2015 年度東大理物答案

しゃんごん (@CEY3944)

2025 年 6 月 3 日

物理学

問題 1　量子力学: 周期境界条件・デルタ関数ポテンシャル・摂動論

1-1

$[S_x, S_y]$ は

$$[S_x, S_y] = \frac{\hbar^2}{4}\left[\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right] = i\hbar\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} = i\hbar S_z \tag{1-1.1}$$

$[H, S_z]$ は

$$[H, S_z] = \left[\frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} I_{2\times 2} + \frac{\hbar e B_z(x,y)}{2m}\sigma_z, \frac{\hbar}{2}\sigma_z\right] = 0 \tag{1-1.2}$$

1-2

$$\begin{aligned} D &= \begin{pmatrix}0 & p_x - ip_y\\ p_x + ip_y & 0\end{pmatrix}\\ D\sigma_z &= \begin{pmatrix}0 & -p_x + ip_y\\ p_x + ip_y & 0\end{pmatrix}\\ \sigma_z D &= \begin{pmatrix}0 & p_x - ip_y\\ -p_x - ip_y & 0\end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1-2.1}$$

より $D\sigma_z = -\sigma_z D$ がわかる。また

$$\begin{aligned} D^2 &= \begin{pmatrix}0 & p_x - ip_y\\ p_x + ip_y & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & p_x - ip_y\\ p_x + ip_y & 0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}p_x^2 + p_y^2 + \hbar e(\partial_x A_y - \partial_y A_x) & 0\\ 0 & p_x^2 + p_y^2 - \hbar e(\partial_x A_y - \partial_y A_x)\end{pmatrix}\\ \frac{D^2}{2m} &= \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} I_{2\times 2} + \frac{\hbar e B_z(x,y)}{2m}\sigma_z = H \end{aligned} \tag{1-2.2}$$

よりハミルトニアン H を D で表すことができた。

1-3

$$\langle \Phi_n | \Phi_n \rangle = \langle \Psi_n | D^\dagger D | \Psi_n \rangle = \langle \Psi_n | 2mH | \Psi_n \rangle = 2mE_n \langle \Psi_n | \Psi_n \rangle \tag{1-3.1}$$

1-4

$\langle \Phi_n | \Phi_n \rangle > 0, \langle \Psi_n | \Psi_n \rangle > 0$ と (10) 式より

$$E_n = \frac{\langle \Phi_n | \Phi_n \rangle}{2m \langle \Psi_n | \Psi_n \rangle} > 0 \tag{1-4.1}$$

また、

$$\begin{aligned} H|\Phi_n\rangle &= HD|\Psi_n\rangle = DH|\Psi_n\rangle = DE_n|\Psi_n\rangle\\ &= E_n|\Phi_n\rangle \end{aligned} \tag{1-4.2}$$

より $|\Phi_n\rangle$ は $|\Psi_n\rangle$ とおなじ固有エネルギーを持つ。

そして (3) のハミルトニアンはすでに対角化されて、$|\Psi_n\rangle$ は σ_z の固有値が $+1$ の状態であることから

$$|\Psi_n\rangle = \begin{pmatrix} |\psi_n\rangle \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1-4.3}$$

と書けるのがわかる。これより

$$|\Phi_n\rangle = \begin{pmatrix} 0 & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\psi_n\rangle \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ (p_x + ip_y)\,|\psi_n\rangle \end{pmatrix} \tag{1-4.4}$$

となる。つまり $|\Phi_n\rangle$ は σ_z の固有値が -1 の状態である。(8) 式の交換関係を使っても示せる。

1-5

$$|D\,|\Psi\rangle|^2 = \langle\Psi|\,D^\dagger D\,|\Psi\rangle = 2mE\,\langle\Psi|\Psi\rangle = 0 \tag{1-5.1}$$

より $|D\,|\Psi\rangle| = 0$ である。ノルムの性質より

$$D\,|\Psi\rangle = 0 \tag{1-5.2}$$

そしてこの式を与えられた波動関数とベクトルポテンシャルを代入して展開していくと、

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{pmatrix} 0 & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_\uparrow(x,y) \\ \psi_\downarrow(x,y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} [-i\hbar(\partial_x - i\partial_y) - ie(\partial_x - i\partial_y)\rho(x,y)]f_\downarrow(x,y)\exp\left[-\frac{e}{\hbar}\rho(x,y)\right] \\ [-i\hbar(\partial_x + i\partial_y) - ie(\partial_x + i\partial_y)\rho(x,y)]f_\uparrow(x,y)\exp\left[\frac{e}{\hbar}\rho(x,y)\right] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \partial_w f_\downarrow(w,\bar{w}) \\ \partial_{\bar{w}} f_\uparrow(w,\bar{w}) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1-5.3}$$

