問題 4　物理数学

4-1

(a)

$$\hat{g}_\alpha(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}\frac{1}{\pi}\frac{\alpha}{x^2+\alpha^2}\,\mathrm{d}x = \int_{\infty}^{-\infty} e^{i\omega(-x)}\frac{1}{\pi}\frac{\alpha}{(-x)^2+\alpha^2}(-\,\mathrm{d}x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x}\frac{1}{\pi}\frac{\alpha}{x^2+\alpha^2}\,\mathrm{d}x = \hat{g}_\alpha(\omega) \tag{4-1.1}$$

より $\hat{g}_\alpha(\omega)$ は偶関数

(b)

$$e^{-i\omega z}g_\alpha(z) = \frac{e^{-i\omega z}\alpha}{\pi(z-i\alpha)(z+i\alpha)} \tag{4-1.2}$$

より極は $z = \pm i\alpha$

(c)

$$\hat{g}_\alpha(\omega) = \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} e^{-i\omega z}g_\alpha(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i\,\mathrm{Res}\big[e^{-i\omega z}g_\alpha(z); z=i\alpha\big] = 2\pi i\frac{\alpha e^{-i\omega(i\alpha)}}{2\pi i\alpha} = e^{\omega\alpha} \tag{4-1.3}$$

(d)

$$\begin{aligned}\widehat{(g_i * f)}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\, g_1(x-y)f(y)e^{-i\omega x} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}y\, f(y)e^{-i\omega y}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}(x-y)\, g_1(x-y)fe^{-i\omega(x-y)} = \hat{g}_1(\omega)\hat{f}(\omega)\end{aligned} \tag{4-1.4}$$

(e)

(3) 式をフーリエ変換して整理した後、逆変換をする。

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega) &= \lim_{\alpha\to 0}\Big[\hat{g}_1(\omega)\hat{f}(\omega) + \hat{g}_\alpha(\omega) - \hat{g}_2(\omega)\Big] \\ \hat{f}(\omega) &= \lim_{\alpha\to 0}\frac{\hat{g}_\alpha(\omega)-\hat{g}_2(\omega)}{1-\hat{g}_1(\omega)} = \frac{1-e^{2\omega}}{1-e^{\omega}} = 1+e^{\omega}\end{aligned} \tag{4-1.5}$$

これの右辺は

$$f(x) = \delta(x) + g_1(x) \tag{4-1.6}$$

をフーリエ変換したものとわかるので、これが答えである。

4-2

(a)

$$\mathrm{tr}\,A(z) = z + z^{-1}, \qquad \det A(z) = -(z+z^{-1}) \tag{4-2.1}$$

余因子行列を用いて逆行列を求めると

$$A(z)^{-1} = -\frac{1}{z+z^{-1}}\begin{pmatrix} -1 & -z^{-1} & 1 \\ -z^{-1} & 1 & -z \\ 1 & -z & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{z+z^{-1}}\begin{pmatrix} 1 & z^{-1} & -1 \\ z^{-1} & -1 & z \\ -1 & z & 1 \end{pmatrix} \tag{4-2.2}$$

(c)

固有値方程式より

$$
\begin{aligned}
&0 = |A(z) - \lambda I| = \lambda^3 - (z + z^{-1})\lambda^2 - \lambda + (z + z^{-1}) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - (z + z^{-1})) \\
&\lambda = \pm 1, \quad z + z^{-1}
\end{aligned}
\tag{4-2.3}
$$

また、λ が実数となる条件を調べる。$z = re^{i\theta}$ とおくと

$$
z + z^{-1} = \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta + i\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta \tag{4-2.4}
$$

これより、$r = 1, \text{or}\, \theta = 0$

(d)

重複するのは

$$
\begin{gathered}
z + z^{-1} = 1 \\
\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta + i\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta = 1
\end{gathered}
\tag{4-2.5}
$$

のときである。なので、$r = 1, \theta = \frac{\pi}{3}$ のとき、固有値 $\lambda = 1$ で重複する。

このときの固有空間の次元は

$$
A(e^{i\pi/3}) - I = \begin{pmatrix} e^{i\pi/3} - 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & e^{-i\pi/3} - 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} e^{i2\pi/3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & e^{-2i\pi/3} \end{pmatrix} \tag{4-2.6}
$$

より固有空間の次元は 1 である。重複しているのにもかかわらず、固有空間の次元が 1 であるため、対角化することはできない。

B をスペクトル分解すると

$$
B = \lambda_1 v_1 v_1^\top + \lambda_2 v_2 v_2^\top + \lambda_3 v_3 v_3^\top \tag{4-2.7}
$$

である。なので、これの 2 次形式を調べると

$$
x^\top Bx = \lambda_1 \left|x^\top v_1\right|^2 + \lambda_2 \left|x^\top v_2\right|^2 + \lambda_3 \left|x^\top v_3\right|^2 \tag{4-2.8}
$$

となる。この式を考えると、仮に、B が負の固有値を持つことがあれば任意の x に対して $x^\top Bx \geq 0$ は成り立たない。

$A(1)$ の固有値は $\lambda = -1, 1, 2$ であり、これらの固有ベクトルを u_1, u_2, u_3 とすると、(5) 式の右辺は

$$
\begin{aligned}
B &= -1u_1u_1^\top + 1u_2u_2^\top + 2u_3u_3^\top + 1u_1u_1^\top + 1u_2u_2^\top + 1u_3u_3^\top + vv^\top \\
&= 2u_2u_2^\top + 3u_3u_3^\top + vv^\top
\end{aligned}
\tag{4-2.9}
$$

これより、

$$
x^\top Bx = 2\left|x^\top u_2\right|^2 + 3\left|x^\top u_3\right|^2 + \left|x^\top v\right|^2 \geq 0 \tag{4-2.10}
$$

となるため、任意の x に対して $x^\top Bx \geq 0$ は成り立つことから B の固有値は 0 以上とわかる。

感想