大学物理实验绪论

电子科学与应用物理学院
大物实验中心

❖ 大学物理实验课程简介

❖ 测量、误差和不确定度

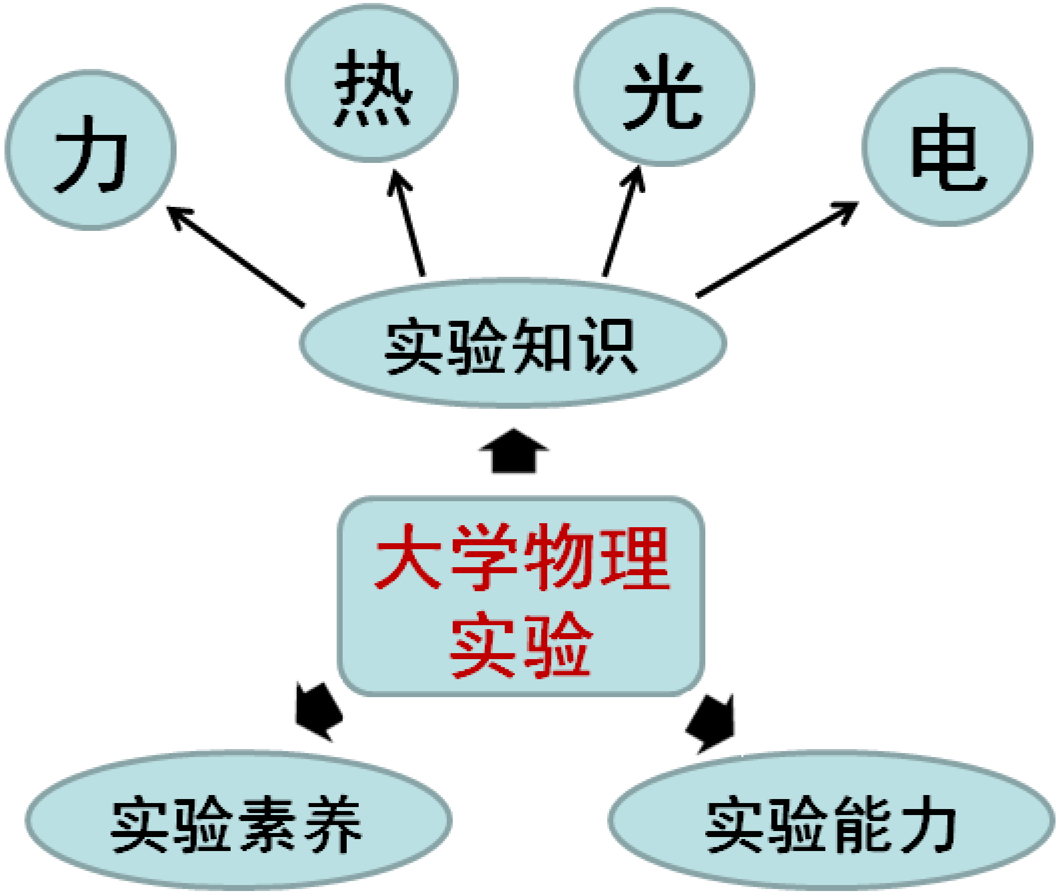
❖ 有效数字

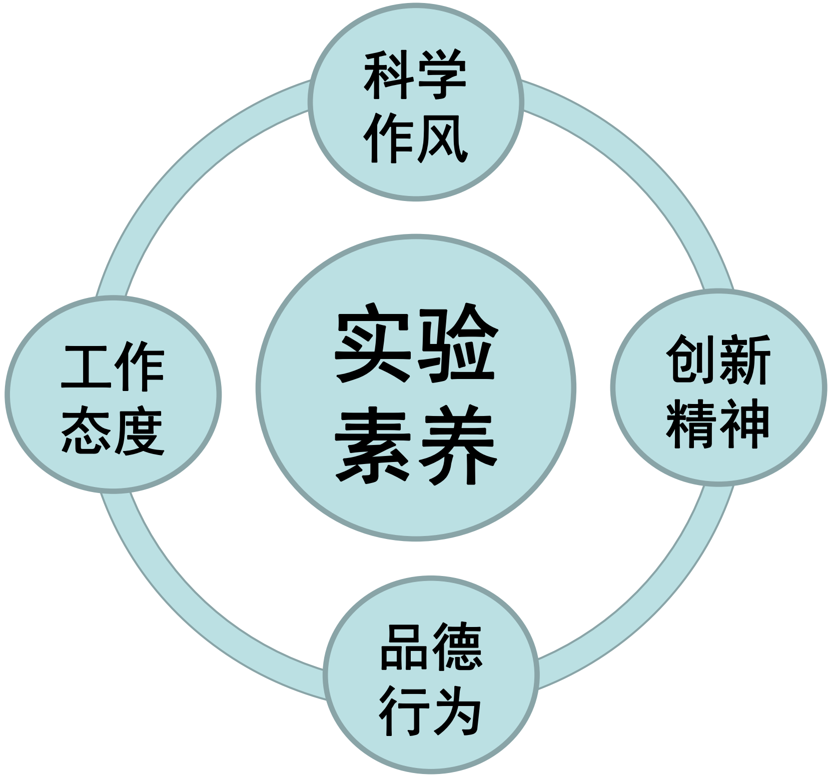
❖ 数据处理方法

误差理论基础知识

课程简介：

1、大物实验课的重要性





2、大物实验课的基本要求

(1) 预习要求：理论课讲完后，完成预习报告。

预习报告：实验题目、目的、原理（包括文字说明、计算公式、原理图）、实验数据表格。

(2) 课堂要求：

1) 根据自己的学号对号入座。

2) 实验完成后，数据必须经指导老师检查及签字。

3) 实验后请将仪器整理好，归回原处。
经教师允许后方可离开实验室。

(3) 课后要求：按时、独立完成实验报告。

3、大物实验课的成绩评定（48学时/年）

第一学期：平时成绩（70%）+操作考试（30%）
第二学期：平时成绩（40%）+操作考试（20%）
+笔试成绩（40%）

注意：（1）旷课2次及以上；
（2）缺交3次及以上实验报告；
（3）笔试成绩不及格。

每学期以上三个条件中只要满足其中一条，则期末成绩不及格（重修）。

- 大学物理实验课程简介
- 测量、误差和不确定度
- 有效数字
- 数据处理方法

误差理论基础知识

误差理论基础知识

❖测量、误差和不确定度

一、测量与误差的基本概念

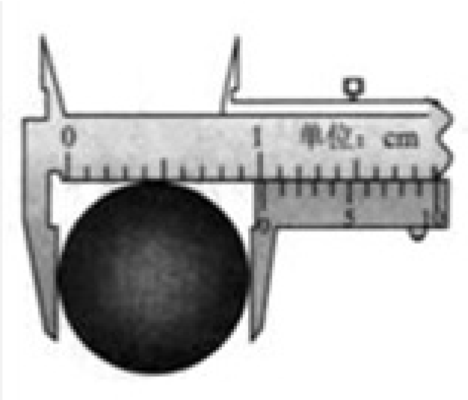
1、测量：是将待测物理量与选作计量标准的同类物理量进行比较，并得出其倍数的过程。倍数值成为待测物理量的数值，选作的计量标准称为单位。

