



湘潭大學

科研论文写作

题目： 高温作业专用服装设计

姓 名： 向涛

学 号： 202021001395

院 系： 数学与计算科学学院

专 业： 数学专业

任课教师： 易年余

二〇二一年五月

摘要

服装是人类工作和生活最基本的物质保证. 近年来, 随着高温工作的增加, 高温作业专用服装设计也成为了人类需要解决的难题. 高温作业专用服装除了拥有普通服装的基本性能, 在高温下还起到了安全防护的作用. 高温作业专用服装有很好的隔热性能, 能有效阻隔人体皮肤与高温的直接接触, 从而避免高温灼伤人们的皮肤. 在本文中, 我们将对高温作业专用服装的设计进行研究, 采用多重搜索算法, 探讨并确定专用服装每层的最优厚度以使得服装对人体的保护作用达到最大.

对于问题一, 已知环境温度为 75° , 要求我们建立模型求出温度分布情况. 根据数学知识, 我们建立了第 I 层的热导偏微分方程, 用外侧恒温 75° 作为初始条件, 计算出了 I 层内部 (II 层外部) 的温度分布情况. 同时建立第 II 层的热导偏微分方程, 结合第 I 层温度分布情况表作为第二层热导偏微分方程的初始条件, 得到 II 层内部 (III 层外部) 的温度分布情况. 同理, 得到 III 层内部 (IV 层外部) 的温度分布情况. 求解抛物型的方程我们用到了向后差分的格式, 将偏微分方程转换成了求解线性方程组的形式, 然后利用 python 画出了温度与时间及空间的关系图, 运用我们建立的第四层热导偏微分方程, 用服装第三层内部温度分布数据作为初始条件, 计算出了第四层内部的温度分布数据, 即皮肤表面的温度变化情况, 通过与实验得到的数据进行对比分析发现我们的温度数值解是和真实情况几乎吻合的.

对于问题二, 为了确定第 II 层的最优厚度, 我们建立了单目标优化模型, 其目标为 II 层厚度最小, 以此使得服装成本最低. 当工作 60 分钟时, 以假人皮肤外侧温度不超过 47° 为约束条件之一, 以超过 44° 的时间不超过 5 分钟为约束条件之二, 换句话说, 即在 55 分钟之前假人的皮肤外侧温度不超过 44° , 将 II 层的厚度以步长为 0.1mm 进行划分, 得到众多的离散点数据, 利用多重搜索算法, 将问题二的离散点数据依次代入问题一的模型进行逐一验证, 得到满足约束条件的数据可行解区间为 [17.6mm, 25mm], 因此取最小值 17.6mm 作为 d2 的最优厚度.

对于问题三 II 层与 IV 层的最优厚度应使得研发成本和研发周期最小化. 考虑到 IV 层为空隙层, 求解过程中我们首先使 II 层厚度最小化, 在这一前提下搜索满足约束条件且使得研发周期最小化的 IV 层厚度. 与问题二类似, 我们首先使用区域搜索算法初步确定满足约束条件的 II 层、IV 层厚度取值范围. 通过循环遍历找到所有满足条件的两者厚度组合, 根据优化目标求得最终结果, 得到 II 层最小厚度与对应的 IV 层最优厚度分别为 19.3mm、6.4mm, 此时皮肤外侧温度超过 44° 的时长为 290s.

最后对差分格式的稳定性 and 截断误差进行了分析, 讨论了向后差分格式是无条件稳定的, 且截断误差也是可以接受的, 实际数据与数值解的对比也证实了这一点.

关键词: 偏微分方程, 向后差分, 搜索算法, 优化模型

Special clothing design for high temperature work

Tao Xiang (Mathematics)

Directed by Nianyu Yi

ABSTRACT

Clothing is the most basic material guarantee for human work and life. In recent years, with the increase in high-temperature work, the design of clothing for high-temperature operations has also become a problem that humans need to solve. In addition to the basic performance of ordinary clothing, clothing for high-temperature operations has It also plays a role of safety protection. High-temperature working clothes have good heat insulation properties, which can effectively block the direct contact between human skin and high temperature, so as to avoid high-temperature burns on people' s skin. In this article, we will be dedicated to high-temperature operations Research on clothing design, using multiple search algorithms to explore and determine the optimal thickness of each layer of special clothing to maximize the protective effect of clothing on the human body.

For question 1, the ambient temperature is known to be 75 degrees, and we are required to establish a model to find the temperature distribution. According to mathematical knowledge, we have established the partial differential equation of the first layer of heat conduction, using the outer constant temperature of 75 degrees as the initial condition to calculate The temperature distribution inside the I layer (outside the II layer) is analyzed. At the same time, the second-layer thermal conductivity partial differential equation is established, combined with the first-layer temperature distribution table as the initial condition of the second-layer thermal conductivity partial differential equation, and the temperature distribution inside the second layer (outside the third layer) is obtained. Similarly, Get the temperature distribution inside the III layer (outside the IV layer). To solve the parabolic equation, we used the backward difference format to convert the partial differential equations into the form of solving linear equations, and then use python to draw the temperature and The relationship between time and space, using the fourth-layer thermal conductivity partial differential equation we established, using the internal temperature distribution data of the third layer of clothing as the initial conditions, calculated the internal temperature distribution data of the fourth layer, that is, the temperature of the skin surface According to the change situation, comparing and analyzing

the data obtained from the experiment, it is found that our temperature numerical solution is almost in agreement with the real situation.

For the second question, in order to determine the optimal thickness of the second layer, we established a single-objective optimization model. The goal is to minimize the thickness of the second layer, so as to minimize the cost of clothing. When working for 60 minutes, the outer temperature of the dummy skin is not Exceeding 47 degrees is one of the constraint conditions, and the time exceeding 44 degrees does not exceed 5 minutes as the second constraint. In other words, the outer temperature of the dummy's skin does not exceed 44 degrees before 55 minutes, and the thickness of the II layer Divide with a step length of 0.1mm to obtain a large number of discrete point data. Using a multiple search algorithm, the discrete point data of problem two is substituted into the model of problem one for verification one by one, and the feasible solution interval of the data that meets the constraints is [17.6 mm,25mm], so take the minimum value of 17.6mm as the optimal thickness of d2.