これより $f_\downarrow$ は $\bar{w}$ のみなる関数、$f_\uparrow$ は w からなる関数とわかる。言い換えると $f_\downarrow$ は $\bar{w}$ の正則関数、$f_\uparrow$ は w の正則関数である。

1-6

$r \to \infty$ のときには

$$\rho(x,y) = \frac{bR^2}{2}\left(\frac{1}{2} + \ln\frac{r}{R}\right) \sim \frac{bR^2}{4} \tag{1-6.1}$$

となるため、スピン上向きの波動関数にある $\exp(e\rho/\hbar)$ が発散する。$f_\uparrow$ は有限次多項式なのでこの発散は抑えられず、$\psi_\uparrow$ は無限遠での存在確率が大きくなる不合理な解となるため上向きでは存在しない。

また、$R \to \infty$ で $\psi_\downarrow$ は $f_\downarrow$ の多項式の次数を n とすると

$$\psi_\downarrow(x,y) = A\bar{w}^n \left(\frac{r}{R}\right)^{ebR^2/2\hbar} \exp\left(-\frac{ebR^2}{4\hbar}\right) \tag{1-6.2}$$

これより $n < ebR^2/2\hbar$ である必要があるので、最大の多項式の次数は $\lceil ebR^2/2\hbar \rceil$ である。多項式の係数の分の自由度があるので独立な状態は

$$\left\lceil \frac{ebR^2}{2\hbar} \right\rceil = \left\lceil \frac{b\pi R^2}{2\pi\hbar/e} \right\rceil \tag{1-6.3}$$

となる。つまり 2 次元平面を貫く磁束を磁束量子で割った数になる。これが Atiyah-Singer の指数定理の具体例になっている。

感想

論文を元ネタにした問題で楽しかった。論文曰くとても単純に解けて、2 次元ユークリッド Dirac 方程式に Atiyah-Singer の指数定理を適用した例になっているそうである。これはだいぶ先駆的な論文で最近だと ”Topologically Protected Flatness in Chiral Moiré Heterostructures” Phys.Rev.X 15,021056 で引かれてたりする。トポロジカルフラットバンドと Atiyah-Singer の指数定理って関係あるそうだ。

問題 2　統計力学: 固体の比熱

2-1

この系の古典的な分配関数は

$$
\begin{aligned}
Z &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^N}\left(\int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\beta p^2/2m} e^{-\beta m\omega(x-a)^2/2}\right)^N \\
&= \frac{1}{(2\pi\hbar)^N}\left(\sqrt{\frac{2m\pi}{\beta}}\sqrt{\frac{2\pi}{\beta m\omega^2}}\right)^N = \left(\frac{k_B T}{\hbar\omega}\right)^N
\end{aligned}
\tag{2-1.1}
$$

よって内部エネルギーは

$$
\frac{U}{N} = -\frac{1}{N}\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z = k_B T^2 \frac{\partial}{\partial T}\ln\frac{k_B T}{\hbar\omega} = kB_T \tag{2-1.2}
$$

比熱は

$$
C = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}T} = k_B \tag{2-1.3}
$$

となる。位置の期待値を求める。1 つの粒子の分配関数を考えることにより $\langle x_1\rangle$ は

$$
\begin{aligned}
\langle x_i\rangle &= \frac{\int dp\, e^{-\beta p^2/2m}\int dx\, x e^{-\beta m\omega^2(x-a)^2/2}}{\int dp\, e^{-\beta p^2/2m}\int dx\, e^{-\beta m\omega^2(x-a)^2/2}} \\
&= a
\end{aligned}
\tag{2-1.4}
$$

そして $\langle x_1^2\rangle$ は

$$
\begin{aligned}
\langle x_i\rangle &= \frac{\int dp\, e^{-\beta p^2/2m}\int dx\, x^2 e^{-\beta m\omega^2(x-a)^2/2}}{\int dp\, e^{-\beta p^2/2m}\int dx\, e^{-\beta m\omega^2(x-a)^2/2}} \\
&= \frac{\int dx\left[(x-a)^2 + 2a(x-a) + a^2\right] e^{-\beta m\omega^2(x-a)^2/2}}{\int dx\, e^{-\beta m\omega^2(x-a)^2/2}} \\
&= \frac{k_B T}{m\omega^2} + a^2
\end{aligned}
\tag{2-1.5}
$$

となる。よって分散は

$$
\langle x_1^2\rangle - \langle x_1\rangle^2 = \frac{k_B T}{m\omega^2} \tag{2-1.6}
$$

