

第五章 信号的频谱分析与电路系统频域分析

5.1 引言

在第三章中,我们研究了将输入信号分解为冲激信号和的形式,在求得线性电路系统的单位冲激响应后,根据线性时不变系统的性质,导出了线性电路系统的零状态响应是其输入与其单位冲激响应的卷积。而在第四章中,我们研究了激励为单一频率的正弦信号时线性电路系统的相量分析方法。这启发我们如果能够将电路系统的输入信号分解为不同频率正弦信号的和的形式,则其响应可以根据电路系统的线性时不变性质快速求出。这一思想实际上就是本章将要介绍的线性电路的傅里叶变换分析方法。

一般来说,对于信号的分析,可以有两种角度:一种是时间域角度,还有一种是频率域角度。在时间域,我们通常将信号看成是一种“时间序列”,或者说信号是随时间变化的一系列值,如图 5.1-1 (a) 所示。这种表示方法可以直观地表征信号在某一特定时刻的值,但不利于描述信号的全局特性。另一方面,如果将图 5.1-1 (a) 中的信号看成是图 5.1-1 (b) 中具有不同幅度、不同频率的三个正弦信号的和,并将不同频率下的幅度图画出来,如图 5.1-1 (c) 所示,则图 5.1-1 (a) 中的信号的特性将更易于理解。实际上,图 5.1-1 (c) 是图 5.1-1 (a) 中信号的频率域表示。

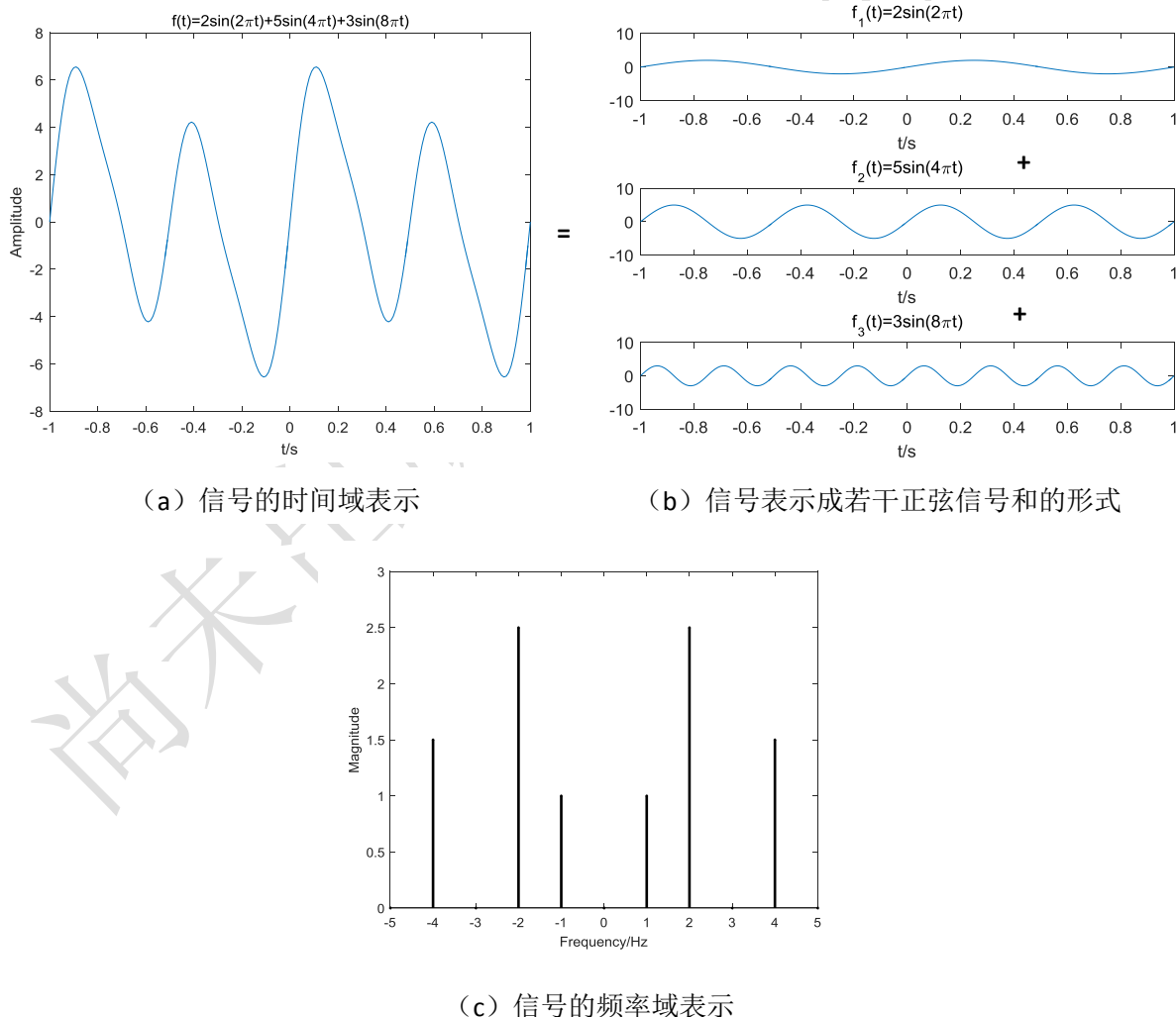
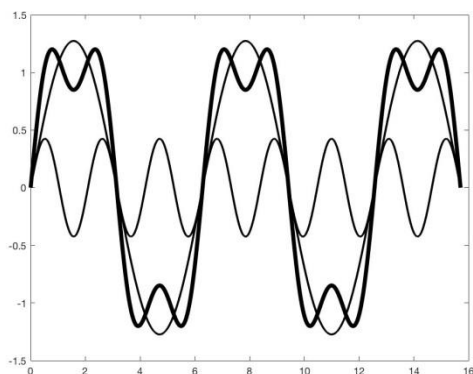


图 5.1-1 同一信号的时间域和频率域表示

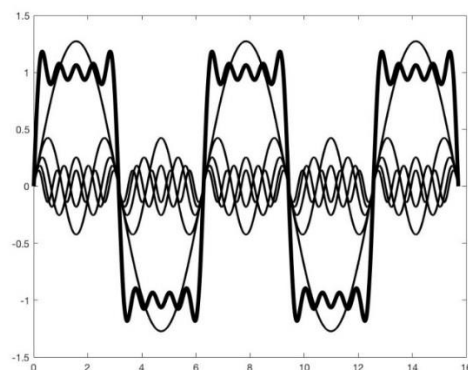
再来看一个信号叠加的例子,式 5.1-1 的信号 $y(t)$ 无穷多个不同频率不同振幅的正弦信号叠加而成,当取前两项叠加时得到的波形如图 5.1-2 (a) 所示,而取前四项叠加时得到的波形如图 5.1-2 (b)

所示。随着叠加正弦信号个数的增加，合成的波形将越来越接近矩形。

$$y(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin((2n-1)t) \quad (5.1-1)$$



(a) 两个正弦信号的叠加



(b) 四个正弦信号的叠加

图 5.1-3 多个正弦信号的叠加

实际上，不仅仅是矩形，周期三角波信号也可以用正弦波叠加得到。式 (5.1-2) 的 $y(t)$ 由 7 个正弦信号组成，其合成曲线见图 5.1-4 所示。可见，合成波形是一个近似周期三角波。

$$y(t) = \frac{2}{\pi} \left(\sin(t) - \frac{1}{2} \sin(2t) + \frac{1}{3} \sin(3t) - \frac{1}{4} \sin(4t) + \frac{1}{5} \sin(5t) - \frac{1}{6} \sin(6t) + \frac{1}{7} \sin(7t) \right) \quad (5.1-2)$$

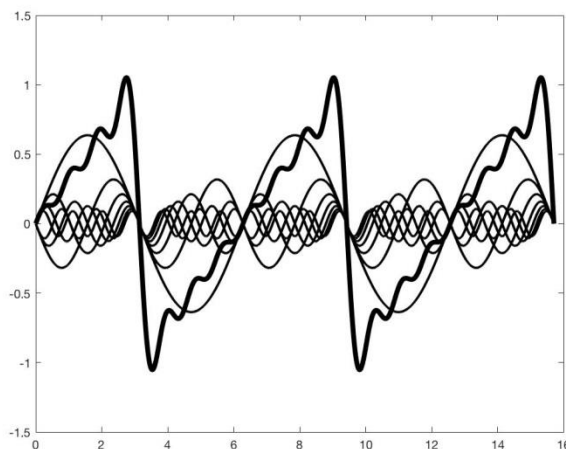


图 5.1-5 7 项正弦波合成三角波

上述例子说明：一方面，我们可以将一个信号表示成具有不同频率、幅度和相位的正弦信号的叠加；另一方面，具有不同频率、幅度和相位的正弦信号的叠加可以构成不同形式的信号。这些实例启发我们，将信号分解为不同正弦信号的和是可行的。那么，是不是一般的信号都可以进行这样的分解呢？答案由法国数学家和物理学家傅里叶（英文原名：Jean Baptiste Joseph Fourier）给出：1807 年，傅里叶在其《热的传播理论》论文中推导出著名的热传导方程，并在求解该方程时发现解函数可以由三角函数构成的级数形式表示，从而提出任一函数都可以展成三角函数的无穷级数的理论。论文几经周折，终于在 1822 年得以正式发表。在此基础上，人们对傅里叶的理论进行了深入的研究，尤其是上世纪 60 年代快速傅里叶变换的提出，目前已在很多领域得到了广泛应用。

5.2 周期信号的傅里叶级数

5.2.1 傅里叶级数的三角形式

一个周期为 T_1 的周期信号 $f(t)$ ，若满足狄里赫利条件：

- (1) 在一个周期内，信号 $f(t)$ 只有有限个间断点；
- (2) 在一个周期内，信号 $f(t)$ 只有有限个极大值和极小值；
- (3) 在一个周期内，信号 $f(t)$ 是绝对可积的，即 $\int_{-T/2}^{T/2} |f(t)| dt < \infty$ 。

则信号 $f(t)$ 可以展开为傅里叶级数：

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t)) \quad (5.2-1)$$

$$a_0 = \frac{1}{T_1} \int_{T_1} f(t) dt \quad (5.2-2)$$

$$a_n = \frac{2}{T_1} \int_{T_1} f(t) \cos(n\omega_1 t) dt, n=1, 2, \dots \quad (5.2-3)$$

$$b_n = \frac{2}{T_1} \int_{T_1} f(t) \sin(n\omega_1 t) dt, n=1, 2, \dots \quad (5.2-4)$$

1、傅里叶级数展开的含义

不同周期信号傅里叶级数展开拥有相同的形式，即都是直流和各个频率交流信号的线性表示，区别在于线性表示的系数，取不同的 a_n ， b_n 得到不同的周期信号，系数与周期信号一一对应。

2、傅里叶分解的合理性

(1) 对于一个不存在间断点的周期信号而言，傅里叶级数收敛，并且级数展开在每一点的值与原信号值完全一致。

(2) 对于含有有限间断点的周期信号，除了不连续点之外，其他各点的函数值与傅里叶级数展开完全一致。而不连续点处，傅里叶级数收敛于不连续点的平均值。虽然在不连续点处傅里叶级数展开与原函数值不相等，但考虑整个周期信号，原信号与傅里叶级数展开能量上没有差别。

3、吉伯斯现象 Gibbs phenomenon(也称吉布斯效应)

将具有不连续点的周期函数(如矩形脉冲)进行傅里叶级数展开时，间断点附近的波形总是不可避免地存在起伏振荡形成过冲。随着级数所取函数项数的增多，合成波形中出现的过冲点越靠近原信号的不连续点。当选取的函数项数趋于无穷时，该过冲值趋于一个常数，大约等于总跳变值的9%，这种现象称为吉伯斯现象，如图 5.2-1 所示。

傅里叶级数展开式(5.2-1)中既有同频率正弦函数 $\sin(n\omega_1 t)$ 项又有余弦函数 $\cos(n\omega_1 t)$ 项，为便于后续分析画图，利用三角函数运算进行合并：

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \left(\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \cos(n\omega_1 t) + \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \sin(n\omega_1 t) \right) \quad (5.2-5)$$

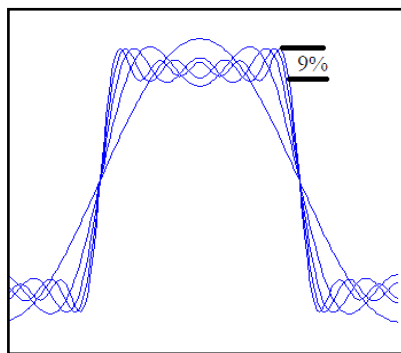


图 5.2-1 吉伯斯现象

令

$$\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} = \cos\varphi_n, \quad \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} = -\sin\varphi_n, \quad c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad c_0 = a_0$$

则有

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \{ \cos\varphi_n \cos(n\omega_1 t) - \sin\varphi_n \sin(n\omega_1 t) \}$$

即

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n) \quad (5.2-6)$$

$$\text{其中 } \varphi_n = -\arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$

由式 (5.2-6) 可见, 任何周期信号可分解为直流 c_0 、基波 $c_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$ 以及若干高次谐波

$c_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n), n \geq 2$ 的的形式。基波是指傅里叶级数展开式中频率等于原信号频率 ω_1 的正弦函数分量, 谐波是指傅里叶级数展开式中频率等于原信号频率整数倍 ($n\omega_1$) 的正弦函数分量, 如频率为 $3\omega_1$ 的正弦函数为 3 次谐波, 频率 $n\omega_1$ 的分量称为 n 次谐波。

式 (5.2-1) 和式 (5.2-6) 称为傅里叶级数展开的三角形式。

【例 5.2-1】求图 5.2-2 的周期锯齿信号的三角形式傅里叶级数。

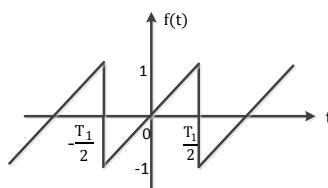


图 5.2-2 周期锯齿信号

解:

$$a_n = \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) \cos(n\omega_1 t) dt = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

周期锯齿信号是奇函数, 余弦是偶函数, 二者相乘是奇函数, 在对称区间内积分等于零。

$$b_n = \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) \sin(n\omega_1 t) dt = \frac{4}{T_1} \int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t) \sin(n\omega_1 t) dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{4}{T_1} \int_0^{\frac{T_1}{2}} \frac{2t}{T_1} \sin(n\omega_1 t) dt$$

利用分部积分求该积分:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{8}{T_1^2} \int_0^{\frac{T_1}{2}} t \sin(n\omega_1 t) dt = \frac{8}{T_1^2} \int_0^{\frac{T_1}{2}} t \cdot \frac{-1}{n\omega_1} \cdot d[\cos(n\omega_1 t)] \\ &= \frac{-8}{T_1^2 n\omega_1} \left\{ t \cos(n\omega_1 t) \Big|_0^{\frac{T_1}{2}} - \int_0^{\frac{T_1}{2}} \cos(n\omega_1 t) dt \right\} = (-1)^{n+1} \frac{2}{n\pi} \end{aligned}$$

因此, 得到周期锯齿信号的傅里叶级数展开式为:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n\pi} \sin(n\omega_1 t) \\ &= \frac{2}{\pi} \left\{ \sin(\omega_1 t) - \frac{1}{2} \sin(2\omega_1 t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega_1 t) - \frac{1}{4} \sin(4\omega_1 t) + \dots \right\} \end{aligned}$$

5.1 节中, 式 (5.1-3) 正是当 $\omega_1 = 1$ 时此傅里叶级数展开的前七项之和。

5.2.2 傅里叶级数的指数形式

傅里叶级数还可以展开成复指数形式。

利用欧拉公式, 将式 (5.2-1) 中的正弦、余弦函数用复指数函数表示:

$$\begin{aligned} \cos(n\omega_1 t) &= \frac{1}{2} (e^{jn\omega_1 t} + e^{-jn\omega_1 t}) \\ \sin(n\omega_1 t) &= \frac{1}{2j} (e^{jn\omega_1 t} - e^{-jn\omega_1 t}) \\ f(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n}{2} (e^{jn\omega_1 t} + e^{-jn\omega_1 t}) + \frac{b_n}{2j} (e^{jn\omega_1 t} - e^{-jn\omega_1 t}) \right] \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - jb_n}{2} e^{jn\omega_1 t} + \frac{a_n + jb_n}{2} e^{-jn\omega_1 t} \right) \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - jb_n}{2} e^{jn\omega_1 t} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n + jb_n}{2} e^{-jn\omega_1 t} \right) \end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned} F_0 &= a_0 \\ F_n &= \frac{a_n - jb_n}{2} \end{aligned}$$

