

第六章 连续时间系统的 S 域分析

以傅里叶变换为基础的频率域分析方法的优点在于：它给出的结果有着清楚的物理意义。但另一方面，傅里叶变换只能处理符合绝对可积条件的信号：

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

而有些信号是不满足绝对可积条件的，因而其信号的分析受到限制。

另外，在求时域响应时运用傅里叶反变换对频率进行的无穷积分求解比较困难：

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]$$

在这一章，把频域中的傅里叶变换推广到复频域，引入复频率 $s = \sigma + j\omega$ ，以复指数函数 e^{st} 为基本信号。由于用于系统分析的独立变量是复频率 s ，故称为 s 域分析。

6.1 拉普拉斯变换

6.1.1 从傅里叶变换到拉普拉斯变换

有些函数不满足绝对可积条件，其傅里叶变换不存在，为此，可用一衰减因子 $e^{-\sigma t}$ (σ 为实常数) 乘以信号 $f(t)$ ，适当选取 σ 的值，使乘积信号 $f(t)e^{-\sigma t}$ 满足绝对可积条件，从而使 $f(t)e^{-\sigma t}$ 的傅里叶变换存在，即

$$\mathcal{F}[f(t)e^{-\sigma t}] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-(\sigma + j\omega)t} dt = F(\sigma + j\omega) \quad (6.1-1)$$

相应的傅里叶逆变换为：

$$f(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma + j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (6.1-2)$$

式 (6.1-2) 两边同乘 $e^{\sigma t}$ ，得：

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma + j\omega) e^{(\sigma + j\omega)t} d\omega \quad (6.1-3)$$

令 $s = \sigma + j\omega$ ， $d\omega = ds/j$ ，代入公式 (6.1-1)、(6.1-3) 可得：

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (6.1-4)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(s) e^{st} ds \quad (6.1-5)$$

$F(s)$ 称为 $f(t)$ 的拉普拉斯变换(或象函数)， $f(t)$ 称为 $F(s)$ 的拉普拉斯逆变换(或原函数)。

为了简便，拉普拉斯变换与反变换通常记为：

$$\begin{cases} F(s) = \mathcal{L}[f(t)] \\ f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] \end{cases} \quad (6.1-6)$$

也常简记为变换对：

$$f(t) \leftrightarrow F(s) \quad (6.1-7)$$

只有选择适当的 σ 值才能使积分式(6.1-4)收敛,从而使信号 $f(t)$ 的拉普拉斯变换存在。定义使 $F(s)$ 存在的 σ 的区域称为拉普拉斯变换的收敛域,记为:ROC(region of convergence)。

例 6.1-1 求下列 $f(t)$ 的拉普拉斯变换及收敛域。

(1) $f_1(t) = e^{-t}\varepsilon(t)$; (2) $f_2(t) = -e^{-t}\varepsilon(-t)$; (3) $f_3(t) = e^{-t}\varepsilon(t) + e^{2t}\varepsilon(-t)$ 。

解: (1)

$$\begin{aligned} F_1(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t}\varepsilon(t)e^{-st}dt = \int_0^{\infty} e^{-t}e^{-st}dt \\ &= \frac{e^{-(s+1)t}}{-(s+1)} \Big|_0^{\infty} = -\frac{1}{(s+1)} [\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(s+1)t} e^{-j\omega t} - 1] \\ &= \begin{cases} \frac{1}{s+1}, & \sigma > -1 \\ \text{不定}, & \sigma = -1 \\ \text{无界}, & \sigma < -1 \end{cases} \end{aligned}$$

可见,仅当 $\sigma > -1$ 时, $f_1(t)$ 的拉普拉斯变换存在: $F_1(s) = \frac{1}{s+1}$,

收敛域如图 6.1-1 (a) 所示。

(2)

$$\begin{aligned} F_2(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} -e^{-t}\varepsilon(-t)e^{-st}dt = -\int_{-\infty}^0 e^{-t}e^{-st}dt \\ &= \frac{e^{-(s+1)t}}{s+1} \Big|_{-\infty}^0 = \frac{1}{s+1} [1 - \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{-(s+1)t} e^{-j\omega t}] \\ &= \begin{cases} \frac{1}{s+1}, & \sigma < -1 \\ \text{不定}, & \sigma = -1 \\ \text{无界}, & \sigma > -1 \end{cases} \end{aligned}$$

可见,仅当 $\sigma < -1$ 时, $f_2(t)$ 的拉普拉斯变换存在: $F_2(s) = \frac{1}{s+1}$,

收敛域如图 6.1-1 (b) 所示。

(3)

$$F_3(s) = \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-t}\varepsilon(t) + e^{2t}\varepsilon(-t)]e^{-st}dt = \int_0^{\infty} e^{-t}e^{-st}dt + \int_{-\infty}^0 e^{2t}e^{-st}dt$$

其中:

$$\int_0^{\infty} e^{-t}e^{-st}dt = \frac{e^{-(s+1)t}}{-(s+1)} \Big|_0^{\infty} = -\frac{1}{(s+1)} [\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(s+1)t} e^{-j\omega t} - 1] = \frac{1}{s+1}, \quad \sigma > -1$$

$$\int_{-\infty}^0 e^{2t} e^{-st} dt = \frac{e^{(2-s)t}}{2-s} \Big|_{-\infty}^0 = \frac{1}{2-s} [1 - \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{(2-s)t} e^{-j\omega t}] = \frac{1}{2-s}, \quad \sigma < 2$$

可见，仅当 $-1 < \sigma < 2$ 时， $f_3(t)$ 的拉普拉斯变换存在：

$$F_3(s) = \frac{1}{2-s} + \frac{1}{s+1} = \frac{3}{-s^2 + s + 2}$$

收敛域如图 6.1-1 (c) 所示。

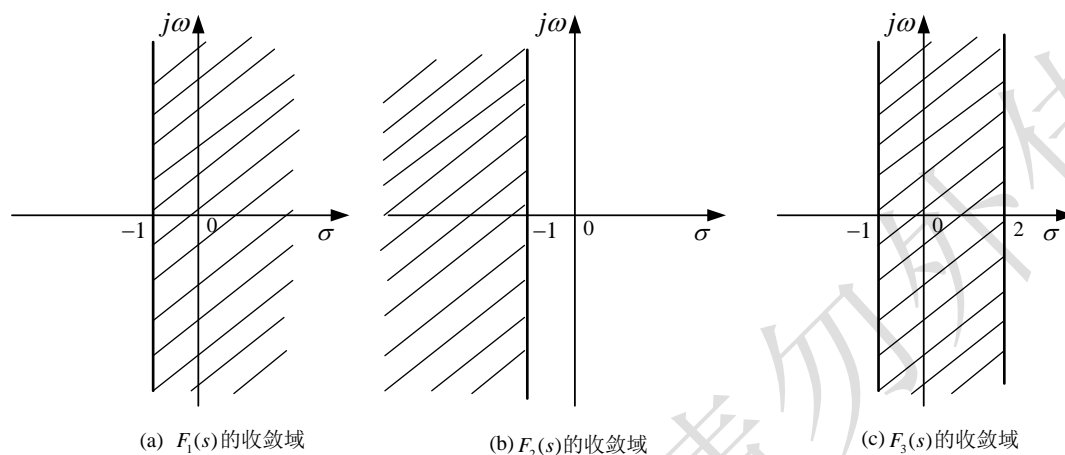


图 6.1-1 拉普拉斯变换的收敛域

例 6.1-1 中， $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 不同，虽然 $F_1(s)$ 和 $F_2(s)$ 的函数公式相同，但是 $F_1(s)$ 和 $F_2(s)$ 的收敛域不同。因此函数公式和收敛域一起才能完全表示拉普拉斯变换结果。另外，由例 6.1-1 的分析我们知道拉普拉斯变换的收敛域是由实部 σ 的取值范围决定的，因此收敛域是由平行于 $j\omega$ 轴的竖线划分的。

式 (6.1-4) 中求积分是从 $-\infty$ 到 ∞ ，故称为信号 $f(t)$ 的双边拉普拉斯变换。由第四章可以知道，分析实际系统的时候是从 0_- 时刻开始分析的，因此若将公式 (6.1-4) 的积分限取为 $0_- \sim \infty$ ，得：

$$F(s) = \int_{0_-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (6.1-8)$$

公式 (6.1-8) 称为 $f(t)$ 的单边拉普拉斯变换。考虑到实际连续信号都是因果信号，故单边拉普拉斯变换更有实际意义（本书重点研究单边拉普拉斯变换，因此如无特殊说明，本书采用的拉普拉斯变换均为单边拉普拉斯变换）。

对于单边拉普拉斯变换来说，若式 (6.1-8) 积分收敛，则 $F(s)$ 存在。积分式 (6.1-8) 可以展开为：

$$F(s) = \int_{0_-}^{\infty} f(t) e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt \quad (6.1-9)$$

因此只要 σ 大于某一个值 σ_0 ，使得 $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) e^{-\sigma t} = 0$

则积分式 (6.1-9) 收敛, 则信号 $f(t)$ 的单边拉普拉斯变换 $F(s)$ 存在。因此, 单边拉普拉斯变换的收敛域如下图 6.1-2 所示:

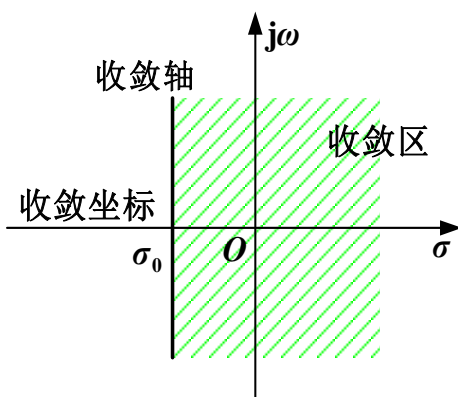


图 6.1-2 单边拉普拉斯变换的收敛域

例 6.1-2 $f(t) = e^{-t}\varepsilon(t) + e^t\varepsilon(t)$, 求其拉普拉斯变换及收敛域。

解:

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_{0-}^{\infty} e^{-t}\varepsilon(t)e^{-st}dt + \int_{0-}^{\infty} e^t\varepsilon(t)e^{-st}dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-t}e^{-st}dt + \int_0^{\infty} e^te^{-st}dt \end{aligned}$$