2-2

1 つの質点の分散関係は

$$
Z = \sum_{n=0}^{\infty}\langle n|\, e^{-\beta H}\,|n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\hbar\omega(n+1/2)} = \frac{e^{-\beta\hbar\omega/2}}{1-e^{-\beta\hbar\omega}} = \frac{1}{2\sinh(\beta\hbar\omega/2)} \tag{2-2.1}
$$

これより位置の期待値は

$$
\langle x\rangle = \frac{1}{Z}\sum_{n=0}^{\infty}\langle n|\, X e^{-\beta H}\,|n\rangle = \frac{1}{Z}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\hbar\omega(n+1/2)}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,\langle n|\left(\sqrt{n}\,|n-1\rangle + \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle\right) = 0 \tag{2-2.2}
$$

なので分散は

$$
\begin{aligned}
\langle x^2\rangle &= \frac{1}{Z}\sum_{n=0}^{\infty}\langle n|\, X e^{-\beta H}\,|n\rangle \\
&= \frac{1}{Z}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\hbar\omega(n+1/2)}\frac{\hbar}{2m\omega}\,\langle n|\left(\sqrt{n(n-1)}\,|n-2\rangle + n\,|n\rangle + (n+1)\,|n\rangle + \sqrt{(n+1)(n+2)}\,|n+2\rangle\right) \\
&= \frac{1}{Z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{m\omega^2}\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)e^{-\beta\hbar(n+1/2)} = -\frac{1}{m\omega^2}\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z = \frac{\hbar}{2m\omega}\coth\frac{\beta\hbar\omega}{2}
\end{aligned}
\tag{2-2.3}
$$

また、内部エネルギーは

$$U = -\frac{\partial}{\partial \beta}\ln Z = \frac{\partial}{\partial \beta}\ln\sinh\frac{\beta\hbar\omega}{2} = \frac{\hbar\omega}{2}\coth\frac{\beta\hbar\omega}{2} \tag{2-2.4}$$

比熱は

$$C = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}T} = -k_B\beta^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta}\coth\frac{\beta\hbar\omega}{2} = k_B\left(\frac{\hbar\omega}{2k_BT}\right)^2\left[\frac{\cosh^2\beta\hbar\omega/2}{\sinh^2\beta\hbar\omega/2} - 1\right] = k_B\left(\frac{\hbar\omega/2k_BT}{\sinh\hbar\omega/2k_BT}\right)^2 \tag{2-2.5}$$

となる。$T\to\infty$ の高温極限では $\sinh\hbar\omega/2k_BT \simeq \hbar\omega/2k_BT$ より

$$C = k_B\left(\frac{\hbar\omega/2k_BT}{\sinh\hbar\omega/2k_BT}\right)^2 \simeq k_B \tag{2-2.6}$$

となる。なので古典的に扱ったときと同じ結果になる。$T\to 0$ の低温極限では $\sinh\hbar\omega/2k_BT \simeq \exp[\hbar\omega/2k_BT/2]$ より

$$C \simeq k_B\left(\frac{\hbar\omega}{k_BT}\right)^2 e^{-\hbar\omega/2k_BT} \tag{2-2.7}$$

となり低温では温度特性があるとわかる。

2-3

$x_0 = 0, x_{N+1} = a(N+1)$ とする。するとハミルトニアンは

$$H = \sum_{n=0}^{N}\left(\frac{m\omega^2}{2}(x_{n+1}-x_n-a)^2 + \frac{p_n^2}{2m}\right) \tag{2-3.1}$$

となる。固定端条件の波動方程式のような解となると期待できるので、位置と運動量を

$$x_n(t) = \sum_{l=1}^{N}Q_l(t)\sin\left(\frac{l\pi}{N+1}n\right) + an, \qquad p_n(t) = \sum_{l=1}^{N}P_l(t)\sin\left(\frac{l\pi}{N+1}n\right) \tag{2-3.2}$$

のようにおく。三角関数の直交性

$$\sum_{n=0}^{N}\sin\left(\frac{l\pi}{N}n\right)\sin\left(\frac{l'\pi}{N}n\right) = \frac{N}{2}\delta_{l,l'} \tag{2-3.3}$$

