1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_4 \\ x_2 & x_5 \\ x_3 & x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 13 \\ 11 & 14 \\ 12 & 15 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1+2x_2+3x_3 & x_4+2x_5+3x_6 \\ 4x_1+5x_2+6x_3 & 4x_4+5x_5+6x_6 \\ 7x_1+8x_2+9x_3 & 7x_4+8x_5+9x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 13 \\ 11 & 14 \\ 12 & 15 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=10 \\ 4x_1+5x_2+6x_3=11 \\ 7x_1+8x_2+9x_3=12 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_4+2x_5+3x_6=13 \\ 4x_4+5x_5+6x_6=14 \\ 7x_4+8x_5+9x_6=15 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x_1-x_2=9 \\ 3x_2+6x_3=29 \\ -3x_1+3x_3=28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2=-2x_1-9 \\ x_3=x_1+\frac{28}{3} \end{cases}$$

Similarly $\begin{cases} x_5=-2x_4-12 \\ x_6=x_4+\frac{37}{3} \end{cases}$

Thus, $X=\begin{bmatrix} x_1 & x_4 \\ -2x_1-9 & -2x_4-12 \\ x_1+\frac{28}{3} & x_4+\frac{37}{3} \end{bmatrix}$

① $x_1=0$, $x_4=0$. $X=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -9 & -12 \\ \frac{28}{3} & \frac{37}{3} \end{bmatrix}$

② $x_1=0$ $x_4=1$ $X=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 & -14 \\ \frac{28}{3} & \frac{40}{3} \end{bmatrix}$

③ $x_1=1$, $x_4=0$ $X=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -11 & -12 \\ \frac{31}{3} & \frac{37}{3} \end{bmatrix}$

④ $x_1=x_4=1$ $X=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -11 & -14 \\ \frac{31}{3} & \frac{40}{3} \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1+3x_2=1 \\ 2x_1+6x_2=3 \end{cases} \Rightarrow$ No solution

3.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

The least-squares solutions of $Ax = b$ is $A^T A x = A^T b$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^T A = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 1 \\ 10 & 30 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^T b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad [A^T A]^{-1} = \frac{1}{\det(A^T A)} \begin{bmatrix} 14 & -6 & 10 \\ -6 & 3 & -6 \\ 10 & -6 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{3} & -1 & \frac{5}{3} \\ -1 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{5}{3} & -1 & \frac{10}{3} \end{bmatrix}$$

$$\det(A^T A) = 4 \begin{vmatrix} 30 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 10 \begin{vmatrix} 10 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 10 & 30 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 56 - 60 + 10 = 6$$

$$x = (A^T A)^{-1} \cdot A^T b = \begin{bmatrix} \frac{7}{3} & -1 & \frac{5}{3} \\ -1 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{5}{3} & -1 & \frac{10}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

4.

$$Ax = \lambda I x \Rightarrow A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -3 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = (1-\lambda)^2 + 6 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \pm \sqrt{6} i$$

① $\lambda = 1 + \sqrt{6} i$: $\begin{bmatrix} -\sqrt{6}i & 2 \\ -3 & \sqrt{6}i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x_2 - \sqrt{6}i x_1 = 0 \\ -\sqrt{6}i x_2 - 3x_1 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{\sqrt{6}i}{2} x_1 \qquad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{6}}{2} i \end{bmatrix}$$

② $\lambda = 1-\sqrt{6}i$

Similarly $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{\sqrt{6}}{2}i \end{bmatrix}$

Therefore. $v_1 \cdot v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{6}}{2}i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{\sqrt{6}}{2}i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$