公理化

张翔

2016 年 7 月 10 日

Contents

1 import

在以下讨论中，我们遵循一些基本的规则，比如可以做什么、不可以做什么、把什么叫做什么。这种基本约定，叫做三段论。还有一些语言不符合三段论，起文学解释作用，它们叫做说明。还有一些肢体、直觉的动作，不见诸纸面，最终归结于

$$\exists\alpha,\beta,\phi:\alpha\sim r.v.\mathrm{A},\psi:\beta\sim r.v.\mathrm{B}$$

它们称为观测。

数学的讨论包括等价扩充与讨论、说明。物理的讨论包括对物理体系的定义、等价扩充与讨论；特别地，包括验证：$\{\{\mathcal{L},\Gamma\},\phi\}\dashv\vdash\{\{\mathcal{L},\Gamma\},\psi\}$。物理的讨论还包括观测。

2 公理集合论

以下基于三段论进行讨论。以下定义公理集合论的术语。

定义 2.1 ($\mathcal{L}$ 公式)**.** *由以下字母表中的若干有限个符号按照一定的规律形成的符号串叫*$\mathcal{L}$ **公式**。*字母表包括：*

1. *符号集* $\neg,\wedge,\exists,\leftrightarrow,),(,=,\in$
2. *变元集* $x,y,z,\ldots$
3. *谓词与函数词集* $\mathcal{L}=\{\mathcal{L}_f,\mathcal{L}_p\}$

规律为

1. $x \in y, x = y$ 是公式。
2. 若 ϕ, ψ 是公式，则
$$\neg(\phi), (\psi) \wedge (\phi), \exists x(\phi)$$
是公式。
3. 公式中的 x, y 可换成其他变元或 $f(x)$，其中 f 为函数词，x 为变元。

定义 2.2. 称谓词与函数词集与其对应公式集 $\{\mathcal{L}, \Gamma\}'$ 为 $\{\mathcal{L}, \Gamma\}$ 的**扩张**，记 $\{\mathcal{L}, \Gamma\}' = \overline{\{\mathcal{L}, \Gamma\}}$，若 $\overline{\{\mathcal{L}, \Gamma\}} \supset \{\mathcal{L}, \Gamma\}$

定义 2.3 (等价扩张)**.** 设 Γ 为 $\mathcal{L}$ 公式集，称谓词与函数词集与其对应公式集 $\overline{\{\mathcal{L}, \Gamma\}}$ 为 $\{\mathcal{L}, \Gamma\}$ 的一个**等价扩张**，若前者是后者经以下若干步形成：

1. $\mathcal{L}$ 中增加一个 n 元谓词符号 S 形成 $\bar{\mathcal{L}}$，且 Γ 中增加一个新公理形成 $\bar{\Gamma}$
$$\forall x_1 \cdots x_n (S(x_1, \cdots, x_n) \to \phi(x_1, \cdots, x_n))$$
2. 公式 $\phi(x_1, \cdots, x_n, y)$（其中列出了所有的可能的自由变元）满足
$$\Gamma \vdash \forall x_1 \cdots x \exists! y \phi(x_1, \cdots, x_n, y)$$
且 $\mathcal{L}$ 中增加一个 n 元函数词 f 形成 $\bar{\mathcal{L}}$，且且 Γ 中增加一个新公理形成 $\bar{\Gamma}$
$$\forall x_1 \cdots x_n \forall y (y = f(x_1, \cdots, x_n) \leftrightarrow \phi(x_1, \cdots, x_n, y))$$

定义 2.4 ($\vdash$)**.** 定义$\vdash$：设 Γ 是 $\mathcal{L}$ 公式集，ϕ 是公式，称
$$\{\mathcal{L}, \Gamma\} \vdash \phi$$
若存在着按一定规则写出的有限 $\mathcal{L}$ 公式序列 $\phi_1, \cdots, \phi_n$，使 ϕ_n 就是公式 ϕ。规则为：

1. 在序列中若已有 ϕ_i，则可写出 $\forall x \phi_i$，x 为任一变元。

2. 在序列中若已有 ϕ_i 和 $\phi_i \to \phi_j$，则后面可写出 ϕ_j。

3. Γ 的任—成员可在序列中任何地方写出。

4. 序列中可随时写出以下形式的公式 (叫做逻辑公理):

$$\phi \to (\psi \to \phi)$$

$$(\phi \to (\psi \to \chi)) \to ((\phi \to \psi) \to (\phi \to \chi))$$

$$(\neg\phi \to \neg\psi) \to (\psi \to \phi)$$

$$\forall x\phi(x) \to \phi(t), \quad \text{这里要求 } t \text{ 可以自由代换 } \phi(x) \text{ 中的 } x\text{。}$$

$$\forall x(\phi \to \psi) \to (\phi \to \forall x\psi), \quad \text{这里要求 } x \text{ 不在 } \phi \text{ 中自由出现}$$

