# 2016年度東大理物答案

しゃんごん (@CEY3944)

2025年6月9日

# 物理学

## 問題 1　量子力学: 調和振動子

### 1-1

微分に関しては

$$\frac{\partial}{\partial x_1}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y},\qquad \frac{\partial}{\partial x_2}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}=\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y},\quad \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}=\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{1-1.1}$$

であるので、運動エネルギーは

$$K=-\frac{\hbar^2}{4m}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}-\frac{\hbar^2}{m}\frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{1-1.2}$$

となる。

また、

$$x^2=\frac{x_1^2+x_2^2+2xy}{4},\quad y^2=x_1^2+x_2^2-2xy$$
$$\to\quad x_1^2+x_2^2=2x^2+\frac{1}{2}y^2 \tag{1-1.3}$$

であるのでポテンシャルエネルギーは

$$V=m\omega^2x^2+\frac{m\omega^2}{4}(1+\alpha)y^2 \tag{1-1.4}$$

### 1-2

ポテンシャルが下に有界でなければならないので、

$$\alpha>\alpha_0=-1 \tag{1-2.1}$$

が求める $\alpha_0$ の値である。

### 1-3

ハミルトニアンを改めて書くと

$$H=H_x+H_y=\left[-\frac{\hbar^2}{2(2m)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{(2m)\omega^2}{2}x^2\right]+\left[-\frac{\hbar^2}{2(m/2)}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{(m/2)(\omega\sqrt{1+\alpha})^2}{2}y^2\right] \tag{1-3.1}$$

というように、$x$ 成分と $y$ 成分に分けることができ、$x$ 成分は質量が $2m$、 振動数が $\omega$ の調和振動子、$y$ 成分は質量が $m/2$、 振動数が $\omega\sqrt{1+\alpha}$ の調和振動子となっているとわかる。これより $x$ 成分の調和振動子のエネルギーの基底状態は $E_{x0}=\hbar\omega/2$、$y$ 成分の調和振動子のエネルギーの基底状態は $E_{y0}=\hbar\omega\sqrt{1+\alpha}/2$ であるので、系の基底状態のエネルギーは

$$E_0=\frac{\hbar\omega}{2}\left(1+\sqrt{1+\alpha}\right) \tag{1-3.2}$$

である。

また、調和振動子の基底状態の波動関数の $c$ は $m, \omega$ を使って

$$\begin{aligned}
H\psi(x) &= \frac{\hbar\omega}{2}\psi(x) \\
\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m\omega^2}{2}x^2\right]e^{-cx^2/2} &= \frac{\hbar\omega}{2}e^{-cx^2/2} \\
\frac{\hbar^2 c_0}{2(2m)} - \frac{\hbar^2 c_0^2 x^2}{2(2m)} + \frac{(2m)\omega^2}{2}x^2 &= \frac{\hbar\omega}{2} \\
c_0 &= \frac{m\omega}{\hbar}
\end{aligned} \tag{1-3.3}$$

と書ける。

なので今の系の基底状態の波動関数は

$$\begin{aligned}
\psi(x,y) &= \left[\left(\frac{c_x}{\pi}\right)^{1/4} e^{-c_x x^2/2}\right]\left[\left(\frac{c_y}{\pi}\right)^{1/4} e^{-c_y y^2/2}\right] \\
&= \sqrt[4]{\frac{m^2\omega^2\sqrt{1+\alpha}}{\pi^2\hbar^2}}\exp\left[-\frac{m\omega}{\hbar}\left(x^2 + \frac{\sqrt{1+\alpha}}{4}y^2\right)\right]
\end{aligned} \tag{1-3.4}$$

である。

## 1-4

$t = 0$ での波動関数とあるが、$t = -0$ での波動関数と $t = +0$ での波動関数が連続であるということを仮定している。つまり、問題で聞かれている波動関数のフーリエ変換は $t = -0$ の $\alpha = 0$ のときの形の波動関数を使うということである。

フーリエ変換をすると

$$\begin{aligned}
f(x,k) &= \int_{-\infty}^{\infty} dy \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}\exp\left[-\frac{m\omega}{\hbar}\left(x^2 + \frac{y^2}{4}\right)\right]e^{-iky} \\
&= \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}\exp\left[-\frac{m\omega x^2}{\hbar} - \frac{\hbar k^2}{m\omega}\right]\int_{-\infty}^{\infty} dy \exp\left[-\frac{m\omega}{4\hbar}\left(y + \frac{2i\hbar k}{m\omega}\right)^2\right] \\
&= 2\exp\left[-\frac{m\omega x^2}{\hbar}\right]\exp\left[-\frac{\hbar k^2}{m\omega}\right]
\end{aligned} \tag{1-4.1}$$

