第3章：IMU预积分推导

3.1 推导前的公式

$$\boldsymbol{w}^{\wedge}=\begin{bmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{bmatrix}^{\wedge}=\begin{bmatrix}0&-w_3&w_2\\w_3&0&-w_1\\-w_2&w_1&0\end{bmatrix}\tag{1.1}$$

$$a^{\wedge}\cdot b=-b^{\wedge}\cdot a\tag{1.2}$$

当$\vec{\phi}$是小量时

$$\operatorname{Exp}(\vec{\phi})=\exp\left(\vec{\phi}^{\wedge}\right)\approx I+\vec{\phi}^{\wedge}\tag{1.3}$$

当$\delta\vec{\phi}$是小量时

$$\operatorname{Exp}(\vec{\phi}+\delta\vec{\phi})\approx\operatorname{Exp}(\vec{\phi})\cdot\operatorname{Exp}\left(J_r(\vec{\phi})\cdot\delta\vec{\phi}\right)\tag{1.4}$$

$$\operatorname{Exp}(\vec{\phi})\cdot\operatorname{Exp}(\delta\vec{\phi})=\operatorname{Exp}\left(\vec{\phi}+J_r^{-1}(\vec{\phi})\cdot\delta\vec{\phi}\right)\tag{1.5}$$

其中：

$$\boldsymbol{J}_r(\vec{\phi})=\mathbf{I}-\frac{1-\cos\left(\|\vec{\phi}\|\right)}{\|\vec{\phi}\|^2}\vec{\phi}^{\wedge}+\left(\frac{\|\vec{\phi}\|-\sin\left(\|\vec{\phi}\|\right)}{\|\vec{\phi}\|^3}\right)\left(\vec{\phi}^{\wedge}\right)^2\tag{1.6}$$

$$\boldsymbol{J}_r^{-1}(\vec{\phi})=\mathbf{I}+\frac{1}{2}\vec{\phi}^{\wedge}+\left(\frac{1}{\|\vec{\phi}\|^2}-\frac{1+\cos\left(\|\vec{\phi}\|\right)}{2\cdot\|\vec{\phi}\|\cdot\sin\left(\|\vec{\phi}\|\right)}\right)\left(\vec{\phi}^{\wedge}\right)^2\tag{1}$$

当$\vec{\phi}$为小量时

$$\boldsymbol{J}_r(\vec{\phi})\approx\mathbf{I}\tag{1.8}$$

$$\boldsymbol{J}_r^{-1}(\vec{\phi})\approx\mathbf{I}\tag{1.9}$$

$$\mathbf{R}\cdot\operatorname{Exp}(\vec{\phi})\cdot\mathbf{R}^T=\exp\left(\mathbf{R}\vec{\phi}^{\wedge}\mathbf{R}^T\right)=\operatorname{Exp}(\mathbf{R}\vec{\phi})\tag{1.10}$$

$$\operatorname{Exp}(\vec{\phi})\cdot\mathbf{R}=\mathbf{R}\cdot\operatorname{Exp}\left(\mathbf{R}^T\vec{\phi}\right)\tag{1.11}$$

3.2 预积分

$$\mathbf{R}_{wj}=\mathbf{R}_{wi}\cdot\prod_{k=i}^{j-1}\operatorname{Exp}\left(\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_k-\mathbf{b}_k^g-\eta_k^{gd}\right)\cdot\Delta t\right)\tag{2}$$

$$\mathbf{v}_j=\mathbf{v}_i+\mathbf{g}\cdot\Delta t_{ij}+\sum_{k=i}^{j-1}\mathbf{R}_{wk}\cdot\left(\tilde{\mathbf{f}}_k-\mathbf{b}_k^a-\eta_k^{ad}\right)\cdot\Delta t\tag{3}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_{wj}&=\mathbf{p}_{wi}+\sum_{k=i}^{j-1}\mathbf{v}_k\cdot\Delta t+\frac{j-i}{2}\mathbf{g}\cdot\Delta t^2+\frac{1}{2}\sum_{k=i}^{j-1}\mathbf{R}_{wk}\cdot\left(\tilde{\mathbf{f}}_k-\mathbf{b}_k^a-\boldsymbol{\eta}_k^{ad}\right)\cdot\Delta t^2\\&=\mathbf{p}_{wi}+\sum_{k=i}^{j-1}\left[\mathbf{v}_k\cdot\Delta t+\frac{1}{2}\mathbf{g}\cdot\Delta t^2+\frac{1}{2}\mathbf{R}_{wk}\cdot\left(\tilde{\mathbf{f}}_k-\mathbf{b}_k^a-\eta_k^{ad}\right)\cdot\Delta t^2\right]\end{aligned}\tag{4}$$

其中：

$$\Delta t_{ij}=\sum_{k=i}^{j-1}\Delta t=(j-i)\Delta t\tag{5}$$

由积分引出预积分，预积分里面的每一项与起始状态无关，可以认为都是相对量，这个好处在于计算预积分时不需要考虑起始状态，值得注意的是关于速度与位置的预积分里面都包含了重力。预积分计算方式：

- 1、消除第 i 时刻对积分的影响
- 2、保留重力的影响

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{R}_{ij}&\triangleq\mathbf{R}_{wi}^T\mathbf{R}_{wj}=\prod_{k=i}^{j-1}\operatorname{Exp}\left(\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_k-\mathbf{b}_k^g-\eta_k^{gd}\right)\cdot\Delta t\right)\\\Delta\mathbf{v}_{ij}&\triangleq\mathbf{R}_{wi}^T\left(\mathbf{v}_j-\mathbf{v}_i-\mathbf{g}\cdot\Delta t_{ij}\right)\\&=\sum_{k=i}^{j-1}\Delta\mathbf{R}_{ik}\cdot\left(\tilde{\mathbf{f}}_k-\mathbf{b}_k^a-\eta_k^{ad}\right)\cdot\Delta t\\\Delta\mathbf{p}_{ij}&\triangleq\mathbf{R}_{wi}^T\left(\mathbf{p}_{wj}-\mathbf{p}_{wi}-\mathbf{v}_i\cdot\Delta t_{ij}-\frac{1}{2}\mathbf{g}\cdot\Delta t_{ij}^2\right)\end{aligned}\tag{6}$$

$$= \sum_{k=i}^{j-1}\left[\Delta\mathbf{v}_{ik}\cdot\Delta t + \frac{1}{2}\Delta\mathbf{R}_{ik}\cdot\left(\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_k^a - \eta_k^{ad}\right)\cdot\Delta t^2\right]$$

关于位置的预积分推到时要注意对于g的处理，其中要利用到等差数列求和的公式，公式如下：

$$\frac{j-i}{2} - \frac{(j-i)^2}{2} = -\frac{(j-i)[j-(i+1)]}{2} = -\sum_{k=i}^{j-1}(k-i) \tag{7}$$

3.3 噪声分离

目的：上面推预积分时对imu的读数会减去它的偏置与误差，其中偏置可以作为状态量去得出，但是误差是没有办法得出的，我们能做的就是拿到imu数据减去偏置后直接使用，通常的办法就是通过计算误差的方式过滤掉这部分误差，无论是优化还是滤波都跳不过一个重要的矩阵——预积分的信息矩阵（协方差矩阵的逆）由于假设了噪声是高斯白噪声，所以噪声的方差对状态方差的影响可以通过高斯分布推理过来。本节我们的目的就是推导出标定好的imu**噪声对预积分的影响，也就是预积分的偏差关于噪声的式子，下一节推出协方差方差的关系。**

由于**假设了噪声为高斯白噪声，也就是服从了高斯分布，因此预积分噪声同样为高斯分布**，整个过程以推导出预积分噪声的表达式为主，令预积分的测量噪声为：

$$\boldsymbol{\eta}_{ij}^{\Delta} \triangleq \begin{bmatrix}\delta\vec{\phi}_{ij}^T & \delta\mathbf{v}_{ij}^T & \delta\mathbf{p}_{ij}^T\end{bmatrix}^T \tag{8}$$

读作“伊塔“。

下面分别对 3 个向量噪声进行推导，推导方式：分离噪声成如下形式，可以理解成：真实值 = 测量值 – 误差

$$\Delta\mathbf{R}_{ij} \triangleq \Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ij}\cdot\operatorname{Exp}\left(-\delta\vec{\phi}_{ij}\right) \tag{3.1}$$

$$\Delta\mathbf{v}_{ij} \triangleq \Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij} - \delta\mathbf{v}_{ij} \tag{3.2}$$

$$\Delta\mathbf{p}_{ij} \triangleq \Delta\widetilde{\mathbf{p}}_{ij} - \delta\mathbf{p}_{ij} \tag{3.3}$$

3.3.1 对于ΔR_{ij}项

$$\begin{aligned}
\Delta\mathbf{R}_{ij} &= \prod_{k=i}^{j-1}\operatorname{Exp}\left(\left(\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_k - \mathbf{b}_i^g\right)\Delta t - \eta_k^{gd}\Delta t\right) \\
&\overset{(1)}{\approx} \prod_{k=i}^{j-1}\left\{\operatorname{Exp}\left(\left(\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_k - \mathbf{b}_i^g\right)\Delta t\right)\cdot\operatorname{Exp}\left(-\mathbf{J}_r\left(\left(\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_k - \mathbf{b}_i^g\right)\Delta t\right)\cdot\eta_k^{gd}\Delta t\right)\right\} \\
&\overset{(2)}{=} \Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ij}\cdot\prod_{k=i}^{j-1}\operatorname{Exp}\left(-\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{k+1j}^T\cdot\mathbf{J}_r^k\cdot\eta_k^{gd}\Delta t\right)
\end{aligned} \tag{9}$$