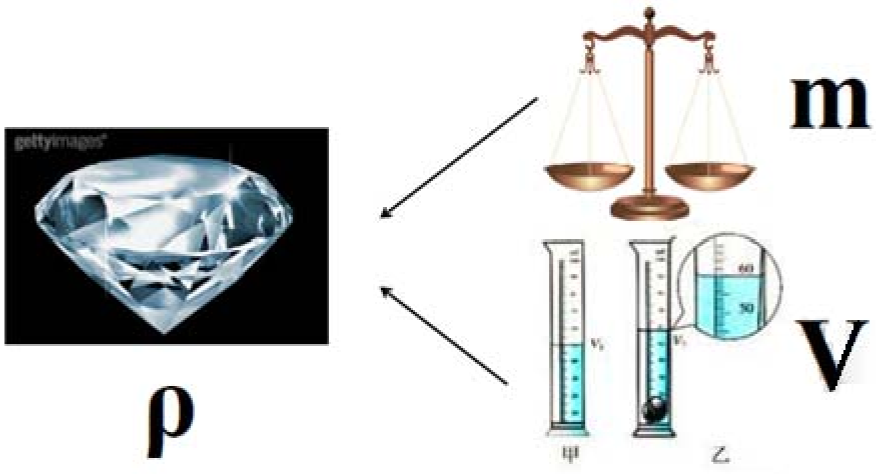
一个物理量的测量值应由数值和单位两部分组成。如：x=123.5mm

测量的分类

按测量手段测量可分为两类：

（1）**直接测量：**可以用测量仪器或仪表直接读出测量值的测量。





（2）**间接测量：**待测物理量无法进行直接测量，需要依据待测量与若干个直接测量值的函数关系求出。例如：ρ=m/V，v=s/t。

从测量条件上可以分为：

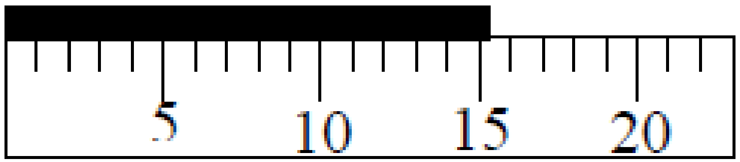
（1）**等精度测量**：测量条件完全相同，同一个人，用同样的方法，使用同样的仪器，并在相同的条件下，对同一物理量进行的多次测量。如：用同一把游标卡尺多次测量一个物体的长度。

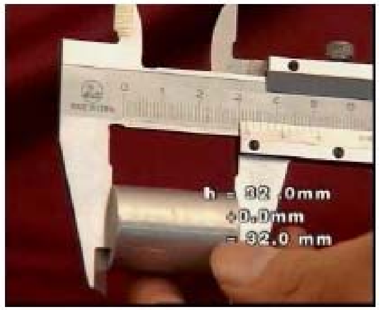
（2）**不等精度测量**：测量条件完全不同或部分不同，各测量结果的可靠程度也不相同的的一系列测量。如：用米尺和游标卡尺测量同一个物体的长度。

物理实验中所说的多次测量通常指**等精度测量**。

2、误差

（1）真值：在某一时空状态下，待测物理量所具有的客观实际值，用X_0表示。





米尺：15.**2**mm，15.**3**mm

游标卡尺：15.2**2**mm，15.2**4**mm

千分尺：15.23**4**mm，15.23**6**mm

（2）误差：测量值X和真值X_0之间的差异：

$$\Delta(\text{误差}) = X - X_0$$

（3）误差的分类：
- 系统误差
- 随机误差
- 粗大误差

1）系统误差：在多次测量同一物理量时，符号和绝对值保持不变或按某一确定规律变化的误差。

系统误差：
- 仪器缺陷（例：米尺刻度不准、零点没调好、天平不等臂）
- 理论方法的近似（例：$\theta \le 5^\circ$ 时，$\sin\theta \approx \mathrm{tg}\theta \approx \theta$）
- 环境变化（例：受温度影响，尺子热胀冷缩）
- 个人读数的习惯（例：有人读数习惯偏高，有人习惯偏低）

特征：变化是有规律的，增加测量次数无法减小系统误差。

2）随机误差（偶然误差）：

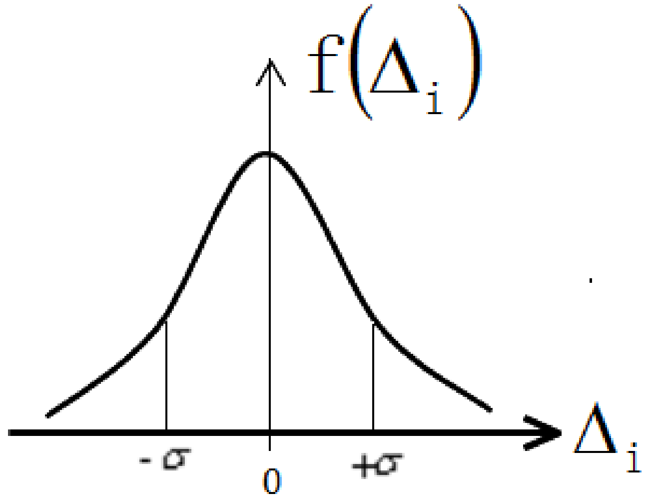
在多次测量同一物理量时，误差的符号和绝对值的变化：时大时小、时正时负，以不可预定变化着的误差。

（例：雷电的影响，电源电压不稳，个人在估读时的变动性。）

满足正态分布的特征：

a）单峰性；b）对称性；c）有界性

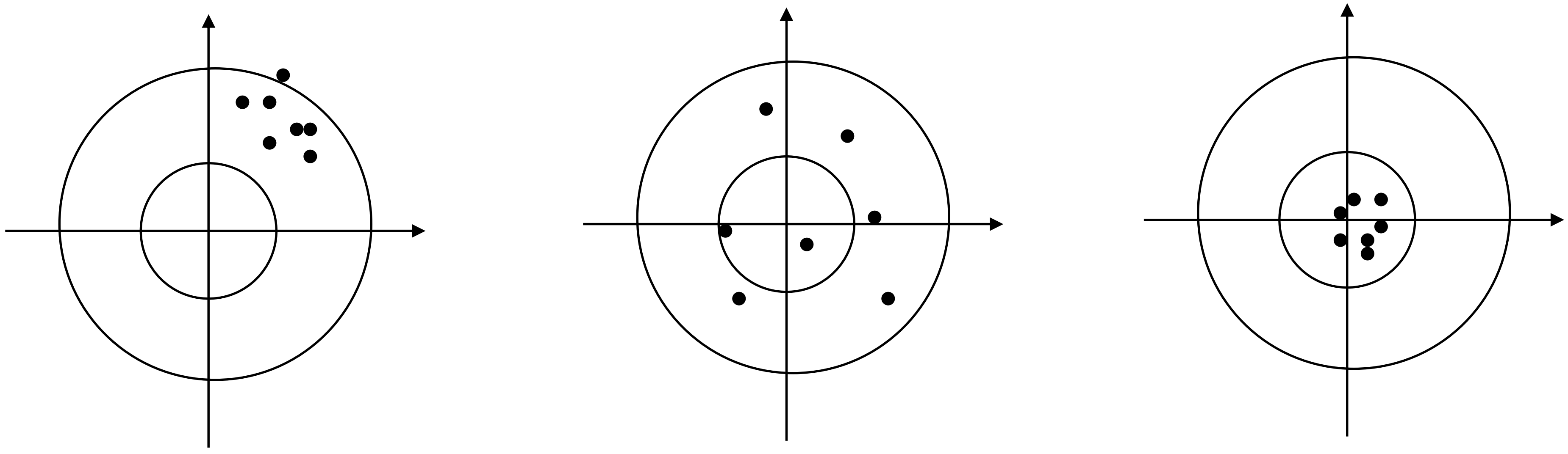
d）抵偿性 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i}^{n}\Delta_i = 0$



3）粗大误差：

由于观察者错误使用仪器、观察错误或记录错误数据等不正常情况下引起的误差。

3、测量的精密度、准确度和精确度



(1) (2) (3)

(1) 精密度高，即随机误差小
准确度低，即系统误差大

(2) 准确度高，即系统误差小
精密度低，即随机误差大

(3) 精密度和
准确度均高，
即随机误差和
系统误差均小

二、随机误差的处理

1、算术平均值

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

根据抵偿性 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i}^{n}\Delta_i=0$ 而 $\Delta_i=x_i-x_0$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i}^{n}(x_i-x_0)=0$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i}^{n}x_i-x_0=0$$

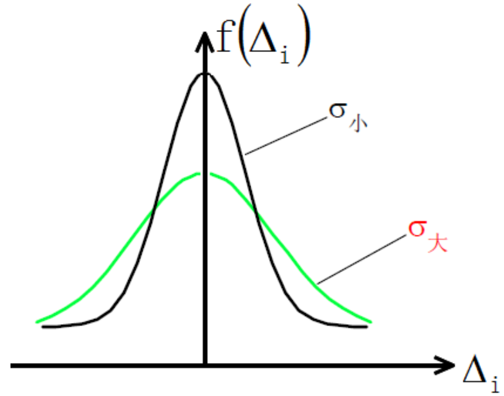
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\overline{x}=x_0$$

