問題 1　量子力学: コヒーレント状態

1-1

$$\text{ア:} \quad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\hat{x} - \frac{i}{\sqrt{m\hbar\omega}}\hat{p}\right) \tag{1-1.1}$$

$$\text{イ:} \quad \left[\hat{a},\, \hat{a}^\dagger\right] = 1 \tag{1-1.2}$$

$$\text{ウ:} \quad \hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\frac{\hat{a}+\hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}} \tag{1-1.3}$$

$$\text{エ:} \quad \hat{p} = -i\sqrt{m\hbar\omega}\frac{\hat{a}-\hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}} \tag{1-1.4}$$

$$\text{オ:} \quad \mathcal{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right) \tag{1-1.5}$$

$$\text{カ:} \quad E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega \tag{1-1.6}$$

$$\text{キ:} \quad |\phi_{n+1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n+1}}\hat{a}^\dagger |\phi_n\rangle \tag{1-1.7}$$

$$\text{ク:} \quad E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \tag{1-1.8}$$

1-2

シュレディンガー方程式より

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\psi(t)\rangle = \mathcal{H}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}c_n(t)|\phi_n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}\frac{1}{2}\right)c_n(t)|\phi_n\rangle$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[i\hbar\frac{\mathrm{d}c_n(t)}{\mathrm{d}t} - \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]|\phi_n\rangle = 0$$

これより $c_n(t)$ の時間発展の微分方程式が得られ、これを解くと

$$c_n(t) = c_n(0)\exp\left[-i\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega t\right]$$

となる。

1-3

位置の期待値は

$$\begin{aligned}\langle\phi_n|\hat{x}|\phi_n\rangle &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\langle\phi_n|\left(\hat{a}+\hat{a}^\dagger\right)|\phi_n\rangle \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\sqrt{n+1}\Big[\langle\phi_{n+1}|\phi_n\rangle + \langle\phi_n|\phi_{n+1}\rangle\Big] \\ &= 0\end{aligned} \tag{1-3.1}$$

位置の 2 乗の期待値は

$$\begin{aligned}\langle\phi_n|\hat{x}^2|\phi_n\rangle &= \frac{\hbar}{2m\omega}\langle\phi_n|\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}\hat{a}\right)|\phi_n\rangle \\ &= \frac{\hbar}{2m\omega}\langle\phi_n|\left(2\hat{a}^\dagger + 1\right)|\phi_n\rangle \\ &= \frac{\hbar}{m\omega}\left(n+\frac{1}{2}\right)\end{aligned} \tag{1-3.2}$$

となる。また同様にして運動量の方を計算していく。運動量の期待値は

$$\begin{aligned}\langle\phi_n|\,\hat{p}\,|\phi_n\rangle &= -i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\,\langle\phi_n|\left(\hat{a}-\hat{a}^\dagger\right)|\phi_n\rangle \quad = -i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\sqrt{n+1}\Big[\langle\phi_{n+1}|\phi_n\rangle - \langle\phi_n|\phi_{n+1}\rangle\Big] \\ &= 0 \end{aligned} \tag{1-3.3}$$

運動量の 2 乗の期待値は

$$\begin{aligned}\langle\phi_n|\,\hat{p}^2\,|\phi_n\rangle &= -\frac{m\hbar\omega}{2}\,\langle\phi_n|\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}\hat{a}\right)|\phi_n\rangle \\ &= \frac{m\hbar\omega}{2}\,\langle\phi_n|\left(2\hat{a}^\dagger + 1\right)|\phi_n\rangle \\ &= \frac{m\hbar\omega}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)\end{aligned} \tag{1-3.4}$$

よって

$$\begin{aligned}(\Delta x\cdot\Delta p)^2 &= \frac{\hbar}{m\omega}\left(n+\frac{1}{2}\right)\times\frac{m\hbar\omega}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right) \\ \Delta x\cdot\Delta p &= \hbar\left(n+\frac{1}{2}\right)\end{aligned} \tag{1-3.5}$$

1-4

$$\begin{aligned}\hat{a}\,|\alpha\rangle &= e^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\hat{a}\,|\phi_n\rangle \\ &= e^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\sqrt{n}\,|\phi_{n-1}\rangle \\ &= \alpha e^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^{n-1}}{\sqrt{(n-1)!}}\,|\phi_{n-1}\rangle \\ &= \alpha\,|\alpha\rangle\end{aligned} \tag{1-4.1}$$

より $|\alpha\rangle$ は $\hat{a}$ の固有状態。

このことを使うとこの状態での位置の期待値は

$$\begin{aligned}\langle\alpha|\,\hat{x}\,|\alpha\rangle &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,\langle\alpha|\left(\hat{a}+\hat{a}^\dagger\right)|\alpha\rangle \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\alpha+\alpha^*) \\ &= \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}r\cos\theta\end{aligned} \tag{1-4.2}$$

運動量の期待値は

$$\begin{aligned}\langle\alpha|\,\hat{p}\,|\alpha\rangle &= -i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\,\langle\alpha|\left(\hat{a}-\hat{a}^\dagger\right)|\alpha\rangle \\ &= -i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(\alpha-\alpha^*) \\ &= \sqrt{2m\hbar\omega}r\sin\theta\end{aligned} \tag{1-4.3}$$

1-5

設問 2 より $|\phi_n\rangle$ の時間発展は

$$|\phi_n(t)\rangle = c_n(0)\exp\left[-i\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega t\right] \tag{1-5.1}$$