注意式中假设了这段时间内偏置不变，就是一个数。对于（1）处比较好理解，利用公式（1.4）：

$$\operatorname{Exp}(\vec{\phi}+\delta\vec{\phi}) \approx \operatorname{Exp}(\vec{\phi})\cdot\operatorname{Exp}\left(J_r(\vec{\phi})\cdot\delta\vec{\phi}\right) \tag{10}$$

对于（2）处比较难理解，而且要用到公式（1.9）

$$\operatorname{Exp}(\vec{\phi})\cdot\mathbf{R} = \mathbf{R}\cdot\operatorname{Exp}\left(\mathbf{R}^T\vec{\phi}\right) \tag{11}$$

我们先把由（1）得出的结果展开，令：

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_r^k =& \mathbf{J}_r\left(\left(\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_k - \mathbf{b}_i^g\right)\Delta t\right) \\
\overset{(1)}{\approx}& \operatorname{Exp}\left(\left(\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i - \mathbf{b}_i^g\right)\Delta t\right)\cdot\operatorname{Exp}\left(-\mathbf{J}_r^i\cdot\boldsymbol{\eta}_i^{gd}\Delta t\right)\cdot\operatorname{Exp}\left(\left(\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{i+1} - \mathbf{b}_i^g\right)\Delta t\right) \\
&\cdot\operatorname{Exp}\left(-\mathbf{J}_r^{i+1}\cdot\boldsymbol{\eta}_{i+1}^{gd}\Delta t\right)\cdot\operatorname{Exp}\left(\left(\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{i+2} - \mathbf{b}_i^g\right)\Delta t\right) \\
&\cdot\operatorname{Exp}\left(-\mathbf{J}_r^{i+2}\cdot\eta_{i+2}^{gd}\Delta t\right)\cdots\operatorname{Exp}\left(\left(\widetilde{\boldsymbol{w}}_{j-1} - \mathbf{b}_i^g\right)\Delta t\right) \\
&\cdot\operatorname{Exp}\left(-\mathbf{J}_r^{j-1}\cdot\boldsymbol{\eta}_{j-1}^{gd}\Delta t\right) \\
=& \operatorname{Exp}\left(\left(\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i - \mathbf{b}_i^g\right)\Delta t\right)\cdot\operatorname{Exp}\left(\left(\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{i+1} - \mathbf{b}_i^g\right)\Delta t\right)\cdot\operatorname{Exp}\left(-\left(\operatorname{Exp}\left(\left(\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{i+1} - \mathbf{b}_i^g\right)\Delta t\right)\right)^T\mathbf{J}_r^i\cdot\boldsymbol{\eta}_i^{gd}\Delta t\right) \\
&\cdot\operatorname{Exp}\left(-\mathbf{J}_r^{i+1}\cdot\boldsymbol{\eta}_{i+1}^{gd}\Delta t\right)\cdot\operatorname{Exp}\left(\left(\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{i+2} - \mathbf{b}_i^g\right)\Delta t\right) \\
&\cdot\operatorname{Exp}\left(-\mathbf{J}_r^{i+2}\cdot\boldsymbol{\eta}_{i+2}^{gd}\Delta t\right)\cdots\operatorname{Exp}\left(\left(\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{j-1} - \mathbf{b}_i^g\right)\Delta t\right) \\
&\cdot\operatorname{Exp}\left(-\mathbf{J}_r^{j-1}\cdot\eta_{j-1}^{gd}\Delta t\right) \\
=& \operatorname{Exp}\left(\left(\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i - \mathbf{b}_i^g\right)\Delta t\right) \\
&\cdot\operatorname{Exp}\left(\left(\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{i+1} - \mathbf{b}_i^g\right)\Delta t\right)\cdot\operatorname{Exp}\left(\left(\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{i+2} - \mathbf{b}_i^g\right)\Delta t\right) \\
&\cdot\operatorname{Exp}\left(-\left(\operatorname{Exp}\left(\left(\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{i+2} - \mathbf{b}_i^g\right)\Delta t\right)^T\cdot\operatorname{Exp}\left(\left(\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{i+1} - \mathbf{b}_i^g\right)\Delta t\right)^T\right)\mathbf{J}_r^i\cdot\boldsymbol{\eta}_i^{gd}\Delta t\right) \\
&\cdot\operatorname{Exp}\left(-\operatorname{Exp}\left(\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{i+2} - \mathbf{b}_i^g\right)\Delta t\right)^T\mathbf{J}_r^{i+1}\cdot\boldsymbol{\eta}_{i+1}^{gd}\Delta t\right)\operatorname{Exp}\left(-\mathbf{J}_r^{i+2}\cdot\boldsymbol{\eta}_{i+2}^{gd}\Delta t\right)\cdots\operatorname{Exp}\left(\left(\widetilde{\boldsymbol{w}}_{j-1} - \mathbf{b}_i^g\right)\Delta t\right)\operatorname{Exp}\left(-\mathbf{J}_r^{j-1}\cdot\eta_{j-1}^{gd}\Delta t\right) \\
=& \prod_{k=i}^{j-1}\operatorname{Exp}\left(\left(\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_k - \mathbf{b}_i^g\right)\Delta t\right)\prod_{k=i}^{j-1}\operatorname{Exp}\left(-\prod_{m=j-1}^{k+1}\operatorname{Exp}\left(\left(\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_m - \mathbf{b}_i^g\right)\Delta t\right)^T\cdot\mathbf{J}_r^k\cdot\eta_k^{gd}\Delta t\right)
\end{aligned}$$

$$\overset{(2)}{=}\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ij}\cdot\prod_{k=i}^{j-1}\operatorname{Exp}\left(-\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{k+1j}^{T}\cdot\mathbf{J}_r^k\cdot\eta_k^{gd}\Delta t\right)$$

由上面可得：

$$\operatorname{Exp}\left(-\delta\vec{\phi}_{ij}\right)=\prod_{k=i}^{j-1}\operatorname{Exp}\left(-\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{k+1j}^{T}\cdot\mathbf{J}_r^k\cdot\boldsymbol{\eta}_k^{gd}\Delta t\right)\tag{13}$$

$$\delta\vec{\phi}_{ij}=-\log\left(\prod_{k=i}^{j-1}\operatorname{Exp}\left(-\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{k+1j}^{T}\cdot\mathbf{J}_r^k\cdot\boldsymbol{\eta}_k^{gd}\Delta t\right)\right)\tag{14}$$

由于结果结构比较复杂，所以还需要接着化简。

令：

$$\xi_k=\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{k+1j}^{T}\cdot\mathbf{J}_r^k\cdot\eta_k^{gd}\Delta t\tag{15}$$

读作“克西”或“克赛”，利用公式（5）：

$$\operatorname{Exp}(\vec{\phi})\cdot\operatorname{Exp}(\delta\vec{\phi})=\operatorname{Exp}\left(\vec{\phi}+J_r^{-1}(\vec{\phi})\cdot\delta\vec{\phi}\right)\tag{16}$$

$$\log\left(\operatorname{Exp}(\vec{\phi})\cdot\operatorname{Exp}(\delta\vec{\phi})\right)=\vec{\phi}+J_r^{-1}(\vec{\phi})\cdot\delta\vec{\phi}\tag{17}$$

以及公式：

$$\boldsymbol{J}_r^{-1}(\vec{\phi})\approx\mathbf{I}\tag{18}$$

有：

$$\begin{aligned}\delta\vec{\phi}_{ij}&=-\log\left(\prod_{k=i}^{j-1}\operatorname{Exp}\left(-\xi_k\right)\right)\\&=-\log\left(\operatorname{Exp}\left(-\xi_i\right)\prod_{k=i+1}^{j-1}\operatorname{Exp}\left(-\xi_k\right)\right)\\&\approx-\left(-\xi_i+\mathbf{I}\cdot\log\left(\prod_{k=i+1}^{j-1}\operatorname{Exp}\left(-\xi_k\right)\right)\right)\\&=\xi_i-\log\left(\prod_{k=i+1}^{j-1}\operatorname{Exp}\left(-\xi_k\right)\right)\\&=\xi_i-\log\left(\operatorname{Exp}\left(-\xi_{i+1}\right)\prod_{k=i+2}^{j-1}\operatorname{Exp}\left(-\xi_k\right)\right)\\&\approx\xi_i+\xi_{i+1}-\log\left(\prod_{k=i+2}^{j-1}\operatorname{Exp}\left(-\xi_k\right)\right)\\&\approx\cdots\\&\approx\sum_{k=i}^{j-1}\xi_k\end{aligned}\tag{19}$$

最后推出：

$$\delta\vec{\phi}_{ij}=\sum_{k=i}^{j-1}\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{k+1j}^{T}\cdot\mathbf{J}_r^k\cdot\eta_k^{gd}\Delta t\tag{20}$$