即当 $n\to\infty$，$\overline{x}\to x_0$

2、标准误差

例：a）72，73，74，75，76，77，78

b）50，60，70，75，80，90，100



平均值相同，
但离散程度不同

1）测量列的标准误差

n次测量中某次测量值的标准误差

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_0)^2}{n}} \Rightarrow \sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n-1}}$$

（1）对真值的标准误差

（2）对测量列中某次测量值的标准误差

2）算术平均值的标准误差

算术平均值本身也有离散性。

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n(n-1)}}$$

（3）对算术平均值的标准误差

结果表达式：

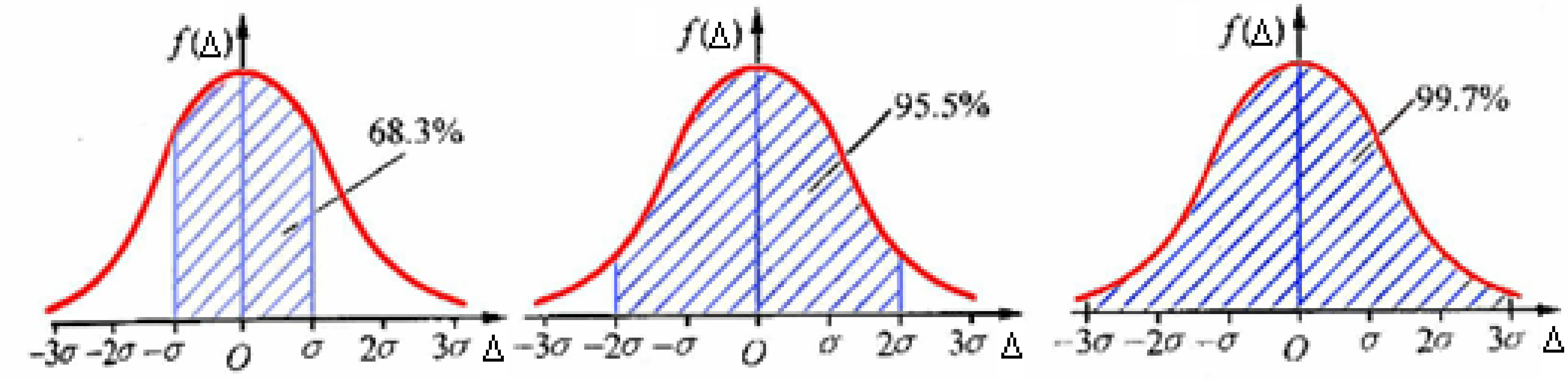
$$\begin{cases} \mathrm{X} = \overline{\mathrm{X}} \pm \sigma_{\overline{X}}（单位） \\ \mathrm{E}_X = \dfrac{\sigma_{\overline{X}}}{\overline{X}} \times 100\% \end{cases}$$

（Ex为相对误差）

$$x = \overline{x} \pm \sigma_{\overline{X}}\text{（单位）}$$

任意一次测量值落入区间$[\overline{x}-\sigma_{\overline{X}},\overline{x}+\sigma_{\overline{X}}]$的概率为

$$P = \int_{-\sigma}^{+\sigma} f(\Delta)\,d\Delta = 68.3\%$$ （也称置信概率）



3σ也称极限误差

三、测量的不确定度

1、不确定度的概念

测量不确定度是指对测量结果不能肯定的程度。即提供测量结果的范围，使被测量的值能以一定的概率位于其中。

2、不确定度的分类

1）A类不确定度：

可以用统计方法评定

$$\sigma_A = \sigma_{\overline{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n(n-1)}}$$

2）B类不确定度：

不可以用统计方法评定

$$\sigma_B = \sigma_{仪} = \frac{\Delta_{仪}}{\sqrt{3}}$$

仪器产生的最大可能误差$\Delta_{仪}$

（1）厂家直接给出

（2）用仪器的最小刻度估测：

$$\Delta_{仪}= 最小刻度/2$$

例：米尺的最小刻度为1mm，$\Delta_{仪}$= 1mm/2=0.5mm。

（3）用仪器的级别进行估测：

$$\Delta_{仪}=量程\times 级别\%$$

例：量程为100V的一级电压表，$\Delta_{仪}$=100 ×1%= 1.00V；

量程为10V的一级电压表，$\Delta_{仪}$= 10 ×1%= 0.10V。

3、合成标准不确定度

在实际测量中，测量值可能既有A类不确定度分量，也有B类不确定度分量，这样就要合并成为一个总标准不确定度 $\sigma_{合}$

$$\sigma_{合} = \sqrt{\sigma_A{}^2 + \sigma_B{}^2}$$

$$\begin{cases} x = \bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}}（单位） \\ E_x = \dfrac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{X}} \times 100\% \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \bar{x} \pm \sigma_{合}（单位） \\ E_x = \dfrac{\sigma_{合}}{\bar{X}} \times 100\% \end{cases}$$

四、直接测量结果的不确定度表示

1、单次测量

$$\begin{cases} X = X_{测} \pm \sigma_{仪}（单位） \\ E_x = \dfrac{\sigma_{仪}}{X_{测}} \times 100\% \end{cases}$$

2、多次测量

$$\begin{cases} X = \overline{X} \pm \sigma_{合}（单位） \\ E_X = \dfrac{\sigma_{合}}{\overline{X}} \times 100\% \quad 或 \quad A_X = \dfrac{\left|\overline{X} - X_0\right|}{X_0} \times 100\% \end{cases}$$

结果表示：

$$\begin{cases} X = \overline{X} \pm \sigma_{合}（单位） \\ E_X = \dfrac{\sigma_{合}}{\overline{X}} \times 100\% \quad 或 \quad A_x = \dfrac{\left|\overline{X} - X_0\right|}{X_0} \times 100\% \end{cases}$$

结果表示原则：

1) 标准不确定度σ仅保留一位有效数字，尾数只进不舍；

例：$\sigma_{合}=0.021cm \approx 0.03cm$

2) 平均值$\overline{X}$最后一位有效数字取至与σ所在位对齐，尾数四舍六入五凑偶；

例：$X=15.42 \pm 0.03(cm)$；

3) 相对不确定度E_x或A_x保留两位有效数字，尾数只进不舍。

例：$E_x=0.321\% \approx 0.33\%$

四舍六入五凑偶：

（1）若尾数5后面数字均为0，则5前一位是奇数就进一位，5前一位是偶数就舍去；

例：$\overline{X}$ 要保留四位有效数字，

1）若 $\overline{x}=15.3350$，则 $\overline{x}=15.34$

2）若 $\overline{x}=15.3450$，则 $\overline{x}=15.34$

（2）若尾数5后面还有不为0的数字，则都进一位。

例：$\overline{X}$ 要保留四位有效数字，

1）若 $\overline{x}=15.33501$，则 $\overline{x}=15.34$

2）若 $\overline{x}=15.34501$，则 $\overline{x}=15.35$

直接测量量不确定度的计算

例题：用米尺测量一钢丝长度,共测六次（$x_{理}$=14.3mm）。测量数据如下：x_1=14.0mm、x_2=14.4mm、x_3=14.9mm、x_4=14.2mm、x_5=14.1mm、x_6=14.8mm，试计算测量结果。

结果表示：

$$\begin{cases} x = \overline{x} \pm \sigma_{合}\text{（单位）} \\ E_X = \dfrac{\sigma_{合}}{\overline{X}} \times 100\% \quad \text{或} \quad A_x = \dfrac{\left|\overline{x} - x_0\right|}{x_0} \times 100\% \end{cases}$$

直接测量量不确定度的计算

例题：用米尺测量一钢丝长度，共测六次（$x_{理}$=14.3mm）。测量数据如下：x_1=14.0mm、x_2=14.4mm、x_3=14.9mm、x_4=14.2mm、x_5=14.1mm、x_6=14.8mm，试计算测量结果。