从式 (5.2-2) 和式 (5.2-3) 显而易见

$$\begin{aligned} a_{-n} &= a_n, \quad b_{-n} = -b_n, \quad \text{因而 } F_{-n} = \frac{a_{-n} - jb_{-n}}{2} = \frac{a_n + jb_n}{2} = F_n^* \\ f(t) &= F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t} + \sum_{n=1}^{\infty} F_{-n} e^{-jn\omega_1 t} = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t} + \sum_{n=-1}^{-\infty} F_n e^{jn\omega_1 t} \end{aligned}$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t} \quad (5.2-7)$$

式(5.2-7)称为傅里叶级数的指数形式。其中傅里叶级数的系数

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{a_n - jb_n}{2} = \frac{1}{T_1} \int_{T_1} f(t) \cos(n\omega_1 t) dt - j \frac{1}{T_1} \int_{T_1} f(t) \sin(n\omega_1 t) dt \\ &= \frac{1}{T_1} \int_{T_1} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \quad (5.2-8)$$

需要说明的是, 式(5.2-8)中计算傅里叶级数的系数需要求一个周期内的积分, 理论上可以从任何点开始, 而常用积分区间为 $(0, T_1)$ 或 $(-\frac{T_1}{2}, \frac{T_1}{2})$ 。一般情况下选择后者更有利, 因为奇函数在对称区间内积分为零, 偶函数对称区间积分是半个周期积分的 2 倍, 可以简化运算。

5.2.3 周期信号的频谱

傅里叶级数展开有三种形式, 它们如式(5.2-1), (5.2-6), (5.2-7)所示, 第一种形式中因为同频率的函数有正弦和余弦两项, 实际工作中较少应用, 其余两种展开式重写如下:

$$\begin{aligned} f(t) &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n) \\ f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t} \end{aligned}$$

分析傅里叶级数展开的三角形式, 等式左边 $f(t)$ 是周期 $(T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1})$ 信号, 关注的是信号随时间 t 变化的规律; 等式右边是无穷多个周期信号的相加, 它们是直流、基波和各次谐波, 此时关注点转移到了直流分量大小, 以及当频率为 $n\omega_1$ 时的谐波分量的幅度和相位。

周期信号的傅里叶级数展开式详尽确切地表示了信号中所含各种频率成分, 但不够直观形象。如果把周期信号傅里叶级数展开式中不同谐波信号的振幅对频率的关系绘制成图, 便可清楚而直观地看出各频率分量的相对大小, 这种图称为信号的幅度频率谱, 简称幅度谱; 类似地, 不同频率信号的相位对频率的关系也绘制成图, 则称为相位频谱, 简称相位谱。三角形式的傅里叶级数中只包含正频率, 而指数形式的傅里叶级数中既包含正频率又包含负频率, 由此, 一般将由三角形式得到的频谱称为单边谱, 而将由指数形式得到的频谱称为双边谱。根据定义, 显然有 $|c_0| = |F_0| = |a_0|$,

$$|F_{-n}| = |F_n| = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{1}{2} c_n。$$

例 5.2-2 已知傅里叶级数展开的三角形式

$$f(t) = 1 + 3 \cos(2t) + 4 \sin(2t) + \cos(4t + 0.25\pi)$$

求傅里叶级数展开的指数形式, 并画出频谱图。

解: 该信号的周期 $T_1 = \pi$, 基波频率 $\omega_1 = 2$ 。将同频率的正弦和余弦化成带有初相位的余弦:

$$f(t) = 1 + 5 \cos(2t - 0.295\pi) + \cos(4t + 0.25\pi)$$

利用欧拉公式将余弦信号化成复指数:

$$\begin{aligned}
 &= 1 + \frac{5}{2} (e^{j(2t-0.295\pi)} + e^{-j(2t-0.295\pi)}) + \frac{1}{2} (e^{j(4t+0.25\pi)} + e^{-j(4t+0.25\pi)}) \\
 &= 1 + \frac{5}{2} e^{j2t} e^{-j0.295\pi} + \frac{5}{2} e^{-j2t} e^{j0.295\pi} + \frac{1}{2} e^{j4t} e^{j0.25\pi} + \frac{1}{2} e^{-j4t} e^{-j0.25\pi}
 \end{aligned}$$

三角形形式傅里叶级数展开的频率、幅度和相位关系见表 5.2-1, 幅频特性和相频特性如图 5.2-3 所示。指数形式傅里叶级数展开的频率、幅度和相位关系见表 5.2-2, 幅频特性和相频特性如图 5.2-4 所示。

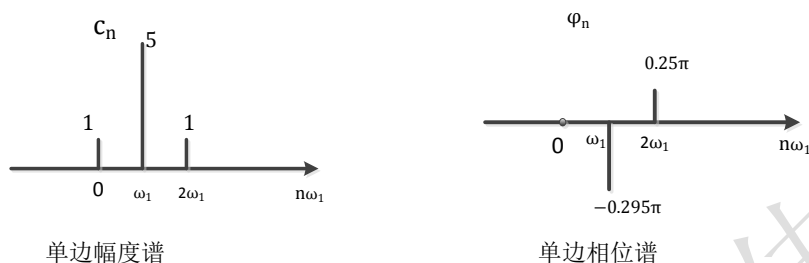


图 5.2-3 周期信号傅里叶级数展开三角形形式频谱

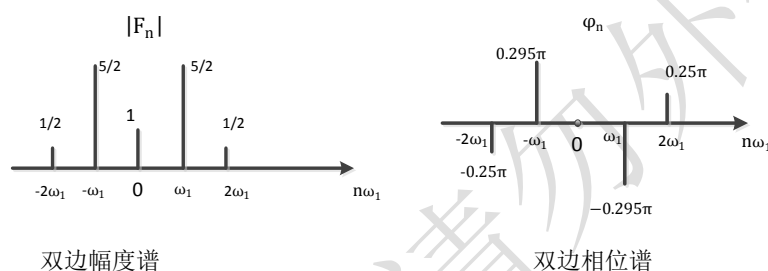


图 5.2-4 周期信号傅里叶级数展开指数形式频谱

从该例可见周期信号频谱具有如下特性：

- (1) 离散性：不管是幅度谱还是相位谱，只在 $n\omega_1$ 处有谱线， n 是整数，所以谱线是离散的。
- (2) 谐波性：周期信号由很多正弦信号构成，这些正弦信号的频率是基波的整数倍。

5.2.4 傅里叶级数性质

信号的时间域表示和频率域表示一一对应，时域的运算在频域的表现体现了傅里叶级数的性质，表 5.2-1 列出了一些常用的性质。下面只对表中的帕斯瓦尔定理进行介绍。

信号从能量的角度可分为能量信号和功率信号。周期信号的能量无穷大，而一个周期的能量有限，所以属于功率信号。定义周期信号 $f(t)$ 在 1 欧姆电阻上消耗的平均功率为信号的功率，不管该周期信号是电流信号还是电压信号，都满足功率的定义。

$$P = \frac{1}{T_1} \int_{T_1} |f(t)|^2 dt$$

将傅里叶级数的展开式代入上式，得到

$$P = \frac{1}{T_1} \int_{T_1} \left[c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n) \right]^2 dt \quad (5.2-9)$$

将上式被积函数展开，在展开式中具有 $\cos(n\omega_1 t + \varphi_n)$ 形式的项在一个周期内的积分等于零；根据正交性具有 $\cos(n\omega_1 t + \varphi_n) \cos(m\omega_1 t + \varphi_m)$ 形式的项，当 $m \neq n$ 时，其积分值为零，对于 $m = n$ 的项，积分值为 $\frac{T_1}{2} c_n^2$ ，因此，式 (5.2-9) 的积分为

$$P = \frac{1}{T_1} \int_{T_1} |f(t)|^2 dt = c_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2$$

即周期信号的平均功率也可利用傅里叶级数系数计算得到。

表 5.2-1 连续周期信号傅里叶级数的性质

性质	周期信号	傅里叶级数系数	备注
唯一性	$f(t)$ 周期为 T_1 , $\omega_1 = 2\pi/T_1$	a_n, b_n, F_n	余弦系数, 正弦系数, 指数系数
线性	$k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t)$	$k_1 F_{1n} + k_2 F_{2n}$	周期信号的线性表示, 系数也线性
时移	$f(t - t_0)$	$F_n e^{-jn\omega_1 t_0}$	
时间反转	$f(-t)$	F_{-n}	
尺度变换	$f(at)$	F_n	只是周期变化为 T/a
微分特性	$\frac{d}{dt} f(t)$	$j n \omega_1 F_n$	
积分特性	$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$	$\frac{F_n}{jn\omega_1}$	直流分量为零时适用
对称性	$f(t)$ 为实信号	$F_{-n} = F_n^*$ $ F_{-n} = F_n $ $\arg(F_{-n}) = -\arg(F_n)$	$-n$ 时的系数是 n 系数的共轭
	$f(t)$ 为实偶信号	$b_n = 0, F_n$ 实且偶	三角形式展开式只有余弦项
	$f(t)$ 为实奇信号	$a_n = 0, F_n$ 纯虚且奇	三角形式展开式只有正弦项
	$f(t)$ 为实奇谐信号	$a_n = b_n = F_n = 0, n$ 偶数	级数展开式中只有奇次谐波
帕斯瓦尔定理	$\frac{1}{T_1} \int_{T_1} f(t) ^2 dt$	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n ^2$	时域和频域的能量守恒 $\frac{1}{T_1} \int_{T_1} f(t) ^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n ^2$

【例 5.2-3】 周期矩形脉冲信号 $f(t)$ 的波形见图 5.2-5 所示, 周期为 T_1 , 脉宽为 τ , 写出该信号傅里叶级数展开的三角形式和指数形式, 并画出单边频谱、双边频谱。

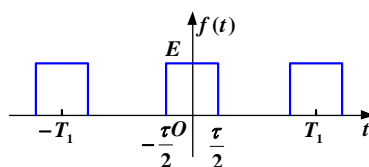


图 5.2-5 周期矩形波信号

解: 因 $f(t)$ 是偶函数, 正弦是奇函数, 两者相乘是奇函数, 奇函数在对称区间内的积分为零。因此 $b_n = 0$, 即傅里叶级数展开式中没有正弦分量, 只有直流和余弦分量

$$b_n = \frac{2}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f(t) \sin(n\omega_1 t) dt = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

偶函数在对称区间积分等于半周期积分的 2 倍

$$a_0 = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f(t) dt = \frac{2}{T_1} \int_0^{\tau/2} E dt = \frac{E\tau}{T_1}$$

$$a_n = \frac{2}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f(t) \cos(n\omega_1 t) dt = \frac{4}{T_1} \int_0^{\tau/2} E \cos(n\omega_1 t) dt$$

$$= \frac{4E}{T_1 n \omega_1} \sin(n \omega_1 t) \Big|_0^{\frac{\tau}{2}} = \frac{4E}{T_1 n \omega_1} \sin\left(n \omega_1 \frac{\tau}{2}\right)$$

$$= \frac{2\tau E}{T_1} \cdot \frac{\sin\left(n \omega_1 \frac{\tau}{2}\right)}{n \omega_1 \frac{\tau}{2}} = \frac{2\tau E}{T_1} \cdot \text{sa}\left(\frac{n \omega_1 \tau}{2}\right)$$

所以，该信号的傅里叶级数展开三角形式为

$$f(t) = \frac{E\tau}{T_1} + \frac{2E\tau}{T_1} \sum_{n=1}^{\infty} \text{sa}\left(\frac{n \omega_1 \tau}{2}\right) \cos(n \omega_1 t)$$

若取 $E = 1$, $\tau = 2$, $T_1 = 10$, 则 $\omega_1 = \pi/5$

$$f(t) = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} \sum_{n=1}^{\infty} \text{sa}\left(\frac{n\pi}{5}\right) \cos(n \omega_1 t)$$

$$= 0.2 + 0.3742\cos(\omega_1 t) + 0.3027\cos(2\omega_1 t) + 0.2018\cos(3\omega_1 t) + 0.0935\cos(4\omega_1 t) + 0.0623\cos(6\omega_1 t + \pi) + \dots$$

根据此傅里叶级数展开式，可以画出幅度谱和相位谱如图 5.2-6 所示。

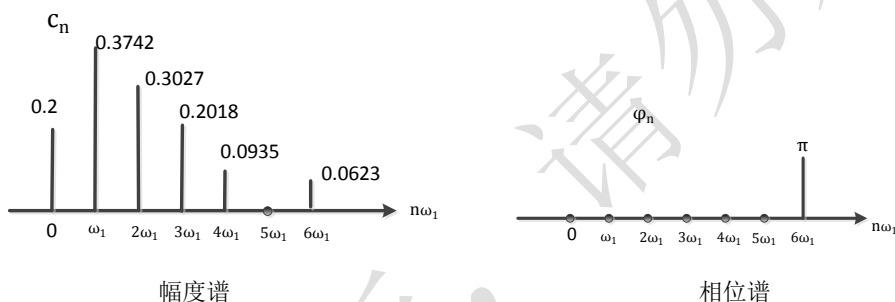


图 5.2-6 单边频谱

对于相位只有 0 和 π 的情况，可将幅度谱和相位谱合二为一。

$$f(t) = 0.2 + 0.3742\cos(\omega_1 t) + 0.3027\cos(2\omega_1 t) + 0.2018\cos(3\omega_1 t) + 0.0935\cos(4\omega_1 t) - 0.0623\cos(6\omega_1 t) + \dots$$

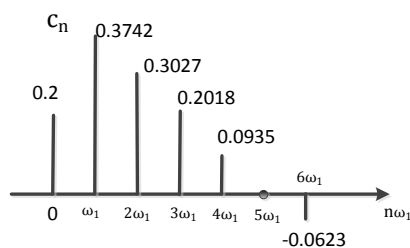


图 5.2-7 幅度谱相位谱合二为一

$$F_n = \frac{a_n - jb_n}{2} = \frac{\tau E}{T_1} \cdot \text{sa}\left(\frac{n \omega_1 \tau}{2}\right)$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{E\tau}{T_1} \text{sa}\left(\frac{n \omega_1 \tau}{2}\right) e^{jn \omega_1 t}$$

同样若 $E = 1$, $\tau = 2$, $T_1 = 10$, $\omega_1 = \pi/5$

$$f(t) = \frac{1}{5} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sa}\left(\frac{n\pi}{5}\right) e^{jn\omega_1 t}$$

$$= \dots + 0.031e^{-j\pi}e^{-j6\omega_1 t} + 0.046e^{-j4\omega_1 t} + 0.1e^{-j3\omega_1 t} + 0.1517e^{-j2\omega_1 t} + 0.187e^{-j\omega_1 t}$$

$$+ 0.2 + 0.187e^{j\omega_1 t} + 0.1517e^{j2\omega_1 t} + 0.1e^{j3\omega_1 t} + 0.046e^{j4\omega_1 t} + 0.031e^{j\pi}e^{j6\omega_1 t} + \dots$$

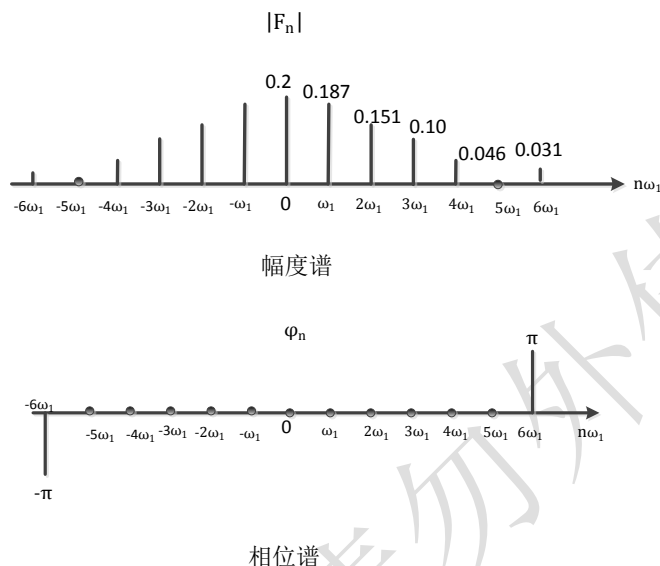


图 5.2-8 双边频谱

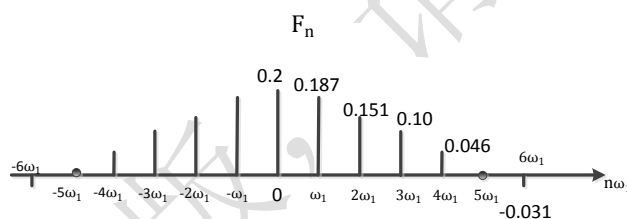


图 5.2-9 幅度相位谱合二为一的双边频谱

该信号的频谱同样具有离散性、谐波性和收敛特性。

下面验证帕斯瓦尔定理：

时域计算周期信号平均功率：

$$\frac{1}{T_1} \int_{T_1} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{10} \int_{-1}^1 1 dt = \frac{2}{10} \int_0^1 1 dt = 0.2$$

