

第3章：IMU预积分推导

3.1 推导前的公式

$$\mathbf{w}^\wedge = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}^\wedge = \begin{bmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

$$\mathbf{a}^\wedge \cdot \mathbf{b} = -\mathbf{b}^\wedge \cdot \mathbf{a} \quad (1.2)$$

当 $\vec{\phi}$ 是小量时

$$\text{Exp}(\vec{\phi}) = \exp(\vec{\phi}^\wedge) \approx \mathbf{I} + \vec{\phi}^\wedge \quad (1.3)$$

当 $\delta\vec{\phi}$ 是小量时

$$\text{Exp}(\vec{\phi} + \delta\vec{\phi}) \approx \text{Exp}(\vec{\phi}) \cdot \text{Exp}(\mathbf{J}_r(\vec{\phi}) \cdot \delta\vec{\phi}) \quad (1.4)$$

$$\text{Exp}(\vec{\phi}) \cdot \text{Exp}(\delta\vec{\phi}) = \text{Exp}(\vec{\phi} + \mathbf{J}_r^{-1}(\vec{\phi}) \cdot \delta\vec{\phi}) \quad (1.5)$$

其中：

$$\mathbf{J}_r(\vec{\phi}) = \mathbf{I} - \frac{1 - \cos(\|\vec{\phi}\|)}{\|\vec{\phi}\|^2} \vec{\phi}^\wedge + \left(\frac{\|\vec{\phi}\| - \sin(\|\vec{\phi}\|)}{\|\vec{\phi}\|^3} \right) (\vec{\phi}^\wedge)^2 \quad (1.6)$$

$$\mathbf{J}_r^{-1}(\vec{\phi}) = \mathbf{I} + \frac{1}{2} \vec{\phi}^\wedge + \left(\frac{1}{\|\vec{\phi}\|^2} - \frac{1 + \cos(\|\vec{\phi}\|)}{2 \cdot \|\vec{\phi}\| \cdot \sin(\|\vec{\phi}\|)} \right) (\vec{\phi}^\wedge)^2 \quad (1)$$

当 $\vec{\phi}$ 为小量时

$$\mathbf{J}_r(\vec{\phi}) \approx \mathbf{I} \quad (1.8)$$

$$\mathbf{J}_r^{-1}(\vec{\phi}) \approx \mathbf{I} \quad (1.9)$$

$$\mathbf{R} \cdot \text{Exp}(\vec{\phi}) \cdot \mathbf{R}^T = \exp(\mathbf{R} \vec{\phi}^\wedge \mathbf{R}^T) = \text{Exp}(\mathbf{R} \vec{\phi}) \quad (1.10)$$

$$\text{Exp}(\vec{\phi}) \cdot \mathbf{R} = \mathbf{R} \cdot \text{Exp}(\mathbf{R}^T \vec{\phi}) \quad (1.11)$$

3.2 预积分

$$\mathbf{R}_{wj} = \mathbf{R}_{wi} \cdot \prod_{k=i}^{j-1} \text{Exp}((\tilde{\omega}_k - \mathbf{b}_k^g - \eta_k^{gd}) \cdot \Delta t) \quad (2)$$

$$\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_i + \mathbf{g} \cdot \Delta t_{ij} + \sum_{k=i}^{j-1} \mathbf{R}_{wk} \cdot (\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_k^a - \eta_k^{ad}) \cdot \Delta t \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{wj} &= \mathbf{p}_{wi} + \sum_{k=i}^{j-1} \mathbf{v}_k \cdot \Delta t + \frac{j-i}{2} \mathbf{g} \cdot \Delta t^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=i}^{j-1} \mathbf{R}_{wk} \cdot (\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_k^a - \eta_k^{ad}) \cdot \Delta t^2 \\ &= \mathbf{p}_{wi} + \sum_{k=i}^{j-1} \left[\mathbf{v}_k \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \mathbf{g} \cdot \Delta t^2 + \frac{1}{2} \mathbf{R}_{wk} \cdot (\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_k^a - \eta_k^{ad}) \cdot \Delta t^2 \right] \end{aligned} \quad (4)$$

其中：

$$\Delta t_{ij} = \sum_{k=i}^{j-1} \Delta t = (j-i) \Delta t \quad (5)$$

由积分引出预积分，预积分里面的每一项与起始状态无关，可以认为都是相对量，这个好处在于计算预积分时不需要考虑起始状态，值得注意的是关于速度与位置的预积分里面都包含了重力。预积分计算方式：

- 1、消除第i时刻对积分的影响
- 2、保留重力的影响

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{R}_{ij} &\triangleq \mathbf{R}_{wi}^T \mathbf{R}_{wj} = \prod_{k=i}^{j-1} \text{Exp}((\tilde{\omega}_k - \mathbf{b}_k^g - \eta_k^{gd}) \cdot \Delta t) \\ \Delta \mathbf{v}_{ij} &\triangleq \mathbf{R}_{wi}^T (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i - \mathbf{g} \cdot \Delta t_{ij}) \\ &= \sum_{k=i}^{j-1} \Delta \mathbf{R}_{ik} \cdot (\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_k^a - \eta_k^{ad}) \cdot \Delta t \\ \Delta \mathbf{p}_{ij} &\triangleq \mathbf{R}_{wi}^T \left(\mathbf{p}_{wj} - \mathbf{p}_{wi} - \mathbf{v}_i \cdot \Delta t_{ij} - \frac{1}{2} \mathbf{g} \cdot \Delta t_{ij}^2 \right) \end{aligned} \quad (6)$$

$$= \sum_{k=i}^{j-1} \left[\Delta \mathbf{v}_{ik} \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{R}_{ik} \cdot \left(\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_k^a - \eta_k^{ad} \right) \cdot \Delta t^2 \right]$$

关于位置的预积分推到时要注意对于g的处理，其中要利用到等差数列求和的公式，公式如下：

$$\frac{j-i}{2} - \frac{(j-i)^2}{2} = -\frac{(j-i)[j-(i+1)]}{2} = -\sum_{k=i}^{j-1} (k-i) \quad (7)$$

3.3 噪声分离

目的：上面推预积分时对imu的读数会减去它的偏置与误差，其中偏置可以作为状态量去得出，但是误差是没有办法得出的，我们能做的就是拿到imu数据减去偏置后直接使用，通常的办法就是通过计算误差的方式过滤掉这部分误差，无论是优化还是滤波都跳不过一个重要的矩阵——预积分的信息矩阵（协方差矩阵的逆）由于假设了噪声是高斯白噪声，所以噪声的方差对状态方差的影响可以通过高斯分布推理过来。本节我们的目的就是推导出标定好的imu噪声对预积分的影响，也就是预积分的偏差关于噪声的式子，下一节推出协方差方差的关系。

由于假设了噪声为高斯白噪声，也就是服从了高斯分布，因此预积分噪声同样为高斯分布，整个过程以推导出预积分噪声的表达式为主，令预积分的测量噪声为：

$$\boldsymbol{\eta}_{ij}^{\Delta} \triangleq \begin{bmatrix} \delta \vec{\phi}_{ij}^T & \delta \mathbf{v}_{ij}^T & \delta \mathbf{p}_{ij}^T \end{bmatrix}^T \quad (8)$$

读作“伊塔”。

下面分别对3个向量噪声进行推导，推导方式：分离噪声成如下形式，可以理解为：真实值 = 测量值 - 误差

$$\Delta \mathbf{R}_{ij} \triangleq \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij} \cdot \text{Exp} \left(-\delta \vec{\phi}_{ij} \right) \quad (3.1)$$

$$\Delta \mathbf{v}_{ij} \triangleq \Delta \tilde{\mathbf{v}}_{ij} - \delta \mathbf{v}_{ij} \quad (3.2)$$

$$\Delta \mathbf{p}_{ij} \triangleq \Delta \tilde{\mathbf{p}}_{ij} - \delta \mathbf{p}_{ij} \quad (3.3)$$

3.3.1 对于 ΔR_{ij} 项

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{R}_{ij} &= \prod_{k=i}^{j-1} \text{Exp} \left((\tilde{\omega}_k - \mathbf{b}_i^g) \Delta t - \eta_k^{gd} \Delta t \right) \\ &\stackrel{(1)}{\approx} \prod_{k=i}^{j-1} \left\{ \text{Exp} \left((\tilde{\omega}_k - \mathbf{b}_i^g) \Delta t \right) \cdot \text{Exp} \left(-\mathbf{J}_r \left((\tilde{\omega}_k - \mathbf{b}_i^g) \Delta t \right) \cdot \eta_k^{gd} \Delta t \right) \right\} \\ &\stackrel{(2)}{=} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij} \cdot \prod_{k=i}^{j-1} \text{Exp} \left(-\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{k+1j}^T \cdot \mathbf{J}_r^k \cdot \eta_k^{gd} \Delta t \right) \end{aligned} \quad (9)$$

