2014 年度東大理物答案

しゃんごん (@CEY3944)

2025 年 5 月 24 日

物理学

問題 1　量子力学: 周期境界条件・デルタ関数ポテンシャル・摂動論

1-1

シュレーディンガー方程式は

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi(x) = E\psi(x) \tag{1-1.1}$$

$E < 0$ のときの解は

$$\psi(x) = Ae^{\kappa x} + Be^{-\kappa x}, \qquad \kappa = \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar} \tag{1-1.2}$$

となる。周期的境界条件より

$$\begin{aligned} 0 &= \psi(x + 2\pi L) - \psi(x) \\ &= Ae^{2\pi\kappa L}e^{\kappa x} + Be^{-2\pi\kappa L}e^{-\kappa x} - Ae^{\kappa x} + Be^{-\kappa x} \\ &= A(e^{2\pi\kappa L} - 1)e^{\kappa x} + B(e^{-2\pi\kappa L} - 1)e^{-\kappa x} \end{aligned} \tag{1-1.3}$$

これを満たす κ は $\kappa = 0$ のみであるので、$E < 0$ としたのと反するのでこのような解はない。

$E > 0$ のときの解は

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, \qquad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \tag{1-1.4}$$

となる。周期的境界条件より

$$\begin{aligned} 0 &= \psi(x + 2\pi L) - \psi(x) \\ &= Ae^{2\pi ikL}e^{ikx} + Be^{-2\pi ikL}e^{-ikx} - Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \\ &= A(e^{2\pi ikL} - 1)e^{ikx} + B(e^{-2\pi ikL} - 1)e^{-\kappa x} \end{aligned} \tag{1-1.5}$$

これより

$$\begin{aligned} e^{2\pi ikL} &= 1 \\ k &= \frac{n}{L}, \qquad (n \text{ は } 0 \text{ 以上の整数}) \\ \to \quad E &= \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2 n^2}{2mL^2} \end{aligned} \tag{1-1.6}$$

波動関数の係数 A, B が決まらないのでこれは縮退している。

1-2

シュレーディンガー方程式の両辺を微小区間 $(-\epsilon, \epsilon)$ で積分して $\epsilon \to 0+$ とすると

$$\begin{aligned} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} dx \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\hbar^2 v}{2m}\delta(x)\right]\psi(x) &= \int_{-\epsilon}^{\epsilon} dx\, E\psi(x) \\ \frac{\hbar^2}{2m}\lim_{\epsilon\to 0+} -\left(\frac{\mathrm{d}\psi(\epsilon)}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}\psi(-\epsilon)}{\mathrm{d}x}\right) + \frac{\hbar^2 v}{2m}\psi(0) &= 0 \\ \lim_{\epsilon\to 0}\left(\psi'(\epsilon) - \psi'(-\epsilon)\right) &= v\psi(0) \end{aligned} \tag{1-2.1}$$

1-3

$x \in (0, 2\pi L)$ でのシュレディンガー方程式に与えらえた波動関数を入れると

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(e^{\kappa x} + Ae^{-\kappa x}\right) = -\frac{\hbar^2\kappa^2}{2m}\left(e^{\kappa x} + Ae^{-\kappa x}\right) \quad = -\frac{\hbar^2\kappa^2}{2m}\psi(x) \tag{1-3.1}$$

より確かに $E = -\hbar^2\kappa^2/2m$ の解になっているのがわかる。次に $x = 0$ での境界条件を考える。周期的境界条件より $x = 0$ と $x = 2\pi L$ での波動関数の値は同じであるので

$$\begin{aligned} \psi(0) &= \psi(2\pi L) \\ 1 + A &= e^{2\pi\kappa L} + Ae^{-2\pi\kappa L} \\ \left(e^{2\pi\kappa L} - 1\right)\left(e^{2\pi\kappa L} - A\right) &= 0 \end{aligned} \tag{1-3.2}$$

