

## 复杂势场量子子弹球中疤痕态的量子化条件

李晓亮 陈宪章 刘郴荣 黄亮

Quantization condition of scarring states in complex soft-wall quantum billiards

Li Xiao-Liang Chen Xian-Zhang Liu Chen-Rong Huang Liang

引用信息 Citation: [Acta Physica Sinica](#), 69, 080506 (2020) DOI: 10.7498/aps.69.20200360

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.69.20200360>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

二维方形量子点体系等离激元的量子化

Quantization of plasmon in two-dimensional square quantum dot system

物理学报. 2017, 66(22): 227301 <https://doi.org/10.7498/aps.66.227301>

耗散耦合腔阵列耦合量子化腔场驱动三能级体系中的单光子输运

Single photon transport by a quantized cavity field driven cascade-type three-level atom in a dissipative coupled cavity array

物理学报. 2017, 66(5): 054204 <https://doi.org/10.7498/aps.66.054204>

复杂氧化物中电子相分离的量子调控

Quantum manipulation of electronic phase separation in complex oxides

物理学报. 2018, 67(22): 227502 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20182007>

量子计算与量子模拟

Quantum computation and quantum simulation

物理学报. 2018, 67(12): 120301 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180710>

量子相干

Quantum coherence

物理学报. 2019, 68(3): 030304 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20181779>

# 复杂势场量子子弹球中疤痕态的量子化条件<sup>\*</sup>

李晓亮 陈宪章 刘郴荣 黄亮<sup>†</sup>

(兰州大学物理科学与技术学院, 兰州 730000)

量子疤痕是波函数在经典不稳定周期轨道周围反常凝聚的一种量子或波动现象。人们对疤痕态的量子化条件进行了大量研究, 对于深入理解半经典量子化起到了一定的促进作用。之前大部分研究工作主要集中在硬墙量子子弹球上, 即给定边界形状的无穷深量子势阱系统。在此我们研究具有光滑复杂势场的二维量子子弹球系统, 考察疤痕态的量子化条件及其重复出现的规律, 得到了与硬墙子弹球不一样的结果, 对理解这类现象是一个有益的补充。这些结果将有助于理解具有无规长程杂质分布的二维电子系统的态密度谱和输运行为。

**关键词:** 量子疤痕, 软墙量子子弹球, 复杂势场量子子弹球, 量子化条件

**PACS:** 05.45.Mt, 03.65.Sq

## 1 背景

经典量子对应是量子力学一个重要的基本问题。从玻尔的旧量子论, 到量子力学的建立, 一直到近代对量子力学基本原理的探讨, 都离不开这个问题。众所周知, 对于经典系统, 有可积和不可积之分, 而对于实际系统来说, 绝大多数都是不可积的。可积系统可以通过玻尔–索末菲量子化规则或后来发展的Einstein-Brillouin-Keller (EBK) 量子化条件<sup>[1]</sup> 来量子化, 得到对应量子系统的能级。而不可积的系统由于没有整体的作用量–角变量这些对偶量, 不能简单的应用量子化规则<sup>[2, 3]</sup>。到上世纪六七十年代, 随着原子核物理、随机矩阵理论、经典混沌的发展, 人们重新考察经典不可积系统的量子化问题, 得到了系列结

---

\* 国家自然科学基金(批准号: 11775101).

† 通信作者. E-mail: huangl@lzu.edu.cn

果，特别是 Gutzwiller 的求迹公式<sup>[4]</sup>，发现对于对应经典动力学为混沌的量子系统，虽然经典不稳定周期轨道的测度是零，但是这些轨道却决定了该量子系统能谱的涨落特征。其中一类重要的模型是二维硬墙（hard-wall）量子弹球<sup>[5, 6, 7, 8]</sup>，即二维无限深势阱，其经典极限对应着动力学弹球——粒子在其中做自由运动，在边界处发生镜像反射。系统的动力学行为完全由边界形状决定。当边界不规则时，粒子的经典动力学行为往往是混沌的。对于量子弹球系统，其方程为单粒子薛定谔方程。由于这一方程为线性方程，排除了混沌发生的可能，因此，在半经典极限下如何发展出混沌就成了一个非常引人入胜的问题。此外，当改变边界使得经典动力学是可积或混沌时，所对应的量子系统有没有什么特征？有没有什么量子系统的指标可以明确说明其所对应经典动力学是否混沌？对这些问题的研究构成了量子混沌学，简称为量子混沌<sup>[9]</sup>。经过半个多世纪的研究，在很多方面，如波函数统计特征、能谱统计、量子混沌散射、量子保真度、动力学演化特征等，人们都得到了深入的理解<sup>[5, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15]</sup>。注意在讲可积或混沌时，均指的经典系统，或量子系统在经典极限下的行为。

“量子疤痕”作为量子波函数在经典不稳定轨道上的反常凝聚，是量子世界对经典轨道的一个敏锐的反常响应<sup>[16, 17, 18]</sup>。轨道为经典的概念，波函数为量子的概念，在一些情况下，量子波函数在空间中会凝聚在经典的周期轨道上，即粒子在这些经典轨道附近的概率要远大于其他地方。对于经典混沌系统，如运动场形或其他具有特定边界形状的弹球系统，由于其周期轨道的不稳定性，周期轨在相空间的测度为零，粒子保持在该轨道上运动的概率是零；但对于量子系统，在某些能级下，粒子反而会以很大的概率“凝聚”在这些轨道上，这一违反直观的现象就是量子疤痕。当然，对于经典可积系统或混合动力系统（即相空间中既有混沌海又有稳定轨道所形成的Kolmogorov – Arnold – Moser (KAM)岛），对应量子系统的本征波函数在稳定轨道上也有很强的凝聚，而且比混沌轨道上的凝聚更强，但由于在经典情形下粒子就能够自然的在这一轨道上运动，所以并不奇怪。量子疤痕作为联系经典轨道和量子现象的纽带，受到了人们的广泛关注，并给出了半经典的解释，即量子波函数在该轨道上传播时相位的相干叠加产生的加强效应<sup>[19, 20, 21, 22]</sup>。

之前关于量子疤痕的研究主要集中在硬墙量子弹球里，关于软墙（soft-wall）量子弹球的研究相对较少。软墙（soft-wall）和硬墙的主要区别在于弹球边界上的势场是光滑渐变的还是不连续的阶梯势。在此，我们将主要研究软墙量子弹球系统以及更加广泛的具有复杂光滑势场弹球系统的疤痕态及其所满足的量子化条件。软墙会对经典动力学带来重要的影响。已经发现，即使对于经典可积的椭圆形硬墙弹球，当边界足够软时，系统变为混合型的，在相空间中 KAM 岛周围出现了混沌海<sup>[23]</sup>。在软墙量子弹球方面，

Räsänen 等人研究了二维异向谐振子<sup>[24, 25, 26, 27]</sup>，在加入很多短程杂质破坏系统的可分离性后，发现了与经典李萨如图形一致的李萨如疤痕态。他们的工作详细讨论了频率比作为主要参数对系统行为的影响，认为李萨如疤痕态的出现是量子力学对经典混沌的抑制作用，但并没有讨论半经典量子化的条件。我们将主要讨论疤痕态的半经典量子化条件，并考虑更加复杂的光滑势场所带来的影响。一般来讲，疤痕态指凝聚在经典**不稳定**周期轨道上的波函数。在此，由于我们主要关心在这些轨道上波函数半经典量子化的条件，我们将对稳定和不稳定轨道都做处理，来考察他们半经典量子化的条件。

疤痕态出现的必要条件与 EBK 量子化条件类似，即从一点出发，沿轨道行进一周，所累积的总的相位是  $2\pi$  的整数倍，以保证波函数的单值性和加强相干叠加<sup>[14, 28]</sup>。只是对于较复杂的情况，沿轨道行进时的相位贡献来源比较复杂。关于相位的计算，对于硬墙二维量子弹球，人们已经比较清楚，主要有在弹球区域内的自由运动项，即  $\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q}$  项，以及在边界处的反射系数项和 Maslov 指数项；而对于二维光滑约束势场（软墙）中的量子弹球，据我们所知，由于所处理的情形的复杂性，详细的疤痕态出现时能量所满足的量子化条件以及疤痕态重复出现的规律还没有给出。虽然半经典量子化条件可以精确求出量子谐振子的本征能量，但对于一般的系统，比如受扰动的谐振子，半经典量子化条件只在较高能级时才适用，可以近似给出疤痕态出现时的能量值。在这里，我们发现，对于较低的能级，我们仍然能够得到疤痕态出现的能量值和半经典理论较好的对应。

