z) d^3r' = 0 \quad (3-6.1)$$

電気双極子は

$$p_i = \int x'_i \rho(\mathbf{r}') d^3r = \int x_i \left[-e\delta\left(y - \frac{d}{2}\right) + 2e\delta(y) - e\delta\left(y + \frac{d}{2}\right) \right] \delta(x)\delta(z) d^3r' = 0 \quad (3-6.2)$$

電気四極子は

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{1}{2} \int (2x'^2 - y'^2 - z'^2) \rho(\mathbf{r}') d^3r \\ &= \frac{1}{2} \int (2x'^2 - y'^2 - z'^2) \left[-e\delta\left(y - \frac{d}{2}\right) + 2e\delta(y) - e\delta\left(y + \frac{d}{2}\right) \right] \delta(x)\delta(z) d^3r' \\ &= \frac{ed^2}{4} \end{aligned} \quad (3-6.3)$$

$$\begin{aligned}
Q_{22} &= \frac{1}{2} \int (-x'^2 + 2y'^2 - z'^2) \rho(\mathbf{r}') d^3r' \\
&= \frac{1}{2} \int (-x'^2 + 2y'^2 - z'^2) \left[-e\delta\left(y - \frac{d}{2}\right) + 2e\delta(y) - e\delta\left(y + \frac{d}{2}\right) \right] \delta(x)\delta(z) d^3r' \\
&= -\frac{ed^2}{2}
\end{aligned} \tag{3-6.4}$$

$$\begin{aligned}
Q_{33} &= \frac{1}{2} \int (-x'^2 - y'^2 + 2z'^2) \rho(\mathbf{r}') d^3r' \\
&= \frac{1}{2} \int (-x'^2 - y'^2 + 2z'^2) \left[-e\delta\left(y - \frac{d}{2}\right) + 2e\delta(y) - e\delta\left(y + \frac{d}{2}\right) \right] \delta(x)\delta(z) d^3r' \\
&= \frac{ed^2}{4}
\end{aligned} \tag{3-6.5}$$

$$\begin{aligned}
Q_{12} = Q_{21} &= \frac{1}{2} \int 3x'_iy'_i \rho(\mathbf{r}') d^3r' \\
&= \frac{1}{2} \int 3x'_iy'_i \left[-e\delta\left(y - \frac{d}{2}\right) + 2e\delta(y) - e\delta\left(y + \frac{d}{2}\right) \right] \delta(x)\delta(z) d^3r' \\
&= 0
\end{aligned} \tag{3-6.6}$$

$$\begin{aligned}
Q_{13} = Q_{31} &= \frac{1}{2} \int 3x'_iz'_i \rho(\mathbf{r}') d^3r' \\
&= \frac{1}{2} \int 3x'_iz'_i \left[-e\delta\left(y - \frac{d}{2}\right) + 2e\delta(y) - e\delta\left(y + \frac{d}{2}\right) \right] \delta(x)\delta(z) d^3r' \\
&= 0
\end{aligned} \tag{3-6.7}$$

$$\begin{aligned}
Q_{23} = Q_{32} &= \frac{1}{2} \int 3y'_iz'_i \rho(\mathbf{r}') d^3r' \\
&= \frac{1}{2} \int 3y'_iz'_i \left[-e\delta\left(y - \frac{d}{2}\right) + 2e\delta(y) - e\delta\left(y + \frac{d}{2}\right) \right] \delta(x)\delta(z) d^3r' \\
&= 0
\end{aligned} \tag{3-6.8}$$