其中:

$$\int_0^{\infty} e^{-t}e^{-st}dt = \frac{e^{-(s+1)t}}{-(s+1)} \Big|_0^{\infty} = -\frac{1}{(s+1)} [\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(s+1)t} - 1] = \frac{1}{s+1}, \quad \sigma > -1$$

$$\int_0^{\infty} e^te^{-st}dt = \frac{e^{-(s-1)t}}{-(s-1)} \Big|_0^{\infty} = -\frac{1}{(s-1)} [\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(s-1)t} - 1] = \frac{1}{s-1}, \quad \sigma > 1$$

可见, 仅当 $\sigma > 1$ 时, $f(t)$ 的拉普拉斯变换存在:

$$F(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s-1} = \frac{2s}{s^2-1}$$

收敛域如图 6.1-3 所示。

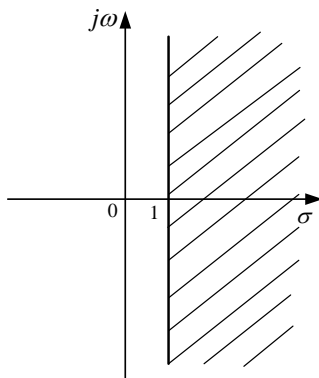


图 6.1-3 拉普拉斯变换的收敛域

6.1.2 常用函数的拉普拉斯变换

1. 冲激函数

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \int_{0_-}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-st} dt = 1 \quad (6.1-10)$$

2. 阶跃函数

$$\mathcal{L}[\varepsilon(t)] = \int_{0_-}^{\infty} 1 \cdot e^{-st} dt = \frac{1}{-s} e^{-st} \Big|_{0_-}^{\infty} = \frac{1}{s} \quad (\sigma > 0) \quad (6.1-11)$$

3. 单边指数函数

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t} \varepsilon(t)] = \int_{0_-}^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-st} dt = \frac{e^{-(\alpha+s)t}}{-(\alpha+s)} \Big|_{0_-}^{\infty} = \frac{1}{\alpha+s} \quad (\sigma > -\alpha) \quad (6.1-12)$$

将上述结果及其他常用函数的拉氏变换列于表 6.1-1:

表 6.1-1 常用函数的拉普拉斯变换

原函数 $f(t)$	象函数 $F(s)$	原函数 $f(t)$	象函数 $F(s)$
$\delta(t)$	1	$te^{-\alpha t} \varepsilon(t)$	$\frac{1}{(s+\alpha)^2}, \sigma > -\alpha$
$\delta'(t)$	s	$t^n e^{-\alpha t} \varepsilon(t)$ n 为正整数	$\frac{n!}{(s+\alpha)^{n+1}}, \sigma > -\alpha$
$\varepsilon(t)$	$\frac{1}{s}, \sigma > 0$	$\sin(\omega t) \varepsilon(t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}, \sigma > 0$
$t\varepsilon(t)$	$\frac{1}{s^2}, \sigma > 0$	$\cos(\omega t) \varepsilon(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}, \sigma > 0$
$t^n \varepsilon(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \sigma > 0$	$e^{-\alpha t} \sin(\omega t) \varepsilon(t)$	$\frac{\omega}{(s+\alpha)^2 + \omega^2}, \sigma > -\alpha$
$e^{-\alpha t} \varepsilon(t)$	$\frac{1}{s+\alpha}, \sigma > -\alpha$	$e^{-\alpha t} \cos(\omega t) \varepsilon(t)$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2 + \omega^2}, \sigma > -\alpha$

6.1.3 拉普拉斯变换的性质

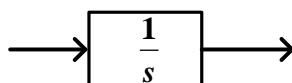
表 6.1-2 拉普拉斯变换的性质

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)], \quad F_1(s) = \mathcal{L}[f_1(t)], \quad F_2(s) = \mathcal{L}[f_2(t)]$$

名称	时域 ($t \geq 0$)	S 域
线性	$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$	$a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$

时域微分	$f'(t)$ $f^{(n)}(t)$	$sF(s) - f(0_-)$ $s^n F(s) - \sum_{r=0}^{n-1} s^{n-r-1} f^{(r)}(0_-)$
时域积分	$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$	$\frac{F(s)}{s} + \frac{f^{(-1)}(0_-)}{s}$
时域延时	$f(t-t_0), t_0 > 0$	$e^{-st_0} F(s)$
S 域平移	$f(t)e^{-at}$	$F(s+a)$
尺度变换	$f(at), a > 0$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$
卷积	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(s) \cdot F_2(s)$
S 域微分	$-tf(t)$	$\frac{dF(s)}{ds}$
S 域积分	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(\lambda) d\lambda$
初值定理	$\lim_{t \rightarrow 0_+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$	
终值定理	$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$	

注意 1: 由时域积分特性可以知道, 如果不考虑起始状态, 那么时域积分对应到拉普拉斯变换变换就是乘以 $\frac{1}{s}$, 因此在连续系统的模拟框图中通常将积分器表示为:



注意 2: 初值定理应用的前提是 $F(s)$ 为真分式。若为假分式, 则将 $F(s)$ 变为一个整式 $F_1(s)$ 和真分式 $F_2(s)$ 相加, 由于整式对应的是冲激函数及其导数, 故 $F_1(s)$ 对应的时域函数在 $t = 0_+$ 时的值为 0, 故 $f(t)$ 在 $t = 0_+$ 时的值就由 $F_2(s)$ 确定 ($\lim_{t \rightarrow 0_+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF_2(s)$)

注意 3: 终值定理应用的前提是 $f(\infty)$ 必须存在, 判断的依据是 $F(s)$ 所有极点均在 s 的左半平面, 或者在虚轴上只允许有 $s = 0$ 的一个单极点 (在 6.5.3 节说明)。

时域微分特性:

微分特性是分析 LTI 连续系统的关键, 这里对微分特性证明如下:
证明:

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_{0_-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f'(t)] &= \int_{0_-}^{\infty} f'(t)e^{-st} dt \\ &= e^{-st}f(t)\Big|_{0_-}^{\infty} + s \int_{0_-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt\end{aligned}\quad (6.1-13)$$

因为 $f(t)$ 的拉普拉斯变换存在, 所以:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)e^{-st} = 0$$

所以:

$$e^{-st}f(t)\Big|_{0_-}^{\infty} = -f(0_-)$$

所以由式 (6.1-13) 可以得到:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f'(t)] &= e^{-st}f(t)\Big|_{0_-}^{\infty} + s \int_{0_-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt \\ &= -f(0_-) + sF(s)\end{aligned}$$

同理可证:

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - \sum_{r=0}^{n-1} s^{n-r-1} f^{(r)}(0_-)$$

例 6.1-3: 已知某信号 $f(t)$ 的拉氏变换为 $F(s) = \frac{s}{s^2+1}$, 求信号 $e^{-t}f(3t-2)$ 的拉普拉斯变换。

解: 由时域延时特性得:

$$f(t-2) \leftrightarrow F(s)e^{-2s} = \frac{s}{s^2+1}e^{-2s}$$

由尺度特性得:

$$f(3t-2) \leftrightarrow \frac{1}{3} \cdot \frac{\frac{s}{3}}{\left(\frac{s}{3}\right)^2+1} e^{-\frac{2}{3}s} = \frac{s}{s^2+9} e^{-\frac{2}{3}s}$$

由 s 域平移特性得:

$$e^{-t}f(3t-2) \leftrightarrow \frac{s+1}{(s+1)^2+9} e^{-\frac{2}{3}(s+1)}$$

例 6.1-4: 已知信号 $f(t)$ 的拉普拉斯变换如下, 求初值 $f(0_+)$ 及终值 $f(\infty)$

$$(1) F(s) = \frac{s+2}{s^2+3s+2}; \quad (2) F(s) = \frac{s^3+s^2+2s+1}{s^2+2s+1}$$

解: (1) 因为 $\frac{s+2}{s^2+3s+2}$ 为真分式, 所以:

$$f(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2+2s}{s^2+3s+2} = 1$$

因为 $\frac{s+2}{s^2+3s+2}$ 的极点为 -1, -2 均在左半平面, 故终值存在:

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{s+2}{s^2+3s+2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2+2s}{s^2+3s+2} = 0$$

(2) 因为 $\frac{s^3+s^2+2s+1}{s^2+2s+1}$ 为假分式, 先将其化为整式和真分式之和:

$$F(s) = \frac{s^3+s^2+2s+1}{s^2+2s+1} = s-1 + \frac{3s+2}{s^2+2s+1}$$

$$f(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot \frac{3s+2}{s^2+2s+1} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{3s^2+2s}{s^2+2s+1} = 3$$

因为 $\frac{s^3+s^2+2s+1}{s^2+2s+1}$ 的极点为 -1 (二重极点) 均在左半平面, 故终值存在:

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{3s+2}{s^2+2s+1} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{3s^2+2s}{s^2+2s+1} = 0$$

例 6.1-5: 求图 6.1-4 三角脉冲函数 $f(t)$ 的拉普拉斯变换 $F(s)$:

$$f(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t \leq 1 \\ 2-t & 1 < t \leq 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

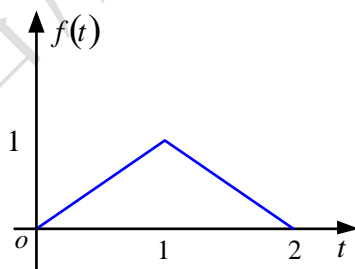


图 6.1-4 三角脉冲函数 $f(t)$

解: 将 $f(t)$ 微分两次, 所得波形如下图所示:

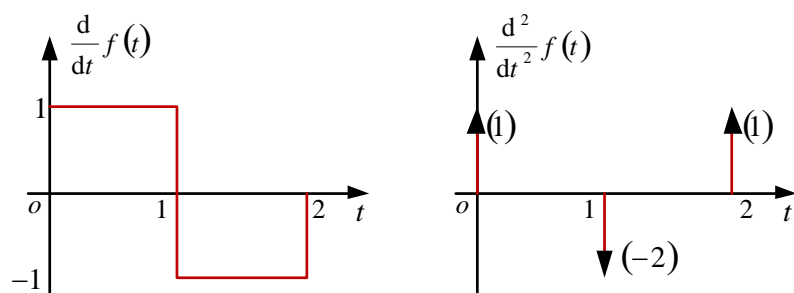


图 6.1-5 微分波形

由时域延时特性得：

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right] = \mathcal{L}[\delta(t) - 2\delta(t-1) + \delta(t-2)] = (1 - 2e^{-s} + e^{-2s})$$