改变能量或波矢，当沿轨道一周累积的相位改变接近  $2\pi$  的整数倍时，疤痕态能够重复出现，并且重复出现的规律是一个重要指标，依赖于系统态密度的信息。对于同一类轨道，由于在边界处获得的相位相同，相位差主要由作用量  $S$  的改变贡献。对于硬墙量子弹球，在经典极限下，由于轨道与能量无关，动量大小与位置无关，且动量与轨迹切向平行，故  $S = \oint \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} = \hbar \oint \mathbf{k} \cdot d\mathbf{q} = \hbar k \cdot L$ ,  $L$  为轨道长度。相邻疤痕态重复出现的必要条件即为  $\Delta k \cdot L = 2\pi$  或  $\Delta k = 2\pi/L$ ，即疤痕态在波矢空间近似是等间距出现的。对于非相对论量子系统，由于  $E - E_0 \propto k^2$ ,  $E_0$  为能量的最低点，即疤痕态在能量空间是按照  $\sqrt{E - E_0}$  等间距出现的。而对于极端相对论性系统， $E \propto k$ ，此时在能量空间疤痕态则是按照  $E$  等间距出现的<sup>[29, 30]</sup>。相对于硬墙弹球，光滑势场量子弹球或软墙弹球的行为更加复杂，此时周期轨道与能量有关，哪怕对于同一类轨道，当能量改变时，轨道的长度和位置也会发生变化，而且动量与位置有关，作用量只能通过数值积分得到。此外，对于硬墙量子弹球系统，每次在边界处的碰撞，反射系数会贡献一个相位，同时取决于边界形状，如果碰撞点处边界为弧形，还会有共轭点的贡献。而对于光滑势系统，除了端点，在轨道发生偏转时没有相应的反射系数贡献的相位，只有在轨道的端点处发散完全反射时才会有这个贡献，同时对轨道共轭

点的判断也要更加困难。特别的，对于某些复杂势场的情况，有可能存在一些临界点，当能量值跨过这些临界点时，其经典周期轨道可能会出现定性上的改变<sup>[31]</sup>。我们将会碰到这种情况，并考察当经典周期轨道发生定性的改变时，比如从不稳定变为稳定，其上疤痕态的半经典量子化条件的变化。

目前由于二维材料的广泛研究，人们研究了由杂质原子所形成的岛上区域的电子态密度，发现对于比较规则的系统，态密度在随能量变化时会出现一些特征的峰，与疤痕态所满足的量子化条件一致。而对于一般情况，当杂质较多时，也会出现一些比较明显的峰，这些峰的来源与特征是什么，与经典轨道有没有什么关系，还是一个没有解决的问题。杂质所产生的势场往往能够形成大小不等的势谷，电子局限在势谷中，在一定的能量值时，在特定的轨道上形成满足量子化条件的疤痕态，显示出较高的态密度峰，并且由于疤痕态的重复出现，这些峰随着能量的改变也会重复出现，只是由于势场的复杂性，态密度峰的周期性会受一定的影响。因此，我们研究扰动下二维谐振子势中量子子弹球的量子化条件，以期对复杂约束势场中疤痕态出现的量子化条件以及实验上能够观察得到的态密度峰有进一步的理解。

## 2 模型

因为我们的目的是研究复杂势场下疤痕态出现的量子化条件，我们将分两步，一是轻微扰动下的二维量子谐振子，这时有解析的分析，可以验证我们的数值结果；二是在大扰动下出现复杂经典动力学行为的光滑势场中的量子子弹球。在轻微扰动下，我们将能够看到李萨如疤痕态，即凝聚在经典李萨如图形（当x、y两个方向上的频率比为简单的整数比时所出现的图形）上的疤痕态，并研究这些疤痕态出现所满足的量子化条件。在大扰动下，经典轨道和疤痕态的特征将会有较大的变化，但是可以预期这些量子化条件仍然适用。这样，我们可以一般性的给出在二维复杂势场量子子弹球系统中的量子化条件，可以预期这些结果对于约束在复杂的随机长程势场中的电子仍然有效。对于理想的二维量子谐振子，其哈密顿为

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + V(\mathbf{r}) = -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V(\mathbf{r}), \quad (1)$$

其中

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2). \quad (2)$$

系统的本征能量为  $E_{nm} = \hbar[(n+1/2)\omega_x + (m+1/2)\omega_y]$ ，相应的本征态为

$$\psi_{n,m}(x, y) = N_{nm} H_n(\sqrt{\omega_x} x) H_m(\sqrt{\omega_y} y) e^{-\frac{1}{2}(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2)}, \quad (3)$$

其中  $N_{nm}$  是归一化常数  $\alpha_{x,y} = \sqrt{m\omega_{x,y}/\hbar}$ ,  $H_n$  是  $n$  阶厄米多项式。由于该系统可以分离为  $x$ 、 $y$  两个方向的

一维谐振子的直积，本征波函数也具有这样的对称性，一般不会出现凝聚在经典周期轨道上的情况，因此不会出现与经典情况中的李萨如图形所对应的疤痕态。文献<sup>[26]</sup>是通过在二维异向谐振子中加入大量有短程作用的杂质的方法来破坏这个对称性，在这些杂质的诱导下，该系统中出现了与经典李萨如图形一致的李萨如疤痕态。

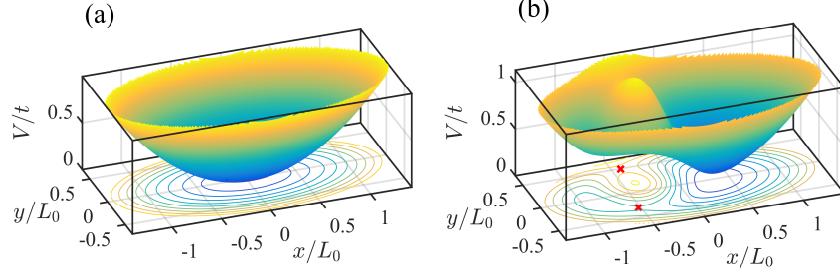


图 1 (a) 二维谐振子势[公式(2)], 其中  $L_0$  是系统的特征尺度,  $\omega'_x L_0 / \sqrt{2}a = 1$ ,  $\omega'_y = 2\omega'_x$ 。为了破坏对称性, 我们在  $(x_\delta/L_0, y_\delta/L_0) = (-0.278, -0.226)$  处加了一个  $\delta(x - x_0, y - y_0)$  函数势。(b) 在势场(a)的基础上, 加入了一个高斯势场  $V_G = U e^{-(x-x_G)^2 + (y-y_G)^2/(2\sigma^2)}$ , 其中  $U = 1t$ ,  $\sigma/L_0 = 0.2828$ ,  $(x_G/L_0, y_G/L_0) = (-0.3441, 0.1226)$ 。这样整个势场形成左右两个谷, 一个峰, 其中右侧谷底的位置为  $(x_V/L_0, y_V/L_0) = (0.3574, -0.0179)$ , 对应的势能为  $V_{\min} = 0.1053t$ 。两个势谷之间存在两个鞍点, 如叉号所标示的位置, 对应的势能分别为  $0.591t$  和  $0.976t$ 。

Fig. 1. (a) Two-dimensional harmonic potential [Eq. (2)], where  $L_0$  is the character scale of the system,  $\omega'_x L_0 / \sqrt{2}a = 1$ , and  $\omega'_y = 2\omega'_x$ . To break the discrete symmetry, we added a  $\delta(x - x_0, y - y_0)$  potential at  $(x_\delta/L_0, y_\delta/L_0) = (-0.278, -0.226)$ . (b) On the potential given in (a), we added an additional Gaussian potential  $V_G = U e^{-(x-x_G)^2 + (y-y_G)^2/(2\sigma^2)}$ , where  $U = 1t$ ,  $\sigma/L_0 = 0.2828$ , and  $(x_G/L_0, y_G/L_0) = (-0.3441, 0.1226)$ . Thus the potential field forms two valleys and one peak, and the position of the bottom of the right valley is  $(x_V/L_0, y_V/L_0) = (0.3574, -0.0179)$ , with corresponding potential  $V_{\min} = 0.1053t$ . There are two saddle points between the two valleys, as marked by the crosses, with corresponding potential values  $0.591t$  and  $0.976t$ .

为了方便, 在计算的时候我们重新标度各物理量。令系统的特征长度为  $L_0$ , 则  $x = x'L_0$ 。由于我们将采用有限差分的方式进行计算, 因此将弹球区域分成间距为  $a$  的正方形格子, 并令  $t = \hbar^2/(2ma^2)$ , 将其作为能量的单位。因  $\hbar\omega$  亦是能量的单位, 故令  $\omega = \omega't/\hbar$ , 则  $x'$ ,  $\omega'$  均为无量纲的数, 而  $m\omega_x'^2 x'^2/2 = m\omega_x'^2 t^2 x'^2 L_0^2/(2\hbar^2) = \omega_x'^2 (L_0^2/2a^2) x'^2 t/2$ , 这样势能的单位亦为  $t$ 。

图 1展示了我们所研究的轻微扰动和大扰动下的二维谐振子势, 其中  $\omega'_x L_0 / \sqrt{2}a = 1$ ,  $\omega'_y = 2\omega'_x$ 。在图 1(a) 中, 我们在谐振子势(2)的基础上, 在  $(x_0/L_0, y_0/L_0) = (-0.278, -0.226)$  处加了一个  $\delta(x - x_0, y - y_0)$  的函数势, 用来破坏原来势场沿  $x$  轴、  $y$  轴的镜面对称以及沿  $z$  轴的旋转  $180^\circ$  的对称性。在图 1 所示的区域边界, 我们再加一个硬墙势。注意这里也可以在这个区域边界之外加一个增长更快的连续势。我们将主要分析低能级的态, 这时这个区域边界上及其外围的势场对结果影响很小。图 1(b) 在图 1(a) 的基础上加

