

# 2017 年度東大理物答案

しゃんごん (@CEY3944)

2025 年 6 月 13 日

# 物理学

## 問題 1 量子力学: 摂動論・断熱近似

1-1

$$\begin{aligned}(H - E_2 I) |2\rangle &= V |1\rangle + E_2 |2\rangle - E_2 |2\rangle \\ \langle 2| (H - E_2 I) |2\rangle &= V \langle 2|1\rangle = 0 \\ (H - E_2 I)^2 |2\rangle &= V^2 |2\rangle + E_2 |2\rangle - E_2 |2\rangle \\ \langle 2| (H - E_2 I)^2 |2\rangle &= V^2 \langle 2|2\rangle = V^2\end{aligned}\tag{1-1.1}$$

1-2

固有値方程式より

$$\begin{aligned}0 &= |H - EI| = (E_1 - E)(E_2 - E) - V^2 = E^2 - (E_1 + E_2)E + E_1 E_2 - V^2 \\ E &= \frac{E_1 + E_2}{2} \pm \sqrt{\frac{(E_1 - E_2)^2}{4} + V^2}\end{aligned}\tag{1-2.1}$$

また、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} E_1 - E_{\pm} & V \\ V & E_2 - E_{\pm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle 1|\psi_{\pm}\rangle \\ \langle 2|\psi_{\pm}\rangle \end{pmatrix} = 0\tag{1-2.2}$$

より、

$$\begin{aligned}0 &= (E_1 - E_{\pm}) \langle 1|\psi_{\pm}\rangle + V \langle 2|\psi_{\pm}\rangle \\ \frac{\langle 2|\psi_{\pm}\rangle}{\langle 1|\psi_{\pm}\rangle} &= \frac{E_{\pm} - E_1}{V} \\ \frac{\langle 2|\psi_{+}\rangle}{\langle 1|\psi_{+}\rangle} &= \frac{E_2 - E_1}{2V} + \sqrt{\frac{(E_2 - E_1)^2}{4V^2} + 1} \\ \frac{\langle 2|\psi_{-}\rangle}{\langle 1|\psi_{-}\rangle} &= \frac{E_2 - E_1}{2V} - \sqrt{\frac{(E_2 - E_1)^2}{4V^2} + 1}\end{aligned}\tag{1-2.3}$$

1-3

$$\begin{aligned}\langle \psi_{+}| H |\psi_{-}\rangle &= E_{+} \langle \psi_{+}|\psi_{-}\rangle = E_{-} \langle \psi_{+}|\psi_{-}\rangle \\ 0 &= (E_{+} - E_{-}) \langle \psi_{+}|\psi_{-}\rangle\end{aligned}\tag{1-3.1}$$

いま、固有値は異なるので  $\langle \psi_{+}|\psi_{-}\rangle = 0$  がいえ、固有状態が直交しているのがわかる。

1-4

設問 2 で得られた結果に  $E_1 = E_2 - \mathcal{E}\lambda$  を入れると

$$E_{\pm}(\lambda) = E_2 \pm \frac{\mathcal{E}\lambda}{2} \pm \sqrt{\frac{\mathcal{E}^2 \lambda^2}{4} + V^2}\tag{1-4.1}$$

これより

$$E_{+}(\lambda) - E_{-}(\lambda) = 2\frac{\mathcal{E}\lambda}{2} \pm \sqrt{\frac{\mathcal{E}^2 \lambda^2}{4} + V^2} \geq 2\sqrt{V^2} = 2V\tag{1-4.2}$$

## 1-5

(i)

シュレディンガー方程式に  $|\psi_{\pm}^{(t/T)}\rangle$  の完全系をいれて整理していく。

$$\begin{aligned}
 i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle &= H |\psi(t)\rangle \\
 i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left( |\psi_+^{(t/T)}\rangle \langle\psi_+^{(t/T)}|\psi(t)\rangle + |\psi_-^{(t/T)}\rangle \langle\psi_-^{(t/T)}|\psi(t)\rangle \right) &= |\psi_+^{(t/T)}\rangle \langle\psi_+^{(t/T)}|H|\psi_+^{(t/T)}\rangle \langle\psi_+^{(t/T)}|\psi(t)\rangle \\
 &\quad + |\psi_+^{(t/T)}\rangle \langle\psi_+^{(t/T)}|H|\psi_-^{(t/T)}\rangle \langle\psi_-^{(t/T)}|\psi(t)\rangle \\
 &\quad + |\psi_-^{(t/T)}\rangle \langle\psi_-^{(t/T)}|H|\psi_+^{(t/T)}\rangle \langle\psi_+^{(t/T)}|\psi(t)\rangle \\
 &\quad + |\psi_-^{(t/T)}\rangle \langle\psi_-^{(t/T)}|H|\psi_-^{(t/T)}\rangle \langle\psi_-^{(t/T)}|\psi(t)\rangle \\
 i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left( c_+(t) |\psi_+^{(t/T)}\rangle + c_-(t) |\psi_-^{(t/T)}\rangle \right) &= E_+(t/T) c_+(t) |\psi_+^{(t/T)}\rangle + E_-(t/T) c_-(t) |\psi_-^{(t/T)}\rangle
 \end{aligned} \tag{1-5.1}$$

