問題 3　電磁気学: 電気多極子

3-1

r_0 と r の間の角を θ_0 とすると

$$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|=\sqrt{r^2-2r_0r\cos\theta_0+r_0^2}=r\left(1-\cos\theta\frac{r_0}{r}\right) \tag{3-1.1}$$

3-2

$\boldsymbol{d}$ と $\boldsymbol{r}$ の間のなす角を θ_1 とすると

$$\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{r})&=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{d}/2|}-\frac{e}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}+\boldsymbol{d}/2|}=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(1+\cos\theta_1\frac{r_0}{r}\right)-\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(1+\cos\theta_1\frac{r_0}{r}\right)\\&=\frac{ed\cos\theta_1}{4\varepsilon_0 r^2}=\frac{edy}{4\varepsilon_0 r^3}\end{aligned} \tag{3-2.1}$$

3-3

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})&=-\boldsymbol{\nabla}\varphi(\boldsymbol{r})=-\frac{ed}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{e}_y+\frac{3edy}{4\pi\varepsilon_0 r^4}\left(\frac{x}{r}\boldsymbol{e}_x+\frac{y}{r}\boldsymbol{e}_y+\frac{z}{r}\boldsymbol{e}_z\right)\\&=\frac{3edxy}{4\pi\varepsilon_0 r^5}\boldsymbol{e}_x+\frac{ed(3y^2-r^2)}{4\pi\varepsilon_0 r^5}\boldsymbol{e}_y+\frac{3edyz}{4\pi\varepsilon_0 r^5}\boldsymbol{e}_z\end{aligned} \tag{3-3.1}$$

3-4

$$\boldsymbol{E}(0,a,0)=\frac{ed}{2\pi\varepsilon_0 a^3}\boldsymbol{e}_y \tag{3-4.1}$$

より、

$$U=-\frac{ed}{2\pi\varepsilon_0 a^3}\cdot ed\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=-\frac{e^2d^2}{2\pi\varepsilon_0 a^3}\sin\theta \tag{3-4.2}$$

3-5

前問より、$\theta=\pi/2$ が最小。

3-6

電気単極子は

$$q=\int\rho(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}^3r=\int\left[-e\delta\left(y-\frac{d}{2}\right)+2e\delta(y)-e\delta\left(y+\frac{d}{2}\right)\right]\delta(x)\delta(z)\,\mathrm{d}^3r'=0 \tag{3-6.1}$$

電気双極子は

$$p_i=\int x_i'\rho(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}^3r=\int x_i\left[-e\delta\left(y-\frac{d}{2}\right)+2e\delta(y)-e\delta\left(y+\frac{d}{2}\right)\right]\delta(x)\delta(z)\,\mathrm{d}^3r'=0 \tag{3-6.2}$$

電気四極子は

$$\begin{aligned}Q_{11}&=\frac{1}{2}\int(2x'^2-y'^2-z'^2)\rho(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}^3r\\&=\frac{1}{2}\int(2x'^2-y'^2-z'^2)\left[-e\delta\left(y-\frac{d}{2}\right)+2e\delta(y)-e\delta\left(y+\frac{d}{2}\right)\right]\delta(x)\delta(z)\,\mathrm{d}^3r'\\&=\frac{ed^2}{8}\end{aligned} \tag{3-6.3}$$

$$
\begin{aligned}
Q_{22} &= \frac{1}{2}\int(-x'^2+2y'^2-z'^2)\rho(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}^3r \\
&= \frac{1}{2}\int(-x'^2+2y'^2-z'^2)\left[-e\delta\left(y-\frac{d}{2}\right)+2e\delta(y)-e\delta\left(y+\frac{d}{2}\right)\right]\delta(x)\delta(z)\,\mathrm{d}^3r' \\
&= -\frac{ed^2}{4} \qquad (3\text{-}6.4)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q_{33} &= \frac{1}{2}\int(-x'^2-y'^2+2z'^2)\rho(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}^3r \\
&= \frac{1}{2}\int(-x'^2-y'^2+2z'^2)\left[-e\delta\left(y-\frac{d}{2}\right)+2e\delta(y)-e\delta\left(y+\frac{d}{2}\right)\right]\delta(x)\delta(z)\,\mathrm{d}^3r' \\
&= \frac{ed^2}{8} \qquad (3\text{-}6.5)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q_{12} = Q_{21} &= \frac{1}{2}\int 3x'_iy'_i\rho(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}^3r \\
&= \frac{1}{2}\int 3x'_iy'_i\left[-e\delta\left(y-\frac{d}{2}\right)+2e\delta(y)-e\delta\left(y+\frac{d}{2}\right)\right]\delta(x)\delta(z)\,\mathrm{d}^3r' \\
&= 0 \qquad (3\text{-}6.6)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q_{13} = Q_{31} &= \frac{1}{2}\int 3x'_iz'_i\rho(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}^3r \\
&= \frac{1}{2}\int 3x'_iz'_i\left[-e\delta\left(y-\frac{d}{2}\right)+2e\delta(y)-e\delta\left(y+\frac{d}{2}\right)\right]\delta(x)\delta(z)\,\mathrm{d}^3r' \\
&= 0 \qquad (3\text{-}6.7)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q_{23} = Q_{32} &= \frac{1}{2}\int 3y'_iz'_i\rho(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}^3r \\
&= \frac{1}{2}\int 3y'_iz'_i\left[-e\delta\left(y-\frac{d}{2}\right)+2e\delta(y)-e\delta\left(y+\frac{d}{2}\right)\right]\delta(x)\delta(z)\,\mathrm{d}^3r' \\
&= 0 \qquad (3\text{-}6.8)
\end{aligned}
$$