由微分特性可得：

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right] = s^2 F(s) - f'(0_-) - sf(0_-)$$

由图 6.1-5 可知：

$$f(0_-) = 0, \quad f'(0_-) = 0$$

$$\text{所以： } s^2 F(s) = (1 - 2e^{-s} + e^{-2s})$$

故：

$$F(s) = \frac{(1 - 2e^{-s} + e^{-2s})}{s^2}$$

6.2 拉普拉斯反变换

应用拉普拉斯变换分析系统时，不仅要根据已知的激励信号求其拉普拉斯变换 $F(s)$ ，还必须把 $F(s)$ 反变换为时域函数 $f(t)$ ，这就是拉普拉斯反变换。接下来介绍对 $F(s)$ 进行反变换的实用方法——部分分式展开法。

通常 $F(s)$ 具有如下的有理分式形式，通过部分分式展开做拉普拉斯反变换。

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \quad (6.2-1)$$

其中 a_i, b_i 为实数， m, n 为正整数。当 $m < n$ 时， $F(s)$ 为有理真分式。对此形式的象函数可以用部分分式展开法将其表示为简单分式之和的形式，而这些简单分式的反变换很容易得到。

首先对 $F(s)$ 进行分解：

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{a_n(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)} \quad (6.2-2)$$

其中 z_1, z_2, \dots, z_m 是 $B(s)=0$ 的根, 称为 $F(s)$ 的零点。 p_1, p_2, \dots, p_n 是 $A(s)=0$ 的根, 称为 $F(s)$ 的极点

根据极点不同, 可以分为三种情况进行部分分式展开:

(1) 单阶实数极点:

$$F(s) = \frac{B(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)} \quad (6.2-3)$$

其中 p_1, p_2, \dots, p_n 是不同的实数根, $F(s)$ 可以展开为如下形式:

$$F(s) = \frac{K_1}{s-p_1} + \frac{K_2}{s-p_2} + \cdots + \frac{K_n}{s-p_n} \quad (6.2-4)$$

其中 K_1, K_2, \dots, K_n 为待定系数。以求解 K_1 为例, 将上式两边同乘 $(s-p_1)$ 得:

$$(s-p_1)F(s) = K_1 + (s-p_1)\left(\frac{K_2}{s-p_2} + \cdots + \frac{K_n}{s-p_n}\right) \quad (6.2-5)$$

令 $s=p_1$, 则有:

$$K_1 = [(s-p_1)F(s)]|_{s=p_1} \quad (6.2-6)$$

同理有:

$$K_i = [(s-p_i)F(s)]|_{s=p_i} \quad (6.2-7)$$

例 6.2-1 已知某因果信号 $f(t)$ 的拉普拉斯变换如下, 求 $f(t)$

$$F(s) = \frac{3s+1}{s^2+5s+6}$$

解: 展为部分分式:

$$F(s) = \frac{3s+1}{(s+2)(s+3)} = \frac{K_1}{s+2} + \frac{K_2}{s+3}$$

解得系数

$$K_1 = (s+2)F(s)|_{s=-2} = \frac{3s+1}{s+3}|_{s=-2} = -5$$

$$K_2 = (s+3)F(s)|_{s=-3} = \frac{3s+1}{s+2}|_{s=-3} = 8$$

$$F(s) = \frac{-5}{s+2} + \frac{8}{s+3}$$

所以得反变换为:

$$f(t) = (-5e^{-2t} + 8e^{-3t})u(t)$$

例 6.2-2 已知某因果信号 $f(t)$ 的拉普拉斯变换如下, 求 $f(t)$

$$F(s) = \frac{2s^2 + 3s + 3}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

解: 展为部分分式:

$$F(s) = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+2} + \frac{K_3}{s+3}$$

解得系数

$$K_1 = (s+1)F(s)|_{s=-1} = \frac{2s^2 + 3s + 3}{(s+2)(s+3)}|_{s=-1} = 1$$

$$K_2 = (s+2)F(s)|_{s=-2} = \frac{2s^2 + 3s + 3}{(s+1)(s+3)}|_{s=-2} = -5$$

$$K_3 = (s+3)F(s)|_{s=-3} = \frac{2s^2 + 3s + 3}{(s+1)(s+2)}|_{s=-3} = 6$$

$$F(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{-5}{s+2} + \frac{6}{s+3}$$

所以得反变换为:

$$f(t) = (e^{-t} - 5e^{-2t} + 6e^{-3t})\varepsilon(t)$$

(2) 共轭复数极点:

$$F(s) = \frac{B(s)}{(s+\alpha-j\beta)(s+\alpha+j\beta)} \quad (6.2-8)$$

其中 $-\alpha \pm j\beta$ 是共轭复数根, $F(s)$ 可以展开为如下形式:

$$F(s) = \frac{K_1}{s+\alpha-j\beta} + \frac{K_2}{s+\alpha+j\beta} \quad (6.2-9)$$

同理:

$$K_1 = (s+\alpha-j\beta)F(s)\Big|_{s=-\alpha+j\beta} = \frac{B(-\alpha+j\beta)}{2j\beta} \quad (6.2-10)$$

$$K_2 = (s+\alpha+j\beta)F(s)\Big|_{s=-\alpha-j\beta} = \frac{B(-\alpha-j\beta)}{-2j\beta} \quad (6.2-11)$$

例 6.2-3 设已知某因果信号 $f(t)$ 的拉普拉斯变换如下, 求 $f(t)$

$$F(s) = \frac{s+1}{(s+1)^2 + 4}$$

解: 展为部分分式:

$$F(s) = \frac{K_1}{s+1-2j} + \frac{K_2}{s+1+2j}$$

解得系数

$$K_1 = (s+1-2j)F(s) \Big|_{s=-1+2j} = \frac{s+1}{(s+1+2j)} \Big|_{s=-1+2j} = \frac{1}{2}$$

$$K_2 = (s+1+2j)F(s) \Big|_{s=-1-2j} = \frac{s+1}{(s+1-2j)} \Big|_{s=-1-2j} = \frac{1}{2}$$

$$F(s) = \frac{1/2}{s+1-2j} + \frac{1/2}{s+1+2j}$$

所以得反变换为:

$$f(t) = \left(\frac{1}{2} e^{(-1+2j)t} + \frac{1}{2} e^{(-1-2j)t} \right) \varepsilon(t)$$

由欧拉公式得:

$$f(t) = e^{-t} \cos(2t) \varepsilon(t)$$

(3) 极点为实数重根:
以三重根为例:

$$F(s) = \frac{B(s)}{(s-p_1)^3} \quad (6.2-12)$$

其中 p_1 是三重实根, $F(s)$ 可以展开为如下形式:

$$F(s) = \frac{K_{11}}{(s-p_1)^3} + \frac{K_{12}}{(s-p_1)^2} + \frac{K_{13}}{(s-p_1)} \quad (6.2-13)$$

其中 K_{11}, K_{12}, K_{13} 为待定系数。将式 (6.2-13) 两边同乘 $(s-p_1)^3$ 得:

$$(s-p_1)^3 F(s) = K_{11} + K_{12}(s-p_1) + K_{13}(s-p_1)^2 \quad (6.2-14)$$

令 $s = p_1$, 代入上式, 有:

$$K_{11} = \left[(s-p_1)^3 F(s) \right] \Big|_{s=p_1} \quad (6.2-15)$$

对式 (6.2-14) 两边求导, 得:

$$\frac{d}{ds} \left[(s-p_1)^3 F(s) \right] = K_{12} + 2K_{13}(s-p_1) \quad (6.2-16)$$

令 $s = p_1$, 代入式 (6.2-16), 有:

$$K_{12} = \frac{d}{ds} \left[(s-p_1)^3 F(s) \right] \Big|_{s=p_1} \quad (6.2-17)$$

同样的方法可得:

$$K_{13} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2}{ds^2} \left[(s-p_1)^3 F(s) \right] \Big|_{s=p_1} \quad (6.2-18)$$

由以上对三重根的讨论，可以推出 m 阶重根的分解式为：

$$F(s) = \frac{K_{11}}{(s-p_1)^m} + \frac{K_{12}}{(s-p_1)^{m-1}} + \cdots + \frac{K_{1m}}{(s-p_1)} \quad (6.2-19)$$

其中：

$$K_{li} = \frac{1}{(i-1)!} \cdot \left[\frac{d^{i-1}}{ds^{i-1}} \left[(s-p_1)^m F(s) \right] \right] \Big|_{s=p_1} \quad (6.2-20)$$

式中， $i=1,2,3,\dots,m$

例 6.2-4 设已知某因果信号 $f(t)$ 的拉普拉斯变换如下，求 $f(t)$

$$F(s) = \frac{s^2}{(s+1)^3}$$

解：展为部分分式：

$$F(s) = \frac{K_{11}}{(s+1)^3} + \frac{K_{12}}{(s+1)^2} + \frac{K_{13}}{s+1}$$

解得系数

$$K_{11} = (s+1)^3 F(s) \Big|_{s=-1} = 1$$

$$K_{12} = \frac{d}{ds} \left[(s+1)^3 F(s) \right] \Big|_{s=-1} = \frac{d}{ds} [s^2] \Big|_{s=-1} = -2$$

$$K_{13} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2}{ds^2} \left[(s+1)^3 F(s) \right] \Big|_{s=-1} = 1$$

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)^3} - \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{1}{s+1}$$

所以得反变换为：

$$f(t) = \left(\frac{1}{2} t^2 e^{-t} - 2te^{-t} + e^{-t} \right) \varepsilon(t)$$