注意式中假设了这段时间内偏置不变，就是一个数。对于（1）处比较好理解，利用公式（1.4）：

$$\text{Exp}(\vec{\phi} + \delta \vec{\phi}) \approx \text{Exp}(\vec{\phi}) \cdot \text{Exp} \left(\mathbf{J}_r(\vec{\phi}) \cdot \delta \vec{\phi} \right) \quad (10)$$

对于（2）处比较难理解，而且要用到公式（1.9）

$$\text{Exp}(\vec{\phi}) \cdot \mathbf{R} = \mathbf{R} \cdot \text{Exp} \left(\mathbf{R}^T \vec{\phi} \right) \quad (11)$$

我们先把由（1）得出的结果展开，令：

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_r^k &= \mathbf{J}_r \left((\tilde{\omega}_k - \mathbf{b}_i^g) \Delta t \right) \\ &\stackrel{(1)}{\approx} \text{Exp} \left((\tilde{\omega}_i - \mathbf{b}_i^g) \Delta t \right) \cdot \text{Exp} \left(-\mathbf{J}_r^i \cdot \eta_i^{gd} \Delta t \right) \cdot \text{Exp} \left((\tilde{\omega}_{i+1} - \mathbf{b}_i^g) \Delta t \right) \\ &\quad \cdot \text{Exp} \left(-\mathbf{J}_r^{i+1} \cdot \eta_{i+1}^{gd} \Delta t \right) \cdot \text{Exp} \left((\tilde{\omega}_{i+2} - \mathbf{b}_i^g) \Delta t \right) \\ &\quad \cdot \text{Exp} \left(-\mathbf{J}_r^{i+2} \cdot \eta_{i+2}^{gd} \Delta t \right) \cdots \text{Exp} \left((\tilde{\omega}_{j-1} - \mathbf{b}_i^g) \Delta t \right) \\ &\quad \cdot \text{Exp} \left(-\mathbf{J}_r^{j-1} \cdot \eta_{j-1}^{gd} \Delta t \right) \\ &= \text{Exp} \left((\tilde{\omega}_i - \mathbf{b}_i^g) \Delta t \right) \cdot \text{Exp} \left((\tilde{\omega}_{i+1} - \mathbf{b}_i^g) \Delta t \right) \cdot \text{Exp} \left(-\left(\text{Exp} \left((\tilde{\omega}_{i+1} - \mathbf{b}_i^g) \Delta t \right) \right)^T \mathbf{J}_r^i \cdot \eta_i^{gd} \Delta t \right) \\ &\quad \cdot \text{Exp} \left(-\mathbf{J}_r^{i+1} \cdot \eta_{i+1}^{gd} \Delta t \right) \cdot \text{Exp} \left((\tilde{\omega}_{i+2} - \mathbf{b}_i^g) \Delta t \right) \\ &\quad \cdot \text{Exp} \left(-\mathbf{J}_r^{i+2} \cdot \eta_{i+2}^{gd} \Delta t \right) \cdots \text{Exp} \left((\tilde{\omega}_{j-1} - \mathbf{b}_i^g) \Delta t \right) \\ &\quad \cdot \text{Exp} \left(-\mathbf{J}_r^{j-1} \cdot \eta_{j-1}^{gd} \Delta t \right) \\ &= \text{Exp} \left((\tilde{\omega}_i - \mathbf{b}_i^g) \Delta t \right) \\ &\quad \cdot \text{Exp} \left((\tilde{\omega}_{i+1} - \mathbf{b}_i^g) \Delta t \right) \cdot \text{Exp} \left((\tilde{\omega}_{i+2} - \mathbf{b}_i^g) \Delta t \right) \\ &\quad \cdot \text{Exp} \left(-\left(\text{Exp} \left((\tilde{\omega}_{i+2} - \mathbf{b}_i^g) \Delta t \right)^T \cdot \text{Exp} \left((\tilde{\omega}_{i+1} - \mathbf{b}_i^g) \Delta t \right)^T \right) \mathbf{J}_r^i \cdot \eta_i^{gd} \Delta t \right) \\ &\quad \cdot \text{Exp} \left(-\text{Exp} \left((\tilde{\omega}_{i+2} - \mathbf{b}_i^g) \Delta t \right)^T \mathbf{J}_r^{i+1} \cdot \eta_{i+1}^{gd} \Delta t \right) \text{Exp} \left(-\mathbf{J}_r^{i+2} \cdot \eta_{i+2}^{gd} \Delta t \right) \cdots \text{Exp} \left((\tilde{\omega}_{j-1} - \mathbf{b}_i^g) \Delta t \right) \text{Exp} \left(-\mathbf{J}_r^{j-1} \cdot \eta_{j-1}^{gd} \Delta t \right) \\ &= \prod_{k=i}^{j-1} \text{Exp} \left((\tilde{\omega}_k - \mathbf{b}_i^g) \Delta t \right) \prod_{k=i}^{j-1} \text{Exp} \left(-\prod_{m=j-1}^{k+1} \text{Exp} \left((\tilde{\omega}_m - \mathbf{b}_i^g) \Delta t \right)^T \cdot \mathbf{J}_r^k \cdot \eta_k^{gd} \Delta t \right) \end{aligned} \quad ($$

$$\stackrel{(2)}{=} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij} \cdot \prod_{k=i}^{j-1} \text{Exp} \left(-\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{k+1j}^T \cdot \mathbf{J}_r^k \cdot \boldsymbol{\eta}_k^{ad} \Delta t \right)$$

由上面可得：

$$\text{Exp} \left(-\delta \vec{\phi}_{ij} \right) = \prod_{k=i}^{j-1} \text{Exp} \left(-\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{k+1j}^T \cdot \mathbf{J}_r^k \cdot \boldsymbol{\eta}_k^{ad} \Delta t \right) \quad (13)$$

$$\delta \vec{\phi}_{ij} = -\log \left(\prod_{k=i}^{j-1} \text{Exp} \left(-\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{k+1j}^T \cdot \mathbf{J}_r^k \cdot \boldsymbol{\eta}_k^{ad} \Delta t \right) \right) \quad (14)$$

由于结果结构比较复杂，所以还需要接着化简。

令：

$$\xi_k = \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{k+1j}^T \cdot \mathbf{J}_r^k \cdot \boldsymbol{\eta}_k^{ad} \Delta t \quad (15)$$

读作“克西”或“克赛”，利用公式（5）：

$$\text{Exp}(\vec{\phi}) \cdot \text{Exp}(\delta \vec{\phi}) = \text{Exp} \left(\vec{\phi} + J_r^{-1}(\vec{\phi}) \cdot \delta \vec{\phi} \right) \quad (16)$$

$$\log \left(\text{Exp}(\vec{\phi}) \cdot \text{Exp}(\delta \vec{\phi}) \right) = \vec{\phi} + J_r^{-1}(\vec{\phi}) \cdot \delta \vec{\phi} \quad (17)$$

以及公式：

$$\mathbf{J}_r^{-1}(\vec{\phi}) \approx \mathbf{I} \quad (18)$$

有：

$$\begin{aligned} \delta \vec{\phi}_{ij} &= -\log \left(\prod_{k=i}^{j-1} \text{Exp}(-\xi_k) \right) \\ &= -\log \left(\text{Exp}(-\xi_i) \prod_{k=i+1}^{j-1} \text{Exp}(-\xi_k) \right) \\ &\approx - \left(-\xi_i + \mathbf{I} \cdot \log \left(\prod_{k=i+1}^{j-1} \text{Exp}(-\xi_k) \right) \right) \\ &= \xi_i - \log \left(\prod_{k=i+1}^{j-1} \text{Exp}(-\xi_k) \right) \\ &= \xi_i - \log \left(\text{Exp}(-\xi_{i+1}) \prod_{k=i+2}^{j-1} \text{Exp}(-\xi_k) \right) \\ &\approx \xi_i + \xi_{i+1} - \log \left(\prod_{k=i+2}^{j-1} \text{Exp}(-\xi_k) \right) \\ &\approx \dots \\ &\approx \sum_{k=i}^{j-1} \xi_k \end{aligned} \quad (19)$$