5. 序列中还可随时写出以下形式的公式 (叫做等词公理):

$$x = x$$

$$x = y \to y = x$$

$$(x = y \wedge y = z) \to x = z$$

$$x = y \to (\phi(x) \to \phi(y)), \quad \text{其中 } \phi(y) \text{ 是用 } y \text{ 替换 } \phi(x) \text{ 一处或多处的 } x \text{ 所得结果。}$$

6. 以上允许公式中自由出现的变元可换成其他变元或 $f(x)$，其中 f 为函数词，x 为变元。

定理 2.1 (逻辑定理). 若 $\{\mathcal{L},\Gamma\}$ 的等价扩张 $\overline{\{\mathcal{L},\Gamma\}} \vdash \phi$，则 $\{\mathcal{L},\Gamma\} \vdash \phi$。

定义 2.5 ($\{\mathcal{L}_{\text{basic}},\Gamma_{\text{basic}}\}$). 定义$\{\mathcal{L}_{\boldsymbol{basic}},\Gamma_{\boldsymbol{basic}}\}$ 谓词与函数词集为

$$\mathcal{L}_{basic,f} = \emptyset, \mathcal{L}_{basic,p} = \{\forall, \wedge, \to, \leftrightarrow\}$$

基本公理集

$$(\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi) \leftrightarrow (\phi \leftrightarrow \psi)$$

$$\neg((\neg(\neg(\phi))) \wedge (\neg(\psi))) \leftrightarrow (\phi) \to (\psi)$$

$$\neg((\neg(\phi)) \wedge (\neg(\psi))) \leftrightarrow (\phi) \wedge (\psi)$$

$$\neg(\exists x(\neg(\phi))) \leftrightarrow \forall x(\phi)$$

定义是对 $\{\mathcal{L},\Gamma\}$ 的等效扩充。

3 概率论

定义 $\{\mathcal{L}_{\mathbf{prob}}, \Gamma_{\mathbf{prob}}\}$ 为 $\{\mathcal{L}_{\mathbf{math}}, \Gamma_{\mathbf{math}}\}$ 的如下扩充：

定义 3.1 (概率). 称 $P : \Omega \to \mathbb{R}$ 为**概率函数**，若：

1. $\forall A \subseteq \Omega, 0 \leq P(A) \leq 1$
2. $A \bigcap B = \emptyset \to P(A \bigcup B) = P(A) + P(B)$

定义 3.2 (随机变量). 称 $X : \Omega \to \mathbb{R}$ 为**随机变量**，并令 $P(X \in A) = P(X^{-1}A)$。

扩充符号 3.1. 谓词 $\sim$，函数词 *lims*.

扩充公理 3.1. 若 A 为随机变量，

$$a_1, \ldots, a_n, \ldots \sim A \to lims \frac{|x|}{|y|} = \frac{P(\widehat{A} = x)}{P(\widehat{A} = y)}$$

