2018 年度東大理物答案

しゃんごん (@CEY3944)

2025 年 6 月 29 日

物理学

問題 1　量子力学: 調和振動子・摂動論

1-1

交換関係は

$$
\begin{aligned}
[a, a^\dagger] &= \frac{m\omega}{2\hbar}\left[x + \frac{ip}{m\omega}, x - \frac{ip}{m\omega}\right] \\
&= \frac{m\omega}{2\hbar}\left[x, -\frac{ip}{m\omega}\right] + \frac{m\omega}{2h}\left[\frac{ip}{m\omega}, x\right] \\
&= \frac{-i}{2\hbar}i\hbar + \frac{i}{2\hbar}(-i\hbar) = 1
\end{aligned}
\tag{1-1.1}
$$

$$
[N, a] = [a^\dagger a, a] = [a^\dagger, a]a = -a \tag{1-1.2}
$$

$$
[N, a^\dagger] = [a^\dagger a, a^\dagger] = a^\dagger[a, a^\dagger]a = a^\dagger \tag{1-1.3}
$$

また、

$$
\begin{aligned}
N &= \frac{m\omega}{2\hbar}\left(x - \frac{ip}{m\omega}\right)\left(x - \frac{ip}{m\omega}\right) \\
&= \frac{m\omega}{2\hbar}\left(x^2 + \frac{i}{m\omega}[x, p] + \frac{p^2}{m^2\omega^2}\right) \\
\hbar\omega &= \frac{1}{2}m\omega^2 + \frac{1}{2m}p^2 - \frac{1}{2}\hbar\omega = H_0 - \frac{1}{2}\hbar\omega \\
H_0 &= \hbar\omega\left(N + \frac{1}{2}\right)
\end{aligned}
\tag{1-1.4}
$$

よって

$$
\alpha = 1,\, \beta = \frac{1}{2} \tag{1-1.5}
$$

1-2

(i)

N の固有ケットを $\left|\phi_0\right\rangle$, 固有値を n_0 とする。

$$
\begin{aligned}
\langle\psi_0|N|\psi_0\rangle &= n\,\langle\psi_0|\psi_0\rangle = n \\
\langle\psi_0|a^\dagger a|\psi_0\rangle &= \left|a\left|\psi_0\right\rangle\right|^2 \geq 0
\end{aligned}
\tag{1-2.1}
$$

より N の固有値 n は非負である。

(ii)

最低固有値を取るケットを $\left|0\right\rangle$, 固有値を n_0 とする。$n_0 \neq 0$ とすると、

$$
Na\left|0\right\rangle = (aN + [N, a])\left|0\right\rangle = (n_0 - 1)a\left|0\right\rangle \tag{1-2.2}
$$

となり、n_0 より小さい固有値を作ることができるので、矛盾。なので、最小の固有値は $n_0 = 0$ である。

適当な固有ケット $\left|k\right\rangle$ と固有値 k を考える。

$$
\begin{aligned}
Na^\dagger\left|k\right\rangle &= (a^\dagger N + [N, a^\dagger])\left|k\right\rangle = (k+1)\left|k\right\rangle \\
N\left|k+1\right\rangle &= (k+1)\left|k+1\right\rangle
\end{aligned}
\tag{1-2.3}
$$

なので、$a^\dagger$ は固有値を 1 つ増やす状態であるのがわかる。これと最低固有値が 0 であることを組み合わせると、N の固有値は整数であるとわかる。

1-3

前問より、N の n 番目の固有値は n であるので、ハミルトニアンの n 番目のエネルギーは

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \tag{1-3.1}$$

前問より、$|n\rangle \propto (a^\dagger)^n |0\rangle$ になることがわかる。規格化条件により帰納的に比例定数を求める。

$$\begin{aligned} 1 &= \left||n\rangle\right|^2 \\ &\propto \left|a^\dagger |n-1\rangle\right|^2 = \langle n-1| aa^\dagger |n-1\rangle = \langle n-1| (N+1) |n-1\rangle = n \end{aligned} \tag{1-3.2}$$