当 $m \geq n$ 时， $F(s)$ 非有理真分式，需首先化简为真分式+多项式的形式，然后对真分式部分进行部分分式展开。

例 6.2-5 设已知因果信号 $f(t)$ 的拉普拉斯变换如下，求 $f(t)$

$$F(s) = \frac{2s^2 + 6s + 6}{s^2 + 3s + 2}$$

解：由于 $F(s)$ 非有理真分式，需先化简：

$$F(s) = 2 + \frac{2}{s^2 + 3s + 2} = 2 + F_1(s)$$

$F_1(s)$ 可展开为：

$$F_1(s) = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+2}$$

解得系数

$$K_1=2, K_2=-2$$

从而

$$F(s) = 2 + \frac{2}{s+1} + \frac{-2}{s+2}$$

所以得反变换为：

$$f(t) = 2\delta(t) + (2e^{-t} - 2e^{-2t})\varepsilon(t)$$

6.3 拉普拉斯变换求解微分方程

拉普拉斯变换分析 LTI 常系数微分方程：

(1) 通过拉普拉斯变换可将时域中的微分方程变换为 s 域中的代数方程，简化求解。

(2) 根据拉普拉斯变换的微分特性，系统的起始状态可以自动的包含到拉普拉斯变换中，从而一举求得零输入和零状态响应。

拉普拉斯变换求解 LTI 常系数微分方程在 $t > 0$ 时的响应，描述 n 阶系统的微分方程的一般形式为：

$$\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^m b_j x^{(j)}(t) \quad (6.3-1)$$

输入的起始状态为： $x(0_-), x^{(1)}(0_-), x^{(2)}(0_-), \dots, x^{(m-1)}(0_-)$

输出的起始状态为： $y(0_-), y^{(1)}(0_-), y^{(2)}(0_-), \dots, y^{(n-1)}(0_-)$

记输入 $x(t)$ 的拉普拉斯变换为 $X(s)$ ，则由拉普拉斯变换的微分特性可得：

$$x^{(1)}(t) \leftrightarrow sX(s) - x(0_-)$$

$$x^{(2)}(t) \leftrightarrow s^2 X(s) - sx(0_-) - x^{(1)}(0_-)$$

以此类推可得：

$$x^{(j)}(t) \leftrightarrow s^j X(s) - \sum_{k=1}^j s^{j-k} x^{(k-1)}(0_-)$$

若输入 $x(t)$ 在 $t=0$ 时接入系统，则输入的起始状态均为 0，可得如下简化关系：

$$x^{(j)}(t) \leftrightarrow s^j X(s)$$

记输出 $y(t)$ 的拉普拉斯变换为 $Y(s)$ ，由拉普拉斯变换的微分特性可得：

$$y^{(1)}(t) \leftrightarrow sY(s) - y(0_-)$$

$$y^{(2)}(t) \leftrightarrow s^2Y(s) - sy(0_-) - y^{(1)}(0_-)$$

以此类推可得：

$$y^{(i)}(t) \leftrightarrow s^iY(s) - \sum_{k=1}^i s^{i-k} y^{(k-1)}(0_-)$$

对微分方程两端做拉普拉斯变换，可得 s 域方程如下：

$$\left[\sum_{i=0}^n a_i s^i \right] Y(s) - \sum_{i=0}^n a_i \left[\sum_{k=1}^i s^{i-k} y^{(k-1)}(0_-) \right] = \left[\sum_{j=0}^m b_j s^j \right] X(s) - \sum_{j=0}^m b_j \left[\sum_{k=1}^j s^{j-k} x^{(k-1)}(0_-) \right] \quad (6.3-2)$$

可求得：

$$Y(s) = \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} X(s) + \frac{\sum_{i=0}^n a_i \left[\sum_{k=1}^i s^{i-k} y^{(k-1)}(0_-) \right] - \sum_{j=0}^m b_j \left[\sum_{k=1}^j s^{j-k} x^{(k-1)}(0_-) \right]}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} \quad (6.3-3)$$

其中 $\frac{\sum_{j=0}^m b_j s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} X(s)$ 为零状态响应的拉普拉斯变换，记为 $Y_{zs}(s)$ ；

$\frac{\sum_{i=0}^n a_i \left[\sum_{k=1}^i s^{i-k} y^{(k-1)}(0_-) \right] - \sum_{j=0}^m b_j \left[\sum_{k=1}^j s^{j-k} x^{(k-1)}(0_-) \right]}{\sum_{i=0}^n a_i s^i}$ 为零输入响应的拉普拉斯变换，记为 $Y_{zi}(s)$ 。

分别对 $Y_{zi}(s)$ ， $Y_{zs}(s)$ 做拉普拉斯反变换可求出系统的零输入响应 $y_{zi}(t)$ 和零状态响应 $y_{zs}(t)$ 。

例 6.3-1 描述某 LTI 系统的微分方程如下：

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 2x'(t) + 6x(t) \quad \text{已知起始状态 } y(0_-) = 1, y'(0_-) = -1$$

(1) 激励 $x(t) = e^{-t}u(t)$ ，求系统的零输入、零状态和完全响应。

(2) 激励 $x(t) = 2u(-t) + 4u(t)$ ，求系统的零输入、零状态和完全响应。

解：(1)：对输入 $x(t)$ 做拉普拉斯变换得：

$$X(s) = \frac{1}{s+1}$$

因输入 $x(t)$ 在 $t=0$ 时接入系统，则输入的起始状态均为 0：

$$x'(t) \leftrightarrow sX(s) - x(0_-) = sX(s)$$

由拉普拉斯变换微分特性及输出的起始状态可得：

$$y'(t) \leftrightarrow sY(s) - y(0_-) = sY(s) - 1$$

$$y''(t) \leftrightarrow s^2Y(s) - sy(0_-) - y'(0_-) = s^2Y(s) - s + 1$$

方程两边做拉普拉斯变换化简得：

$$(s^2 + 5s + 6)Y(s) = 2(s+3)X(s) + (s+4)$$

故：

$$Y(s) = \frac{2(s+3)}{(s^2 + 5s + 6)} X(s) + \frac{(s+4)}{(s^2 + 5s + 6)}$$

其中零状态响应的拉普拉斯变换为：

$$Y_{zs}(s) = \frac{2(s+3)}{(s^2 + 5s + 6)} X(s) = \frac{2(s+3)}{(s^2 + 5s + 6)(s+1)} = \frac{2}{(s+2)(s+1)}$$

对 $Y_{zs}(s)$ 做部分分式展开求其逆变换得到 $y_{zs}(t)$ ：

$$Y_{zs}(s) = \frac{2}{(s+2)(s+1)} = \frac{-2}{(s+2)} + \frac{2}{(s+1)}$$

得： $y_{zs}(t) = -2e^{-2t}\varepsilon(t) + 2e^{-t}\varepsilon(t)$

其中零输入响应的拉普拉斯变换为：

$$Y_{zi}(s) = \frac{(s+4)}{(s^2 + 5s + 6)} = \frac{(s+4)}{(s+2)(s+3)}$$

对 $Y_{zi}(s)$ 做部分分式展开求其逆变换得到 $y_{zi}(t)$ ：

$$Y_{zi}(s) = \frac{s+4}{(s+2)(s+3)} = \frac{2}{(s+2)} + \frac{-1}{(s+3)}$$

得：

$$y_{zi}(t) = 2e^{-2t}\varepsilon(t) - e^{-3t}\varepsilon(t)$$

故系统全响应为：

$$y(t) = y_{zs}(t) + y_{zi}(t) = 2e^{-t}\varepsilon(t) - e^{-3t}\varepsilon(t)$$

(2)：对输入 $x(t) = 2\varepsilon(-t) + 4\varepsilon(t)$ 做拉普拉斯变换得：

$$X(s) = \frac{4}{s}$$

注意：已知系统的起始状态，分析 LTI 常系数微分方程时采用的是单边拉普拉斯变换，故输入 $t < 0$

的部分不会影响拉普拉斯变换的结果。

因输入 $x(t) = 2\varepsilon(-t) + 4\varepsilon(t)$ ，则输入的起始状态为： $x(0_-) = 2$

$$x'(t) \leftrightarrow sX(s) - x(0_-) = sX(s) - 2$$

故方程两边做拉普拉斯变换化简得：

$$(s^2 + 5s + 6)Y(s) = 2(s + 3)X(s) + s$$

故：

$$Y(s) = \frac{2(s+3)}{s^2 + 5s + 6} X(s) + \frac{s}{s^2 + 5s + 6}$$

其中零状态响应的拉普拉斯变换为：

$$Y_{zs}(s) = \frac{2(s+3)}{(s^2 + 5s + 6)} X(s) = \frac{8}{(s+2)s}$$

对 $Y_{zs}(s)$ 做部分分式展开求其逆变换得到 $y_{zs}(t)$ ：

$$Y_{zs}(s) = \frac{4}{s} + \frac{-4}{s+2}$$

得：

$$y_{zs}(t) = 4\varepsilon(t) - 4e^{-2t}\varepsilon(t)$$

其中零输入响应的拉普拉斯变换为：

$$Y_{zi}(s) = \frac{s}{(s+2)(s+3)}$$

对 $Y_{zi}(s)$ 做部分分式展开求其逆变换 $y_{zi}(t)$ ：

$$Y_{zi}(s) = \frac{-2}{s+2} + \frac{3}{s+3}$$

得：

$$y_{zi}(t) = -2e^{-2t}\varepsilon(t) + 3e^{-3t}\varepsilon(t)$$

故系统全响应为：

$$y(t) = y_{zs}(t) + y_{zi}(t) = (4 - 6e^{-2t} + 3e^{-3t})\varepsilon(t)$$

例 6.3-2 描述某 LTI 系统的微分方程如下： $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = x(t)$

(1) 已知起始状态 $y(0_-) = 1, y'(0_-) = 2$ ，激励 $x(t) = e^{-3t}\varepsilon(t)$ ，求系统响应 $y(t)$ 。

(2) 求系统的单位冲激响应和单位阶跃响应。

解 (1) 对输入 $x(t)$ 做拉普拉斯变换得： $X(s) = \frac{1}{s+3}$

由拉普拉斯变换微分特性及输出的起始状态可得：

$$y'(t) \leftrightarrow sY(s) - y(0_-) = sY(s) - 1$$

$$y''(t) \leftrightarrow s^2Y(s) - sy(0_-) - y'(0_-) = s^2Y(s) - s - 2$$

方程两边做拉普拉斯变换化简得：

$$(s^2 + 3s + 2)Y(s) = X(s) + (s + 5)$$

故：

$$Y(s) = \frac{1}{(s^2 + 3s + 2)(s + 3)} + \frac{(s + 5)}{(s^2 + 3s + 2)} = \frac{s^2 + 8s + 16}{(s + 1)(s + 2)(s + 3)}$$