频域计算周期信号平均功率：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2 = |F_0|^2 + 2 \times [|F_1|^2 + |F_2|^2 + |F_3|^2 + |F_4|^2 + |F_5|^2 + |F_6|^2 \dots]$$

$$= 0.2^2 + 2 \times [0.187^2 + 0.151^2 + 0.1^2 + 0.046^2 + 0.031^2 + \dots] = 0.2$$

若忽略大于 6 次谐波的功率，得到直流至 6 次谐波的平均功率之和：

$$\sum_{n=-6}^6 |F_n|^2 = 0.2^2 + 2 \times [0.187^2 + 0.151^2 + 0.1^2 + 0.046^2 + 0.031^2] = 0.181694$$

前 6 次谐波的功率之和占总功率的 90.847%。从频谱图可见，5 次谐波的幅度为零，如果只计算幅值为零之前项的功率，即直流到 4 次谐波，功率和占总功率的 89.886%。

信号频带宽度 (bandwidth): 信号在频域占据最高频率与最低频率之差。

理论上, 此信号傅里叶级数展开包含从直流至基频的无穷倍频率的谐波, 该周期矩形信号的频带宽度为无穷大。而从频域计算功率可见, 它的主要功率集中在第一个零点 (即幅度为零处的频率) 之内, 在允许一定失真的条件下, 可以要求通信系统只把第一个零点频率范围内的各个频率分量进行传送。

而周期矩形脉冲频谱第一个零点为 $Sa\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right) = 0$, 即 $\frac{n\omega_1\tau}{2} = \pi$, $n\omega_1 = \frac{2\pi}{\tau}$ 。因此定义周期

矩形信号的频带宽度为:

$$B_{\omega} = \frac{2\pi}{\tau}$$

对于一般的周期信号, 通常把集中周期信号平均功率 90% 以上的谐波频率范围定义为信号的频带宽度, 简称为信号带宽。

【例 5.2-4】 求图 5.2-10 (a) 所示周期信号的傅里叶级数展开。

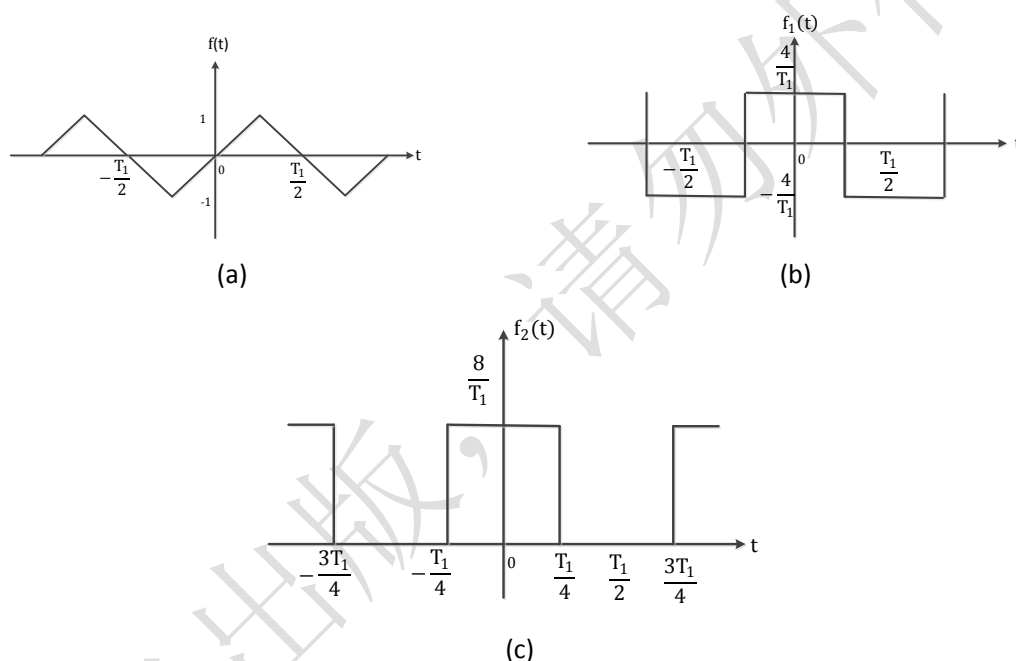


图 5.2-10 奇谐信号及变形波形

解: 该信号满足 $f\left(t \pm \frac{T_1}{2}\right) = -f(t)$, 即信号向左或向右平移半个周期后的波形与原信号波形横轴对称, 具有这一特性的信号称为奇谐信号。

$$F_n = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^0 f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt + \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1/2} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt$$

上式第一个积分做变量代换 $t = \tau - \frac{T_1}{2}$, 得到

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^0 f\left(\tau - \frac{T_1}{2}\right) e^{-jn\omega_1\left(\tau - \frac{T_1}{2}\right)} d\left(\tau - \frac{T_1}{2}\right) + \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1/2} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \\ &= \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1/2} -f(\tau) e^{-jn\omega_1\tau} e^{jn\pi} d\tau + \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1/2} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{T_1} (-1)^{n+1} \int_0^{\frac{T_1}{2}} f(\tau) e^{-jn\omega_1 \tau} d\tau + \frac{1}{T_1} \int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \\
&= \begin{cases} 0 & , n \text{ 为偶数} \\ \frac{2}{T_1} \int_0^{T_1/2} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt & , n \text{ 为奇数} \end{cases}
\end{aligned}$$

可见, 此类信号的傅里叶级数展开只含有奇次谐波, 故得名“奇谐信号”。下面利用性质来求 $f(t)$ 傅里叶级数展开系数, 图 5.2-10(b) 是该信号的微分波形, 图 5.2-10(c) 在微分的基础上加直流。

$$f_1(t) = \frac{d}{dt} f(t)$$

$$f_2(t) = \frac{4}{T_1} + f_1(t)$$

$f_2(t)$ 即为例 5.2-3 的图形, $E = \frac{8}{T_1}$, $\tau = \frac{T_1}{2}$, 周期为 T_1 , 故 $f_2(t)$ 的傅里叶系数为:

$$F_{2n} = \frac{4}{T_1} \cdot \text{sa}\left(n\omega_1 \frac{T_1}{4}\right) = \frac{4}{T_1} \cdot \text{sa}\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

因为 $f_1(t) = f_2(t) - \frac{4}{T_1}$, 即只改变直流分量, 得到 $f_1(t)$ 的直流分量等于零。

而 $f(t)$ 是 $f_1(t)$ 的积分, 所以

$$F_0 = 0, F_n = \frac{F_{2n}}{jn\omega_1} = \frac{4}{jn\omega_1 T_1} \cdot \text{sa}\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \frac{4}{jn^2\pi^2} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

当 n 为偶数时 $\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 0$, 傅里叶级数展开系数等于零, 级数展开式只含有奇次谐波。

$$\begin{aligned}
f(t) &= \sum_{n=\text{奇数}} \frac{4}{jn^2\pi^2} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) e^{jn\omega_1 t} \\
&= \frac{4}{j\pi^2} \left\{ \dots - \frac{1}{5^2} e^{-j5\omega_1 t} + \frac{1}{3^2} e^{-j3\omega_1 t} - e^{-j\omega_1 t} + e^{j\omega_1 t} - \frac{1}{3^2} e^{j3\omega_1 t} + \frac{1}{5^2} e^{j5\omega_1 t} + \dots \right\} \\
&= \frac{8}{j\pi^2} \left\{ \sin(\omega_1 t) - \frac{1}{3^2} \sin(3\omega_1 t) + \frac{1}{5^2} \sin(5\omega_1 t) + \dots \right\}
\end{aligned}$$

5.3 傅里叶变换

当周期信号的周期 T_1 无限增大时, 信号频谱中相邻谱线的间隔 $\Delta\omega = \omega_1 = 2\pi/T_1$ 将趋于无限小, 使信号的离散频谱过渡到连续频谱。与此同时, 频谱幅度将趋于无穷小量, 此时不再适合用傅里叶级数来表示, 不过这些无穷小量间仍保持一定的比例关系, 为正确反映这时的信号频谱特性, 将式 (5.2-8) 改写为

$$F_n T_1 = \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \quad (5.3-1)$$

而 $T_1 \rightarrow \infty$ 时, $\omega_1 = 2\pi/T_1 \rightarrow d\omega$ (谱线间距趋于无限小), $n\omega_1 = nd\omega \rightarrow \omega$ (离散谱转化为连续谱), 则式 (5.3-1) 可写为

$$\lim_{T_1 \rightarrow \infty} F_n T_1 = \lim_{T_1 \rightarrow \infty} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (5.3-2)$$

上式积分的结果将是 ω 的函数，用 $F(\omega)$ 表示，则有

$$F(\omega) = \lim_{T_1 \rightarrow \infty} F_n T_1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (5.3-3)$$

该式表明， $F(\omega)$ 是非周期信号的谐波复振幅与周期的乘积，也就是谐波复振幅除以基波频率，具有单位频率谐波振幅的含义，因此称为非周期信号 $f(t)$ 的频谱密度，在不引起歧义的情况下一般又称频谱函数。由非周期信号 $f(t)$ 求其频谱函数 $F(\omega)$ 的积分运算式 (5.3-3) 称为傅里叶正变换，用 \mathcal{F} 表示，其频谱密度用时域函数名的大写表示：

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (5.3-4)$$

反之，若要从频谱函数求其时域原函数 $f(t)$ ，可根据式 (5.2-7) 取 $T_1 \rightarrow \infty$ 时的极限得出：

$$\begin{aligned} f(t) &= \lim_{T_1 \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t} = \lim_{T_1 \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \right] e^{jn\omega_1 t} \\ &= \lim_{T_1 \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \right] e^{jn\omega_1 t} \omega_1 \end{aligned}$$

当 $T_1 \rightarrow \infty$ 时， $\omega_1 = 2\pi / T_1 \rightarrow d\omega$ ， $n\omega_1 = nd\omega \rightarrow \omega$ ，故

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

由频谱密度求时域函数称为傅里叶反变换，用 \mathcal{F}^{-1} 表示：

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (5.3-5)$$

上述傅里叶变换和傅里叶反变换可简写成：

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$$

频谱密度 $F(\omega)$ 是复函数，可表示成模 $|F(\omega)|$ 和辐角 $\varphi(\omega)$ ，它们都是 ω 的函数，以 ω 为横坐标，分别以模和辐角为纵坐标画图，得到幅频特性和相频特性图。

$$F(\omega) = |F(\omega)| e^{j\arg F(\omega)} = |F(\omega)| e^{j\varphi(\omega)} \quad (5.3-6)$$

可见，非周期信号和周期信号一样，也可以分解为很多不同频率的正弦分量，区别是：周期信号分解只含有与原信号频率整数倍的正弦信号，即谱线是离散的；而非周期信号分解包含从零到无限高的所有频率分量，其频谱密度是连续的，这也是从频谱判断时域信号是周期还是非周期的依据。

从严格的数学定义看，不是所有的非周期信号都能用式 (5.3-1) 求傅里叶变换，只有满足绝对可积条件的信号才可以求傅里叶变换。即

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

由于有冲激函数存在，可使许多不满足绝对可积条件的信号也能求傅里叶变换。

5.3.1 典型非周期信号的傅里叶变换

1. 冲激函数 $\delta(t)$

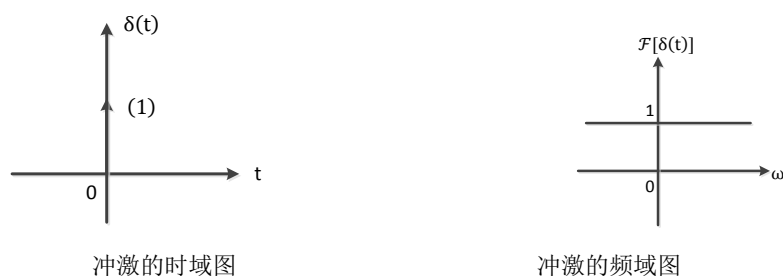


图 5.3-1 冲激函数的时域和频域

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1$$

可见，单位冲激信号的频谱等于常数 1，即在整个频率范围内频谱是均匀分布的。换言之，在时域变化异常剧烈的冲激信号在频域是变化最缓慢的常量。

2. 矩形脉冲信号

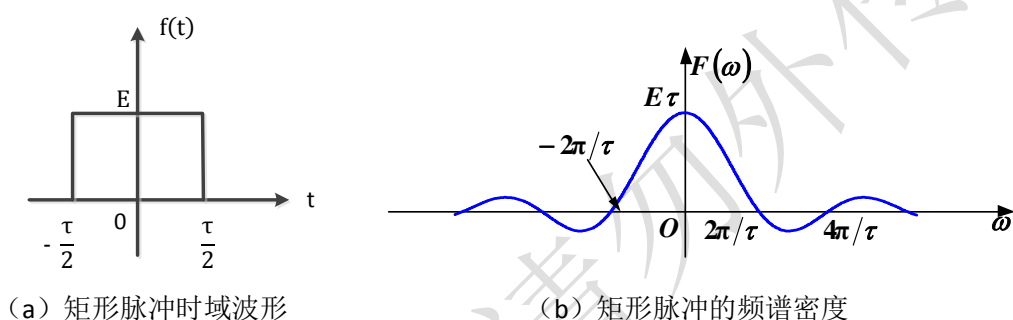


图 5.3-2 矩形脉冲信号的时域和频域

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} E e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{-E}{j\omega} \left[e^{-j\omega \frac{\tau}{2}} - e^{j\omega \frac{\tau}{2}} \right] \\ &= \tau E \cdot \frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\frac{\omega\tau}{2}} = \tau E \cdot \text{sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \end{aligned}$$

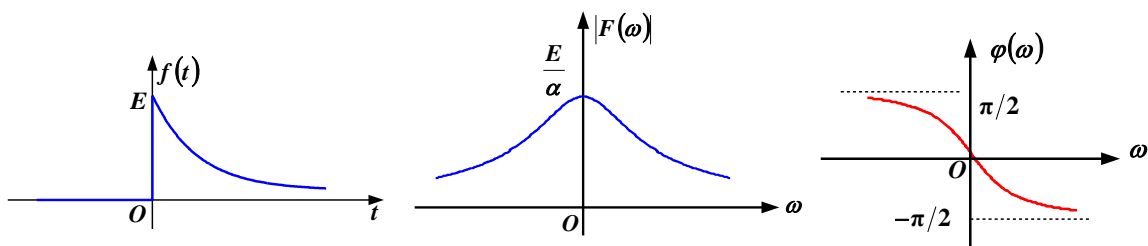
矩形脉冲信号在时域的持续时间为 τ ，即集中在有限的范围内，然而它的频谱且无限宽，而且，时域持续时间越短，频域第一个零点 $\frac{2\pi}{\tau}$ （第一个频谱密度为零时的频率）越大，说明含有的高频分量更多。第二章介绍信号可分解成矩形脉冲，如被分解的信号变换很快，则需要分解的矩形脉冲窄，因此得出一个结论：时域变化越快频域包含的高频分量越多。与周期矩形脉冲信号类似，矩形脉冲的能量主要集中在第一个零点内，故通常认为该信号占有频率范围（频带）为：

$$B_{\omega} = \frac{2\pi}{\tau}, \quad B_f = \frac{1}{\tau}$$

3. 单边指数信号

$$\begin{aligned} f(t) &= E e^{-\alpha t} u(t), \quad \alpha > 0 \\ \mathcal{F}[E e^{-\alpha t} u(t)] &= \int_0^{\infty} E e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt = \frac{-E}{\alpha + j\omega} e^{-(\alpha + j\omega)t} \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{E}{\alpha + j\omega} \end{aligned}$$

$$|F(\omega)| = \frac{E}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}, \quad \varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$$