## 1-5

$t > 0$ では $y$ 成分のハミルトニアンは

$$H_y = -\frac{\hbar^2}{m}\frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{1-5.1}$$

であるので波数は保存し、エネルギーは $E_y = \frac{\hbar k^2}{m}$ であるとわかる。なので波数表示での時間発展演算子は

$$U(t) = e^{-iHt/\hbar} = \exp\left[-i\frac{\omega t}{2}\right]\exp\left[-i\frac{\hbar t k^2}{m}\right] \tag{1-5.2}$$

とわかるので、求める波動関数は

$$\begin{aligned}
\Psi(x,y;t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk U(t) f(x,k) e^{iky} \\
&= \frac{1}{\pi}\exp\left[-\frac{m\omega x^2}{\hbar} - i\frac{\omega t}{2}\right]\int_{-\infty}^{\infty} dk \exp\left[-\frac{\hbar}{m\omega(1+i\omega t)}k^2 + iky\right] \\
&= \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar(1+i\omega t)}}\exp\left[-\frac{m\omega x^2}{\hbar} - i\frac{\omega t}{2}\right]\exp\left[-\frac{m\omega y^2}{4\hbar(1+i\omega t)}\right]
\end{aligned} \tag{1-5.3}$$

となる。

## 5 のおまけ

この波動関数の確率密度のうち、$x$ の部分だけ注目すると

$$\begin{aligned}\rho(x;t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dy \Psi^*(x,y;t)\Psi(x,y;t) \\ &= \sqrt{\frac{2m\omega}{\pi\hbar}} \exp\left[-\frac{2m\omega x^2}{\hbar}\right]\end{aligned} \tag{1-5.4}$$

となる。これは 2 粒子の重心自体は調和振動子にトラップされていると理解できる。

$y$ の部分だけ注目すると

$$\begin{aligned}\rho(y;t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \Psi^*(x,y;t)\Psi(x,y;t) \\ &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi\hbar(1+\omega^2t^2)}} \exp\left[-\frac{m\omega y^2}{2\hbar(1+\omega^2t^2)}\right]\end{aligned} \tag{1-5.5}$$

となる。これはつまり、相対運動の調和振動子をなくすと両者の距離は広がっていく一方であると理解することができる。

## 感想

問題自体は 2 つの粒子がいい感じの調和振動子ポテンシャルになっているのを、重心運動と相対運動に分けて考えるもので、誘導に従っていくだけではあるので頑張って解けばよい。

しかし、ハミルトニアンが表している系の状況や、設問 4 以降の $\alpha$ を変えるという操作は実際に行うことができるかなど、よく考えてみるとよくわからない系になっていると感じた。

また、フーリエ変換でよく出てくる次の式は覚えておくと解くのも早くなるし、正確になるので覚えたい。

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \ \exp\left[-ax^2 + bx\right] = \sqrt{\frac{\pi}{-a}} \exp\left[-\frac{b^2}{4a}\right] \tag{1-5.6}$$

# 問題 2　統計力学: 反強磁性体

## 2-1

$$p_+ = \frac{e^{\mu H/k_BT}}{e^{\mu H/k_BT}+e^{-\mu H/k_BT}}, \qquad p_- = \frac{-e^{\mu H/k_BT}}{e^{\mu H/k_BT}+e^{-\mu H/k_BT}} \tag{2-1.1}$$

## 2-2

$$\langle\sigma\rangle = p_+\times(+1)+p_-\times(-1) = \frac{e^{\mu H/k_BT}-e^{-\mu H/k_BT}}{e^{\mu H/k_BT}+e^{-\mu H/k_BT}} = \tanh\left(\frac{\mu H}{k_BT}\right) \tag{2-2.1}$$

## 2-3

$$\langle\sigma_A\rangle = \tanh\left(\frac{\mu H_{\text{eff, A}}}{k_BT}\right) = \tanh\left(-\frac{zJ\langle\sigma_B\rangle}{k_BT}+\frac{\mu H}{k_BT}\right) \tag{2-3.1}$$

$$\langle\sigma_B\rangle = \tanh\left(\frac{\mu H_{\text{eff, B}}}{k_BT}\right) = \tanh\left(-\frac{zJ\langle\sigma_A\rangle}{k_BT}+\frac{\mu H}{k_BT}\right) \tag{2-3.2}$$

