3 TD3

3.1 Régions HPD

1. Si une loi a posteriori sur $\mathbb{R}$ a une densité continue, symétrique, (str.) croissante sur $\mathbb{R}^-$ et (str.) décroissante sur $\mathbb{R}^+$, montrer que les régions HPD de niveau $1-\alpha$ coïncident avec les intervalles définis par les quantiles $\alpha/2$ et $1-\alpha/2$ de la densité a posteriori.
2. Donner un exemple de densité a posteriori pour laquelle les deux types de régions $1-\alpha$-crédibles de la question précédente ne coïncident pas.

3.2 Modèle multinomial

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables i.i.d. à valeurs dans un espace fini $\mathcal{X}$ de cardinal $k+1 \geq 2$, que l'on identifiera à $\{0, 1, 2, \ldots, k\}$. Notons, pour $j = 0, \ldots, k$,

$$N_j = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{X_i = j} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{j\}}(X_i) \qquad \text{et} \qquad p_j = \mathbb{P}[X_i = j].$$

1. Quelle est la loi de N_0 ? Celle de N_j ?
2. Dans le cas où $k = 1$, décrire la loi du couple (N_0, N_1).
3. Pour $k \geq 1$ arbitraire, montrer que la loi jointe des N_j est donnée par

$$\mathbb{P}[N_j = x_j,\ 0 \leq j \leq k] = \binom{n}{x_0, x_1, \ldots, x_k} \prod_{j=0}^{k} p_j^{x_j} \mathbb{1}_{\{\sum_{j=0}^{k} x_j = n\}},$$

   où $\binom{n}{x_0, x_1, \ldots, x_k} = n!/(x_0! x_1! \ldots x_k!)$ désigne le nombre de façons de regrouper n éléments en $k+1$ groupes de tailles respectives $x_0, x_1, \ldots, x_k$.

   Cette famille est celle des *lois multinomiales* de paramètres $(p_0, p_1, \ldots, p_k)$.
4. Montrer qu'on peut l'écrire comme un modèle exponentiel sur $(\mathbb{R}^+)^k$ avec pour paramètres naturels $\eta_j = \log(p_j/p_0)$ pour $1 \leq j \leq k$.

3.3 Familles binomiale-beta et multinomiale-Dirichlet

La loi Beta(a_1, a_2) sur $[0,1]$ a pour densité, pour $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^+$, et $B(a_1, a_2)$ défini ci-dessous,

$$x \to \frac{1}{B(a_1, a_2)} x^{a_1 - 1}(1-x)^{a_2 - 1}.$$

La loi de Dirichlet Dir(a)=Dir$(a_1, \ldots, a_k)$ avec $a = (a_1, \ldots, a_k) \in {\mathbb{R}^+}^k$ est la loi sur le simplexe $\mathcal{S}_k = \{x = (x_1, \ldots, x_k) \in [0,1]^k,\ \sum_{i=1}^{k} x_i = 1\}$ de densité

$$x \to \frac{1}{B(a)} \prod_{i=1}^{k} x_i^{a_i - 1} \mathbb{1}_{\mathcal{S}_k}(x), \qquad B(a) = \frac{\prod_{i=1}^{k} \Gamma(a_i)}{\Gamma(\sum_{i=1}^{K} a_i)}.$$

1. Montrer que si $Z = (Z_1, \ldots, Z_k) \sim \text{Dir}(a)$, alors Z_1 suit une loi Beta que l'on déterminera (on pourra considérer le changement de variables $x_i = (1-x_1)y_i$, pour $2 \leq i \leq k-1$).
2. Soit $X = (X_1, \ldots, X_n)$ avec X_i i.i.d. de loi de Bernoulli Be(θ). Montrer que la famille des lois a priori Beta(a, b) sur θ, avec a, b dans $[0,1]$, est conjuguée pour ce modèle.