一个高斯势，即

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2) + U e^{-[(x-x_G)^2 + (y-y_G)^2]/(2\sigma^2)}. \quad (4)$$

其中  $U = 1t$ ,  $\sigma = 0.2828$ ,  $(x_G, y_G) = (-0.3441, 0.1226)$ , 来进一步破坏系统的可积性。这样整个势场形成左右两个谷，中间一个峰，其中右侧谷底的位置为  $(x_V/L_0, y_V/L_0) = (0.3574, -0.0179)$ ，对应的势能为  $V_{\min} = 0.1053t$ 。两个势谷之间存在两个鞍点，对应的势能分别为  $0.591t$  和  $0.976t$ 。因此，当粒子能量低于  $0.591t$  时，其经典轨迹只能局限在其中的一个势谷中。这里需注意，哪怕粒子只被囚禁在一个谷中，其经典动力学仍然不一定是可积的，因为软的势场往往能够将经典动力学复杂化<sup>[23]</sup>。

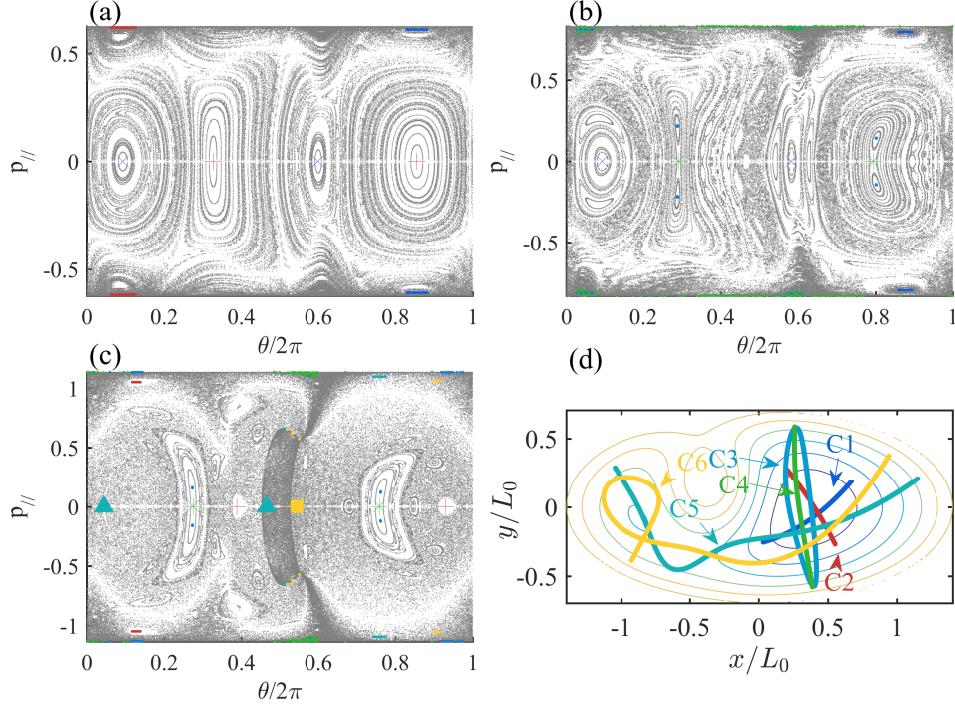


图 2 图1(b)势场的庞加莱截面，即  $p_{\perp} = 0$  时  $p_{\parallel}$  vs 此时的位置相对于右侧谷底的角度  $\theta$  (a-c)和后面所处理的6类轨道(d)。

(a) 总能量  $E = 0.3t$ , (b)  $E = 0.45t$ , (c)  $E = 0.75t$ 。

Fig. 2. The Poincaré section of the motion of a particle moving in the potential field given by Fig. 1(b), e.g., when  $p_{\perp} = 0$ ,  $p_{\parallel}$  vs the angle  $\theta$  of this point with respect to the bottom of the right valley  $(x_V, y_V)$  (a-c). The total energy of the particle is  $E = 0.3t$  (a),  $E = 0.45t$  (b), and  $E = 0.75t$  (c), respectively. (d) The six classes periodic orbits that will be discussed later.

我们参照文献<sup>[23]</sup>计算了粒子约束在图 1(b) 势场中右侧谷时的庞加莱截面，结果展示在图 2 中。粒子在势场中运动时，动量分解为平行于势能等值线的分量  $p_{\parallel}$  和垂直于势能等值线的分量  $p_{\perp}$ 。庞加莱截面定义为  $p_{\perp} = 0$  时的截面，此时粒子轨迹与势能等值线相切。这个切点相对于谷底的角度  $\theta$  作为庞加莱截面的参数。从这个庞加莱截面可以看出，对于这个系统，即使能量不太高时，也有着复杂的结构，破坏了

系统整体的可积性。但是系统有明确的 Kolmogorov – Arnold – Moser (KAM) 岛，岛中间对应着稳定轨道。利用 KAM 岛中心点的参数，可以精确找到该轨道，研究该轨道上波函数的量子化条件。

在求解该系统的本征能量和本征态时，我们将  $\nabla^2$  进行有限差分，将弹球区域分成间距为  $a$  的正方形格子，则得到系统在紧束缚近似下的哈密顿量

$$\hat{H} = 4t \sum_i |i\rangle\langle i| - t \sum_{i,j} |i\rangle\langle j| + \hat{V}, \quad (5)$$

其中  $t = \hbar^2/(2ma^2)$ ，第一个求和对所有格点进行，第二个求和对所有相邻点对进行。在格点表象中，哈密顿矩阵的对角元为  $H_{ii} = 4t + V(x_i, y_i)$ ，如果格点  $i$  与格点  $j$  相临，则  $H_{ij} = -t$ ，其余矩阵元为 0。对于边界点， $V$  取一个很大的值。在这里我们取为  $1000t$ 。将该哈密顿矩阵对角化即可得到对应的本征能量和本征态。由于方格子的色散关系为  $E(k_x, k_y) = 2t(1 - \cos(k_x a)) + 2t(1 - \cos(k_y a))$ ，只有当能量或波矢较小时才能近似为  $E = \hbar^2 k^2 / 2m$ ，其中  $k^2 = k_x^2 + k_y^2$ 。因此我们将主要考虑低能级情况。另一方面，格点系统对原有二维谐振子系统的偏离在一定程度上也促使了李萨如疤痕态的出现。

在本文中，我们所考虑的均为 2 自由度系统。对于这类系统，如果轨道是稳定的，考虑对轨道的变分，那么在轨道的横截方向，当有一个小扰动时，这个小扰动会反复振荡。考虑横截方向的一个整体模式  $o$ ，假设其振荡频率为  $\omega_o$ ，那么这个模式在低能下（小扰动下）一般与谐振子的运动相似。则对于量子化的系统，它会在能量上贡献<sup>[32]</sup>

$$E_o = (m + 1/2)\hbar\omega_o, \quad (6)$$

$m$  为在横截方向的量子数，并约定当波函数在横截方向只有一个波包（即基态）时，对应的  $m$  为 0。这样总的能量为  $E = E_o + E_t$ ，其中  $E_t$  为沿该轨道运动的能量。而沿轨道运动的作用量为

$$S_t = \oint \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} = \oint \sqrt{2m(E_t - V(q_t))} dq_t. \quad (7)$$

对于软墙弹球，当轨道有两个端点（折返点）时，假设在端点处  $V$  随  $q_t$  为线性关系，即  $\partial V / \partial q_t \neq 0$  或  $\infty$ ，由于线性势的边界条件，与一维情况类似，半经典处理会在波函数中给出  $\pi/4$  的相位。沿轨道运行一周，抵近和远离每个端点，总共会贡献 4 倍即  $\pi$  的相位<sup>[14]</sup>。因此量子化条件为

$$S_t = (n + 1/2)2\pi\hbar. \quad (8)$$

我们约定  $n$  的意义为，对于凝聚在周期轨道上的量子态，当沿轨道一周时粒子波函数有  $n + 1$  个波长。这样的约定当系统退化为谐振子势时与一维谐振子的本征能量  $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega$  的约定相一致。软墙弹球和硬墙弹球具有很大的区别，首先在折返点，硬墙弹球每次折返贡献  $\pi$  的相位，两个折返点共贡献  $2\pi$  的相

位。此外，在轨道与硬墙边界碰撞发生反射时，由于在边界处波函数恒为 0，每次反射会附加一个  $\pi$  的相位。而对于软墙弹球，这种反射不贡献额外的相位。

对于给定的疤痕态，通过数疤痕态的波包，可以确定量子数  $n$ ，并由公式 (8) 确定  $S_t$ ，由 (7) 可以反推出  $E_t$ 。 $E_o$  由公式 (6) 给出。这样，可以得到由半经典的量子化条件给出的本征能量  $E_{mn} = E_o(m) + E_t(n)$  [14, 32]。对于封闭的没有端点的周期轨道，则公式 (8) 应为  $S_t = (n+1)2\pi\hbar$ 。注意这里所讨论的是疤痕态出现的必要条件，即疤痕态的能量需要近似满足在相应轨道上的量子化条件。但是这还不是充分条件，尤其是对于经典混沌的系统，疤痕态只是其中一类态，更多的是没有规律杂乱无章的态。即使满足量子化条件，在所预言的能量值附近，并不一定能够找到对应的疤痕态。因此，相较于在考虑沿周期轨道运动一周所产生的相位后，由半经典量子化给出相应的能量值并在该值附近寻找疤痕态，我们更倾向于反过来，由能量值根据半经典量子化公式得到相应的量子数  $n$ ，并与根据波函数数出来的量子数  $n$  相比较，看是否符合。

