有限差分求解抛物方程

向涛: 202021001395

2021 年 4 月 15 日

1 模型问题

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} - k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\
u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad t \in [0, 0.1] \\
u(x,0) = e^{-\dfrac{(x-0.25)^2}{0.01}} + 0.1 * sin(20\pi x), x \in (0,1)
\end{cases}
\tag{1}
$$

其中系数 $k = 1$. 请用向后差分法求解.

2 空间离散和时间离散

向后差分格式是一种隐式的求解格式，需要求解线性方程组. 在求解方程前我们需要对求解的区域进行网格剖分，取空间步长和时间步长分别为 $h = \dfrac{I}{N}, \tau = \dfrac{T}{M}$，对空间变量 x 所属的区间 $[0, I]$ 和时间变量 t 所属的区间 $[0, T]$ 做如下均匀剖分:

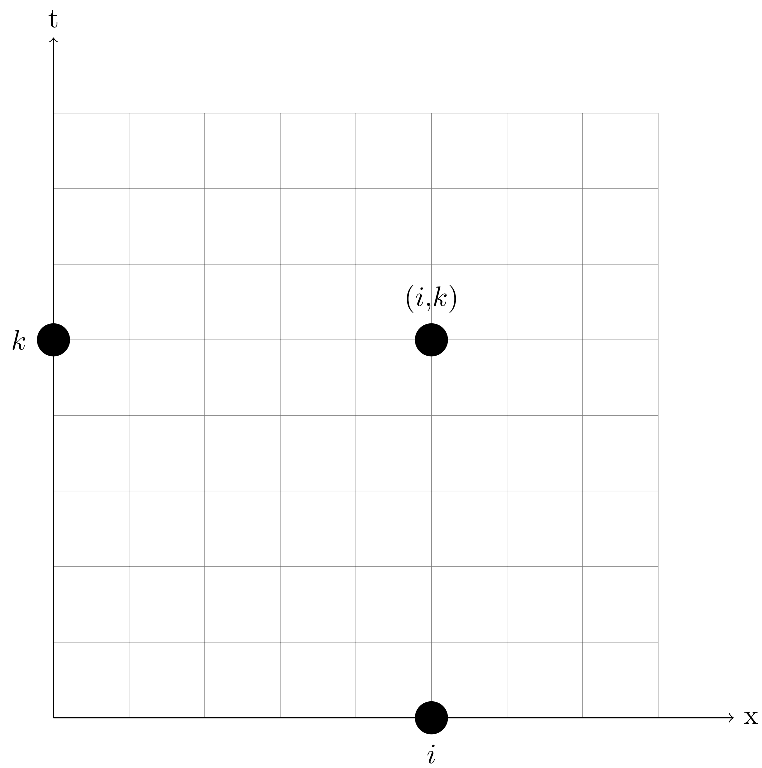
$$
0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = I, \; 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_M = T \tag{2}
$$

其中 $x_i = ih, t_k = K\tau \quad i = 0, 1, \cdots, N \quad K = 0, 1, \cdots, M$.

用两族平行直线 $x = x_j(0, 1, \cdots, N)$ 和 $t = t_k(k = 0, 1, \cdots, M)$ 将求解区域分割为网格形式，对网格的节点集合我们用如下的记号表示，在二维我们一般用 Ω 与 $\partial\Omega$，在这里我用 $\overline{G}$ 表示整个网格节点，G_h, Γ_h 分别表示网格内部节点和边界节点，用集合来表示就是:

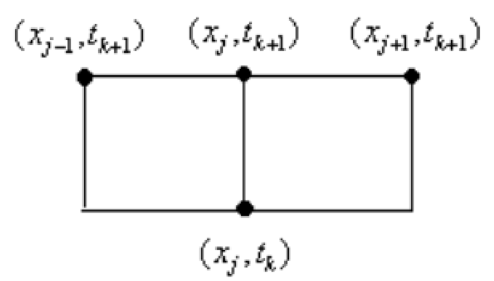
$$
\begin{cases}
\overline{G} = G_h \cup \Gamma_h = \{(x_j, t_k) : 0 \le j \le N; 0 \le k \le M\} \\
G_h = \{(x_j, t_k) : 0 < j < N; 0 < k \le M\} \\
\Gamma_h = \{(x_j, t_k) : j = 0, N; k = 1, \cdots, M\} \cup \{(x_j, t_0) : j = 0, \cdots, N\}
\end{cases}
\tag{3}
$$

下图显示的是网格剖分的形式，假设空间轴在横轴，时间轴在竖轴.