解：测量列的算术平均值为：$\overline{x}=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}x_i=14.4mm$

测量列的A类不确定度为：$\sigma_{\overline{x}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{6}(x_i-\overline{x})^2}{6(6-1)}}=0.153mm$

测量列的B类不确定度为：$\sigma_{仪}=\frac{\Delta_{仪}}{\sqrt{3}}=\frac{0.5}{\sqrt{3}}=0.289mm$

合成标准不确定度为：$\sigma_{合}=\sqrt{\sigma_{\bar{x}}^{2}+\sigma_{仪}^{2}}=0.327mm\approx0.4mm$

测量列的相对不确定度为：$E_x=\frac{\sigma_{合}}{\bar{X}}\times100\%\approx2.3\%$

或 $A_x=\frac{|\bar{x}-x_{理}|}{x_{理}}\times100\%$

$=\frac{|14.4-14.3|}{14.3}\times100\%\approx0.70\%$

测量结果表示为：

$$\begin{cases} X=\bar{X}\pm\sigma_{合}=14.4\pm0.4(mm) \\ E_x=2.3\%\text{或}A_x=0.70\% \end{cases}$$

五、间接测量结果的不确定度表示

例题：要测量某物体的运动速度v（$v=S/t$），给出5次位移测量结果：S_1，S_2，S_3，S_4，S_5，其对应的时间分别为：t_1，t_2，t_3，t_4，t_5，试计算v的平均值和不确定度。

解：$$\overline{v} = \frac{1}{5}(v_1 + v_2 + ... + v_5) \quad (\times)$$

$$\sigma_{\overline{v}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{5}(v_i - \overline{v})^2}{5(5-1)}} \quad (\times)$$

间接测量函数关系：$Y=f(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_m)$

其中，Y为间接测量量，X_1，X_2，X_3，…，X_m为直接测量量，其算术平均值和标准不确定度分别为$\overline{X}_1$，$\overline{X}_2$，$\overline{X}_3$，…，$\overline{X}_m$和σ_1，σ_2，σ_3，…，σ_m。

间接测量值：$\overline{Y}=f(\overline{X}_1, \overline{X}_2, \overline{X}_3, \ldots, \overline{X}_m)$

间接测量结果的不确定度为：

$$\sigma_y = \sqrt{\left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial X_1}\sigma_1\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial X_2}\sigma_2\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial X_m}\sigma_m\right)^2}$$

不确定度传递公式

五、间接测量结果的不确定度表示

例题：要测量某物体的运动速度*v*（*v*=*S*/*t*），给出5次位移测量结果：S_1，S_2，S_3，S_4，S_5，其对应的时间分别为：t_1，t_2，t_3，t_4，t_5，试计算*v*的平均值和不确定度。

解：

$$\overline{v}=\frac{\overline{s}}{\overline{t}}\ ,\quad \sigma_{\overline{v}}=\sqrt{\left(\frac{\partial\overline{V}}{\partial s}\sigma_{s合}\right)^2+\left(\frac{\partial\overline{V}}{\partial t}\sigma_{t合}\right)^2}$$

$$\sigma_{s合}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{5}(s_i-\overline{s})^2}{5(5-1)}+\sigma_{s仪}^2}\ ,\quad \sigma_{t合}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{5}(t_i-\overline{t})^2}{5(5-1)}+\sigma_{t仪}^2}$$

间接测量结果的相对不确定度为：

$$E_y = \sqrt{\left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial X_1}\frac{\sigma_1}{\bar{Y}}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial X_2}\frac{\sigma_2}{\bar{Y}}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial X_m}\frac{\sigma_m}{\bar{Y}}\right)^2}$$

以乘除为主间接测量的相对不确定度为：

$$\ln Y = \ln f(X_1, X_2, \ldots, X_m)$$

$$E_y = \sqrt{\left(\frac{\partial \ln \bar{f}}{\partial X_1}\sigma_1\right)^2 + \left(\frac{\partial \ln \bar{f}}{\partial X_2}\sigma_2\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial \ln \bar{f}}{\partial X_m}\sigma_m\right)^2}$$

间接测量量不确定度的计算

例题：用流体静力称衡法测量固体密度的公式为 $\rho=\dfrac{m\rho_0}{m-m_1}$，若测得m=(29.05±0.03)(g)，$m_1$=(19.07±0.03)(g)，$\rho_0$=(0.9998±0.0002)(g/cm³)，试计算测量结果。

结果表示：

$$\begin{cases} X = \overline{X} \pm \sigma_{合}(\text{单位}) \\ E_X = \dfrac{\sigma_{合}}{\overline{X}} \times 100\% \quad \text{或} \quad A_x = \dfrac{\left|\overline{X} - X_0\right|}{X_0} \times 100\% \end{cases}$$

间接测量量不确定度的计算

例题：用流体静力称衡法测量固体密度的公式为 $\rho=\dfrac{m\rho_0}{m-m_1}$，若测得m=(29.05±0.03)(g)，$m_1$=(19.07±0.03)(g)，$\rho_0$=(0.9998±0.0002)(g/cm³)，试计算测量结果。

解： $\bar{\rho}=\dfrac{\bar{m}\bar{\rho}_0}{\bar{m}-\bar{m}_1}$ =29.05×0.9998/(29.05-19.07) =2.91 (g/cm³)

$$\sigma_\rho=\sqrt{\left(\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial m}\sigma_m\right)^2+\left(\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial m_1}\sigma_{m_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial\rho_0}\sigma_{\rho_0}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left[\left(\frac{1}{\bar{m}-\bar{m}_1}-\frac{\bar{m}}{(\bar{m}-\bar{m}_1)^2}\right)\bar{\rho}_0\sigma_m\right]^2+\left[-\frac{-\bar{m}\bar{\rho}_0}{(\bar{m}-\bar{m}_1)^2}\sigma_{m_1}\right]^2+\left(\frac{\bar{m}}{\bar{m}-\bar{m}_1}\sigma_{\rho_0}\right)^2}$$

$$=0.01g/cm^3$$

对 $\bar{\rho}=\dfrac{\bar{m}\bar{\rho}_0}{\bar{m}-\bar{m}_1}$ 等式两边取对数，得

$$\ln\bar{\rho}=\ln\bar{m}+\ln\bar{\rho}_0-\ln(\bar{m}-\bar{m}_1)$$

$$\mathrm{E}_\rho=\sqrt{\left(\frac{\partial\ln\bar{\rho}}{\partial m}\sigma_m\right)^2+\left(\frac{\partial\ln\bar{\rho}}{\partial m_1}\sigma_{m_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\ln\bar{\rho}}{\partial\rho_0}\sigma_{\rho_0}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left[\left(\frac{1}{\bar{m}}-\frac{1}{\bar{m}-\bar{m}_1}\right)\sigma_m\right]^2+\left[\frac{1}{(\bar{m}-\bar{m}_1)^2}\sigma_{m_1}\right]^2+\left(\frac{1}{\bar{\rho}_0}\sigma_{\rho_0}\right)^2}=0.36\%$$

$$\sigma_\rho=\bar{\rho}E_\rho=0.01g/cm^3$$

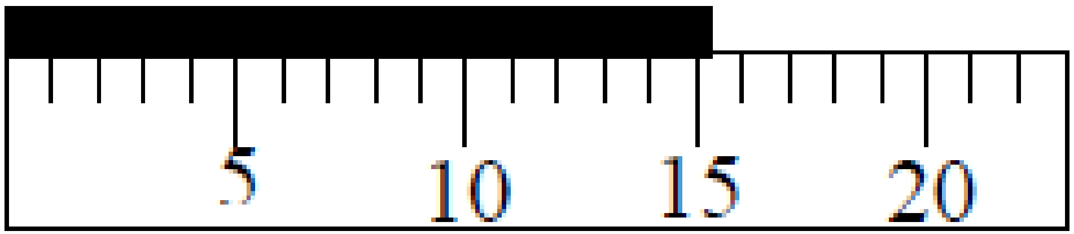
$$\begin{cases}\rho=\bar{\rho}\pm\sigma_\rho=2.91\pm0.01g/cm^3\\ E_\rho=0.36\%\end{cases}$$

