# 2021 年度東大理物答案

しゃんごん (@CEY3944)

2025 年 7 月 12 日

# 物理学

## 問題 2　統計力学: BEC

### 2-1

　自由粒子のシュレーディンガー方程式は

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(x,y,z)=E\Psi(x,y,z) \tag{2-1.1}$$

である。これの解は

$$\begin{aligned}(k_x,k_y,k_z)&=\frac{\sqrt{2m}}{\hbar}(E_x,E_y,E_z)\\ E&=E_x+E_y+E_z\end{aligned} \tag{2-1.2}$$

を用いて

$$\Psi(x,y,z)\propto\exp(i(k_xx+k_yy+k_zz)) \tag{2-1.3}$$

と表せる。周期境界条件より、

$$\begin{aligned}\Psi(x+L,y,z)=\Psi(x,y+L,z)=\Psi(x,y,z+L)=\Psi(x,y,z)\\ \exp(ik_xx)\Psi(x,y,z)=\exp(ik_yy)\Psi(x,y,z)=\exp(ik_zz)\Psi(x,y,z)=\Psi(x,y,z)\end{aligned} \tag{2-1.4}$$

となるので、波数とエネルギーは量子化され、

$$\begin{aligned}k_xL=2\pi n_x,k_yL=2\pi n_y,k_zL=2\pi n_z\\ E=\frac{\hbar^2}{2mL^2}\left(n_x^2+n_y^2+n_z^2\right)\end{aligned} \tag{2-1.5}$$

となる。波動関数は

$$\Psi(x,y,z)\propto\exp\left(i\frac{2\pi}{L}(n_xx+n_yy+n_zz)\right) \tag{2-1.6}$$

### 2-2

　分配関数の和は

$$\Xi_i=\sum_{n_i=0}^{\infty}\exp\left(-\frac{(E_i-\mu)n_i}{k_BT}\right)=\frac{1}{1-\exp\left(-\frac{(E_i-\mu)}{k_BT}\right)} \tag{2-2.1}$$

のようにまとめれる。

　ボーズ分布関数は

$$\begin{aligned}f(E_i,\mu)&=\frac{1}{\Xi_i}\sum_{n_i=0}^{\infty}n_i\exp\left(-\frac{(E_i-\mu)n_i}{k_BT}\right)=\frac{k_BT}{\Xi_i}\frac{\partial}{\partial\mu}\sum_{n_i=0}^{\infty}\exp\left(-\frac{(E_i-\mu)n_i}{k_BT}\right)\\ &=\frac{k_BT}{\Xi_i}\frac{\partial\Xi_i}{\partial\mu}=k_BT\frac{\partial}{\partial\mu}\ln\Xi_i=-k_BT\frac{\partial}{\partial\mu}\ln\left(1-\exp\left(-\frac{E_i-\mu}{k_BT}\right)\right)\\ &=\frac{\exp\left(-\frac{E_i-\mu}{k_BT}\right)}{1-\exp\left(-\frac{E_i-\mu}{k_BT}\right)}=\frac{1}{\exp\left(\frac{E_i-\mu}{k_BT}\right)-1}\end{aligned} \tag{2-2.2}$$

## 2-3

1 粒子固有状態の数は次のような積分で求められる。

$$\Omega(E) = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \int_{0\le E_{\boldsymbol{k}} \le E} \mathrm{d}^3\boldsymbol{k} = \frac{V}{8\pi^3} \times \frac{4}{3}\pi\left(\frac{2mE}{\hbar^2}\right)^{3/2} = \frac{V}{6\pi^2}\left(\frac{2mE}{\hbar^2}\right)^{3/2} \tag{2-3.1}$$

なので、状態密度は

$$D(E) = \frac{\mathrm{d}\Omega(E)}{\mathrm{d}E} = \frac{V}{4\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}\sqrt{E} \tag{2-3.2}$$

## 2-4

$$\begin{aligned} N &= \int_0^\infty \frac{1}{\exp\left(\frac{E}{k_BT}\right)-1} \times \frac{V}{4\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}\sqrt{E}\,\mathrm{d}E = \frac{V}{4\pi^2}\left(\frac{2mk_BT}{\hbar^2}\right)^{3/2}\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{e^x-1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{V}{4\pi^2}\left(\frac{2mk_BT}{\hbar^2}\right)^{3/2} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2}\zeta(3/2) = \zeta(3/2)V\left(\frac{mk_BT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \end{aligned} \tag{2-4.1}$$

## 2-5

$T_c$ では $N_0 = 0, \mu = 0$ と考えられるので、前問の結果が使えて

$$\begin{aligned} N &= \zeta(3/2)V\left(\frac{mk_BT_c}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \\ T_c &= \left(\frac{N}{\zeta(3/2)V}\right)^{2/3}\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B} \end{aligned} \tag{2-5.1}$$

