

問題 1 量子力学: 調和振動子・摂動論

1-1

交換関係は

$$\begin{aligned}[a, a^\dagger] &= \frac{m\omega}{2\hbar} \left[x + \frac{ip}{m\omega}, x - \frac{ip}{m\omega} \right] \\ &= \frac{m\omega}{2\hbar} \left[x, -\frac{ip}{m\omega} \right] + \frac{m\omega}{2\hbar} \left[\frac{ip}{m\omega}, x \right] \\ &= \frac{-i}{2\hbar} i\hbar + \frac{i}{2\hbar} (-i\hbar) = 1\end{aligned}\tag{1-1.1}$$

$$[N, a] = [a^\dagger a, a] = [a^\dagger, a]a = -a\tag{1-1.2}$$

$$[N, a^\dagger] = [a^\dagger a, a^\dagger] = a^\dagger [a, a^\dagger]a = a^\dagger\tag{1-1.3}$$

また、

$$\begin{aligned}N &= \frac{m\omega}{2\hbar} \left(x - \frac{ip}{m\omega} \right) \left(x + \frac{ip}{m\omega} \right) \\ &= \frac{m\omega}{2\hbar} \left(x^2 + \frac{i}{m\omega} [x, p] + \frac{p^2}{m^2\omega^2} \right) \\ \hbar\omega &= \frac{1}{2}m\omega^2 + \frac{1}{2m}p^2 - \frac{1}{2}\hbar\omega = H_0 - \frac{1}{2}\hbar\omega \\ H_0 &= \hbar\omega \left(N + \frac{1}{2} \right)\end{aligned}\tag{1-1.4}$$

よって

$$\alpha = 1, \beta = \frac{1}{2}\tag{1-1.5}$$

1-2

(i)

N の固有ケットを $|\phi_0\rangle$, 固有値を n_0 とする。

$$\begin{aligned}\langle\psi_0|N|\psi_0\rangle &= n \langle\psi_0|\psi_0\rangle = n \\ \langle\psi_0|a^\dagger a|\psi_0\rangle &= |a|[\psi_0]|^2 \geq 0\end{aligned}\tag{1-2.1}$$

より N の固有値 n は非負である。

(ii)

最低固有値を取るケットを $|0\rangle$, 固有値を n_0 とする。 $n_0 \neq 0$ とすると、

$$Na|0\rangle = (aN + [N, a])|0\rangle = (n_0 - 1)a|0\rangle\tag{1-2.2}$$

となり、 n_0 より小さい固有値を作ることができるので、矛盾。なので、最小の固有値は $n_0 = 0$ である。

適当な固有ケット $|k\rangle$ と固有値 k を考える。

$$\begin{aligned}Na^\dagger|k\rangle &= (a^\dagger N + [N, a^\dagger])|k\rangle = (k+1)|k\rangle \\ N|k+1\rangle &= (k+1)|k+1\rangle\end{aligned}\tag{1-2.3}$$

なので、 a^\dagger は固有値を 1 つ増やす状態であるのがわかる。これと最低固有値が 0 であることを組み合わせると、 N の固有値は整数であるとわかる。

1-3

前問より、 N の n 番目の固有値は n であるので、ハミルトニアン H の n 番目のエネルギーは

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (1-3.1)$$

前問より、 $|n\rangle \propto (a^\dagger)^n |0\rangle$ になることがわかる。規格化条件により帰納的に比例定数を求める。

$$\begin{aligned} 1 &= ||n\rangle|^2 \\ &\propto |a^\dagger |n-1\rangle|^2 = \langle n-1| aa^\dagger |n-1\rangle = \langle n-1| (N+1) |n-1\rangle = n \end{aligned} \quad (1-3.2)$$

これより

$$|n\rangle = \frac{a^\dagger}{n} |n-1\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle \quad (1-3.3)$$

1-4

(i)

摂動を受けた固有ケットを

$$|n\rangle' = |n\rangle + |n^{(1)}\rangle + |n^{(2)}\rangle + \dots \quad (1-4.1)$$