これより

$$|n\rangle = \frac{a^\dagger}{n} |n-1\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle \tag{1-3.3}$$

1-4

(i)

摂動を受けた固有ケットを

$$|n\rangle' = |n\rangle + \left|n^{(1)}\right\rangle + \left|n^{(2)}\right\rangle + \cdots \tag{1-4.1}$$

のように右上に V の次数を書く。

このときの固有値方程式は

$$(H_0 + V) |n\rangle' = (E_n^{(0)} + E_n^{(2)} + E_n^{(2)} + \cdots) |n\rangle \tag{1-4.2}$$

のように書かれる。この式について、V の 1 次の項を取り出すと

$$H_0 \left|n^{(1)}\right\rangle + V |n\rangle = E_n^{(0)} \left|n^{(1)}\right\rangle + E_n^{(1)} |n\rangle \tag{1-4.3}$$

これの左から $\langle m|$ を作用させると

$$E_m^{(0)} \left\langle m \middle| n^{(1)} \right\rangle + V_{mn} = E_n^{(0)} \left\langle m \middle| n^{(1)} \right\rangle + E_n^{(1)} \delta_{mn} \tag{1-4.4}$$

$m = n$ の場合を考えると

$$E_n^{(1)} = V_{nn} \tag{1-4.5}$$

$m \neq n$ の場合を考えると

$$\left\langle m \middle| n^{(1)} \right\rangle = -\frac{V_{mn}}{E_m^{(0)} - E_n^{(0)}} \tag{1-4.6}$$

固有値方程式の V の 2 次の項は

$$H_0 \left|n^{(2)}\right\rangle + V \left|n^{(1)}\right\rangle = E_n^{(0)} \left|n^{(2)}\right\rangle + E_n^{(1)} \left|n^{(1)}\right\rangle + E_n^{(2)} |n\rangle \tag{1-4.7}$$

これに $\langle n|$ を左から作用させると、

$$\begin{aligned} \langle n| V \left|n^{(1)}\right\rangle &= E_n^{(2)} \\ E_n^{(2)} &= \sum_{l=0}^{\infty} \langle n| V |l\rangle \left\langle l \middle| n^{(1)} \right\rangle = -\sum_{l=0}^{\infty} \frac{\left|V_{lm}\right|^2}{E_l^{(0)} - E_n^{(0)}} \end{aligned} \tag{1-4.8}$$

(ii)

$$V_{k0} = \langle k|\lambda x^4|0\rangle = \lambda\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2 \langle k|(a+a^\dagger)^4|0\rangle \tag{1-4.9}$$

これより、$k > 4$ のときには

$$V_{k0} = 0 \tag{1-4.10}$$

$k = 4$ のときには、

$$V_{40} = \lambda\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2 \langle 4|(a^\dagger)^4|0\rangle = \sqrt{24}\lambda\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2 \tag{1-4.11}$$

$k = 3$ のときには、

$$V_{30} = 0 \tag{1-4.12}$$

$k = 2$ のときには、

$$V_{20} = \lambda\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2 \langle 4|(aa^\dagger a^\dagger a^\dagger + a^\dagger aa^\dagger a^\dagger + a^\dagger a^\dagger aa^\dagger)|0\rangle = \left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)\lambda\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2 \tag{1-4.13}$$

$k = 1$ のときには、

$$V_{10} = 0 \tag{1-4.14}$$

$k = 0$ のときには、

$$V_{00} = \lambda\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2 \langle 4|(aaa^\dagger a^\dagger + aa^\dagger aa^\dagger)|0\rangle = 3\lambda\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2 \tag{1-4.15}$$

よって

$$\begin{aligned} E_0 &= E_0^{(0)} + E_0^{(1)} + E_0^{(2)} \\ &= \frac{1}{2}\hbar\omega + 3\lambda\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2 - 6(4+\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2})\frac{\lambda^2}{\hbar\omega}\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^4 \end{aligned} \tag{1-4.16}$$