$e^{2\pi\kappa L} = 1$ となるのは $\kappa = 0$ であるので不適。よって $A = e^{2\pi\kappa L}$ また、設問 2 で求めた条件を周期的境界条件と合わせると

$$\begin{aligned} \psi'(0) - \psi'(2\pi L) &= v\psi(0) \\ \kappa(1 - A) - \kappa(e^{2\pi\kappa L} - Ae^{-2\pi\kappa L}) &= (1 + A)v \\ v &= \frac{2(1 - e^{2\pi\kappa L})}{1 + e^{2\pi\kappa L}}\kappa \\ &= -2\kappa\tanh(\pi\kappa L) \end{aligned} \tag{1-3.3}$$

となる。$\kappa\tanh(\pi\kappa L)$ は単調減少で $\kappa = 0$ のとき $v = 0$ なので v と κ は 1 対 1 に対応する

1-4

波動関数は設問 1 で求めた形になるので、波動関数の規格化定数はおいておいて、

$$\psi(x) = e^{ikx} + Ae^{-ikx} \tag{1-4.1}$$

とする。$x = 0$ と $x = 2\pi L$ で波動関数の値が連続であるであることより

$$\begin{aligned} \psi(0) &= \psi(2\pi L) \\ 1 + A &= e^{2\pi ikL} + Ae^{-2\pi ikL} \\ \left(e^{2\pi ikL} - 1\right)\left(e^{2\pi ikL} - A\right) &= 0 \end{aligned} \tag{1-4.2}$$

まず $e^{2\pi ikL} = 1$ つまり $\kappa = n/L$ のように設問 1 と同じ条件のとき、微分係数の条件から

$$\begin{aligned} \psi'(0) - \psi'(2\pi L) &= v\psi(0) \\ ik(1 - A) - ik(e^{2\pi ikL} - Ae^{-2\pi ikL}) &= v(1 + A)A \quad = -1 \end{aligned} \tag{1-4.3}$$

よってこのときのシュレーディンガー方程式の解は

$$\psi(x) \propto \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right), \quad E = \frac{\hbar^2 n^2}{2mL^2} \tag{1-4.4}$$

となり、ポテンシャルの影響を受けない解となる。

次に $e^{2\pi ikL} = A$ のとき、微分係数に関する境界条件より

$$\begin{aligned} \psi'(0) - \psi'(2\pi L) &= v\psi(0) \\ ik(1 - A) - ik(e^{2\pi ikL} - Ae^{-2\pi ikL}) &= v(1 + A) \\ v &= \frac{2ik\left(1 - e^{2\pi ikL}\right)}{1 + e^{2\pi ikL}} \\ &= 2k\tan(\pi kL) \end{aligned} \tag{1-4.5}$$

これもグラフを書くことにより v をあたえると k が量子化しているのがわかる。k について解くことはできないので波動関数の形だけ示しておくと

$$\psi(x) \propto e^{ikx} + e^{2\pi ikL}e^{-ikx} \tag{1-4.6}$$

となる。

1-5

設問 4 で得られた解の内、ポテンシャルの影響がないものはエネルギー固有値の補正も受けない。影響を受けた方について、摂動論の一般論より、v の 1 次摂動の補正エネルギー ΔE は

$$\begin{aligned}\Delta E &= \frac{\int dx \psi^*(x) \frac{\hbar^2 v}{2m} \delta(x) \psi(x)}{\int dx \psi^*(x) \psi(x)} \\ &= \frac{\hbar^2 v}{2m} \frac{\int dx\, 4\cos^2(kx - \pi kL)\delta(x)}{\int dx\, 4\cos^2(kx - \pi kL)} \quad = \frac{\hbar^2 \cos^2(\pi kL)}{\pi mL} v \end{aligned} \tag{1-5.1}$$

となる。

感想

ただ単に周期境界条件・デルタ関数ポテンシャル・摂動論を組み合わせてみましたという感じ。時間に余裕はないが、バンドギャップの話につながりそう。

問題 2　統計力学: 1 次元ゴム

2-1

L 個モノマーがあったときに $+x$ 方向を向いているモノマーの数を m 個、$-x$ 方向を向いているモノマーの数を $L-m$ とすると、終点が x となるには

$$\begin{aligned} m-(L-m) &= x \\ m &= \frac{L+x}{2} \end{aligned} \tag{2-1.1}$$

となる。m は 0 以上の整数でなければならないので $L+x$ が正の偶数でなければならない。$-x$ 方向を向いているモノマーの数である $(L-x)/2$ も正になっていなければならないので、配意が存在する条件として $(L+x)$ が整数であることと $|x| \leq L$ が必要である。

