## **Lagrangian Duality**

• 原问题为带约束的最优化问题

$$egin{aligned} \min_{x \in R^n} f(x) \ c_i(x) & \leq 0, i = 1, 2, \ldots, k \ h_j(x) & = 0, j = 1, 2, \ldots, l \end{aligned}$$

• 广义拉格朗日函数 (generalized Lagrange function)

$$L(x,lpha,eta)=f(x)+\sum_{i=1}^klpha_ic_i(x)+\sum_{j=1}^leta_jh_j(x)$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n, \alpha_i, \beta_i$ 是拉格朗日乘子,且要求 $\alpha_i \geq 0$ 

• 原问题变化

$$egin{array}{ll} \min_{x \in R^n} f(x) &==> & \min_x heta_P(x) \ heta_P(x) &=\max_{lpha \geq 0, eta} L(x, lpha, eta) \ & egin{array}{ll} eta egin{array}{ll} egin{array}{ll} eta egin{array}{ll} eta egin{array}{ll} egin{array}{ll} eta egin{array}{ll} egin{$$

## 证明可以从x满足约束情况下与不满足情况下分类证明

- 拉格朗日乘子法将带约束的最优化问题转化成无约束最优化问题
- 通常先求解原问题关于α,β的最大值不太好求,所有转化成对偶问题求解
- 定义原始问题的对偶问题

$$\max_{lpha>0,eta} heta_D(lpha,eta)=\max_{lpha>0,eta}\min_xL(x,lpha,eta)$$

• 定理(弱对偶性 Weak Duality): 如果原始问题和对偶问题都有最优值,则

$$egin{aligned} heta_D(lpha,eta) &\leq heta_P(x) \ \max_{lpha>0,eta} heta_D(lpha,eta) &\leq \min_x heta_P(x) \ d^* &= \max_{lpha>0,eta} \min_x L(x,lpha,eta) \leq \min_x \max_{lpha \geq 0,eta} L(x,lpha,eta) = p^* \end{aligned}$$

• 推论:设 $x^*,\alpha^*,\beta^*$ 分别是原始问题和对偶问题的可行解,如果 $d^*=p^*$ ,那么 $x^*,\alpha^*,\beta^*$ 分别是原始问题和对偶问题的最优解。

## Slater条件

• 定理(强对偶性):对于原始问题和对偶问题,假设函数f(x)和 $c_i(x)$ 是凸函数, $h_j(x)$ 是仿射函数(即由一阶多项式构成的函数);并且假设**不等式约束c\_i(x)是严格可行的**,即存在x,对所有i有 $c_i(x)$  <0,则存在 $x^*$ , $x^*$ , $x^*$ , $x^*$ , 使得 $x^*$ 是原始问题的最优解, $x^*$ , $x^*$ , $x^*$ 

$$d^* = p^* = L(x^*, \alpha^*, \beta^*)$$

## KKT条件

• 定理:对于原始问题和对偶问题,假设函数f(x)和 $c_i(x)$ 是凸函数, $h_j(x)$ 是仿射函数(即由一阶多项式构成的函数);并且假设不等式约束 $c_i(x)$ 是严格可行的,即存在x,对所有i有 $c_i(x)$ <0,则  $x^*,\alpha^*,\beta^*$ 分别是原始问题和对偶问题的最优解的充分必要条件是 $x^*,\alpha^*,\beta^*$ 满足下面的Karush-Kuhn-Tucker(KKT)条件:

$$abla_x L(x^*,lpha^*,eta^*)=0
onumber \ lpha_i^* c_i(x^*)=0, i=1,2,\ldots,k \qquad (KKT$$
对偶互补条件) $c_i(x^*)\leq 0, i=1,2,\ldots,k \ lpha_i^*\geq 0, i=1,2,\ldots,k \ h_j(x^*)=0, j=1,2,\ldots,l$ 

- 通过KKT条件可以将求解原始问题的最优解,转化成其对偶问题的最优解
- 线性规划的对偶形式可由拉格朗日乘子法推导