

M1 - Statistiques bayésiennes

Mini-test 1, le 3/02/2017

Durée 30mn. Les documents ne sont pas autorisés.

I. On se place dans un cadre fréquentiste. On dispose de données X_1, \dots, X_n supposées indépendantes identiquement distribuées de loi P_θ sur \mathbb{R} , avec θ inconnu fixé dans $\Theta \subset \mathbb{R}$. On note $\mathcal{P} = \{P_\theta, \theta \in \Theta\}$.

1. Définir les notions suivantes [1 ligne par réponse]
 - (a) identifiabilité du modèle \mathcal{P}
 - (b) estimateur
2. Rappeler l'inégalité de Tchébychev pour une variable aléatoire Y .
3. Dans le cas où $P_\theta = \mathcal{N}(\theta, 1)$, avec $\theta \in \Theta = \mathbb{R}$,
 - (a) Calculer le risque quadratique de l'estimateur $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ au point $\theta \in \Theta$.
 - (b) En déduire un intervalle de confiance pour θ de niveau de confiance (au moins) $1 - \alpha$. On pourra utiliser que $P[|\mathcal{N}(0, 1)| > t] \leq e^{-t^2}$, pour tout $t \geq 0$.

II. On se place dans un cadre bayésien. On pose $\mathcal{P} = \{P_\theta, \theta \in \Theta = \mathbb{R}\}$ où les P_θ sont des lois sur \mathbb{R} . On se donne une loi a priori Π sur $\Theta = \mathbb{R}$. On suppose que P_θ ainsi que Π ont des densités $f_\theta(\cdot)$ et $\pi(\cdot)$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} , soit

$$dP_\theta(x) = f_\theta(x)dx, \quad d\Pi(\theta) = \pi(\theta)d\theta.$$

1. On dispose d'une observation $X = X_1$. Donner dans le cadre bayésien
 - (a) la loi de θ
 - (b) la loi de $X | \theta$
 - (c) la loi a posteriori. On donnera pour cela l'expression de sa densité.
2. On dispose maintenant de n observations et on pose $X = (X_1, \dots, X_n)$ et $\mathcal{P} = \{P_\theta^{\otimes n}, \theta \in \Theta = \mathbb{R}\}$. Répondre aux mêmes questions que pour 1.
3. Définir la notion d'intervalle de crédibilité de niveau $1 - \alpha$ pour la loi a posteriori.
4. Dans le cadre de la question 2. avec n observations, on pose $P_\theta = \mathcal{N}(\theta, 1)$ et $\Pi = \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, pour $\sigma^2 > 0$ fixé.
 - (a) Déterminer la loi a posteriori.
 - (b) En déduire l'expression de la moyenne a posteriori et en proposer une interprétation.
 - (c) Construire un intervalle de crédibilité au niveau $1 - \alpha$ pour l'exemple considéré. Comment varie sa taille en fonction de n , α et σ^2 ? Commenter.