(a) 单边指数信号时域图 (b) 单边指数信号的幅频特性 (c) 单边指数信号的相频特性

图 5.3-3 单边指数信号的时域图和频谱

4. 双边指数信号

$$f(t) = e^{-\alpha|t|} \quad (\alpha \text{ 为大于零的实数})$$

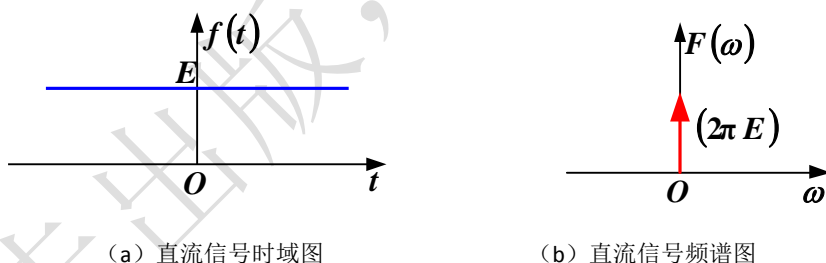
双边指数函数满足绝对可积条件，直接用定义计算。

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 e^{\alpha t} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{-1}{j\omega - \alpha} + \frac{1}{j\omega + \alpha} = \frac{2\alpha}{\omega^2 + \alpha^2} \end{aligned}$$

即

$$e^{-\alpha|t|} \leftrightarrow \frac{2\alpha}{\omega^2 + \alpha^2}$$

5. 直流信号



(a) 直流信号时域图

(b) 直流信号频谱图

图 5.3-4 直流信号的时域图和频谱图

直流信号不符合绝对可积，它的傅里叶变换不能直接通过定义求积分。根据冲激信号的傅里叶变换是常数的结论，时域变化越快的信号频域是常数，反之时域变化最慢的直流，它在频域是不是应该是冲激。利用 $\delta(\omega)$ 的傅里叶反变换：

$$\mathcal{F}^{-1}[\delta(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi}$$

可见时域 $\frac{1}{2\pi}$ 的直流，其傅里叶变换为 $\delta(\omega)$ ，所以可得

$$E \leftrightarrow 2\pi E \delta(\omega)$$

6. 阶跃函数

阶跃信号不符合绝对可积，将它看作单边指数信号 $e^{-\alpha t}u(t)$ 当 α 趋于零的极限。

$$\mathcal{F}[e^{-\alpha t}u(t)] = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{\alpha + j\omega}$$

当 $\alpha = 0, \omega \neq 0$,

$$\varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\omega}$$

当 $\alpha = 0$, $\omega = 0$, 频谱无穷大, 用冲激表示, 它的强度为 π (见例 5.3-1, 利用积分性质可得), 所以有

$$\varepsilon(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

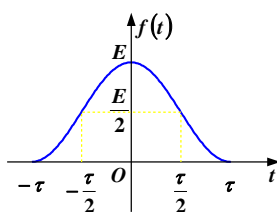
7. 升余弦函数

升余弦脉冲信号的表达式

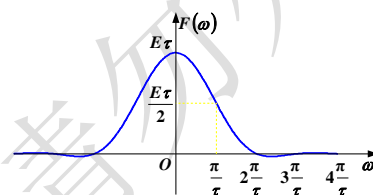
$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{E}{2} \left[1 + \cos\left(\frac{\pi t}{\tau}\right) \right] \quad (0 \leq |t| \leq \tau) \\ &= \frac{E}{2} \left[1 + \cos\left(\frac{\pi t}{\tau}\right) \right] [u(t) - u(t - \tau)] \end{aligned}$$

它的傅里叶变换:

$$F(\omega) = \frac{\tau E \text{sinc}(\omega\tau)}{1 - \left(\frac{\omega\tau}{\pi}\right)^2}$$



(a) 升余弦信号时域图



(b) 升余弦信号频谱图

图 5.3-5 单边指数信号的时域图和频谱

升余弦脉冲信号的频谱比矩形脉冲的频谱更加集中。同样它的绝大部分能量集中在 $\frac{2\pi}{\tau}$ 之内。

5.3.2 傅里叶变换的性质

前面介绍了傅里叶变换, 将时域非周期信号通过积分运算变换到频域, 为方便理解, 可将时域函数看作一个集合, 频域函数为另一个集合, 这两个集合没有交集, 但是可以通过傅里叶变换将它们联系起来, 即时域中的函数通过傅里叶变换对应到频域集合中的一个函数。研究傅里叶变换的性质就是要找出时域集合中的函数作相应的运算, 在频域集合中的变化规律。掌握傅里叶变换的性质, 为计算傅里叶变换提供快捷的方法, 同时也帮助理解信号在时域和频域的不同表现。

表 5.3-1 列出了常用的傅里叶变换性质, 其中有几个性质值得重点关注, 下面逐一介绍:

表 5.3-1 傅里叶变换的性质

性质	时域	频域
1、唯一性	$f_1(t)$	$F_1(\omega)$
	$f_2(t)$	$F_2(\omega)$
2、线性	$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$	$a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega)$
3、折叠性	$f(-t)$	$F(-\omega)$
4、对称性	$F(t)$	$2\pi f(-\omega)$
5、时移性	$f(t - t_0)$	$F(\omega)e^{-j\omega t_0}$
6、尺度变换	$f(at)$	$\frac{1}{ a } F\left(\frac{\omega}{a}\right)$

7、时域微分	$\frac{d}{dt}f(t)$	$j\omega F(\omega)$
8、时域积分	$\int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau$	$\frac{1}{j\omega}F(\omega) + \pi F(0)\delta(\omega)$
9、频域微分	$-jtf(t)$	$\frac{d}{d\omega}F(\omega)$
10、频域积分	$\frac{j}{t}f(t) + \pi f(0)\delta(t)$	$\int_{-\infty}^{\omega} F(\tau)d\tau$
11、频移性	$f(t)e^{j\omega_0 t}$	$F(\omega - \omega_0)$
12、时域卷积	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$
13、时域相乘	$f_1(t) \cdot f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi}F_1(\omega) * F_2(\omega)$
14、奇偶性	$f(t)$ 实偶信号	$F(\omega)$ 实偶函数
	$f(t)$ 实奇信号	$F(\omega)$ 纯虚奇函数
15、帕萨瓦尔定理	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) ^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) ^2 d\omega$	

1.对称性

若 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ ，则有 $F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$ 。

此性质的证明比较简单，根据傅里叶变换对

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

将变换对中的变量 t 和 ω 互换，得到如下变换对

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{-j\omega t} d\omega$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{j\omega t} dt$$

再将变量 ω 换成 $-\omega$ ，得到如下变换对（注意积分变量和积分上下限的变换）

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi f(-\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$2\pi f(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-j\omega t} dt$$

得证。这个性质典型的例子是直流信号和冲激信号的傅里叶变换：

$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$

根据对称性可得

$$1 \leftrightarrow 2\pi\delta(-\omega) = 2\pi\delta(\omega)$$

另一个例子是门信号和抽样信号的傅里叶变换：

$$g_{\tau}(t) \leftrightarrow \tau \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

根据对称性可得

$$\tau \text{sinc}\left(\frac{t\tau}{2}\right) \leftrightarrow 2\pi g_{\tau}(-\omega) = 2\pi g_{\tau}(\omega)$$

即时域是矩形脉冲，频域是抽样信号，见图 5.3-7；反之，时域是抽样信号，频域是矩形脉冲，

见图 5.3-8 ($\tau = 2$)。

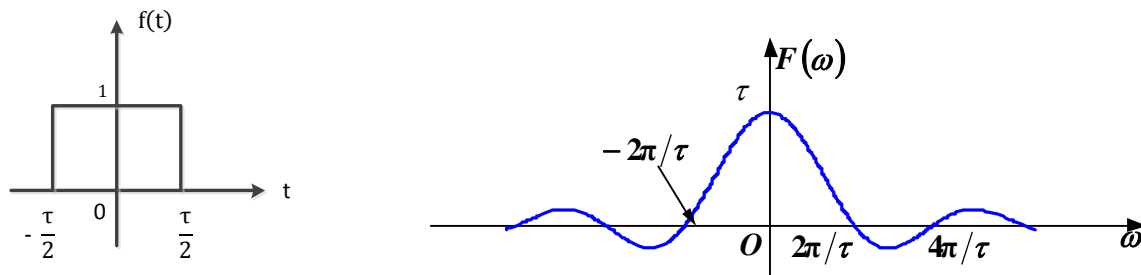


图 5.3-7 时域脉宽为 τ 的矩形脉冲的时域和频域波形图

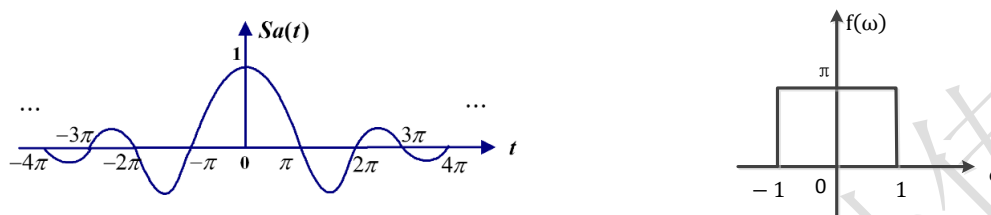


图 5.3-8 利用对称性 $\tau = 2$ 时的时域和频域波形

2. 尺度变换

$$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

时域信号尺度运算, 当 $a > 1$ 时, $f(at)$ 的图形由 $f(t)$ 压缩 a 倍得到, 而 $F\left(\frac{\omega}{a}\right)$ 则是 $F(\omega)$ 的拉伸。该性质说明时域与频域运算是相反的。对于这一点从周期等于频率的倒数得到证明。

$f(t) = \sin(2\pi ft)$ 信号的周期 $T = 1/f$, 时域压缩2倍得到 $f_1(t) = \sin(4\pi ft)$, $f_1(t)$ 的周期是 $f(t)$ 的 $1/2$ 倍, 而频率是 $f(t)$ 的2倍; 对矩形脉冲, 利用此定理的波形见图 5.3-9。

在通信系统中, 为了提高传输速度, 采用对时域信号进行压缩的方式, 这一措施导致信号的频带的拓宽, 相应地系统的频带也需拓宽, 所以通信速度和占用频带宽度是一对矛盾。

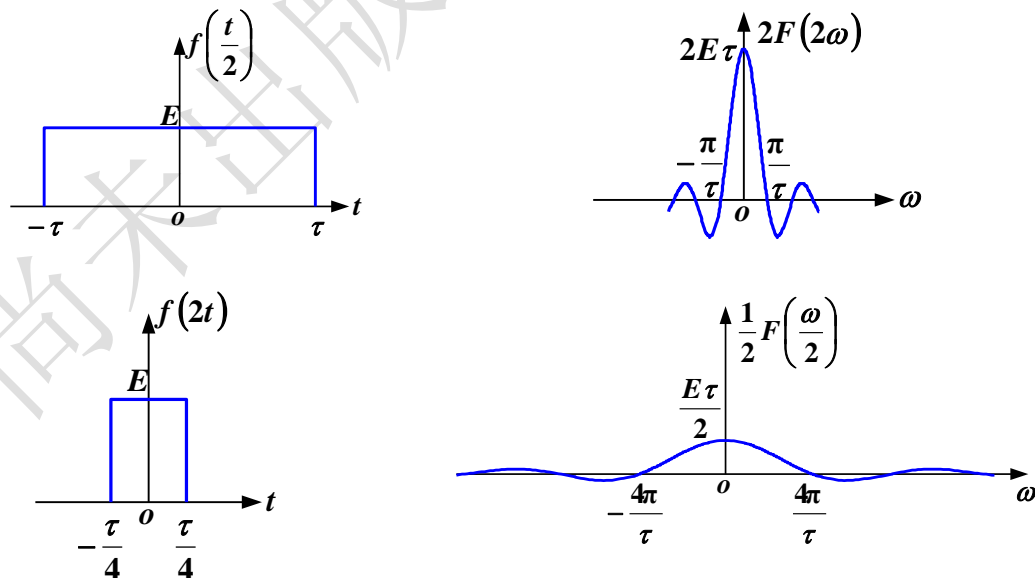


图 5.3-9 尺度变换特性时域与频域

3. 时域卷积

$$f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$$

证明:

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$$

$$\mathcal{F}[f_1(t) * f_2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \right\} e^{-j\omega t} dt$$

交换积分次序

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t - \tau) e^{-j\omega t} dt \right\} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) e^{-j\omega \tau} F_2(\omega) d\tau = F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$$

上式利用了傅里叶变换的时移性质。

第3章已经介绍系统的零状态响应是输入信号和系统的单位冲激响应的卷积，根据时域卷积定理，零状态响应的傅里叶变换是输入的傅里叶变换和系统单位冲激响应的傅里叶变换的乘积。即

$$y_{zs}(t) = x(t) * h(t)$$

$$Y_{zs}(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega)$$

基于傅里叶变换和它的性质，求系统响应的过程从卷积运算转换成乘法运算，简化了求解过程。

下面利用傅里叶变换的性质，已知 $\delta(t) \leftrightarrow 1$ 情况下求一系列的傅里叶变换。

【例 5.3-1】 已知

$$\delta(t) \leftrightarrow 1, \quad \varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$$

利用时域积分性质求阶跃信号的傅里叶变换。

解：时域积分性质：

$$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} F(\omega) + \pi F(0) \delta(\omega)$$

将 $f(\tau)$ 用 $\delta(\tau)$ 代入， $F(\omega) = 1$ ，即可得到阶跃信号的傅里叶变换

$$\varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega)$$

例 5.3-2 利用 $\varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega)$ 和傅里叶变换的线性性质求符号函数的傅里叶变换。

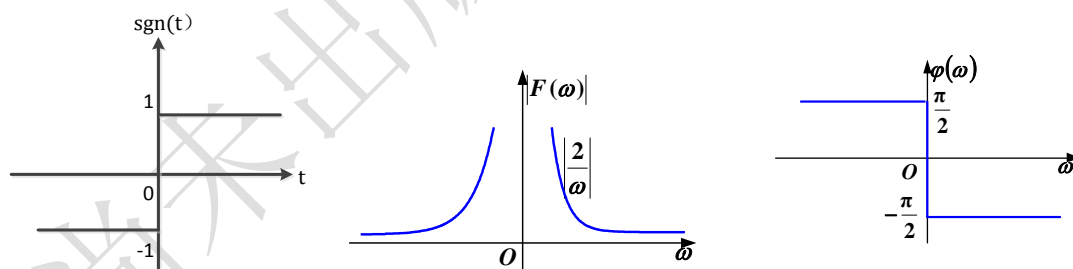


图 5.3-10 符号函数和频谱图

解：符号函数的表达式

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases} = 2u(t) - 1$$

$$\varepsilon(t) \leftrightarrow \pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

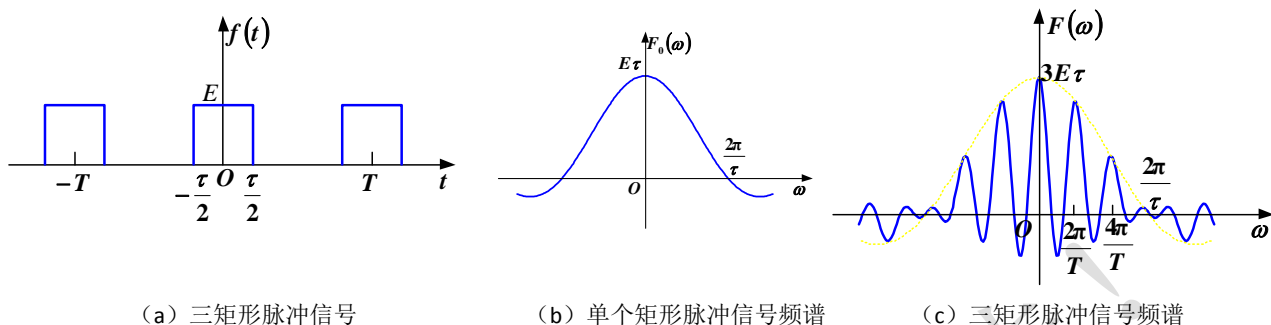
$$1 \leftrightarrow 2\pi \delta(\omega)$$

所以

$$\text{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{2}{j\omega}$$

$$|F(\omega)| = \frac{2}{|\omega|}, \quad \varphi(\omega) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & (\omega > 0) \\ \frac{\pi}{2}, & (\omega < 0) \end{cases}$$