为了描述方便用 u_j^k 表示差分解在网格节点 (x_j, t_k) 处的分量，下面将采用逐层计算的思想建立向后差分格式，根据已知的边界条件可知，在时间轴的两端边界点的值是已知的 (也就是网格边界对应的两条竖线)，在空间轴的底层也就是第 0 层是已知的 (也就是 x 轴)，那么我们的目的就是通过已知的第 0 层来计算第 1 层的数据，同时不考虑边界点，因为边界点是已知的，因此只需要计算内部节点的数据，注意到顶层的数据并不是边界点，因此还要计算顶层的数据，下面开始介绍一维情形下向后差分格式的具体思路.

因为第 0 层数据已经知道，便可以计算第 1 层的数据，假设现在已经计算到了第 k 层，需要计算第 $(k+1)$ 层 (简称当前层)，考虑当前层上的任意内节点 (x_j, t_{k+1})，规定其差分格式可用的模板点为



对 (x_j, t_k) 处的微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{4}$$

离散化，通常的方法是 Taylor 展式，不仅可以离散微分方程变成差分方程，还能够得到截断误差的阶，但是我们这里为了方便采用差商逼近导数的方法，则有

$$\frac{\partial u(x_j,t_{k+1})}{\partial t} \approx \frac{u(x_j,t_{k+1})-u(x_j,t_k)}{\tau} \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 u(x_j,t_{k+1})}{\partial x^2} \approx \frac{u(x_{j+1},t_{k+1})-2u(x_j,t_{k+1})+u(x_{j-1},t_{k+1})}{h^2} \tag{6}$$

结合 (4) (5) (6) 式，并舍掉相关的误差，便可以得到向后差分格式

$$\frac{u_j^{k+1}-u_j^k}{\tau} = \frac{u_{j+1}^{k+1}-2u_j^{k+1}+u_{j-1}^{k+1}}{h^2} \tag{7}$$

对 (7) 式两边同时乘以 τ，然后可以化简成如下的形式

$$-ru_{j-1}^{k+1}+(1+2r)u_j^{k+1}-ru_{j+1}^{k+1}=u_j^k \tag{8}$$

其中 $r=\dfrac{\tau}{h^2}$ 称为网格比，将 (8) 式写成矩阵形式就是

$$AU^{k+1}=U^k \tag{9}$$

其中 A 的形式为

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1+2r & -r & & & \\ -r & 1+2r & -r & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -r & 1+2r & -r \\ & & & -r & 1+2r \end{bmatrix}$$

3 线性方程组的求解

经过第二步的处理，抛物方程的解对应为线性方程组 (9) 的解，如果从数学理论分析的角度区求解，比如用克拉默法则，这无疑是一个巨大的工程，时间复杂度极其的高，如果通过对矩阵 A 求逆矩阵也是非常困难的，因为我们分隔的节点很多，那么矩阵 A 的维度会非常的大，此时求逆非常的困难，所以我们需要用迭代的方法求解 (9)，在时间复杂度和空间复杂度上都会带来很大的好处.

一般来说线性方程组的迭代法有很多，比如 Jacobi,Gauss-seidel,SOR,SSOR 等，这里我采用的是 Jacobi 迭代方法求解线性方程组，具体的思路就是考虑分裂 A=D-L-U，其中 D 是 A 的对角线部分，-L 和-U 分别为 A 的严格下三角和严格上三角部分，即可得 Jacobi 迭代方法：

$$x^{(k+1)}=D^{-1}(L+U)x_{(k)}+D^{-1}b,\ k=1,2,\cdots,n. \tag{10}$$

对应迭代矩阵为

$$G_J=(D)^{-1}(L+U). \tag{11}$$

即可得到分量形式

$$x_i^{(k+1)}=\frac{1}{a_{ii}}\left(b_i-\sum_{j=1,j\neq i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}, i=1,2,\cdots,n.\right) \tag{12}$$

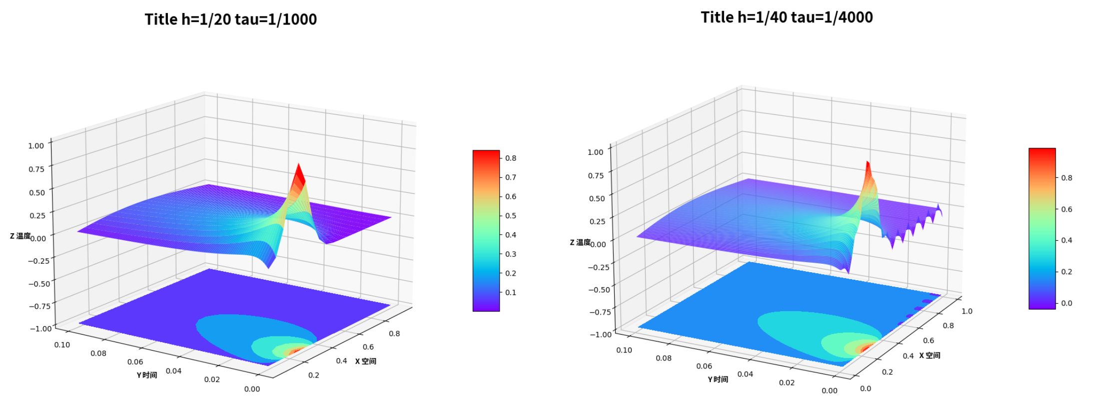


图 1: 不同剖分下的两个图形

然后利用计算机进行编程求解．求解的结果如下图 1（代码见附录）：[1]

