

# 杭州电子科技大学学生考试卷期末（A）卷

考试课程		概率论与数理统计		考试日期		20010 年 01 月 日		成绩			
课程号		A0702140		教师号				任课教师姓名			
考生姓名		参考答案		学号（8 位）		年级		专业			
一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	

一、选择题，将正确答案填在括号内（每小题 3 分，共 12 分）

1. 设  $A, B$  为随机事件，则下列结论中正确的是 （ C ）

- A.  $P(AB) = P(A)P(B)$                       B.  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- C.  $P(A \cup B) = 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B})$       D.  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$

2.  $X$  与  $Y$  不相关，则与之等价的条件是 （ B ）.

- (A)  $D(XY) = D(X)D(Y)$ ;                      (B)  $D(X+Y) = D(X-Y)$ ;
- (C)  $D(XY) \neq D(X)D(Y)$ ;                      (D)  $D(X+Y) \neq D(X-Y)$ .

3. 设  $X$  与  $Y$  相互独立， $X$  与  $Y$  的分布律相同，为

X(或 Y)	0	1
P	0.3	0.7

则必有( D ).

- (A)  $X = Y$ ;    (B)  $P(X = Y) = 1$  ;
- (C)  $P(X = Y) = 0$ ;                                      (D) A, B, C 都不对 .

4. 在假设检验中，记  $H_0$  为原假设， $H_1$  为备择假设，则显著性水平  $\alpha$  是指 （ C ）.

- A.  $P\{\text{接受 } H_0 | H_0 \text{ 为假}\} = \alpha$ ;                      B.  $P\{\text{接受 } H_1 | H_1 \text{ 为假}\} = \alpha$
- C.  $P\{\text{拒绝 } H_0 | H_0 \text{ 为真}\} = \alpha$ ;                      D.  $P\{\text{拒绝 } H_1 | H_1 \text{ 为真}\} = \alpha$

二、填空题（每小题 3 分，共 12 分）

1. 10 个产品中有 3 个不合格品和 7 个合格品，从中任取 2 只，其中至少有 1 个不合格

品的概率是  $\frac{7}{15}$  (或  $1 - \frac{C_7^2}{C_{10}^2}$ ) .

2. . 设  $P(A) = 0.4, P(A \cup B) = 0.7$  , 当 A, B 互不相容时,  $P(B) = 0.3$  , 当 A,

B 相互独立时,  $P(B) = 0.5$  .

3. 设  $X \sim b(n, p)$  , 且  $E(X) = 6, D(X) = 3.6$  , 则  $n = 15$  ,  $p = 0.4$  .

4. 设  $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5$  是取自正态总体  $X \sim N(0, \sigma^2)$  的一个样本, 如果

$\frac{a(X_1 + X_2)}{\sqrt{X_3^2 + X_4^2 + X_5^2}}$  服从  $t$  分布, 则  $a = \sqrt{\frac{3}{2}}$

三、(每小题 4 分, 共 8 分) 设随机变量  $X$  的密度函数为  $f(x) = \begin{cases} ax+b, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$ ,

又已知  $P\{X < \frac{1}{3}\} = P\{X > \frac{1}{3}\}$  , (1) 求常数  $a$  和  $b$  ; (2) 求  $X$  的分布函数  $F(x)$

解 (1) 因为  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$  (1 分)

所以  $\int_0^1 (ax+b) dx = 1$

又  $P\{X < \frac{1}{3}\} = P\{X > \frac{1}{3}\}$  知  $\int_0^{\frac{1}{3}} (ax+b) dx = \frac{1}{2}$

得  $\frac{a}{2} + b = 1, \frac{a}{18} + \frac{b}{3} = \frac{1}{2}$  (3 分)

解得  $a = -\frac{3}{2}, b = \frac{7}{4}$  (4 分)

(2)  $X$  的分布函数  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$  (2 分)

$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ -\frac{3}{4}x^2 + \frac{7}{4}x, & 0 < x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$  (4 分)