For problem 3, the optimal thickness of layers II and IV should minimize the development cost and development cycle. Considering that the IV layer is a void layer, we first minimize the thickness of the II layer in the solution process. On this premise, we search for the thickness of the IV layer that meets the constraint conditions and minimizes the development cycle. Similar to problem 2, we first use the region search algorithm to preliminary determine the thickness range of layer II and layer IV that meet the constraint conditions. Through cyclic traversal, all the combinations of the two thicknesses that meet the conditions were found. According to the optimization objective, the final results were obtained, and the minimum thickness of layer II and the corresponding optimal thickness of layer IV were 19.3mm and 6.4mm respectively. At this time, the duration of the outer skin temperature exceeding 44 degrees was 290s.

Finally, the stability and truncation error of the difference scheme are analyzed. It is discussed that the backward difference scheme is unconditionally stable, and the truncation error is also acceptable. The comparison between actual data and the numerical solution also confirms this point.

KEY WORDS: Partial differential equation, backward difference, search algorithm, optimization model

目录

一 引言	1
1.1 背景	1
1.2 导出的问题	1
二 问题分析	2
2.1 问题一分析	2
2.2 问题二分析	2
2.3 问题三分析	2
三 模型假设与符号说明	3
3.1 模型假设	3
3.2 符号说明	3
四 模型的建立与求解	4
4.1 问题一模型的建立	4
4.2 问题一模型的求解	7
4.3 问题二模型的建立	11
4.4 问题二模型的求解	12
4.5 问题三模型的建立	12
4.6 问题三模型的求解	13
五 模型结果分析与评价	15
5.1 模型的误差分析	15
5.2 向后差分格式的稳定性分析	15
5.3 模型的评价	15
参考文献	16
致谢	17

一 引言

1.1 背景

随着科学技术的不断发展,当今世界已经有越来越多的领域取得了非凡的成就.在数学领域也有着很多的成就,数学不仅是在理论上的研究,更重要的是如何将理论应用到实际生活中,这才是我们值得关心的问题,就偏微分方程而言,有着非常广泛的应用,特别实在流体中的应用.比如在供热通风和燃气工程中:热的供应,空气的调节,燃气的输配,排毒排湿,除尘降温等等,都是以流体作为介质,通过流体的各种物理作用,对流体的流动有效的加以组织实现的.除此之外在空气动力学、电磁流体力学、计算流体力学、两相(气液或气固)流等等.可以说数学理论中对偏微分方程的研究是一个很重要的话题,就抛物型的偏微分方程而言主要是用于对热传导的研究,比如人们在高温环境中工作时候,我们希望有一种衣服能具有很好的隔热效果,那么如何设计从理论上讲将是一个热传导的数学问题,这也是本文的研究内容.

1.2 导出的问题

当人们在高温环境下工作时,为了避免灼伤,需要穿着专用服装.一般情况下,专用服装由三层织物材料构成,分别记为 I、II、III 层,其中 I 层在最外侧,III 层最接近皮肤,但是与皮肤之间还存在空隙,将此空隙记为 IV 层.

为了设计高温作业专用服装,我们在实验室的高温环境中放置一个体内温度控制在 37 度的假人,并测量假人皮肤外侧的温度.本文我们将建立数学模型来确定假人皮肤外侧的温度变化情况,并研究以下问题:^①

问题一:我们已经给出了专用服装材料的某些参数值如附件 1 所示,并在环境温度为 75 度、II 层厚度为 6 mm、IV 层厚度为 5 mm、工作时间为 90 分钟条件下,对假人皮肤外侧的温度进行测量,得到的结果如附件 2 所示.试建立数学模型,计算温度分布.

问题二:当环境温度为 65 度、IV 层的厚度为 5.5 mm 时,为了保证工作 60 分钟时,假人皮肤外侧温度不超过 47 度,且超过 44 度的时间不超过 5 分钟,试确定 II 层的最优厚度.

问题三:当环境温度为 80 度时,为了保证工作 30 分钟时,假人皮肤外侧温度不超过 47 度,且超过 44 度的时间不超过 5 分钟,试确定 II 层和 IV 层的最优厚度.

^① 本次的问题来源于 2018 年全国大学生数学建模 A 题

二 问题分析

2.1 问题一分析

题中已知服装材料 I、II、III、IV 层的某些参数值, 要求我们建立数学模型计算由外界 (75°C) 到假人的各层温度分布. 根据物理热学知识, 热的传递方式有热辐射、热传导、热对流 3 种形式. 由于第 IV 层的间隙厚度小于 6.4mm , 热对流影响很小, 因此不考虑热对流. 并且也不考虑热辐射, 即我们只考虑热传导. 根据傅里叶定律我们可以知道连续温度场内热流密度与温度梯度的关系, 但是不能揭示各点温度与其相邻点温度之间的关系, 热传导偏微分方程揭示了连续物体内的温度分布与坐标和时间的内在联系, 因此我们对服装的不同层建立了热导偏微分方程模型, 结合初值条件, 通过向后 Euler 差分格式计算出了服装不同层的温度随时间的分布数据, 并通过我们的模型计算出了皮肤外侧的温度数据, 结合题中所给数据做出了误差分析, 以此来检验模型的精确性.

2.2 问题二分析

问题二需要我们确定的是服装第二层的最优厚度, 可以将其看作成一个优化模型, 即在满足假人皮肤外侧不超过 47°C , 超过 44°C 不超过 5min 的情况下, 此时我们仅需要考虑第二层衣服的厚度最小即可. 在已知其他数据的情况下, 我们采用多重搜索算法, 即将求解区间进行划分, 得到许多离散的点, 用 x_i 表示这些离散的点, 分别将这些点带入到问题一模型的偏微分方程中, 利用 python 进行逐一计算验证, 满足约束条件的保留, 不满足约束条件的舍去, 最后得到服装第二层的可行解取值区间, 从而根据成本最低的限制条件确定服装第二层最优厚度的取值.

