問題 1　量子力学: 調和振動子・摂動論

1-1

交換関係は

$$
\begin{aligned}
[a, a^\dagger] &= \frac{m\omega}{2\hbar}\left[x + \frac{ip}{m\omega}, x - \frac{ip}{m\omega}\right] \\
&= \frac{m\omega}{2\hbar}\left[x, -\frac{ip}{m\omega}\right] + \frac{m\omega}{2h}\left[\frac{ip}{m\omega}, x\right] \\
&= \frac{-i}{2\hbar} i\hbar + \frac{i}{2\hbar}(-i\hbar) = 1
\end{aligned} \tag{1-1.1}
$$

$$
[N, a] = [a^\dagger a, a] = [a^\dagger, a]a = -a \tag{1-1.2}
$$

$$
[N, a^\dagger] = [a^\dagger a, a^\dagger] = a^\dagger [a, a^\dagger] a = a^\dagger \tag{1-1.3}
$$

また、

$$
\begin{aligned}
N &= \frac{m\omega}{2\hbar}\left(x - \frac{ip}{m\omega}\right)\left(x - \frac{ip}{m\omega}\right) \\
&= \frac{m\omega}{2\hbar}\left(x^2 + \frac{i}{m\omega}[x, p] + \frac{p^2}{m^2\omega^2}\right) \\
\hbar\omega &= \frac{1}{2}m\omega^2 + \frac{1}{2m}p^2 - \frac{1}{2}\hbar\omega = H_0 - \frac{1}{2}\hbar\omega \\
H_0 &= \hbar\omega\left(N + \frac{1}{2}\right)
\end{aligned} \tag{1-1.4}
$$

よって

$$
\alpha = 1, \beta = \frac{1}{2} \tag{1-1.5}
$$

1-2

(i)

N の固有ケットを $|\phi_0\rangle$, 固有値を n_0 とする。

$$
\begin{aligned}
\langle\psi_0|N|\psi_0\rangle &= n\,\langle\psi_0|\psi_0\rangle = n \\
\langle\psi_0|a^\dagger a|\psi_0\rangle &= |a\,|\psi_0\rangle|^2 \geq 0
\end{aligned} \tag{1-2.1}
$$

より N の固有値 n は非負である。

(ii)

最低固有値を取るケットを $|0\rangle$, 固有値を n_0 とする。$n_0 \neq 0$ とすると、

$$
Na\,|0\rangle = (aN + [N, a])\,|0\rangle = (n_0 - 1)a\,|0\rangle \tag{1-2.2}
$$

となり、n_0 より小さい固有値を作ることができるので、矛盾。なので、最小の固有値は $n_0 = 0$ である。
適当な固有ケット $|k\rangle$ と固有値 k を考える。

$$
\begin{aligned}
Na^\dagger\,|k\rangle &= (a^\dagger N + [N, a^\dagger])\,|k\rangle = (k+1)\,|k\rangle \\
N\,|k+1\rangle &= (k+1)\,|k+1\rangle
\end{aligned} \tag{1-2.3}
$$

なので、$a^\dagger$ は固有値を 1 つ増やす状態であるのがわかる。これと最低固有値が 0 であることを組み合わせると、N の固有値は整数であるとわかる。

1-3

前問より、N の n 番目の固有値は n であるので、ハミルトニアンの n 番目のエネルギーは

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \tag{1-3.1}$$

前問より、$|n\rangle \propto (a^\dagger)^n |0\rangle$ になることがわかる。規格化条件により帰納的に比例定数を求める。

$$\begin{aligned} 1 &= ||n\rangle|^2 \\ &\propto \left|a^\dagger |n-1\rangle\right|^2 = \langle n-1| aa^\dagger |n-1\rangle = \langle n-1| (N+1) |n-1\rangle = n \end{aligned} \tag{1-3.2}$$

これより

$$|n\rangle = \frac{a^\dagger}{n} |n-1\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle \tag{1-3.3}$$

1-4

(i)

摂動を受けた固有ケットを

$$|n\rangle' = |n\rangle + \left|n^{(1)}\right\rangle + \left|n^{(2)}\right\rangle + \cdots \tag{1-4.1}$$

のように右上に V の次数を書く。

このときの固有値方程式は

$$(H_0 + V) |n\rangle' = (E_n^{(0)} + E_n^{(2)} + E_n^{(2)} + \cdots) |n\rangle \tag{1-4.2}$$