扩充公理 3.2. *lims* 与 lim 性质相同。

4 量子力学

4.1 数学基础

定义 4.1 (希尔伯特空间). 称完全的内积空间为**希尔伯特空间**。

定义 4.2 (扩充希尔伯特空间). 称内积空间 H 为**扩充希尔伯特空间**，若满足

i) 数域包括 ∞

ii) 厄米算符本征矢完备正交（完全）

iii) 厄米算符完备组存在

定义 4.3 (左右矢空间). 称 L, R 为**左右矢空间**，若

i) R 为扩充希尔伯特空间

ii) L, R 一一对应，以 $\langle\psi| \to |\psi\rangle$ 记之。

iii) L, R 之间内积 $\langle\phi|\,\psi\rangle$ 满足共轭对称性、双线性性、正定性。

定义 4.4 (算符)**.** 称 A 为**左右矢空间中的算符**，若 A 满足性质

i) 右线性性

ii) $(\langle\psi| A) |\phi\rangle = \langle\psi| (A |\phi\rangle)$

定义 4.5 (伴算符)**.** 称 $A^\dagger$ 为 A 的**伴算符**，若

$$|\phi\rangle = A |\psi\rangle \to \langle\psi| = \langle\psi| A^\dagger$$

定义 4.6 (对易运算)**.** 定义对易运算

$$[A, B] \triangleq AB - BA$$

注 4.1. 有关对易运算的有关性质，参照 Wikipedia/Commutator/Ring

4.2 量子力学

下面定义 $\{\mathcal{L}_{\mathbf{qm}}, \Gamma_{\mathbf{qm}}\} = \overline{\{\mathcal{L}_{\mathbf{prob}}, \Gamma_{\mathbf{prob}}\}}$**，扩充如下：**

扩充符号 4.1. 谓词 PTK

定义 4.7 (量子体系)**.** 称集合 $\{H, \{|\psi\rangle(t)\}, \{A\}, \{r.v.(t)\widehat{A}\}\}$ 为**量子体系**，若

1. H 为右矢空间，$|\psi(t)\rangle : \mathbb{R} \to H$，$\{A\}$ 为算符集，$\{\widehat{A}\}$ 为随机变量集，含位置算符 X_{ni}，自旋角动量算符 S_{ni}，以经典方式定义的正则动量算符 $P_{ni}, i = 1, 2, 3, n = 1, 2, \ldots$，均 PTK，以及哈密顿算符 H。

2. 定义 $A|a_i\rangle = a_i|a_i\rangle$，$|\psi\rangle = \sum |a_i\rangle\langle a_i|\ \psi\rangle$：

$$\exists\{A\} \times H \to \{\widehat{A}\} : P(\widehat{A} = a_i) = |\langle a_i|\ \psi\rangle|^2$$

3. 位置算符 X_{ni}，正则动量算符 P_{ni} 与自旋角动量算符满足

$$[X_{ni}, X_{nj}] = 0, \qquad [P_{ni}, P_{nj}] = 0, \qquad [X_{ni}, P_{nj}] = i\hbar\delta_{ij}$$

$$[S_{ni}, S_{nj}] = i\hbar\sum_k \epsilon_{ijk}S_{nk}, \qquad [\vec{S_n}, \vec{X_m}] = [\vec{S_n}, \vec{P_m}] = 0$$

4. 除测量时间以外，成立薛定谔方程

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle$$

5. 若 $\forall PTKA_i, A_n = A_m \wedge \langle a_n i|\ \psi\rangle = \langle a_m i|\ \psi'\rangle$，则 $|\psi\rangle = \pm c|\psi\rangle$.

4.3 基本定理

定理 4.1 (不确定性关系)**.** 对算符 A, B[1]

$$\triangle A \triangle B \geq \frac{1}{2}\left|\overline{[A,B]}\right|$$

定理 4.2. 位置与动量算符具有连续的本征值谱。

定义 4.8 (表象的函数形式)**.** 设位置算符 X 的本征矢量是完全的，单一算符构成完备组。定义矢量 $|\psi\rangle$ 在表象下的函数形式 ψ_x 为如下函数：

$$\psi_x \triangleq \langle x|\ \psi\rangle$$

定义算符 A 在表象下的函数形式 $\widehat{A}$ 为如下泛函：

$$|\phi\rangle = A\,|\psi\rangle \rightarrow \phi_x = \widehat{A}\psi_x$$

定义 4.9 (表象的矩阵形式)**.** 设同上。将普通矩阵连续化得连续矩阵定义。定义矢量 $|\psi\rangle$ 在表象下的矩阵形式 ψ_x 为如下连续矩阵：

$$\psi_x \triangleq \langle x|\ \psi\rangle$$

定义算符 A 在表象下的矩阵形式 $\widehat{A}$ 为如下连续矩阵：

$$|\phi\rangle = A\,|\psi\rangle \rightarrow \phi_x = \widehat{A}\psi_x$$

注 4.2. 以上定义合法。

命题 4.1 (球坐标可交换性)**.** 算符 $R, \vec{N}$ 可交换。

定理 4.3 (角动量算符本征值)**.** 对任何角动量算符 J，$[J^2, \vec{J}] = 0$，记其一个共同本征矢组为 $|jm\rangle$，则

$$J^2\,|jm\rangle = j(j+1)\hbar^2\,|jm\rangle$$

$$J_z\,|jm\rangle = m\hbar\,|jm\rangle$$

其中：$2j \in \mathbb{N}$，$m = -j. -j+1, \ldots, j$.