如果轨道是不稳定的，则量子化条件与前面类似，只是公式 (6) 中的  $\hbar\omega_o$  需更换为与轨道不稳定性有关的一个参数  $u$  [14, 33]。

对于约束在复杂的随机长程势场中的电子，当其局域在某个或某几个相邻的势谷中时，其所感受到的势场将在定性上与我们所考虑的大扰动下的二维谐振子系统类似，因此我们预期我们的结果对于理解这些系统中态密度的规律具有一定的帮助。

在此我们必须指出，上述半经典公式是 Gutzwiller<sup>[4]</sup>、Miller<sup>[32]</sup>、Voros<sup>[33]</sup> 等人在上世纪七八十年代提出来的，在顾雁老师的书里<sup>[14]</sup> 有详细的阐述。我们只是研究一个具体的软墙弹球的例子，确定其中疤痕态的量子化条件，以期对目前广泛研究的具有不规则杂质的二维电子系统的态密度谱峰有所理解。我们的工作也发现，这些半经典公式不仅在短波长极限下成立，而是对于一般的二维体系，只要波长不是太长时就能成立，而且在一个比较大的范围内都与量子计算结果相一致。

### 3 结果

#### 3.1 小扰动下二维谐振子系统

对于小扰动的情况，我们固定  $\omega_x = 1$ ，考察了不同的  $\omega_y$ 。对于不同的  $\omega_x$  和  $\omega_y$  的比例，会得到不同

的李萨如疤痕态。图 3 展示了一些具有代表性的结果。

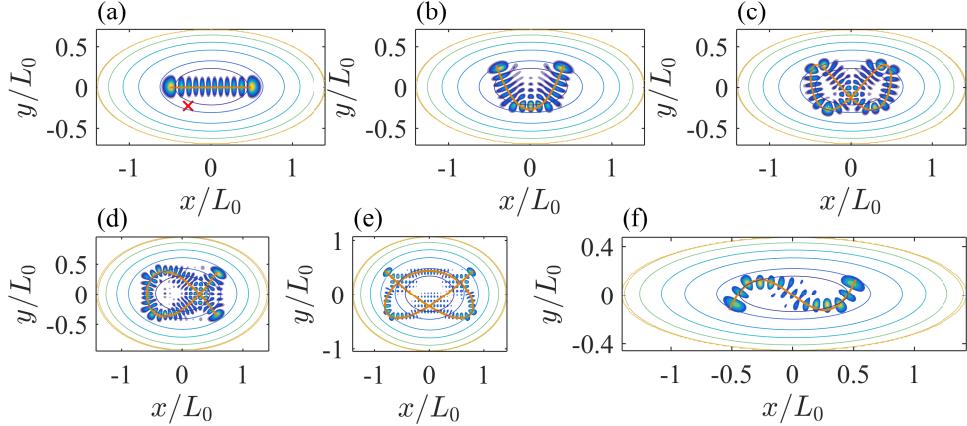


图 3 图 1(a)势场下粒子的本征态。图中所画为一些具有代表性的波函数的模方，凝聚在李萨如轨道上。 $x$  和  $y$  方向的频率比为(a-c) 1:2, (d) 2:3, (e)3:4, (f)1:3。对所有情况,  $\omega_x'L_0/\sqrt{2}a = 1$ ,  $x/L_0$  的范围为  $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]L_0$ , 谐振子势在  $y = 0$  的边界上的值为  $1t$ 。

Fig. 3. The representative eigen-wavefunctions of the billiard Fig. 1(a). Shown are the the square of the modulus of wavefunctions that are condensed on the Lissajous orbits. The ratio of the frequency in  $x$  and  $y$  directions are: (a-c) 1:2, (d) 2:3, (e) 3:4, (f) 1:3. For all case,  $\omega_x'L_0/\sqrt{2}a = 1$ , the range of  $x$  is  $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]L_0$  and the value of the harmonic potential at the  $y = 0$  boundary is  $1t$ .

首先, 我们先给出 bouncing ball 轨道的本征态的结果, 来检验分析的准确性。对于图 3(a) 中那一类沿  $x$  方向的 bouncing ball 态, 它们也是原二维谐振子系统的本征态[公式 (3)], 对应着  $m = 0$  的态。此时  $E_{n,0} = \hbar[(n + 1/2)\omega_x + (1/2)\omega_y]$ , 其轨道方向的能量为  $E_t(n) = E_{n,0} - (1/2)\omega_y$ 。而在  $x$  方向, 对于经典的谐振子, 能量和作用量的关系为  $S_t = \oint \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} = \oint p_x \cdot dx = 2\pi E_t/\omega_x$ 。对于该轨道, 沿轨道方向的量子化条件为  $S_t = 2\pi\hbar(n + 1/2)$ 。这样找出所有沿  $x$  方向 bouncing ball 轨道的本征态出来, 从其本征能量  $E$ , 可以得到  $E_t$ , 并进而得到  $S_t$ , 从而得到量子数  $n$ 。注意这样得到的  $n$  不一定是整数。

另一方面,  $n$  可以通过数波函数的波包的个数把沿轨道一周的波长的数目确定下来,  $n$  即为波长数减 1。通过对比这样两个方式确定的  $n$ , 可以判断能否通过数波函数波包的方式来得到该波函数相应的本征能量。对于半经典公式的检验, 一般是反过来, 先确定横截方向的频率值, 在给定量子数下计算沿轨道的作用量, 再由作用量和能量的关系确定能量, 与计算得到的本征能量做对比。这里我们的目的是给出疤痕态出现时所满足的必要条件, 即半经典量子化条件, 并考察半经典处理对于这些态的适用性问题, 由于疤痕态及其本征能量已经得到, 我们可以通过上述方式得到相应的轨道方向的量子数  $n$ , 和数出来的波长数减 1 做对比。由于整数  $n$  对应满足量子化条件, 所以从对  $n$  的偏离就可以很容易看出半经典描述对该组疤痕态的适用性。对于复杂光滑势场中的疤痕态, 其横截方向量子数一般为 0, 在能量变化范围不大的时候, 横截方向量子数  $n$  和能量之间接近线性关系, 因此从  $n$  的差异也可以推得能量的差异。

纵向的 bouncing ball 态可以做类似的分析，只需把  $\omega_x$  和  $\omega_y$  互换即可。图 4 做了这样的分析，可以看出，不管对于横向还是纵向的 bouncing ball 态，当能量较小时，比如  $E/t < 0.4$ ，两种方式得到的量子数符合的非常好。能量较大时会有所偏离，而且能量越大偏离越多。这是由于  $\nabla^2$  算符的有限差分近似所导致的，同时能量  $E/t$  在接近 1 时，区域边界的硬墙势也会带来一定的影响。

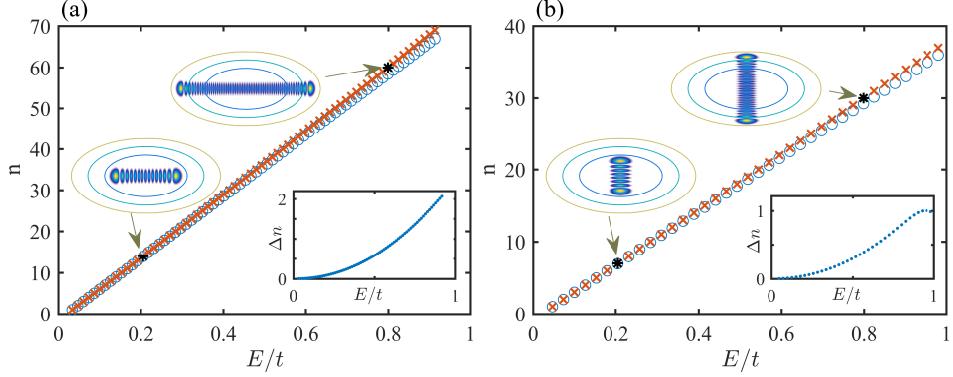


图 4 小扰动下二维谐振子势中的Bouncing ball 量子态的轨道方向量子数  $n$  对能量的依赖图。叉号为根据波函数数出来的波长数减1，圆圈为根据半经典公式得到的  $n$ 。(a) 为横向bouncing ball 态，(b) 为纵向bouncing ball 态。小图  $\Delta n$  为根据波函数数出来的结果和根据本征能量计算出来的结果的差。

Fig. 4. The quantum numbers  $n$  along the trajectory vs energy for bouncing ball states in the harmonic potential with a small perturbation. Crosses are the numbers of wavelengths counted from the wavefunctions minus one, circles are derived from the semiclassical formulas. (a) is for horizontal bouncing ball orbits, and (b) is for vertical bouncing ball orbits. Insets show the difference  $\Delta n$  between these two methods.