2.3 问题三分析

问题三有两个变量, 分别为 II 层厚度与 IV 层厚度, 相比于问题二增加了一个变量. 在现实生活中, IV 层并不影响研发成本, 所以研发成本优化主要在于减小 II 层的厚度. 此外, 根据题目要求, 需要缩短作业服的研发周期, 那么我们可以寻求 II 层、IV 层厚度使得作业服能在更短的时间内达到稳态. 在本题中, 相比于缩短研发周期, 我们给与成本的权重更高, 即在满足 II 层的厚度尽可能小的情况下, 再考虑更短的达到稳态的时间. 先粗精度, 大范围枚举搜索估算出两个厚度对符合条件的大致范围, 再使用小步长找出所有的符合条件, 即可得到其中的最优解.

三 模型假设与符号说明

3.1 模型假设

1. 假设热辐射和热对流产生的热量忽略不计.
2. 假设题中所给的数据都是真实可靠的.
3. 假设服装相邻 2 层之间散失的热量变化是连续的.
4. 假设热传递为垂直于皮肤方向进行, 故可以视为一维的.
5. 假设各分层内部不含热源.

3.2 符号说明

表 3.1 符号表

变量符号	变量含义	变量单位
Q	热量	J
ρ_i	第 i 层材料的密度	kg/m^3
c_i	第 i 层材料的比热熔	$\text{J}/(\text{kg}\cdot^{\circ}\text{C})$
λ_i	第 i 层材料的热传导率	$\text{w}/(\text{m}\cdot^{\circ}\text{C})$
A	面积	m^2
T	温度	$^{\circ}\text{C}$
t	时间	s
x	总厚度	m
d_i	第 i 层的厚度	m
τ	时间步长	/
h	空间步长	/
r	网格比	/

四 模型的建立与求解

4.1 问题一模型的建立

问题一的解决方案流程图如下

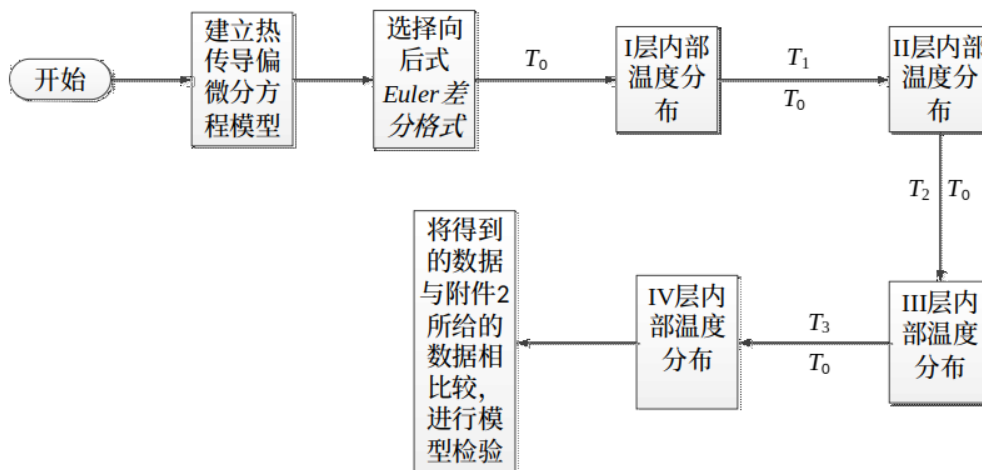


图 4.1 流程图

其中, T_0 : 外界环境恒温 $75\text{ }^{\circ}\text{C}$, T_1 : I 层内部温度分布结果 T_2 : II 层内部温度分布结果, T_3 : III 层内部温度分布结果

热传导在两个完全相接触的物体之间, 并且遵循傅里叶热传导模型^[1]

$$Q = -\lambda A \frac{\partial T}{\partial x} \quad (4.1)$$

公式4.1中, A 为面积, $\frac{\partial T}{\partial x}$ 为温度梯度. 我们假定为单位面积即取 $A = 1$, λ 是与 x 相关的热传导系数, 由于每层衣服对应一个热传导系数, 因此有四个取值, 数据在 excel 中.

比热熔定律是: 在时间 Δt 内将质量为 m 的物体温度升高 ΔT 所吸收的热能为

$$Q = cm\Delta T \quad (4.2)$$

其中 c 为质量为 m 的物体材料的比热熔, 四层材料的相关比如容即热传导系数的数据均在 excel 中给出. 根据这两个等式考虑在 Δt 的时间内利用微元法建立相关模型等式.

根据 Fourier 定律4.1：在时间 δt 内，区间 $[x, x + \delta x]$ 的热能变化 (增量) 为

$$Q = \left[\lambda(x + \Delta x) \frac{\partial T}{\partial x}(x + \Delta x, t) - \lambda(x) \frac{\partial T}{\partial x}(x, t) \right] \Delta t \quad (4.3)$$

另外由比热熔定律4.2知，在时间 δt 内，区间 $[x, x + \delta x]$ 的热能变化 (增量) 为

$$c \cdot m \cdot \Delta T = c(x) \cdot (\rho(x) \Delta x) \cdot \Delta T \quad (4.4)$$

利用4.3和4.4结合热能守恒定律，则有

$$c(x) \cdot (\rho(x) \Delta x) \cdot \Delta T = \left[\lambda(x + \Delta x) \frac{\partial T}{\partial x}(x + \Delta x, t) - \lambda(x) \frac{\partial T}{\partial x}(x, t) \right] \Delta t \quad (4.5)$$

由4.6可得它的另一个形式是

$$\frac{c(x) \cdot (\rho(x)) \cdot \Delta T}{\Delta t} = \frac{\lambda(x + \Delta x) \frac{\partial T}{\partial x}(x + \Delta x, t) - \lambda(x) \frac{\partial T}{\partial x}(x, t)}{\Delta x} \quad (4.6)$$

令 $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$ 可以得到四层放热服装每层对应的热传导方程模型如下^[2]

$$\begin{cases} \rho_1 c_1 \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_1 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} & (x \in [0, d_1], t \in [0, 5400s]) \\ \rho_2 c_2 \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} & (x \in [0, d_2], t \in [0, 5400s]) \\ \rho_3 c_3 \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_3 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} & (x \in [0, d_3], t \in [0, 5400s]) \\ \rho_4 c_4 \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_4 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} & (x \in [0, d_4], t \in [0, 5400s]) \end{cases} \quad (4.7)$$