最后推出：

$$\delta \vec{\phi}_{ij} = \sum_{k=i}^{j-1} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{k+1j}^T \cdot \mathbf{J}_r^k \cdot \boldsymbol{\eta}_k^{ad} \Delta t \quad (20)$$

由式可知 $\delta \vec{\phi}_{ij}$ 服从零均值的高斯分布。

3.3.2 对于 $\Delta \mathbf{v}_{ij}$ 项

首先要利用前面关于角度的式子(3.1)带入到 $\Delta \mathbf{v}_{ij}$ ，即：

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{v}_{ij} &= \sum_{k=i}^{j-1} \Delta \mathbf{R}_{ik} \cdot \left(\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a - \boldsymbol{\eta}_k^{ad} \right) \cdot \Delta t \\ &\approx \sum_{k=i}^{j-1} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \cdot \text{Exp} \left(-\delta \vec{\phi}_{ik} \right) \cdot \left(\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a - \boldsymbol{\eta}_k^{ad} \right) \cdot \Delta t \\ &\stackrel{(1)}{\approx} \sum_{k=i}^{j-1} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \cdot \left(\mathbf{I} - \delta \vec{\phi}_{ik}^\wedge \right) \cdot \left(\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a - \boldsymbol{\eta}_k^{ad} \right) \cdot \Delta t \\ &\stackrel{(2)}{\approx} \sum_{k=i}^{ad} \left[\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \cdot \left(\mathbf{I} - \delta \vec{\phi}_{ik}^\wedge \right) \cdot \left(\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a \right) \cdot \Delta t - \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \boldsymbol{\eta}_k^{ad} \Delta t \right] \\ &\stackrel{(3)}{=} \sum_{k=i}^{j-1} \left[\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \cdot \left(\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a \right) \cdot \Delta t + \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \cdot \left(\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a \right)^\wedge \cdot \delta \vec{\phi}_{ik} \cdot \Delta t - \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \boldsymbol{\eta}_k^{ad} \Delta t \right] \end{aligned} \quad (21)$$

$$= \sum_{k=i}^{j-1} \left[\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \cdot \left(\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a \right) \cdot \Delta t \right] + \sum_{k=i}^{j-1} \left[\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \cdot \left(\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a \right)^\wedge \cdot \delta \vec{\phi}_{ik} \cdot \Delta t - \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \eta_k^{ad} \Delta t \right]$$

(1)利用了公式(1.3) 当 $\vec{\phi}$ 是小量时：

$$\text{Exp}(\vec{\phi}) = \exp \left(\vec{\phi}^\wedge \right) \approx I + \vec{\phi}^\wedge \quad (22)$$

(2)忽略了小量;

(3)利用了公式(1.2):

$$\mathbf{a}^\wedge \cdot \mathbf{b} = -\mathbf{b}^\wedge \cdot \mathbf{a} \quad (23)$$

上式令：

$$\Delta \tilde{\mathbf{v}}_{ij} \triangleq \sum_{k=i}^{j-1} \left[\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \cdot \left(\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a \right) \cdot \Delta t \right] \quad (24)$$

$$\delta \mathbf{v}_{ij} \triangleq \sum_{k=i}^{j-1} \left[\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \eta_k^{ad} \Delta t - \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \cdot \left(\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a \right)^\wedge \cdot \delta \vec{\phi}_{ik} \cdot \Delta t \right] \quad (25)$$

即可得出式 (3.2)，且 $\delta \mathbf{v}_{ij}$ 拥有高斯分布的形式

$$\Delta \mathbf{v}_{ij} \triangleq \Delta \tilde{\mathbf{v}}_{ij} - \delta \mathbf{v}_{ij} \quad (26)$$

3.3.3 对于 $\Delta \mathbf{p}_{ij}$ 项

首先要利用前面关于角度的式子(3.1)(3.2)带入到 $\Delta \mathbf{p}_{ij}$ ，即：

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{p}_{ij} &= \sum_{k=i}^{j-1} \left[\Delta \mathbf{v}_{ik} \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{R}_{ik} \cdot \left(\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a - \boldsymbol{\eta}_k^{ad} \right) \cdot \Delta t^2 \right] \\ &\approx \sum_{k=i}^{j-1} \left[\left(\Delta \tilde{\mathbf{v}}_{ik} - \delta \mathbf{v}_{ik} \right) \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \cdot \text{Exp} \left(-\delta \vec{\phi}_{ik} \right) \cdot \left(\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a - \boldsymbol{\eta}_k^{ad} \right) \cdot \Delta t^2 \right] \\ &\stackrel{(1)}{\approx} \sum_{k=i}^{j-1} \left[\left(\Delta \tilde{\mathbf{v}}_{ik} - \delta \mathbf{v}_{ik} \right) \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \cdot \left(\mathbf{I} - \delta \vec{\phi}_{ik}^\wedge \right) \cdot \left(\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a - \boldsymbol{\eta}_k^{ad} \right) \cdot \Delta t^2 \right] \\ &\stackrel{(2)}{\approx} \sum_{k=i}^{j-1} \left[\left(\Delta \tilde{\mathbf{v}}_{ik} - \delta \mathbf{v}_{ik} \right) \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \cdot \left(\mathbf{I} - \delta \vec{\phi}_{ik}^\wedge \right) \cdot \left(\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a \right) \cdot \Delta t^2 - \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \boldsymbol{\eta}_k^{ad} \Delta t^2 \right] \\ &\stackrel{(3)}{=} \sum_{k=i}^{j-1} \left[\Delta \tilde{\mathbf{v}}_{ik} \Delta t + \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \cdot \left(\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a \right) \Delta t^2 + \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \cdot \left(\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a \right)^\wedge \delta \vec{\phi}_{ik} \Delta t^2 - \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \boldsymbol{\eta}_k^{ad} \Delta t^2 - \delta \mathbf{v}_{ik} \Delta t \right] \end{aligned} \quad (27)$$

(1)利用了公式(1.3) 当 $\vec{\phi}$ 是小量时：

$$\text{Exp}(\vec{\phi}) = \exp \left(\vec{\phi}^\wedge \right) \approx I + \vec{\phi}^\wedge \quad (28)$$

(2)忽略了小量;

(3)利用了公式(1.2)

$$\mathbf{a}^\wedge \cdot \mathbf{b} = -\mathbf{b}^\wedge \cdot \mathbf{a} \quad (29)$$

上式令：

$$\Delta \tilde{\mathbf{p}}_{ij} \triangleq \sum_{k=i}^{j-1} \left[\Delta \tilde{\mathbf{v}}_{ik} \Delta t + \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \cdot \left(\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a \right) \Delta t^2 \right] \quad (30)$$

$$\delta \mathbf{p}_{ij} \triangleq \sum_{k=i}^{j-1} \left[\delta \mathbf{v}_{ik} \Delta t - \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \cdot \left(\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a \right)^\wedge \delta \vec{\phi}_{ik} \Delta t^2 + \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \boldsymbol{\eta}_k^{ad} \Delta t^2 \right] \quad (31)$$

即可得出式 (3.3)，且 $\delta \mathbf{p}_{ij}$ 拥有高斯分布的形式：

$$\Delta \mathbf{p}_{ij} \triangleq \Delta \tilde{\mathbf{p}}_{ij} - \delta \mathbf{p}_{ij} \quad (32)$$

3.4 噪声递推

上面求出了三个状态量误差的表达式，但由于式子要么是求和，要么是多积导致每次新来一个数据都需要从头计算，这给计算平台带来资源的浪费，因此这章我们要推出误差的递推形式，即通过 $\delta \mathbf{p}_{ij-1}$ 推出 $\delta \mathbf{p}_{ij}$ 。

$$\delta \vec{\phi}_{ij} \triangleq \sum_{k=i}^{j-1} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{k+1,j}^T \cdot \mathbf{J}_r^k \cdot \boldsymbol{\eta}_k^{ad} \Delta t \quad (4.1)$$

$$\delta \mathbf{v}_{ij} \triangleq \sum_{k=i}^{j-1} \left[\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \boldsymbol{\eta}_k^{ad} \Delta t - \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \cdot \left(\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a \right)^\wedge \cdot \delta \vec{\phi}_{ik} \cdot \Delta t \right] \quad (4.2)$$

$$\delta \mathbf{p}_{ij} \triangleq \sum_{k=i}^{j-1} \left[\delta \mathbf{v}_{ik} \Delta t - \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \cdot \left(\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a \right)^\wedge \delta \vec{\phi}_{ik} \Delta t^2 + \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \eta_k^{ad} \Delta t^2 \right] \quad (4.3)$$