のように書かれる。この式について、V の 1 次の項を取り出すと

$$H_0 \left|n^{(1)}\right\rangle + V |n\rangle = E_n^{(0)} \left|n^{(1)}\right\rangle + E_n^{(1)} |n\rangle \tag{1-4.3}$$

これの左から $\langle m|$ を作用させると

$$E_m^{(0)} \left\langle m\middle|n^{(1)}\right\rangle + V_{mn} = E_n^{(0)} \left\langle m\middle|n^{(1)}\right\rangle + E_n^{(1)} \delta_{mn} \tag{1-4.4}$$

$m = n$ の場合を考えると

$$E_n^{(1)} = V_{nn} \tag{1-4.5}$$

$m \neq n$ の場合を考えると

$$\left\langle m\middle|n^{(1)}\right\rangle = -\frac{V_{mn}}{E_m^{(0)} - E_n^{(0)}} \tag{1-4.6}$$

固有値方程式の V の 2 次の項は

$$H_0 \left|n^{(2)}\right\rangle + V \left|n^{(1)}\right\rangle = E_n^{(0)} \left|n^{(2)}\right\rangle + E_n^{(1)} \left|n^{(1)}\right\rangle + E_n^{(2)} |n\rangle \tag{1-4.7}$$

これに $\langle n|$ を左から作用させると、

$$\begin{aligned} \langle n| V \left|n^{(1)}\right\rangle &= E_n^{(2)} \\ E_n^{(2)} &= \sum_{l=0}^{\infty} \langle n| V |l\rangle \left\langle l\middle|n^{(1)}\right\rangle = -\sum_{l=0}^{\infty} \frac{|V_{lm}|^2}{E_l^{(0)} - E_n^{(0)}} \end{aligned} \tag{1-4.8}$$

(ii)

$$V_{k0} = \langle k|\lambda x^4|0\rangle = \lambda\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2 \langle k|(a + a^\dagger)^4|0\rangle \tag{1-4.9}$$

これより、$k > 4$ のときには

$$V_{k0} = 0 \tag{1-4.10}$$

$k=4$ のときには、

$$V_{40} = \lambda\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2 \langle 4|(a^\dagger)^4|0\rangle = \sqrt{24}\lambda\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2 \tag{1-4.11}$$

$k=3$ のときには、

$$V_{30} = 0 \tag{1-4.12}$$

$k=2$ のときには、

$$V_{20} = \lambda\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2 \langle 4|(aa^\dagger a^\dagger a^\dagger + a^\dagger aa^\dagger a^\dagger + a^\dagger a^\dagger aa^\dagger)|0\rangle = \left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)\lambda\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2 \tag{1-4.13}$$

$k=1$ のときには、

$$V_{10} = 0 \tag{1-4.14}$$

$k=0$ のときには、

$$V_{00} = \lambda\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2 \langle 4|(aaa^\dagger a^\dagger + aa^\dagger aa^\dagger)|0\rangle = 3\lambda\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2 \tag{1-4.15}$$

よって

$$\begin{aligned} E_0 &= E_0^{(0)} + E_0^{(1)} + E_0^{(2)} \\ &= \frac{1}{2}\hbar\omega + 3\lambda\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2 - 6(4+\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2})\frac{\lambda^2}{\hbar\omega}\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^4 \end{aligned} \tag{1-4.16}$$

1-5

いま、x^4 の項は摂動と見なせないときを考える。するとこれは x^2 のポテンシャル以上に効いているということなので、x^2 を無視することができる。このとき

$$\begin{aligned} E_n &= \frac{p^2}{2m} + \lambda x^4 \\ p &= \pm 2m\sqrt{E_n - \lambda x^4} \end{aligned} \tag{1-5.1}$$

とわかる。

ボーアゾンマーフェルトの量子化条件より、

$$\begin{aligned} nh &= \oint p dx \\ &\propto \oint \sqrt{E_n - \lambda x^4} dx \end{aligned} \tag{1-5.2}$$

いま、$x = (\frac{E_n}{\lambda})^{1/4} t$ というように x を無次元した変数 t を考える。すると積分は単なる定数となるので、

$$\begin{aligned} nh &\propto \oint \sqrt{E_n}\sqrt{1-t^4}\left(\frac{E_n}{\lambda}\right)^{1/4} dt \\ &\propto E_n^{3/4} \\ E_n &\propto n^{4/3} \end{aligned} \tag{1-5.3}$$

感想

設問 5 以外は教科書みたいな問題で驚いた。

設問 5 はボーアゾンマーフェルトの量子化条件を使いどころというのを教えてもらってなかなか感動した。