となるので

$$f(x) = \tanh\left(\frac{\mu H}{k_BT}-\frac{4Jx}{k_BT}\right) \tag{2-3.3}$$

## 2-4

$H-0$ と $\langle\sigma_B\rangle=-A$ を $\langle\sigma_A\rangle=f(\langle\sigma_B\rangle)$ に入れて、

$$\langle\sigma_A\rangle = \tanh\left(\frac{zJ\langle\sigma_A\rangle}{kB_T}\right) \tag{2-4.1}$$

$y=x$ と $y=\tanh ax$ が $x=0$ 以外で交点を持つような $a$ の範囲は $a>1$ である。自己無撞着方程式が反強磁性の解を持つ条件はこれと同じであるので、求める温度であるネール温度は

$$T_N = \frac{zJ}{k_B} = \frac{4J}{k_B} \tag{2-4.2}$$

## 2-5

$H\to 0$ で、なおかつネール温度以上では $\langle\sigma\rangle \ll 1$ より、自己無撞着方程式は

$$\begin{aligned} &\langle\sigma_A\rangle \simeq -\frac{zJ\langle\sigma_B\rangle}{k_BT}+\frac{\mu H}{k_BT}, \quad \langle\sigma_B\rangle \simeq -\frac{zJ\langle\sigma_A\rangle}{k_BT}+\frac{\mu H}{k_BT} \\ \to \qquad &\frac{\langle\sigma_A\rangle+\langle\sigma_B\rangle}{2} = \frac{2\mu H/k_BT}{1+zJ/k_BT} = \frac{\mu H}{k_B(T+T_N)} \end{aligned} \tag{2-5.1}$$

これより帯磁率は

$$\chi = \lim_{H\to 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}H}\left(\mu\frac{\langle\sigma_A\rangle+\langle\sigma_B\rangle}{2}\right) = \frac{\mu^2}{k_B(T+T_N)} \tag{2-5.2}$$

## 2-6

交換相互作用を平均場近似により、有効磁場とみなすと

$$\mu H_{\text{eff,A}} = -zJ\langle\sigma_B\rangle - zJ'\langle\sigma_A\rangle+\mu H, \quad \mu H_{\text{eff,B}} = -zJ\langle\sigma_A\rangle - zJ'\langle\sigma_B\rangle+\mu H \tag{2-6.1}$$

となる。いま $H=0$ のときであるので自己無撞着方程式は

$$\langle \sigma_A \rangle = \tanh[\frac{-zJ\langle \sigma_B \rangle - zJ' \langle \sigma_A \rangle}{k_B T}] = \tanh[\frac{z(J-J')}{k_B T}\langle \sigma_A \rangle] \tag{2-6.2}$$

となる。なのでこのときのネール温度は

$$T_N' = \frac{z(J-J')}{k_B} = \frac{4(J-J')}{k_B} \to 0, \qquad (J' \to J) \tag{2-6.3}$$

なので次近接の相互作用が最近接の相互作用の強さに近づくと転移温度が 0 になるのがわかる。

## 感想

統計力学の問題だと $\beta$ を使いたくなるが、よく問題をみると与えられていないことが多々ある。なので答案をちゃんと書くなら $\beta$ を使わず $1/k_B T$ を使うのが安全なのかもしれない。忘れてたら、一番最初の余白に $\beta = 1/k_B T$ として以下の答案は書いて宣言してもよいのかしら?

# 問題 3　力学: 2 重振子

## 3-1

$$L = \frac{m_1}{2}(\dot{x}_1^2 \dot{y}_1^2) + \frac{m_2}{2}(\dot{x}_2^2 \dot{y}_2^2) + m_1 g y_1 + m_2 g y_2 \tag{3-1.1}$$

## 3-2

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 \sin\theta_1 & y_1 &= l_1 \cos\theta \\ x_2 &= l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin\theta_2 & y_2 &= l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos\theta_2 \end{aligned} \tag{3-2.1}$$

## 3-3

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= l_1 \dot{\theta}_1 \cos\theta_1 & y_1 &= -l_1 \dot{\theta}_1 \sin\theta \\ \dot{x}_2 &= l_1 \dot{\theta}_1 \cos\theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos\theta_2 & \dot{y}_2 &= -l_1 \dot{\theta}_1 \sin\theta_1 - l_2 \dot{\theta}_2 \sin\theta_2 \end{aligned} \tag{3-3.1}$$