## 2-6

$$N_0 = N - \int_0^\infty f(E,\mu=0)D(E)\,\mathrm{d}E = N - \zeta(3/2)V\left(\frac{mk_BT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} = N - N\left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2} \tag{2-6.1}$$

## 2-7

$$\begin{aligned} E &= N_0E_g + \int_0^\infty Ef(E,\mu=0)D(E)\,\mathrm{d}E \\ C &\propto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}\int_0^\infty \frac{E^{3/2}}{\exp\left(\frac{E}{k_BT}\right)-1}\,\mathrm{d}E = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}(k_BT)^{5/2}\int_0^\infty \frac{x^{3/2}}{e^x-1}\,\mathrm{d}x \propto T^{3/2} \end{aligned} \tag{2-7.1}$$

より、$\gamma = 3/2$

## 2-8

スピン縮重度は $2S+1$ より、(1) 式は

$$N = (2S+1)\int_0^\infty f(E,\mu)D(E)\,\mathrm{d}E \tag{2-8.1}$$

のようになる。なので設問 5 での式を読み替えることで転移温度は

$$\begin{aligned} N &= \zeta(3/2)(2S+1)V\left(\frac{mk_BT_c'}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \\ T_c' &= \left(\frac{N}{\zeta(3/2)(2S+1)V}\right)^{2/3}\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B} \end{aligned} \tag{2-8.2}$$

のように書ける。

## 2-9

ゼーマン分裂したときの状態密度は

$$D(E) = \sum_{m_z=-S}^{S} \frac{V}{4\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}\sqrt{E + cm_z B} \tag{2-9.1}$$

となる。$T_c'$ において基底状態のエネルギーと化学ポテンシャルは等しくて $\mu = -cSB$ となるので、$T_c'$ を決める方程式は

$$\begin{aligned} N &= \sum_{m_z=-S}^{S} \int_{-cm_z B}^{\infty} \frac{1}{\exp\left(\frac{E+cSB}{k_B T_c'}\right) - 1} \times \frac{V}{4\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}\sqrt{E + cm_z B}\,\mathrm{d}E \\ &= \frac{V}{4\pi^2}\left(\frac{2mk_B T_c'}{\hbar^2}\right)^{3/2} \sum_{m_z=-S}^{S} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x e^{\frac{c(S-m_z)B}{k_B T_c'}} - 1}\,\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{2-9.2}$$

となる。

## 2-10

$m_z = S$ のときは

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x - 1}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\zeta(3/2) \tag{2-10.1}$$

$m_z < S$ のときの和について、

$$\begin{aligned} \sum_{m_z=-S}^{S-1} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x e^{\frac{c(S-m_z)B}{k_B T_c'}} - 1}\,\mathrm{d}x &= \sum_{m_z=-S}^{S-1} \exp\left(-\frac{c(S-m_z)B}{k_B T_c'}\right) \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x - e^{-\frac{c(S-m_z)B}{k_B T_c'}}}\,\mathrm{d}x \\ &\simeq \sum_{m_z=-S}^{S-1} \exp\left(\frac{c(S-m_z)B}{k_B T_c'}\right) \int_0^{\infty} \sqrt{x}e^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\exp\left(\frac{2cSB}{k_B T_c'}\right) \frac{1 - \exp\left(-\frac{2cSB}{k_B T_c'}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{cB}{k_B T_c'}\right)} \to 0 \end{aligned} \tag{2-10.2}$$

よって

$$\begin{aligned} N &= \frac{V}{4\pi^2}\left(\frac{2mk_B T_c'}{\hbar^2}\right)^{3/2} \sum_{m_z=-S}^{S} \int_{-\frac{cm_z B}{k_B T}}^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x e^{\frac{cm_z B}{k_B T_c'}} - 1}\,\mathrm{d}x \\ &\simeq V\zeta(3/2)\left(\frac{mk_B T_c'}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \\ T_c' &= \left(\frac{N}{\zeta(3/2)V}\right)^{2/3} \frac{2\pi\hbar^2}{mk_B} \end{aligned} \tag{2-10.3}$$

となる。

## 感想

H25 年度にもあった BEC に磁場を加えたときの話。以前は断熱消磁してみたときの系の温度の話だったが、ここでは転移温度の話になってる。

直感的には温度が高いと温度ゆらぎがゼーマン分裂幅以上になるため、これらの準位の区別がつかないので磁場がないときと同じ結果になる。磁場を加えると、基底状態は $m_z = S$ の状態になるので、磁気量子数による縮緘度がないので $2S + 1$ の分がなくなる。本番ではこっちの定性的なことを記述して $B - T_c'$ グラフを作るのが安牌か。