由式可知$\delta\vec{\phi}_{ij}$服从零均值的高斯分布。

3.3.2 对于$\Delta\mathbf{v}_{ij}$项

首先要利用前面关于角度的式子(3.1)带入到$\Delta\mathbf{v}_{ij}$，即：

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{v}_{ij}&=\sum_{k=i}^{j-1}\Delta\mathbf{R}_{ik}\cdot\left(\tilde{\mathbf{f}}_k-\mathbf{b}_i^a-\boldsymbol{\eta}_k^{ad}\right)\cdot\Delta t\\&\approx\sum_{k=i}^{j-1}\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ik}\cdot\operatorname{Exp}\left(-\delta\vec{\phi}_{ik}\right)\cdot\left(\tilde{\mathbf{f}}_k-\mathbf{b}_i^a-\boldsymbol{\eta}_k^{ad}\right)\cdot\Delta t\\&\overset{(1)}{\approx}\sum_{k=i}^{j-1}\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ik}\cdot\left(\mathbf{I}-\delta\vec{\phi}_{ik}^{\wedge}\right)\cdot\left(\tilde{\mathbf{f}}_k-\mathbf{b}_i^a-\boldsymbol{\eta}_k^{ad}\right)\cdot\Delta t\\&\overset{(2)}{\approx}\sum_{k=i}^{ad}\left[\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ik}\cdot\left(\mathbf{I}-\delta\vec{\phi}_{ik}^{\wedge}\right)\cdot\left(\tilde{\mathbf{f}}_k-\mathbf{b}_i^a\right)\cdot\Delta t-\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ik}\boldsymbol{\eta}_k^{ad}\Delta t\right]\\&\overset{(3)}{=}\sum_{k=i}^{j-1}\left[\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ik}\cdot\left(\tilde{\mathbf{f}}_k-\mathbf{b}_i^a\right)\cdot\Delta t+\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ik}\cdot\left(\tilde{\mathbf{f}}_k-\mathbf{b}_i^a\right)^{\wedge}\cdot\delta\vec{\phi}_{ik}\cdot\Delta t-\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ik}\boldsymbol{\eta}_k^{ad}\Delta t\right]\end{aligned}\tag{21}$$

$$=\sum_{k=i}^{j-1}\left[\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ik}\cdot\left(\tilde{\mathbf{f}}_k-\mathbf{b}_i^a\right)\cdot\Delta t\right]+\sum_{k=i}^{j-1}\left[\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ik}\cdot\left(\tilde{\mathbf{f}}_k-\mathbf{b}_i^a\right)^{\wedge}\cdot\delta\vec{\phi}_{ik}\cdot\Delta t-\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ik}\eta_k^{aa}\Delta t\right]$$

(1)利用了公式(1.3) 当$\vec{\phi}$是小量时：

$$\operatorname{Exp}(\vec{\phi})=\exp\left(\vec{\phi}^{\wedge}\right)\approx I+\vec{\phi}^{\wedge} \tag{22}$$

(2)忽略了小量;

(3)利用了公式(1.2):

$$\boldsymbol{a}^{\wedge}\cdot\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}^{\wedge}\cdot\boldsymbol{a} \tag{23}$$

上式令：

$$\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij}\triangleq\sum_{k=i}^{j-1}\left[\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ik}\cdot\left(\tilde{\mathbf{f}}_k-\mathbf{b}_i^a\right)\cdot\Delta t\right] \tag{24}$$

$$\delta\mathbf{v}_{ij}\triangleq\sum_{k=i}^{j-1}\left[\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ik}\eta_k^{ad}\Delta t-\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ik}\cdot\left(\tilde{\mathbf{f}}_k-\mathbf{b}_i^a\right)^{\wedge}\cdot\delta\vec{\phi}_{ik}\cdot\Delta t\right] \tag{25}$$

即可得出式 (3.2)，且$\delta\mathbf{v}_{ij}$拥有高斯分布的形式

$$\Delta\mathbf{v}_{ij}\triangleq\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij}-\delta\mathbf{v}_{ij} \tag{26}$$

3.3.3 对于$\Delta\mathbf{p}_{ij}$项

首先要利用前面关于角度的式子(3.1)(3.2)带入到$\Delta\mathbf{p}_{ij}$，即：

$$\begin{aligned}
&\Delta\mathbf{p}_{ij}\\
&=\sum_{k=i}^{j-1}\left[\Delta\mathbf{v}_{ik}\cdot\Delta t+\frac{1}{2}\Delta\mathbf{R}_{ik}\cdot\left(\tilde{\mathbf{f}}_k-\mathbf{b}_i^a-\boldsymbol{\eta}_k^{ad}\right)\cdot\Delta t^2\right]\\
&\approx\sum_{k=i}^{j-1}\left[\left(\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ik}-\delta\mathbf{v}_{ik}\right)\cdot\Delta t+\frac{1}{2}\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ik}\cdot\operatorname{Exp}\left(-\delta\vec{\phi}_{ik}\right)\cdot\left(\tilde{\mathbf{f}}_k-\mathbf{b}_i^a-\boldsymbol{\eta}_k^{ad}\right)\cdot\Delta t^2\right]\\
&\overset{(1)}{\approx}\sum_{k=i}^{j-1}\left[\left(\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ik}-\delta\mathbf{v}_{ik}\right)\cdot\Delta t+\frac{1}{2}\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ik}\cdot\left(\mathbf{I}-\delta\vec{\phi}_{ik}^{\wedge}\right)\cdot\left(\tilde{\mathbf{f}}_k-\mathbf{b}_i^a-\boldsymbol{\eta}_k^{ad}\right)\cdot\Delta t^2\right]\\
&\overset{(2)}{\approx}\sum_{k=i}^{j-1}\left[\left(\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ik}-\delta\mathbf{v}_{ik}\right)\cdot\Delta t+\frac{1}{2}\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ik}\cdot\left(\mathbf{I}-\delta\vec{\phi}_{ik}^{\wedge}\right)\cdot\left(\tilde{\mathbf{f}}_k-\mathbf{b}_i^a\right)\cdot\Delta t^2-\frac{1}{2}\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ik}\boldsymbol{\eta}_k^{ad}\Delta t^2\right]\\
&\overset{(3)}{=}\sum_{k=i}^{j-1}\left[\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ik}\Delta t+\frac{1}{2}\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ik}\cdot\left(\tilde{\mathbf{f}}_k-\mathbf{b}_i^a\right)\Delta t^2+\frac{1}{2}\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ik}\cdot\left(\tilde{\mathbf{f}}_k-\mathbf{b}_i^a\right)^{\wedge}\delta\vec{\phi}_{ik}\Delta t^2-\frac{1}{2}\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ik}\eta_k^{ad}\Delta t^2-\delta\mathbf{v}_{ik}\Delta t\right]
\end{aligned} \tag{27}$$

(1)利用了公式(1.3) 当$\vec{\phi}$是小量时：

$$\operatorname{Exp}(\vec{\phi})=\exp\left(\vec{\phi}^{\wedge}\right)\approx I+\vec{\phi}^{\wedge} \tag{28}$$

(2)忽略了小量;

(3)利用了公式(1.2)

$$\boldsymbol{a}^{\wedge}\cdot\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}^{\wedge}\cdot\boldsymbol{a} \tag{29}$$

上式令：

$$\Delta\tilde{\mathbf{p}}_{ij}\triangleq\sum_{k=i}^{j-1}\left[\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ik}\Delta t+\frac{1}{2}\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ik}\cdot\left(\tilde{\mathbf{f}}_k-\mathbf{b}_i^a\right)\Delta t^2\right] \tag{30}$$

$$\delta\mathbf{p}_{ij}\triangleq\sum_{k=i}^{j-1}\left[\delta\mathbf{v}_{ik}\Delta t-\frac{1}{2}\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ik}\cdot\left(\tilde{\mathbf{f}}_k-\mathbf{b}_i^a\right)^{\wedge}\delta\vec{\phi}_{ik}\Delta t^2+\frac{1}{2}\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ik}\eta_k^{ad}\Delta t^2\right] \tag{31}$$

即可得出式 (3.3)，且$\delta\mathbf{p}_{ij}$拥有高斯分布的形式：

$$\Delta\mathbf{p}_{ij}\triangleq\Delta\tilde{\mathbf{p}}_{ij}-\delta\mathbf{p}_{ij} \tag{32}$$

3.4 噪声递推

上面求出了三个状态量误差的表达式，但由于式子要么是求和，要么是多积导致每次新来一个数据都需要从头计算，这给计算平台来带来资源的浪费，因此这章我们要推出误差的递推形式，即通过$\delta\mathbf{p}_{ij-1}$推出$\delta\mathbf{p}_{ij}$。

$$\delta\vec{\phi}_{ij}\triangleq\sum_{k=i}^{j-1}\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{k+1j}^{T}\cdot\mathbf{J}_r^k\cdot\eta_k^{gd}\Delta t \tag{4.1}$$

$$\delta\mathbf{v}_{ij}\triangleq\sum_{k=i}^{j-1}\left[\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ik}\eta_k^{ad}\Delta t-\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ik}\cdot\left(\tilde{\mathbf{f}}_k-\mathbf{b}_i^a\right)^{\wedge}\cdot\delta\vec{\phi}_{ik}\cdot\Delta t\right] \tag{4.2}$$

$$\delta\mathbf{p}_{ij} \triangleq \sum_{k=i}^{j-1}\left[\delta\mathbf{v}_{ik}\Delta t-\frac{1}{2}\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik}\cdot\left(\tilde{\mathbf{f}}_k-\mathbf{b}_i^a\right)^{\wedge}\delta\vec{\phi}_{ik}\Delta t^2+\frac{1}{2}\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik}\eta_k^{ad}\Delta t^2\right] \tag{4.3}$$