3.4.1 对于 $\delta \vec{\phi}_{ij}$ 项

$$\begin{aligned} \delta \vec{\phi}_{ij} &= \sum_{k=i}^{j-1} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{k+1j}^T \cdot \mathbf{J}_r^k \cdot \boldsymbol{\eta}_k^{gd} \Delta t \\ &= \sum_{k=i}^{j-2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{k+1j}^T \cdot \mathbf{J}_r^k \cdot \eta_k^{gd} \Delta t + \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{jj}^T \mathbf{J}_r^{j-1} \boldsymbol{\eta}_{j-1}^{gd} \Delta t \\ &= \sum_{k=i}^{j-2} \left(\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{k+1j-1} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{j-1j} \right)^T \mathbf{J}_r^k \eta_k^{gd} \Delta t + \mathbf{J}_r^{j-1} \boldsymbol{\eta}_{j-1}^{gd} \Delta t \\ &= \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{jj-1} \sum_{k=i}^{j-2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{k+1j-1}^T \mathbf{J}_r^k \eta_k^{gd} \Delta t + \mathbf{J}_r^{j-1} \boldsymbol{\eta}_{j-1}^{gd} \Delta t \\ &= \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{jj-1} \delta \vec{\phi}_{ij-} + \mathbf{J}_r^{j-1} \boldsymbol{\eta}_{j-1}^{gd} \Delta t \end{aligned} \quad (33)$$

3.4.2 对于 δv_{ij} 项

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{V}_{ij} &= \sum_{k=i}^{j-1} \left[\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \eta_k^{ad} \Delta t - \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \cdot \left(\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a \right)^\wedge \cdot \delta \vec{\phi}_{ik} \cdot \Delta t \right] \\ &= \sum_{k=i}^{j-2} \left[\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \eta_k^{ad} \Delta t - \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \cdot \left(\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a \right)^\wedge \cdot \delta \vec{\phi}_{ik} \cdot \Delta t \right] + \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij-1} \eta_{j-1}^{ad} \Delta t - \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij-1} \left(\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a \right)^\wedge \cdot \delta \vec{\phi}_{ik} \cdot \Delta t \quad (34) \\ &= \delta \mathbf{v}_{ij-1} + \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij-1} \eta_{j-1}^{ad} \Delta t - \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij-1} \left(\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a \right)^\wedge \cdot \delta \vec{\phi}_{ij-1} \cdot \Delta t \end{aligned}$$

3.4.3 对于 δp_{ij} 项

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{p}_{ij} &= \sum_{k=i}^{j-1} \left[\delta \mathbf{v}_{ik} \Delta t - \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \cdot \left(\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a \right)^\wedge \delta \vec{\phi}_{ik} \Delta t^2 + \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \mathbf{y}_k^{ad} \Delta t^2 \right] \\ &= \delta \mathbf{p}_{ij-1} + \delta \mathbf{v}_{ij-1} \Delta t - \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij-1} \cdot \left(\tilde{\mathbf{f}}_{j-1} - \mathbf{b}_i^a \right)^\wedge \delta \vec{\phi}_{ij-1} \Delta t^2 + \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij-1} \eta_{j-1}^{ad} \Delta t^2 \end{aligned} \quad (35)$$

总结

综上所述可以写出

$$\boldsymbol{\eta}_{ij}^\Delta \triangleq \begin{bmatrix} \delta \vec{\phi}_{ij}^T & \delta \mathbf{v}_{ij}^T & \delta \mathbf{p}_{ij}^T \end{bmatrix}^T \quad (36)$$

的递推矩阵。令

$$\boldsymbol{\eta}_k^d = \left[\left(\boldsymbol{\eta}_k^{gd} \right)^T \left(\boldsymbol{\eta}_k^{ad} \right)^T \right]^T \quad (37)$$

有

$$\boldsymbol{\eta}_{ij}^\Delta = \begin{bmatrix} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{jj-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij-1} \cdot \left(\tilde{\mathbf{f}}_{j-1} - \mathbf{b}_i^a \right)^\wedge \Delta t & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij-1} \cdot \left(\tilde{\mathbf{f}}_{j-1} - \mathbf{b}_i^a \right)^\wedge \Delta t^2 & \Delta t \mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_{ij-1}^\Delta + \begin{bmatrix} \mathbf{J}_r^{j-1} \Delta t & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij-1} \Delta t \\ \mathbf{0} & \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij-1} \Delta t^2 \end{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_{j-1}^d \quad (38)$$

有：

$$\boldsymbol{\eta}_{ij}^\Delta = \mathbf{A}_{j-1} \boldsymbol{\eta}_{ij-1}^\Delta + \mathbf{B}_{j-1} \boldsymbol{\eta}_{j-1}^d \quad (39)$$

重点来了！

$$\boldsymbol{\Sigma}_{ij} = \mathbf{A}_{j-1} \boldsymbol{\Sigma}_{ij-1} \mathbf{A}_{j-1}^T + \mathbf{B}_{j-1} \boldsymbol{\Sigma}_\eta \mathbf{B}_{j-1}^T \quad (40)$$

到此为止优化时使用的信息矩阵有了！

3.5 Bias更新时对预积分的影响

首先说明前面去除噪声时假设了这段时间内偏置不变，但偏置在vio算法中会作为状态量来优化，所以当通过优化后偏置会更新，这样一来如果重新计算这段时间的预积分会很浪费时间，所以本章目的是为了推出当偏置变化时直接求得新的预积分结果。

$$\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij} \triangleq \prod_{k=i}^{j-1} \text{Exp} \left((\tilde{\omega}_k - \mathbf{b}_i^g) \Delta t \right) \quad (5.1)$$

$$\Delta \tilde{\mathbf{v}}_{ij} \triangleq \sum_{k=i}^{j-1} \left[\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \cdot \left(\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a \right) \cdot \Delta t \right] \quad (5.2)$$

$$\Delta \tilde{\mathbf{p}}_{ij} \triangleq \sum_{k=i}^{j-1} \left[\Delta \tilde{\mathbf{v}}_{ik} \Delta t + \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \cdot (\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^g) \Delta t^2 \right] \quad (5.3)$$

当有偏置更新时

$$\Delta \overline{\tilde{\mathbf{R}}}_{ij} \triangleq \prod_{k=i}^{j-1} \text{Exp}((\tilde{\omega}_k - (\mathbf{b}_i^g + \delta \mathbf{b}_i^g)) \Delta t) \quad (5.4)$$

$$\Delta \bar{\mathbf{v}}_{ij} \triangleq \sum_{k=i}^{j-1} \left[\Delta \overline{\tilde{\mathbf{R}}}_{ik} \cdot (\tilde{\mathbf{f}}_k - (\mathbf{b}_i^g + \delta \mathbf{b}_i^g)) \cdot \Delta t \right] \quad (5.5)$$

$$\Delta \bar{\mathbf{p}}_{ij} \triangleq \sum_{k=i}^{j-1} \left[\Delta \bar{\mathbf{v}}_{ik} \Delta t + \frac{1}{2} \Delta \overline{\tilde{\mathbf{R}}}_{ik} \cdot (\tilde{\mathbf{f}}_k - (\mathbf{b}_i^g + \delta \mathbf{b}_i^g)) \Delta t^2 \right] \quad (5.6)$$

3.5.1 对于 $\Delta \overline{\tilde{\mathbf{R}}}_{ij}$ 项

令

$$\mathbf{J}_r^k = \mathbf{J}_r((\tilde{\omega}_k - \mathbf{b}_i^g) \Delta t) \quad (41)$$

有:

$$\begin{aligned} \Delta \overline{\tilde{\mathbf{R}}}_{ij} &\triangleq \prod_{k=i}^{j-1} \text{Exp}((\tilde{\omega}_k - (\mathbf{b}_i^g + \delta \mathbf{b}_i^g)) \Delta t) \\ &= \prod_{k=i}^{j-1} \text{Exp}((\tilde{\omega}_k - \mathbf{b}_i^g) \Delta t - \delta \mathbf{b}_i^g \Delta t) \\ &\approx \prod_{k=i}^{j-1} (\text{Exp}((\tilde{\omega}_k - \mathbf{b}_i^g) \Delta t) \cdot \text{Exp}(-\mathbf{J}_r^k \delta \mathbf{b}_i^g \Delta t)) \\ &= \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij} \cdot \prod_{k=i}^{j-1} \text{Exp}(-\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{k+1j}^T \cdot \mathbf{J}_r^k \cdot \delta \mathbf{b}_i^g \Delta t) \\ &= \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij} \cdot \text{Exp}\left(\sum_{k=i}^{j-1} (-\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{k+1j}^T \cdot \mathbf{J}_r^k \cdot \delta \mathbf{b}_i^g \Delta t)\right) \end{aligned} \quad (42)$$