いま知りたい配位の数は L 個のモノマーのうち、$m=(L+x)/2$ 個選び、$+x$ 方向にするということなので

$$C(x,L) = {}_LC_{(L+x)/2} = \frac{L!}{((L-x)/2)!((L+x)/2)!} \tag{2-1.2}$$

2-2

$C(x,L)$ の漸化式をフーリエ変換する。

$$\begin{aligned} C(x,L+1) &= C(x-1,L)+C(x+1,L) \\ 0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dk\, e^{ikx}\left[-\tilde{C}(k,L+1)+e^{-ik}\tilde{C}(k,L)+e^{ik}\tilde{C}(k,L)\right] \end{aligned} \tag{2-2.1}$$

よって

$$\tilde{C}(k,L+1) = (2\cos k)\tilde{C}(k,L) \tag{2-2.2}$$

2-3

$L=0$ のときの Cx,L は $x=0$ のときだけ考えればよく、

$$C(0,0) = \frac{0!}{0!0!} = 1 \tag{2-3.1}$$

であるので

$$\tilde{C}(k,0) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} e^{-ikx}C(x,0) = 1 \tag{2-3.2}$$

なので設問 2 で求めた等比数列の漸化式の解は

$$\tilde{C}(k,L) = (2\cos k)^L \tag{2-3.3}$$

2-4

$$\ln\tilde{C}(k,L) = L\ln(2\cos k) = L\ln 2 + L\ln\left(1-\frac{k^2}{2}+\cdots\right) \simeq L\ln 2 - \frac{Lk^2}{2} \tag{2-4.1}$$

である。よって

$$\begin{aligned} C(x,L) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dk\, e^{ikx}\tilde{C}(k,L) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dk\, e^{ikx}e^{\ln\tilde{C}(k,L)} \\ &\simeq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dk\, e^{ikx}e^{L\ln 2-\frac{Lk^2}{2}} = \frac{2^L}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dk\, e^{-Lk^2/2+ikx} \end{aligned} \tag{2-4.2}$$

ここで $t=\sqrt{L}k$ とすると

$$
\begin{aligned}
C(x,L) &= \frac{2^L}{2\pi\sqrt{L}}\int_{-\pi\sqrt{L}}^{\pi\sqrt{L}} dt\, e^{-t^2/2+ixt/\sqrt{L}} \\
&\simeq \frac{2^L}{2\pi\sqrt{L}} e^{-x^2/2L}\int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{-(t-ix/\sqrt{L})^2/2} = \frac{2^L}{\sqrt{2\pi L}} e^{-x^2/2L}
\end{aligned}
\tag{2-4.3}
$$

2-5

終端が位置 x にあるときのポテンシャルエネルギーは $-qEx$ であるので、分配関数は

$$
\begin{aligned}
Z &= \sum_{x=-L}^{L} C(x,L) e^{qEx/k_BT} = \sum_{x=-\infty}^{\infty} C(x,L) e^{-i(iqEx/k_BT)} \\
&= \tilde{C}\left(i\frac{qE}{k_BT}, L\right) = \left[2\cos\left(i\frac{qE}{k_BT}\right)\right]^L = \left[2\cosh\left(\frac{qE}{k_BT}\right)\right]^L
\end{aligned}
\tag{2-5.1}
$$

2-6

$$
\begin{aligned}
\langle x \rangle &= \frac{1}{Z}\sum_{x=-L}^{L} xC(x,L)e^{qEx/k_BT} = \frac{k_BT}{qZ}\frac{\partial}{\partial E}\sum_{x=-L}^{L} xC(x,L)e^{qEx/k_BT} = \frac{k_BT}{q}\frac{\partial}{\partial E}\ln Z \\
&= \frac{Lk_BT}{q}\frac{\partial}{\partial E}\ln\left(2\cosh\frac{qE}{k_BT}\right) = L\tanh\frac{qE}{k_BT}
\end{aligned}
\tag{2-6.1}
$$