[1]不确定性关系是否只对量子力学成立？如果是，量子力学的概率结构与普通概率有何不同？

定理 4.4 (xyz 表象与 $r\theta\phi$ 表象)**.** 当 X,Y,Z 与 $R,\vec{N}$ 构成厄米算符完备组时，可直接分离定义 xyz 表象与 $r\theta\phi$ 表象。此时 $r\theta\phi$ 并非归一的。

定理 4.5 (rlm 表象与自旋表象)**.** 当 R,L^2,L_z 构成厄米算符完备组时，rlm 构成表象。自旋算符与位置算符共同构成厄米算符完备组，直积空间分别称为位置空间和自旋空间。

定理 4.6 (单电子自旋空间)**.** 取 $\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle,\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle$ 为自旋空间厄米算符完备组的公共本征矢。态矢量及算符在该表象下的矩阵形式为离散矩阵。令

$$\vec{S}=\frac{1}{2}\hbar\vec{\sigma}$$

$\vec{\sigma}$ 三分量在表象下的矩阵形式称为泡利矩阵。
单电子希尔伯特空间同构于如下形式：

$$|\psi\rangle=|\psi_+\rangle\,|s_z+\rangle+|\psi_-\rangle\,|s_z-\rangle\triangleq\begin{pmatrix}|\psi_+\rangle\\|\psi_-\rangle\end{pmatrix}$$

最后哪一种是新的记法。

定理 4.7 (一维谐振子)**.** 设 H 构成厄米算符完备组。通过基本的下降算符的技巧或在位置表象中计算可得其定态解 $|n\rangle\,,n=0,1,2,\ldots$

定理 4.8 (氢原子与氢分子)**.** 采用位置表象与奥本海默近似，可计算出氢原子位置空间的定态解[2]与氢分子的近似解。

定理 4.9 (定态微扰法)**.** 对于能量简并与不简并的情况，存在不同精度的定态解的近似。

定义 4.10 (海森伯绘景)**.** 对不含时的哈密顿 H^S，定义海森伯绘景中的态矢量和算符

$$|\psi\rangle^H=U^{-1}(t,0)\,|\psi(t)\rangle^S\,,\qquad A^H(t)=U^{-1}(t,0)A^SU(t,0)$$

其中上标 S 表示薛定谔绘景即原态矢量，上标 H 表示海森伯绘景。$U(t_1,t_2)$ 为演化算符：

$$U(t,t_0)\,|\psi(t_0)\rangle=|\psi(t)\rangle$$

[2]为什么可以加上可分离变量的条件？

此时

$$^H\langle\psi| A^H |\psi\rangle^H =^S \langle\psi| A^S |\psi\rangle^S$$

定理 4.10. 薛定谔绘景中态矢量/算符的动 K 表象等于海森伯绘景中态矢量/算符的 K 表象.

定理 4.11 (演化算符)**.** 在薛定谔绘景下，演化算符可以表示为级数解

$$U(t,t_0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{i}{\hbar})^n \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H(t_1)H(t_2)\cdots H(t_n)$$

特别地，对于不含时哈密顿，演化算符为

$$U(0,t) = e^{\frac{i}{\hbar}tH^S}$$

定理 4.12 (海森伯绘景中的运动规律)**.**

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle^H = 0$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}A^H(t) = -[H, A^H(t)]$$

定理 4.13.

$$\frac{d}{dt}X_i^H(t) = \frac{\partial H}{\partial P_i^H(t)}$$

$$\frac{d}{dt}P_i^H(t) = -\frac{\partial H}{\partial X_i^H(t)}$$ [3]

注 4.3. 这样一来，海森伯绘景倒是非常适用于量子化 –参照经典系统运动规律写出其量子运动规律。

定理 4.14 (守恒量)**.** 若汇景中的算符不随时间变化，则称为守恒量。守恒量取各值的概率不随时间变化。

定理 4.15 (相互作用绘景)**.** 若 $H^S(t) = H_0^S + H_1^S(t)$，定义相互作用绘景下的态矢量 $|\psi(t)\rangle^I$ 和算符 $A^I(t)$:

$$|\psi(t)\rangle^I = e^{\frac{i}{\hbar}tH_0^S}|\psi(t)\rangle^S$$

[3]对多项式 $f(X)$，$[X, f(P)] = i\hbar\frac{\partial}{\partial P}f(P)$

$$A^I(t)=e^{\frac{i}{\hbar}tH_0^S}A_S(t)e^{-\frac{i}{\hbar}tH_0^S}$$

则

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi(t)\right\rangle^I=H_1^I(t)\left|\psi(t)\right\rangle^I$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}A^I(t)=-[H_0^I,A^I(t)]$$