对 $Y(s)$ 做部分分式展开求其逆变换得到 $y(t)$ ：

$$Y(s) = \frac{K_1}{(s + 1)} + \frac{K_2}{(s + 2)} + \frac{K_3}{(s + 3)}$$

解得各系数： $K_1 = 4.5, K_2 = -4, K_3 = 0.5$

$$Y(s) = \frac{4.5}{(s + 1)} + \frac{-4}{(s + 2)} + \frac{0.5}{(s + 3)}$$

取反变换得：

$$y(t) = (4.5e^{-t} - 4e^{-2t} + 0.5e^{-3t})\varepsilon(t)$$

(2) 单位冲激响应和单位阶跃响应均为零状态响应。在零状态下对方程两边取拉普拉斯变换得：

$$(s^2 + 3s + 2)Y_{zs}(s) = X(s)$$

$$Y_{zs}(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} X(s)$$

输入为 $\delta(t)$ 时系统的零状态响应为单位冲激响应：

$$Y_{zs}(s) = \frac{1}{(s^2 + 3s + 2)} = \frac{1}{s + 1} + \frac{-1}{s + 2}$$

取反变换得单位冲激响应为：

$$h(t) = (e^{-t} - e^{-2t})\varepsilon(t)$$

输入为 $u(t)$ 时系统的零状态响应为单位阶跃响应：

$$Y_{zs}(s) = \frac{1}{(s^2 + 3s + 2)s} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s + 1} + \frac{K_3}{s + 2}$$

解得各系数： $K_1 = 0.5, K_2 = -1, K_3 = 0.5$

取反变换得单位阶跃响应为：

$$g(t) = (0.5 - e^{-t} + 0.5e^{-2t})\varepsilon(t)$$

6.4 拉普拉斯变换分析电路

拉普拉斯变换分析电路，可以先列电路的时域微分方程，再根据 6.3 节方法求解该微分方程。也可以直接根据电路元件的 s 域模型列写 s 域代数方程，直接求解 s 域代数方程。

6.4.1 电路元件的 s 域模型

1. 电阻元件的 s 域模型

电阻元件的时域模型如下：

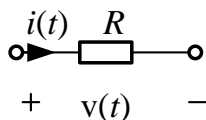


图 6.4-1 电阻的时域模型

$$v(t) = Ri(t) \quad (6.4-1)$$

由拉普拉斯变换的线性特性知：

$$V(s) = RI(s) \quad (6.4-2)$$

由式 (6.4-2) 我们可以得到电阻元件的 s 域模型：

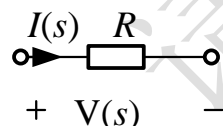


图 6.4-2 电阻的 s 域模型

2. 电容元件的 s 域模型

电容的时域模型如下：

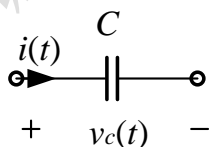


图 6.4-3 电容的时域模型

$$i(t) = C \frac{dv_c(t)}{dt} \quad (6.4-3)$$

由拉普拉斯变换微分特性：

$$I(s) = sCV_c(s) - Cv_c(0_-) \quad (6.4-4)$$

其中 $v_c(0_-)$ 为电容两端的起始电压。我们可以得到电容元件的 s 域模型：

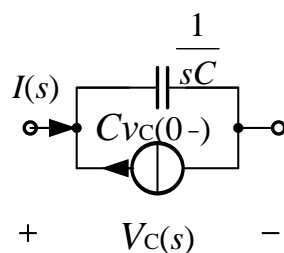


图 6.4-4 电容的 s 域并联模型

上式也可改写为:

$$V_c(s) = \frac{1}{sC} I(s) + \frac{1}{s} v_c(0_-) \quad (6.4-5)$$

我们可以得到电容元件的 s 域模型的另一种形式:

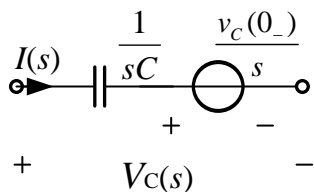


图 6.4-5 电容的 s 域串联模型

3. 电感元件的 s 域模型

电感的时域模型如下:

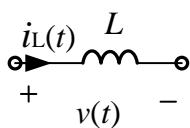


图 6.4-6 电感的时域模型

$$v(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \quad (6.4-6)$$

由拉普拉斯变换微分特性:

$$V(s) = sLI_L(s) - Li_L(0_-) \quad (6.4-7)$$

其中 $i_L(0_-)$ 为电感的起始电流。我们可以得到电感元件的 s 域模型:

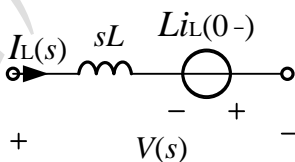


图 6.4-7 电感的 s 域串联模型

上式也可改写为:

$$I_L(s) = \frac{1}{sL} V(s) + \frac{1}{s} i_L(0_-) \quad (6.4-8)$$

我们可以得到电感元件的 s 域模型的另一种形式:

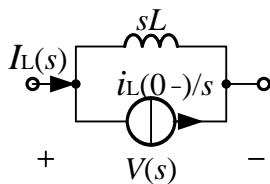


图 6.4-8 电感的 s 域并联模型

6.4.2 用 s 域模型分析电路

由电路 s 域模型分析电路响应步骤：

- (1) 求 0-时刻起始状态；
- (2) 画 s 域等效模型；
- (3) 由电路 $\sum V(s)=0$ 或 $\sum I(s)=0$ 列 s 域方程（代数方程）；
- (4) 解 s 域方程，求出响应的拉氏变换 $V(s)$ 或 $I(s)$ ；
- (5) 拉氏反变换得到 $v(t)$ 或 $i(t)$ 。

例 6.4-1 如图 6.4-9 电路，起始状态为 0， $t=0$ 时开关 S 闭合，电压源为直流电压 $v_0=1V$ ，电感 $L=1H$ ，电容 $C=0.5F$ ，电阻 $R=3\Omega$ ，求电流 $i(t)$ 。

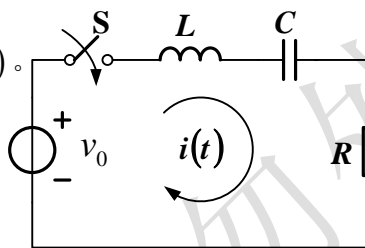


图 6.4-9 电路图

解：由起始状态为 0 知： $v_c(0-)=0$ ， $i_L(0-)=0$

由各元件的 s 域模型可得 $t>0$ 时 s 域电路如图 6.4-10：

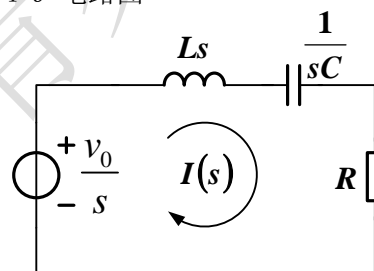


图 6.4-10 s 域模型

列方程：

$$LsI(s) + RI(s) + \frac{1}{Cs}I(s) = \frac{v_0}{s}$$

求解方程得：

$$I(s) = \frac{v_0}{s \left(Ls + R + \frac{1}{sC} \right)} = \frac{1}{s(s^2 + 3s + 2)}$$

由部分分式展开得：

$$I(s) = \frac{1}{(s^2 + 3s + 2)} = \frac{1}{s+1} + \frac{-1}{s+2}$$

故 $i(t) = e^{-t} - e^{-2t}$ ($t>0$)

例 6.4-2 已知 $e(t) = \begin{cases} -1V & t < 0 \\ 1V & t > 0 \end{cases}$ ，电容 $C=1F$ ，电阻 $R=1\Omega$ 。

利用 s 域模型求 $v_c(t) = ?$

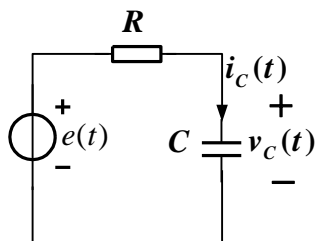


图 6.4-11 电路图

解：可知起始状态： $v_c(0-) = -1$

由各元件的 s 域模型可得 $t > 0$ 时 s 域电路如图 6.4-12：

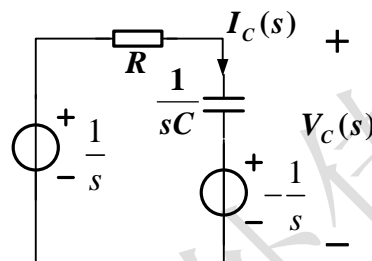


图 6.4-12 s 域模型

列方程：

$$I_C(s) \left(R + \frac{1}{sC} \right) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s}$$

求解方程得：

$$I_C(s) = \frac{2}{s \left(R + \frac{1}{sC} \right)}$$

故：

$$V_C(s) = I_C(s) \cdot \frac{1}{sC} + \frac{-1}{s}$$

将 $I_C(s)$ 代入可得：

$$V_C(s) = \frac{2}{s(s+1)} - \frac{1}{s} = \frac{-s+1}{s(s+1)}$$

由部分分式展开得：

$$V_C(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{s+1}$$

由拉普拉斯逆变换得：

$$v_C(t) = 1 - 2e^{-t} \quad (t > 0)$$

6.5 系统函数及零极点分析

系统函数是描述系统本身特性的一个重要参数，通过系统函数可研究系统的零极点分布，进而研究系统的稳定性，分析系统的频率响应特性等。

6.5.1 系统函数

系统函数 $H(s)$ 定义为系统零状态响应的拉普拉斯变换与输入信号的拉普拉斯变换之比：

$$H(s) = \frac{Y_{zs}(s)}{X(s)} \quad (6.5-1)$$

对于 LTI 系统而言，其输入信号 $x(t)$ 与输出信号 $y(t)$ 之间可由 n 阶常系数线性微分方程描述：

$$\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^m b_j x^{(j)}(t) \quad (6.5-2)$$

在零状态条件下，对两边做拉普拉斯变换得：

$$\begin{aligned} & (a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0) Y_{zs}(s) \\ &= (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0) X(s) \end{aligned} \quad (6.5-3)$$

得：

$$H(s) = \frac{Y_{zs}(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \quad (6.5-4)$$