其中， ρ_i, c_i, λ_i 分别为密度，比热熔，热传导系数. T 为温度， t 为时间， x 为厚度. 上述方程4.7的初始和边界条件满足：

$$\begin{cases} T(x, 0) = v(x) & x \in (0, d_1 + d_2 + d_3 + d_4m) \\ t(0, t) = k(t), T(L, t) = u(t) & t \in (0, 5400s) \end{cases} \quad (4.8)$$

上式4.8中， L 表示衣服的与皮肤的交界处的值，即表示右边界的值， $v(x), k(t), u(t)$ 函数表示如下：

$$\begin{cases} 75^\circ C & x \in [0, d_1) \\ 37^\circ C & x \in [d_1, d_1 + d_2 = d_3 + d_4] \end{cases} \quad (4.9)$$

即 $v(x)$ 表示为一段函数，根据不同的服装层次初始函数有所不同.

$$k(t) = 75^{\circ}\text{C} \quad t \in [0, 5400\text{s}] \quad (4.10)$$

$k(t)$ 为该模型的左边界函数，且是一个常数。 $w(t)$ 初始值为 37°C ，会随着热量的流入发生变化。除此之外我们还应该考虑四层材料之间接触面满足的关系^[3]。

第一层与第二层接触面满足如下关系：

$$\begin{cases} T|_{x=d_1} = T|_{x=d_1} \\ -\lambda_1 \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=d_1} = -\lambda_2 \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=d_1} \end{cases} \quad (4.11)$$

第二层与第三层接触面满足如下关系：

$$\begin{cases} T|_{x=d_1+d_2} = T|_{x=d_1+d_2} \\ -\lambda_2 \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=d_1+d_2} = -\lambda_3 \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=d_1+d_2} \end{cases} \quad (4.12)$$

第一层与第二层接触面满足如下关系：

$$\begin{cases} T|_{x=d_1+d_2+d_3} = T|_{x=d_1+d_2+d_3} \\ -\lambda_3 \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=d_1+d_2+d_3} = -\lambda_4 \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=d_1+d_2+d_3} \end{cases} \quad (4.13)$$

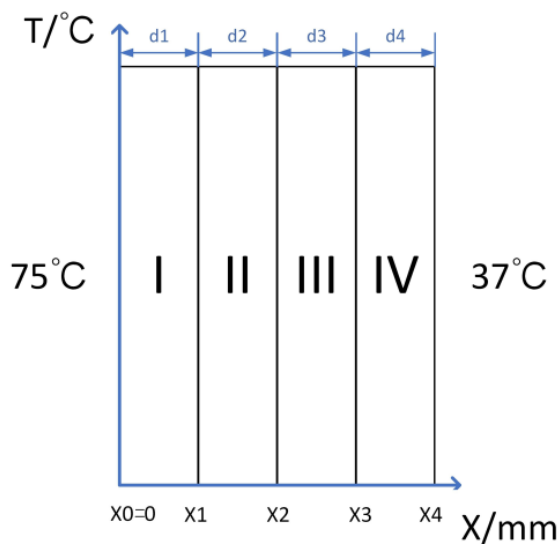


图 4.2 衣服模型示意图

令 $\alpha_i = \frac{\lambda_i}{\rho_i c_i}$ ，称 α_i 为第 i 层的热扩散率，结合上面的分析，因此可以确定衣服热

传导的最终模型为

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha_i \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} & i = 1, 2, 3, 4 \\ T(x, 0) = v(x) \\ T(0, t) = 75^\circ\text{C}, T(L, t) = 37^\circ\text{C} \\ T|_{x=x_i} = T|_{x=x_{i+1}} & i = 1, 2, 3 \\ -\lambda_i \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=x_i} = -\lambda_{i+1} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=x_{i+1}} & i = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (4.14)$$

4.2 问题一模型的求解

现在的问题是如何求解方程4.14, 容易知道该模型是一个抛物方程组的形式, 因此我们在理论分析的时候是需要对每层进行单独分析求解 (当使用计算机编程求解时候会有一些的技巧一次性将四层内部的温度分布算出来), 由于每一层对应的方程都是一个抛物型的偏微分方程, 我们只需要分析其中的一种即可, 可以将每一层的模型归纳为下列形式^[4]

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \\ T(x, 0) = A(x) \\ T(0, t) = B(t) \quad T(L, t) = C(t) \end{cases} \quad (4.15)$$

其中 $A(x), B(x), C(x)$ 是已知了的, a 是热扩散率系数, 那么问题4.14的核心就归结为求解问题4.15, 这是一个标准的抛物型偏微分方程, 求解偏微分方程可以用有限差分法求解, 当然有限元也可以, 本文求解采用有限差分中的向后差分格式求解.

向后差分格式是一种隐式的求解格式, 需要求解线性方程组. 现在将讨论当时间 $t \in [0, T]$, 空间 $x \in [0, I]$ 时候的求解情况, 因为这样具有普适性, 比如将 $T = 5400s$ 就满足了上面的问题一的时间要求. 在求解方程前我们需要对求解的区域进行网格剖分, 取空间步长和时间步长分别为 $h = \frac{I}{N}, \tau = \frac{T}{M}$, 对空间变量 x 所属的区间 $[0, I]$ 和时间变量 t 所属的区间 $[0, T]$ 做如下均匀剖分:

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = I, \quad 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_M = T \quad (4.16)$$

其中 $x_i = ih, t_k = K\tau \quad i = 0, 1, \cdots, N \quad K = 0, 1, \cdots, M$.

用两族平行直线 $x = x_j (j = 0, 1, \cdots, N)$ 和 $t = t_k (k = 0, 1, \cdots, M)$ 将求解区域分割为网格形式, 对网格的节点集合我们用如下的记号表示, 在二维我们一般用 Ω 与 $\partial\Omega$, 在这

里我用 \overline{G} 表示整个网格节点, G_h, Γ_h 分别表示网格内部节点和边界节点, 用集合来表示就是:

$$\begin{cases} \overline{G} = G_h \cup \Gamma_h = \{(x_j, t_k) : 0 \leq j \leq N; 0 \leq k \leq M\} \\ G_h = \{(x_j, t_k) : 0 < j < N; 0 < k \leq M\} \\ \Gamma_h = \{(x_j, t_k) : j = 0, N; k = 1, \dots, M\} \cup \{(x_j, t_0) : j = 0, \dots, N\} \end{cases} \quad (4.17)$$

下图显示的是网格剖分的形式, 假设空间轴在横轴, 时间轴在竖轴.