と合わせるとハミルトニアンは、

$$\begin{aligned}
H &= \sum_{l,l'=1}^{N}\sum_{n=1}^{N}\left[\frac{P_lP_{l'}}{2m}\sin\left(\frac{l\pi}{N+1}n\right)\sin\left(\frac{l'\pi}{N+1}n\right)\right] + \sum_{n=1}^{N}\frac{m\omega^2}{2}x_n(-x_{n+1}+2x_n-x_{n-1}) \\
&= \frac{N+1}{2}\sum_{l=1}^{N}\frac{P_l^2}{2m} + \sum_{l,l'=1}^{N}\sum_{n=1}^{N}\frac{m\omega^2Q_lQ_{l'}}{2}\left\{2-2\cos\left(\frac{l'}{N+1}\pi\right)\right\}\sin\left(\frac{l\pi}{N+1}n\right)\sin\left(\frac{l'\pi}{N+1}n\right) \\
&= \frac{N+1}{2}\sum_{l=1}^{N}\left[\frac{P_l^2}{2m} + \frac{mQ_l^2}{2}\left\{\omega\sqrt{2-2\cos\left(\frac{l}{N+1}\pi\right)}\right\}\right] \equiv \frac{N+1}{2}\sum_{l=1}^{N}\left(\frac{P_l^2}{2m} + \frac{m\omega_l^2Q_l^2}{2}\right)
\end{aligned} \tag{2-3.4}$$

となる。途中

$$\begin{aligned}
&-x_{n+1}+2x_n-x_{n-1} \\
&\quad= \sum_{l'=1}^{N}Q_{l'}\left[-\sin\left(\frac{l'\pi}{N+1}(n+1)\right) + 2\sin\left(\frac{l'\pi}{N+1}n\right) - \sin\left(\frac{l'\pi}{N+1}(n-1)\right)\right] \\
&\quad= \sum_{l'=1}^{N}Q_{l'}\left[-\sin\left(\frac{l'\pi}{N+1}n\right)\cos\left(\frac{l'\pi}{N+1}n\right) + 2\sin\left(\frac{l'\pi}{N+1}n\right) - \sin\left(\frac{l'\pi}{N+1}n\right)\cos\left(\frac{l'\pi}{N+1}n\right)\right] \\
&\quad= \sum_{l'=1}^{n}\left\{2-2\cos\left(\frac{l'}{N+1}\pi\right)\right\}\sin\left(\frac{l\pi}{N+1}n\right)
\end{aligned} \tag{2-3.5}$$

を使った。このハミルトニアンより、各モードは独立した調和振動子で固有振動数が ω_l になっているとわかる。

2-4

前問よりこの系は独立な調和振動子が N 個ある系とみなせる。古典的に扱った調和振動子系では比熱は振動数によらず、各モード 1 つあたりが質点 1 個当たりの自由度に対応する。なので比熱は設問 1 で求めたのと同じ

$$C_1 = k_B \tag{2-4.1}$$

となる。

2-5

答案 1

低温かつ $N \gg 1$ では固有振動数は

$$\omega_l \simeq \omega \frac{l\pi}{N} \tag{2-5.1}$$

と近似できる。各モードの振動子を量子力学的扱うと設問 1 と同じ比熱が得られる。これをすべて足し合わせると比熱が求まる。よって N が大きく、低温では

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N} k_B \left(\frac{\hbar\omega_l/2k_BT}{\sinh \hbar\omega_l/2k_BT} \right)^2 = k_B \frac{1}{\beta\hbar\omega\pi} \sum_{l=1}^{N} \frac{\beta\hbar\omega\pi}{N} \frac{(\beta\hbar\omega_l)^2 e^{\beta\hbar\omega_l}}{(e^{\beta\hbar\omega_l}-1)^2} \\ &\simeq k_B \frac{k_BT}{\pi\hbar\omega} \int_0^{\beta\hbar\omega\pi} \frac{x^2e^x}{(e^x-1)^2} dx \simeq k_B \frac{k_BT}{\pi\hbar\omega} \int_0^{\infty} \frac{x^2e^x}{(e^x-1)^2} dx = \frac{\pi k_B^2}{3\hbar\omega} T \end{aligned} \tag{2-5.2}$$

答案 2

波数を $k = l\pi/a(N+1)$ とすると分散関係は $N \gg 1$ では波数は連続量とみなせる。このとき分散関係は

$$\omega(k) = \omega_0 \sqrt{2 - 2\cos(ka)} = 2\omega_0 \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \simeq a\omega_0 k \tag{2-5.3}$$

となる。ここで、ω_0 としたのはもとの調和振動子の結合定数、$\omega(k)$ は ω_l に対応するものである。これよりフォノンの状態密度 $D(\omega)$ は

$$D(\omega) = \frac{a}{\pi} \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}(\omega(k))} = \frac{1}{\pi\omega_0} \tag{2-5.4}$$