四. (每小题 4 分, 共 12 分) 设二维离散型随机变量  $(X, Y)$  的联合分布律如下

$\begin{matrix} Y \\ X \end{matrix}$	$Y$		
$X$	0	1	2
0	0.1	0.05	0.25
1	0	0.1	0.2
2	0.2	0.1	0

(1) 求  $X$  的边缘分布律;

(2) 计算条件概率  $P\{X+Y \leq 2 | X \geq 1\}$

(3) 计算  $E[(2X-3Y)^2]$ . 被这道题虎到了, 里面的平方可以直接展开

解 (1)  $X$  的分布律为

$X$	0	1	2
$P$	0.4	0.3	0.3

\_\_\_\_\_ 4 分

$$(2) P\{X+Y \leq 2 | X \geq 1\} = \frac{P\{X+Y \leq 2 \text{ 且 } X \geq 1\}}{P\{X \geq 1\}} \quad \text{_____ 2 分}$$

$$= \frac{0.3}{0.6} = \frac{1}{2} \quad \text{_____ 4 分}$$

$$(3) E[(2X-3Y)^2] = E(4X^2 + 9Y^2 - 12XY)$$

$$= 4E(X^2) + 9E(Y^2) - 12E(XY) \quad \text{_____ 2 分}$$

$$E(X^2) = 0^2 \times 0.4 + 1^2 \times 0.3 + 2^2 \times 0.3 = 1.5$$

$$E(Y^2) = 0^2 \times 0.3 + 1^2 \times 0.25 + 2^2 \times 0.45 = 2.05$$

$$\begin{aligned} E(XY) &= 0 \times 0 \times 0.1 + 0 \times 1 \times 0.05 + 0 \times 2 \times 0.25 + 1 \times 0 \times 0 + 1 \times 1 \times 0.1 + \\ &1 \times 2 \times 0.2 + 2 \times 0 \times 0.2 + 2 \times 1 \times 0.1 + 2 \times 2 \times 0 \\ &= 0.7 \end{aligned}$$

$$E[(2X-3Y)^2] = 4 \times 1.5 + 9 \times 2.05 - 12 \times 0.7$$

$$= 16.05 \quad \text{_____ 4 分}$$

五. (本题 8 分) 设各零件的重量都是随机变量, 它们相互独立, 且服从相同的分布, 其

数学期望为  $E(x) = 0.5 \text{ kg}$ , 均方差为  $\sqrt{D(X)} = 0.1 \text{ kg}$ , 问 5000 只零件的总重量超

过 2510 kg 的概率约为多少? (结果用标准正态分布函数  $\Phi(x)$  表示)

解 记  $X_i (i=1, 2, \dots, 5000)$  为第  $i$  只零件的重量, 由题意  $E(X_i) = 0.5$ ,  $D(X_i) = 0.1^2$

$$\text{所求概率 } P\left\{\sum_{i=1}^{5000} X_i > 2510\right\} = 1 - P\left\{\sum_{i=1}^{5000} X_i \leq 2510\right\} \quad \text{_____ 2 分}$$

$$= 1 - P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{5000} X_i - 5000 \cdot 0.5}{\sqrt{5000 \cdot 0.1}} \leq \frac{2510 - 5000 \cdot 0.5}{\sqrt{5000 \cdot 0.1}}\right\} \quad \text{_____ 6 分}$$

$$\approx 1 - \Phi(\sqrt{2}) \quad \text{_____ 8 分}$$

六. (每小题 4 分, 共 12 分) 设二维随机变量  $(X, Y)$  的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} Ce^{-y}, & 0 < x < y \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

- (1) 求常数  $C$ ;  
 (2) 求关于  $X$  和关于  $Y$  的边缘概率密度; 并问  $X$  与  $Y$  是否相互独立?  
 (3) 求概率  $P\{X+Y < 1\}$ . 平面积分