のように右上に V の次数を書く。

このときの固有値方程式は

$$(H_0 + V) |n\rangle' = (E_n^{(0)} + E_n^{(2)} + E_n^{(2)} + \dots) |n\rangle \quad (1-4.2)$$

のように書かれる。この式について、 V の 1 次の項を取り出すと

$$H_0 |n^{(1)}\rangle + V |n\rangle = E_n^{(0)} |n^{(1)}\rangle + E_n^{(1)} |n\rangle \quad (1-4.3)$$

これの左から $\langle m|$ を作用させると

$$E_m^{(0)} \langle m|n^{(1)}\rangle + V_{mn} = E_n^{(0)} \langle m|n^{(1)}\rangle + E_n^{(1)} \delta_{mn} \quad (1-4.4)$$

$m = n$ の場合を考えると

$$E_n^{(1)} = V_{nn} \quad (1-4.5)$$

$m \neq n$ の場合を考えると

$$\langle m|n^{(1)}\rangle = -\frac{V_{mn}}{E_m^{(0)} - E_n^{(0)}} \quad (1-4.6)$$

固有値方程式の V の 2 次の項は

$$H_0 |n^{(2)}\rangle + V |n^{(1)}\rangle = E_n^{(0)} |n^{(2)}\rangle + E_n^{(1)} |n^{(1)}\rangle + E_n^{(2)} |n\rangle \quad (1-4.7)$$

これに $\langle n|$ を左から作用させると、

$$\begin{aligned} \langle n|V|n^{(1)}\rangle &= E_n^{(2)} \\ E_n^{(2)} &= \sum_{l=0}^{\infty} \langle n|V|l\rangle \langle l|n^{(1)}\rangle = -\sum_{l=0}^{\infty} \frac{|V_{ln}|^2}{E_l^{(0)} - E_n^{(0)}} \end{aligned} \quad (1-4.8)$$

(ii)

$$V_{k0} = \langle k|\lambda x^4|0\rangle = \lambda \left(\frac{\hbar}{2m\omega} \right)^2 \langle k|(a + a^\dagger)^4|0\rangle \quad (1-4.9)$$

これより、 $k > 4$ のときには

$$V_{k0} = 0 \quad (1-4.10)$$

$k = 4$ のときには、

$$V_{40} = \lambda \left(\frac{\hbar}{2m\omega} \right)^2 \langle 4 | (a^\dagger)^4 | 0 \rangle = \sqrt{24} \lambda \left(\frac{\hbar}{2m\omega} \right)^2 \quad (1-4.11)$$

$k = 3$ のときには、

$$V_{30} = 0 \quad (1-4.12)$$

$k = 2$ のときには、

$$V_{20} = \lambda \left(\frac{\hbar}{2m\omega} \right)^2 \langle 4 | (aa^\dagger a^\dagger a^\dagger + a^\dagger aa^\dagger a^\dagger + a^\dagger a^\dagger aa^\dagger) | 0 \rangle = (3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6}) \lambda \left(\frac{\hbar}{2m\omega} \right)^2 \quad (1-4.13)$$

$k = 1$ のときには、

$$V_{10} = 0 \quad (1-4.14)$$

$k = 0$ のときには、

$$V_{00} = \lambda \left(\frac{\hbar}{2m\omega} \right)^2 \langle 4 | (aaa^\dagger a^\dagger + aa^\dagger aa^\dagger) | 0 \rangle = 3\lambda \left(\frac{\hbar}{2m\omega} \right)^2 \quad (1-4.15)$$

よって

$$\begin{aligned} E_0 &= E_0^{(0)} + E_0^{(1)} + E_0^{(2)} \\ &= \frac{1}{2} \hbar \omega + 3\lambda \left(\frac{\hbar}{2m\omega} \right)^2 - 6(4 + \sqrt{6} + \sqrt{3} + \sqrt{2}) \frac{\lambda^2}{\hbar \omega} \left(\frac{\hbar}{2m\omega} \right)^4 \end{aligned} \quad (1-4.16)$$

感想

教科書みたいな問題で驚いた。