3-7

$$\begin{aligned}
\varphi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^5} \times \frac{e^2 d^2 (x^2 - 2y^2 + z^2)}{4} = -\frac{3ed^2 y^2}{16\pi\epsilon_0 r^5} + \frac{ed^2}{16\pi\epsilon_0 r^3} = -\frac{ed^2 (3y^2 - r^2)}{16\pi\epsilon_0 r^5} \\
E_x &= -\frac{\partial\phi(\mathbf{r})}{\partial x} = -\frac{15ed^2 xy^2}{16\pi\epsilon_0 r^7} + \frac{3ed^2 x}{16\pi\epsilon_0 r^5} = -\frac{3ed^2 x (5y^2 - r^2)}{16\pi\epsilon_0 r^7} \\
E_y &= -\frac{\partial\phi(\mathbf{r})}{\partial y} = -\frac{15ed^2 y^3}{16\pi\epsilon_0 r^7} + \frac{6ed^2 y}{16\pi\epsilon_0 r^5} + \frac{3ed^2 y}{16\pi\epsilon_0 r^5} = -\frac{15ed^2 y^3}{16\pi\epsilon_0 r^7} + \frac{9ed^2 y}{16\pi\epsilon_0 r^5} = -\frac{3ed^2 y (5y^2 - 3r^2)}{16\pi\epsilon_0 r^7} \\
E_z &= -\frac{\partial\phi(\mathbf{r})}{\partial z} = -\frac{15ed^2 y^2 z}{16\pi\epsilon_0 r^7} + \frac{3ed^2 z}{16\pi\epsilon_0 r^5} = -\frac{3ed^2 z (5y^2 - r^2)}{16\pi\epsilon_0 r^7}
\end{aligned} \tag{3-7.1}$$

3-8

(c1) の配置だと電気四極子の両端にある負の電荷が反発しあうのに対し、(c2) の配置だと原点にある負電荷は a にある電気四極子のうち一番近くにある正電荷を感じてその次に負電荷を感じて引き付けあうと考えられる。なので、(c2) の方がエネルギーは小さいと考えられる。

実際 (c1) では

$$\begin{aligned}
U &= -\frac{1}{3} \left(Q_{11} \frac{\partial E_x(a)}{\partial x} + Q_{22} \frac{\partial E_y(a)}{\partial y} + Q_{33} \frac{\partial E_z(a)}{\partial z} \right) \\
&= -\frac{ed^2}{12} \left(\nabla \cdot \mathbf{E}(a) - 3 \frac{\partial E_y(a)}{\partial y} \right) = \frac{ed^2}{4} \frac{\partial E_y(a)}{\partial y} \\
&= \frac{ed^2}{4} \left[-\frac{45ed^2 y^2}{16\pi\epsilon_0 r^7} + \frac{105ed^2 y^4}{16\pi\epsilon_0 r^9} + \frac{9ed^2}{16\pi\epsilon_0 r^5} - \frac{45ed^2 y^2}{16\pi\epsilon_0 r^7} \right]_{y=a, r=a} \\
&= \frac{3e^2 d^4}{2\pi\epsilon_0 a^5}
\end{aligned} \tag{3-8.1}$$

であるのに対し、(c2) では電気四極子モーメントは

$$\begin{aligned} -\frac{Q_{11}}{2} &= Q_{22} = Q_{33} = \frac{ed^2}{4}, \\ Q_{12} &= Q_{21} = Q_{13} = Q_{31} = Q_{23} = Q_{32} = 0 \end{aligned} \quad (3-8.2)$$

であるので、

$$\begin{aligned} U &= -\frac{1}{3} \left(Q_{11} \frac{\partial E_x(a)}{\partial x} + Q_{22} \frac{\partial E_y(a)}{\partial y} + Q_{33} \frac{\partial E_z(a)}{\partial z} \right) \\ &= -\frac{ed^2}{12} \left(\nabla \cdot \mathbf{E}(a) - 3 \frac{\partial E_x(a)}{\partial x} \right) = \frac{ed^2}{4} \frac{\partial E_x(a)}{\partial x} \\ &= -\frac{ed^2}{4} \times \frac{3ed^2(5y^2 - r^2)}{16\pi\epsilon_0 r^7} \Big|_{y=a, r=a} = -\frac{3e^2 d^4}{16\pi\epsilon_0 a^5} \end{aligned} \quad (3-8.3)$$

となるので結果としても正しいし、 $-\partial_a$ をすることで力を求めると確かにそれぞれ斥力と引力になるのがわかる。

感想

多極子は地道に具体例を扱って馴染んでいくしかない。その触ってみる具体例としてとても良い問題ではあるが、試験問題としては誘導に乗るだけではあるので面白くはない。

電気単極子や双極子はそれぞれ r^{-1}, r^{-2} で広がるので電気四極子よりも強くなってしまう。なのでもし設問 6 で電気単極子や双極子が生き残るとそれ以降の設問が成り立たないので、それで答えはある程度分かってしまう。

設問 8 も計算せずに絵をみてわかるでしょとやっても実は当てられるので、本番は時間が余らない限りポテンシャルの計算はしないだろうな。