3.4.1 对于$\delta\overrightarrow{\phi}_{ij}$项

$$\begin{aligned}
\delta\vec{\phi}_{ij} &= \sum_{k=i}^{j-1}\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{k+1j}^T\cdot\mathbf{J}_r^k\cdot\boldsymbol{\eta}_k^{gd}\Delta t \\
&= \sum_{k=i}^{j-2}\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{k+1j}^T\cdot\mathbf{J}_r^k\cdot\eta_k^{gd}\Delta t+\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{jj}^T\mathbf{J}_r^{j-1}\boldsymbol{\eta}_{j-1}^{gd}\Delta t \\
&= \sum_{k=i}^{j-2}\left(\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{k+1j-1}\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{j-1j}\right)^T\mathbf{J}_r^k\eta_k^{gd}\Delta t+\mathbf{J}_r^{j-1}\boldsymbol{\eta}_{j-1}^{gd}\Delta t \\
&= \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{jj-1}\sum_{k=i}^{j-2}\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{k+1j-1}^T\mathbf{J}_r^k\eta_k^{gd}\Delta t+\mathbf{J}_r^{j-1}\boldsymbol{\eta}_{j-1}^{gd}\Delta t \\
&= \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{jj-1}\delta\vec{\phi}_{ij-}+\mathbf{J}_r^{j-1}\boldsymbol{\eta}_{j-1}^{gd}\Delta t
\end{aligned} \tag{33}$$

3.4.2 对于δv_{ij}项

$$\begin{aligned}
&\delta\mathbf{V}_{ij} \\
&= \sum_{k=i}^{j-1}\left[\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik}\eta_k^{ad}\Delta t-\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik}\cdot\left(\tilde{\boldsymbol{f}}_k-\boldsymbol{b}_i^a\right)^{\wedge}\cdot\delta\vec{\phi}_{ik}\cdot\Delta t\right] \\
&= \sum_{k=i}^{j-2}\left[\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik}\eta_k^{ad}\Delta t-\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik}\cdot\left(\tilde{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{k}}-\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{a}}\right)^{\wedge}\cdot\boldsymbol{\delta\vec{\phi}_{ik}}\cdot\Delta t\right]+\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij-1}\eta_{j-1}^{ad}\Delta t-\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij-1}\left(\tilde{\boldsymbol{f}}_k-\boldsymbol{b}_i^a\right)^{\wedge}\cdot\delta\vec{\phi}_{ik}\cdot\Delta t \\
&= \delta\mathbf{v}_{ij-1}+\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij-1}\boldsymbol{\eta}_{j-1}^{ad}\Delta t-\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij-1}\left(\tilde{\boldsymbol{f}}_k-\mathbf{b}_i^a\right)^{\wedge}\cdot\delta\vec{\phi}_{ij-1}\cdot\Delta t
\end{aligned} \tag{34}$$

3.4.3 对于δp_{ij}项

$$\begin{aligned}
&\delta\mathbf{p}_{ij} \\
&= \sum_{k=i}^{j-1}\left[\delta\mathbf{v}_{ik}\Delta t-\frac{1}{2}\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik}\cdot\left(\tilde{\boldsymbol{f}}_k-\boldsymbol{b}_i^a\right)^{\wedge}\delta\vec{\phi}_{ik}\Delta t^2+\frac{1}{2}\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik}\mathbf{y}_k^{ad}\Delta t^2\right] \\
&= \delta\mathbf{p}_{ij-1}+\delta\mathbf{v}_{ij-1}\Delta t-\frac{1}{2}\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij-1}\cdot\left(\tilde{\boldsymbol{f}}_{j-1}-\mathbf{b}_i^a\right)^{\wedge}\delta\vec{\phi}_{ij-1}\Delta t^2+\frac{1}{2}\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij-1}\eta_{j-1}^{ad}\Delta t^2
\end{aligned} \tag{35}$$

总结

综上可以写出

$$\eta_{ij}^{\Delta} \triangleq \begin{bmatrix}\delta\vec{\phi}_{ij}^T & \delta\mathbf{v}_{ij}^T & \delta\mathbf{p}_{ij}^T\end{bmatrix}^T \tag{36}$$

的递推矩阵。令

$$\boldsymbol{\eta}_k^d = \left[\left(\boldsymbol{\eta}_k^{gd}\right)^T\left(\boldsymbol{\eta}_k^{ad}\right)^T\right]^T \tag{37}$$

有

$$\boldsymbol{\eta}_{ij}^{\Delta} = \begin{bmatrix}\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{jj-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij-1}\cdot\left(\tilde{\boldsymbol{f}}_{j-1}-\mathbf{b}_i^a\right)^{\wedge}\Delta t & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\frac{1}{2}\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij-1}\cdot\left(\tilde{\boldsymbol{f}}_{j-1}-\mathbf{b}_i^a\right)^{\wedge}\Delta t^2 & \Delta t\mathbf{I} & \mathbf{I}\end{bmatrix}\boldsymbol{\eta}_{ij-1}^{\Delta}+\begin{bmatrix}\mathbf{J}_r^{j-1}\Delta t & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij-1}\Delta t \\ \mathbf{0} & \frac{1}{2}\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij-1}\Delta t^2\end{bmatrix}\boldsymbol{\eta}_{j-1}^d \tag{38}$$

有:

$$\boldsymbol{\eta}_{ij}^{\Delta} = \mathbf{A}_{j-1}\boldsymbol{\eta}_{ij-1}^{\Delta}+\mathbf{B}_{j-1}\boldsymbol{\eta}_{j-1}^d \tag{39}$$

重点来了!

$$\boldsymbol{\Sigma}_{ij} = \mathbf{A}_{j-1}\boldsymbol{\Sigma}_{ij-1}\mathbf{A}_{j-1}^T+\mathbf{B}_{j-1}\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\eta}}\mathbf{B}_{j-1}^T \tag{40}$$

到此为止优化时使用的信息矩阵有了!

3.5 Bias更新时对预积分的影响

首先说明前面去除噪声时假设了这段时间内偏置不变，但偏置在vio算法中会作为状态量来优化，所以当通过优化后偏置会更新，这样一来如果重新计算这段时间的预积分会很浪费时间，所以本章目的是为了推出当偏置变化时直接求得新的预积分结果。

$$\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij} \triangleq \prod_{k=i}^{j-1}\operatorname{Exp}\left(\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_k-\mathbf{b}_i^g\right)\Delta t\right) \tag{5.1}$$

$$\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij} \triangleq \sum_{k=i}^{j-1}\left[\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik}\cdot\left(\tilde{\mathbf{f}}_k-\mathbf{b}_i^a\right)\cdot\Delta t\right] \tag{5.2}$$

$$\Delta\tilde{\mathbf{p}}_{ij} \triangleq \sum_{k=i}^{j-1}\left[\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ik}\Delta t + \frac{1}{2}\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ik}\cdot\left(\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a\right)\Delta t^2\right] \tag{5.3}$$

当有偏置更新时

$$\Delta\overline{\widetilde{\mathbf{R}}}_{ij} \triangleq \prod_{k=i}^{j-1}\operatorname{Exp}\left(\left(\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_k - \left(\mathbf{b}_i^g + \delta\mathbf{b}_i^g\right)\right)\Delta t\right) \tag{5.4}$$

$$\Delta\overline{\tilde{\mathbf{v}}}_{ij} \triangleq \sum_{k=i}^{j-1}\left[\Delta\overline{\widetilde{\mathbf{R}}}_{ik}\cdot\left(\tilde{\mathbf{f}}_k - \left(\mathbf{b}_i^a + \delta\mathbf{b}_i^a\right)\right)\cdot\Delta t\right] \tag{5.5}$$

$$\Delta\overline{\tilde{\mathbf{p}}}_{ij} \triangleq \sum_{k=i}^{j-1}\left[\Delta\overline{\tilde{\mathbf{v}}}_{ik}\Delta t + \frac{1}{2}\Delta\overline{\widetilde{\mathbf{R}}}_{ik}\cdot\left(\tilde{\mathbf{f}}_k - \left(\mathbf{b}_i^a + \delta\mathbf{b}_i^a\right)\right)\Delta t^2\right] \tag{5.6}$$

3.5.1 对于$\Delta\overline{\widetilde{\mathrm{R}}}_{ij}$项

令

$$\mathbf{J}_r^k = \mathbf{J}_r\left(\left(\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_k - \mathbf{b}_i^g\right)\Delta t\right) \tag{41}$$