【例 5.3-3】利用性质求矩形脉冲的傅里叶变换，并求三矩形脉冲信号的傅里叶变换。



(b) 单个矩形脉冲信号频谱

(c) 三矩形脉冲信号频谱

图 5.3-11 例 5.3-3 图

解：对矩形脉冲信号微分

$$\frac{d}{dt}g_{\tau}(t) = \delta\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - \delta\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$$

应用傅里叶变换的时移性质

$$\delta\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \leftrightarrow e^{j\omega\frac{\tau}{2}}$$

$$\delta\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \leftrightarrow e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}$$

再利用线性和积分性质

$$Eg_{\tau}(t) \leftrightarrow \frac{E}{j\omega} \left[e^{j\omega\frac{\tau}{2}} - e^{-j\omega\frac{\tau}{2}} \right] = \frac{2E\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\omega} = E\tau \text{sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

三脉冲信号的傅里叶变换：

$$g_{\tau}(t) \leftrightarrow \tau \text{sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

$$g_{\tau}(t - T) \leftrightarrow \tau \text{sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) e^{-j\omega T}$$

$$g_{\tau}(t + T) \leftrightarrow \tau \text{sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) e^{j\omega T}$$

利用线性特性：

$$\begin{aligned} Eg_{\tau}(t) + Eg_{\tau}(t - T) + Eg_{\tau}(t + T) &\leftrightarrow E\tau \text{sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \{1 + e^{-j\omega T} + e^{j\omega T}\} \\ &= E\tau \text{sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \{1 + 2\cos(\omega T)\} \end{aligned}$$

【例 5.3-4】求冲激函数的微分和两次微分的傅里叶变换。

解：例 5.3-1 是由冲激的傅里叶变换求阶跃的傅里叶变换，反之，利用微分性质，根据阶跃的傅里叶变换求冲激的傅里叶变换。

时域微分特性

$$\frac{d}{dt}f(t) \leftrightarrow j\omega F(\omega)$$

已知

$$\varepsilon(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

$$\frac{d}{dt}\varepsilon(t) = \delta(t)$$

所以可得

$$\delta(t) \leftrightarrow j\omega \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] = 1$$

$$\delta'(t) \leftrightarrow j\omega$$

$$\delta''(t) \leftrightarrow (j\omega)^2 = -\omega^2$$

例 5.3-5 利用傅里叶变换的性质求三角脉冲的傅里叶变换。

解：方法一

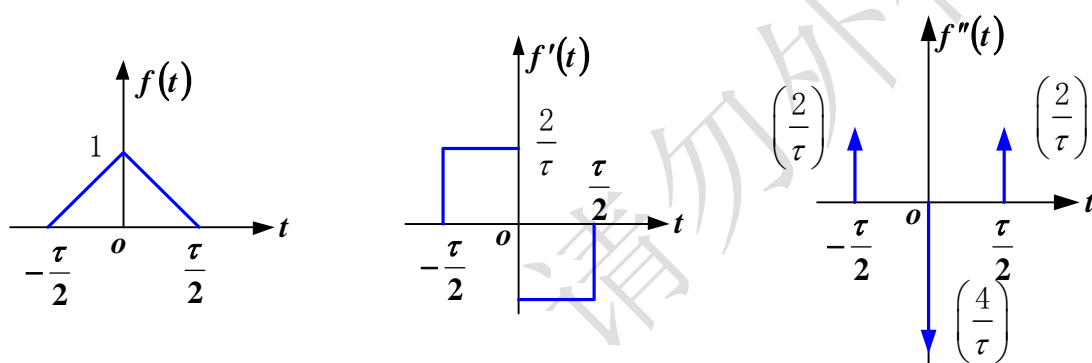


图 5.3-12 三角脉冲及它的微分

对三角脉冲（见图 5.3-12 (a)）求两次微分，得到三个冲激信号，见图 5.3-12 (c)。三角脉冲两次微分信号的傅里叶变换为

$$f''(t) \leftrightarrow \frac{2}{\tau} \left[e^{j\omega\frac{\tau}{2}} - 2 + e^{-j\omega\frac{\tau}{2}} \right] = \frac{2}{\tau} \left[2\cos\left(\omega\frac{\tau}{2}\right) - 2 \right] = \frac{-8}{\tau} \sin^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$$

根据积分性质得到：

$$f'(t) \leftrightarrow \frac{-8}{j\omega\tau} \sin^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$$

$$f(t) \leftrightarrow \frac{-8}{(j\omega)^2\tau} \sin^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right) = \frac{\tau}{2} \text{sa}^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$$

注：利用积分性质时，本例题 $f'(t)$ 和 $f''(t)$ 的傅里叶变换在 $\omega = 0$ 时都为 0。

方法二：两个脉宽为 $\frac{\tau}{2}$ ，高为 $\sqrt{\frac{2}{\tau}}$ 的矩形脉冲卷积，得到宽度为 τ 的三角脉冲，见图 5.3-13。

因为

$$f(t) \leftrightarrow \sqrt{\frac{2}{\tau}} \frac{\tau}{2} \text{sa}\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$$

利用时域卷积的傅里叶变换性质，得到：

$$f(t) * f(t) \leftrightarrow \left[\sqrt{\frac{2}{\tau}} \frac{\tau}{2} \text{sa} \left(\frac{\omega\tau}{4} \right) \right]^2 = \frac{\tau}{2} \text{sa}^2 \left(\frac{\omega\tau}{4} \right)$$

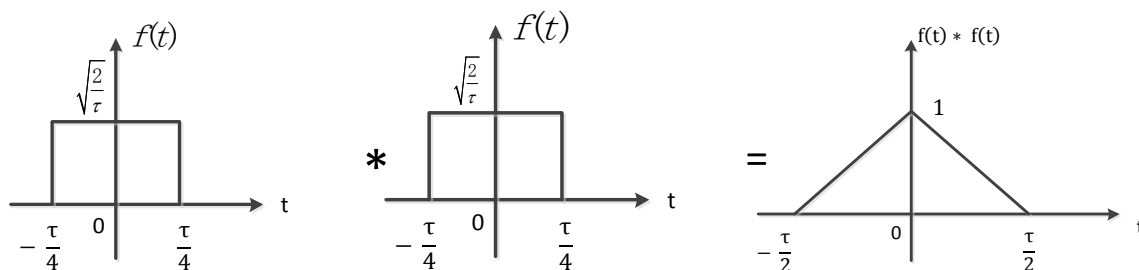
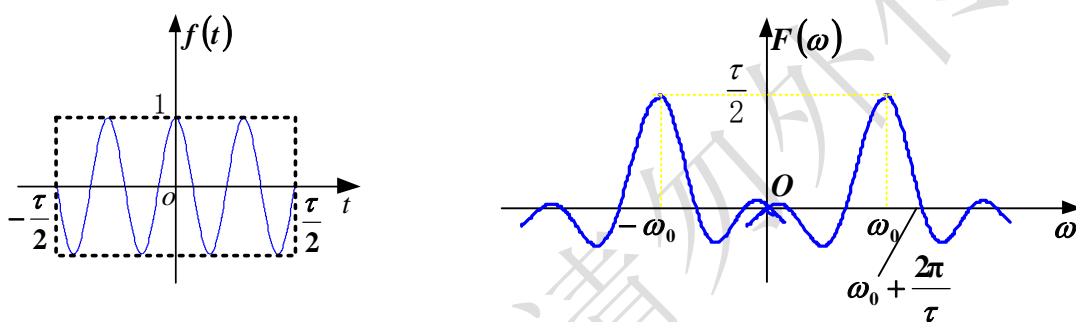


图 5.3-13 两个矩形脉冲卷积得到三角脉冲的波形。

例 5.3-6 利用性质求 $g_{\tau}(t)\cos(\omega_0 t)$ 的傅里叶变换。



(a) 矩形调幅信号波形

(b) 矩形调幅信号频谱

图 5.3-14 矩形调幅信号波形及频谱

解：

方法一：

$g_{\tau}(t)\cos(\omega_0 t)$ 是矩形脉冲信号与正弦信号的乘积，而矩形脉冲只在 $(-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2})$ 区间内函数值为

1，其他区间都是零。此信号称为矩形调幅信号，波形如图 5.3-14 (a) 所示。

已知

$$g_{\tau}(t) \leftrightarrow G_{\tau}(\omega) = \tau \text{sa} \left(\frac{\omega\tau}{2} \right)$$

利用欧拉公式

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2} [e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}]$$

和傅里叶变换的频移特性

$$g_{\tau}(t)e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow G_{\tau}(\omega - \omega_0)$$

可得

$$g_{\tau}(t)\cos(\omega_0 t) \leftrightarrow \frac{1}{2} [G_{\tau}(\omega - \omega_0) + G_{\tau}(\omega + \omega_0)]$$

因此

$$g_{\tau}(t)\cos(\omega_0 t) \leftrightarrow \frac{\tau}{2} \left\{ \text{sa} \left[\frac{(\omega - \omega_0)\tau}{2} \right] + \text{sa} \left[\frac{(\omega + \omega_0)\tau}{2} \right] \right\}$$

方法二：

$g_{\tau}(t)\cos(\omega_0 t)$ 是两个信号相乘，利用时域相乘频域卷积性质

$$f_1(t) \cdot f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)$$

$$g_\tau(t) \leftrightarrow G_\tau(\omega) = \tau \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

先利用周期信号的傅里叶变换结论

$$\cos(\omega_0 t) \leftrightarrow \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

所以

$$g_\tau(t) \cos(\omega_0 t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} G_\tau(\omega) * \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] = \frac{1}{2} [G_\tau(\omega - \omega_0) + G_\tau(\omega + \omega_0)]$$

波形如图 5.3-14 (b) 所示。从此例可以看出, 虽然正弦信号是单一频率的, 但实际测试不可能无限长时间, 所以频谱分析仪测得的正弦信号的频谱并不是单独一根线, 而是两个抽样信号。

例 5.3-7 利用傅里叶变换求 $\int_{-\infty}^{\infty} Sa(t) dt$ 。

解: 根据傅里叶变换的定义

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

当 $\omega = 0$ 时, $F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$, 即频率为零时的频谱密度值等于时域信号的积分。

而 $Sa(t) \leftrightarrow \pi g_2(\omega)$, 可知 $\omega = 0$ 时的频谱密度为 π 。所以有

$$\int_{-\infty}^{\infty} Sa(t) dt = \pi$$

同理, 利用傅里叶反变换, 可得:

$$2\pi f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) d\omega$$

5.3.3 周期信号的傅里叶变换

5.2 节介绍了周期信号展开成傅里叶级数, 即对于任意一个满足狄里赫利条件的周期信号, 都可以用三角函数或复指数函数线性表示, 从而得到离散的频谱。本节介绍了非周期信号的傅里叶变换, 得到连续的频谱密度。为了将周期信号和非周期信号的分析方法统一起来, 下面讨论对周期信号求傅里叶变换的情况。

周期信号不满足绝对可积条件, 不能直接用定义求积分。而周期信号傅里叶级数展开的基本单元是正弦信号和复指数信号, 若能求得这两类信号的傅里叶变换, 那么利用傅里叶变换的线性特性即可得到其他任意周期信号的傅里叶变换。

由傅里叶变换的频移特性

$$f(t)e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow F(\omega - \omega_0)$$

当 $f(t) = 1$ 时, $1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$ 得到

$$e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \quad (5.3-4)$$

而

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2} [e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}] \leftrightarrow \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \quad (5.3-5)$$

对周期信号的傅里叶级数展开式两边求傅里叶变换即可

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t}$$

$$\mathcal{F}[f(t)] = \mathcal{F}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t}\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \mathcal{F}(e^{jn\omega_1 t}) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_1) \quad (5.3-6)$$

傅里叶级数三角形形式

$$\begin{aligned} f(t) &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n) \\ \cos(n\omega_1 t + \varphi_n) &= \frac{1}{2} [e^{jn\omega_1 t} e^{j\varphi_n} + e^{-jn\omega_1 t} e^{-j\varphi_n}] \\ &\leftrightarrow \pi [\delta(\omega - n\omega_1) e^{j\varphi_n} + \delta(\omega + n\omega_1) e^{-j\varphi_n}] \\ \mathcal{F}[f(t)] &= \mathcal{F}\left\{c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n)\right\} \leftrightarrow \\ &2\pi c_0 \delta(\omega) + \pi \sum_{n=1}^{\infty} c_n [\delta(\omega - n\omega_1) e^{j\varphi_n} + \delta(\omega + n\omega_1) e^{-j\varphi_n}] \end{aligned}$$

周期信号的傅里叶变换采用傅里叶级数的复指数形式比较方便,因此后续用到周期信号的傅里叶变换都用式(5.3-8)。可见,周期信号的傅里叶变换是由一系列频域的冲激组成,这些冲激位于原周期信号的谐波频率处,每个冲激的强度等于对应频率傅里叶级数系数的 2π 倍。

下面讨论傅里叶级数的系数与取周期信号的一个周期的傅里叶变换之间的关系。

先看一个具体的信号,周期矩形信号的傅里叶级数展开系数为:

$$F_n = \frac{E\tau}{T_1} \text{sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)$$

矩形脉冲的傅里叶变换为

$$F(\omega) = E\tau \text{sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

从数学公式上看

$$F_n = \frac{1}{T_1} F(\omega)|_{\omega=n\omega_1}$$

这一结论能否推广到任意信号? 周期信号傅里叶级数展开的系数计算公式为:

$$F_n = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \quad (5.3-7)$$

$f_1(t)$ 是从 $f(t)$ 中截取 $\left(-\frac{T_1}{2}, \frac{T_1}{2}\right)$ 区间的一个周期得到的非周期信号,其傅里叶变换为

$$F_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (5.3-8)$$

比较式(5.3-9)和(5.3-10)可见,周期信号傅里叶级数展开的系数和从周期信号中截取一个周期的傅里叶变换满足如下式子:

$$F_n = \frac{1}{T_1} F_1(\omega)|_{\omega=n\omega_1}$$

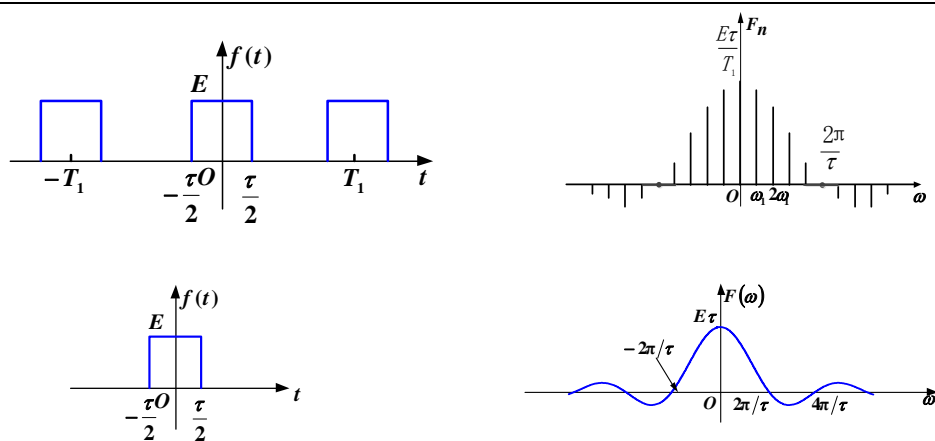


图 5.3-15 周期信号傅里叶级数系数与单一周期傅里叶变换的关系

例 5.3-8 已知冲激信号的傅里叶变换，求单位冲激串的频谱。

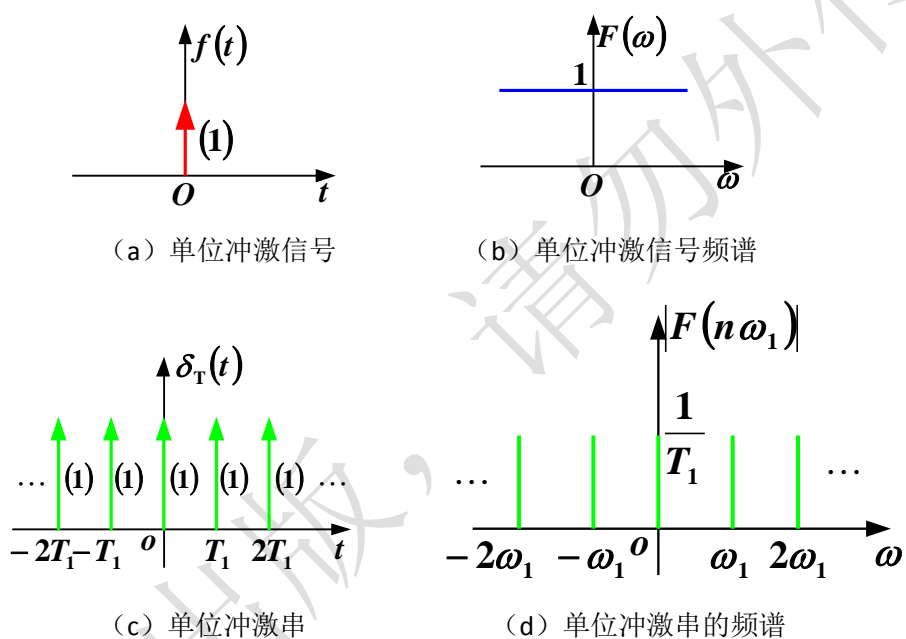


图 5.3-16 单位冲激串的傅里叶级数

解：单位冲激串

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

单位冲激信号是单位冲激串的一个周期的信号，而

$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$

所以冲激串的傅里叶级数的系数

$$F_n = \frac{1}{T_1} F(\omega)|_{\omega=n\omega_1} = \frac{1}{T_1}$$

表 5.3-2 常用信号的傅里叶变换

注：表中 $a > 0$

序号	时域	频域
1	$\delta(t)$	1
2	1	$2\pi\delta(\omega)$
3	$e^{-at}\varepsilon(t)$	$\frac{1}{a+j\omega}$
4	$te^{-at}\varepsilon(t)$	$\frac{1}{(a+j\omega)^2}$
5	$\varepsilon(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$
6	$g_{\tau}(t) = \varepsilon\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - \varepsilon\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$	$\tau sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$
7	$sa(\omega_0 t) = \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0 t}$	$\frac{\pi}{\omega_0} \mathcal{G}_{2\omega_0}(\omega)$
8	$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
9	$\cos\omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$
10	$\sin\omega_0 t$	$j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$
11	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$	$2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_0)$
12	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$	$\frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \frac{2\pi k}{T})$