また、 $|\psi_+^{(\lambda)}\rangle$  と  $|\psi_-^{(\lambda)}\rangle$  が直交していることから

$$|\psi_-^{(t/T)}\rangle = -\sin(\theta(\lambda)) |1\rangle + \cos(\theta(\lambda)) |2\rangle \tag{1-5.2}$$

のように書ける。 $|\psi_{\pm}^{(t/T)}\rangle$  の基底で書いた時間発展の式を  $|1\rangle, |2\rangle$  の基底で書き直すと

$$\begin{aligned}
 i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left[ \left\{ c_+(t) \cos(\theta(t/T)) - c_-(t) \sin(\theta(t/T)) \right\} |1\rangle + \left\{ c_+(t) \sin(\theta(t/T)) + c_-(t) \cos(\theta(t/T)) \right\} |2\rangle \right] \\
 = \left\{ E_+(t/T) c_+(t) \cos(\theta(t/T)) - E_-(t/T) c_-(t) \sin(\theta(t/T)) \right\} |1\rangle \\
 + \left\{ E_+(t/T) c_+(t) \sin(\theta(t/T)) + E_-(t/T) c_-(t) \cos(\theta(t/T)) \right\} |2\rangle
 \end{aligned} \tag{1-5.3}$$

これより各基底の成分を見ると

$$\begin{aligned}
 \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - E_+(t/T) \right) c_+(t) \cos(\theta(t/T)) - \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - E_-(t/T) \right) c_-(t) \sin(\theta(t/T)) &= 0 \\
 \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - E_+(t/T) \right) c_+(t) \sin(\theta(t/T)) + \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - E_-(t/T) \right) c_-(t) \cos(\theta(t/T)) &= 0
 \end{aligned} \tag{1-5.4}$$

(ii)

一般の関数  $f(t)$  に対し、

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left[ f(t) e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{-T}^t dt' E_{\pm}(t'/T)} \right] = e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{-T}^t dt' E_{\pm}(t'/T)} \left[ -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + E_{\pm}(t/T) \right] f(t) \tag{1-5.5}$$

となるので、 $f(t) = \tilde{c}_{\pm}(t) \cos(\theta(t/T)), \tilde{c}_{\pm}(t) \sin(\theta(t/T))$  として前問で得られた時間発展の式に入れると、

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \left[ \tilde{c}_+(t) \cos(\theta(t/T)) - \tilde{c}_-(t) \sin(\theta(t/T)) \right] &= 0 \\
 \frac{\partial}{\partial t} \left[ \tilde{c}_+(t) \sin(\theta(t/T)) + \tilde{c}_-(t) \cos(\theta(t/T)) \right] &= 0
 \end{aligned} \tag{1-5.6}$$

## 1-6

外部パラメータ  $\lambda$  は磁場で、ゼーマン分裂によるエネルギー準位のシフトを表していると見える。ホッピング  $V$  によって二準位は結合性軌道と反結合性軌道になり、磁場を加えても二準位の上下を入れ替えたとしても、結合性軌道と反結合性軌道は設問 4 により交わることはなく、反結合性軌道はいつまでたっても反結合性軌道の対称性をもつといった感じか。

## 感想

その場で notation を把握しないといけないのが面倒な問題。

設問 6 でいろいろ与えられたものを使った説明は全く思いつかなかった。ナイーブに設問 5 の結果を使うとうまくいかない。設問 5 で得られた時間発展の式と与えられた初期条件より

$$\begin{aligned}\tilde{c}_+(t) \cos(\theta(t/T)) - \tilde{c}_-(t) \sin(\theta(t/T)) &= \tilde{c}_+(-T) \cos(\theta(-1)) - \tilde{c}_-(-T) \sin(\theta(-1)) = 1 \\ \tilde{c}_+(t) \sin(\theta(t/T)) + \tilde{c}_-(t) \cos(\theta(t/T)) &= \tilde{c}_+(-T) \sin(\theta(-1)) + \tilde{c}_-(-T) \cos(\theta(-1)) = 0\end{aligned}$$

これより

$$\tilde{c}_+(t) = \cos(\theta(t/T)), \quad \tilde{c}_-(t) = -\sin(\theta(t/T))$$

なので、 $t = T$  では

$$\tilde{c}_+(T) = 0, \quad \tilde{c}_-(T) = 1$$

となって意図しない解が出てしまっている。