問題 1　力学: 2 重振子

1-1

$$L = \frac{m_1}{2}(\dot{x}_1^2 \dot{y}_1^2) + \frac{m_2}{2}(\dot{x}_2^2 \dot{y}_2^2) + m_1 g y_1 + m_2 g y_2 \tag{1-1.1}$$

1-2

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 \sin\theta_1 & y_1 &= l_1 \cos\theta \\ x_2 &= l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin\theta_2 & y_2 &= l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos\theta_2 \end{aligned} \tag{1-2.1}$$

1-3

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= l_1 \dot{\theta}_1 \cos\theta_1 & y_1 &= -l_1 \dot{\theta}_1 \sin\theta \\ \dot{x}_2 &= l_1 \dot{\theta}_1 \cos\theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos\theta_2 & \dot{y}_2 &= -l_1 \dot{\theta}_1 \sin\theta_1 - l_2 \dot{\theta}_2 \sin\theta_2 \end{aligned} \tag{1-3.1}$$

であるのでラグランジアンは適宜三角関数の Taylor 展開を使って、

$$\begin{aligned} L &= \frac{m_1 l_1^2}{2} \dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2}{2}\left[l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right] + m g l_1 \cos\theta_1 + m_2 g l_1 \cos\theta_1 + m_2 g l_2 \cos\theta_2 \\ &\simeq \frac{1}{2}(m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2) g l_1 \theta_1 - \frac{1}{2} m_2 g l_2 \theta_2^2 + \text{const.} \end{aligned} \tag{1-3.2}$$

1-4

　オイラーラグランジュ方程式方程式より θ_1 から得られる微分方程式は

$$\begin{gathered} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = \frac{\partial L}{\partial \theta_1} \\ (m_1 + m_2) l_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 \ddot{\theta} = -(m_1 + m_2) g \theta_1, \end{gathered} \tag{1-4.1}$$

θ_2 から得られる微分方程式は

$$\begin{gathered} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = \frac{\partial L}{\partial \theta_2} \\ l_1 \ddot{\theta}_1 + l_2 \ddot{\theta} = -g \theta_2 \end{gathered} \tag{1-4.2}$$

となる。これに $\theta_1(t) = a_1 \cos\omega t, \theta_2(t) = a_2 \cos\omega t$ を代入すると

$$\begin{gathered} \begin{cases} (m_1 + m_2)(g - l_1 \omega^2) a_1 - m_2 l_2 \omega^2 a_2 & = 0 \\ -l_1 \omega^2 a_1 + (g - l_2 \omega^2) a_2 & = 0 \end{cases} \\ \begin{pmatrix} (m_1 + m_2)(g - l_1 \omega^2) & -m_2 l_2 \omega^2 \\ -l_1 \omega^2 & (g - l_2 \omega^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{gathered} \tag{1-4.3}$$

これより、求める固有角振動数はこの連立方程式が非自明な解をもつような ω のことである。行列式の値が 0 のとき、非自明な解となるので

$$\begin{aligned} 0 &= (m_1 + m_2)(g - l_1 \omega^2)(g - l_2 \omega^2) - m_2 l_1 l_2 \omega^4 \\ &= m_1 l_1 l_2 \omega^4 - g(m_1 + m_2)(l_1 + l_2)\omega^2 + (m_1 + m_2) g^2 \\ \omega^2 &= \frac{g(m_1 + m_2)(l_1 + l_2) \pm \sqrt{g^2 (m_1 + m_2)^2 (l_1 + l_2)^2 - 4 m_1 (m_1 + m_2) l_1 l_2 g^2}}{2 m_1 l_1 l_2} \\ \omega &= \sqrt{\frac{(1 + m_2/m_1) g (l_1 + l_2) \pm g \sqrt{(1 + m_2/m_1)^2 (l_1 + l_2)^2 - 4(1 + m_2/m_1) l_1 l_2}}{2 l_1 l_2}} \end{aligned} \tag{1-4.4}$$

1-5

$m_1 \gg m_2$ のとき固有振動数は

$$\begin{aligned}\omega^2 &= \frac{(l_1+l_2)g \pm g\sqrt{(l_1+l_2)^2 - 4l_1 l_2}}{2l_1 l_2} \\ &= \frac{g}{2l_1 l_2}\Big[(l_1+l_2) \pm |l_1 - l_2|\Big] \\ &= \frac{g}{l_1},\ \frac{g}{l_2} \end{aligned} \tag{1-5.1}$$

とわかる。

固有振動数 $\omega_1^2 \equiv g/l_1$ のとき、設問 4 の行列に代入すると $m_2 \ll 1$ に注意すると

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -g & g - gl_2/l_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\frac{a_1}{a_2} = 1 - \frac{l_2}{l_1} \tag{1-5.2}$$

となる。

固有振動数 $\omega_2^2 \equiv g/l_2$ のとき、設問 4 の行列に代入すると

$$\begin{pmatrix} g - gl_1/l_2 & 0 \\ -gl_1/l_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$a_1 = 0 \tag{1-5.3}$$

となる。

以上より

$$(a_1, a_2) = (l_1 - l_2, l_2) \tag{1-5.4}$$

の振幅比で振動数が $\omega^2 = g/l_1$ のモードと

$$(a_1, a_2) = (0, 1) \tag{1-5.5}$$

の振幅比で振動数が $\omega^2 = g/l_2$ のモードの 2 つがある。

1-6

わかんない

感想

ニュートン力学と比べるとこっちのが楽だけど、それでも依然面倒ではある。