5 力学

定义 $\{\mathcal{L}_{\mathbf{Mech}},\Gamma_{\mathbf{Mech}}\}=\overline{\{\mathcal{L}_{\mathbf{math}},\Gamma_{\mathbf{math}}\}}$**，其扩充如下：**

扩充符号 5.1. 谓词 $\sim$

扩充公理 5.1.

$$\vec{\xi}\sim m_i,q_i\rightarrow\dot{\vec{\xi}}=\Omega\frac{\partial H}{\partial\xi}$$

其中

$$H=H_{EM}+H_G$$

6 统计力学

定义 $\{\mathcal{L}_{\mathbf{StatMech}},\Gamma_{\mathbf{StatMech}}\}=\{\mathcal{L}_{\mathbf{Mech}},\Gamma_{\mathbf{Mech}}\}\bigcup\overline{\{\mathcal{L}_{\mathbf{Prob}},\Gamma_{\mathbf{Prob}}\}}$**，其扩充如下：**

定义 6.1 (系综)**.** 若 $x(t)\sim m_i,q_i$，则定义随机过程 $X(t)$（称为**系综**）：

$$\dot{X(t)}=\Omega\frac{\partial H}{\partial x}(X)$$

且对孤立系统有

$$pdf\,f_X(x)=const\forall E(x)=E_0$$

定理 6.1 (各态遍历假设)**.** 若 $x(t)\sim s.p.X(t)$，则

$$lims_t\overline{A(x)}=EA(X)$$

定义 $\{\mathcal{L}_{\mathrm{StatQM}},\Gamma_{\mathrm{StatQM}}\}=\{\mathcal{L}_{\mathrm{qm}},\Gamma_{\mathrm{qm}}\}\bigcup\overline{\{\mathcal{L}_{\mathrm{Prob}},\Gamma_{\mathrm{Prob}}\}}$，其扩充如下：

定义 6.2 (量子系综). 若 $|\psi(t)\rangle \sim QM\ System\ A$，则定义随机过程 $|\Psi(t)\rangle$ (称为量子系综)：

$$H|\Psi\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi\rangle$$

定理 6.2 (混合态). 若对 a_i 为 $|\psi\rangle$ 的本征值，$|\psi\rangle(a_i) \sim s.p.|\Psi\rangle$，则

$$lims\overline{A} = p_i\langle\psi_i|A|n\rangle\langle n|\psi_i\rangle = \langle n|(A|\psi_i\rangle p_i\langle\psi_i|)|n\rangle = trA\rho$$

此处对所有重复指标求和。

7 随机过程

下面对 $\{\mathcal{L}_{\mathbf{Prob}}, \Gamma_{\mathbf{Prob}}\}$ 进行等价扩充与讨论

定义 7.1 (随机过程). *[随机]* 函数 $X(t): T \to \{r.v.X\}$ 又称随机过程。

定义 7.2 (随机变量的收敛). 称 $X_t \xrightarrow{p} X, t \to t_0$ 当且仅当

$$\lim_{t\to t_0} P(X_t = X) = 1$$

定义 7.3. 称随机过程 $X(t)$ 是可微随机过程，若

$$\frac{X(t+\delta t) - X(t)}{\delta t} = X'(t), \delta t \to 0$$

8 电动力学

9 基本定义

定义电磁场 $\vec{E},\vec{B}$ 满足：

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \tag{1}$$
$$\nabla\cdot\vec{D}=\rho_0 \tag{2}$$
$$\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\rho_0+\rho'}{\epsilon_0} \tag{3}$$
$$\vec{D}=\epsilon\vec{E} \tag{4}$$
$$\nabla\cdot\vec{B}=0 \tag{5}$$
$$\nabla\times\vec{H}=\vec{j}_0+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \tag{6}$$
$$\nabla\times\vec{B}=\mu_0(\vec{j}_0+\vec{j}') \tag{7}$$
$$\vec{B}=\mu\vec{H} \tag{8}$$

约定：
在问题的陈述中，若未指出 δ 电荷密度，则有限正则条件 $|\vec{E}|<+\infty$ 满足；若未指出无穷远处渐进性态，则无限远处正则条件 $\vec{E}(+\infty)=0$ 满足。