对于 (1) 处比较好理解, 利用公式 (1.4) :

$$\text{Exp}(\vec{\phi} + \delta \vec{\phi}) \approx \text{Exp}(\vec{\phi}) \cdot \text{Exp}(\mathbf{J}_r(\vec{\phi}) \cdot \delta \vec{\phi}) \quad (43)$$

同 3.1 节中

其中:

$$\mathbf{J}_r^k = \mathbf{J}_r((\tilde{\omega}_k - \mathbf{b}_i^g) \Delta t) \quad (44)$$

有:

$$\Delta \overline{\tilde{\mathbf{R}}}_{ij} \triangleq \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij} \cdot \text{Exp}\left(\frac{\partial \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}^g} \delta \mathbf{b}_i^g\right) \quad (45)$$

因此:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}^g} &= \sum_{k=i}^{j-1} \left(-\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{k+1j}^T \mathbf{J}_r^k \Delta t \right) \\ &= \sum_{k=i}^{j-2} \left(-\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{k+1j}^T \mathbf{J}_r^k \Delta t \right) - \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{jj}^T \mathbf{J}_r^{j-1} \Delta t \\ &= \sum_{k=i} \left(-\left(\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{k+1j-1} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{j-1j} \right)^T \mathbf{J}_r^k \Delta t \right) - \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{jj}^T \mathbf{J}_r^{j-1} \Delta t \\ &= \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{jj-1} \cdot \sum_{k=i}^{j-2} \left(-\left(\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{k+1j-1} \right)^T \mathbf{J}_r^k \Delta t \right) - \mathbf{J}_r^{j-1} \Delta t \\ &= \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{jj-1} \cdot \frac{\partial \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij-1}}{\partial \mathbf{b}^g} - \mathbf{J}_r^{j-1} \Delta t \end{aligned} \quad (46)$$

3.5.2 对于 $\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij}$ 项

$$\begin{aligned}
\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij} &= \sum_{k=i}^{j-1} \left[\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik} \cdot \left(\tilde{\mathbf{f}}_k - (\mathbf{b}_i^a + \delta\mathbf{b}_i^a) \right) \cdot \Delta t \right] \\
&\approx \sum_{k=i}^{j-1} \left[\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik} \cdot \text{Exp} \left(\frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik}}{\partial\mathbf{b}^g} \delta\mathbf{b}_i^g \right) \cdot \left(\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a - \delta\mathbf{b}_i^a \right) \Delta t \right] \\
&\approx \sum_{k=i}^{j-1} \left[\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik} \cdot \left(\mathbf{I} + \left(\frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik}}{\partial\mathbf{b}^g} \delta\mathbf{b}_i^g \right)^\wedge \right) \cdot \left(\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a - \delta\mathbf{b}_i^a \right) \Delta t \right] \\
&= \sum_{k=i}^{j-1} \left[\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik} \cdot \left(\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a \right) \Delta t - \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik} \delta\mathbf{b}_i^a \Delta t + \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik} \cdot \left(\frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik}}{\partial\mathbf{b}^g} \delta\mathbf{b}_i^g \right)^\wedge \left(\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a \right) \Delta t - \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik} \cdot \left(\frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik}}{\partial\mathbf{b}^g} \delta\mathbf{b}_i^g \right)^\wedge \delta\mathbf{b}_i^a \Delta t \right] \\
&\approx \Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij} + \sum_{k=i}^{j-1} \left\{ - \left(\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik} \Delta t \right) \delta\mathbf{b}_i^a - \left[\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik} \cdot \left(\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a \right)^\wedge \frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik}}{\partial\mathbf{b}^g} \Delta t \right] \delta\mathbf{b}_i^g \right\}
\end{aligned} \tag{47}$$

所以：

$$\frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^g} = - \sum_{k=i}^{j-1} \left(\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik} \cdot \left(\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a \right)^\wedge \frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik}}{\partial\mathbf{b}^g} \Delta t \right) \tag{48}$$

$$\frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^a} = - \sum_{k=i}^{j-1} \left(\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik} \Delta t \right) \tag{49}$$

$$\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij} = \Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij} + \frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^g} \delta\mathbf{b}_i^g + \frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^a} \delta\mathbf{b}_i^a \tag{50}$$

进一步推导：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^g} &= - \sum_{k=i}^{j-1} \left(\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik} \cdot \left(\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a \right)^\wedge \frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik}}{\partial\mathbf{b}^g} \Delta t \right) \\
&= \frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij-1}}{\partial\mathbf{b}^g} - \left(\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij-1} \cdot \left(\tilde{\mathbf{f}}_{j-1} - \mathbf{b}_i^a \right)^\wedge \frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij-1}}{\partial\mathbf{b}^g} \Delta t \right)
\end{aligned} \tag{51}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^a} &= - \sum_{k=i}^{j-1} \left(\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik} \Delta t \right) \\
&= \frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij-1}}{\partial\mathbf{b}^a} - \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij-1} \Delta t
\end{aligned} \tag{52}$$

3.5.3 对于 $\Delta\tilde{\mathbf{p}}_{ij}$ 项

$$\begin{aligned}
\Delta\tilde{\mathbf{p}}_{ij} &\triangleq \sum_{k=i}^{j-1} \left[\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ik} \Delta t + \frac{1}{2} \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik} \cdot \left(\tilde{\mathbf{f}}_k - (\mathbf{b}_i^a + \delta\mathbf{b}_i^a) \right) \Delta t^2 \right] \\
&= \sum_{k=i}^{j-1} \underbrace{\left[\left(\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ik} + \frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ik}}{\partial\mathbf{b}^g} \delta\mathbf{b}_i^g + \frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ik}}{\partial\mathbf{b}^a} \delta\mathbf{b}_i^a \right) \Delta t \right]}_{(1)} + \underbrace{\frac{1}{2} \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik} \cdot \text{Exp} \left(\frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik}}{\partial\mathbf{b}^g} \delta\mathbf{b}_i^g \right) \cdot \left(\tilde{\mathbf{f}}_k - (\mathbf{b}_i^a + \delta\mathbf{b}_i^a) \right) \Delta t^2}_{(2)}
\end{aligned} \tag{53}$$

对于 (1) 直接带入之前的结果；

对于 (2)：

$$\begin{aligned}
(2) &\approx \frac{\Delta t^2}{2} \sum_{k=i}^{j-1} \left[\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik} \cdot \left(\mathbf{I} + \left(\frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik}}{\partial\mathbf{b}^g} \delta\mathbf{b}_i^g \right)^\wedge \right) \cdot \left(\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a - \delta\mathbf{b}_i^a \right) \right] \\
&\approx \frac{\Delta t^2}{2} \sum_{k=i}^{j-1} \left[\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik} \cdot \left(\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a \right) - \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik} \delta\mathbf{b}_i^a - \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik} \cdot \left(\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a \right)^\wedge \frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik}}{\partial\mathbf{b}^g} \delta\mathbf{b}_i^g \right]
\end{aligned} \tag{54}$$

最后有：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{p}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^g} &= \sum_{k=i}^{j-1} \left[\frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ik}}{\partial\mathbf{b}^g} \Delta t - \frac{1}{2} \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik} \cdot \left(\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a \right)^\wedge \frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik}}{\partial\mathbf{b}^g} \Delta t^2 \right] \\
&= \frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{p}}_{ij-1}}{\partial\mathbf{b}^g} + \left[\frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij-1}}{\partial\mathbf{b}^g} \Delta t - \frac{1}{2} \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij-1} \cdot \left(\tilde{\mathbf{f}}_{j-1} - \mathbf{b}_i^a \right)^\wedge \frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij-1}}{\partial\mathbf{b}^g} \Delta t^2 \right]
\end{aligned} \tag{55}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{p}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^a} &= \sum_{k=i}^{j-1} \left[\frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ik}}{\partial\mathbf{b}^a} \Delta t - \frac{1}{2} \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik} \Delta t^2 \right] \\
&= \frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{p}}_{ij-1}}{\partial\mathbf{b}^a} + \left(\frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij-1}}{\partial\mathbf{b}^a} \Delta t - \frac{1}{2} \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij-1} \Delta t^2 \right)
\end{aligned} \tag{56}$$