- 大学物理实验课程简介
- 测量、误差和不确定度
- **有效数字**
- 数据处理方法

❖有效数字

一、有效数字的定义

$$1.35 \overset{?}{=} 1.350 \overset{?}{=} 1.3500$$



15.1mm　　15.2mm　　15.3mm

可靠数字+最后一位可疑数字=有效数字。

二、有效数字的应用

（1）有效数字与仪器有关，测量值的有效数字既反映被测量物理量的大小又反映所用仪器的测量精度。

例：米尺：45.5mm；游标卡尺：45.46mm；千分尺：45.460mm。

（2）“0”在有效数字中的作用：“0”的位置不同，作用也不同。如：0.01010m中的前两个“0”不是有效数字，非0数码中间和后面的“0”都是有效数字。

（3）科学表达式：把数字写成10的幂次方形式，小数点前只取一位不为0的数。

例：2352 ± 12（m）$\xrightarrow{\text{改正}}$（2.35 ± 0.02）×10^3（m）

（4）不确定度的取位和结果的表示：

1）标准不确定度σ仅取一位有效数字，尾数只进不舍；

2）平均值的最后一位有效数字取至与标准不确定度σ所在位对齐，尾数四舍五入；

3）相对不确定度取两位有效数字，尾数只进不舍。

（5）单位换算：测量结果的单位换算不影响有效数字的位数。例：**1200g≠1.2kg， 1200g =1.200kg**

（6）常数和系数的有效数字为无穷多位。计算时取到不降低参与运算变量的有效数字位数即可。

例：在计算$\sqrt{2}+2.25$时，取$\sqrt{2}\approx 1.414$。

三、有效数字运算规则

1、四则运算

（1）参加运算的各数字可以认为最后一位是可疑的，其他的数码是可靠的。

（2）可靠数码之间的运算结果仍为可靠数码。

（3）可疑数码参加四则运算的结果是可疑数码，进位和借位认为是可靠数码。

（4）最后结果按四舍六入五凑偶仅保留一位可疑数码。

1）加减法运算规则：

5.345 + 30.2

$$
\begin{array}{r}
5.345 \\
+\ 30.2 \\
\hline
35.545
\end{array}
$$

5.345 + 30.2=35.5

同样有：

35.48 - 20.3=15.2

参与运算的各项，**哪一项的最后一位有效数字最靠前，计算结果就取到那一位，**然后四舍六入五凑偶。

2）乘除法运算规则：

$$
\begin{array}{r}
4.178 \\
\times \quad 10.1 \\
\hline
4178 \\
4178 \\
\hline
42.1978
\end{array}
$$

$42.1978=42.2$

参与运算的各项，**哪一项有效数字位数最少，计算结果就保留那么多位有效数字，**然后四舍六入五凑偶。

例：$2.\underline{7}\times3.90\underline{2}\div3.456\underline{7}=3.0478201753\ldots$

$2.\underline{7}\times3.90\underline{2}\div3.456\underline{7}=3.0$

2、函数运算

已知x，计算$y=f(x)$时，取 σ_x为x的最后一位的数量级，利用不确定度传递公式$\sigma_y=|f'(x)|\sigma_x$估计y的可疑数码位置，y的计算结果最后一位取σ_y的那一位。

例：已知$x=56.7$，$y=\ln x$，计算y

解：取 $\sigma_x=0.1$

$$\sigma_y=|f'(x)|\sigma_x=\sigma_x/x=0.002$$

所以 $y=\ln 56.7=4.03777\ldots=4.038$

- 大学物理实验课程简介
- 测量、误差和不确定度
- 有效数字
- **数据处理方法**

❖ 常用的数据处理方法

1、列表法

2、作图法

3、逐差法

4、最小二乘法

一、列表法

原则：

（1）简单明了，便于看出有关物理量之间的关系，便于处理数据。

（2）在表格中均应标明物理量的名称和单位。

（3）表格中数据要正确反映有效数字。

（4）必要时应对某些项目加以说明。

例：测圆环直径　仪器：读数显微镜

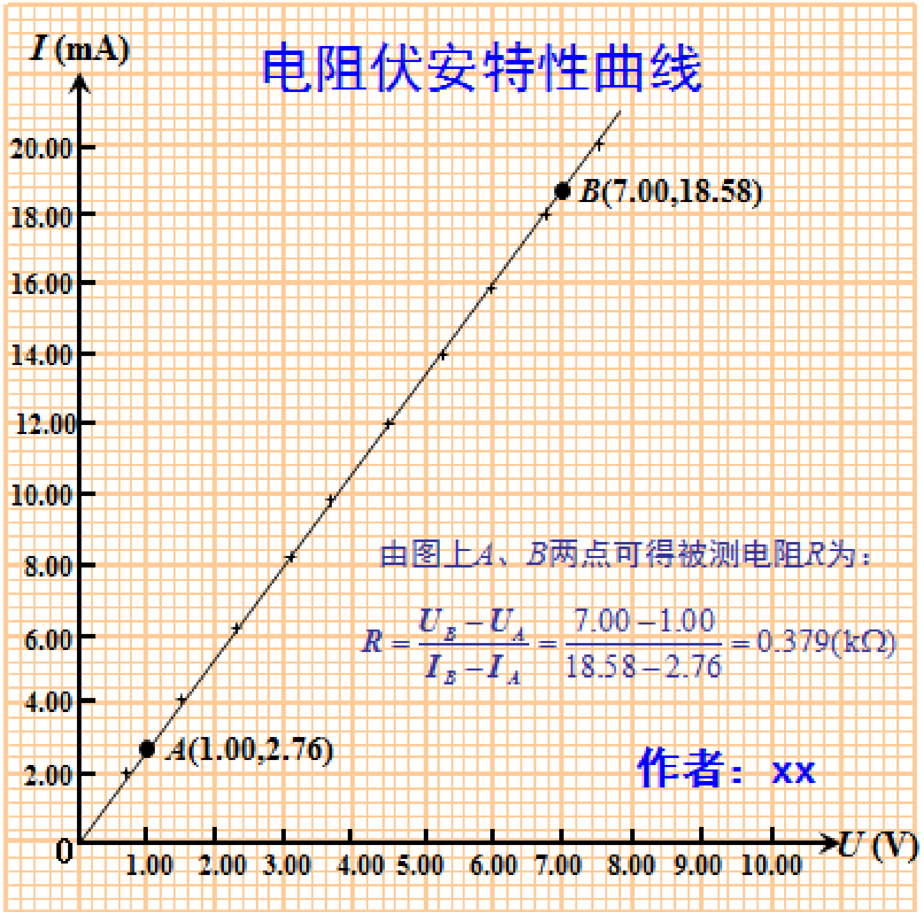
测量次序	左读数/mm	右读数/mm	直径 /mm
1	12.764	18.762	5.998
2	10.843	16.838	5.995
3	11.987	17.978	5.996
4	11.588	17.584	5.996
5	12.346	18.338	5.992
6	11.015	17.010	5.994
7	12.341	18.335	5.994
直径平均值 /mm			5.995