5.4 连续时间系统的频域分析

前面几节讨论了傅里叶级数和傅里叶变换的定义及性质，本节将研究系统的激励与响应在频域中的关系，得到一种区别于系统时域分析的方法，为今后的系统设计奠定基础。

5.4.1 频域系统函数

任何连续时间信号可分解为脉冲信号，当脉冲宽度趋于无限窄时，脉冲趋于冲激信号，即

$$x(t) = x(t) * \delta(t) \quad (5.4-1)$$

从上面章节已知连续时间系统的零状态响应是系统输入和单位冲激响应的卷积，即：

$$y_{zs}(t) = x(t) * h(t) \quad (5.4-2)$$

设

$$y_{zs}(t) \leftrightarrow Y_{zs}(\omega)$$

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega)$$

$$h(t) \leftrightarrow H(\omega)$$

根据傅里叶变换的时域卷积定理，对式（5.5-2）傅里叶变换

$$Y_{zs}(\omega) = X(\omega) \times H(\omega) \quad (5.4-3)$$

单位冲激响应是在冲激信号作用下的零状态响应，它与系统的输入信号无关，因此，可以用单位冲激响应来描述系统的时域特性， $H(\omega)$ 是单位冲激响应的傅里叶变换，同样，与输入无关，可描述系统的频域特性。

定义频域系统函数：

$$H(\omega) = \frac{Y_{zs}(\omega)}{X(\omega)} = \mathcal{F}[h(t)] \quad (5.4-4)$$

频域系统函数的计算方法:

1. 已知某一输入及它的零状态响应, 通过其傅里叶变换的比值求得;
2. 单位冲激响应求傅里叶变换得到; (是第一种情况的特例)
3. 描述系统的微分方程两边求傅里叶变换得到;
4. 电路图直接根据元器件连接及本身特性求;

下面举例说明各种求解方法:

例 5.4-1 已知激励信号 $x(t) = e^{-3t}u(t)$, 系统在该激励作用下的零状态响应为 $y_{zs}(t) = [e^{-2t} - e^{-3t}]u(t)$, 求该系统的频域系统函数 $H(\omega)$ 。

解:

$$\begin{aligned} x(t) = e^{-3t}u(t) &\leftrightarrow X(\omega) = \frac{1}{j\omega + 3} \\ y_{zs}(t) = [e^{-2t} - e^{-3t}]u(t) &\leftrightarrow Y_{zs}(\omega) = \frac{1}{j\omega + 2} - \frac{1}{j\omega + 3} \\ H(\omega) = \frac{Y_{zs}(\omega)}{X(\omega)} &= \frac{\frac{1}{j\omega + 2} - \frac{1}{j\omega + 3}}{\frac{1}{j\omega + 3}} = \frac{1}{j\omega + 2} \end{aligned}$$

$H(\omega)$ 是复函数, 写成模和辐角的形式:

$$\begin{aligned} H(\omega) &= |H(\omega)|e^{j\varphi(\omega)} \\ H(\omega) &= \frac{1}{j\omega + 2} = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + 2^2}}e^{-j\arctan(\frac{\omega}{2})} \end{aligned}$$

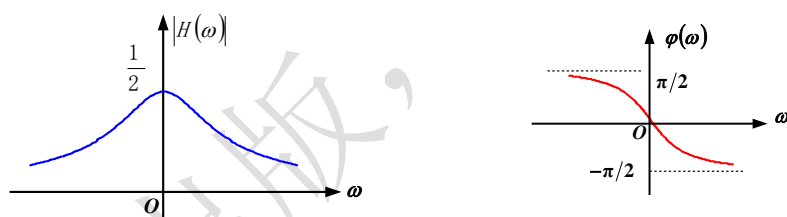


图 5.4-1 系统的幅频特性和相频特性

例 5.4-2 已知描述连续时间系统的微分方程为

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 2\frac{dx(t)}{dt} + x(t)$$

求该系统的频域系统函数。

解: 对微分方程两边求傅里叶变换, 利用傅里叶变换的时域微分特性, 有

$$\begin{aligned} (j\omega)^2Y(\omega) + 3j\omega Y(\omega) + 2Y(\omega) &= 2j\omega X(\omega) + X(\omega) \\ [(j\omega)^2 + 3j\omega + 2]Y(\omega) &= [2j\omega + 1]X(\omega) \\ H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} &= \frac{2j\omega + 1}{(j\omega)^2 + 3j\omega + 2} \end{aligned}$$

该频率响应的幅频特性

$$\begin{aligned} |H(\omega)| &= \sqrt{\frac{(2\omega)^2 + 1}{(2 - \omega^2)^2 + (3\omega)^2}} = \sqrt{\frac{4\omega^2 + 1}{\omega^4 + 5\omega^2 + 4}} \\ \varphi(\omega) &= \arctan(2\omega) - \arctan\left(\frac{3\omega}{2 - \omega^2}\right) \end{aligned}$$

例 5.4-3 图 5.4-2 (a) 所示电路图的激励信号为电压源 $v(t)$ ，响应为流过电阻 R_1 的电流 $i_R(t)$ ，求该系统的频率函数。

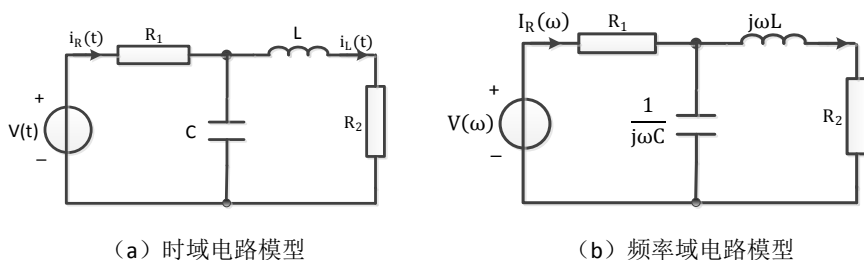


图 5.4-2 例 5.4-3 电路

解：根据电感和电容的 VAR，有

$$v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$$

$$i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt}$$

利用傅里叶变换的时域微分性质，对电容和电感的时域伏安特性求傅里叶变换：

$$I_C(\omega) = j\omega C V_C(\omega)$$

$$V_L(\omega) = j\omega L I_L(\omega)$$

由此可以发现，与相量域模型类似，频域的电感和电容可以表示为： $j\omega L$ ， $\frac{1}{j\omega C}$ 。将时域电流电压转换成频域电流电压，可以得到如图 5.4-2(b)所示的频率域电路模型，由此有

$$V(\omega) = I_R(\omega) (R_1 + (j\omega L + R_2) // \frac{1}{j\omega C})$$

则频域系统函数

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{I_R(\omega)}{V(\omega)} = \frac{1}{R_1 + (j\omega L + R_2) // \frac{1}{j\omega C}} \\ &= \frac{1 - \omega^2 LC + j\omega CR_2}{R_1 + R_2 - \omega^2 LCR_1 + j\omega(L + CR_1R_2)} \end{aligned}$$

5.4.2 利用系统函数求响应

1、系统的输入是周期信号

根据周期信号傅里叶级数展开理论，任何一个周期信号都可以分解为复指数函数的线性表示形式。本课程讨论的是线性时不变系统，系统的输出满足叠加原理，下面先来讨论周期信号的基本组成单元——复指数信号作用到线性时不变系统的响应。

设系统的单位冲激响应为 $h(t)$ ，频域系统函数为

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt$$

(1) 若输入为 $x(t) = K e^{j\omega_1 t}$ ，则有

$$y_{zs}(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) K e^{j\omega_1(t-\tau)} d\tau = K e^{j\omega_1 t} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega_1 \tau} d\tau$$

$$y_{zs}(t) = K e^{j\omega_1 t} H(\omega_1) = K e^{j\omega_1 t} |H(\omega_1)| e^{j\varphi(\omega_1)} = K |H(\omega_1)| e^{j[\omega_1 t + \varphi(\omega_1)]} \quad (5.4-5)$$

若输入信号的频率 $\omega_1 = 0$ ，即输入直流 $x(t) = K$ 时，

$$y_{zs}(t) = K H(0) \quad (5.4-6)$$

结论：复指数信号作用于线性时不变系统的响应，其输出信号的频率与输入信号频率相同，输出信号的模等于输入信号的模乘以频域系统函数在输入频率处的模，输出信号的相位等于输入信号的相位加上相频特性在输入频率处的值，显然与上一章相量法的结果是一致的。

例 5.4-4 设系统的幅频特性和相频特性如图 5.4-3 所示，输入 $x(t) = 1 + 3e^{j2t}$ ，求系统的响应。

解：输入信号包含直流和频率 $\omega = 2$ 的复指数信号，系统幅频特性和相频特性可在图 5.5-3 上读出。

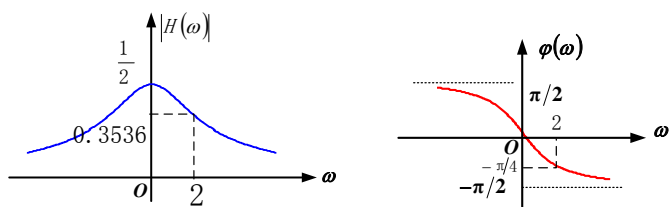


图 5.4-3 幅频特性相频特性

根据上面的结论，系统的响应

$$y(t) = 1 \times H(0) + 3 \times |H(2)|e^{j[2t+\varphi(2)]} = 0.5 + 3 \times 0.3536e^{j(2t-\frac{\pi}{4})}$$

(2) 若输入为 $x(t) = K\cos(\omega_1 t)$ ，利用欧拉公式

$$x(t) = K\cos(\omega_1 t) = \frac{K}{2}[e^{j\omega_1 t} + e^{-j\omega_1 t}]$$

所以系统响应

$$y(t) = \frac{K}{2}|H(\omega_1)|e^{j[\omega_1 t+\varphi(\omega_1)]} + \frac{K}{2}|H(-\omega_1)|e^{j[-\omega_1 t+\varphi(-\omega_1)]}$$

又由于傅里叶变换的幅频特性是 ω 的偶函数，相频特性是 ω 的奇函数，因此

$$y(t) = \frac{K}{2}|H(\omega_1)|\{e^{j[\omega_1 t+\varphi(\omega_1)]} + e^{-j[\omega_1 t+\varphi(\omega_1)]}\} = K|H(\omega_1)|\cos(\omega_1 t + \varphi(\omega_1)) \quad (5.4-7)$$

(3) 如输入是 $x(t) = K\sin(\omega_1 t)$ ，有同样的结论

$$y(t) = \frac{K}{2j}|H(\omega_1)|\{e^{j[\omega_1 t+\varphi(\omega_1)]} - e^{-j[\omega_1 t+\varphi(\omega_1)]}\} = K|H(\omega_1)|\sin(\omega_1 t + \varphi(\omega_1)) \quad (5.4-8)$$

例 5.4-5 设系统的幅频特性和相频特性如图 5.4-1 所示，输入信号为 $x(t)$ ，求响应。

$$x(t) = 2\cos(2t) + 1.5\sin(3t + \frac{\pi}{3})$$

解：系统频率特性在 $\omega = 2$ 时的值，上一例题已知。系统幅频特性在 $\omega = 3$ 上的取值为 0.277，相频特性在 $\omega = 3$ 取值 $-\arctan(1.5)$

所以可直接写出输出响应

$$y(t) = 2 \times 0.3536\cos(2t - \frac{\pi}{4}) + 1.5 \times 0.277\sin[3t + \frac{\pi}{3} - \arctan(1.5)]$$

如果输入信号是非正弦的周期信号，必须先将周期信号作傅里叶级数展开，计算出每一频率的响应，再进行叠加。

2、系统的输入是非周期信号

根据频域系统函数的定义，系统输入，输出的傅里叶变换和频域系统函数这三者之中已知任意两项，可求得第三项。对于系统分析，系统是确定的，即 $H(\omega)$ 确定，有已知输入求输出，或者已知输出求输入两种情况；而对于系统综合（即系统设计），是根据用户需要，明确输入和输出信号求频域系统函数的过程，本课程主要讨论系统分析。

$$Y_{zs}(\omega) = H(\omega)X(\omega)$$

例 5.4-6 描述某系统的微分方程

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

求输入 $x(t) = e^{-t}u(t)$ 时系统的零状态响应。

解：根据微分方程求出频域系统函数

$$H(\omega) = \frac{1}{j\omega + 2}$$

$$x(t) = e^{-t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\omega + 1}$$

系统响应的傅里叶变换

$$Y_{zs}(\omega) = H(\omega)X(\omega) = \frac{1}{j\omega + 2} \times \frac{1}{j\omega + 1} = \frac{1}{j\omega + 1} - \frac{1}{j\omega + 2}$$

取傅里叶反变换

$$y_{zs}(t) = \mathcal{F}^{-1}[Y_{zs}(\omega)] = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{j\omega + 1} - \frac{1}{j\omega + 2}\right] = (e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

利用频域求响应，要求熟练掌握常用信号的傅里叶正反变换，省去了繁琐的解方程或求卷积过程。

前面介绍过，周期信号和非周期信号可统一到傅里叶变换，所以，周期信号也可用傅里叶变换的方法求解。例如，对例 5.4-5 用傅里叶变换方法求解过程如下：

例 5.4-5 中， $x(t) = 2\cos(2t) + 1.5\sin\left(3t + \frac{\pi}{3}\right)$ ，而

$$2\cos(2t) \leftrightarrow 2\pi[\delta(\omega - 2) + \delta(\omega + 2)]$$

$$1.5\sin\left(3t + \frac{\pi}{3}\right) \leftrightarrow 1.5j\pi\left[\delta(\omega + 3)e^{-j\frac{\pi}{3}} - \delta(\omega - 3)e^{j\frac{\pi}{3}}\right]$$

又由于 $H(\omega) = \frac{1}{j\omega + 2}$ ，则有

$$\begin{aligned} Y_{zs}(\omega) &= \frac{1}{j\omega + 2} \left\{ 2\pi[\delta(\omega - 2) + \delta(\omega + 2)] + 1.5j\pi\left[\delta(\omega + 3)e^{-j\frac{\pi}{3}} - \delta(\omega - 3)e^{j\frac{\pi}{3}}\right] \right\} \\ &= 2\pi\left[\frac{1}{j2 + 2}\delta(\omega - 2) + \frac{1}{-2j + 2}\delta(\omega + 2)\right] \\ &\quad + 1.5j\pi\left[\frac{1}{-3j + 2}\delta(\omega + 3)e^{-j\frac{\pi}{3}} - \frac{1}{j3 + 2}\delta(\omega - 3)e^{j\frac{\pi}{3}}\right] \\ &= 2\pi\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[e^{-j\frac{\pi}{4}}\delta(\omega - 2) + e^{j\frac{\pi}{4}}\delta(\omega + 2)\right] + 1.5j\pi\frac{1}{\sqrt{13}}\left[e^{j\arctan(1.5)}\delta(\omega + 3)e^{-j\frac{\pi}{3}} - e^{-j\arctan(1.5)}\delta(\omega - 3)e^{j\frac{\pi}{3}}\right] \end{aligned}$$