3.6 求残差关于状态量的雅可比

3.6.1 定义残差

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{\Delta\vec{\phi}_{ij}} &\triangleq \log \left[\left(\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ij} \right)^T \Delta\mathbf{R}_{ij} \right] \\ &= \log \left[\left(\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ij} \cdot \text{Exp} \left(\frac{\partial \Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}_i^g} \delta \mathbf{b}_i^g \right) \right)^T \mathbf{R}_{wi}^T \mathbf{R}_{wj} \right]\end{aligned}\quad (57)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{\Delta \mathbf{v}_{ij}} &\triangleq \Delta \mathbf{v}_{ij} - \Delta \widetilde{\mathbf{v}}_{ij} \\ &= \mathbf{R}_{wi}^T (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i - \mathbf{g} \cdot \Delta t_{ij}) - \left(\Delta \widetilde{\mathbf{v}}_{ij} + \frac{\partial \Delta \widetilde{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}_i^g} \delta \mathbf{b}_i^g + \frac{\partial \Delta \widetilde{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}^a} \delta \mathbf{b}_i^a \right)\end{aligned}\quad (58)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{\Delta \mathbf{p}_{ij}} &\triangleq \Delta \mathbf{p}_{ij} - \Delta \widetilde{\mathbf{p}}_{ij} \\ &= \mathbf{R}_{wi}^T \left(\mathbf{p}_{wj} - \mathbf{p}_{wi} - \mathbf{v}_i \cdot \Delta t_{ij} - \frac{1}{2} \mathbf{g} \cdot \Delta t_{ij}^2 \right) - \left(\Delta \widetilde{\mathbf{p}}_{ij} + \frac{\partial \Delta \widetilde{\mathbf{p}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}_i^g} \delta \mathbf{b}_i^g + \frac{\partial \Delta \widetilde{\mathbf{p}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}^a} \delta \mathbf{b}_i^a \right)\end{aligned}\quad (59)$$

3.6.2 定义扰动

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{wi} &\leftarrow \mathbf{R}_{wi} \cdot \text{Exp} \left(\delta \vec{\phi}_i \right) \\ \mathbf{p}_{wi} &\leftarrow \mathbf{p}_{wi} + \mathbf{R}_{wi} \cdot \delta \mathbf{p}_i \\ \mathbf{v}_i &\leftarrow \mathbf{v}_i + \delta \mathbf{v}_i \\ \delta \mathbf{b}_i^g &\leftarrow \delta \mathbf{b}_i^g + \delta \widetilde{\mathbf{b}}_i^g \\ \delta \mathbf{b}_i^a &\leftarrow \delta \mathbf{b}_i^a + \delta \widetilde{\mathbf{b}}_i^a \\ \mathbf{R}_{wj} &\leftarrow \mathbf{R}_{wj} \cdot \text{Exp} \left(\delta \vec{\phi}_j \right) \\ \mathbf{p}_{wj} &\leftarrow \mathbf{p}_{wj} + \mathbf{R}_{wj} \cdot \delta \mathbf{p}_j \\ \mathbf{v}_j &\leftarrow \mathbf{v}_j + \delta \mathbf{v}_j\end{aligned}\quad (60)$$

其中值得关注的有 $\mathbf{p}_{wi} \leftarrow \mathbf{p}_{wi} + \mathbf{R}_{wi} \cdot \delta \mathbf{p}_i$ ，设定位姿矩阵

$$\mathbf{T}_{wi} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{wi} & \mathbf{p}_{wi} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\quad (61)$$

给一个右扰动

$$\delta \mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{R}_i & \delta \mathbf{p}_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\quad (62)$$

$$\mathbf{T}_{wi} \cdot \delta \mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{wi} & \mathbf{p}_{wi} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{R}_i & \delta \mathbf{p}_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{wi} \delta \mathbf{R}_i & \mathbf{p}_{wi} + \mathbf{R}_{wi} \delta \mathbf{p}_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\quad (63)$$

3.6.3 残差对于状态的雅可比

3.6.3.1 旋转残差

对于：

$$\mathbf{r}_{\Delta\vec{\phi}_{ij}} = \log \left[\left(\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ij} \cdot \text{Exp} \left(\frac{\partial \Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}_i^g} \delta \mathbf{b}_i^g \right) \right)^T \mathbf{R}_{wi}^T \mathbf{R}_{wj} \right]\quad (64)$$

其中不包含 \mathbf{p}_{wi} ， \mathbf{p}_{wj} ， \mathbf{v}_i ， \mathbf{v}_j 以及 $\delta \mathbf{b}_i^a$ ，因此关于这些状态的雅可比矩阵都是 $\mathbf{0}$

下面分别推一下对于其他状态量的雅可比：

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{\Delta\vec{\phi}_{ij}} \left(\mathbf{R}_{wi} \text{Exp} \left(\delta \vec{\phi}_i \right) \right) &= \log \left[\left(\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ij} \right)^T \left(\mathbf{R}_{wi} \text{Exp} \left(\delta \vec{\phi}_i \right) \right)^T \mathbf{R}_{wj} \right] \\ &\stackrel{(1)}{=} \log \left[\left(\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ij} \right)^T \text{Exp} \left(-\delta \vec{\phi}_i \right) \mathbf{R}_{wi}^T \mathbf{R}_{wj} \right] \\ &\stackrel{(2)}{=} \log \left[\left(\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ij} \right)^T \mathbf{R}_{wi}^T \mathbf{R}_{wj} \text{Exp} \left(-\mathbf{R}_{wj}^T \mathbf{R}_{wi} \delta \vec{\phi}_i \right) \right] \\ &= \log \left\{ \text{Exp} \left[\log \left(\left(\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ij} \right)^T \mathbf{R}_{wi}^T \mathbf{R}_{wj} \right) \right] \cdot \text{Exp} \left(-\mathbf{R}_{wj}^T \mathbf{R}_{wi} \delta \vec{\phi}_i \right) \right\} \\ &= \log \left[\text{Exp} \left(\mathbf{r}_{\Delta\vec{\phi}_{ij}} \right) \cdot \text{Exp} \left(-\mathbf{R}_{wj}^T \mathbf{R}_{wi} \delta \vec{\phi}_i \right) \right] \\ &\approx \mathbf{r}_{\Delta\vec{\phi}_{ij}} - \mathbf{J}_r^{-1} \left(\mathbf{r}_{\Delta\vec{\phi}_{ij}} \right) \mathbf{R}_{wj}^T \mathbf{R}_{wi} \delta \vec{\phi}_i\end{aligned}\quad (65)$$

得出：

$$\frac{\partial \mathbf{r}_{\Delta\vec{\phi}_{ij}}}{\partial \delta \vec{\phi}_i} = -\mathbf{J}_r^{-1} \left(\mathbf{r}_{\Delta\vec{\phi}_{ij}} \right) \mathbf{R}_{wj}^T \mathbf{R}_{wi}\quad (66)$$

对于 \mathbf{R}_{wj}

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_{\Delta\vec{\phi}_{ij}}(\mathbf{R}_{wj} \text{Exp}(\delta\vec{\phi}_j)) &= \log \left[\left(\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij} \right)^T \mathbf{R}_{wi}^T \mathbf{R}_{wj} \text{Exp}(\delta\vec{\phi}_j) \right] \\
&= \log \left\{ \text{Exp} \left[\log \left(\left(\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij} \right)^T \mathbf{R}_{wi}^T \mathbf{R}_{wj} \right) \right] \cdot \text{Exp}(\delta\vec{\phi}_j) \right\} \\
&= \log \left\{ \text{Exp}(\mathbf{r}_{\Delta\vec{\phi}_{ij}}) \cdot \text{Exp}(\delta\vec{\phi}_j) \right\} \\
&\approx \mathbf{r}_{\Delta\vec{\phi}_{ij}} + \mathbf{J}_r^{-1}(\mathbf{r}_{\Delta\vec{\phi}_{ij}}) \delta\vec{\phi}_j \\
&\quad \frac{\partial \mathbf{r}_{\Delta\vec{\phi}_{ij}}}{\partial \delta\vec{\phi}_j} = \mathbf{J}_r^{-1}(\mathbf{r}_{\Delta\vec{\phi}_{ij}})
\end{aligned} \tag{67}$$