有:

$$\begin{aligned}
\Delta\overline{\widetilde{\mathbf{R}}}_{ij} &\triangleq \prod_{k=i}^{j-1}\operatorname{Exp}\left(\left(\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_k - \left(\mathbf{b}_i^g + \delta\mathbf{b}_i^g\right)\right)\Delta t\right) \\
&= \prod_{k=i}^{j-i}\operatorname{Exp}\left(\left(\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_k - \mathbf{b}_i^g\right)\Delta t - \delta\mathbf{b}_i^g\Delta t\right) \\
&\approx \prod_{k=i}^{j-1}\left(\operatorname{Exp}\left(\left(\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_k - \mathbf{b}_i^g\right)\Delta t\right)\cdot\operatorname{Exp}\left(-\mathbf{J}_r^k\delta\mathbf{b}_i^g\Delta t\right)\right) \\
&= \Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ij}\cdot\prod_{k=i}^{j-1}\operatorname{Exp}\left(-\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{k+1j}^T\cdot\mathbf{J}_r^k\cdot\delta\mathbf{b}_i^g\Delta t\right) \\
&= \Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ij}\cdot\operatorname{Exp}\left(\sum_{k=i}^{j-1}\left(-\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{k+1j}^T\cdot\mathbf{J}_r^k\cdot\delta\mathbf{b}_i^g\Delta t\right)\right)
\end{aligned} \tag{42}$$

对于（1）处比较好理解，利用公式（1.4）：

$$\operatorname{Exp}(\vec{\phi}+\delta\vec{\phi}) \approx \operatorname{Exp}(\vec{\phi})\cdot\operatorname{Exp}\left(J_r(\vec{\phi})\cdot\delta\vec{\phi}\right) \tag{43}$$

同 3.1节中

其中:

$$\mathbf{J}_r^k = \mathbf{J}_r\left(\left(\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_k - \mathbf{b}_i^g\right)\Delta t\right) \tag{44}$$

有:

$$\Delta\overline{\widetilde{\mathbf{R}}}_{ij} \triangleq \Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ij}\cdot\operatorname{Exp}\left(\frac{\partial\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^g}\delta\mathbf{b}_i^g\right) \tag{45}$$

因此:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^g} &= \sum_{k=i}^{j-1}\left(-\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{k+1j}^T\mathbf{J}_r^k\Delta t\right) \\
&= \sum_{k=i}^{j-2}\left(-\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{k+1j}^T\mathbf{J}_r^k\Delta t\right) - \Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{jj}^T\mathbf{j}_r^{j-1}\Delta t \\
&= \sum_{k=i}^{j-2}\left(-\left(\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{k+1j-1}\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{j-1j}\right)^T\mathbf{J}_r^k\Delta t\right) - \Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{jj}^T\mathbf{J}_r^{j-1}\Delta t \\
&= \Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{jj-1}\cdot\sum_{k=i}^{j-2}\left(-\left(\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{k+1j-1}\right)^T\mathbf{J}_r^k\Delta t\right) - \mathbf{J}_r^{j-1}\Delta t \\
&= \Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{jj-1}\cdot\frac{\partial\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ij-1}}{\partial\mathbf{b}^g} - \mathbf{J}_r^{j-1}\Delta t
\end{aligned} \tag{46}$$

3.5.2 对于$\Delta\bar{\tilde{\mathbf{v}}}_{ij}$项

$$
\begin{aligned}
\Delta\bar{\tilde{\mathbf{v}}}_{ij} &= \sum_{k=i}^{j-1}\left[\Delta\bar{\widetilde{\mathbf{R}}}_{ik}\cdot\left(\tilde{\mathbf{f}}_k-(\mathbf{b}_i^a+\delta\mathbf{b}_i^a)\right)\cdot\Delta t\right] \\
&\approx \sum_{k=i}^{j-1}\left[\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ik}\cdot\operatorname{Exp}\left(\frac{\partial\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ik}}{\partial\mathbf{b}^g}\delta\mathbf{b}_i^g\right)\cdot\left(\tilde{\mathbf{f}}_k-\mathbf{b}_i^a-\delta\mathbf{b}_i^a\right)\Delta t\right] \\
&\approx \sum_{k=i}^{j-1}\left[\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ik}\cdot\left(\mathbf{I}+\left(\frac{\partial\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ik}}{\partial\mathbf{b}^g}\delta\mathbf{b}_i^g\right)^{\wedge}\right)\cdot\left(\tilde{\mathbf{f}}_k-\mathbf{b}_i^a-\delta\mathbf{b}_i^a\right)\Delta t\right] \\
&= \sum_{k=i}^{j-1}\left[\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ik}\cdot\left(\tilde{\mathbf{f}}_k-\mathbf{b}_i^a\right)\Delta t-\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ik}\delta\mathbf{b}_i^a\Delta t+\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ik}\cdot\left(\frac{\partial\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ik}}{\partial\mathbf{b}^g}\delta\mathbf{b}_i^g\right)^{\wedge}\left(\tilde{\mathbf{f}}_k-\mathbf{b}_i^a\right)\Delta t-\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ik}\cdot\left(\frac{\partial\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ik}}{\partial\mathbf{b}^g}\delta\mathbf{b}_i^g\right)^{\wedge}\delta\mathbf{b}_i^a\Delta t\right] \\
&\approx \Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij}+\sum_{k=i}^{j-1}\left\{-\left(\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ik}\Delta t\right)\delta\mathbf{b}_i^a-\left[\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ik}\cdot\left(\tilde{\mathbf{f}}_k-\mathbf{b}_i^a\right)^{\wedge}\frac{\partial\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ik}}{\partial\mathbf{b}^g}\Delta t\right]\delta\mathbf{b}_i^g\right\}
\end{aligned}
\tag{47}
$$

所以：

$$
\frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^g}=-\sum_{k=i}^{j-1}\left(\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ik}\cdot\left(\tilde{\mathbf{f}}_k-\mathbf{b}_i^a\right)^{\wedge}\frac{\partial\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ik}}{\partial\mathbf{b}^g}\Delta t\right) \tag{48}
$$

$$
\frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^a}=-\sum_{k=i}^{j-1}\left(\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ik}\Delta t\right) \tag{49}
$$

$$
\Delta\bar{\tilde{\mathbf{v}}}_{ij}=\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij}+\frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^g}\delta\mathbf{b}_i^g+\frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^a}\delta\mathbf{b}_i^a \tag{50}
$$

进一步推导：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^g} &= -\sum_{k=i}^{j-1}\left(\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ik}\cdot\left(\tilde{\mathbf{f}}_k-\mathbf{b}_i^a\right)^{\wedge}\frac{\partial\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ik}}{\partial\mathbf{b}^g}\Delta t\right) \\
&= \frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij-1}}{\partial\mathbf{b}^g}-\left(\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ij-1}\cdot\left(\tilde{\mathbf{f}}_{j-1}-\mathbf{b}_i^a\right)^{\wedge}\frac{\partial\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ij-1}}{\partial\mathbf{b}^g}\Delta t\right)
\end{aligned}
\tag{51}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^a} &= -\sum_{k=i}^{j-1}\left(\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ik}\Delta t\right) \\
&= \frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij-1}}{\partial\mathbf{b}^a}-\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ij-1}\Delta t
\end{aligned}
\tag{52}
$$

3.5.3 对于$\Delta\bar{\tilde{\mathbf{p}}}_{ij}$项

$$
\begin{aligned}
\Delta\bar{\tilde{\mathbf{p}}}_{ij} &\triangleq \sum_{k=i}^{j-1}\left[\Delta\bar{\tilde{\mathbf{v}}}_{ik}\Delta t+\frac{1}{2}\Delta\bar{\widetilde{\mathbf{R}}}_{ik}\cdot\left(\tilde{\mathbf{f}}_k-(\mathbf{b}_i^a+\delta\mathbf{b}_i^a)\right)\Delta t^2\right] \\
= \sum_{k=i}^{j-1}[&\underbrace{\left(\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ik}+\frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ik}}{\partial\mathbf{b}^g}\delta\mathbf{b}_i^g+\frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ik}}{\partial\mathbf{b}^a}\delta\mathbf{b}_i^a\right)\Delta t}_{(1)}+\underbrace{\frac{1}{2}\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ik}\cdot\operatorname{Exp}\left(\frac{\partial\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ik}}{\partial\mathbf{b}^g}\delta\mathbf{b}_i^g\right)\cdot\left(\tilde{\mathbf{f}}_k-(\mathbf{b}_i^a+\delta\mathbf{b}_i^a)\right)\Delta t^2]}_{(2)}
\end{aligned}
\tag{53}
$$

对于（1）直接带入之前的结果；

对于（2）：

$$
\begin{aligned}
(2)\ &\approx \frac{\Delta t^2}{2}\sum_{\substack{k=i\\j-1}}^{j-1}\left[\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ik}\cdot\left(\mathbf{I}+\left(\frac{\partial\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ik}}{\partial\mathbf{b}^g}\delta\mathbf{b}_i^g\right)^{\wedge}\right)\cdot\left(\tilde{\mathbf{f}}_k-\mathbf{b}_i^a-\delta\mathbf{b}_i^a\right)\right] \\
&\approx \frac{\Delta t^2}{2}\sum_{k=i}^{j-1}\left[\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ik}\cdot\left(\tilde{\mathbf{f}}_k-\mathbf{b}_i^a\right)-\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ik}\delta\mathbf{b}_i^a-\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ik}\cdot\left(\tilde{\mathbf{f}}_k-\mathbf{b}_i^a\right)^{\wedge}\frac{\partial\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ik}}{\partial\mathbf{b}^g}\delta\mathbf{b}_i^g\right]
\end{aligned}
\tag{54}
$$