故

$$y_{zs}(t) = \mathcal{F}^{-1}[Y_{zs}(\omega)] = \frac{1}{2\sqrt{2}}\cos\left(2t - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1.5}{\sqrt{13}}\sin\left(3t + \frac{\pi}{3} - \arctan(1.5)\right)$$

上述求解过程运算较麻烦，不建议使用。

5.5 滤波器

滤波器是一种选频装置，可以使信号中特定的频率成分通过，而极大地衰减其它频率成分。而理想滤波器则是无失真地通过某些频率，而消除另一些频率的系统。在测试装置中，利用滤波器的这种选频作用，可以滤除干扰噪声或进行频谱分析。例如录制的音频信号中，若噪声的频率与音频信号的频谱不重叠，可以利用选择性滤波器滤除噪声。

理想滤波器根据选频作用分类，可分为理想低通滤波器，理想高通滤波器，理想带通滤波器和理想带阻滤波器，分析方法及原理相同，下面以理想低通滤波器为例。

理想低通滤波器在通带内无失真传输，其系统的幅频特性和相频特性如图 5.5-1 所示，其中 ω_c 为理想低通滤波器的截止频率。

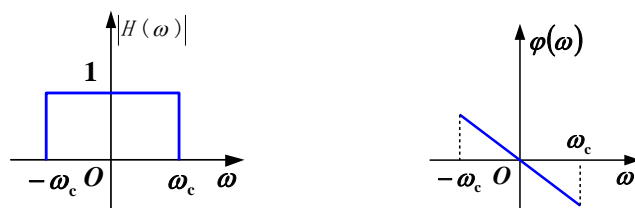


图 5.5-1 理想低通滤波器的幅频相频特性

5.4 节讨论了连续时间系统的频域分析，得出结论：

对于频域系统函数为 $H(\omega)$ 的系统，输入 $x(t) = Ke^{j\omega_1 t}$ 时，输出

$$y(t) = K|H(\omega_1)|e^{j(\omega_1 t + \varphi(\omega_1))}$$

输入 $x(t) = K\cos(\omega_1 t)$ 时，输出

$$y(t) = K|H(\omega_1)|\cos(\omega_1 t + \varphi(\omega_1))$$

总之，若输入信号的频率 ω_1 在通带 $(-\omega_c, \omega_c)$ 内， $|H(\omega_1)| = 1$ ， $\varphi(\omega_1) = -\omega_1 t_0$ ，输出信号的幅度与输入信号相同。反之，输入信号的频率 ω_1 在通带 $(-\omega_c, \omega_c)$ 之外，

$$|H(\omega_1)| = 0, y(t) = 0$$

意味着将 ω_1 的频率成分滤除了。

【例 5.5-1】将信号 $x(t) = 2\cos\left(2t + \frac{\pi}{3}\right) + 3\sin\left(5t + \frac{\pi}{4}\right)$ 输入至截止频率 $\omega_c = 3$ ， $t_0 = 1.5$ 的理想低通滤波器，求输出信号。

解： $x(t)$ 信号包含 2, 5 两个频率，频率 2 在通带内，按无失真传输输出，频率 5 在通带外，被滤除。所以，系统的输出

$$y(t) = 2 \times 1 \cos\left(2t + \frac{\pi}{3} - 2 \times 1.5\right)$$

【例 5.5-2】一个线性时不变系统的冲激响应为 $h(t) = \frac{\sin(2\pi t)}{\pi t}$ ，

①求频域系统函数 $H(\omega)$ ；

②输入信号 $x_1(t) = 3\cos(4\pi t) \times \sin(5\pi t)$ ，求输出 $y_1(t)$ ；

③输入信号

$$x_2(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \frac{10}{3}k\right)$$

求输出 $y_2(t)$

解：①冲激响应的傅里叶变换等于频域系统函数

$$H(\omega) = \mathcal{F}[h(t)] = g_{4\pi}(\omega) = \varepsilon(\omega + 2\pi) - \varepsilon(\omega - 2\pi)$$

$$\text{② } x_1(t) = 3\cos(4\pi t) \times \sin(5\pi t) = \frac{3}{2} [\sin(\pi t) + \sin(9\pi t)]$$

频率 π 在通带内， 9π 在通带外，所以输出 $y_1(t) = \frac{3}{2} \sin(\pi t)$

③ $x_2(t)$ 是周期信号，傅里叶级数展开：

$$x_2(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \frac{10}{3}k\right) = \frac{3}{10} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_1 t} = \frac{3}{10} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\frac{3\pi}{5}t}$$

上面傅里叶级数展开中，只有 $k=0, 1, 2, 3, -1, -2, -3$ 时的频率 $0, \pm\frac{3\pi}{5}, \pm\frac{6\pi}{5}, \pm\frac{9\pi}{5}$ 在通带内允许输出，其他滤除，所以

$$y_2(t) = \frac{3}{10} \sum_{k=-3}^3 e^{jk\frac{3\pi}{5}t} = \frac{3}{10} + \frac{3}{5} \left[\cos\left(\frac{3\pi}{5}t\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{5}t\right) + \cos\left(\frac{9\pi}{5}t\right) \right]$$

将图 5.5-1 的理想滤波器的频率特性用函数表示为:

$$H(\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega t_0} & , |\omega| < \omega_c \\ 0 & , \text{其它} \end{cases}$$

对频域特性傅里叶反变换得到单位冲激响应:

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}[H(\omega)] = \frac{\omega_c}{\pi} \text{sa}[\omega_c(t - t_0)]$$

如图 5.5-2 所示, 理想低通滤波器的单位冲激响应, 在冲激信号没到来之前, 就已经有了输出, 这显然违背因果律, 因此理想低通滤波器是一种非因果系统, 物理上不可实现。

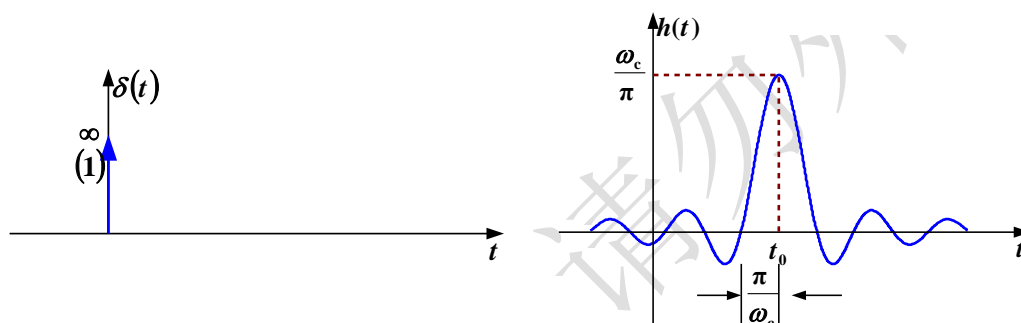


图 5.5-2 理想低通滤波器的单位冲激响应

虽然理想滤波器无法实现, 作为一个滤波器的模型, 研究它仍然具有理论和实际意义。在具体电路实现时, 我们将选取合适的电路参数, 从而尽量逼近理想模型。

【例 5.5-3】如图 5.5-3 所示的一阶 RC 电路, 输入电压源 $u_i(t)$, 输出是电容两端电压 $u_o(t)$, 指出其属于哪一类选频滤波器。

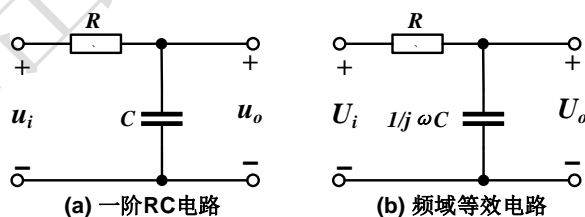


图 5.5-3 一阶 RC 电路

$$\text{解: } H(\omega) = |H(\omega)| \angle \varphi(\omega) = \frac{U_o(\omega)}{U_i(\omega)} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

定义 $\omega_0 = \frac{1}{RC} = \frac{1}{\tau}$, 其中 $\tau = RC$ 为时间常数, 则有

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega/\omega_0}$$

其幅频响应为

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_0)^2}}$$

相频响应为

$$\varphi(\omega) = -\arctan(\omega/\omega_0)$$

上述幅频响应和相频响应如图 5.5-4 所示, 该图又称**波特图(Bode Plot)**, 图中虚线代表波特图的渐进线。由图 5.5-4 可知, 当 $\omega = \omega_0$ 时, $|H(\omega)| = 1/\sqrt{2} = 0.707$, 此时 $20\lg|H(\omega)| = -3\text{dB}$ 。从幅频响应可以看出, 这是一种低通滤波器。

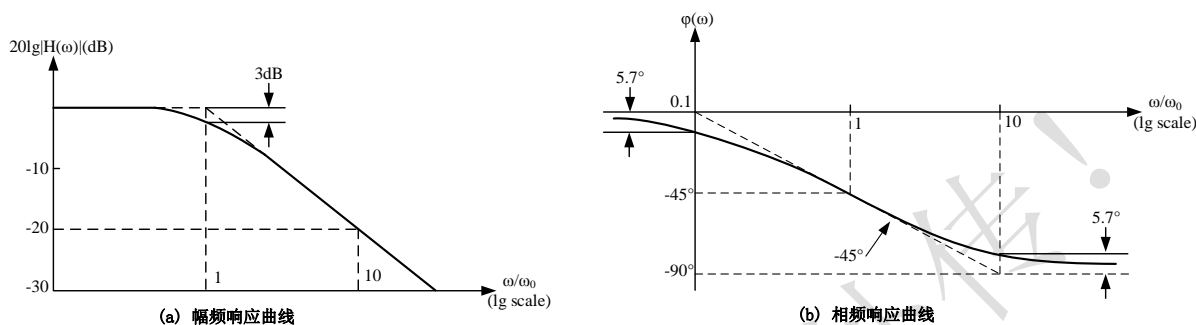


图 5.5-4 一阶 RC 电路的频率响应

滤波器频带宽度: 如前所述, 理想滤波器是物理不可实现的, 对于实际滤波器, 当保持输入信号的幅度不变, 改变信号频率, 当输出信号幅度降至最大值的 0.707 倍也就是幅频响应衰减 3dB 时的频率称为实际滤波器的截止频率, 允许通过的频带宽度称为实际滤波器的通频带宽度, 简称滤波器带宽。

根据这个定义, 图 5.5-3 所示的一阶 RC 低通电路的截止频率为 ω_0 , 通频带宽度为 ω_0 。

【例 5.5-4】如图 5.5-5 所示为二阶有源低通滤波器, 试求其频率响应。

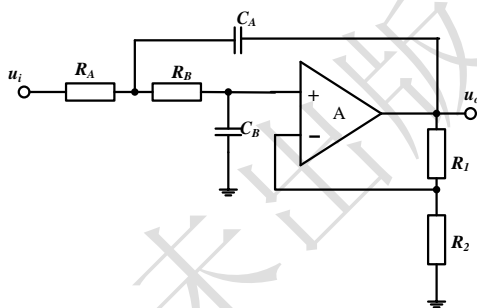


图 5.5-5 二阶有源低通滤波电路

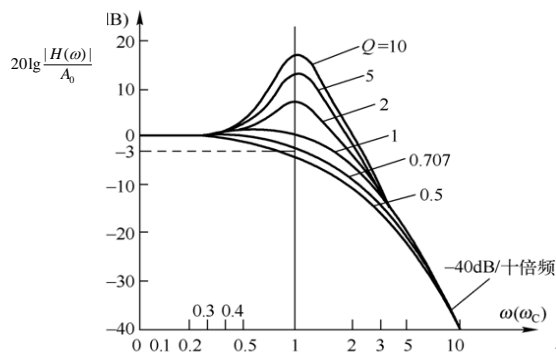


图 5.5-6 二阶有源低通滤波电路的幅频响应

解: 为了简化设计, 令 $R_A = R_B = R, C_A = C_B = C$, 此时其频域系统函数为:

$$H(\omega) = \frac{U_o(\omega)}{U_i(\omega)} = \frac{1 + R_1/R_2}{1 + (2 - R_1/R_2)j\omega RC + (j\omega RC)^2}$$

令 $\omega_c = \frac{1}{RC}$, $A_0 = 1 + \frac{R_1}{R_2}$, $Q = \frac{1}{2 - R_1/R_2} = \frac{1}{3 - A_0}$, 则

$$H(\omega) = \frac{A_0 \omega_c^2}{(j\omega)^2 + \frac{\omega_c}{Q} j\omega + \omega_c^2}$$

随着 Q 值的变化, 该电路的频率响应也会发生变化, 如图 5.5-6 所示。随着 Q 值的变化, 或者说随

着阻尼系数的变化, 曲线将出现尖峰, 通带内增益变化最平坦的 Q 值为 $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$ 。此时,

$$R_1 / R_2 = 0.586, \quad A_0 = 1.586。$$

5.6 振荡电路

5.6.1 谐振电路

1. 串联谐振电路

如图 5.6-1 所示 R 、 L 、 C 串联电路, 总阻抗 $Z(\omega) = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})$, 当 $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ 时, $Z(\omega) = R$, 此时电路的端电压和电路的总电流同相位, 称电路处于串联谐振状态。

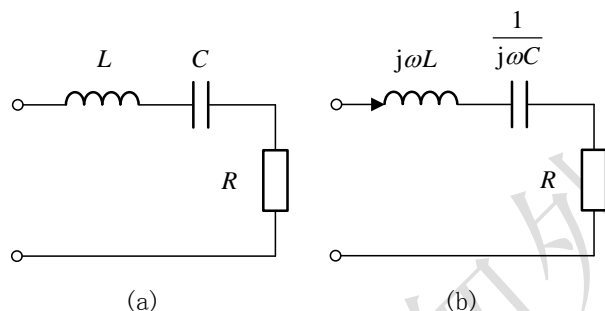


图 5.6-1 串联谐振电路

(1) 串联谐振电路的特点

谐振时, $\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$, 故谐振频率

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (5.6-1)$$

设外加激励的瞬时值为 $u(t) = \sqrt{2}U \sin \omega_0 t$, 则谐振电流为

$$i(t) = \sqrt{2} \frac{U}{R} \sin \omega_0 t = \sqrt{2} I(\omega_0) \sin \omega_0 t$$

式中 $I(\omega_0) = U / R$ 。

则任一时刻, 电感中的储能为

$$w_L(t) = \frac{1}{2} L i^2(t) = \frac{1}{2} L [\sqrt{2} \frac{U}{R} \sin \omega_0 t]^2 = L I^2(\omega_0) \sin^2 \omega_0 t$$

另一方面, 可以得出电容两端的电压瞬时值为

$$u_C(t) = \sqrt{2} \frac{I(\omega_0)}{\omega_0 C} \sin(\omega_0 t - 90^\circ)$$

则任一时刻, 电容中的储能为

$$w_C(t) = \frac{1}{2} C u_C^2(t) = \frac{1}{2} C [\sqrt{2} \frac{I(\omega_0)}{\omega_0 C} \sin(\omega_0 t - 90^\circ)]^2 = L I^2(\omega_0) \cos^2 \omega_0 t$$

故在任一时刻,

$$w_L(t) + w_C(t) = L I^2(\omega_0) \sin^2 \omega_0 t + L I^2(\omega_0) \cos^2 \omega_0 t = \text{常数} \quad (5.6-2)$$

即串联谐振电路进入谐振稳态后, 任一时刻电感与电容中的储能之和为恒定值。犹如电感和电容组成一个孤立的封闭系统, 电感和电容中的储能发生等量交换, 通常称它为电磁振荡, 因此谐振电路又叫振荡电路。

为了维持谐振电路中的电磁振荡, 激励源仅需供给电阻所消耗的能量。若提供电阻消耗的能量

远比电磁场储能总和小, 则电路“品质”越好。一般采用品质因素 Q 来定量描述谐振电路这一品质, 其定义如下:

$$Q = 2\pi \frac{\text{谐振时电路中的总电磁能量}}{\text{谐振时一个周期内电路中消耗的能量}}$$

根据上述定义, 串联谐振电路的品质因素可表示为

$$Q = 2\pi \frac{LI^2(\omega_0)}{I^2(\omega_0)RT_0} = \frac{2\pi f_0 L}{R} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 CR} \quad (5.6-3)$$