为了描述方便用 T_j^k 表示差分解在网格节点 (x_j, t_k) 处的分量, 下面将采用逐层计算的思想建立向后差分格式, 根据已知的边界条件可知, 在时间轴的两端边界点的值是已知的 (也就是网格边界对应的两条竖线), 在空间轴的底层也就是第 0 层是已知的 (也就是 x 轴), 那么我们的目的就是通过已知的第 0 层来计算第 1 层的数据, 同时不考虑边界点, 因为边界点是已知的, 因此只需要计算内部节点的数据, 注意到顶层的数据并不是边界点, 因此还要计算顶层的数据, 下面开始介绍一维情形下向后差分格式的具体思路^[5].

因为第 0 层数据已经知道, 便可以计算第 1 层的数据, 假设现在已经计算到了第 k 层, 需要计算第 $(k+1)$ 层 (简称当前层), 考虑当前层上的任意内节点 (x_j, t_{k+1}) , 规定其差分格式可用的模板点为

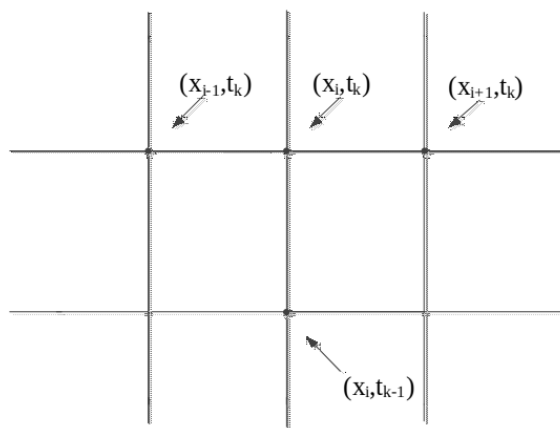


图 4.3 模板点图

对 (x_j, t_k) 处的微分方程

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (4.18)$$

离散化, 通常的方法是 Taylor 展式, 不仅可以离散微分方程变成差分方程, 还能够得到截断误差的阶, 但是我们这里为了方便采用差商逼近导数的方法, 则有^[6]

$$\frac{\partial T(x_j, t_{k+1})}{\partial t} \approx \frac{T(x_j, t_{k+1}) - T(x_j, t_k)}{\tau} \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial^2 T(x_j, t_{k+1})}{\partial x^2} \approx \frac{T(x_{j+1}, t_{k+1}) - 2T(x_j, t_{k+1}) + T(x_{j-1}, t_{k+1})}{h^2} \quad (4.20)$$

结合4.18,4.19,4.20式, 并舍掉相关的误差, 便可以得到向后差分格式

$$\frac{T_j^{k+1} - T_j^k}{\tau} = \frac{T_{j+1}^{k+1} - 2T_j^{k+1} + T_{j-1}^{k+1}}{h^2} \quad (4.21)$$

对4.21式两边同时乘以 τ , 然后可以化简成如下的形式

$$-rT_{j-1}^{k+1} + (1 + 2r)T_j^{k+1} - rT_{j+1}^{k+1} = T_j^k \quad (4.22)$$

其中 $r = \frac{\tau}{h^2}$ 为网格比, 将4.22式写成矩阵形式就是

$$AT^{k+1} = T^k \quad (4.23)$$

其中 A 的形式为

$$A = \begin{bmatrix} 1+2r & -r & & & \\ -r & 1+2r & -r & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -r & 1+2r & -r \\ & & & -r & 1+2r \end{bmatrix}$$

经过将求解区域离散画的处理, 抛物方程4.15的解与线性方程组4.23的解是相近的. 那么求解偏微分方程的问题就转换成了求解线性方程组. 求解线性方程组我们一般需要用迭代的方法求解, 在时间复杂度和空间复杂度上都会带来很大的好处.

一般来说线性方程组的迭代法有很多, 比如 Jacobi, Gauss-seidel, SOR, SSOR 等, 这里我采用的是 Jacobi 迭代方法求解线性方程组, 具体的思路就是考虑分裂 $A=D-L-U$, 其中 D 是 A 的对角线部分, $-L$ 和 $-U$ 分别为 A 的严格下三角和严格上三角部分, 即可得 Jacobi 迭代方法^[7]:

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(L + U)x^{(k)} + D^{-1}b, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (4.24)$$

对应迭代矩阵为

$$G_J = (D)^{-1}(L + U). \quad (4.25)$$

即可得到分量形式

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right), i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.26)$$

然后利用计算机进行编程求解. 求解结果如下.