最后有：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{p}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^g} &= \sum_{k=i}^{j-1}\left[\frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ik}}{\partial\mathbf{b}^g}\Delta t-\frac{1}{2}\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ik}\cdot\left(\tilde{\mathbf{f}}_k-\mathbf{b}_i^a\right)^{\wedge}\frac{\partial\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ik}}{\partial\mathbf{b}^g}\Delta t^2\right] \\
&= \frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{p}}_{ij-1}}{\partial\mathbf{b}^g}+\left[\frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij-1}}{\partial\mathbf{b}^g}\Delta t-\frac{1}{2}\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ij-1}\cdot\left(\tilde{\mathbf{f}}_{j-1}-\mathbf{b}_i^a\right)^{\wedge}\frac{\partial\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ij-1}}{\partial\mathbf{b}^g}\Delta t^2\right]
\end{aligned}
\tag{55}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{p}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^a} &= \sum_{k=i}^{j-1}\left[\frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ik}}{\partial\mathbf{b}^a}\Delta t-\frac{1}{2}\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ik}\Delta t^2\right] \\
&= \frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{p}}_{ij-1}}{\partial\mathbf{b}^a}+\left(\frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij-1}}{\partial\mathbf{b}^a}\Delta t-\frac{1}{2}\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ij-1}\Delta t^2\right)
\end{aligned}
\tag{56}
$$

3.6 求残差关于状态量的雅可比

3.6.1 定义残差

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{\Delta\vec{\phi}_{ij}} &\triangleq \log\left[\left(\Delta\overline{\widetilde{\mathbf{R}}}_{ij}\right)^T \Delta\mathbf{R}_{ij}\right] \\ &= \log\left[\left(\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ij} \cdot \operatorname{Exp}\left(\frac{\partial\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^g}\delta\mathbf{b}_i^g\right)\right)^T \mathbf{R}_{wi}^T\mathbf{R}_{wj}\right]\end{aligned} \tag{57}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{\Delta v_{ij}} &\triangleq \Delta\mathbf{v}_{ij} - \Delta\overline{\tilde{\mathbf{v}}}_{ij} \\ &= \mathbf{R}_{wi}^T(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i - \mathbf{g}\cdot\Delta t_{ij}) - \left(\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij} + \frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^g}\delta\mathbf{b}_i^g + \frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^a}\delta\mathbf{b}_i^a\right)\end{aligned} \tag{58}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{p}_{ij}} &\triangleq \Delta\mathbf{p}_{ij} - \Delta\overline{\tilde{\mathbf{p}}}_{ij} \\ &= \mathbf{R}_{wi}^T\left(\mathbf{p}_{wj} - \mathbf{p}_{wi} - \mathbf{v}_i\cdot\Delta t_{ij} - \frac{1}{2}\mathbf{g}\cdot\Delta t_{ij}^2\right) - \left(\Delta\tilde{\mathbf{p}}_{ij} + \frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{p}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^g}\delta\mathbf{b}_i^g + \frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{p}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^a}\delta\mathbf{b}_i^a\right)\end{aligned} \tag{59}$$

3.6.2 定义扰动

$$\begin{aligned}&\mathbf{R}_{wi} \leftarrow \mathbf{R}_{wi}\cdot\operatorname{Exp}\left(\delta\vec{\phi}_i\right) \\ &\mathbf{p}_{wi} \leftarrow \mathbf{p}_{wi} + \mathbf{R}_{wi}\cdot\delta\mathbf{p}_i \\ &\mathbf{v}_i \leftarrow \mathbf{v}_i + \delta\mathbf{v}_i \\ &\delta\mathbf{b}_i^g \leftarrow \delta\mathbf{b}_i^g + \delta\tilde{\mathbf{b}}_i^g \\ &\delta\mathbf{b}_i^a \leftarrow \delta\mathbf{b}_i^a + \delta\tilde{\mathbf{b}}_i^a \\ &\mathbf{R}_{wj} \leftarrow \mathbf{R}_{wj}\cdot\operatorname{Exp}\left(\delta\vec{\phi}_j\right) \\ &\mathbf{p}_{wj} \leftarrow \mathbf{p}_{wj} + \mathbf{R}_{wj}\cdot\delta\mathbf{p}_j \\ &\mathbf{v}_j \leftarrow \mathbf{v}_j + \delta\mathbf{v}_j\end{aligned} \tag{60}$$

其中值得关注的有$\mathbf{p}_{wi} \leftarrow \mathbf{p}_{wi} + \mathbf{R}_{wi}\cdot\delta\mathbf{p}_i$，设定位姿矩阵

$$\mathbf{T}_{wi} = \begin{bmatrix}\mathbf{R}_{wi} & \mathbf{p}_{wi} \\ 0 & 1\end{bmatrix} \tag{61}$$

给一个右扰动

$$\delta\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix}\delta\mathbf{R}_i & \delta\mathbf{p}_i \\ 0 & 1\end{bmatrix} \tag{62}$$

$$\mathbf{T}_{wi}\cdot\delta\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix}\mathbf{R}_{wi} & \mathbf{p}_{wi} \\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta\mathbf{R}_i & \delta\mathbf{p}_i \\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{R}_{wi}\delta\mathbf{R}_i & \mathbf{p}_{wi} + \mathbf{R}_{wi}\delta\mathbf{p}_i \\ 0 & 1\end{bmatrix} \tag{63}$$

3.6.3 残差对于状态的雅可比

3.6.3.1 旋转残差

对于：

$$\mathbf{r}_{\Delta\vec{\phi}_{ij}} = \log\left[\left(\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ij}\cdot\operatorname{Exp}\left(\frac{\partial\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^g}\delta\mathbf{b}_i^g\right)\right)^T\mathbf{R}_{wi}^T\mathbf{R}_{wj}\right] \tag{64}$$

其中不包含$\mathbf{p}_{wi}$， $\mathbf{p}_{wj}$， $\mathbf{v}_i$， $\mathbf{v}_j$以及$\delta\mathbf{b}_i^a$,因此关于这些状态的雅可比矩阵都是 $\mathbf{0}$

下面分别推一下对于其他状态量的雅可比：

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{\Delta\vec{\phi}_{ij}}\left(\mathbf{R}_{wi}\operatorname{Exp}\left(\delta\vec{\phi}_i\right)\right) &= \log\left[\left(\Delta\overline{\widetilde{\mathbf{R}}}_{ij}\right)^T\left(\mathbf{R}_{wi}\operatorname{Exp}\left(\delta\vec{\phi}_i\right)\right)^T\mathbf{R}_{wj}\right] \\ &\overset{(1)}{=} \log\left[\left(\Delta\overline{\widetilde{\mathbf{R}}}_{ij}\right)^T\operatorname{Exp}\left(-\delta\vec{\phi}_i\right)\mathbf{R}_{wi}^T\mathbf{R}_{wj}\right] \\ &\overset{(2)}{=} \log\left[\left(\Delta\overline{\widetilde{\mathbf{R}}}_{ij}\right)^T\mathbf{R}_{wi}^T\mathbf{R}_{wj}\operatorname{Exp}\left(-\mathbf{R}_{wj}^T\mathbf{R}_{wi}\delta\vec{\phi}_i\right)\right] \\ &= \log\left\{\operatorname{Exp}\left[\log\left(\left(\Delta\overline{\widetilde{\mathbf{R}}}_{ij}\right)^T\mathbf{R}_{wi}^T\mathbf{R}_{wj}\right)\right]\cdot\operatorname{Exp}\left(-\mathbf{R}_{wj}^T\mathbf{R}_{wi}\delta\vec{\phi}_i\right)\right\} \\ &= \log\left[\operatorname{Exp}\left(\mathbf{r}_{\Delta\vec{\phi}_{ij}}\right)\cdot\operatorname{Exp}\left(-\mathbf{R}_{wj}^T\mathbf{R}_{wi}\delta\vec{\phi}_i\right)\right] \\ &\approx \mathbf{r}_{\Delta\vec{\phi}_{ij}} - \mathbf{J}_r^{-1}\left(\mathbf{r}_{\Delta\vec{\phi}_{ij}}\right)\mathbf{R}_{wj}^T\mathbf{R}_{wi}\delta\vec{\phi}_i\end{aligned} \tag{65}$$

得出：

$$\frac{\partial\mathbf{r}_{\Delta\vec{\phi}_{ij}}}{\partial\delta\vec{\phi}_i} = -\mathbf{J}_r^{-1}\left(\mathbf{r}_{\Delta\vec{\phi}_{ij}}\right)\mathbf{R}_{wj}^T\mathbf{R}_{wi} \tag{66}$$

