7 TD7

7.1 Bayésien hiérarchique, formule de calcul successif

Dans le modèle $\mathcal{P} = \{P_\theta,\ \theta \in \mathbb{R}\}$, on propose la loi a priori hiérarchique suivante sur θ

$$\begin{aligned} \theta \,|\, \alpha &\sim \Pi_\alpha, & d\Pi_\alpha(\theta) &= g_\alpha(\theta)d\theta \\ \alpha &\sim Q, & dQ(\alpha) &= q(\alpha)d\alpha. \end{aligned}$$

On se place dans le cadre bayésien $X \,|\, \theta \sim P_\theta$ et $\theta \sim \Pi$.

1. Déterminer la densité a priori $\pi(\theta)$ puis la densité a posteriori, que l'on notera $\pi(\theta \,|\, X)$.
2. Donner la densité marginale $m(X)$ de X et montrer qu'elle peut s'écrire
$$\int m(X \,|\, \alpha)q(\alpha)d\alpha, \qquad \text{avec} \quad m(X \,|\, \alpha) = \int p_\theta(X)g_\alpha(\theta)d\theta.$$
3. On pose
$$\pi(\theta \,|\, \alpha, X) = \frac{p_\theta(X)g_\alpha(\theta)}{m(X \,|\, \alpha)} \qquad \text{et} \qquad \pi(\alpha \,|\, X) = \frac{m(X \,|\, \alpha)q(\alpha)}{m(X)}.$$
Exprimer $\pi(\theta \,|\, X)$ comme une intégrale faisant intervenir $\pi(\theta \,|\, \alpha, X)$ et $\pi(\alpha \,|\, X)$.
4. Interpréter le résultat précédent à la lumière des différentes quantités introduites.

7.2 Convergence

On considère le *modèle fondamental* $\mathcal{P} = \{P_\theta^{(n)},\ \theta \in \mathbb{R}\}$, pour lequel

$$P_\theta^{(n)} = P_\theta^{\otimes n}, \qquad P_\theta = \mathcal{N}(\theta, 1).$$

On dispose de n observations $X = (X_1, \ldots, X_n)$ et on se place dans le cadre bayésien

$$\begin{aligned} X \,|\, \theta &\sim P_\theta^{(n)} \\ \theta &\sim \Pi. \end{aligned}$$

On forme la loi a posteriori $\Pi[\cdot \,|\, X]$, la loi de $\theta \,|\, X$. On étudie cette loi du point de vue *fréquentiste* : on suppose qu'il existe une 'vraie' valeur $\theta_0 \in \mathbb{R}$ du paramètre θ et on étudie $\Pi[\cdot \,|\, X]$ en probabilité sous $X \sim P_{\theta_0}^{(n)}$. On note E_{θ_0} l'espérance sous cette loi.

Partie A. Dans cette partie, on choisit $\Pi = \mathcal{N}(a, 1)$, où a est un réel fixé.

1. Montrer que, pour $\overline{X}$ la moyenne empirique des X_i,
$$\Pi[\cdot \,|\, X] = \mathcal{N}\left(\overline{\theta}, \frac{1}{n+1}\right), \qquad \overline{\theta} = \frac{n\overline{X} + a}{n+1}.$$
2. A partir de l'expression explicite ci-dessus de la loi a posteriori, démontrer directement que, quand $n \to \infty$, pour tout $M_n \to \infty$
$$E_{\theta_0}\Pi\left[\ \{\theta : |\theta - \theta_0| \le \frac{M_n}{\sqrt{n}}\}\ \,|\, X\right] \to 1.$$

3. De même toujours à partir de l'expression explicite montrer que pour tout $m_n \to 0$,

$$E_{\theta_0}\Pi\left[\ \{\theta : |\theta - \theta_0| \leq \frac{m_n}{\sqrt{n}}\}\ \mid X\right] \to 0.$$

4. Interpréter les résultats de 2. et 3. du point de vue des vitesses de convergence. Si le modèle et la loi a priori ne sont plus gaussiens, peut-on retrouver les résultats précédents ?

Partie B. Dans cet partie, on choisit $\Pi = \text{Unif}[0,1]$. Par ailleurs, on appelle *loi normale tronquée* sur l'intervalle $J = [a,b]$ une loi de densité sur $\mathbb{R}$ proportionnelle à

$$\varphi_{\mu,\sigma^2}(x)\mathbb{1}_J(x),$$

pour φ_{μ,σ^2} la densité d'une $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$.

1. Montrer que la loi a posteriori $\Pi[\cdot \mid X]$ est une loi gaussienne tronquée.
2. On étudie maintenant le comportement de $\Pi[\cdot \mid X]$ sous $P_{\theta_0}^{(n)}$.
   (a) Dans cette question $\theta_0 \in (0,1)$. La loi a posteriori est-elle consistante ?
   (b) On suppose $|\theta_0 - 1/2| > 1/2$. La loi a posteriori est-elle consistante ?
   (c) Si $\theta_0 \geq 1$, montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, quand $n \to \infty$,

$$E_{\theta_0}\Pi[A_\varepsilon \mid X] \to 1, \qquad \text{où}\ \ A_\varepsilon := \{\theta,\ 1-\varepsilon \leq \theta \leq 1\}.$$

   (d) Si $\theta_0 = 0$ ou $\theta_0 = 1$, la loi a posteriori est-elle consistante ?

7.3 Intervalles de crédibilité, intervalle de confiance

Soit $X = (X_1, \ldots, X_n)$ avec X_i i.i.d. de loi de Bernoulli $\text{Be}(\theta)$. On met une loi a priori $\text{Beta}(a,b)$ sur θ, avec $a > 0$ et $b > 0$. On donne

$$\text{E}[\text{Beta}(a,b)] = \frac{a}{a+b}, \qquad \text{Var}[\text{Beta}(a,b)] = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}.$$

1. Donner la loi a posteriori $\Pi[\cdot \mid X]$. On notera m_X sa moyenne et v_X sa variance.
2. Construire un intervalle $I^T(X)$ de crédibilité au moins $1-\alpha$, $(\alpha > 0)$, centré en m_X, en utilisant l'inégalité de Tchébychev.
3. Montrer que $I^T(X)$ est un intervalle de confiance asymptotique sous P_{θ_0}, dont on minorera le niveau en fonction de α.
4. En utilisant le théorème BvM, montrer que la loi a posteriori converge en variation totale (vers quelle loi ?) sous P_{θ_0}.
5. Soit $I^B(X) = [a_n(X), b_n(X)]$ l'intervalle défini par les quantiles $\alpha/2$ et $1-\alpha/2$ de la loi a posteriori. Donner l'expression asymptotique de $a_n(X)$ et $b_n(X)$ sous P_{θ_0}.
6. Comparer I^T et I^B. Quel autre type d'inégalité aurait-on pu utiliser à la question 2. ?