故 $H(s)$ 只与系统的结构、元件参数有关，而与激励、起始状态无关。

若输入信号为单位冲激信号 $\delta(t)$ ，则对应零状态响应（即单位冲激响应 $h(t)$ ）的拉普拉斯变换为：

$$Y_{zs}(s) = H(s) \cdot 1 = H(s)$$

故系统函数 $H(s)$ 即是系统单位冲激响应 $h(t)$ 的拉普拉斯变换：

$$\begin{cases} H(s) = \mathcal{L}[h(t)] \\ h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] \end{cases} \quad (6.5-5)$$

若系统任意输入信号的象函数为 $X(s)$ ，则有零状态响应的象函数为：

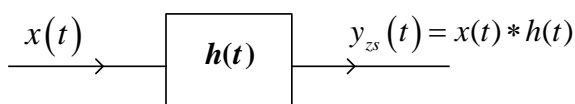
$$Y_{zs}(s) = H(s) \cdot X(s) \quad (6.5-6)$$

其实由第三章内容我们知道，系统输入 $x(t)$ 对应的零状态响应和单位冲激响应之间满足如下的卷积积分关系：

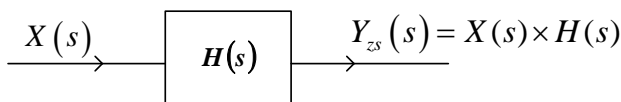
$$y_{zs}(t) = h(t) * x(t) \quad (6.5-7)$$

由拉普拉斯变换的卷积性质可知：

$$y_{zs}(t) = h(t) * x(t) \Leftrightarrow Y_{zs}(s) = H(s) \cdot X(s)$$



(a) LTI连续系统时域模型



(b) LTI连续系统s域模型

图 6.5-1 LTI 连续系统输入输出模型

例 6.5-1 已知 LTI 系统的微分方程为 $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = 2\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 6\frac{dx(t)}{dt}$ ，输入信号为

$x(t) = (1 + e^{-t})u(t)$ ，求该系统的系统函数，单位冲激响应和零状态响应。

解：

在零状态下对微分方程两边做拉普拉斯变换：

$$s^2 Y_{zs}(s) + 5s Y_{zs}(s) + 6Y_{zs}(s) = 2s^2 X(s) + 6sX(s)$$

由系统函数的定义得：

$$H(s) = \frac{Y_{zs}(s)}{X(s)} = \frac{2s^2 + 6s}{s^2 + 5s + 6}$$

因为系统单位冲激响应 $h(t)$ 就是系统函数 $H(s)$ 的拉普拉斯逆变换，故对 $H(s)$ 做部分分式展开求逆变换，由于 $H(s)$ 非真分式，首先将 $H(s)$ 化简为真分式+多项式的形式：

$$\frac{2s^2 + 6s}{s^2 + 5s + 6} = \frac{2s}{s + 2} = 2 - \frac{4}{s + 2}$$

所以

$$h(t) = 2\delta(t) - 4e^{-2t}\varepsilon(t)$$

对应 $x(t) = (1 + e^{-t})\varepsilon(t)$ 的系统零状态响应可以由两种方式求：

(1) 由 $y_{zs}(t) = h(t) * x(t)$ 卷积积分直接得到；

(2) 由 $Y_{zs}(s) = H(s) \cdot X(s)$ 得到零状态响应的象函数再进行拉普拉斯逆变换。

我们采用第二种方法求解，因为 $X(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} = \frac{2s+1}{s(s+1)}$

$$Y_{zs}(s) = H(s) \cdot X(s) = \frac{2s}{s+2} \cdot \frac{2s+1}{s(s+1)} = \frac{2(2s+1)}{(s+2)(s+1)} = \frac{6}{s+2} - \frac{2}{s+1}$$

故

$$y_{zs}(t) = 6e^{-2t}\varepsilon(t) - 2e^{-t}\varepsilon(t)$$

例 6.5-2 已知当输入为 $x(t) = e^{-t}\varepsilon(t)$ 时，某 LTI 系统的零状态响应为

$y_{zs}(t) = (3e^{-t} - 4e^{-2t} + e^{-3t})\varepsilon(t)$ ，求该系统的微分方程、单位冲激响应和单位阶跃响应。

解：由系统函数的定义知：

$$H(s) = \frac{Y_{zs}(s)}{X(s)} = \frac{\frac{3}{s+1} - \frac{4}{s+2} + \frac{1}{s+3}}{\frac{1}{s+1}} = \frac{2s+8}{s^2+5s+6}$$

故可得微分方程的拉普拉斯域为:

$$s^2 Y_{zs}(s) + 5s Y_{zs}(s) + 6 Y_{zs}(s) = 2s X(s) + 8 X(s)$$

零状态下取反变换得微分方程为:

$$y_{zs}''(t) + 5y_{zs}'(t) + 6y_{zs}(t) = 2x'(t) + 8x(t)$$

故系统的微分方程为:

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 2x'(t) + 8x(t)$$

$$\text{因 } H(s) = \frac{2s+8}{s^2+5s+6} = \frac{4}{s+2} + \frac{-2}{s+3}$$

单位冲激响应:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = (4e^{-2t} - 2e^{-3t})\varepsilon(t)$$

单位阶跃响应:

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[H(s)\frac{1}{s}\right] = \left(\frac{4}{3} - 2e^{-2t} + \frac{2}{3}e^{-3t}\right)\varepsilon(t)$$

例 6.5-3 已知系统的框图如图 6.5-2, 请写出此系统的系统函数和描述此系统的微分方程。

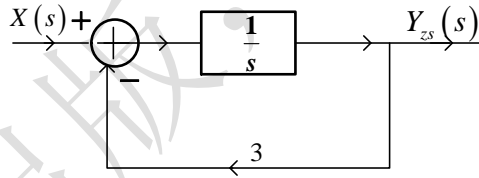


图 6.5-2 系统框图

解:

由框图得:

$$Y_{zs}(s) = \frac{X(s) - 3Y_{zs}(s)}{s}$$

化简得:

$$sY_{zs}(s) + 3Y_{zs}(s) = X(s)$$

由系统函数的定义知:

$$H(s) = \frac{Y_{zs}(s)}{X(s)} = \frac{1}{s+3}$$

注: 也可利用梅森公式, 根据狂徒直接求得系统函数。

对 $sY_{zs}(s) + 3Y_{zs}(s) = X(s)$ 两边做拉普拉斯逆变换得微分方程为:

$$y'(t) + 3y(t) = x(t)$$

6.5.2 系统函数的零、极点

LTI 系统的系统函数 $H(s)$ 具有如下的有理分式形式:

$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

其中 a_i, b_i 为实数, m, n 为正整数。

z_1, z_2, \cdots, z_m 是使 $B(s) = 0$ 的根, 称为 $H(s)$ 的零点。 p_1, p_2, \cdots, p_n 是使 $A(s) = 0$ 的根, 称为 $H(s)$ 的极点。将零极点画在复平面上, 可以得到系统的零、极点分布图。

例 6.5-4 $H(s) = \frac{2(s+2)}{(s+1)^2(s^2+1)}$, 求其零、极点分布图

解: -2 为零点; -1 为二重极点, $\pm j$ 为共轭极点, 得零极点分布图如图 6.5-3:

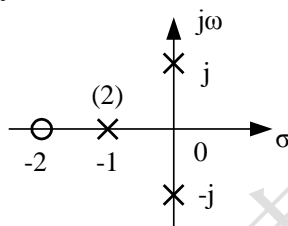


图 6.5-3 零极点分布图

例 6.5-5 已知系统的零极点分布图如图 6.5-4 所示, 且 $h(0_+) = 2$, 求系统函数 $H(s)$ 的表达式。

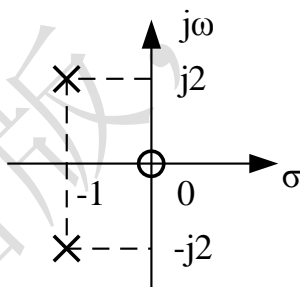


图 6.5-4 零极点分布图

解:

由零极点分布图得系统函数有一个零点 0 和共轭极点 $-1 \pm 2j$

得:

$$H(s) = \frac{Ks}{(s+1)^2 + 4} = \frac{Ks}{s^2 + 2s + 5}$$

因 $H(s)$ 为真分式, 由初值定理有:

$$h(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sH(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{Ks^2}{s^2 + 2s + 5} = K, \text{ 故 } K = 2, \text{ 得:}$$

$$H(s) = \frac{2s}{s^2 + 2s + 5}$$

下面讨论系统函数 $H(s)$ 的极点分布与单位冲激响应 $h(t)$ 的时域表达的关系（本章所讨论系统均为因果系统，对于因果系统来说，单位冲激响应均为因果信号，即满足 $h(t) \equiv 0, t < 0$ ）。 $H(s)$ 按其极点在 s 平面上的位置可分为：在左半开平面、虚轴和右半开平面三类。

(1) 左半开平面：

若 $H(s)$ 有负实数单极点 $p = -\alpha, (\alpha > 0)$ ，则 $H(s)$ 分母中有 $(s + \alpha)$ 因子，其所对应的响应函数形式为 $Ke^{-\alpha t}\varepsilon(t)$ ；

若 $H(s)$ 有一对共轭复数极点 $p_{1,2} = -\alpha \pm j\beta, (\alpha > 0)$ ，则 $H(s)$ 分母中有 $((s + \alpha)^2 + \beta^2)$ 因子，其所对应的响应函数形式为 $Ke^{-\alpha t} \cos(\beta t + \theta)\varepsilon(t)$ ；

若 $H(s)$ 有二重实数极点 $p_{1,2} = -\alpha, (\alpha > 0)$ ，则 $H(s)$ 分母中有 $(s + \alpha)^2$ 因子，其所对应的响应函数形式为 $Kte^{-\alpha t}\varepsilon(t)$ 。

以上 3 种情况， $t \rightarrow \infty$ 时，响应均趋于 0，为暂态响应。

(2) 右半开平面：

若 $H(s)$ 有正实数单极点 $p = \alpha, (\alpha > 0)$ ，则 $H(s)$ 分母中有 $(s - \alpha)$ 因子，其所对应的响应函数形式为 $Ke^{\alpha t}\varepsilon(t)$ ；

若 $H(s)$ 有一对共轭复数极点 $p_{1,2} = \alpha \pm j\beta, (\alpha > 0)$ ，则 $H(s)$ 分母中有 $((s - \alpha)^2 + \beta^2)$ 因子，其所对应的响应函数形式为 $Ke^{\alpha t} \cos(\beta t + \theta)\varepsilon(t)$ ；