3. Même question pour la famille des lois de Dirichlet $\mathrm{Dir}(a_0, \dots, a_k)$ lorsque l'on observe $(N_0, \dots, N_k)$ avec $\sum N_i = N$, de loi multinomiale $\mathrm{Mult}(p_0, \dots, p_k)$.
4. Soit $X = (X_1, \dots, X_n)$ avec X_i i.i.d. suivant un modèle exponentiel de dimension k, de paramètre η sous forme canonique, donc de densité $p_\eta(x) = \exp\{\eta^T T(x) - A(\eta)\}$ par rapport à une mesure μ de référence. Montrer que la famille de lois Π_τ de densités proportionnelles à $\eta \to \exp\{\tau^T \eta - n_0 A(\eta)\}$, est conjuguée.

3.4 Mélanges

On appelle loi de mélange à deux composantes une loi Q de la forme

$$Q = (1 - \rho)Q_0 + \rho Q_1,$$

où Q_0 et Q_1 sont deux lois de probabilité et $\rho \in [0, 1]$. On supposera Q_0 et Q_1 de densités notées q_0 et q_1 par rapport à une mesure de référence μ.

1. Montrer qu'une variable aléatoire Y de loi Q peut s'obtenir par le schéma suivant

$$\begin{aligned} Z &\sim \mathrm{Be}(\rho), \\ Y \,|\, Z &\sim Q_Z. \end{aligned}$$

2. Soit $\mathcal{P} = \{P_\theta = \mathcal{N}(\theta, 1),\ \theta \in \mathbb{R}\}$. On met une loi a priori Π sur θ de la forme mélange à deux composantes $(1 - \rho)Q_0 + \rho Q_1$ avec $Q_0 = \mathcal{N}(0, 1)$ et $Q_1 = \mathcal{N}(5, 1)$ et $\rho > 0$. On dispose d'observations $X_1, \dots, X_n \,|\, \theta \sim P_\theta^{\otimes n}$.
   (a) Déterminer la densité de la loi a posteriori $\theta \,|\, X_1, \dots X_n$.
   (b) Montrer que la loi a posteriori est à nouveau un mélange à deux composantes. On déterminera le nouveau poids $\rho_n(X)$ correspondant.
3. Dans le cadre d'observations de tirages à pile ou face, on soupçonne les pièces d'être biaisées avec probabilité $2/3$ d'obtenir face. On propose la modélisation suivante $X_1, \dots, X_n \,|\, \theta$ i.i.d. $\mathrm{Be}(\theta)$ et $\theta \sim (1 - \rho)Q_0 + \rho Q_1$, avec $Q_0 = \mathrm{Beta}(2, 4)$ et $Q_1 = \mathrm{Beta}(3, 3)$.
   (a) Justifier le choix de la loi a priori.
   (b) Répondre aux mêmes questions qu'en 2. On pourra s'aider de l'expression de la fonction Beta rappelée à l'exercice ci-dessus. On rappelle aussi que $\Gamma(p + 1) = p!$.
4. Montrer que le fait observé dans les exemples en 2. et 3. que la loi a posteriori est encore une loi mélange à deux composantes est un phénomène général et donner l'expression de $\rho_n(X)$ en fonction des données du problème.

3.5 Intervalles de crédibilité, intervalle de confiance

Soit $X = (X_1, \dots, X_n)$ avec X_i i.i.d. de loi de Bernoulli $\mathrm{Be}(\theta)$. On met une loi a priori $\mathrm{Beta}(a, b)$ sur θ, avec $a > 0$ et $b > 0$. On donne

$$\mathrm{E}[\mathrm{Beta}(a, b)] = \frac{a}{a + b}, \qquad \mathrm{Var}[\mathrm{Beta}(a, b)] = \frac{ab}{(a + b)^2(a + b + 1)}.$$

1. Donner la loi a posteriori $\Pi[\cdot \,|\, X]$. On notera m_X sa moyenne et v_X sa variance.
2. Construire un intervalle $I^T(X)$ de crédibilité au moins $1 - \alpha$, $(\alpha > 0)$, centré en m_X, en utilisant l'inégalité de Tchébychev.
3. On se demande si $I^T(X)$ peut être utilisé comme un intervalle de confiance asymptotique, au sens fréquentiste sous P_{θ_0}. Répondre à cette question en cherchant une minoration asymptotique du niveau de $I^T(X)$ en fonction de α.