二、作图法（分为“图示法”和“图解法”）

1、图示法

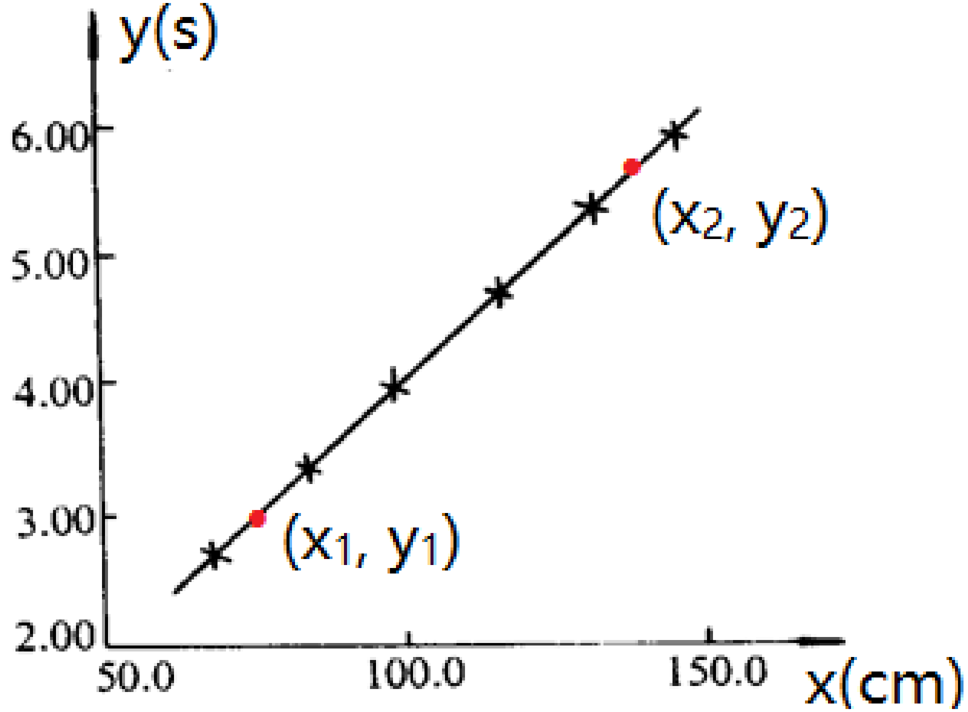
作图时要先整理出数据表格，并要用坐标纸作图。

1）选择合适的坐标分度值；
2）标明坐标轴物理量和单位；
3）标明实验点，实验点可用“+”、“×”等符号标出；
4）连实验图线，一般不强求直线或曲线通过每个实验点。一定不要连成折线；
5）写出图纸名称。



2、图解法

是根据实验数据所做的曲线，用解析法找出相应的函数形式，并求出其函数的参数，得出具体的解析式。



$$y = kx + b$$

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$b = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}$$

三、最小二乘法

1、一元线性回归

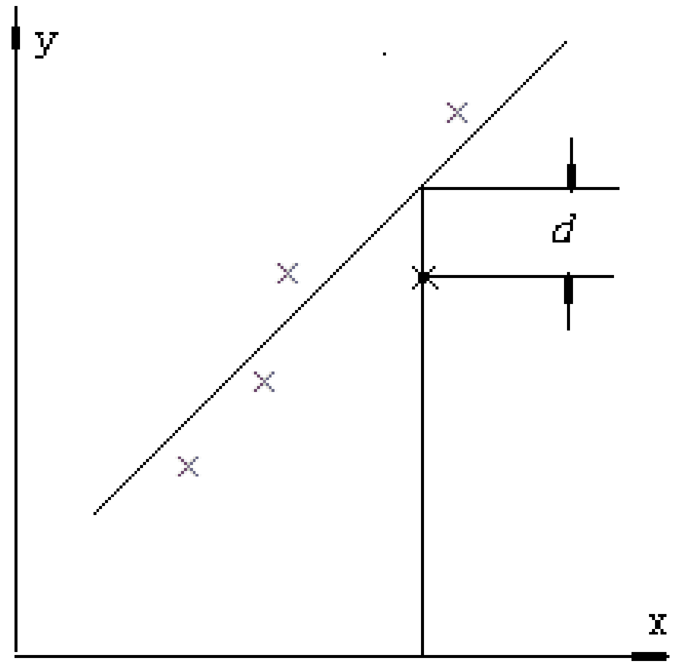
是根据实验数据所做的曲线，用解析法找出相应的函数形式，并求出其函数的参数，得出具体的解析式。

原理：在最佳拟合直线上，各相应点的值与测量值之差的平方和应比其他的拟合直线上的都要小。

即

$$T = \sum_{i=1}^{n} d_i^2 = d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_n^2$$

最小



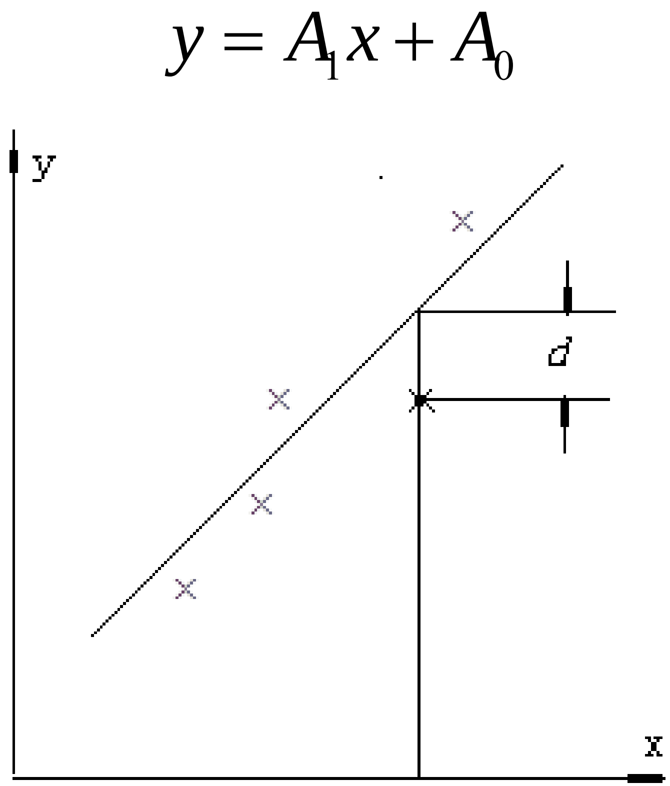
假设两个变量x和y存在线性关系：

$$y = A_1 x + A_0$$

实验测得的一组数据为：

x： x_1， x_2， …， x_n

y： y_1， y_2， …， y_n



如图所示：

$$d_1 = y_1 - A_0 - A_1 x_1$$

$$d_2 = y_2 - A_0 - A_1 x_2$$

…… ……

$$d_n = y_n - A_0 - A_1 x_n$$

于是有：

$$T = \sum_{i=1}^{n} d_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - A_0 - A_1 x_i)^2$$

根据最小二乘法的原理，如果A_0、A_1的值使T最小，应有下式成立：

$$\frac{\partial T}{\partial A_0} = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - A_0 - A_1 x_i) = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial A_1} = -2\sum_{i=1}^{n}[(y_i - A_0 - A_1 x_i)x_i] = 0$$

求解上述方程可得：

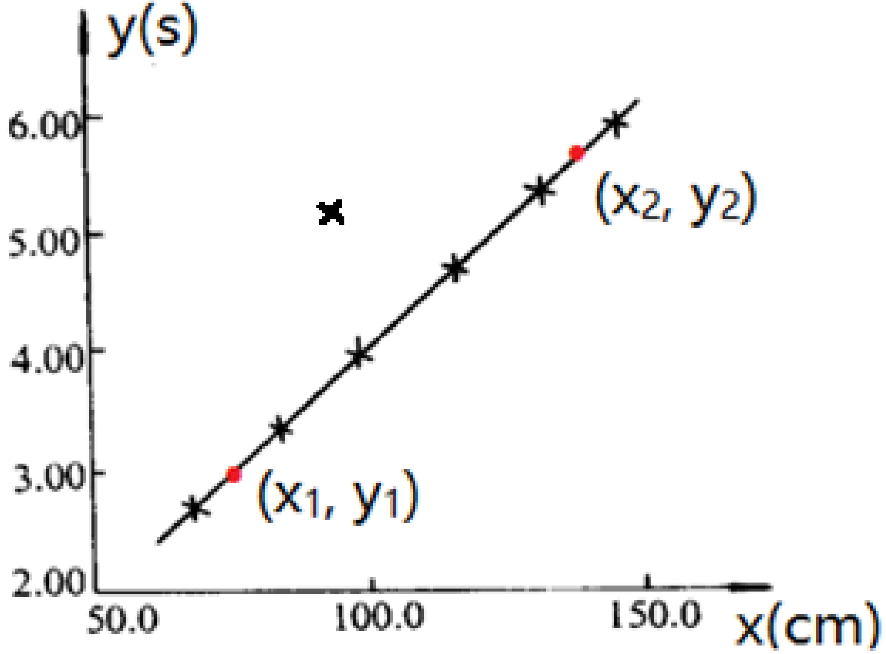
$$\begin{cases} A_1 = \dfrac{\overline{x}\cdot\overline{y} - \overline{xy}}{(\overline{x})^2 - \overline{x^2}} \\ A_0 = \overline{y} - A_1\overline{x} \end{cases}$$

