問題 1　力学: 相対論的力学

1-1

ロケット本体の運動量変化は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m(t)v(t) = m(t)a + \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}v(t) \tag{1-1.1}$$

時刻 t の微小時間 dt に放出されたガス dm が持っていった運動量は

$$dm(v(t) - v_{gas}) = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\,(v(t) - v_{gas})dt \tag{1-1.2}$$

とわかる。運動量保存則よりこれらが等しいので

$$\begin{aligned} m(t)a + \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}v(t) &= \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\,(v(t) - v_{gas}) \\ \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} &= -\frac{a}{v_{gas}}m(t) \end{aligned} \tag{1-1.3}$$

1-2

前問で得られたのは線形微分方程式より解は

$$m(t) = m_0 e^{-at/v_{gas}} \tag{1-2.1}$$

1-3

イ:

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}dt \tag{1-3.1}$$

ロ:

$$u^\mu \odot u^\mu = -u^0u^0 + u^1u^1 = \frac{-c^2dt^2 + dx^2}{d\tau^2} = c^2\frac{ds^2}{-ds^2} = -c^2 \tag{1-3.2}$$

ハ:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(u^\mu \odot u^\mu) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(-c^2\right) \\ u^\mu \odot a^\mu &= 0 \end{aligned} \tag{1-3.3}$$

ニ・ホ: a^0 について

$$\begin{aligned} u^0 &= \frac{\mathrm{d}ct}{\mathrm{d}\tau} = \frac{c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ a^0 &= \frac{\mathrm{d}u^0}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}u^0}{\mathrm{d}t} = \frac{v/c}{(1 - v^2/c^2)^2}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \end{aligned} \tag{1-3.4}$$

a^1 について

$$\begin{aligned} u^1 &= \frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}t} = \frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ a^1 &= \frac{\mathrm{d}u^1}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}u^1}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{v^2/c^2}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}\right)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^2}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \end{aligned} \tag{1-3.5}$$

これより α は

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= -a^0a^0 + a^1a^1 = \frac{1 - v^2/c^2}{(1 - v^2/c^2)^4}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^3}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2 \\ \alpha &= \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \end{aligned} \tag{1-3.6}$$

α を使って α^0, α^1 を表すと

$$a^0 = \alpha\frac{u^1}{c}, \quad a^1 = \alpha\frac{u^0}{c} \tag{1-3.7}$$

1-4

$\alpha = (1 - v^2/c^2)^{-3/2} dv/dt$ の両辺を t で積分すると

$$
\begin{aligned}
\int_0^t \alpha \, dt &= \int_0^t \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2} \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} dt \\
\alpha t &= \int_0^v \frac{dv}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} \qquad \text{(1-4.1)}
\end{aligned}
$$

ここで、$v/c = \sinh \eta$ とするとこの積分は

$$
\begin{aligned}
\frac{\alpha\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} &= c \int_0^\eta \frac{d\eta}{\cosh^2 \eta} \\
&= c \tanh \eta = \frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\
v(\tau) &= \alpha\tau \qquad \text{(1-4.2)}
\end{aligned}
$$

感想

相対論的力学とか使わないからもう忘れた。それでもこれを知ってるよねと問われたので苦しい。