1-5

いま、x^4 の項は摂動と見なせないときを考える。するとこれは x^2 のポテンシャル以上に効いているということなので、x^2 を無視することができる。このとき

$$\begin{aligned} E_n &= \frac{p^2}{2m} + \lambda x^4 \\ p &= \pm 2m\sqrt{E_n - \lambda x^4} \end{aligned} \tag{1-5.1}$$

とわかる。

ボーアゾンマーフェルトの量子化条件より、

$$\begin{aligned} nh &= \oint p dx \\ &\propto \oint \sqrt{E_n - \lambda x^4} dx \end{aligned} \tag{1-5.2}$$

いま、$x = (\frac{E_n}{\lambda})^{1/4} t$ というように x を無次元した変数 t を考える。すると積分は単なる定数となるので、

$$\begin{aligned} nh &\propto \oint \sqrt{E_n}\sqrt{1-t^4}\left(\frac{E_n}{\lambda}\right)^{1/4} dt \\ &\propto E_n^{3/4} \\ E_n &\propto n^{4/3} \end{aligned} \tag{1-5.3}$$

感想

設問 5 以外は教科書みたいな問題で驚いた。

設問 5 はボーアゾンマーフェルトの量子化条件を使いどころというのを教えてもらってなかなか感動した。

問題 2　統計力学:1 次元スピン鎖・転送行列

2-1

スピンの取りうる状態は

$$(S_1, S_2) = (x, x),\ (y, y),\ (x, y),\ (y, x) \tag{2-1.1}$$

であり、これらの状態のエネルギーは

$$E(x, x) = E(y, y) = -J,\ E(x, y) = E(y, x) = 0 \tag{2-1.2}$$

である。よって分配関数は

$$Z_2(\beta) = 2 + 2e^{\beta J} \tag{2-1.3}$$

2-2

スピンの取る状態は

$$(S_1, S_2, S_3) = (x, x, x),\ (x, x, y),\ (x, y, x),\ (x, y, y),\ (y, x, x),\ (y, x, y),\ (y, y, x),\ (y, y, y) \tag{2-2.1}$$

で、それぞれの状態のエネルギーは

$$\begin{aligned} &E(x, x, x) = E(y, y, y) = -2J \\ &E(x, x, y) = E(y, y, x) = E(x, y, y) = E(y, x, x) = -J \\ &E(x, y, x) = E(y, x, y) = 0 \end{aligned} \tag{2-2.2}$$

である。よって分配関数は

$$Z_3(\beta) = 2 + 4e^{\beta J} + 2e^{2\beta J} \tag{2-2.3}$$

である。

2-3

$L-1$ のスピン鎖の右側に新たにスピンを付け加えるときのことを考える。右端のスピンと同じ向きのスピンと違う向きのスピンが加えられるときの 2 通りある。これらのボルツマン因子は $e^{\beta J}, 1$ であるので、分配関数は

$$Z_L(\beta) = \left(e^{\beta J} + 1\right) Z_{L-1}(\beta) = \left(e^{\beta J} + 1\right)^{L-1} Z_1(\beta) = 2\left(e^{\beta J} + 1\right)^{L-1} \tag{2-3.1}$$

2-4

$$F_L(\beta) = -\frac{1}{\beta} \ln Z_L(\beta) = -\frac{L-1}{\beta} \ln\left(e^{\beta J} + 1\right) - \frac{1}{\beta} \ln 2 \tag{2-4.1}$$

2-5

$$\begin{aligned} Lu(\beta) &= -\frac{\partial}{\partial\beta} \ln Z_L(\beta) \simeq -L\frac{\partial}{\partial\beta} \ln\left(e^{\beta J} + 1\right) \\ u(\beta) &= -\frac{Je^{\beta J}}{e^{\beta J} + 1} = \frac{-J}{1 + e^{-\beta J}} \end{aligned} \tag{2-5.1}$$

これより低温極限 $\beta \to \infty$ では $u(\beta) \to -J$ と、高温極限 $\beta \to \infty$ では $u(\beta) \to -J/2$ となる。これが表しているのは、低温では熱揺らぎがなく、基底状態であるスピンの向きがすべて揃っている状態で、高温では熱揺らぎによってスピン間相互作用が効かずランダムな方向を向いている状態と理解できる。