2-7

$$
\begin{aligned}
\langle x^2 \rangle &= \frac{1}{Z}\sum_{x=-L}^{L} x^2 C(x,L)e^{qEx/k_BT} = \left(\frac{k_BT}{q}\right)^2 \frac{1}{Z}\frac{\partial^2}{\partial E^2}\sum_{x=-L}^{L} C(x,L)e^{qEx/k_BT} \\
&= \left(\frac{k_BT}{q}\right)^2 \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial E^2} = \left(\frac{k_BT}{q}\right)^2 \left\{\frac{\partial}{\partial E}\left(\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial E}\right) + \left(\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial E}\right)^2\right\} \\
&= \left(\frac{k_BT}{q}\right)\frac{\partial \langle x \rangle}{\partial E} + \langle x \rangle^2
\end{aligned}
\tag{2-7.1}
$$

$E=0$ のときには $C(x,L)$ は x に関して群関数であるので

$$
\langle x \rangle = \frac{1}{Z}\sum_{x=-L}^{L} xC(x,L) = 0
\tag{2-7.2}
$$

よって

$$
\langle x^2 \rangle\Big|_{E=0} = \left(\frac{k_BT}{q}\right)\frac{\partial \langle x \rangle}{\partial E}\Big|_{E=0}
\tag{2-7.3}
$$

感想

前半の特徴はスターリングの公式ではなく、鞍点法で状態数を求めることのように感じる。設問の読み落としで必要なことを全て解答できてなかった。

設問 5 で分配関数を状態数のフーリエ変換であることに気付くのがなかなか難しい。他のやりかたあるのかな。

問題 3　電磁気学: 相対論的電磁気学

3-1

$|x| \gg a$ では並べられた荷電粒子群は線電荷密度 q/a を持った直線とみなせる。このとき、直線を中心とした $r = x,\ 0 \geq z \geq l$ の円筒のについてガウスの法則を使うと、対称性より円筒の側面だけ考えればよく、

$$
\begin{aligned}
2\pi x l E_x &= \frac{ql}{a\epsilon_0} \\
E_x &= \frac{q}{2\pi\epsilon_0 a x}
\end{aligned}
\tag{3-1.1}
$$

となる。電場に他の成分はない。また、磁場に関しては今の系に電流はないので

$$
\boldsymbol{B} = 0 \tag{3-1.2}
$$

3-2

2 つの隣接した荷電粒子を考える。ぞれぞれの位置を $\mathcal{O}$ 系で $z = z_0, z_0 + a$ にあるあるものとする。これらを Lorentz 変換すると

$$
z_0 \to \gamma(z_0 - v_z t), \quad z_0 + a \to \gamma(z_0 + a - v_z t) \tag{3-2.1}
$$

となる。これらの差が $\mathcal{O}'$ 系での荷電粒子の間隔 a' なので

$$
a' = \gamma(z_0 + a - v_z t) - \gamma(z_0 - v_z t) = \gamma a \tag{3-2.2}
$$

3-3

電場は設問 1 の電荷密度 q/a が $\gamma q/a$ に変わったものとなるので

$$
E'_x = \gamma \frac{qx'}{2\pi\epsilon_0 a(x'^2 + y'^2)}, \quad E'_y = \gamma \frac{qy'}{2\pi\epsilon_0 a(x'^2 + y'^2)}, \quad E'_z = 0 \tag{3-3.1}
$$

磁場について、$\mathcal{O}'$ 系では $-z$ 方向に速度 v で電荷密度 $\gamma q/a$ が動いているので $-\gamma q v_z/a$ の電流が流れているとみなせる。アンペールの法則より磁場は円筒座標の φ 成分だけ残って

$$
\begin{aligned}
2\pi\sqrt{x'^2 + y'^2} B'_\varphi &= -\gamma \frac{\mu_0 q v_z}{a} \\
B'_\varphi &= -\frac{\beta\gamma}{c} \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 a\sqrt{x'^2 + y'^2}}
\end{aligned}
\tag{3-3.2}
$$

よって直交座標で表すと

$$
B'_x = \frac{\beta\gamma}{c} \frac{qy'}{2\pi\varepsilon_0 a(x'^2 + y'^2)}, \quad B'_y = -\frac{\beta\gamma}{c} \frac{qx'}{2\pi\varepsilon_0 a(x'^2 + y'^2)}, \quad B'_z = 0 \tag{3-3.3}
$$

