5 TD5

5.1 De Bayes et de risque constant implique minimax

1. Redémontrer qu'un estimateur de Bayes de risque constant est minimax.
2. Soit $\mathcal{P} = \{P_\theta = \text{Bin}(n, \theta),\ \theta \in (0,1)\}$ et soit $X \mid \theta \sim P_\theta$.
   (a) Montrer que la famille de lois a priori $\{\Pi_{a,b} = \text{Beta}(a,b), a > 0, b > 0\}$ est conjuguée pour ce modèle.
   (b) Donner un estimateur de Bayes $\hat{\theta}_{a,b}(X)$ pour $\Pi_{a,b}$ et la perte quadratique.
   (c) On suppose $a = b$. Trouver un estimateur minimax pour la perte quadratique.
   (d) L'estimateur $T = X/n$ est-il minimax ?

5.2 De Bayes et *unique* implique admissible

Soit $\mathcal{P} = \{P_\theta,\ \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}\}$ un modèle statistique avec $dP_\theta = f_\theta d\mu$ et soit X une observation suivant ce modèle. Soit T un estimateur de θ et $R_B(\Pi, T)$ son risque de Bayes pour une loi a priori Π sur Θ et la perte quadratique.

1. Qui est l'estimateur de Bayes pour Π ? On le notera T_1.
2. Soit $m^\pi(x) = \int f_\theta(x) d\Pi(\theta)$. Comment s'interprète cette quantité ?
3. Montrer que pour $T = T(X)$ un estimateur de θ,
$$R_B(\Pi, T) = \int E[(T(X) - \theta)^2 \mid X = x] m^\pi(x) d\mu(x).$$
4. Soit T_2 un estimateur de Bayes pour Π et la perte quadratique, potentiellement différent de T_1. Montrer que si la loi
$$dQ = m^\pi d\mu$$
domine toutes les lois P_θ alors T_1 et T_2 sont *equivalents*, au sens où
$$R(\theta, T_1) = R(\theta, T_2) \qquad \theta \in \Theta.$$
5. Montrer que si l'estimateur de Bayes est unique à équivalence près, il est admissible.

Soit maintenant $\mathcal{P} = \{P_\theta = \mathcal{N}(\theta, 1),\ \theta \in \mathbb{R}\}$ et $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. de loi P_θ sachant θ. On pose $\Pi = \mathcal{N}(a, \sigma^2)$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $\sigma^2 > 0$ fixés.

1. Calculer l'estimateur de Bayes pour l'a priori Π et la perte quadratique.
2. Déterminer la loi marginale de $X = (X_1, \ldots, X_n)$, que l'on notera Q_n [*On pourra écrire X comme somme de deux vecteurs gaussiens*].
3. Vérifier que Q_n domine toutes les lois $P_\theta^{\otimes n}$.
4. Montrer que les estimateurs $\alpha\overline{X} + \beta$, avec $\alpha \in [0, 1)$ et $\beta \in \mathbb{R}$, sont admissibles.
5. Montrer que les estimateurs $\overline{X} + \beta$, pour $\beta \neq 0$, ne sont pas admissibles.

5.3 *Presque de Bayes* implique admissible

Soit un modèle paramétrique $\{P_\theta,\ \theta \in \Theta\}$ avec Θ un ouvert de $\mathbb{R}^k$, $k \geq 1$. On considère des fonctions de perte dont les fonctions de risque finies sont continues sur Θ.
Soit T un estimateur de risque fini tel que, pour tout ouvert $\mathcal{V}$ non vide de Θ et tout $\varepsilon > 0$, il existe une loi a priori Π sur Θ (pouvant dépendre de $\mathcal{V}$ et de ε) telle que

$$R_B(\Pi, T) < R_B(\Pi) + \varepsilon\Pi(\mathcal{V}).$$

On peut montrer qu'alors T est admissible.

1. En utilisant ce résultat, et sous les hypothèses précédentes, montrer que pour toute loi a priori Π telle que $\Pi(\mathcal{V}) > 0$ pour tout ouvert non vide $\mathcal{V}$ de Θ, tout estimateur de Bayes pour Π est admissible.
2. Soit $\mathcal{P} = \{P_\theta = \mathcal{N}(\theta, 1),\ \theta \in \mathbb{R}\}$ et $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. de loi P_θ sachant θ. On pose $\Pi = \mathcal{N}(a, \sigma^2)$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $\sigma^2 > 0$ fixés. On considère dans la suite la perte quadratique.
   (a) (*) Montrer que les fonctions de risque finies sont continues.
   (b) Montrer que $R_B(\Pi, \overline{X}) = 1/n$.
   (c) Déterminer un estimateur de Bayes T_1 pour Π et montrer que
   $$R_B(\Pi) = \frac{1}{n + \sigma^{-2}}.$$
   (d) Déduire de ce qui précède que T_1 est admissible.
   (e) Montrer que $\overline{X}$ est admissible.

5.4 Distance de Hellinger

Soient P et Q deux lois de probabilité avec $dP = pd\mu$ et $dQ = qd\mu$.

1. Rappeler la définition de la distance de Hellinger $h(P, Q)$.
2. Qu'appelle-t-on affinité de Hellinger $\rho(P, Q)$?
3. Comment évalue-t-on ces quantités si P et Q sont des lois produits ?

On considère un modèle $\mathcal{P} = \{P_\theta,\ \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}\}$, avec $dP_\theta(x) = f_\theta(x)d\mu(x)$ pour une mesure dominante μ.

4. Calculer la distance de Hellinger $h(P_\theta, P_{\theta'})$ dans les cas suivants
   (a) $P_\theta = \mathcal{N}(\theta, 1)$ et $\theta, \theta' \in \Theta = \mathbb{R}$.
   (b) $P_\theta = \mathcal{P}(\theta)$ loi de Poisson de paramètre $\theta \in \Theta = (0, \infty)$.
   (c) P_θ est donnée par, avec $\Theta = (0, \infty)$,
   $$dP_\theta = \exp(\theta - x)1_{[\theta,\infty)}(x)dx, \qquad \theta \in \Theta.$$
5. Donner un équivalent de $h(P_{\theta_0}, P_{\theta_0+h})^2$ lorsque $h \to 0$ et $\theta_0 \in \Theta$ fixé, pour chaque modèle des questions 4. a), b), c).