公式中：

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,\ \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i,\ \overline{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i,\ \overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}$$

图解法

$$y = kx + b$$



$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad b = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}$$

最小二乘法

$$y = A_1 x + A_0$$

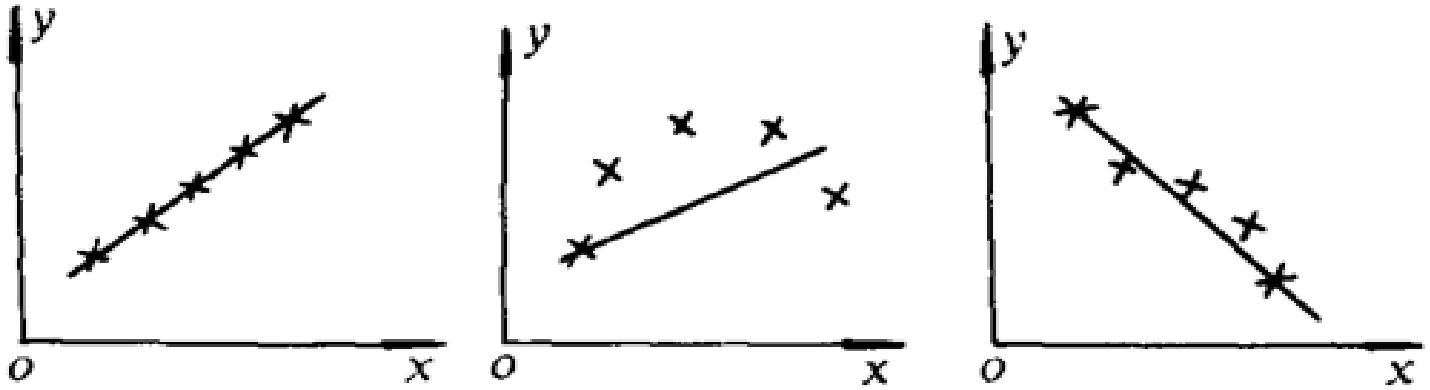
$$\begin{cases} A_1 = \dfrac{\bar{x} \cdot \bar{y} - \overline{xy}}{(\bar{x})^2 - \overline{x^2}} \\ A_0 = \bar{y} - A_1 \bar{x} \end{cases}$$

2、相关系数γ

γ是反映数据点与所拟合直线之间线性程度的物理量。

$$\gamma = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\sqrt{(\overline{x^2} - (\overline{x})^2)(\overline{y^2} - (\overline{y})^2)}}$$

$$0 \le |\gamma| \le 1$$



(a) $r \approx 1$　　(b) $r \approx 0$　　(c) $r \approx -0.8$

在大学物理实验中，一般当|γ|≥0.9时，就可以认为两个物理量之间存在比较密切的线性关系。

四、逐差法

1、逐差法的使用条件

1）自变量x是等间距变化；

2）一般两物理量之间呈线性关系。

2、逐差法的应用

例：测量弹簧的倔强系数实验中，让外力F（如每次加一克砝码）等间隔变化9次，分别记录弹簧下端的位置：L_0，L_1，L_2，…，L_9。

求：弹簧的倔强系数，即每增加一克砝码弹簧的平均伸长量。

一般的算法：

把所测的数据逐项相减得：

$\triangle L_1 = L_1 - L_0$，

$\triangle L_2 = L_2 - L_1$，

…… ……

$\triangle L_9 = L_9 - L_8$

$$\overline{\Delta L} = [(L_9 - L_8) + (L_8 - L_7) + \ldots + (L_1 - L_0)]/9$$

$$= (L_9 - L_0)/9$$

缺点：中间项全部抵消了，只剩始末两次测量值起作用。

采用逐差法：

把等间隔所测量的数据对半分成两组：

L_0，L_1，L_2，L_3，L_4 和

L_5，L_6，L_7，L_8，L_9，逐项相减再求平均值

$$\Delta\overline{L'} = [(L_9 - L_4) + (L_8 - L_3) + \ldots + (L_5 - L_0)] / 5$$

$$\Delta\overline{L} = \Delta\overline{L'} / 5$$

优点：所有测量值都起作用，保证了多次测量的优越性。

第一章 误差和数据处理基本知识

1. 指出下列情况属于随机误差还是系统误差：(1)视差、(2)天平零点漂移、(3)游标尺零点不准、(4)照相底板收缩、(5)水银温度计毛细管不均匀、(6)电表的接入误差、(7)雷电影响、(8)、振动、(9)电源不稳。

答：(1)、(3)、(4)、(5)、(6)属于系统误差；

(2)、(7)、(8)、(9)属于随机误差。

2. 已知$\triangle_{仪}=0.005$cm,求下列各组的 $\bar{x}$、$\sigma_{合}$、E_x。

(1)4.113,4.198,4.152,4.147,4.166,4.154,4.132,4.170,(cm)

(2)2.904,2.902,2.900,2.903,2.900,2.904(cm)

(3)4.496,4.504,4.538,4.504,4.498,4.490(cm)

(4)2.010,2.010,2.011,2.012,2.009,1.980(cm)

解：

序号	$\bar{x}$ (cm)	$\sigma_{合}$ (cm)	$\bar{x}\pm\sigma_{合}$ (cm)	E_X (%)
(1)	4.154	0.01	4.15±0.01	0.25
(2)	2.902	0.003	2.902±0.003	0.11
(3)	4.505	0.008	4.505±0.008	0.17
(4)	2.005	0.006	2.01±0.006	0.30

3. 用单摆测得重力加速度 $g_1=978\pm2(cm/S^2)$,用自由落体仪测得重力加速度 $g_2=981.1\pm0.6(cm/S^2)$,已知当地 g 的标准值为 $g_0=979.729(cm/S^2)$,问：

(1) g_1、g_2 中哪一个存在严重的系统误差？

(2)如果不知道 g_0,从 g_1 和 g_2 能得出什么结论？

答：(1)因 $|g_1-g_0|>|g_2-g_0|$,根据系统误差的定义和性质可知 g_1 存在严重的系统误差；

(2)因 $\sigma_{g1}>\sigma_{g2}$,可以据此认为 g_2 的精度(重复度)高,即随机误差比 σ_{g1} 小。若不知 σ_{g0},仅根据合成不确定度的大小,无法判断系统误差的大小或存在与否。

4. 用米尺测得某一正方形边长为 $a_1=2.01$cm,$a_2=2.00$cm,$a_3=2.04$cm,$a_4=1.98$cm,$a_5=1.97$cm,$\triangle_{仪}=0.005$cm。求正方形面积与周长的平均值、不确定度和相对不确定度。

答：

	平均值	不确定度	结　果	相对不确定度
边长 a	$a=2.00$cm	$\sigma_a=0.02cm$	$a=(2.00\pm0.02)cm$	$E_a=0.58\%$
面积 s	$s=4.00cm^2$	$\sigma_s=0.05cm^2$	$s=(4.00\pm0.05)cm^2$	$E_s=1.2\%$
周长 L	$L=8.00$cm	$\sigma_L=0.05cm$	$L=(8.00\pm0.05)cm$	$E_L=0.58\%$

5. 一个铅园柱体,测得其直径 $d=(2.04\pm0.01)cm$, 高 $h=(4.12\pm0.01)cm$,质量 $m=(149.18\pm0.05)g$