对于$\mathbf{R}_{wj}$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}_{\Delta\vec{\phi}_{ij}}\left(\mathbf{R}_{wj}\operatorname{Exp}\left(\delta\vec{\phi}_j\right)\right) =&\log\left[\left(\Delta\overline{\widetilde{\mathbf{R}}}_{ij}\right)^T\mathbf{R}_{wi}^T\mathbf{R}_{wj}\operatorname{Exp}\left(\delta\vec{\phi}_j\right)\right] \\
=&\log\left\{\operatorname{Exp}\left[\log\left(\left(\Delta\overline{\widetilde{\mathbf{R}}}_{ij}\right)^T\mathbf{R}_{wi}^T\mathbf{R}_{wj}\right)\right]\cdot\operatorname{Exp}\left(\delta\vec{\phi}_j\right)\right\} \\
=&\log\left\{\operatorname{Exp}\left(\mathbf{r}_{\Delta\vec{\phi}_{ij}}\right)\cdot\operatorname{Exp}\left(\delta\vec{\phi}_j\right)\right\} \\
\approx&\mathbf{r}_{\Delta\vec{\phi}_{ij}}+\mathbf{J}_r^{-1}\left(\mathbf{r}_{\Delta\vec{\phi}_{ij}}\right)\delta\vec{\phi}_j \\
\frac{\partial\mathbf{r}_{\Delta\vec{\phi}_{ij}}}{\partial\delta\vec{\phi}_j} =& \mathbf{J}_r^{-1}\left(\mathbf{r}_{\Delta\vec{\phi}_{ij}}\right)
\end{aligned}
\tag{67}
$$

对于$\delta\mathbf{b}_i^g$

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{r}_{\Delta\vec{\phi}_{ij}}\left(\delta\mathbf{b}_i^g+\delta\tilde{\mathbf{b}}_i^g\right) \\
&=\log\left\{\left[\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ij}\cdot\operatorname{Exp}\left(\frac{\partial\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^g}\left(\delta\mathbf{b}_i^g+\delta\tilde{\mathbf{b}}_i^g\right)\right)\right]^T\mathbf{R}_{wi}^T\mathbf{R}_{wj}\right\} \\
&\overset{(1)}{\approx}\log\left\{\left[\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ij}\cdot\operatorname{Exp}\left(\frac{\partial\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^g}\delta\mathbf{b}_i^g\right)\operatorname{Exp}\left(\mathbf{J}_r\left(\frac{\partial\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^g}\delta\mathbf{b}_i^g\right)\frac{\partial\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^g}\delta\tilde{\mathbf{b}}_i^g\right)\right]^T\mathbf{R}_{wi}^T\mathbf{R}_{wj}\right\} \\
&\overset{(2)}{=}\log\left\{\left[\Delta\overline{\widetilde{\mathbf{R}}}_{ij}\cdot\operatorname{Exp}\left(\mathbf{J}_r\cdot\frac{\partial\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^g}\delta\tilde{\mathbf{b}}_i^g\right)\right]^T\Delta\mathbf{R}_{ij}\right\} \\
&\overset{(3)}{=}\log\left[\operatorname{Exp}\left(-\mathbf{J}_r\cdot\frac{\partial\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^g}\delta\tilde{\mathbf{b}}_i^g\right)\Delta\overline{\widetilde{\mathbf{R}}}_{ij}^T\Delta\mathbf{R}_{ij}\right] \\
&=\log\left[\operatorname{Exp}\left(-\mathbf{J}_r\cdot\frac{\partial\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^g}\delta\tilde{\mathbf{b}}_i^g\right)\operatorname{Exp}\left(\log\left(\Delta\overline{\widetilde{\mathbf{R}}}_{ij}^T\Delta\mathbf{R}_{ij}\right)\right)\right] \\
&=\log\left[\operatorname{Exp}\left(-\mathbf{J}_r\cdot\frac{\partial\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^g}\delta\tilde{\mathbf{b}}_i^g\right)\operatorname{Exp}\left(\mathbf{r}_{\Delta\vec{\phi}_{ij}}\left(\delta\mathbf{b}_i^g\right)\right)\right] \\
&\overset{(4)}{=}\log\left\{\operatorname{Exp}\left(\mathbf{r}_{\Delta\vec{\phi}_{ij}}\left(\delta\mathbf{b}_i^g\right)\right)\cdot\operatorname{Exp}\left[-\operatorname{Exp}\left(-\mathbf{r}_{\Delta\vec{\phi}_{ij}}\left(\delta\mathbf{b}_i^g\right)\right)\cdot\mathbf{J}_r\cdot\frac{\partial\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^g}\delta\tilde{\mathbf{b}}_i^g\right]\right\} \\
&\approx\mathbf{r}_{\Delta\vec{\phi}_{ij}}\left(\delta\mathbf{b}_i^g\right)-\mathbf{J}_r^{-1}\left(\mathbf{r}_{\Delta\vec{\phi}_{ij}}\left(\delta\mathbf{b}_i^g\right)\right)\cdot\operatorname{Exp}\left(-\mathbf{r}_{\Delta\vec{\phi}_{ij}}\left(\delta\mathbf{b}_i^g\right)\right)\cdot\mathbf{J}_r\cdot\frac{\partial\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^g}\delta\tilde{\mathbf{b}}_i^g \\
&\overset{(6)}{=}\mathbf{r}_{\Delta\vec{\phi}_{ij}}-\mathbf{J}_r^{-1}\left(\mathbf{r}_{\Delta\vec{\phi}_{ij}}\right)\cdot\operatorname{Exp}\left(-\mathbf{r}_{\Delta\vec{\phi}_{ij}}\right)\cdot\mathbf{J}_r\left(\frac{\partial\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^g}\delta\mathbf{b}_i^g\right)\cdot\frac{\partial\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^g}\cdot\delta\tilde{\mathbf{b}}_i^g \\
&\quad\frac{\partial\mathbf{r}_{\Delta\vec{\varphi}_{ij}}}{\partial\delta\tilde{\mathbf{b}}_i^g}=-\mathbf{J}_r^{-1}\left(\mathbf{r}_{\Delta\vec{\phi}_{ij}}\right)\cdot\operatorname{Exp}\left(-\mathbf{r}_{\Delta\vec{\phi}_{ij}}\right)\cdot\mathbf{J}_r\left(\frac{\partial\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^g}\delta\mathbf{b}_i^g\right)\cdot\frac{\partial\Delta\widetilde{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^g}
\end{aligned}
\tag{68}
$$

3.6.3.2 速度残差

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{v}_{ij}} &\triangleq \Delta\mathbf{v}_{ij}-\Delta\overline{\tilde{\mathbf{v}}}_{ij} \\
&=\mathbf{R}_{wi}^T\left(\mathbf{v}_j-\mathbf{v}_i-\mathbf{g}\cdot\Delta t_{ij}\right)-\left(\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij}+\frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^g}\delta\mathbf{b}_i^g+\frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^a}\delta\mathbf{b}_i^a\right)
\end{aligned}
\tag{69}
$$

其中不包含$\mathbf{p}_{wi}$， $\mathbf{p}_{wj}$， $\mathbf{R}_{wj}$，因此关于这些状态的雅可比矩阵都是$\mathbf{0}$

关于$\delta\mathbf{b}_i^g$， $\delta\mathbf{b}_i^a$可以直接得出结论

$$
\frac{\partial\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{v}_{ij}}}{\partial\delta\tilde{\mathbf{b}}_i^g}=-\frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^g} \tag{70}
$$

$$
\frac{\partial\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{v}_{ij}}}{\partial\delta\tilde{\mathbf{b}}_i^a}=-\frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^a} \tag{71}
$$

关于$\mathbf{v}_i$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{v}_{ij}}\left(\mathbf{v}_i+\delta\mathbf{v}_i\right) &= \mathbf{R}_{wi}^T\left(\mathbf{v}_j-\mathbf{v}_i-\delta\mathbf{v}_i-\mathbf{g}\cdot\Delta t_{ij}\right)-\left(\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij}+\frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^g}\delta\mathbf{b}_i^g+\frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^a}\delta\mathbf{b}_i^a\right) \\
&=\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{v}_{ij}}\left(\mathbf{v}_i\right)-\mathbf{R}_{wi}^T\delta\mathbf{v}_i
\end{aligned}
\tag{72}
$$

得出:

$$
\frac{\partial\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{v}_{ij}}}{\partial\delta\mathbf{v}_i}=-\mathbf{R}_{wi}^T \tag{73}
$$

关于$\mathbf{v}_j$

$$
\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{v}_{ij}}\left(\mathbf{v}_j+\delta\mathbf{v}_j\right) = \mathbf{R}_{wi}^T\left(\mathbf{v}_j+\delta\mathbf{v}_j-\mathbf{v}_i-\mathbf{g}\cdot\Delta t_{ij}\right)-\left(\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij}+\frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^g}\delta\mathbf{b}_i^g+\frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^a}\delta\mathbf{b}_i^a\right) \tag{74}
$$

$$
=\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{v}_{ij}}\left(\mathbf{v}_i\right)+\mathbf{R}_{wi}^T\delta\mathbf{v}_j \tag{75}
$$

得出:

$$\frac{\partial \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{v}_{ij}}}{\partial \delta \mathbf{v}_i} = \mathbf{R}_{wi}^T \tag{76}$$

