問題 3　力学: 万有引力

3-1

EL.eq より r 方向は

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} &= 0 \\ \mu r \dot{\varphi}^2 - \frac{G\mu M}{r^2} - \mu \ddot{r} &= 0 \\ \mu \ddot{r} &= \mu r \dot{\varphi}^2 - \frac{G\mu M}{r^2} \end{aligned} \tag{3-1.1}$$

φ 方向は

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mu r^2 \varphi^2 &= 0 \end{aligned} \tag{3-1.2}$$

3-2

r に共役な運動量 p は

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = \mu \dot{r} \tag{3-2.1}$$

φ に共役な運動量 J は

$$J = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \mu r^2 \dot{\varphi} \tag{3-2.2}$$

エネルギーとハミルトニアンは今の場合等しいので

$$E = p\dot{r} + J\dot{\varphi} - \mathcal{L} = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{J^2}{2\mu r^2} - \frac{G\mu M}{r} \tag{3-2.3}$$

3-3

設問 1 より角運動量は

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mu r^2 \dot{\varphi} = 0 \tag{3-3.1}$$

となるので、J は時間によらない運動の定数とわかる。

エネルギーについて、

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\partial E}{\partial r} + \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\frac{\partial E}{\partial p} \\ &= \frac{p}{\mu}\left(-\frac{J^2}{\mu r^3} + \frac{G\mu M}{r^2}\right) + \left(\frac{J^2}{\mu r^3} - \frac{G\mu M}{r^2}\right)\frac{p}{\mu} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3-3.2}$$

より、これも時間によらない運動の定数とわかる。

3-4

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} &= -L_{GW} \\ \frac{G\mu M}{2a^2}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} &= -\frac{32G^4}{5c^5}\frac{\mu^2 M^3}{a^5} \\ \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} &= -\frac{64G^3}{5c^5}\frac{\mu M^2}{a^3} \end{aligned} \tag{3-4.1}$$

3-5

初期条件を満たすように与え垂れた一階の微分方程式を解くと

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} &= -A\left\{\frac{P_c}{P}\right\}^{5/3} \\
\left(\frac{P}{P_c}\right)^{5/3}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} &= -A \\
\frac{3}{8}\left(\frac{P}{P_c}\right)^{8/3} &= -A\frac{t}{P_c} + \frac{3}{8}\left(\frac{P_0}{P_c}\right)^{8/3} \qquad (3\text{-}5.1)
\end{aligned}
$$

これより $P = 0$ となる時間は

$$
\begin{aligned}
0 &= -A\frac{\tau_{GW}}{P_c} + \frac{3}{8}\left(\frac{P_0}{P_c}\right)^{8/3} \\
\tau_{GW} &= \frac{3P_c}{8A}\left(\frac{P_0}{P_c}\right)^{8/3} \qquad (3\text{-}5.2)
\end{aligned}
$$

3-6

ケプラーの方程式の両辺を時間微分すると

$$
\begin{aligned}
GMP\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} &= 12\pi^2 a^2 \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} \\
\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} &= \frac{6\pi^2}{GN}\frac{a^2}{P}\left(-\frac{64G^3}{c^5}\frac{\mu M^2}{a^3}\right) \\
&= -\frac{2^6\cdot 3\pi(2\pi)^{5/3}}{5}\left(\frac{G\mu^{3/5}M^{2/5}c^{-3}}{P}\right)^{5/3} \\
&\equiv -A\left(\frac{P_c}{P}\right)^{5/3} \qquad (3\text{-}6.1)
\end{aligned}
$$

より

$$
P_c = G\mu^{3/5}M^{2/5}c^{-3} \quad A = \frac{192\pi(2\pi)^{5/3}}{5} \qquad (3\text{-}6.2)
$$

とすれは式 (6) が得られる。

3-7

$m = kM_\odot$ とすると、$M = 2kM_\odot, \mu = kM_\odot/2$ となり、

$$
P_c = G\mu^{3/5}M^{2/5}c^{-3} = \frac{k}{2^{1/5}}GM_\odot c^{-3} = \frac{k}{2.2}\times 10^{-5}\,\mathrm{sec} \qquad (3\text{-}7.1)
$$

とわかる。これと設問 5 の結果を合わせると

$$
\begin{aligned}
\tau_{GW} &= \frac{3P_c}{8A}\left(\frac{P_0}{P_c}\right)^{8/3} \\
0.15\,\mathrm{sec} &= \frac{3}{8\times 2500}\frac{k}{2.2}\left(\frac{0.06\,\mathrm{sec}}{k/2.2\mathrm{sec}}\times 10^5\right)^{8/3}\mathrm{sec} \qquad (3\text{-}7.2)
\end{aligned}
$$

感想