であるのでラグランジアンは適宜三角関数の Taylor 展開を使って、

$$\begin{aligned} L &= \frac{m_1 l_1^2}{2}\dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2}{2}\left[l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)\right] + mgl_1 \cos\theta_1 + m_2 g l_1 \cos\theta_1 + m_2 g l_2 \cos\theta_2 \\ &\simeq \frac{1}{2}(m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2) g l_1 \theta_1 - \frac{1}{2} m_2 g l_2 \theta_2^2 + \text{const.} \end{aligned} \tag{3-3.2}$$

## 3-4

オイラーラグランジュ方程式方程式より $\theta_1$ から得られる微分方程式は

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} &= \frac{\partial L}{\partial \theta_1} \\ (m_1 + m_2) l_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 \ddot{\theta} &= -(m_1 + m_2) g \theta_1, \end{aligned} \tag{3-4.1}$$

$\theta_2$ から得られる微分方程式は

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} &= \frac{\partial L}{\partial \theta_2} \\ l_1 \ddot{\theta}_1 + l_2 \ddot{\theta} &= -g\theta_2 \end{aligned} \tag{3-4.2}$$

となる。これに $\theta_1(t) = a_1 \cos\omega t, \theta_2(t) = a_2 \cos\omega t$ を代入すると

$$\begin{gathered} \begin{cases} (m_1 + m_2)(g - l_1\omega^2) a_1 - m_2 l_2 \omega^2 a_2 & = 0 \\ -l_1 \omega^2 a_1 + (g - l_2 \omega^2) a_2 & = 0 \end{cases} \\ \begin{pmatrix} (m_1 + m_2)(g - l_1\omega^2) & -m_2 l_2 \omega^2 \\ -l_1\omega^2 & (g - l_2\omega^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{gathered} \tag{3-4.3}$$

これより、求める固有角振動数はこの連立方程式が非自明な解をもつような $\omega$ のことである。行列式の値が 0 のとき、非自明な解となるので

$$\begin{aligned} 0 &= (m_1 + m_2)(g - l_1\omega^2)(g - l_2\omega^2) - m_2 l_1 l_2 \omega^4 \\ &= m_1 l_1 l_2 \omega^4 - g(m_1 + m_2)(l_1 + l_2)\omega^2 + (m_1 + m_2) g^2 \\ \omega^2 &= \frac{g(m_1 + m_2)(l_1 + l_2) \pm \sqrt{g^2 (m_1 + m_2)^2 (l_1 + l_2)^2 - 4m_1(m_1 + m_2) l_1 l_2 g^2}}{2m_1 l_1 l_2} \\ \omega &= \sqrt{\frac{(1 + m_2/m_1) g (l_1 + l_2) \pm g\sqrt{(1 + m_2/m_1)^2 (l_1 + l_2)^2 - 4(1 + m_2/m_1) l_1 l_2}}{2 l_1 l_2}} \end{aligned} \tag{3-4.4}$$

## 3-5

$m_1 \gg m_2$ のとき固有振動数は

$$\begin{aligned}\omega^2 &= \frac{(l_1+l_2)g \pm g\sqrt{(l_1+l_2)^2-4l_1l_2}}{2l_1l_2} \\ &= \frac{g}{2l_1l_2}\Big[(l_1+l_2) \pm |l_1-l_2|\Big] \\ &= \frac{g}{l_1},\ \frac{g}{l_2} \end{aligned} \tag{3-5.1}$$

とわかる。

固有振動数 $\omega_1^2 \equiv g/l_1$ のとき、設問 4 の行列に代入すると $m_2 \ll 1$ に注意すると

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -g & g-gl_2/l_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{a_1}{a_2} = 1 - \frac{l_2}{l_1} \tag{3-5.2}$$

となる。

固有振動数 $\omega_2^2 \equiv g/l_2$ のとき、設問 4 の行列に代入すると

$$\begin{pmatrix} g-gl_1/l_2 & 0 \\ -gl_1/l_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$a_1 = 0 \tag{3-5.3}$$

となる。

以上より

$$(a_1, a_2) = (l_1 - l_2, l_2) \tag{3-5.4}$$

の振幅比で振動数が $\omega^2 = g/l_1$ のモードと

$$(a_1, a_2) = (0, 1) \tag{3-5.5}$$

の振幅比で振動数が $\omega^2 = g/l_2$ のモードの 2 つがある。

## 3-6

わかんない

## 感想

ニュートン力学と比べるとこっちのが楽だけど、それでも依然面倒ではある。