关于$\mathbf{R}_{wi}$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{r}_{\Delta \mathbf{v}_{ij}}\left(\mathbf{R}_{wi} \operatorname{Exp}\left(\delta \vec{\phi}_i\right)\right) \\
&= \left(\mathbf{R}_{wi} \operatorname{Exp}\left(\delta \vec{\phi}_i\right)\right)^T \left(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i - \mathbf{g} \cdot \Delta t_{ij}\right) - \Delta \bar{\tilde{\mathbf{v}}}_{ij} \\
&\overset{(1)}{=} \operatorname{Exp}\left(-\delta \vec{\phi}_i\right) \cdot \mathbf{R}_{wi}^T \cdot \left(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i - \mathbf{g} \cdot \Delta t_{ij}\right) - \Delta \bar{\tilde{\mathbf{v}}}_{ij} \\
&\approx \left(\mathbf{I} - \left(\delta \vec{\phi}_i\right)^{\wedge}\right) \cdot \mathbf{R}_{wi}^T \cdot \left(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i - \mathbf{g} \cdot \Delta t_{ij}\right) - \Delta \bar{\tilde{\mathbf{v}}}_{ij} \\
&= \mathbf{R}_{wi}^T \cdot \left(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i - \mathbf{g} \cdot \Delta t_{ij}\right) - \Delta \bar{\tilde{\mathbf{v}}}_{ij} - \left(\delta \vec{\phi}_i\right)^{\wedge} \cdot \mathbf{R}_{wi}^T \cdot \left(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i - \mathbf{g} \cdot \Delta t_{ij}\right) \\
&\overset{(2)}{=} \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{v}_{ij}}\left(\mathbf{R}_{wi}\right) + \left[\mathbf{R}_{wi}^T \cdot \left(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i - \mathbf{g} \cdot \Delta t_{ij}\right)\right]^{\wedge} \cdot \delta \vec{\phi}_i
\end{aligned} \tag{77}$$

得出:

$$\frac{\partial \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{v}_{ij}}}{\partial \delta \vec{\phi}_i} = \left[\mathbf{R}_{wi}^T \cdot \left(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i - \mathbf{g} \cdot \Delta t_{ij}\right)\right]^{\wedge} \tag{78}$$

3.6.3.2 位置残差

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_{\Delta \mathbf{p}_{ij}} &\triangleq \Delta \mathbf{p}_{ij} - \Delta \overline{\mathbf{p}}_{ij} \\
&= \mathbf{R}_{wi}^T \left(\mathbf{p}_{wj} - \mathbf{p}_{wi} - \mathbf{v}_i \cdot \Delta t_{ij} - \frac{1}{2} \mathbf{g} \cdot \Delta t_{ij}^2\right) - \left(\Delta \widetilde{\mathbf{p}}_{ij} + \frac{\partial \Delta \widetilde{\mathbf{p}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}^g} \delta \mathbf{b}_i^g + \frac{\partial \Delta \widetilde{\mathbf{p}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}^a} \delta \mathbf{b}_i^a\right)
\end{aligned} \tag{79}$$

其中不包含$\mathbf{v}_j$, $\mathbf{R}_{wj}$，因此关于这些状态的雅可比矩阵都是$\mathbf{0}$

关于$\delta \mathbf{b}_i^g$, $\delta \mathbf{b}_i^a$可以直接得出结论

$$\frac{\partial \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{p}_{ij}}}{\partial \delta \tilde{\mathbf{b}}_i^g} = -\frac{\partial \Delta \widetilde{\mathbf{p}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}^g} \tag{80}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{p}_{ij}}}{\partial \delta \tilde{\mathbf{b}}_i^a} = -\frac{\partial \Delta \widetilde{\mathbf{p}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}^a} \tag{81}$$

关于$\mathbf{p}_{wj}$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{r}_{\Delta \mathbf{p}_{ij}}\left(\mathbf{p}_{wj} + \mathbf{R}_{wj} \cdot \delta \mathbf{p}_j\right) \\
&\quad = \mathbf{R}_{wi}^T \left(\mathbf{p}_{wj} + \mathbf{R}_{wj} \cdot \delta \mathbf{p}_j - \mathbf{p}_{wi} - \mathbf{v}_i \cdot \Delta t_{ij} - \frac{1}{2} \mathbf{g} \cdot \Delta t_{ij}^2\right) - \Delta \overline{\mathbf{p}}_{ij} \\
&= \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{p}_{ij}}\left(\mathbf{p}_{wj}\right) + \mathbf{R}_{wi}^T \mathbf{R}_{wj} \cdot \delta \mathbf{p}_j
\end{aligned} \tag{82}$$

得出:

$$\frac{\partial \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{p}_{ij}}}{\partial \delta \mathbf{p}_j} = \mathbf{R}_{wi}^T \mathbf{R}_{wj} \tag{83}$$

关于$\mathbf{p}_{\mathrm{wi}}$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{r}_{\Delta \mathbf{p}_{ij}}\left(\mathbf{p}_{wi} + \mathbf{R}_{wi} \cdot \delta \mathbf{p}_i\right) \\
&\quad = \mathbf{R}_{wi}^T \left(\mathbf{p}_{wj} - \mathbf{p}_{wi} - \mathbf{R}_{wi} \cdot \delta \mathbf{p}_i - \mathbf{v}_i \cdot \Delta t_{ij} - \frac{1}{2} \mathbf{g} \cdot \Delta t_{ij}^2\right) - \Delta \overline{\mathbf{p}}_{ij} \\
&= \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{p}_{ij}}\left(\mathbf{p}_{wi}\right) - \mathbf{I} \cdot \delta \mathbf{p}_i
\end{aligned} \tag{84}$$

得出:

$$\frac{\partial \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{p}_{ij}}}{\partial \delta \mathbf{p}_i} = -\mathbf{I} \tag{85}$$

关于$\mathbf{v}_i$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_{\Delta \mathbf{p}_{ij}}\left(\mathbf{v}_i + \delta \mathbf{v}_i\right) &= \mathbf{R}_{wi}^T \left(\mathbf{p}_{wj} - \mathbf{p}_{wi} - \mathbf{v}_i \cdot \Delta t_{ij} - \delta \mathbf{v}_i \cdot \Delta t_{ij} - \frac{1}{2} \mathbf{g} \cdot \Delta t_{ij}^2\right) - \Delta \overline{\widetilde{\mathbf{p}}}_{ij} \\
&= \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{p}_{ij}}\left(\mathbf{p}_{wj}\right) - \mathbf{R}_{wi}^T \Delta t_{ij} \cdot \delta \mathbf{v}_i
\end{aligned} \tag{86}$$

得出:

$$\frac{\partial \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{p}_{ij}}}{\partial \delta \mathbf{v}_i} = -\mathbf{R}_{wi}^T \Delta t_{ij} \tag{87}$$

关于$\mathbf{R}_{wi}$

$$\mathbf{r}_{\Delta \mathbf{v}_{ij}}\left(\mathbf{R}_{wi} \operatorname{Exp}\left(\delta \vec{\phi}_i\right)\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\mathbf{R}_{wi} \operatorname{Exp}\left(\delta\vec{\phi}_i\right)\right)^T \left(\mathbf{p}_{wj} - \mathbf{p}_{wi} - \mathbf{v}_i \cdot \Delta t_{ij} - \frac{1}{2}\mathbf{g} \cdot \Delta t_{ij}^2\right) - \Delta\overline{\widetilde{\mathbf{p}}}_{ij} \\
&\overset{(1)}{=} \operatorname{Exp}\left(-\delta\vec{\phi}_i\right) \cdot \mathbf{R}_{wi}^T \cdot \left(\mathbf{p}_{wj} - \mathbf{p}_{wi} - \mathbf{v}_i \cdot \Delta t_{ij} - \frac{1}{2}\mathbf{g} \cdot \Delta t_{ij}^2\right) - \Delta\overline{\widetilde{\mathbf{p}}}_{ij} \\
&\overset{(2)}{\approx} \left(\mathbf{I} - \left(\delta\vec{\phi}_i\right)^\wedge\right) \cdot \mathbf{R}_{wi}^T \cdot \left(\mathbf{p}_{wj} - \mathbf{p}_{wi} - \mathbf{v}_i \cdot \Delta t_{ij} - \frac{1}{2}\mathbf{g} \cdot \Delta t_{ij}^2\right) - \Delta\overline{\widetilde{\mathbf{p}}}_{ij} \\
&= \mathbf{R}_{wi}^T \cdot \left(\mathbf{p}_{wj} - \mathbf{p}_{wi} - \mathbf{v}_i \cdot \Delta t_{ij} - \frac{1}{2}\mathbf{g} \cdot \Delta t_{ij}^2\right) - \Delta\overline{\widetilde{\mathbf{p}}}_{ij} - \left(\delta\vec{\phi}_i\right)^\wedge \mathbf{R}_{wi}^T \\
&\cdot \left(\mathbf{p}_{wj} - \mathbf{p}_{wi} - \mathbf{v}_i \cdot \Delta t_{ij} - \frac{1}{2}\mathbf{g} \cdot \Delta t_{ij}^2\right) \\
&\overset{(3)}{=} \mathbf{r}_{\Delta\mathbf{p}_{ij}} + \left[\mathbf{R}_{wi}^T \cdot \left(\mathbf{p}_{wj} - \mathbf{p}_{wi} - \mathbf{v}_i \cdot \Delta t_{ij} - \frac{1}{2}\mathbf{g} \cdot \Delta t_{ij}^2\right)\right]^\wedge \cdot \delta\vec{\phi}_i
\end{aligned} \tag{88}
$$