① 计算铅的密度 ρ；

② 计算铅的密度 ρ 的不确定度和相对不确定度；

③ 正确表示结果。

答：① $\bar{\rho}=4m/(\pi d^2h)=11.1g/cm^3$

② $E_\rho=\sqrt{(\sigma_m/m)^2+(2\sigma_d/d)^2+(\sigma_h/h)^2}=1.1\%$

$\sigma_\rho=\bar{\rho}E_\rho=0.2g/cm^3$

③ 结果：$\rho=(11.1\pm0.2)g/cm^3$

6. 指出下列函数不确定度传递公式。

(1) $N=x+y-z$　　(2) $N=(x-y)/(x+y)$

(3) $n=\sin\Psi/\cos\varnothing$　　(4) $f=(L^2-e^2)/(4L)$

答：

(1) $\sigma_N=\sqrt{(\sigma_X)^2+(\sigma_Y)^2+(\sigma_Z)^2}$

(2) $\sigma_N=\dfrac{2xy}{(x+y)^2}\sqrt{(\dfrac{\sigma_X}{x})^2+(\dfrac{\sigma_Y}{y})^2}$

(3) $\sigma_N=\sqrt{(\dfrac{\cos\Psi}{\cos\varnothing})^2\sigma_\Psi^2+(\dfrac{\sin\Psi\sin\varnothing}{\cos^2\varnothing})^2\sigma_\varnothing^2}$

(4) $\sigma_N=\sqrt{(\dfrac{1}{4}+\dfrac{e^2}{4L^2})^2\sigma_L^2+(\dfrac{e}{2L})^2\sigma_e^2}$

7. 指出下列各项有几位有效数。

(1) $I=0.0001(cm)$,　(2) $c=2.998003$,　(3) $g=9.8403(m/s^2)$,

(4) $\pi=3.14159$,　(5) $e=2.7182818$,　(6) $E=2.7*10^{25}(J)$

答：(1)1位,(2)7位,(3)5位,(4)6位(π 为 ∞ 位),(5)8位(e 为 ∞ 位),(6)2位。

8. 按照误差理论和有效数字运算规则,改正下列错误。

(1) $N=(10.800\pm0.2)$cm。

(2)0.2870 有五位有效数字,而另外一种说法有三位有效数字,请纠正,并说明理由。

(3)28cm=280mm,280mm=28cm。

(4) $L=(28000\pm8000)$mm。

(5)0.0221×0.0221=0.00048841。

(6)(400×1500)÷(12.60−11.60)=600000。

答：

(1) $N=(10.8\pm0.2)$cm。

(2)0.2870 是四位有效数字。根据有效数字的定义和性质，第一个不为零的数字(即数码)前面的零不是有效数字，而后面的所有数字(包括零)都是有效数字。要确定数字 0.2870 有几位有效数字，第一个零不是有效数字，最后一个零是有效数字，所以既不是 5 位，也不是 3 位，而应是 4 位有效数字。

(3)28cm＝2.8×10^2mm，280mm＝28.0cm(或 2.80×10^1cm)

(4) $L=(2.8\pm0.8)\times10^4$mm

(5)0.0221×0.0221＝4.88×10^{-4}

(6)(400×1500)÷(12.60－11.60)＝6.00×10^5

9. 试用有效数字运算规则计算下列各式。

(1)1.048＋0.3　　(2)98.754＋1.3

(3)2.0×10^5＋2345　　(4)2.0×10^{-5}＋2345

(5)2.00×10^5＋2345　　(6)170.50－2.5

(7)111×0.100　　(8)237.5÷0.10

(9)76.000/(40.00－2.0)

(10)50.00×(18.30－10.3)/[(103－3.0)×(1.00＋0.001)]

(11)100.0×(5.6＋4.412)/[(98.00－77.0)×10.000]＋110.0

(12)89.04678×(3.0811－1.98)/3

答：

(1)1.3　(2)100.1　(3)2.0×10^5　(4)2345

(5)2.02×10^5　(6)168.0　(7)11.1　(8)2.4×10^3

(9)2.00　(10)4.0　(11)114.8　(12)3×10^1

10. 写成科学表达式

299300　983±4　0.004521±0.000001　5420×10^8　32476×10^5　6700　0.00400

答：

(1)2.99300×10^5　(2)$(9.83\pm0.04)\times10^2$　(3)$(4.521\pm0.001)\times10^{-3}$

(4)5.420×10^{11}　(5)3.2476×10^9　(6)6.700×10^3　(7)4.00×10^{-3}

11. 计算下列函数有效数字的结果。

(1) $X=3.14$　$e^x=?$　　(2) $X=3\times10^{-5}$　$10^x=?$

(3) $X=5.48$　$\sqrt{X}=?$　　(4) $X=9.80$　$\ln x=?$

(5) $X=(0.5376)\ rad$　$\sin x=?$　$tg x=?$

答：

(1) $e^x=2.31\times10^1$　(2)$10^x=1.00007$　(3) $\sqrt{X}=2.341$

(4) $\ln x=2.282$　(5)$\sin x=0.51208$　(6)$tg x=0.5962$

12. 实验测得在容器体积不变的情况下，不同温度的气体压强如下表，请用图示法表

示之。

温度 T(℃)	20.0	30.0	40.0	50.0	60.0	70.0	80.0	90.0
压强 P(cm/Hg)	82.0	85.0	90.0	94.0	97.0	100.0	103.0	106.0

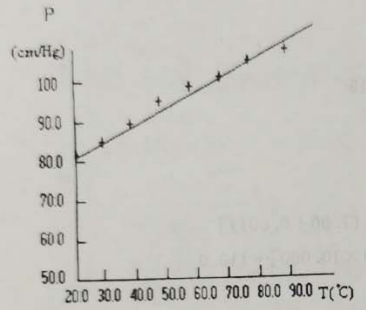


图 1－1－12

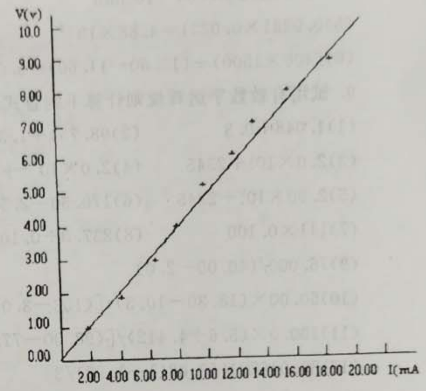


图 1－1－13

13. 用伏安法测电阻数据如下，试用直角坐标纸作图，并求出 R 的值。

V(v)	0.00	1.00	2.00	3.00	4.00	5.00	6.00	7.00	8.00	9.00	10.00
I(mA)	0.00	2.00	4.01	6.05	7.85	9.70	11.83	13.75	16.02	17.86	19.94

解：直角坐标纸作图如图 1－1－11

在直线上任取两个点 $P(x_p,y_p)=(3.00,1.5)$、$Q(x_Q,y_Q)=(17.00,8.53)$

$R=(y_Q-y_P)/(x_Q-x_P)=(8.53-1.5)/(17.00-3.00)=0.502(K\Omega)$

14. 用最小二乘法求出 $y=A_0+A_1x$ 的 A_0、A_1，并检验线性。

①

i	1	2	3	4	5	6	7
x_i	2.0	4.0	6.0	8.0	10.0	12.0	14.0
y_i	14.34	16.35	18.36	20.34	22.39	24.38	26.33

②

i	1	2	3	4	5	6	7
x_i	20.0	30.0	40.0	50.0	60.0	70.0	80.0
y_i	5.45	5.66	5.96	6.20	6.45	6.86	7.01

解：

(1) $\overline{x}=8.00$ $\overline{y}=20.36$

$\overline{x^2}=80.0$ $\overline{xy}=178.9$ $\overline{y^2}=430.40$

$A_1=(\overline{x}*\overline{y}-\overline{xy})/(\overline{x}^2-\overline{x^2})=1.0$

$A_0=\overline{y}-A_1\overline{x}=12.4$

直线方程：$y=12.4+1.0x$

线性相关系数：$r=(\overline{xy}-\overline{x}*\overline{y})/[(\overline{x^2}-\overline{x}^2)(\overline{y^2}-\overline{y}^2)]^{1/2}=0.999987$

(2) $\overline{x}=50.0$ $\overline{y}=6.23$

$\overline{x^2}=2900.0$ $\overline{xy}=322.2$ $\overline{y^2}=39.07$

$A_1=0.027$ $A_0=4.88$

直线方程：$y=4.88+0.027x$

线性相关系数：$r=0.997$

（吴本科）

谢谢大家！