3-4

電磁場の Lorentz 変換の式より E_x は

$$
\begin{aligned}
E_x &= \gamma(E'_x + c\beta B'_y) = \gamma\left(\gamma \frac{qx'}{2\pi\epsilon_0 a(x'^2 + y'^2)} - \beta^2\gamma \frac{qx'}{2\pi\varepsilon_0 a(x'^2 + y'^2)}\right) \\
&= \gamma^2(1 - \beta^2) \frac{qx}{2\pi\epsilon_0 a(x^2 + y^2)} = \frac{qx}{2\pi\epsilon_0 a(x^2 + y^2)}
\end{aligned}
\tag{3-4.1}
$$

E_y は

$$
\begin{aligned}
E_y &= \gamma(E'_y - c\beta B'_x) = \gamma\left(\gamma \frac{qy'}{2\pi\epsilon_0 a(x'^2 + y'^2)} - \beta^2\gamma \frac{qy'}{2\pi\varepsilon_0 a(x'^2 + y'^2)}\right) \\
&= \gamma^2(1 - \beta^2) \frac{qy}{2\pi\epsilon_0 a(x^2 + y^2)} = \frac{qy}{2\pi\epsilon_0 a(x^2 + y^2)}
\end{aligned}
\tag{3-4.2}
$$

E_z は

$$E_z = E'_z = 0 \tag{3-4.3}$$

B_x は

$$B_x = \gamma\left(B'_x - \frac{\beta}{c}E'_y\right) = \gamma\left(\frac{\beta\gamma}{c}\frac{qy'}{2\pi\varepsilon_0 a(x'^2+y'^2)} - \frac{\beta\gamma}{c}\frac{qy'}{2\pi\varepsilon_0 a(x'^2+y'^2)}\right) = 0 \tag{3-4.4}$$

B_y は

$$B_x = \gamma\left(B'_y + \frac{\beta}{c}E'_x\right) = \gamma\left(-\frac{\beta\gamma}{c}\frac{qx'}{2\pi\varepsilon_0 a(x'^2+y'^2)} + \frac{\beta\gamma}{c}\frac{qx'}{2\pi\varepsilon_0 a(x'^2+y'^2)}\right) = 0 \tag{3-4.5}$$

B_z は

$$B_z = B'_z = 0 \tag{3-4.6}$$

となりコンシステントな結果が得られる。

3-5

$\mathcal{O}'$ において、電流はなく、中心に点電荷があるだけであるので

$$E'_x = \frac{qx'}{4\pi\epsilon_0 a(x'^2+y'^2+z'^2)^{3/2}}, \quad E'_y = \frac{qy'}{4\pi\epsilon_0 a(x'^2+y'^2+z'^2)^{3/2}}, \quad E'_z = \frac{qz'}{4\pi\epsilon_0 a(x'^2+y'^2+z'^2)^{3/2}} \tag{3-5.1}$$

$$\boldsymbol{B} = 0 \tag{3-5.2}$$

3-6

$x' = x, y' = y = 0, z' = \gamma(z - \beta ct) = -\gamma v_z t$ に注意して電磁場の Lorentz 変換をすると

$$E_x = \gamma\frac{qx}{4\pi\epsilon_0(x^2+\gamma^2 v_z^2 t^2)^{3/2}}, \quad E_y = 0, \quad E_z = \gamma\frac{-qv_z t}{4\pi\epsilon_0(x^2+\gamma^2 v_z^2 t^2)^{3/2}} \tag{3-6.1}$$

$$B_x = 0, \quad B_y = \gamma\frac{\mu_0 qx}{4\pi(x^2+\gamma^2 v_z^2 t^2)^{3/2}}, \quad B_z = 0 \tag{3-6.2}$$

感想

荷電粒子が直線状に並んでいるという系から、電磁場の Lorentz 変換が出るという話。久しぶりにやったもんだから、思い出すのに時間がかかった。問題文に Lorentz 変換の式が出てるおかげで、答えがあってるかのチェックはやりやすかった。