2-6

$Q(a,b)$ は右端に a があるとき、b が付け加わる確率のことである。これは設問 [3] での考察と同じように考えて、ボルツマン因子より

$$Q(a,b)=\frac{e^{\beta J\delta_{ab}}}{e^{\beta J}+1} \tag{2-6.1}$$

のように書ける。

2-7

行列 $Q(a,b)$ の固有値は固有値方程式より

$$\begin{aligned}0&=|Q(a,b)-\lambda I|=\frac{\left(e^{\beta J}-\lambda(e^{\beta J}+1)^2\right)-1}{\lambda(e^{\beta J}+1)}\\ \lambda&=\frac{e^{\beta J}\pm 1}{e^{\beta J}+1}=1,\,\tanh\frac{\beta J}{2}\end{aligned} \tag{2-7.1}$$

となる。このときの $\langle S_1\cdot S_L\rangle$ は

$$\begin{aligned}\langle S_1\cdot S_L\rangle&=(+1)\times\Pr[S_1=x,S_L=x]+(+1)\times\Pr[S_1=y,S_L=y]\\&=\begin{pmatrix}1/2 & 0\end{pmatrix}Q(a,b)^{L-1}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1/2\end{pmatrix}Q(a,b)^{L-1}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(Q^{L-1}\right)=\frac{1}{2}\left[1+\left(\tanh\frac{\beta J}{2}\right)^{L-1}\right]\end{aligned} \tag{2-7.2}$$

となる。この式の 2 行目について、左端のスピンの向いている方向の確率は半々であるので、始状態は $(1/2\,0),(0,1/2)$ と表されている。$Q(a,b)^{L^1}$ が途中のスピン鎖との相互作用により左端のスピンの向く確率が変わっていくことを表している。そして右端で x 方向を向いている確率を取り出すために $(1,0)^{\mathsf{T}}$, y 方向を向いている確率を取り出すために $(0,1)^{\mathsf{T}}$ を作用させていている。

3 行目はトレースと固有値の性質を使っている。

相関長を求める。

$$\tanh\frac{\beta J}{2}=\exp\left(-\ln\frac{1}{\tanh\frac{\beta J}{2}}\right)=\exp\left(-\ln\frac{e^{\beta J}+1}{e^{\beta J}-1}\right) \tag{2-7.3}$$

なので

$$\langle S_1\cdot S_L\rangle=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\exp\left[-(L-1)\ln\frac{e^{\beta J}+1}{e^{\beta J}-1}\right] \tag{2-7.4}$$

と書けるため、相関長は

$$\frac{1}{\xi}=\ln\frac{e^{\beta J}+1}{e^{\beta J}-1} \tag{2-7.5}$$

と表せる。

低温極限 $\beta\to\infty$ では

$$\begin{aligned}\frac{1}{\xi}&=\ln\left(1+\frac{2}{e^{\beta J}-1}\right)\simeq\frac{2}{e^{\beta J}}\\ \xi&=\frac{e^{\beta J}}{2}\end{aligned} \tag{2-7.6}$$

となる。

高温極限 $\beta\to 0$ では

$$\begin{aligned}\frac{1}{\xi}&=\ln\frac{e^{\beta J}+1}{e^{\beta J}-1}\sim\ln\frac{2}{\beta J}\sim-\ln\beta J\\ \xi&=-\frac{1}{\ln\beta J}\end{aligned} \tag{2-7.7}$$

となる。

感想

テンソルネットワークとか、操作論的確率論とかでやる話で楽しかった。

問題 3　力学: 万有引力

3-1

EL.eq より r 方向は

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial r}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}}&=0\\ \mu r\dot{\varphi}^2-\frac{G\mu M}{r^2}-\mu\ddot{r}&=0\\ \mu\ddot{r}&=\mu r\dot{\varphi}^2-\frac{G\mu M}{r^2}\end{aligned}\tag{3-1.1}$$

φ 方向は

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}&=0\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mu r^2\varphi^2&=0\end{aligned}\tag{3-1.2}$$