3-7

$$
\begin{aligned}
\varphi(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^5}\times\frac{e^2d^2(x^2-2y^2+z^2)}{8} = -\frac{3ed^2y^2}{32\pi\varepsilon_0 r^5}+\frac{ed^2}{32\pi\varepsilon_0 r^3} = -\frac{ed^2(3y^2-r^2)}{32\pi\varepsilon_0 r^5} \\
E_x &= -\frac{\partial\phi(\boldsymbol{r})}{\partial x} = -\frac{15ed^2xy^2}{32\pi\varepsilon_0 r^7}+\frac{3ed^2x}{32\pi\varepsilon_0 r^5} = -\frac{3ed^2x(5y^2-r^2)}{32\pi\varepsilon_0 r^7} \\
E_y &= -\frac{\partial\phi(\boldsymbol{r})}{\partial y} = -\frac{15ed^2y^3}{32\pi\varepsilon_0 r^7}+\frac{6ed^2y}{32\pi\varepsilon_0 r^5}+\frac{3ed^2y}{32\pi\varepsilon_0 r^5} = -\frac{15ed^2y^3}{32\pi\varepsilon_0 r^7}+\frac{9ed^2y}{32\pi\varepsilon_0 r^5} = -\frac{3ed^2y(5y^2-3r^2)}{32\pi\varepsilon_0 r^7} \\
E_z &= -\frac{\partial\phi(\boldsymbol{r})}{\partial z} = -\frac{15ed^2y^2z}{32\pi\varepsilon_0 r^7}+\frac{3ed^2x}{32\pi\varepsilon_0 r^5} = -\frac{3ed^2z(5y^2-r^2)}{32\pi\varepsilon_0 r^7} \qquad (3\text{-}7.1)
\end{aligned}
$$

3-8

(c1) の配置だと電気四極子の両端にある負の電荷が反発しあうのに対し、(c2) の配置だと原点にある負電荷は a にある電気四極子のうち一番近くにある正電荷を感じてその次に負電荷を感じて引き付けあうと考えられる。なので、(c2) の方がエネルギーは小さいと考えられる。

実際 (c1) では

$$
\begin{aligned}
U &= -\frac{1}{3}\left(Q_{11}\frac{\partial E_x(a)}{\partial x}+Q_{22}\frac{\partial E_y(a)}{\partial y}+Q_{33}\frac{\partial E_z(a)}{\partial z}\right) \\
&= -\frac{ed^2}{12}\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}(a)-3\frac{\partial E_y(a)}{\partial y}\right) = \frac{ed^2}{4}\frac{\partial E_y(a)}{\partial y} \\
&= \frac{ed^2}{4}\left[-\frac{45ed^2y^2}{32\pi\varepsilon_0 r^7}+\frac{105ed^2y^4}{32\pi\varepsilon_0 r^9}+\frac{9ed^2}{32\pi\varepsilon_0 r^5}-\frac{45ed^2y^2}{32\pi\varepsilon_0 r^7}\right]_{y=a,r=a} \\
&= \frac{3e^2d^4}{4\pi\varepsilon_0 a^5} \qquad (3\text{-}8.1)
\end{aligned}
$$

であるのに対し、(c2) では電気四極子モーメントは

$$
\begin{aligned}
&-\frac{Q_{11}}{2} = Q_{22} = Q_{33} = \frac{ed^2}{4}, \\
&Q_{12} = Q_{21} = Q_{13} = Q_{31} = Q_{23} = Q_{32} = 0
\end{aligned}
\tag{3-8.2}
$$

であるので、

$$
\begin{aligned}
U &= -\frac{1}{3}\left(Q_{11}\frac{\partial E_x(a)}{\partial x} + Q_{22}\frac{\partial E_y(a)}{\partial y} + Q_{33}\frac{\partial E_z(a)}{\partial z}\right) \\
&= -\frac{ed^2}{12}\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}(a) - 3\frac{\partial E_x(a)}{\partial x}\right) = \frac{ed^2}{4}\frac{\partial E_x(a)}{\partial x} \\
&= -\frac{ed^2}{4} \times \left.\frac{3ed^2(5y^2 - r^2)}{32\pi\varepsilon_0 r^7}\right|_{y=a,r=a} = -\frac{3e^2d^4}{32\pi\varepsilon_0 a^5}
\end{aligned}
\tag{3-8.3}
$$

となるので結果としても正しいし、$-\partial_a$ をすることで力を求めると確かにそれぞれ斥力と引力になるのがわかる。

感想

多極子は地道に具体例を扱って馴染んでいくしかない。その触ってみる具体例としてとても良い問題ではあるが、試験問題としては誘導に乗るだけではあるので面白くはない。

電気単極子や双極子はそれぞれ r^{-1}, r^{-2} で広がるので電気四極子よりも強くなってしまう。なのでもし設問 6 で電気単極子や双極子が生き残るとそれ以降の設問が成り立たないので、それで答えはある程度分かってしまう。

設問 8 も計算せずに絵をみてわかるでしょとやっても実は当てられるので、本番は時間が余らない限りポテンシャルの計算はしないだろうな。