解 (1) 由  $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$  得 \_\_\_\_\_ 1 分

$$\int_0^{+\infty} dy \int_0^y Ce^{-y} dx = 1 \quad (\text{或} \int_0^{+\infty} dx \int_x^{+\infty} Ce^{-y} dy = 1) \quad \text{_____ 2 分}$$

$$\int_0^{+\infty} dy \int_0^y Ce^{-y} dx = C \int_0^{+\infty} ye^{-y} dy = C = 1 \Rightarrow C = 1 \quad \text{_____ 4 分}$$

$$(\text{或} \int_0^{+\infty} dx \int_x^{+\infty} Ce^{-y} dy = C \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = C = 1 \Rightarrow C = 1)$$

$$(2) f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy \quad \text{_____ 1 分}$$

$x > 0$  时

$$= \int_x^{+\infty} e^{-y} dy$$

$$e^{-x} \quad \text{_____ 2 分}$$

$y > 0$  时

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$$

$$= \int_0^y e^{-y} dx = ye^{-y} \quad \text{_____ 3 分}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}, f_Y(y) = \begin{cases} ye^{-y}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

当  $0 < x < y$  时  $f(x, y) \neq f_X(x)f_Y(y)$

所以  $X$  与  $Y$  不相互独立. \_\_\_\_\_ 4 分

$$(3) P\{X+Y < 1\} = \iint_{x+y < 1} f(x, y) dx dy \quad \text{_____ 1 分}$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_x^{1-x} e^{-y} dy \quad \text{_____ 2 分}$$

$$= 1 + \frac{1}{e} - \frac{2}{\sqrt{e}} \quad \text{_____ 4 分}$$

七、(本题 10 分)对某种新式导弹的最大飞行速度  $X$  进行 16 次独立测试,测得样本均值  $\bar{x} = 425 \text{ m/s}$ , 样本标准差  $s = 3.8$ 。根据以往经验,可以认为最大飞行速度服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ , 其中  $\mu, \sigma^2$  均未知. 试对检验水平  $\alpha = 0.05$  求总体数学期望  $\mu$  的置信区间 (精确到第二位小数。 其中  $t_{0.05}(15) = 1.7531, t_{0.05}(16) = 1.7459, t_{0.025}(15) = 2.1315,$   
 $t_{0.025}(16) = 2.1199$ )。

解 置信区间为  $(\bar{x} - t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}})$  \_\_\_\_\_ 7 分

$$t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}} = t_{0.025}(15) \frac{3.8}{\sqrt{16}} = 2.1315 \times \frac{3.8}{4} = 2.02 \quad \text{_____ 9 分}$$

从而置信区间为  $(422.98, 427.02)$ . \_\_\_\_\_ 10 分

八、(每小题 5 分, 共 10 分) 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为取自总体  $X$  的一组样本,  $X$  的概率密度函数为

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1} & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}, \text{ 其中 } \theta > 0 \text{ 是参数, 试求}$$

(1) 参数  $\theta$  的矩估计量; (2) 参数  $\theta$  的最大似然估计量.

解 (1)  $E(X) = \int_0^1 x \theta x^{\theta-1} dx = \int_0^1 \theta x^{\theta} d\theta = \frac{\theta}{\theta+1},$  \_\_\_\_\_ 2 分

$$\text{令 } E(X) = \bar{X}, \text{ 则 } \hat{\theta} = \frac{\bar{X}}{1-\bar{X}} \quad \text{_____ 5 分}$$

$$(2) L(\theta) = \prod_{i=1}^n \theta X_i^{\theta-1} = \theta^n \left( \prod_{i=1}^n X_i \right)^{\theta-1}, \quad \text{_____ 2 分}$$

$$\text{则 } \ln L(\theta) = n \ln \theta + (\theta - 1) \sum_{i=1}^n \ln X_i$$

$$\text{于是令 } \frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^n \ln X_i = 0 \quad \text{_____ 4 分}$$

$$\text{即 } \hat{\theta} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln X_i} \text{ 为所求的最大似然估计.} \quad \text{_____ 5 分}$$