若 $H(s)$ 有二重实数极点 $p_{1,2} = \alpha, (\alpha > 0)$ ，则 $H(s)$ 分母中有 $(s - \alpha)^2$ 因子，其所对应的响应函数形式为 $Kte^{\alpha t}\varepsilon(t)$ 。

以上 3 种情况， $t \rightarrow \infty$ 时，响应均趋于 ∞ 。

(3) 虚轴上：

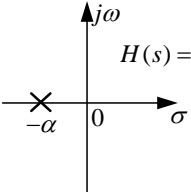
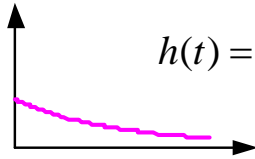
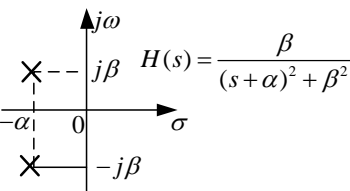
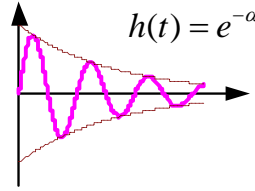
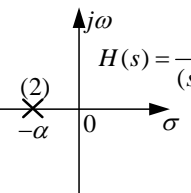
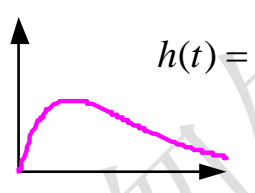
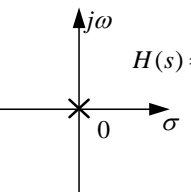
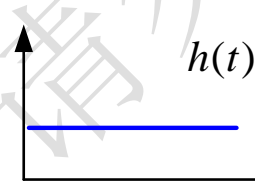
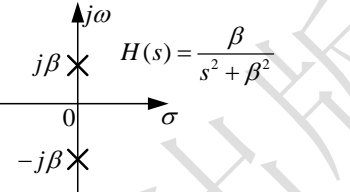
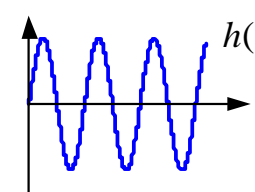
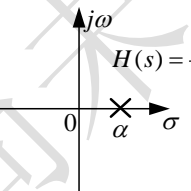
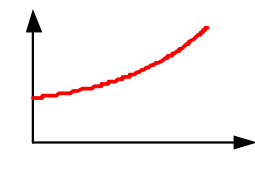
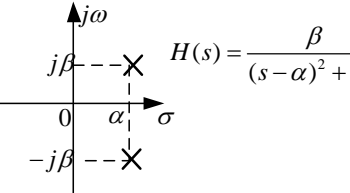
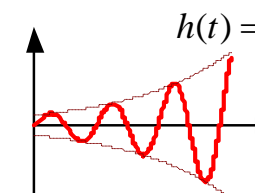
若 $H(s)$ 有实数单极点 $p = 0$ ，则 $H(s)$ 分母中有 s 因子，其所对应的响应函数形式为 $K\varepsilon(t)$ ；

若 $H(s)$ 有一对共轭极点 $p_{1,2} = \pm j\beta$ ，则 $H(s)$ 分母中有 $(s^2 + \beta^2)$ 因子，其所对应的响应函数形式为 $K \cos(\beta t + \theta)\varepsilon(t)$ ；

若 $H(s)$ 有二重极点 $p_{1,2} = 0$ ，则 $H(s)$ 分母中有 s^2 因子，其所对应的响应函数形式为 $Kt\varepsilon(t)$ 。

表 6.5-1 所示为 $H(s)$ 的极点与 $h(t)$ 的对应关系（其中 $\alpha > 0$ ）

表 6.5-1 $H(s)$ 的极点与 $h(t)$ 的对应关系

 $H(s) = \frac{1}{s + \alpha}$	 $h(t) = e^{-\alpha t}$
 $H(s) = \frac{\beta}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}$	 $h(t) = e^{-\alpha t} \sin(\beta t)$
 $H(s) = \frac{1}{(s + \alpha)^2}$	 $h(t) = t e^{-\alpha t}$
 $H(s) = \frac{1}{s}$	 $h(t) = \varepsilon(t)$
 $H(s) = \frac{\beta}{s^2 + \beta^2}$	 $h(t) = \sin(\beta t)$
 $H(s) = \frac{1}{s - \alpha}$	 $h(t) = e^{\alpha t}$
 $H(s) = \frac{\beta}{(s - \alpha)^2 + \beta^2}$	 $h(t) = e^{\alpha t} \sin(\beta t)$

因为傅里叶变换是 $\sigma = 0$ 时的拉普拉斯变换，所以如果拉普拉斯变换的收敛域包括虚轴，则系统存在频率响应，频率响应与系统函数的关系如下：

$$H(\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega} \quad (6.5-8)$$

6.5.3 系统的稳定性分析

对于一个 LTI 连续系统，若对任意的有界输入，其零状态响应也是有界的，则称该系统是有界输入有界输出 (Bound Input Bound Output----- BIBO) 稳定的系统，简称为稳定系统。

可以证明，LTI 系统稳定的充要条件是单位冲激响应 $h(t)$ 绝对可积，即：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < \infty \quad (6.5-9)$$

对于 LTI 因果系统来说，系统稳定的充要条件是：

$$\int_0^{+\infty} |h(t)| dt < \infty \quad (6.5-10)$$

通过 6.5.2 节的分析，可以由 $H(s)$ 的极点分布判断系统的稳定性（本章所讨论系统均为因果系统）。

(1) 若系统函数 $H(s)$ 的极点均在左半平面，则对应的单位冲激响应 $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0$ ，满足绝对可积条件式 (6.5-10)，系统稳定。

(2) 若系统函数 $H(s)$ 在虚轴上有只有单极点或一对共轭单极点，且其余极点均在左半平面，则对应的单位冲激响应 $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = M$ (M 为非零有界值)，虽然不满足绝对可积条件，但 $h(t)$ 不是无限增长的，系统为临界稳定。

(3) 若系统函数 $H(s)$ 的有极点位于右半平面，或者在虚轴上有二阶或者二阶以上的重极点，则对应的单位冲激响应 $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \infty$ ，不满足绝对可积条件，系统不稳定。

例 6.5-6：某因果系统的系统函数如下，整数 k 满足什么条件该系统是稳定的？

$$H(s) = \frac{s+2}{s^2+s+(k-3)}$$

解：

若因果系统稳定，则系统所有极点必须在左半平面。

$H(s)$ 的极点为：

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{13}{4} - k}$$

为使极点在左半平面你，必须满足：

$$\left(\frac{13}{4} - k \right) < 0 \quad \text{或者} \quad \begin{cases} \frac{13}{4} - k \geq 0 \\ -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{13}{4} - k} < 0 \end{cases}$$

可得, $k > 3$ 时系统稳定。

6.6 实例分析

传统的汽车发动机点火系统中, 通过 12V 的蓄电池供电, 利用由点火线圈初级绕组、断电器及电容器等元件等构成的初级回路产生 200~300V 的瞬时高电压, 然后利用变压器在次级回路产生 15~20kV 的互感瞬时电压, 从而击穿火花塞并实现点火。在这里, 我们将利用拉普拉斯分析方法来分析其初级回路瞬时高电压的产生过程。

点火系统中的初级回路可以用 RLC 二阶动态电路来描述, 如图 6.6-1 所示。12V 蓄电池用电压源模型 V_s 来实现, 点火线圈初级绕组用电感模型 L 来实现, 断电器用开关模型 S 来实现, 输出取电感 L 两端的电压。

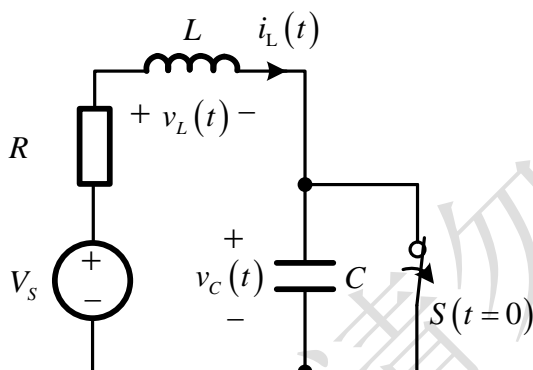


图 6.6-1 点火系统初级回路

开关 S 在 $t=0$ 时打开, 开关打开前, 电路已达稳态, 电压源 $V_s = 12\text{V}$, 电感 $L = 7\text{mH}$, 电阻 $R = 4\Omega$, 电容 $C = 0.8\mu\text{F}$, 可见, 电路的起始状态为 $i_L'(0_-) = \frac{v_L(0_-)}{L} = \frac{0}{7 \times 10^{-3}} = 0 \text{ V/H}$,

$i_L(0_-) = \frac{V_s}{R} = \frac{12}{4} = 3\text{A}$, $v_C(0_-) = 0\text{V}$ 。由电路 s 域模型得:

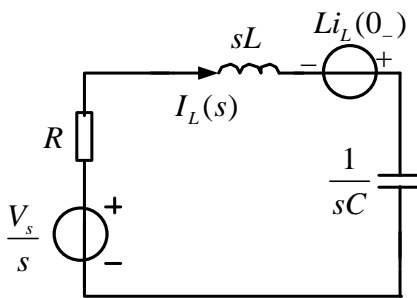


图 6.6-2 电路 s 域模型

由 s 域电路模型得:

$$(sL + R + \frac{1}{sC})I_L(s) - Li_L(0_-) = \frac{V_s}{s}$$

将各参数代入方程, 可得

$$s^2 I_L(s) + \frac{4}{7} \times 10^3 s I_L(s) + \frac{1}{56} \times 10^{10} I_L(s) - s i_L(0_-) = \frac{12}{7} \times 10^3$$

化简得:

$$I_L(s) = \frac{3s + \frac{12000}{7}}{s^2 + \frac{4000}{7}s + \frac{10^{10}}{56}} \approx 3 \times \frac{s + 286}{(s + 286)^2 + 13360^2} + 0.06 \times \frac{13360}{(s + 286)^2 + 13360^2}$$

