2 TD2

On définit les lois de $X \sim \text{Gamma}(a,b)$ et $Y \sim \text{Beta}(a,b)$ pour $a>0, b>0$ comme suit

$$f_X(x) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-bx} \mathbb{1}_{x>0},$$

où $\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx$ est la fonction Gamma, et

$$f_Y(x) = \frac{1}{B(a,b)} y^{a-1} (1-y)^{b-1} \mathbb{1}_{0<y<1},$$

où $B(a,b) = \Gamma(a)\Gamma(b)/\Gamma(a+b)$. On notera $\mathcal{E}(\lambda)$ la loi Gamma$(1,\lambda)$, qui est la loi exponentielle de paramètre λ, et $\mathcal{B}(n,p)$ est la loi binomiale de paramètres n,p. On rappelle la notation $P^{\otimes n} = P \otimes \cdots \otimes P$.

2.1 Lois conjuguées

Montrer que les familles de lois a priori suivantes sont conjuguées, pour $n \geq 1$,

1. la famille des lois gaussiennes $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ pour $\mathcal{P} = \{P_\theta^{(n)} = \mathcal{N}(\theta,1)^{\otimes n},\ \theta \in \mathbb{R}\}$.
2. la famille des lois Gamma(a,b) pour $\mathcal{P} = \{P_\lambda^{(n)} = \mathcal{E}(\lambda)^{\otimes n},\ \lambda > 0\}$.
3. la famille des lois Beta(a,b) pour $\mathcal{P} = \{P_p^{(n)} = \mathcal{B}(n,p),\ p \in [0,1]\}$.

Dans chaque cas, on donnera l'expression de la moyenne a posteriori.

2.2 Intervalles de confiance (2)

Soit $X_1, \ldots X_n$ une suite de variables i.i.d. de loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$.

1. Montrer la convergence en loi, pour $\overline{X}_n = n^{-1}\sum_{i=1}^n X_i$, quand $n \to \infty$,
$$\sqrt{n}\left(\frac{\overline{X}_n - \lambda}{\sqrt{\overline{X}_n}}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$
En déduire un intervalle de confiance asymptotique pour λ.
2. Montrer que pour une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bien choisie,
$$\sqrt{n}\left(g(\overline{X}_n) - g(\lambda)\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$
En déduire un intervalle de confiance asymptotique pour λ.

2.3 Poisson et exponentielles

On suppose $X_1, \ldots, X_n \,|\, \lambda \sim$ i.i.d. $\mathcal{P}(\lambda)$ la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et on choisit une loi a priori $\lambda \sim \text{Gamma}(a,b)$ sur λ.

1. Déterminer la loi a posteriori $\lambda \,|\, X_1, \ldots, X_n$. Commenter.
2. Calculer la moyenne a posteriori $\bar{\lambda} = E[\lambda \,|\, X_1, \ldots, X_n]$ ainsi que la variance a posteriori $v_X = E[(\lambda - \bar{\lambda})^2 \,|\, X_1, \ldots, X_n]$. On pourra utiliser que pour tous $a,b > 0$, $E[\text{Gamma}(a,b)] = a/b$, Var[Gamma(a,b)] $= a/b^2$.
3. Construire un intervalle de crédibilité $I(X)$ de niveau au moins $1-\alpha$ en utilisant l'inégalité de Tchébychev et la question précédente.
4. Comment varie la taille de $I(X)$ avec n ?

2.4 A posteriori séquentiel et information

On se place dans le cadre bayésien suivant pour les observations $X_1, \dots, X_n$ et pour θ,

$$\theta \sim \Pi, \qquad d\Pi = \pi d\nu,$$
$$X_1, \dots, X_n \,|\, \theta \sim P_\theta^{\otimes n}, \quad dP_\theta = p_\theta d\mu.$$

1. Caractériser les lois a posteriori de $\theta \,|\, X_1$ et $\theta \,|\, X_1, X_2$ en donnant les densités a posteriori correspondantes.
2. Montrer que la loi a posteriori de θ sachant X_1, X_2, dans le modèle d'origine où θ suit la loi a priori Π, coïncide avec la loi a posteriori de θ sachant X_2 dans le modèle où l'on prend $\Pi[\cdot \,|\, X_1]$ comme loi a priori.
3. Généraliser le résultat précédent à $\theta \,|\, X_1, \dots, X_n$. Est-ce différent de prendre l'a posteriori directement par rapport à toutes les observations ou séquentiellement observation par observation ?
4. L'ordre des X_i dans le conditionnement $\theta \,|\, X_1, \dots, X_n$ a-t-il de l'importance ? Qu'en serait-il si $X_1, \dots, X_n \,|\, \theta$ ne suivait pas une loi produit ?
5. On se demande maintenant si le conditionnement par une observation peut ne pas avoir d'effet, c'est-à-dire si on peut avoir $\mathcal{L}(\theta \,|\, X) = \mathcal{L}(\theta)$. On pose $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$ et

$$X \,|\, \theta \sim \mathcal{N}\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}, 1\right), \qquad \theta \sim \Pi,$$

avec Π de la forme $d\Pi(\theta) = 2h(\theta_1 + \theta_2)h(\theta_1 - \theta_2)d\theta_1 d\theta_2$, pour h mesurable positive et $\int h(u)du = 1$. Par ailleurs, on pose

$$z_1 = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}.$$

   (a) Déterminer la loi a priori de $z = (z_1, z_2)$. En déduire la loi marginale de z_2.
   (b) Calculer la densité a posteriori $\theta \,|\, X$ puis celle de $z \,|\, X$.
   (c) En déduire la loi de $z_2 \,|\, X$ et conclure. Commenter (a-t-on identifiabilité ?).

2.5 Lois conditionnelles (3)

Pour un couple (X, Y) de variables aléatoires, la connaissance des lois marginales de X et de Y ne suffit pas à caractériser la loi jointe de (X, Y).

1. Donner un exemple de deux lois bivariées différentes admettant les mêmes lois marginales [*par exemple, construire deux variables de loi* $\mathcal{N}(0,1)$ *tel que le couple ne suit pas une loi gaussienne ; ou bien, construire une loi non uniforme sur* $[0,1]^2$ *dont les marginales sont des lois uniformes sur* $[0,1]$].
2. Montrer que la connaissance des lois conditionnelles $X \,|\, Y$ et $Y \,|\, X$ suffit à caractériser la loi de (X, Y) [*on se place dans le cadre à densité ; on pourra d'abord chercher à écrire les densités marginales à l'aide d'une intégrale faisant intervenir les densités conditionnelles* $f(x \,|\, y)$ *et* $f(y \,|\, x)$].