对于图 3(b-f) 中的轨道，虽然比较复杂，但仍然是一维轨道，可以分为沿轨道方向和横截方向来处理，而横截方向在小振幅扰动的情况下近似为谐振子，对能量的贡献为  $E_o = (m + 1/2)\hbar\omega_o$ ，其中  $m$  与横截方向的波包数有关，对于图中所示各例， $m$  均为 0。注意对于这些复杂的轨道，与 bouncing ball 轨道不同， $\omega_o$  的值是不知道的，但对于能量相差不大的凝聚在同类型轨道上的态，可以假设这个值是近似相等的，所以是出现在模型里的一个待定系数，这样可以通过联立不同的但凝聚在同类型轨道上的态把它确定下来。沿轨道方向，在图 3(b,d,e,f) 中有两个端点，而且在端点处势场对轨道参数的依赖关系为线性，因此在两个端点处会有额外的  $(1/2)2\pi\hbar$  贡献，半经典量子化条件为  $S_t = (n + 1/2)2\pi\hbar$ ,  $n$  为沿轨道一周的波长数减 1。相应态的总能量即为  $E = E_t + E_o$ 。对于图 3(c) 中的轨道，由于是自身封闭的轨道，没有端点，故  $S_t = (n + 1)2\pi\hbar$ ,  $n$  为沿轨道一周的波长数减 1。对于沿轨道方向作用量的计算，考虑受轻微扰动的二维谐振子，作用量对能量的依赖关系略微复杂，依赖于具体的轨道类型，但仍然可以依据二维谐振子的情况进行计算，有  $S_t = \oint \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} = \oint (p_x \cdot dx + p_y \cdot dy)$ 。由于谐振子  $x$  方向的运动与  $y$  方向的运动解耦，上述积分相对于对  $x$  及  $y$  方向两个独立的一维谐振子进行积分，有  $S_t = n_x 2\pi E_x / \omega_x + n_y 2\pi E_y / \omega_y$ ，其中  $n_x$  ( $n_y$ ) 为沿该

轨道运行一周，粒子在  $x$  ( $y$ ) 方向来回振荡的次数， $E_x$  ( $E_y$ ) 为粒子沿轨道运动的能量在  $x$  ( $y$ ) 方向的分量， $E_x + E_y = E_t$ 。

对于图 3(b) 中的轨道，有  $n_x = 1, n_y = 2$ ，同时有  $\omega_y = 2\omega_x$ ，因此  $S_t = 2\pi E_x/\omega_x + 2 \times 2\pi E_y/\omega_y = 2\pi E_x/\omega_x + 2\pi E_y/\omega_x = 2\pi E_t/\omega_x$ 。由于该轨道有两个端点，其沿轨道方向的量子化条件为  $S_t = (n+1/2)2\pi\hbar$  或  $(n+1/2)\hbar\omega_x = E_t$ 。这意味着如果把沿轨道的运动近似为一维谐振子（一般来说不是），其平均频率与  $x$  方向谐振运动的频率居然一样。但是这一结果又可以理解，因为从经典运动来讲，沿该轨道运动的周期和频率确实是和  $x$  方向谐振运动的周期和频率是一致的。图 5(a) 展示了对这一类李萨如态的分析结果。通过拟合，得到  $E_o = \hbar\omega_o/2 = 0.026t$ 。可以看到，与图 4 中对 bouncing ball 轨道态的情况对比，半经典量子化条件对于这个轨道符合的非常好，而且  $n$  越小符合的越好。我们找到的最低的能级对应的  $n$  为 6。注意这里  $n$  大时的偏离应该归因于对  $\nabla^2$  算符的有限差分近似，而不是半经典方法的问题。这个例子展示了对于这些复杂的轨道，半经典处理在能量很小时也能得到很好的结果。

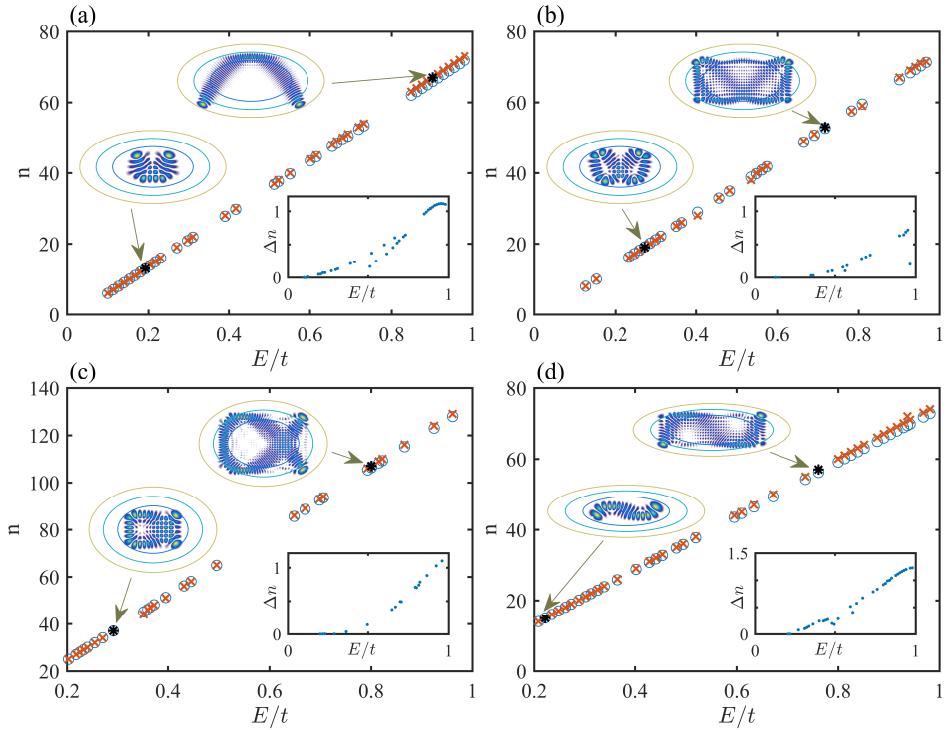


图 5 小扰动二维谐振子势场中4类李萨如态的量子化条件。叉号为根据波函数数出来的波长数减1，圆圈为根据半经典公式得到的  $n$ 。图中小图为根据波函数数出来的结果和根据本征能量计算出来的结果的差。

Fig. 5. The quantization condition for the four types of scars for the harmonic potential with a small perturbation. Crosses are the numbers of wavelengths counted from the wavefunctions minus one, circles are the quantum numbers derived from the semiclassical formulas. Insets show the difference  $\Delta n$  between these two methods.

图 5(b) 展示了对另一类李萨如态的分析结果。对应的这个轨道是一个封闭的轨道，没有端点，沿轨

道方向的量子化条件为  $S_t = (n+1)2\pi\hbar$ ,  $n$  为沿轨道一周的波长数减 1。这一轨道与图 5(a) 类似, 有  $n_x = 1$ ,  $n_y = 2$ , 同时有  $\omega_y = 2\omega_x$ , 因此  $S_t = 2\pi E_t / \omega_x$ 。对于该组数据的拟合, 得出  $E_o = \hbar\omega_o/2 = 0.0275t$ 。对于这组轨道, 除了个别偏差较大的态, 半经典分析给出的结果与从波函数中数出的量子数  $n$  符合的很好, 并且由于该轨道在边界上没有折返点(端点), 受最外层硬墙边界的影响较小, 与其他有端点的轨道相比, 当能量靠近边界能量( $1t$ )时仍符合的较好。

图 5(c,d) 展示了另外两类有端点的李萨如态的分析结果, 基本与图 5(a) 相似。略微有些差异的地方是对于图 5(c) 中的轨道,  $n_x = 2, n_y = 3$ , 有  $S_t = 2 \times 2\pi E_t / \omega_x$ 。如果仍然把粒子沿周期轨道的运动套用谐振子的公式并假设平均频率为  $\omega_t$ , 则  $S_t = 2\pi E_t / \omega_t$ , 有  $\omega_t = \omega_x/2$ 。这一结果与经典粒子沿该轨道运动的情况一致, 不难看出, 当粒子运动一周时, 在  $x$  方向往返了 2 次, 与前面的  $n_x = 2$  也一致。

### 3.2 大扰动下复杂势场系统

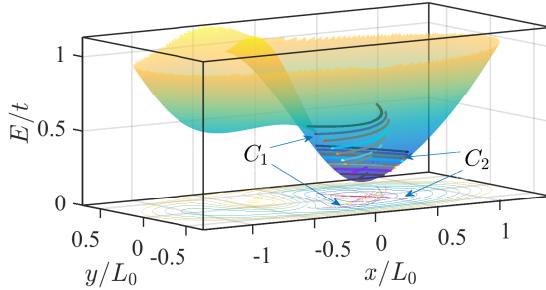


图 6 大扰动二维谐振子势场中的两类**bouncing ball** 轨道以及它们在零能量面上的投影。纵轴对应的是每个轨道的能量值。

为了便于辨认, 势函数及其等势线也一起画在了图上。第一组(C1)轨道对应着图2 中在  $p_{||} = 0$ ,  $\theta/2\pi \approx 0.1$  和  $0.6$  处两个最显著的KAM岛的中心轨道, 第二组(C2)轨道对应着图2(a) 中在  $p_{||} = 0$ ,  $\theta/2\pi \approx 0.33$  和  $0.86$  处两个KAM岛的中心轨道。

Fig. 6. Two types of bouncing ball orbits in the potential shown in Fig. 1(b) and their projections on the zero energy surface. The potential function and its equipotential lines are also plotted. The first class of orbits (C1) corresponds to the center point of the two most significant KAM islands for  $p_{||} = 0$ ,  $\theta/2\pi \approx 0.1$  and  $0.6$  in Fig. 2, and (C2) corresponds to the center points of the KAM islands for  $p_{||} = 0$ ,  $\theta/2\pi \approx 0.33$  and  $0.86$  in Fig. 2(a).