4 结果分析

4.1 截断误差分析

$$\begin{cases} R_j^k(u) = \dfrac{u(x_j,t_{k+1})-u(x_j,t_k)}{\tau} - \\ \qquad\qquad \dfrac{u(x_{j+1},t_{k+1})-2u(x_j,t_{k+1})+u(x_{j-1},t_{k+1})}{h^2} \end{cases} \tag{13}$$

利用 $Taytor$ 展式，有

$$\begin{cases} \dfrac{u(x_j,t_{k+1})-u(x_j,t_k)}{\tau} = \dfrac{\partial u}{\partial t}(x_j,t_k)+O(\tau) \\ \dfrac{u(x_{j+1},t_{k+1})-2u(x_j,t_{k+1})+u(x_{j-1},t_{k+1})}{h^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j,t_{k+1})+O(h^2) \\ \qquad\qquad = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j,t_k)+O(\tau)+O(h^2) \end{cases} \tag{14}$$

根据 (14) 式可知，向后差分的截断误差为：

$$R_j^k(u) = O(\tau+h^2) \tag{15}$$

4.2 适定性分析

适定性分析就是分析线性方程组 (9) 的解是否存在，存在的画解是否是唯一的，先分析矩阵 A 的具有如下的性质

- A 为稀疏矩阵：每行最多只有 3 个非零元素
- A 的对角元素全是正的，非对角元素是非正的

[1]本次实验报告的代码编程语言为:python, 版本:3.8.6,IDE 是 pytharm 20.3.3 for linux，操作系统基于 linux-ubuntu20.10

■ A 对角占优性：即对角线元素之和满足大于等于零

根据这些性质，便可以知道矩阵 A 对称正定，可以得到线性方程组 (9) 一定有解，此外，在高等代数中可以知道 (9) 存在唯一解的充分必要条件是它对应的其次方程组只有零解，事实上，由极值原理可知，此时 $AU^{k+1} \le 0$，所以在边界的取值大于内点，故：

$$U_i^{k+1} \le 0, \quad i = 1, 2, \cdots, N-1$$

同理可得 $AU^{k+1} \ge 0$，所以边界的取值小于内点的取值，故：

$$U_i^{k+1} \ge 0, \quad i = 1, 2, \cdots, N-1$$

因此上式 (9) 的解存在且唯一.

4.3 稳定性分析

所谓稳定性, 对于抛物型的方程来讲是基于初值稳定, 比如当初值条件发生变化后, 得到的数值解是否也只是发生很小的变化，通过理论分析可以知道向后差分格式是无条件稳定的，也就是说我们的初值任意取，对时间和空间的剖分也可以任意的剖分，边界条件也可以发生变化，但是得到的结果仍然是可信的.

4.4 收敛性分析

由于方程是适定性，差分格式又是稳定的，所以存在一个算子 L 使得

$$L\left|u_j^k - u(x_j, t_k)\right| \le MR_j^k(u) \tag{16}$$

成立，其中 M 为一个与剖分及算子 L 无关的常数

因为截断误差是趋于零的, 因此容易知道当剖分足够的小那么数值解就一定会逼近真解. 所以是收敛的

5 附录

主程序代码[2]

```
import xt_pde_matrix as matrix
import xt_pde_tools as tools
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib import cm
import matplotlib
"""
向后差分格式求解一维抛物方程代码
"""
e = np.e
pi = np.pi
```