10 数学工具：∇

10.1 ∇ 在不同微分基下的展开

考虑正交坐标系 $\vec{r}=\vec{r}(u,v,w)$, 定义

$$dr^2=(L_udu)^2+(L_vdv)^2+(L+wdw)^2 \tag{9}$$
$$L_u\triangleq\sqrt{\frac{\partial x_i}{\partial u}^2},L_v\triangleq\sqrt{\frac{\partial x_i}{\partial v}^2},L_w\triangleq\sqrt{\frac{\partial x_i}{\partial w}^2} \tag{10}$$

考虑梯度

$$\nabla f \triangleq \lim \frac{\iint_{\partial(u:u+\triangle u v:v+\triangle v w:w+\triangle w)} \vec{n}\cdot f dS}{V} \tag{11}$$

$$= \lim \frac{\left(\iint_{u+\triangle u,v:v+\triangle v,w:w+\triangle w} - \iint_{u+\triangle u v:v+\triangle v w:w+\triangle w}\right) \vec{e}_u f L_v L_w dv dw + \cdots}{L_u L_v L_w du dv dw} \tag{12}$$

$$= \frac{1}{L_u L_v L_w} \cdot \left(\frac{\partial(\vec{e}_u f L_v L_w)}{\partial u} + \cdots\right) \tag{13}$$

$$= \frac{1}{L_u L_v L_w} \cdot \left(f \cdot \frac{\partial(\vec{e}_v \times \vec{e}_w L_v L_w)}{\partial u} + \vec{e}_u L_v L_w \frac{\partial f}{\partial u} + \cdots\right) \tag{14}$$

$$= \frac{\vec{e}_u}{L_u}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\vec{e}_v}{L_v}\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\vec{e}_w}{L_w}\frac{\partial f}{\partial w} \tag{15}$$

或者

11 符号运算法

定义 11.1. 对任意线性函数 T,

$$T(\bigtriangledown) \triangleq \lim \frac{\int T(\vec{n}) dS}{V}. \tag{16}$$

用"" 括起来的整体都是 $T(\bigtriangledown)$ 的一部分。如无""，则整个项都是被""括起来的。

性质 11.1. 若 $T = T_1$，则 $T(\bigtriangledown) = T_1(\bigtriangledown)$.

性质 11.2 (分解)**.**

$$T(\bigtriangledown, f_1, f_2) = T(\bigtriangledown, f_{1c}, f_2) + T(\bigtriangledown, f_1, f_{2c}) \tag{17}$$

性质 11.3 (拆解)**.** 若

$$T(\bigtriangledown) = "T_1(\bigtriangledown) f_{2c}" \tag{18}$$

则

$$T(\bigtriangledown) = "T_1(\bigtriangledown)" f_2 \tag{19}$$

12　数制（部分）

定理 12.1.

$$(a+b)_{补}=a_{补}\oplus b_{补}$$

其中 $\oplus$ 为数值和。

13　单位制

每一个单位都是一组指数或者说一组基加上指数

定义 13.1.

$$\mathbb{U}=1,\ldots,N\times\mathbb{N}$$

定义

$$\mathbb{R}\mathbb{U}=\mathbb{R}\times\mathbb{U}$$

定义函数词 $x[A]$

$$\forall x\in\mathbb{R},x[A]=x,N\in\mathbb{R}\mathbb{U}$$

定义运算 $\forall a=x[A],b=y[A]$

$$a+b\triangleq(a+b)[A]$$

定义运算 $\forall a=x[A],b=y[B]$

$$ab\triangleq(ab)[A][B]$$

14　数学分析（部分）

定义 14.1 (微分算符 d)**.** 定义泛函 d : $d[y(x)]=[dy](x,\delta x)$: 对 $\delta y=A(x)\delta x+o(\delta x)$

$$dy(x)=A(x)\delta x$$

定义 14.2 (多重积分)**.** 定义**多重积分号** $\int fdVdt$:

$$\int_{V\in At\in B}fdVdt=\lim_{\delta\vec{X}\to 0}\sum_{A\times B}f\delta\vec{X}$$

定义 14.3 (立体角). 对锥 V，定义**立体角**函数 ΩV:

$$\Omega V = \int_{S:Cover\ V} \frac{dS}{R^2}$$

积分

$$\int f d\Omega = \lim_{S \to 0} \int f(P) \frac{dS}{R^2}$$