对于 $\delta \mathbf{b}_i^g$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{r}_{\Delta\vec{\phi}_{ij}}(\delta \mathbf{b}_i^g + \delta \tilde{\mathbf{b}}_i^g) \\
&= \log \left\{ \left[\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij} \cdot \text{Exp} \left(\frac{\partial \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}^g} (\delta \mathbf{b}_i^g + \delta \tilde{\mathbf{b}}_i^g) \right) \right]^T \mathbf{R}_{wi}^T \mathbf{R}_{wj} \right\} \\
&\stackrel{(1)}{\approx} \log \left\{ \left[\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij} \cdot \text{Exp} \left(\frac{\partial \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}^g} \delta \mathbf{b}_i^g \right) \text{Exp} \left(\mathbf{J}_r \left(\frac{\partial \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}^g} \delta \mathbf{b}_i^g \right) \frac{\partial \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}^g} \delta \tilde{\mathbf{b}}_i^g \right) \right]^T \mathbf{R}_{wi}^T \mathbf{R}_{wj} \right\} \\
&\stackrel{(2)}{=} \log \left\{ \left[\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij} \cdot \text{Exp} \left(\mathbf{J}_r \cdot \frac{\partial \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}^g} \delta \tilde{\mathbf{b}}_i^g \right) \right]^T \Delta \mathbf{R}_{ij} \right\} \\
&\stackrel{(3)}{=} \log \left[\text{Exp} \left(-\mathbf{J}_r \cdot \frac{\partial \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}^g} \delta \tilde{\mathbf{b}}_i^g \right) \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij}^T \Delta \mathbf{R}_{ij} \right] \\
&= \log \left[\text{Exp} \left(-\mathbf{J}_r \cdot \frac{\partial \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}^g} \delta \tilde{\mathbf{b}}_i^g \right) \text{Exp} \left(\log(\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij}^T \Delta \mathbf{R}_{ij}) \right) \right] \\
&= \log \left[\text{Exp} \left(-\mathbf{J}_r \cdot \frac{\partial \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}^g} \delta \tilde{\mathbf{b}}_i^g \right) \text{Exp}(\mathbf{r}_{\Delta\vec{\phi}_{ij}}(\delta \mathbf{b}_i^g)) \right] \\
&\stackrel{(4)}{=} \log \left\{ \text{Exp}(\mathbf{r}_{\Delta\vec{\phi}_{ij}}(\delta \mathbf{b}_i^g)) \cdot \text{Exp} \left[-\text{Exp}(-\mathbf{r}_{\Delta\vec{\phi}_{ij}}(\delta \mathbf{b}_i^g)) \cdot \mathbf{J}_r \cdot \frac{\partial \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}^g} \delta \tilde{\mathbf{b}}_i^g \right] \right\} \\
&\approx \mathbf{r}_{\Delta\vec{\phi}_{ij}}(\delta \mathbf{b}_i^g) - \mathbf{J}_r^{-1}(\mathbf{r}_{\Delta\vec{\phi}_{ij}}(\delta \mathbf{b}_i^g)) \cdot \text{Exp}(-\mathbf{r}_{\Delta\vec{\phi}_{ij}}(\delta \mathbf{b}_i^g)) \cdot \mathbf{J}_r \cdot \frac{\partial \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}^g} \delta \tilde{\mathbf{b}}_i^g \\
&\stackrel{(6)}{=} \mathbf{r}_{\Delta\vec{\phi}_{ij}} - \mathbf{J}_r^{-1}(\mathbf{r}_{\Delta\vec{\phi}_{ij}}) \cdot \text{Exp}(-\mathbf{r}_{\Delta\vec{\phi}_{ij}}) \cdot \mathbf{J}_r \left(\frac{\partial \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}^g} \delta \mathbf{b}_i^g \right) \cdot \frac{\partial \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}^g} \cdot \delta \tilde{\mathbf{b}}_i^g \\
&\quad \frac{\partial \mathbf{r}_{\Delta\vec{\phi}_{ij}}}{\partial \delta \tilde{\mathbf{b}}_i^g} = -\mathbf{J}_r^{-1}(\mathbf{r}_{\Delta\vec{\phi}_{ij}}) \cdot \text{Exp}(-\mathbf{r}_{\Delta\vec{\phi}_{ij}}) \cdot \mathbf{J}_r \left(\frac{\partial \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}^g} \delta \mathbf{b}_i^g \right) \cdot \frac{\partial \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}^g}
\end{aligned} \tag{68}$$

3.6.3.2 速度残差

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_{\Delta \mathbf{v}_{ij}} &\triangleq \Delta \mathbf{v}_{ij} - \Delta \tilde{\mathbf{v}}_{ij} \\
&= \mathbf{R}_{wi}^T (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i - \mathbf{g} \cdot \Delta t_{ij}) - \left(\Delta \tilde{\mathbf{v}}_{ij} + \frac{\partial \Delta \tilde{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}^g} \delta \mathbf{b}_i^g + \frac{\partial \Delta \tilde{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}^a} \delta \mathbf{b}_i^a \right)
\end{aligned} \tag{69}$$

其中不包含 \mathbf{p}_{wi} , \mathbf{p}_{wj} , \mathbf{R}_{wj} , 因此关于这些状态的雅可比矩阵都是 $\mathbf{0}$

关于 $\delta \mathbf{b}_i^g$, $\delta \mathbf{b}_i^a$ 可以直接得出结论

$$\frac{\partial \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{v}_{ij}}}{\partial \delta \tilde{\mathbf{b}}_i^g} = -\frac{\partial \Delta \tilde{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}^g} \tag{70}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{v}_{ij}}}{\partial \delta \tilde{\mathbf{b}}_i^a} = -\frac{\partial \Delta \tilde{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}^a} \tag{71}$$

关于 \mathbf{v}_i

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_{\Delta \mathbf{v}_{ij}}(\mathbf{v}_i + \delta \mathbf{v}_i) &= \mathbf{R}_{wi}^T (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i - \delta \mathbf{v}_i - \mathbf{g} \cdot \Delta t_{ij}) - \left(\Delta \tilde{\mathbf{v}}_{ij} + \frac{\partial \Delta \tilde{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}^g} \delta \mathbf{b}_i^g + \frac{\partial \Delta \tilde{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}^a} \delta \mathbf{b}_i^a \right) \\
&= \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{v}_{ij}}(\mathbf{v}_i) - \mathbf{R}_{wi}^T \delta \mathbf{v}_i
\end{aligned} \tag{72}$$

得出:

$$\frac{\partial \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{v}_{ij}}}{\partial \delta \mathbf{v}_i} = -\mathbf{R}_{wi}^T \tag{73}$$

关于 \mathbf{v}_j

$$\mathbf{r}_{\Delta \mathbf{v}_{ij}}(\mathbf{v}_j + \delta \mathbf{v}_j) = \mathbf{R}_{wi}^T (\mathbf{v}_j + \delta \mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i - \mathbf{g} \cdot \Delta t_{ij}) - \left(\Delta \tilde{\mathbf{v}}_{ij} + \frac{\partial \Delta \tilde{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}^g} \delta \mathbf{b}_i^g + \frac{\partial \Delta \tilde{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}^a} \delta \mathbf{b}_i^a \right) \tag{74}$$

$$= \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{v}_{ij}}(\mathbf{v}_i) + \mathbf{R}_{wi}^T \delta \mathbf{v}_j \tag{75}$$

得出：

$$\frac{\partial \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{v}_{ij}}}{\partial \delta \mathbf{v}_i} = \mathbf{R}_{wi}^T \quad (76)$$