[2]本次实验报告的代码编程语言为:python, 版本:3.8.6,IDE 是 pytharm 20.3.3 for linux，操作系统基于 linux-ubuntu20.10

```
n = int(input("请输入x轴方向的想要划分的内节点数: "))
times = 3000;
tol = 10 ** (-4)
h = 1.0 / (n + 1)
t = int(input("请输入时间轴方向的想要划分的内部层数: "))
tau = 0.1 / (t + 1)
A = np.zeros((n, n))
data = np.zeros(3 * n - 2)
# 考虑到数组不能够用于数组内部, 即x[indices[i]], 尽管indices[i]是一个数字, 看起来似乎可行,
# 但是当indices[i]是一个数组类型时, 将是非法的, indices[i]是列表类型时认为合法
indices = []
indptr = [0]  # 有一个0是因为和算法关系, 先初始第一个数
u0 = np.zeros(n)
u1 = np.zeros(n)
# err = np.zeros(times)
B = np.zeros((t + 2, n))
r = tau / (h ** 2)

hx = 0
for i in range(n):
    hx = (i + 1) * h
    u0[i] = e ** (-100 * (hx - 0.25) ** 2) + 0.1 * np.sin(20 * pi * hx)

matrix.back_diff(A, n, r)
matrix.csrmatrix(A, data, indices, indptr)
for i in range(n):
    B[0][i] = u0[i]

for i in range(t + 1):
    tools.csrjacobi(data, indices, indptr, u1, u0, times, tol)
    for k in range(n):
        u0[k] = u1[k]
        B[i + 1][k] = u0[k]

# 画数值解图
fig, ax = plt.subplots(subplot_kw={"projection": "3d"})
# Make data.
X = np.arange(h, 1, h)
Y = np.arange(0, 0.1 + tau, tau)
X, Y = np.meshgrid(X, Y)
R = X ** 0 + Y ** 0 - 2
Z = R + B

surf = ax.plot_surface(X, Y, Z, rstride=1, cstride=1, cmap=cm.rainbow)
fig.colorbar(surf, shrink=0.4, aspect=6)
ax.set_zlim(-1, 1)
ax.contourf(X, Y, Z, zdir='z', offset=-1, cmap=cm.rainbow)
zhfont1 = matplotlib.font_manager.FontProperties\
    (fname="/home/xt/PycharmProjects/python_chinese/SourceHanSansSC-Bold.otf")
# 加标题和轴标签, 使用: fontsize=20(any number)可以改变标签字体大小
ax.set_xlabel('X 空间', fontproperties=zhfont1)
ax.set_ylabel('Y 时间', fontproperties=zhfont1)
ax.set_zlabel('Z 温度', fontproperties=zhfont1)
ax.set_title("Title h=1/60 tau=1/600", fontproperties=zhfont1, fontsize=20)
plt.show()
```

调用的函数代码

xt-pde-martix.py

```
# 向前差分格式矩阵
def back_diff(A, n, r):
    for i in range(n):
        if i == 0:
            A[i][i] = 2 * r + 1
            A[i][i + 1] = -r
        elif i == n - 1:
            A[i][i] = 2 * r + 1
            A[i][i - 1] = -r
        else:
            A[i][i] = 2 * r + 1
            A[i][i + 1] = -r
            A[i][i - 1] = -r

def csrmatrix(A, data, indices, indptr):
    k = 0
    nr = A.shape[0]
    nc = A.shape[1]
    for i in range(nr):
        for j in range(nc):
            if A[i][j] != 0:
                data[k] = A[i][j]
                indices.append(j)
                k += 1
        indptr.append(k)
```

xt-pde-tools.py

```
def csrjacobi(data, indices, indptr,  x, b, times, tol):
    """
    采用压缩矩阵法求解矩阵与向量的乘法，这样当程序运算量较大时候可以节省很多时间
    :param data: 存储矩阵的非零元素
    :param indices: 存储data中元素对应在矩阵的列数
    :param indptr: 存储矩阵中一行的元素在data中的起始位置
    :param x: 需要迭代求解的向量
    :param b: 一个向量
    :param times:迭代的次数
    :param tol: 迭代的精度，采用的是向量的 2-norm  进行计算的
    :return: x  求解的结果，list_times  迭代的次数，
    list_err_norm  迭代的范数误差，err 真解与数值解的误差向量
    """
    size = len(x)
    x1 = np.zeros(size)
    list_times = []  # 用于记录迭代了多少次并返回，方便主函数实现画图
    list_err_norm = []  # 用于记录每次迭代后的范数误差，方便画图
    for i in range(times):  # 控制迭代次数
        for j in range(size):
            x1[j] = b[j]
            for k in range(indptr[j],indptr[j+1]):
                if indices[k] == j:
                    d = data[k]
                else:
                    x1[j] = x1[j] - data[k]*x[indices[k]]
```

```
            x1[j] = x1[j] / d
        for j in range(size):
            x[j] = x1[j]  # 完成一次更新替换
        err = np.zeros(size)
        for k in range(size):
            for j in range(indptr[k],indptr[k+1]):
                err[k] += data[j]*x[indices[j]]
            err[k] = b[k] - err[k]
        err_norm = np.linalg.norm(err)  # 2-norm
        list_times.append(i)
        list_err_norm.append(err_norm)
        # print(err_norm)
        if err_norm < tol:
            break
    return x, list_times, list_err_norm, err
```