对于这一节处理的具有较大扰动的谐振子, 上节联系作用量与能量之间的公式不能继续使用, 作用量只能通过沿轨道的积分得到。这时沿轨道的作用量  $S_t$  和沿轨道运动的能量  $E_t$  仍然具有一个确定的关系, 这个关系不能显式写出, 只能数值得到, 而且对于不同类型的轨道会有较大的差别。并且, 由于势函数的复杂的形式, 系统动力学对能量的依赖关系非常敏感。首先即使对于同种类型的轨道, 随着能量的改变, 其轨道的形状也可能发生改变。图 6 展示了在右侧势谷中的两组**bouncing ball** 轨道。当能量较低时, 轨道接近直线, 而随着能量的增加, 其形状在势场的约束下发生了弯折, 如图 6 中的第一类(C1) 轨道。其次,

有些轨道可能形状变化不大，但是随着能量的改变，可能会出现从稳定到不稳定或者从不稳定到稳定的转变，比如图 6 中的第二类 (C2) 轨道。这组轨道在能量  $E$  小于  $0.35t$  时稳定，在庞加莱截面图上对应着明显的 KAM 岛，超过  $0.35t$  后该 KAM 岛分裂成上下两个小岛，如图 2(b) 中  $\theta/2\pi$  大约在 0.3 和 0.8 处的 KAM 岛所示，而中心点为上下两个小 KAM 岛的交点，是一个不稳定的点。而在能量超过  $0.6t$  以后，该轨道又成为稳定的，对应着庞加莱截面上新出现的一个 KAM 岛，如图 2(c) 中最右侧的 KAM 岛所示。而第一类 (C1) 轨道在  $0.35t$  时也失稳，所对应的 KAM 岛分成了左右两个小岛，类似倍周期分叉，但之后又成为稳定轨道，一直到  $0.6t$  附近重新失稳。还有其他一些轨道，在低能时没有，只在能量比较高时才出现，如后面的第三类 C3 轨道，就是由 C2 分化而来的。而其所对应的不稳定轨道即为 C4。C3 和 C4 随着能量的增加一起演化，逐渐偏离原来的 C2 轨道。当能量为  $0.7t$  时，一个新的与原来 C2 对应的稳定轨道出现，虽然所对应的 KAM 岛比较小，但后续一直存在。而 C4 这一组不稳定轨道，只有当能量非常高时，比如  $0.95t$ ，才又变为稳定轨道了。还有一些轨道，比如连接左右两个势谷的轨道，只有当能量高过他们之间的鞍点时 ( $0.591t$ ) 才会出现，如后面处理的 C5 和 C6 两组轨道。C5 对应有一个小的 KAM 岛。C6 轨道非常敏感，只有少量参数值的时候轨道才稳定，有一个很小的 KAM 岛(在图中已经看不出来)。这些分析是通过考察确定这些轨道在庞加莱截面的位置以及庞加莱截面的结构随能量的变化而得出的。对这些经典轨道有所了解之后，我们就可以考察量子态在这些轨道上的凝聚及其量子化条件。

对于这些轨道，由于经典的能量和作用量没有确定的函数关系，只能通过数值积分计算。另一方面，由于很多轨道在给定的能量值时由于 KAM 岛太小或本身不稳定就没有 KAM 岛，并不容易得到，这使得对于所有给定的疤痕态都根据其  $E_t$  来直接寻找经典轨道并积分求得作用量变得异常困难。在此，我们采取一个迂回的方法。首先，根据量子系统的疤痕态所凝聚的轨道以及庞加莱截面上 KAM 岛的信息，我们在不同能量  $E$  下分别找到相应的轨道并计算其作用量  $S$ ，对于每一类轨道，我们在所涉及到的区间得到 10 个左右的数据点。对于谐振子  $S$  正比于  $E$ ，这里由于势场的不规则性以及轨道形状的变化， $S$  对  $E$  的依赖关系接近线性，会有一点偏离。因此我们利用这些数据点做二次多项式拟合，得到拟合函数  $S = f_C(E)$ ，下标  $C$  表示这个函数是依赖于轨道的。这样，对于凝聚在某一类轨道  $C$  上的疤痕态及其本征能量  $E_{n,m}$ ，其中  $n, m$  分别为轨道方向和横截方向的量子数，有  $E_{n,m} = E_t(n) + E_o(m) + V_{\min}$ ，其中  $E_o(m) = (m + 1/2)\hbar\omega_o$ ， $\omega_o$  为经典轨道横截模式的振荡频率， $V_{\min} = 0.1053t$  为该势场的最低值。这样  $E_t = E_{n,m} - E_o(m) - V_{\min}$ ，其经典作用量可以通过  $S_t = f_C(E_t)$  来得到。由经典作用量，可以通过  $S_t = (n + 1/2)2\pi\hbar$  得到相应的量子数  $n$ ，然后与从波函数图形上数出来的波长数减 1 相比，来检验半经典量子化条件的适用性。

对于上一节中小扰动下的二维谐振子，同一类轨道对应的这个频率近似为常数，与能量无关。这里我们将看到，虽然对于复杂势场下同一类经典轨道可能存在重要差异，但是其  $\omega_o$  仍然近似保持恒定，对能量依赖关系较小，因此仍然能够近似成一个常数，作为待定参数来处理。由于横截方向的运动可以近似为简谐振子， $\omega_o$  与横截方向波函数的宽度的平方具有反比关系，从我们所考察的能量区间不同波函数横截方向宽度基本一致也可以佐证  $\omega_o$  近似为一常数。而  $E_o$  可以通过调整其值使得两者符合的最好来得到。

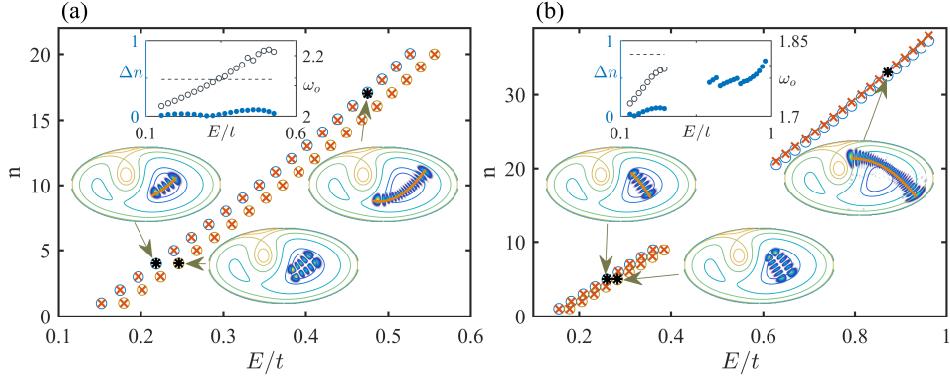


图 7 沿轨道方向量子数  $n$  与能量的依赖关系。叉号为根据波函数数出来的波长数减1，圆圈为根据半经典公式得到的  $n$ 。

(a) 第一类 bouncing ball 轨道(C1); (b) 第二类 bouncing ball 轨道(C2)。每个图中横截量子数  $m = 0$  为上面那组点， $m = 1$  的为下面那组点。对于C2轨道，只有能量较低的时候有  $m = 1$  的量子态，能量较高时在计算中没有发现  $m = 1$  的态。图中小图展示了一些标准的疤痕态及其对应的经典轨道，两种  $n$  的差值（蓝色实心圆，左侧坐标）以及由  $E_{n,1} - E_{n,0}$  计算出的  $\omega_o$  值（黑色空心圆，右侧坐标），其中横虚线为拟合得到的  $\omega_o$  值 ( $\omega_o L_0 / \sqrt{2}a$ )，对应的  $E_o = \hbar\omega_o/2$  分别为  $0.0141t$  和  $0.0121t$ 。

Fig. 7. The quantum numbers  $n$  along the trajectory vs energy for bouncing ball states in the modified harmonic potential shown in Fig. 1(b) for C1 orbits (a) and C2 orbits (b). Crosses are the numbers of wavelengths counted from the wavefunctions minus one, circles are derived from the semiclassical formulas. In each panel, the upper set of points are for  $m = 0$ , and the lower set of points are for  $m = 1$ . For C2 orbits, only when energy is small there are  $m = 1$  states. Insets show the difference  $\Delta n$  (solid circles, left coordinates) between these two methods, and  $\omega_o$  obtained from  $E_{n,1} - E_{n,0}$  (empty circles, right coordinates), where the horizontal dashed line is the  $\omega_o$  obtained from fitting to the data, and the corresponding energies  $E_o = \hbar\omega_o/2$  are  $0.0141t$  and  $0.0121t$  for C1 and C2 orbits, respectively.