查常用信号的拉普拉斯变换表 6.1-1 可以得到:

$$\begin{aligned} i_L(t) &\approx e^{-286t} (3 \cos(13360t) + 0.06 \sin(13360t)) \\ &\approx 3e^{-286t} \cos(13360t) \text{ A} \quad (t > 0) \end{aligned}$$

而电感上的电压为

$$\begin{aligned} v_L(t) &= L \frac{di_L(t)}{dt} \\ &\approx e^{-286t} (-6 \cos(13360t) - 281 \sin(13360t)) \\ &\approx -281e^{-286t} \sin(13360t) \text{ V} \quad (t > 0) \end{aligned}$$

因此, 利用拉普拉斯变换我们可以很好的分析实际系统的响应。

习题 6

6-1 求下列函数的拉普拉斯变换，并给出收敛域。

- (1) $\delta(t) + e^{-3t}\varepsilon(t)$ (2) $\sin(t)\varepsilon(t) + 2\cos(t)\varepsilon(t)$
- (3) $(t^2 + 2t)\varepsilon(t)$ (4) $e^{-t}\sin(2t)\varepsilon(t)$
- (5) $(1 + 2t)e^{-t}\varepsilon(t)$ (6) $te^{-2t}\sin(t)\varepsilon(t)$

6-2 已知 $f(t) = e^{-2t}u(t) \leftrightarrow F(s) = \frac{1}{s+2}$ ，利用拉普拉斯变换求下列原函数。

- (1) $F_1(s) = F(s)e^{-s}$ ； (2) $F_2(s) = sF'(s)$ ； (3) $F_3(s) = sF(\frac{s}{2})e^{-s}$ ；

6-3 已知因果信号 $f(t)$ 的拉普拉斯变换 $F(s)$ 如下，试用部分分式求 $f(t)$ 。

- (1) $\frac{4}{2s+3}$ (2) $\frac{4}{s(2s+3)}$
- (3) $\frac{3s}{(s+4)(s+2)}$ (4) $\frac{4}{(s+3)(s+2)^2}$
- (5) $\frac{4s+5}{s^2+5s+6}$ (6) $\frac{s+17}{s^2+9s+14}$

6-4 用拉普拉斯变换性质求以下各题（ $f(t)$ 为因果信号）

- (1) 求 $e^{-t}\varepsilon(t) * e^{-2t}\varepsilon(t)$ (2) 求 $e^{-t}\varepsilon(t) * \sin t\varepsilon(t)$
- (3) 求 $e^{-t}\varepsilon(t) * e^{-t}\varepsilon(t-1)$ (4) 已知 $f(t) * \frac{d}{dt}f(t) = (1-2t)e^{-2t}\varepsilon(t)$ ，求 $f(t)$

6-5 分别求下列函数逆变换的初值和终值

- (1) $\frac{s+4}{(s+2)(s+5)}$ (2) $\frac{s+5}{(s+1)^2(2s+3)}$
- (3) $\frac{3s}{s^2+s-2}$ (4) $\frac{s^3+5s^2+1}{s^2+3s+2}$

6-6 已知 LTI 系统的微分为 $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 3x(t)$ ，起始状态

$y(0_-) = 0, y'(0_-) = 1$ ，输入信号为 $x(t) = e^{-t}\varepsilon(t)$ ，求该系统的零输入响应、零状态响应和完全响应。

6-7 已知 LTI 系统的微分为 $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ ，起始状态 $y(0_-) = 1, y'(0_-) = 2$ ，输入信号为 $x(t) = 2\varepsilon(-t) + e^{-3t}\varepsilon(t)$ ，求该系统的零输入响应、零状态响应和完全响应。

6-8 已知 LTI 系统的微分为 $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = 3x(t)$ ，起始状态 $y(0_-) = 0, y'(0_-) = 1$ ，求该系统的单位冲激响应、单位阶跃响应。

6-9 已知某 LTI 系统的单位阶跃响应 $g(t) = (1 - e^{-2t})\varepsilon(t)$ ，为了使系统的零状态响应为 $y(t) = (1 - e^{-2t} - te^{-2t})\varepsilon(t)$ ，求输入信号 $x(t)$ 。

6-10 已知 LTI 系统的单位阶跃响应 $g(t) = (e^{-t} + 2e^{-2t})\varepsilon(t)$ ，

(1) 求该系统的单位冲激响应和系统函数。

(2) 输入为 $te^{-t}\varepsilon(t)$ 时求该系统的零状态响应。

6-11 已知 LTI 系统，当输入为 $e^{-t}\varepsilon(t)$ 时系统零状态响应为 $\left(\frac{1}{2}e^{-t} - e^{-2t} + 2e^{3t}\right)\varepsilon(t)$ ，求该系统的单位冲激响应和系统函数。

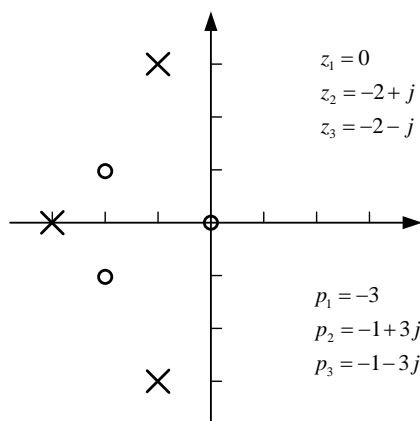
6-12 已知某 LTI 系统的系统函数 $H(s) = \frac{s}{s^2 + 3s + 2}$ ，输入为 $x(t) = (1 - e^{-t})\varepsilon(t)$ 时系统的完全响应

为 $y(t) = (te^{-t} + e^{-t} - e^{-2t})\varepsilon(t)$ ，求该完全响应的中零输入响应、零状态响应以及系统的起始状态。

6-13 已知某 LTI 系统的系统函数 $H(s) = \frac{s+3}{s^2 + 3s + 2}$ ，系统起始状态 $y(0_-) = 0, y'(0_-) = -1$ ，求

$x(t) = t\varepsilon(t)$ 时系统的自由响应和强迫响应。

6-14 已知某 LTI 系统的系统函数 $H(s)$ 零极点分布如下图所示：且 $H(\infty) = 5$ 。求 $H(s)$ 的表达式。

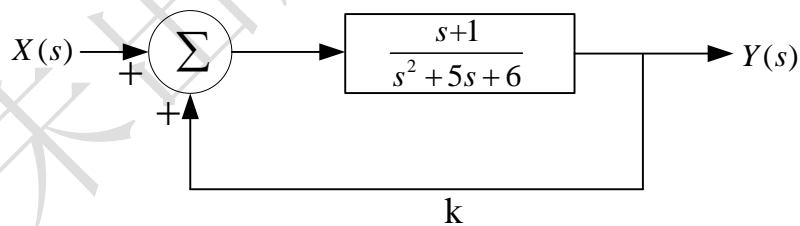
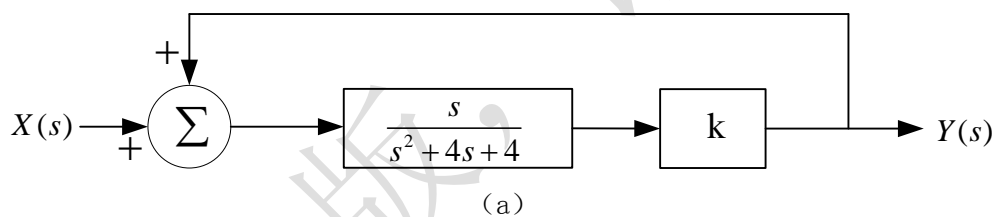


题 6-14 图

6-15 已知某因果 LTI 系统的系统函数为 $H(s) = \frac{s+6}{s^2+4s+k}$ ，求其为稳定系统时 k 的取值范围。

6-16 如题 6-16 图所示反馈系统，求：

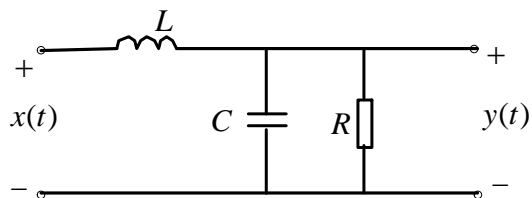
- (1) 描述该系统的系统函数 $H(s)$
- (2) k 满足什么条件时系统稳定？



题 6-16 图

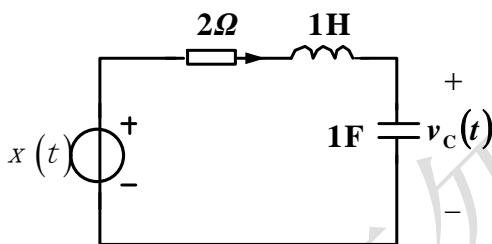
6-17 如题 6-17 图所示系统，输入电压为 $x(t)$ ，输出电压为 $y(t)$ ，起始状态为 0， $L = 2H, C = 0.1F, R = 10\Omega$ 。求：

- (1) 系统函数 $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$
- (2) 画出 $H(s)$ 的零极点分布图
- (3) 系统的单位冲激响应



题 6-17 图

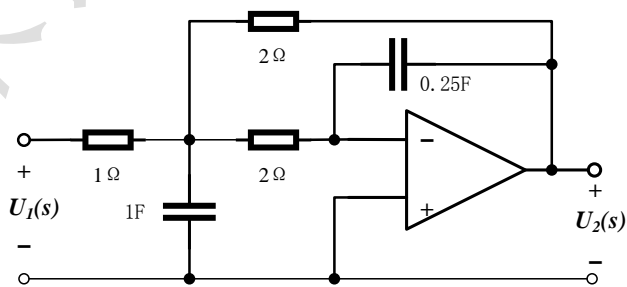
6-18 电路如题 6-18 图所示， $t=0$ 时刻加入输入电压为 $x(t)$ ，电感和电容的起始状态分别为 $i_l(0_-), v_c(0_-)$ ，电路系统的输出为 $u_c(t)$ 。



题 6-18 图

- (1) 求系统函数 $H(s)$ ；
- (2) 求系统单位冲激响应；
- (3) 求描述该系统的微分方程，若系统的零输入响应等于系统的冲激响应，系统的起始状态 $i_l(0_-), v_c(0_-)$ 分别是多少？

6-19 题 6-19 所示电路，求系统函数 $H(s) = U_2(s) / U_1(s)$ ，并由 $H(s)$ 求 $H(\omega)$ 的幅频特性和相频特性，说明它是高通或是低通电路。



题 6-19 图