フォノンはボーズ分布に従うので、1 つのフォノンの内部エネルギーと比熱は

$$\begin{aligned} E &= \int_0^\infty \hbar\omega \frac{D(\omega)}{e^{\beta\hbar\omega}-1} d\omega = \frac{1}{\pi\beta^2\hbar\omega_0} \int_0^\infty \frac{\beta\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega}-1} d(\beta\hbar\omega) = \frac{\pi k_B^2}{6\hbar\omega_0} T^2 \\ C &= \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}T} = \frac{\pi k_B^2}{3\hbar\omega} T \end{aligned} \tag{2-5.5}$$

感想

物量が苦しい。固定端条件でのフォノン分散とか初めてやった気がする。直接ハミルトニアンをフーリエ変換して、各モードの和へと具体的に変形してやるというルートが楽なのかしら。

この対角化の際に初見では思いつかないであろう変形をポテンシャルエネルギーにした。それのお気持ちとしては、ハミルトニアンから力

$$F_n = -\frac{\partial H}{\partial x_n} = -\frac{m\omega_0^2}{2}(-x_{n+1} + 2x_n - x_{n-1})$$

が得られて、ポテンシャルエネルギーが

$$\sum_{n=1}^{N} U_n = \sum_{n=1}^{N} (-F_n x_n) = \sum_{n=1}^{N} \frac{m\omega_0^2}{2} x_n(-x_{n+1} + 2x_n - x_{n-1})$$

というにかけるというなイメージで変形した。

問題 3　力学: 相対論的力学

3-1

ロケット本体の運動量変化は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m(t)v(t) = m(t)a + \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}v(t) \tag{3-1.1}$$

時刻 t の微小時間 dt に放出されたガス dm が持っていった運動量は

$$dm(v(t) - v_{gas}) = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\left(v(t) - v_{gas}\right)dt \tag{3-1.2}$$

とわかる。運動量保存則よりこれらが等しいので

$$\begin{aligned} m(t)a + \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}v(t) &= \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\left(v(t) - v_{gas}\right) \\ \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} &= -\frac{a}{v_{gas}}m(t) \end{aligned} \tag{3-1.3}$$

3-2

前問で得られたのは線形微分方程式より解は

$$m(t) = m_0 e^{-at/v_{gas}} \tag{3-2.1}$$

3-3

イ:

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}dt \tag{3-3.1}$$

ロ:

$$u^\mu \odot u^\mu = -u^0u^0 + u^1u^1 = \frac{-c^2dt^2 + dx^2}{d\tau^2} = c^2\frac{ds^2}{-ds^2} = -c^2 \tag{3-3.2}$$

ハ:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(u^\mu \odot u^\mu) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(-c^2\right) \\ u^\mu \odot a^\mu &= 0 \end{aligned} \tag{3-3.3}$$

ニ・ホ: a^0 について

$$\begin{aligned} u^0 &= \frac{\mathrm{d}ct}{\mathrm{d}\tau} = \frac{c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ a^0 &= \frac{\mathrm{d}u^0}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}u^0}{\mathrm{d}t} = \frac{v/c}{(1 - v^2/c^2)^2}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \end{aligned} \tag{3-3.4}$$

a^1 について

$$\begin{aligned} u^1 &= \frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}t} = \frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ a^1 &= \frac{\mathrm{d}u^1}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}u^1}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{v^2/c^2}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}\right)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^2}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \end{aligned} \tag{3-3.5}$$

これより α は

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= -a^0a^0 + a^1a^1 = \frac{1 - v^2/c^2}{(1 - v^2/c^2)^4}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^3}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2 \\ \alpha &= \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \end{aligned} \tag{3-3.6}$$

α を使って α^0, α^1 を表すと

$$a^0 = \alpha\frac{u^1}{c}, \quad a^1 = \alpha\frac{u^0}{c} \tag{3-3.7}$$

3-4

$\alpha = (1 - v^2/c^2)^{-3/2} dv/dt$ の両辺を t で積分すると

$$
\begin{aligned}
\int_0^t \alpha \, dt &= \int_0^t \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2} \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} dt \\
\alpha t &= \int_0^v \frac{dv}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} \qquad \text{(3-4.1)}
\end{aligned}
$$

ここで、$v/c = \sinh \eta$ とするとこの積分は

$$
\begin{aligned}
\frac{\alpha \tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} &= c \int_0^\eta \frac{d\eta}{\cosh^2 \eta} \\
&= c \tanh \eta = \frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\
v(\tau) &= \alpha \tau \qquad \text{(3-4.2)}
\end{aligned}
$$

感想

相対論的力学とか使わないからもう忘れた。それでもこれを知ってるよねと問われたので苦しい。