关于 \mathbf{R}_{wi}

$$\begin{aligned} & \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{v}_{ij}} \left(\mathbf{R}_{wi} \text{Exp} \left(\delta \vec{\phi}_i \right) \right) \\ &= \left(\mathbf{R}_{wi} \text{Exp} \left(\delta \vec{\phi}_i \right) \right)^T (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i - \mathbf{g} \cdot \Delta t_{ij}) - \Delta \bar{\mathbf{v}}_{ij} \\ &\stackrel{(1)}{=} \text{Exp} \left(-\delta \vec{\phi}_i \right) \cdot \mathbf{R}_{wi}^T \cdot (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i - \mathbf{g} \cdot \Delta t_{ij}) - \Delta \bar{\mathbf{v}}_{ij} \\ &\approx \left(\mathbf{I} - \left(\delta \vec{\phi}_i \right)^\wedge \right) \cdot \mathbf{R}_{wi}^T \cdot (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i - \mathbf{g} \cdot \Delta t_{ij}) - \Delta \bar{\mathbf{v}}_{ij} \\ &= \mathbf{R}_{wi}^T \cdot (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i - \mathbf{g} \cdot \Delta t_{ij}) - \Delta \bar{\mathbf{v}}_{ij} - \left(\delta \vec{\phi}_i \right)^\wedge \cdot \mathbf{R}_{wi}^T \cdot (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i - \mathbf{g} \cdot \Delta t_{ij}) \\ &\stackrel{(2)}{=} \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{v}_{ij}} (\mathbf{R}_{wi}) + [\mathbf{R}_{wi}^T \cdot (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i - \mathbf{g} \cdot \Delta t_{ij})]^\wedge \cdot \delta \vec{\phi}_i \end{aligned} \quad (77)$$

得出：

$$\frac{\partial \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{v}_{ij}}}{\partial \delta \vec{\phi}_i} = [\mathbf{R}_{wi}^T \cdot (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i - \mathbf{g} \cdot \Delta t_{ij})]^\wedge \quad (78)$$

3.6.3.2 位置残差

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{p}_{ij}} &\triangleq \Delta \mathbf{p}_{ij} - \Delta \bar{\mathbf{p}}_{ij} \\ &= \mathbf{R}_{wi}^T \left(\mathbf{p}_{wj} - \mathbf{p}_{wi} - \mathbf{v}_i \cdot \Delta t_{ij} - \frac{1}{2} \mathbf{g} \cdot \Delta t_{ij}^2 \right) - \left(\Delta \tilde{\mathbf{p}}_{ij} + \frac{\partial \Delta \tilde{\mathbf{p}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}^g} \delta \mathbf{b}_i^g + \frac{\partial \Delta \tilde{\mathbf{p}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}^a} \delta \mathbf{b}_i^a \right) \end{aligned} \quad (79)$$

其中不包含 \mathbf{v}_j , \mathbf{R}_{wj} , 因此关于这些状态的雅可比矩阵都是0

关于 $\delta \mathbf{b}_i^g$, $\delta \mathbf{b}_i^a$ 可以直接得出结论

$$\frac{\partial \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{p}_{ij}}}{\partial \delta \tilde{\mathbf{b}}_i^g} = -\frac{\partial \Delta \tilde{\mathbf{p}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}^g} \quad (80)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{p}_{ij}}}{\partial \delta \tilde{\mathbf{b}}_i^a} = -\frac{\partial \Delta \tilde{\mathbf{p}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}^a} \quad (81)$$

关于 \mathbf{p}_{wj}

$$\begin{aligned} & \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{p}_{ij}} (\mathbf{p}_{wj} + \mathbf{R}_{wj} \cdot \delta \mathbf{p}_j) \\ &= \mathbf{R}_{wi}^T \left(\mathbf{p}_{wj} + \mathbf{R}_{wj} \cdot \delta \mathbf{p}_j - \mathbf{p}_{wi} - \mathbf{v}_i \cdot \Delta t_{ij} - \frac{1}{2} \mathbf{g} \cdot \Delta t_{ij}^2 \right) - \Delta \bar{\mathbf{p}}_{ij} \\ &= \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{p}_{ij}} (\mathbf{p}_{wj}) + \mathbf{R}_{wi}^T \mathbf{R}_{wj} \cdot \delta \mathbf{p}_j \end{aligned} \quad (82)$$

得出：

$$\frac{\partial \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{p}_{ij}}}{\partial \delta \mathbf{p}_j} = \mathbf{R}_{wi}^T \mathbf{R}_{wj} \quad (83)$$

关于 \mathbf{p}_{wi}

$$\begin{aligned} & \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{p}_{ij}} (\mathbf{p}_{wi} + \mathbf{R}_{wi} \cdot \delta \mathbf{p}_i) \\ &= \mathbf{R}_{wi}^T \left(\mathbf{p}_{wj} - \mathbf{p}_{wi} - \mathbf{R}_{wi} \cdot \delta \mathbf{p}_i - \mathbf{v}_i \cdot \Delta t_{ij} - \frac{1}{2} \mathbf{g} \cdot \Delta t_{ij}^2 \right) - \Delta \bar{\mathbf{p}}_{ij} \\ &= \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{p}_{ij}} (\mathbf{p}_{wi}) - \mathbf{I} \cdot \delta \mathbf{p}_i \end{aligned} \quad (84)$$

得出：

$$\frac{\partial \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{p}_{ij}}}{\partial \delta \mathbf{p}_i} = -\mathbf{I} \quad (85)$$

关于 \mathbf{v}_i ：

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{p}_{ij}} (\mathbf{v}_i + \delta \mathbf{v}_i) &= \mathbf{R}_{wi}^T \left(\mathbf{p}_{wj} - \mathbf{p}_{wi} - \mathbf{v}_i \cdot \Delta t_{ij} - \delta \mathbf{v}_i \cdot \Delta t_{ij} - \frac{1}{2} \mathbf{g} \cdot \Delta t_{ij}^2 \right) - \Delta \bar{\mathbf{p}}_{ij} \\ &= \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{p}_{ij}} (\mathbf{p}_{wj}) - \mathbf{R}_{wi}^T \Delta t_{ij} \cdot \delta \mathbf{v}_i \end{aligned} \quad (86)$$

得出：

$$\frac{\partial \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{p}_{ij}}}{\partial \delta \mathbf{v}_i} = -\mathbf{R}_{wi}^T \Delta t_{ij} \quad (87)$$

关于 \mathbf{R}_{wi}

$$\mathbf{r}_{\Delta \mathbf{v}_{ij}} \left(\mathbf{R}_{wi} \text{Exp} \left(\delta \vec{\phi}_i \right) \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\mathbf{R}_{wi} \text{Exp} \left(\delta \vec{\phi}_i \right) \right)^T \left(\mathbf{p}_{wj} - \mathbf{p}_{wi} - \mathbf{v}_i \cdot \Delta t_{ij} - \frac{1}{2} \mathbf{g} \cdot \Delta t_{ij}^2 \right) - \Delta \bar{\mathbf{p}}_{ij} \\
&\stackrel{(1)}{=} \text{Exp} \left(-\delta \vec{\phi}_i \right) \cdot \mathbf{R}_{wi}^T \cdot \left(\mathbf{p}_{wj} - \mathbf{p}_{wi} - \mathbf{v}_i \cdot \Delta t_{ij} - \frac{1}{2} \mathbf{g} \cdot \Delta t_{ij}^2 \right) - \Delta \bar{\bar{\mathbf{p}}}_{ij} \\
&\stackrel{(2)}{\approx} \left(\mathbf{I} - \left(\delta \vec{\phi}_i \right)^\wedge \right) \cdot \mathbf{R}_{wi}^T \cdot \left(\mathbf{p}_{wj} - \mathbf{p}_{wi} - \mathbf{v}_i \cdot \Delta t_{ij} - \frac{1}{2} \mathbf{g} \cdot \Delta t_{ij}^2 \right) - \Delta \bar{\mathbf{p}}_{ij} \\
&= \mathbf{R}_{wi}^T \cdot \left(\mathbf{p}_{wj} - \mathbf{p}_{wi} - \mathbf{v}_i \cdot \Delta t_{ij} - \frac{1}{2} \mathbf{g} \cdot \Delta t_{ij}^2 \right) - \Delta \bar{\mathbf{p}}_{ij} - \left(\delta \vec{\phi}_i \right)^\wedge \mathbf{R}_{wi}^T \\
&\quad \cdot \left(\mathbf{p}_{wj} - \mathbf{p}_{wi} - \mathbf{v}_i \cdot \Delta t_{ij} - \frac{1}{2} \mathbf{g} \cdot \Delta t_{ij}^2 \right) \\
&\stackrel{(3)}{=} \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{p}_{ij}} + \left[\mathbf{R}_{wi}^T \cdot \left(\mathbf{p}_{wj} - \mathbf{p}_{wi} - \mathbf{v}_i \cdot \Delta t_{ij} - \frac{1}{2} \mathbf{g} \cdot \Delta t_{ij}^2 \right) \right]^\wedge \cdot \delta \vec{\phi}_i
\end{aligned} \tag{88}$$