と書けるので $|\psi(0)\rangle = |\alpha = r_0\rangle$ の時間発展は

$$
\begin{aligned}
|\psi(t)\rangle &= e^{-r_0^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r_0^n}{\sqrt{n!}}e^{-in\omega t}e^{-i\omega t/2}|\phi_n\rangle \\
&= e^{-i\omega t/2}e^{-r_0^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(r_0 e^{-i\omega t}\right)^n}{\sqrt{n!}}|\phi_n\rangle \\
&= e^{-i\omega t/2}\left|\alpha = r_0 e^{-i\omega t}\right\rangle
\end{aligned}
\tag{1-5.2}
$$

となる。先頭の $e^{-i\omega t/2}$ の位相は物理量の期待値には影響しないので無視できる。すると問題の無次元化した位置の期待値は設問 4 で求めたものに $r = r_0,\, \theta = -\omega t$ を入れれば良いことがわかるので、

$$
\langle\psi(t)|\hat{X}|\psi(t)\rangle = \sqrt{2}r_0\cos\omega t \tag{1-5.3}
$$

$$
\langle\psi(t)|\hat{P}|\psi(t)\rangle = -\sqrt{2}r_0\sin\omega t \tag{1-5.4}
$$

となる。位置と運動量の期待値を位相空間でみると、時計回りに等速円運動するという古典系と同じ運動になっていることがわかる。

感想

コヒーレント状態の話。場の量子論とか量子光学でやる計算で、交換子と固有状態をうまく組み合わせると楽にできるというやつ。

1-6 おまけ

コヒーレント状態の復習をしたくなったので、この問題の続きとなるものをやってみる。

おまけ 1

コヒーレント状態の位置の分散 ΔX^2 と運動量の分散 ΔP^2 を求めよ。そしてこれが極小不確定状態である、つまり $\Delta X\Delta P = 1/2$ となることを確かめよ。

まず位置の 2 乗平均については、

$$
\begin{aligned}
\langle\alpha|\hat{X}^2|\alpha\rangle &= \frac{1}{2}\langle\alpha|\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}\hat{a}\right)|\alpha\rangle \\
&= \frac{1}{2}\langle\alpha|\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger + 2\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a} + 1\right)|\alpha\rangle \\
&= \frac{1}{2}\left(\alpha^2 + \alpha^{*2} + 2|\alpha|^2\right) + \frac{1}{2} \\
&= r^2(1+\cos 2\theta) + \frac{1}{2} = 2r^2\cos^2\theta + \frac{1}{2}.
\end{aligned}
\tag{1-6.1}
$$

これより位置の分散は

$$
\Delta X^2 = \left\langle X^2\right\rangle - \langle X\rangle^2 = \frac{1}{2}
$$

運動量の 2 乗平均については

$$
\begin{aligned}
\langle\alpha|\hat{P}^2|\alpha\rangle &= -\frac{1}{2}\langle\alpha|\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}\hat{a}\right)|\alpha\rangle \\
&= -\frac{1}{2}\left(\alpha^2 + \alpha^{*2} - 2|\alpha|^2 - 1\right) \\
&= r^2(1-\cos 2\theta) + \frac{1}{2} = 2r^2\sin^2\theta + \frac{1}{2}.
\end{aligned}
\tag{1-6.2}
$$

これより運動量の分散は

$$
\Delta P^2 = \left\langle P^2\right\rangle - \langle P\rangle^2 = \frac{1}{2} \tag{1-6.3}
$$

よって

$$
\Delta X\Delta P = \frac{1}{2} \tag{1-6.4}
$$

これより、位置と運動量の期待値自体は古典系のときと同じであるが、状態は位相空間の 1 点ではなくて、直径 1/2 程度のぼんやりと広がった状態であることがわかる。

おまけ 2

レーザー発振のハミルトニアンは

$$\mathcal{H}_{\mathrm{laser}} \propto i(\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}) \tag{1-6.5}$$

というように書けるらしい。第一項が誘導放出、第二項が誘導吸収のイメージである。これによるユニタリ発展つまり

$$\hat{D}(\alpha) = e^{-i\mathcal{H}_{\mathrm{laser}}} \tag{1-6.6}$$

が真空状態からコヒーレント状態を生成する、つまり

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)|0\rangle = e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}}|0\rangle \tag{1-6.7}$$

となることを確かめよ。この $\hat{D}(\alpha)$ は変位演算子という。その際に $[A,[A,B]] = [B,[A,B]] = 0$ の際の BCH 公式

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-[A,B]/2} \tag{1-6.8}$$

を使うとよい。

BCH 公式を使って計算を進めていくと

$$\begin{aligned} e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}}|0\rangle &= e^{\alpha\hat{a}^\dagger} e^{-\alpha^*\hat{a}} e^{-[\alpha\hat{a}^\dagger, -\alpha^*\hat{a}]/2}|0\rangle \\ &= e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha\hat{a}^\dagger} e^{-\alpha^*\hat{a}}|0\rangle \\ &= e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha\hat{a}^\dagger}|0\rangle \\ &= e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \hat{a}^{\dagger n}|0\rangle \\ &= e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \sqrt{n!}|n\rangle \\ &= e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle \\ &= |\alpha\rangle \end{aligned} \tag{1-6.9}$$

おまけ 3

スクイーズ状態についてなんか

問題 2　統計力学: BEC

2-1

状態 ϵ_i の状態が n_i 個ある確率は

$$\frac{e^{-\beta(\epsilon_i-\mu)n_i}}{\Theta} \tag{2-1.1}$$

であるので分布関数は

$$f(\epsilon_i)=\sum_{n_i}^{\infty} n_i \frac{e^{-\beta(\epsilon_i-\mu)n_i}}{\Theta} \tag{2-1.2}$$