我们首先考察 C1 和 C2 这两类 bouncing ball 轨道。这两类轨道是能量较低时最稳定的轨道，具有最大的 KAM 岛。因此，它们所对应的疤痕态非常规律，并且除了常见的  $m = 0$  的态，还有很好的  $m = 1$  的态，这样  $\hbar\omega_o$  除了可以作为拟合参数得到，还能通过两组本征能量  $E_{n,1}$  和  $E_{n,0}$  相减直接得到。图 7 内的小图展示了这个结果。我们发现，对于 C1 和 C2 两类轨道，两种方法得到的  $\omega_o$  值一致，并且在整个能量范围， $\omega_o$  的变化幅度不超过 10%，而且这部分能量本身就小，因此  $\omega_o$  可以作为常数来处理。

图 7 展示了 C1 和 C2 这两类 bouncing ball 轨道半经典估计的沿轨道方向的量子数和从波函数直接数出来的量子数。对于 C1 轨道两者符合的较好，对于 C2 轨道，在能量低时符合的较好，在能量高时有系

统性的偏差。这可能是由于对  $\omega_o$  的估计的问题，因为这里我们用了统一的  $\omega_o$  值，但是实际上低能轨道和高能轨道的差异还是很大的。

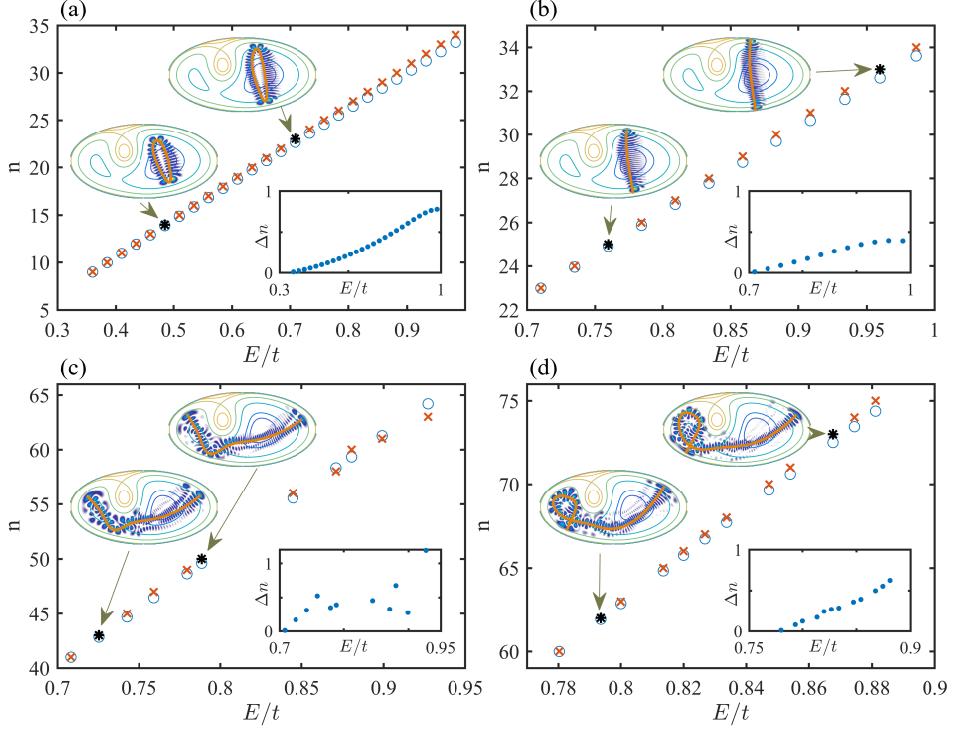


图 8 沿轨道方向量子数  $n$  与能量的依赖关系。叉号为根据波函数数出来的波长数减1，圆圈为根据半经典公式得到的  $n$ 。这里所有态的横截量子数  $m$  均为0。(a-d) 分别对应第三类(C3)、第四类(C4)、第五类(C5)、第六类(C6)轨道，对应的  $E_o$  分别为  $0.0220t$ ,  $0.0013t$ ,  $0.0280t$ , 和  $0.0193t$ 。图中小图展示了一些标准的疤痕态及其对应的经典轨道，以及两种  $n$  的差值。C3 只在能量为  $0.35t$  时 C2 失稳后才出现。C4 为 C2 的另外一支不稳定轨道，只在能量超过  $0.95t$  后才稳定。C5 和 C6 是连接两个势谷的轨道，只在较高能级时出现。

Fig. 8. The quantum numbers  $n$  along the trajectory vs energy.  $m = 0$  for all cases. Crosses are the numbers of wavelengths counted from the wavefunctions minus one, circles are derived from the semiclassical formulas. (a)-(d) correspond to C3-C6 orbits, with  $E_o = 0.0220t$ ,  $0.0013t$ ,  $0.0280t$  and  $0.0193t$ , respectively. Insets show some typical scarring states and the corresponding classical orbits, and the difference  $\Delta n$  between these two methods. Note that C3 orbits only appear for  $E > 0.35t$  when C2 becomes unstable. C4 is the other unstable branch of C2, and becomes stable only for  $E > 0.95t$ . C5 and C6 are orbits connecting the two potential valleys, only appear when higher energy is high enough.

图 8 展示了其他轨道的情况。对于 C3, C4, C6 轨道，半经典方法得到的量子数与从波函数中数出来的量子数符合的比较好，而 C5 轨道两者符合的要差一些，这与 C5 轨道对应的量子疤痕态比较模糊不易分辨有关。这里注意，C4 在多数能量值下为不稳定轨道，所以这里  $E_o$  并不对应着横截模式的振荡频率  $\omega_o$ ，而是与轨道稳定性有关的一个参数<sup>[14, 33]</sup>。此外，当能量大于  $0.95t$  时，该轨道已经稳定，但是对应的 KAM 岛很小。此时疤痕态仍然满足相同的半经典公式，并没有因为经典轨道稳定性发生变化而出现显著差别。

这些结果显示，在这种复杂的势场下，半经典量子化仍然能够对疤痕态对应的能级给出比较好的描述，并且在低能下也符合的很好。这是由于，虽然势场本身及其经典动力学很复杂，但是在势谷附近，系统仍然具有两个较好的轨道方向，使得系统沿每组轨道的运动近似为稳定的简谐运动，在庞加莱截面上表现为四个较大的 KAM 岛（每个稳定 bouncing ball 轨道有两个 KAM 岛），因此量子化条件能够比较好的适用。对于我们的情况，轨道 C1 和轨道 C2 在低能时基本互相垂直，因此 C1 的  $\omega_t$  应为 C2 的  $\omega_o$ ，C1 的  $\omega_o$  应为 C2 的  $\omega_t$ 。图 7 展示  $\omega_o$ ，在低能时  $\omega_o L_0 / \sqrt{2}a$  分别接近 2.03 和 1.72，而由图中数据按  $S_t = 2\pi E_t / \omega_t$  估计得到的  $\omega_t L_0 / \sqrt{2}a$  在低能时分别为 1.69 和 2.00，与上述分析一致。当能量较高系统动力学较复杂时，对应的 KAM 岛变小或消失，部分轨道从稳定变到不稳定，或者出现新的稳定轨道，这时虽然每个轨道比较复杂，但在一个比较小的能量区间，轨道性质变化不大，量子化条件对于这组轨道所对应的疤痕态仍能给出较好的描述。但如图 7(b) 所示，如果轨道已经存在一定的差异，比如 KAM 岛的显著变化（低能时 KAM 岛很大，高能时很小），那么  $\omega_o$  应该分段取值。可以预期，对于图 7(b) 中能量较高的态，重新标度  $\omega_o$  将能够使得半经典得到的量子数整体上移，与从波函数数出来的  $n$  符合的更好。

关于疤痕态重复出现的规律，鉴于低能时在势谷中沿轨道方向的运动近似为谐振子运动，这些疤痕态重复出现的规律与一维谐振子类似，在能量上等间距出现，或  $n$  与  $E$  是线性关系。在数值上，这一规律对于我们所处理的小扰动下二维谐振子的各组轨道（图 4 和图 5）以及复杂势场中的各组轨道（图 7 和图 8）均成立。当然这一特征的根源是作用量与能量之间近似线性的关系。此外，并不需要作用量对能量有全局的线性关系，由于疤痕态重复出现的规律只与作用量的改变量有关，即  $\Delta S/\hbar = 2\pi$  或  $\Delta S = h$ ，因此只要在一个能量区间在某一类周期轨道上的作用量线性依赖于能量，那么在这个能量区间，这一轨道上的疤痕态就会在能量上等间距出现。注意由于作用量对能量的函数关系取决于轨道（势场沿该轨道的 profile），对于不同类型的轨道哪怕在相同的能量区间，函数关系也可能不同。所以在一类轨道上的疤痕态在能量上等间距出现并不会意味着其他轨道也是如此。但是对于一般的复杂势场的低能情况，当粒子局限在某个势谷中时，由于沿轨道方向的运动近似为谐振子运动，一般会有  $n$  与  $E$  的线性关系。