得分	
----	--

九、(本题 8 分) (10%) 某种导线, 要求其电阻标准差不超过  $0.005\Omega$ . 今在一批导线中取样品 9 根, 测得  $s = 0.007\Omega$ , 设总体为正态分布, 问在显著性水平  $\alpha = 0.05$  下能认为这批导线电阻的标准差显著地偏大吗?

$$(\chi_{0.05}^2(8) = 15.507, \chi_{0.05}^2(9) = 16.909, \chi_{0.025}^2(8) = 17.535, \chi_{0.025}^2(9) = 19.023)$$

解 这里  $\alpha = 0.05, n = 9$

由题意需检验假设  $H_0: \sigma^2 \leq 0.05^2$ , 备择假设  $H_1: \sigma^2 > 0.05^2$  ——— 2 分

$$\text{拒绝域 } \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \geq \chi_{\alpha}^2(n-1) \quad \text{————— 4 分}$$

$$\text{即 } \frac{8s^2}{0.005^2} \geq 15.507$$

$$\text{因 } \frac{8s^2}{0.005^2} = \frac{8 \times 0.007^2}{0.05^2} = 15.608 > 15.507$$

故在拒绝域内 (即拒绝  $H_0$ ), 可以认为这批导线电阻的标准差显著地偏大。—— 8 分

十、(本题 4 分) 设总体  $X$  具有概率密度  $f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{3}{\theta^3} x^2, & 0 \leq x \leq \theta \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ , 其中  $\theta > 0$  是未知

参数,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为取自总体的样本,  $\hat{\theta} = C \cdot \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  是  $\theta$  的一个估计

量。试确定常数  $C$ , 使  $\hat{\theta}$  成为  $\theta$  的无偏估计。

解 令  $Y = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ , 则

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{X_1 \leq y, \dots, X_n \leq y\} = \prod_{i=1}^n F_X(y) = F_X^n(y)$$

$$f_Y(y) = n f_X(y) F_X^{n-1}(y)$$

$$F_X(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \int_0^y \frac{3}{\theta^3} x^2 dx, & 0 \leq y \leq \theta \\ 1, & y \geq \theta \end{cases} = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \frac{y^3}{\theta^3}, & 0 \leq y \leq \theta \\ 1, & y \geq \theta \end{cases}$$

从而

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3n}{\theta^{3n}} y^{3n-1}, & 0 \leq y \leq \theta \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad \text{————— 2 分}$$

$$E(\hat{\theta}) = CE(Y) = C \int_0^\theta \frac{3n}{\theta^{3n}} y^{3n-1} dy = C \cdot \frac{3n}{3n+1} \theta$$

$$\hat{\theta} \text{ 是 } \theta \text{ 的无偏估计时有 } E(\hat{\theta}) = \theta, \text{ 从而 } C = \frac{3n+1}{3n}. \quad \text{————— 4 分}$$

十一、(本题 4 分) 设随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立, 且  $X \sim N(\mu, \sigma_1^2)$ ,  $Y \sim N(\mu, \sigma_2^2)$ ,

求  $E(|X-Y|)$  和  $D(|X-Y|)$ 。

**解** 记  $Z = X - Y$ , 则  $Z \sim N(0, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ , 从而

$$E(|X-Y|) = E(|Z|)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|}{\sqrt{\frac{2\pi}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}} \exp\left(-\frac{x^2}{\frac{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{2\pi}}\right) dx$$

$$= \sqrt{\frac{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{\pi}}$$

$$E(Z^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{\frac{2\pi}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}} \exp\left(-\frac{x^2}{\frac{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{2\pi}}\right) dx$$

$$= \sigma_1^2 + \sigma_2^2$$

$$D(|X-Y|) = E(Z^2) - E^2(Z)$$

$$= (1 - \frac{2}{\pi})(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$