衣服外面至皮肤表面温度分布数值解

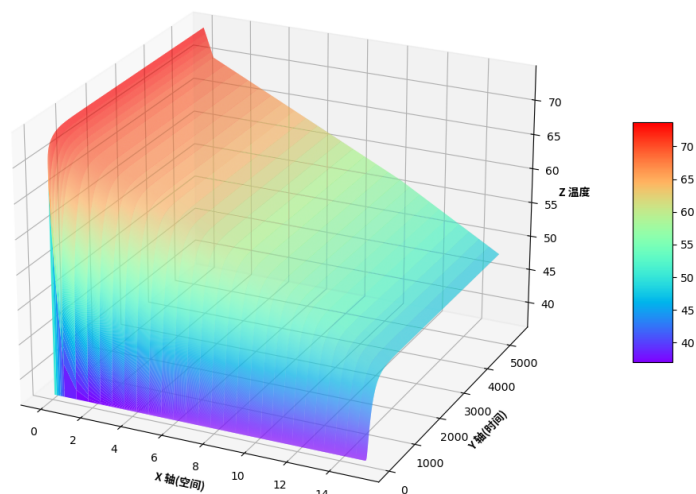


图 4.4 温度在不同时间不同位置的分布图

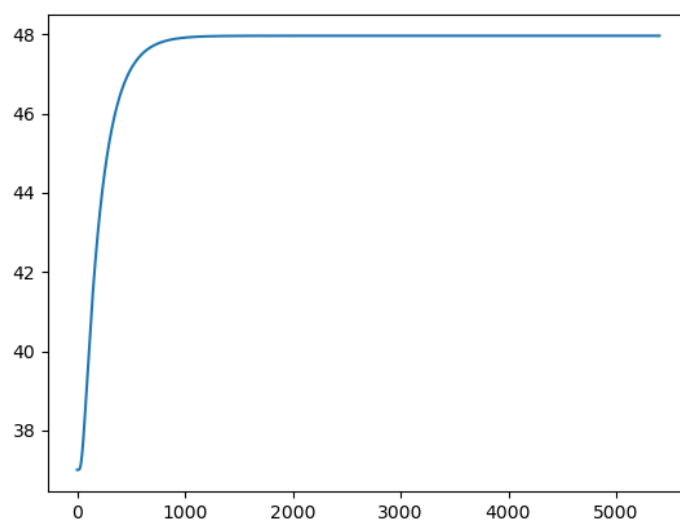


图 4.5 人体皮肤表面温度变化图

图4.4显示了衣服各个位置在不同时间下的温度情况, 图4.5反映了人体皮肤表面的温度变化情况, 从图中可以看出都是符合题意的.

4.3 问题二模型的建立

问题二的解决方案流程图如下：

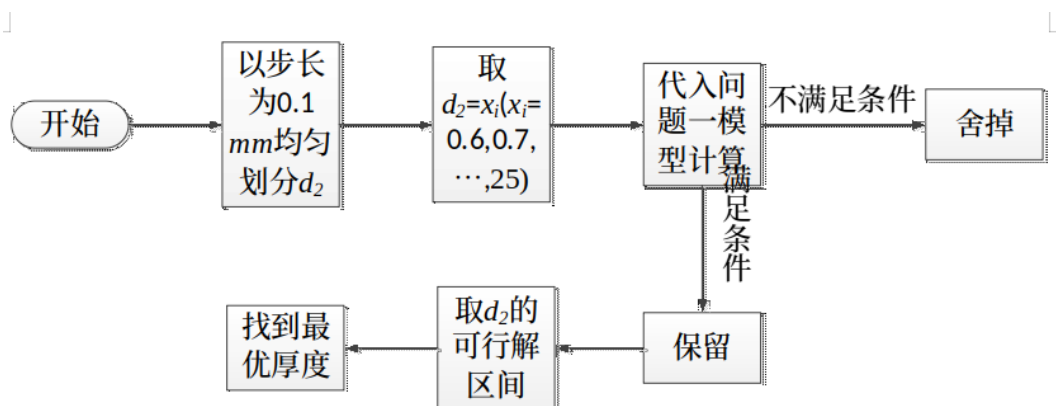


图 4.6 求解流程图

据题意，需要降低研发成本，因此在满足约束条件的前提下，我们需要把服装的厚度作为本题的优化目标，因为当其他数据一定时，只要服装的第二层厚度达到最小，那么服装的质量也是最小，成本就是最低的，因此我们的优化目标如下：

$$\min d_2 \quad (4.27)$$

由于工作 60 min 时皮肤的外侧温度不能超过 47°C，因此约束条件应为当 $x = x_4$ 且 $t = 3600s$ 时 T 需要在 47°C 以内，此为第一个约束条件；当 $x = x_4$ 且 $t = 3300s$ 时，T 需要在 44°C 以内，这样才能控制温度超过 44°C 不超过 5 min，此为第二个约束条件，故总的约束条件如下：

$$s.t. \begin{cases} T(x_e, t_e) \leq 47^\circ C \\ T(x_f, t_f) \leq 44^\circ C \end{cases} \quad (4.28)$$

其中

$$\begin{cases} d_1 = 0.6 \times 10^{-3}, d_2 = [0.6, 25] \times 10^{-3}, d_3 = 3.6 \times 10^{-3}, d_4 = 5.5 \times 10^{-3} \\ x_4 = d_1 + d_2 + d_3 + d_4, x_e = x_f = x_4, t_e = 60min = 3600s, t_f = 55min = 3300s \end{cases}$$

基于上述分析，我们将第二问的优化模型建立如下：

$$\min d_2 \quad s.t. \begin{cases} T(x_e, t_e) \leq 47^\circ C \\ T(x_f, t_f) \leq 44^\circ C \end{cases} \quad (4.29)$$

优化目标中的 $T(x_e, t_e)$ 与 $T(x_f, t_f)$ 满足公式4.14

4.4 问题二模型的求解

在问题二中^[8], 我们将最优厚度理解为满足题目约束条件的最小厚度。因为 II 层厚度越小, 作业服的制作所需原材料越少, 相应地研发成本越低。在问题一的求解基础上, 模型中涉及的热传导率 λ , 与热扩散率 α 均得到。实验室环境温度、假人温度同样由题目给出。各分层的厚度方面只有 II 层厚度未知。因此, 模型中的参数仅为 II 层厚度, 一旦 II 层厚度 d_2 确定, 模型的解就得以确定。利用计算机 python 语言对模型??求解, 结合第一问, 便可以得到相关结果如下。

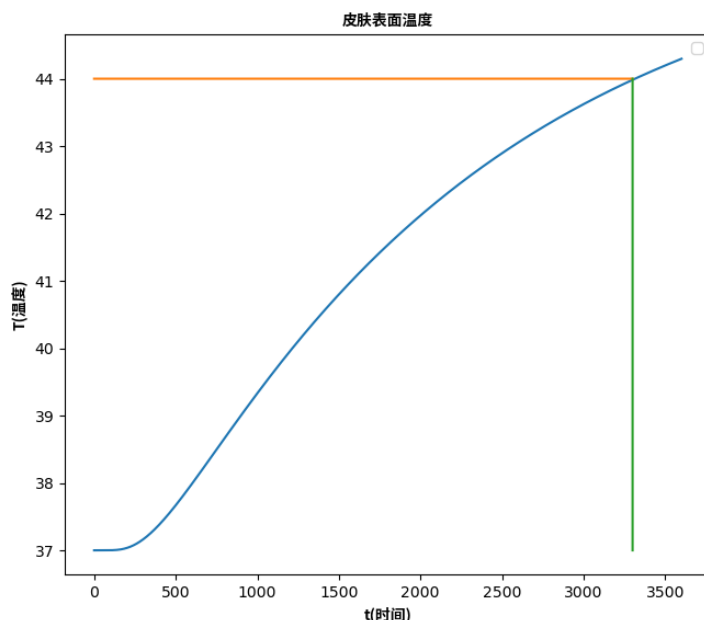


图 4.7 皮肤表面温度变化图

图4.7中可以看出曲线在 55 分钟时候皮肤表面并没有超过 44 度的温度, 最终得到的结果是第二层的最优厚度为 17.6mm, 皮肤外层超过 44 度时间是 281s, 短于 5 分钟, 最大温度从图4.7中可以看出并没有超过 47 度, 因此满足条件。