随机杂质系统。当系统足够随机，大部分态只提供杂乱的背景，那么这组凝聚在经典轨道上的比较强的局域态将具有一定的主导性，在态密度的谱中能够体现出来。在分析其重复出现的规律时，由于是非相对论量子系统，一般会假定按照  $\sqrt{E}$  的方式，我们此次的结果表明，在复杂势场下对于疤痕态重复出现的规律，要根据其经典轨道做相应的分析，找出作用量对能量的依赖关系，才能判断疤痕态按照  $E$  出现的方式。

## 4 结论

半经典量子化公式具有广泛的应用，被人们用来分析量子系统中各种与经典轨道有关的物理量，特别是在解释量子疤痕态及其出现的量子化条件时起到了重要的作用。我们研究了软墙量子子弹球以及复杂势场下的量子子弹球，考察其中疤痕态出现的量子化条件及其重复出现的规律，发现半经典方法在处理复杂势场下的量子子弹球时对疤痕态出现的量子化条件能够给出较好的预测，而且对于同一类轨道，甚至当轨道的稳定性发生改变时，半经典预测仍能与数据符合的较好。此外，一般认为半经典量子化公式对于较高能级适用的较好，对于低能级符合的较差。但是由于半经典量子化公式能够精确描述谐振子，而我们在大扰动光滑势场中的系统虽然整体动力学结构非常复杂，但在低能下当粒子主要约束在一个势谷中时，经典庞加莱截面上有非常大的 KAM 岛，粒子在 KAM 岛中心点所对应的轨道上运动时近似为一维简谐振动，因此半经典公式能够较好的描述相应疤痕态的量子化条件。当能量较高、经典动力学更加复杂，甚至经典粒子能够在两个势谷中穿梭时，我们的结果显示半经典公式仍然能够较好的给出疤痕态的量子化条件。

关于疤痕态重复出现的规律，在低能时，由于粒子沿轨道运动类似一维谐振子，疤痕态按照在能量  $E$  轴上等间距的方式出现，并且对于我们所处理的系统，在较高能级甚至轨道不稳定时仍是如此。对比之前非相对论性硬墙量子子弹球系统疤痕态按照  $\sqrt{E - E_0}$  等间距出现的结论，我们的结果是一个有益的补充，使得人们在处理软墙系统时必须重新审视这些规律。虽然我们期待这个结果对于无规的较复杂的势场中的量子系统也适用，但是必须指出，最终疤痕态在能量轴上重复出现的规律取决于作用量与能量的关系。因为疤痕态在作用量轴上等间距重复出现，因此对于一些特殊情况，必须要分析在所研究的轨道上作用量与能量之间的关系。对于我们的系统，对于大多数轨道，作用量均近似线性依赖于能量，导致疤痕态在能量轴上等间距出现的结果。

由于疤痕态对应着较强的局域化的态，尤其是稳定轨道上的局域态在开放系统中仍能存在<sup>[34]</sup>，成为影响系统态密度及输运性质的重要因素<sup>[35]</sup>，这些疤痕态重复出现的规律也会反映在态密度谱峰和输运特性上。我们期待这些结果对于理解普遍存在的无规长程杂质下的二维电子的态密度及输运性质能够提供一定的帮助，一方面可以解释实验观察到的现象，另一方面也可以反推出势谷的信息，有助于理解杂质的特性。

## 致谢

作者感谢北京大学汪知昌博士、江颖教授分享的未发表实验数据及讨论，引起了我们对这一理论问题的研究。本工作受基金委项目资助（No. 11775101），在此表示感谢。

- [1] Keller B J 1958 *Ann. Phys.* **4** 180.
- [2] Einstein A 1917 *Verh. Dtsch. Phys. Ges.* **19** 82.
- [3] Stone A D 2005 *Phys. Today* **58** 37.
- [4] Gutzwiller M C 1971 *J. Math. Phys.* **12** 343.
- [5] Cvitanovic P, Artuso R, Mainieri R, Tanner G, Vattay G, Whelan N, Wirzba A 2005 *Chaos: Classical and quantum* (Copenhagen: ChaosBook.org)
- [6] Lichtenberg A J, Lieberman M A 1992 *Regular and Chaotic Dynamics* 2nd edition (New York: Springer-Verlag).
- [7] Ott E 2002 *Chaos in Dynamical Systems* 2nd edition (Cambridge: Cambridge University Press).
- [8] Knauf A, Sinai Y G 1997 *Classical nonintegrability, quantum Chaos* (Birkhäuser: Springer-Verlag).
- [9] Berry M V 1989 *Phys. Scr.* **40** 335.
- [10] Stöckmann H J 2006 *Quantum Chaos: An Introduction* (New York: Cambridge University Press).
- [11] Haake F 2010 *Quantum Signatures of Chaos* 3rd edition (Berlin: Springer-Verlag).
- [12] Gutzwiller M C 2013 *Chaos in Classical and Quantum Mechanics* (New York: Springer-Verlag).
- [13] Xu G O 1995 *Quantum Chaotic Motions in Quantum Systems* (Shanghai: Shanghai Scientific and Technical Publishers).
- [14] Gu Y 1996 *Quantum Chaos* (Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House).

- [15] Casati G and Chirikov B 2006 *Quantum Chaos: Between Order and Disorder* (New York: Cambridge University Press).
- [16] McDonald S W, Kaufman A N 1979 *Phys. Rev. Lett.* **42** 1189.
- [17] Heller E J 1984 *Phys. Rev. Lett.* **53** 1515.
- [18] McDonald S W, Kaufman A N 1988 *Phys. Rev. A* **37** 3067.
- [19] Bogomolny E B 1988 *Physica D* **31** 169.
- [20] Berry M V 1989 *Proc. R. Soc. London Series A Math. Phys. Eng. Sci.* **423** 219.
- [21] Agam O, Fishman S 1993 *J. Phys. A Math. Gen.* **26** 2113.
- [22] Agam O, Fishman S 1994 *Phys. Rev. Lett.* **73** 806.
- [23] Kroetz T, Oliveira H A, Portela J S E, Viana R L 2016 *Phys. Rev. E* **94** 022218.
- [24] Luukko P J J, Drury B, Klales A, Kaplan L, Heller E J, Räsänen E 2016 *Sci. Rep.* **6** 37656.
- [25] Keski-Rahkonen J, Luukko P J J, Kaplan L, Heller E J, Räsänen E 2017 *Phys. Rev. B* **96** 094204.
- [26] Keski-Rahkonen J, Ruhanen A, Heller E J, Räsänen E 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 214101.
- [27] Keski-Rahkonen J, Luukko P J J, Åberg S, Räsänen E 2019 *J. Phys.: Cond. Matt.* **31** 105301.
- [28] Eckhardt B 1988 *Phys. Rep.* **163** 205.
- [29] Huang L, Lai Y C, Ferry D K, Goodnick S M, Akis R 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 054101.
- [30] Xu H Y, Huang L, Lai Y C, Grebogi C 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 064102.
- [31] Arnol'd V I 2013 *Mathematical methods of Classical mechanics* (New York: Springer Science & Business Media)
- [32] Miller W H 1975 *J. Chem. Phys.* **2** 996.
- [33] Voros A 1988 *J. Phys. A: Math. Gen.* **21** 685.
- [34] Huang L, Lai Y C, Luo H G, Grebogi C 2015 *AIP Adv.* **5** 017137.

[35] Zhang G Q, Chen X, Lin L, Peng H, Liu Z, Huang L, Kang N, Xu H Q 2020 *Phys. Rev. B* **101** 085404.

# Quantization condition of scarring states in complex soft-wall quantum billiards \*

Li Xiao-Liang Chen Xian-zhang Liu Chen-Rong Huang Liang<sup>†</sup>

(School of Physical Science and Technology, Lanzhou University, Lanzhou, Gansu 730000)

Quantum scar is an intriguing phenomena in quantum or wave dynamics that the wavefunction takes an exceptionally large value around the unstable periodic orbits. It has attracted much attention and advances the understanding of the semiclassical quantization. Most previous works involving quantum scars focus on hard-wall quantum billiards. Here we investigate the quantum billiard with a smooth confinement potential which possesses complex classical dynamics. We demonstrate that the semiclassical quantization approach works well for both the stable and unstable classical periodic orbits, besides that the shape of the orbits varies as the energy increases or even the stability switches. The recurrence rule of the quantum scars in this complex soft-wall billiard differs from that of the hard-wall nonrelativistic quantum billiard, e.g., being equally spaced in energy instead of being equally spaced in the square root of energy. These results implement the previous knowledge and may be exploited in understanding the measurements of density of states and transport properties in two dimensional electron systems with random long-range impurities.

**Keywords:** Quantum scar; soft-wall quantum billiard; complex smooth potential quantum billiard; quantization rule

**PACS:** 05.45.Mt, 03.65.Sq

---

\* We thank Dr. Wang Zhichang and Prof. Jiang Ying in Peking University for sharing their unpublished data and illuminating discussions, which led us to this theoretical investigation. This work was supported by the National Natural Science Foundation of China under Grants No. 11775101.

† Corresponding author. E-mail: huangl@lzu.edu.cn