3-2

r に共役な運動量 p は

$$p=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}}=\mu\dot{r}\tag{3-2.1}$$

φ に共役な運動量 J は

$$J=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}=\mu r^2\dot{\varphi}\tag{3-2.2}$$

エネルギーとハミルトニアンは今の場合等しいので

$$E=p\dot{r}+J\dot{\varphi}-\mathcal{L}=\frac{p^2}{2\mu}+\frac{J^2}{2\mu r^2}-\frac{G\mu M}{r}\tag{3-2.3}$$

3-3

設問 1 より角運動量は

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mu r^2\dot{\varphi}=0\tag{3-3.1}$$

となるので、J は時間によらない運動の定数とわかる。

エネルギーについて、

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}&=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\partial E}{\partial r}+\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\frac{\partial E}{\partial p}\\ &=\frac{p}{\mu}\left(-\frac{J^2}{\mu r^3}+\frac{G\mu M}{r^2}\right)+\left(\frac{J^2}{\mu r^3}-\frac{G\mu M}{r^2}\right)\frac{p}{\mu}\\ &=0\end{aligned}\tag{3-3.2}$$

より、これも時間によらない運動の定数とわかる。

3-4

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}&=-L_{GW}\\ \frac{G\mu M}{2a^2}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}&=-\frac{32G^4}{5c^5}\frac{\mu^2M^3}{a^5}\\ \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}&=-\frac{64G^3}{5c^5}\frac{\mu M^2}{a^3}\end{aligned}\tag{3-4.1}$$

3-5

初期条件を満たすように与え垂れた一階の微分方程式を解くと

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = -A\left\{\frac{P_c}{P}\right\}^{5/3}$$

$$\left(\frac{P}{P_c}\right)^{5/3}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = -A$$

$$\frac{3}{8}\left(\frac{P}{P_c}\right)^{8/3} = -A\frac{t}{P_c} + \frac{3}{8}\left(\frac{P_0}{P_c}\right)^{8/3} \tag{3-5.1}$$

これより $P = 0$ となる時間は

$$0 = -A\frac{\tau_{GW}}{P_c} + \frac{3}{8}\left(\frac{P_0}{P_c}\right)^{8/3}$$

$$\tau_{GW} = \frac{3P_c}{8A}\left(\frac{P_0}{P_c}\right)^{8/3} \tag{3-5.2}$$

3-6

ケプラーの方程式の両辺を時間微分すると

$$GMP\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = 12\pi^2 a^2\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = \frac{6\pi^2}{GN}\frac{a^2}{P}\left(-\frac{64G^3}{c^5}\frac{\mu M^2}{a^3}\right)$$

$$= -\frac{2^6\cdot 3\pi(2\pi)^{5/3}}{5}\left(\frac{G\mu^{3/5}M^{2/5}c^{-3}}{P}\right)^{5/3}$$

$$\equiv -A\left(\frac{P_c}{P}\right)^{5/3} \tag{3-6.1}$$

より

$$P_c = G\mu^{3/5}M^{2/5}c^{-3} \quad A = \frac{192\pi(2\pi)^{5/3}}{5} \tag{3-6.2}$$

とすれは式 (6) が得られる。

3-7

$m = kM_\odot$ とすると、$M = 2kM_\odot, \mu = kM_\odot/2$ となり、

$$P_c = G\mu^{3/5}M^{2/5}c^{-3} = \frac{k}{2^{1/5}}GM_\odot c^{-3} = \frac{k}{2.2}\times 10^{-5}\,\mathrm{sec} \tag{3-7.1}$$

とわかる。これと設問 5 の結果を合わせると

$$\tau_{GW} = \frac{3P_c}{8A}\left(\frac{P_0}{P_c}\right)^{8/3}$$

$$0.15\,\mathrm{sec} = \frac{3}{8\times 2500}\frac{k}{2.2}\left(\frac{0.06\,\mathrm{sec}}{k/2.2\mathrm{sec}}\times 10^5\right)^{8/3}\mathrm{sec} \tag{3-7.2}$$

感想