4.5 问题三模型的建立

第三问与第二问都为优化问题, 不同之处在于第三问多了一个变量 IV 层的厚度。既然作为优化问题, 我们首先定义优化的目标: 尽可能地减少成本, 在满足这个要求的前提下, 再减少开发周期。反映到本题中即为材料层 II 的厚度应该尽可能的小, 这是由于 IV 层为空气层, 其不会被计算在隔热服的生产成本当中, 所以只考虑材料层 II 的成

本. 为了减少研发周期, 要使检测隔热服达到热平衡所需的平衡时间更短. 在本题中, 我们赋予成本因素的权重更大, 所以必须先满足 II 层厚度尽可能薄的情况, 再选择不同的 IV 层厚度, 使得隔热服测试时达到热平衡的所需平衡时间更短. 即模型应该是

$$\min d_2, \min t_p \quad s.t. \begin{cases} T(x_j, t_j) \leq 47^\circ C \\ T(x_n, t_n) \leq 44^\circ C \end{cases} \quad (4.30)$$

其中

$$\begin{cases} d_1 = 0.6 \times 10^{-3}, d_2 = [0.6, 25] \times 10^{-3}, d_3 = 3.6 \times 10^{-3}, d_4 = 5.5 \times 10^{-3} \\ x_4 = d_1 + d_2 + d_3 + d_4, x_j = x_n = x_4, t_j = 30min = 1800s, t_n = 25min = 1500s \end{cases}$$

优化目标中的 $T(x_j, t_j)$ 与 $T(x_n, t_n)$ 满足公式4.14, t_p 表示达到温度平衡所用的时间.

4.6 问题三模型的求解

根据常识我们可以知道, 隔热服的厚度越厚, 其隔热效果越好. 所以, 为了初步确定 (d2, d4) 的大致范围, 以满足体表最高温度小于 $47^\circ C$ 且高于 $44^\circ C$ 的时间少于 5 分钟约束条件的 (d2, d4), 首先可将空气层 IV 的厚度定在最大值 6.4mm, 然后如同第二问那样找出最小的 II 层厚度的大致下界, 然后可开始运用如下示意的伪代码, 区域搜索出所有满足题目条件的 (d2, d4) 组^[9]:

Algorithm 1 Algorithm 1 区域搜索

Input: 第二层厚度范围边界: $D2_{min}, D2_{max}$, 第四层厚度范围边界: $D4_{min}, D4_{max}$, 第二层步长: $D2_delta$, 第四层步长: $D4_delta$

Output: 搜索矩阵, 符合条件输出 1, 否则输出 0 将第二层和第四层用步长分成若干份, 份数分别用 $length(D2)$ 和 $length(D4)$ 表示; 初始化搜索矩阵 $flag$, 行列数分别为初始化为 $length(D2)$ 和 $length(D4)$, 初始化为 0; $i \leftarrow 1$; $j \leftarrow length(D4)$;

```

1: while  $i < length(D2)$  &&  $j >= 1$  do
2:   if 皮肤最高温度  $< 47^\circ C$  && 持续时间  $> 300s$  then
3:      $flag(i, j)$  即其同一列下方所有元素设为 1;
4:      $j--$ ;
5:   else
6:      $i++$ 
7:   end if
8: end while
9: return  $flag$ ;
```

为了更直观的显示符合条件的区域范围, 可视化如下:

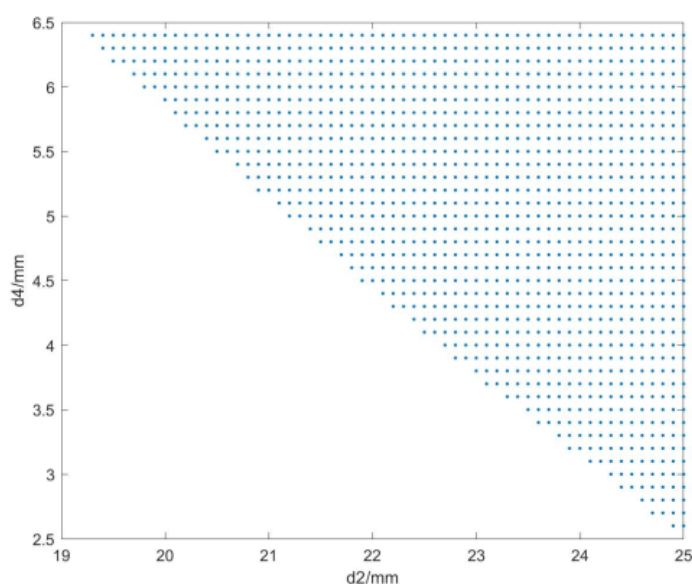
图 4.8 满足条件的 (d_2, d_4) 范围图

图4.8横轴为材料层 II 的厚度, 纵轴为空气层 IV 的厚度, 计算时两者的步长皆为 0.1mm. 图中蓝色的点代表符合约束条件的 (d_2, d_4) 对, 可进一步进行优化得到更精确的满足要求的点集范围, 根据不同的优化目标能够得到不同的结果. 根据我们定义的优化目标, 即在保证 II 层厚度最小的条件下, 选择 IV 层厚度使得平衡时间最短. 图中最左上角的唯一点即为我们的目标解 $(d_2, d_4) = (19.3\text{mm}, 6.4\text{mm})$. 在此条件下的皮肤外侧温度随时间变化如图4.9所示:

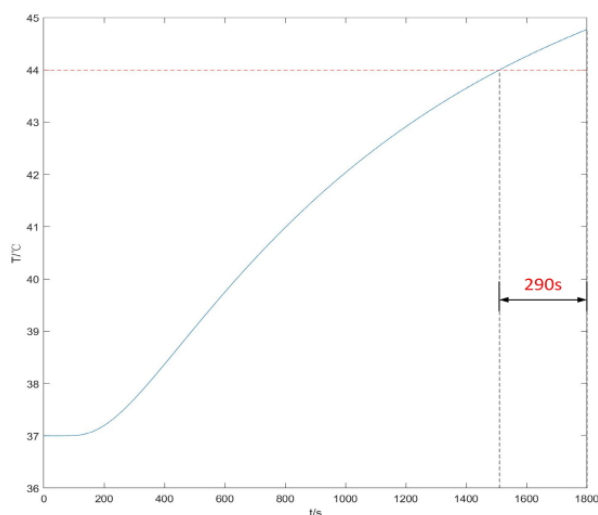


图 4.9 皮肤外侧温度变化情况图

如图4.9所示, 在规定时间内, 最高的体表温度低于 47°C , 且高于 44°C 所持续的时间为 290s, 短于 5 分钟, 满足题目所要求的两个条件.

五 模型结果分析与评价

5.1 模型的误差分析

$$\begin{cases} R_j^k(u) = \frac{u(x_j, t_{k+1}) - u(x_j, t_k)}{\tau} - \\ \frac{u(x_{j+1}, t_{k+1}) - 2u(x_j, t_{k+1}) + u(x_{j-1}, t_{k+1}))}{h^2} \end{cases} \quad (5.1)$$

利用 *Taylor* 展式, 有

$$\begin{cases} \frac{u(x_j, t_{k+1}) - u(x_j, t_k)}{\tau} = \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_k) + O(\tau) \\ \frac{u(x_{j+1}, t_{k+1}) - 2u(x_j, t_{k+1}) + u(x_{j-1}, t_{k+1}))}{h^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_{k+1}) + O(h^2) \\ = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_k) + O(\tau) + O(h^2) \end{cases} \quad (5.2)$$

根据 (14) 式可知, 向后差分的截断误差为:

$$R_j^k(u) = O(\tau + h^2) \quad (5.3)$$

5.2 向后差分格式的稳定性分析

所谓稳定性, 对于抛物型的方程来讲是基于初值稳定, 比如当初值条件发生变化后, 得到的数值解是否也只是发生很小的变化, 通过理论分析可以知道向后差分格式是无条件稳定的, 也就是说我们的初值任意取, 对时间和空间的剖分也可以任意的剖分, 边界条件也可以发生变化, 但是得到的结果仍然是可信的.

5.3 模型的评价

模型优点:

1. 将大量数据进行剖分, 实施区间求解, 简化了运算, 提高了运算率.
2. 进行了模型检验, 提高了模型的可信度.

模型缺点:

1. 将实验室中的情况考虑得过于理想化, 实际情况下有很多影响因素.
2. 使用数值方法求解偏微分方程组, 可能引入误差.

参考文献

- [1] 卢琳珍. 多层热防护服装的热传递模型及参数最优决定[J]. 浙江理工大学, 2018.
- [2] 潘斌. 热防护服装热传递数学建模及参数决定反问题[J]. 浙江理工大学, 2017.
- [3] MONTE F. An analytic approach to the unsteady heat conduction processes in onedimensional composite media[J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2002, 45(6): 1333-1343.
- [4] T M. Numerical integrations of the primitive equations by a simulated backward difference method[J]. Journal of the Meteorological Society of Japan, 2016, 44(1): 76-84.
- [5] 孙浩然吴宏聪张嘉墀李明奇. 高温环境下热防护服的温度分布研究[J]. 实验科学与技术, 2020, 18(4): 1-6.
- [6] 李荣华刘播. 偏微分方程数值解法[J]. 中国大学教学, 2020: 163-187.
- [7] 张凯院徐仲. 数值代数-第 2 版[J]. 科学出版社, 2006.
- [8] 王鹏周茂林姚兴苗. 等值线绘制中的多重网格剖分快速搜索算法[J]. 计算机应用研究, 2011, 28(6): 2346-2347.
- [9] MAHDAVI M F M. An improved harmony search algorithm for solving optimization problems[J]. Applied mathematics and computation[J]. Applied mathematics and computation, 2007, 188(2): 1567-1579.

致谢

时光飞逝，转眼间，研究生一年级就快结束了，在这一年期间，认识了许多同学和老师，日子过得很充实，也很累，但是收获了很多知识，收获了很多的友谊。

这篇文章虽然不是毕业论文，但却是我进入研究生生活以来写的第一篇文章，因此具有很多的纪念意义，首先这篇文章是科研论文写作课程的一个考察，在上课期间，易年余老师讲了很多有用的东西，比如从开始将 *LaTeX* 到后面讲述了我们以后写论文的点点滴滴，非常之详细，就连我们要如何投稿，如何与他人邮件交流都讲的非常清楚，因此我感觉学到了很多的东西，在此表示感谢。除此之外在这研究生的第一年期间，我还要感谢我的指导老师李明军对我这一年的关怀。感谢魏老师在数值代数的讲解中，不仅让我学会了很多计算机知识，还让我对编程产生了浓厚的兴趣，感谢舒适老师讲解的偏微分数值解理论，讲解的非常的清晰易懂，每次问的问题舒老师也会作很好的解答。身在他乡，难免会需要同学的互相关心和照顾，因此还要感谢身边同学的陪伴，感谢室友之间的互相照顾。最重要的是要感谢父母的支持，这么大了还在读书也是一件不容易的事情，身边的朋友都已经工作，结婚成家了，而我还需要努力的学习知识，因此得到了父母的支持是很开心的一件事情。

最后，由于写作能力和科研能力目前还在学习之中，文中会有很多不好的地方，还望老师多多包含。我在今后的学习中也会加倍努力，人生的道路还很漫长，后面还有更多的挑战，同时我也会不断的提升自己的能力，努力成为最好的自己。