或

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{L/\sqrt{LC}}{R} = \frac{\sqrt{L/C}}{R} = \frac{\rho}{R} \quad (5.6-4)$$

式中 $\rho = \sqrt{L/C}$ 称为特性阻抗。

由于 $I(\omega_0) = U/R$, 故谐振时电感和电容电压有效值分别为

$$\begin{aligned} U_L(\omega_0) &= \omega_0 LI(\omega_0) = \frac{\omega_0 L}{R} U = QU \\ U_C(\omega_0) &= \frac{I(\omega_0)}{\omega_0 C} = \omega_0 LI(\omega_0) = QU \end{aligned} \quad (5.6-5)$$

上式表明, 在谐振时, 电感和电容电压有效值大小相同, 且均为激励电压的 Q 倍, 具有“电压放大”作用。在无线技术中, Q 值往往达到几十到几百, 如 $Q=100$; 在强电领域, Q 值通常较小, 如 $Q=5$, 当激励电压为 220V 时, 电容和电感上的电压有效值可达 1100V。

(2) 串联谐振电路电流的频率响应

图 5.6-2 电路中电流相量为

$$\begin{aligned} \dot{I}(\omega) &= \frac{\dot{U}(\omega)}{Z} = \frac{\dot{U}(\omega)}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})} = \frac{\dot{U}(\omega)}{R + j(\omega_0 L \times \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{1}{\omega_0 C} \times \frac{\omega_0}{\omega})} \\ &= \frac{\dot{U}(\omega)}{R + j\omega_0 L(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})} = \frac{\dot{U}(\omega)}{R \left[1 + \frac{j\omega_0 L}{R} (\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}) \right]} \\ &= \frac{\dot{I}(\omega_0)}{1 + \frac{j\omega_0 L}{R} (\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})} = \frac{\dot{I}(\omega_0)}{1 + jQ(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})} \end{aligned}$$

故电流相量比为

$$\frac{\dot{I}(\omega)}{\dot{I}(\omega_0)} = \frac{1}{1 + jQ(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})^2}} \angle -\text{tg}^{-1}[Q(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})]$$

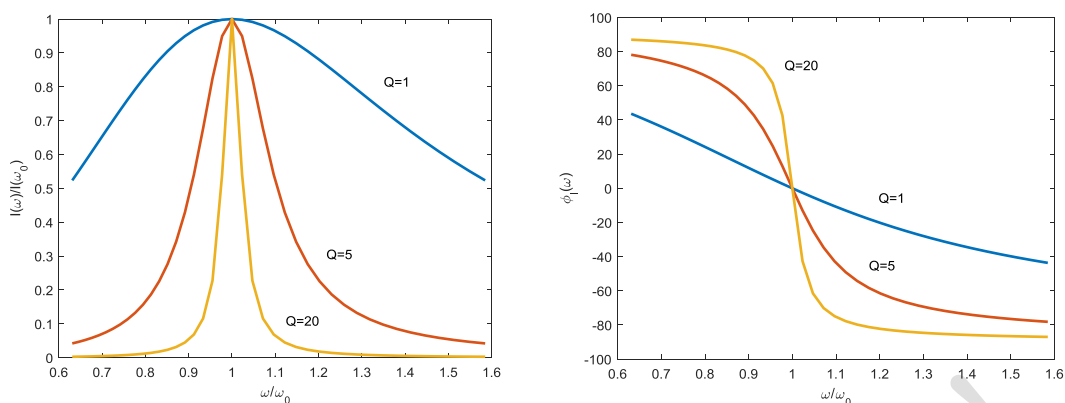
电流幅频特性为

$$\frac{I(\omega)}{I(\omega_0)} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})^2}} \quad (5.6-6)$$

电流相频特性为

$$\phi_I(\omega) = \angle -\text{tg}^{-1}[Q(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})] \quad (5.6-7)$$

电流幅频特性和相频特性曲线如图 5.6-2 所示。从特性曲线可以看出, 谐振时电路电流为最大, 偏离谐振频率时电流即减小, 且偏离于谐振频率越大则电流减小越厉害。这种对不同频率激励信号所产生的电流通过电路能力也不同, 称为谐振电路的选择性, 又叫选频特性。从图中可以看出, Q 值越高, 幅频特性曲线越尖锐, 选择性越好。



(a) 电流幅频归一化特性

(b) 电流相频特性

图 5.6-2 串联谐振电路电流的频率响应

根据通频带的定义，当电流幅度下降为原幅度的 $1/\sqrt{2} = 0.707$ 时可求得电路的下截止频率 ω_1 和上截止频率 ω_2 。令

$$\frac{I(\omega)}{I(\omega_0)} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

可解得

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{-1 + \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}}}{2Q} \quad \text{或} \quad \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}}}{2Q}$$

$$\text{即 } \omega_1 = \omega_0 \left[\sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} - \frac{1}{2Q} \right], \quad \omega_2 = \omega_0 \left[\sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} + \frac{1}{2Q} \right]$$

故通频带为

$$BW = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q} \quad (5.6-8)$$

2. 并联谐振电路

如图 5.6-3 所示 G、L、C 并联电路，总导纳

$Y(\omega) = G + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C = R + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$ 。当 $\omega C = \frac{1}{\omega L}$ 时， $Y(\omega) = G$ ，此时电路的端电压和电路的总电流同相位，称电路处于并联谐振状态。

与串联谐振类似，我们也可以得到并联谐振时的谐振频率为

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (5.6-9)$$

并联谐振时，电容支路电流和电感支路电流形成闭合回路，此时电容和电感中的总储能为常数。

与串联谐振类似，可得到并联谐振电路的品质因素

$$Q_p = \frac{\omega_p C}{G} = \frac{1}{\omega_p LG} = \frac{\sqrt{C/L}}{G} \quad (5.6-10)$$

谐振时，电容电流和电感电流的有效值分别为

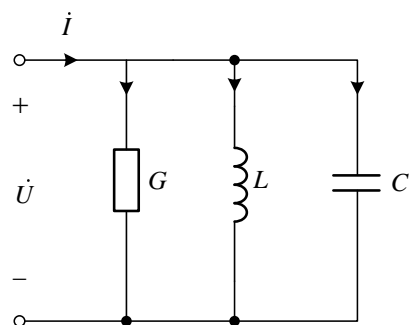


图 5.6-3 并联谐振电路

$$I_C(\omega_p) = \omega_p C U(\omega_p) = Q_p I$$

$$I_L(\omega_p) = \frac{U(\omega_p)}{\omega_p L} = Q_p I \quad (5.6-11)$$

即并联谐振电路具有“电流放大”作用。

电压归一化幅频特性为

$$\frac{U(\omega)}{U(\omega_0)} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q_p^2 \left(\frac{\omega}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega} \right)^2}} \quad (5.6-12)$$

电压相频特性为

$$\varphi_U(\omega) = \angle -\operatorname{tg}^{-1} \left[Q_p \left(\frac{\omega}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega} \right) \right] \quad (5.6-13)$$

通频带宽为

$$BW_p = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_p}{Q_p} \quad (5.6-14)$$

实际上，并联谐振电路与串联谐振电路具有对偶关系，因此上述公式也可以根据对偶关系直接得到。

5.6.2 正弦波振荡器

如图 5.6-4 所示为文氏电桥振荡器，又称为 RC 串并联式正弦波振荡器，是结构最简单的振荡电路之一。基本放大电路是由一个集成运放 A₁ 构成，从图中可以看到，输出信号既反馈回了同相端，也反馈回了反相端。A₁ 构成的运算电路的结构我们非常熟悉，是一个闭环增益为 $1+R_2/R_1$ 的同相放大器，考虑信号频率，其表达式为：

$$A(\omega) = \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right)$$

输出信号从输出端经过选频网络反馈回集成运放的同相端，其中的 RC 串并联支路构成选频网络。可得其反馈系数 V_+/V_o 为：

$$\beta(\omega) = \frac{V_+}{V_o} = \frac{Z_p(\omega)}{Z_p(\omega) + Z_s(\omega)} = \frac{1}{3 + j \left(\omega RC - \frac{1}{\omega RC} \right)}$$

当 $\omega_0 RC - \frac{1}{\omega_0 RC} = 0$ ，即 $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ 时，反馈系数为实数 $\beta(\omega_0) = \frac{1}{3}$ 。当回路增益 $L(\omega_0) = A(\omega_0)\beta(\omega_0) > 1$ 即

$R_2 > 2R_1$ 时，电路满足起振条件，最终将输出角频率为 $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ 的正弦波。实际应用中为得到更好的正弦波形，一般还要在电路中加入稳幅环节，在此不再赘述。文氏电桥振荡器可以输出几赫兹至几百千赫兹频率范围的正弦波信号，若需得到更高频率的正弦信号，往往需要采用 LC 振荡电路或石英晶体振荡电路，感兴趣的读者可以查阅相关文献或在后续通信电子电路等课程中进一步学习。

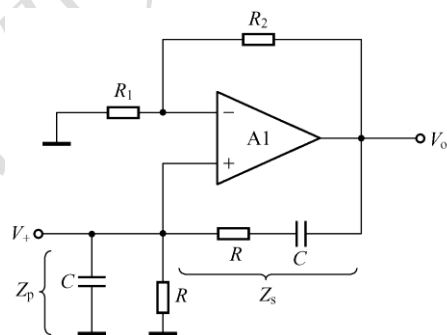
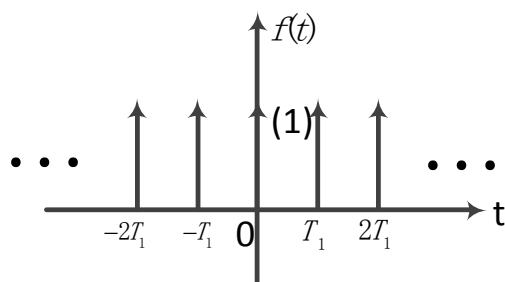


图 5.6-4 文氏电桥振荡器

习题 5

5-1 求题 5-1 图所示周期信号的三角形式和指数形式的傅里叶级数，并画出频谱图。



题 5-1 图

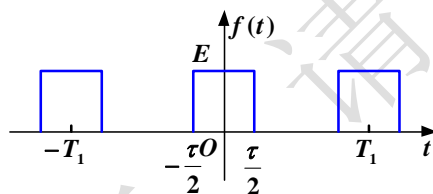
5-2 若周期矩形信号 $f(t)$ 的波形如题 5-2 图所示，求傅里叶级数的三角函数形式和指数函数形式。参数选下列各种情况时，分别求谱线间隔和带宽。

(1) $\tau = 0.5\mu\text{s}$, $T_1 = 5\mu\text{s}$, $E = 1\text{V}$

(2) $\tau = 0.5\mu\text{s}$, $T_1 = 15\mu\text{s}$, $E = 1\text{V}$

(3) $\tau = 1.5\mu\text{s}$, $T_1 = 15\mu\text{s}$, $E = 1\text{V}$

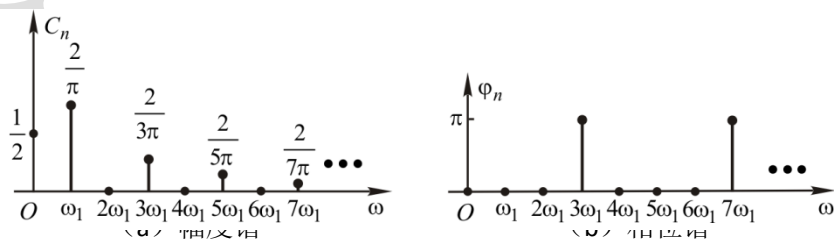
根据以上计算结果，分析谱线间隔和带宽分别随什么变化而变化。



题 5-2 图

5-3 画出周期信号 $f(t) = 1 + 2\cos(\pi t) + \sin(3\pi t)$ 的双边频谱图。

5-4 周期信号 $f(t)$ 的幅度谱相位谱如题 5-4 图 (a) (b) 所示，试写出 $f(t)$ 的三角形式傅里叶级数表达式。



题 5-4 图

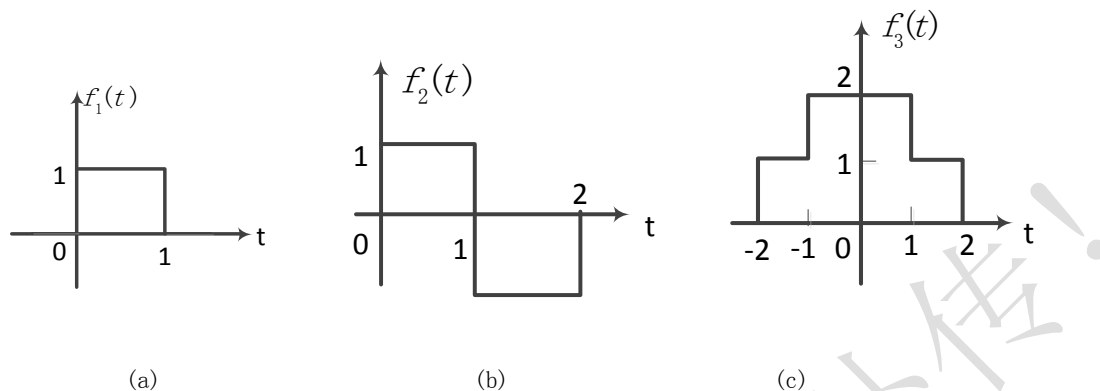
5-5 一个周期为 T_1 的周期信号 $f(t)$ ，已知其指数形式的傅里叶系数为 F_n ，求下列周期信号的傅里叶系数。

(1) $f_1(t) = f(t - t_0)$ (2) $f_2(t) = f(-t)$

$$(3) f_3(t) = \frac{df(t)}{dt}$$

$$(4) f_4(t) = f(at), a > 0$$

5-6 求题 5-6 图所示信号的傅里叶变换。



题 5-6 图

5-7 计算下列信号的傅里叶变换。

$$(1) e^{-2(t-3)}u(t-3)$$

$$(2) te^{-4t}u(t)$$

$$(3) u(t+4) - u(t-4)$$

$$(4) \cos(4\pi t)u(t)$$

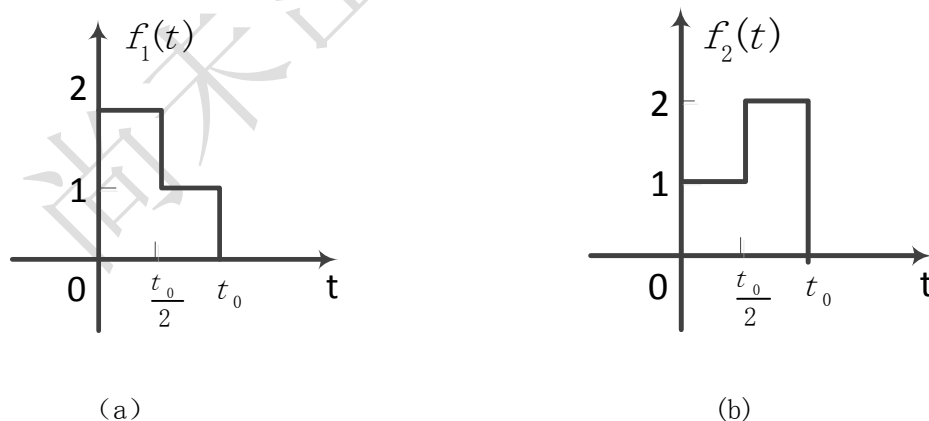
$$(5) e^{-3t}\sin(2t)u(t)$$

$$(6) \frac{\sin[2\pi(t-3)]}{5\pi(t-3)}$$

$$(7) \sin\left(2\pi t - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$(8) \frac{6}{3^2 + t^2}$$

5-8 如题 5-8 (a) 图所示的信号 $f_1(t)$ 的傅里叶变换 $F_1(\omega)$ 已知, 求题 5-11 (b) 图所示的信号 $f_2(t)$ 的傅里叶变换 $F_2(\omega)$ 。



题 5-8 图

5-9 试求下列频谱函数的傅里叶反变换。

$$(1) \frac{e^{j3\omega}}{2+j\omega}$$

$$(2) u(\omega+3) - u(\omega-3)$$

$$(3) \cos(2\omega)$$

$$(4) 4\text{sinc}(\omega)\cos(3\omega)$$

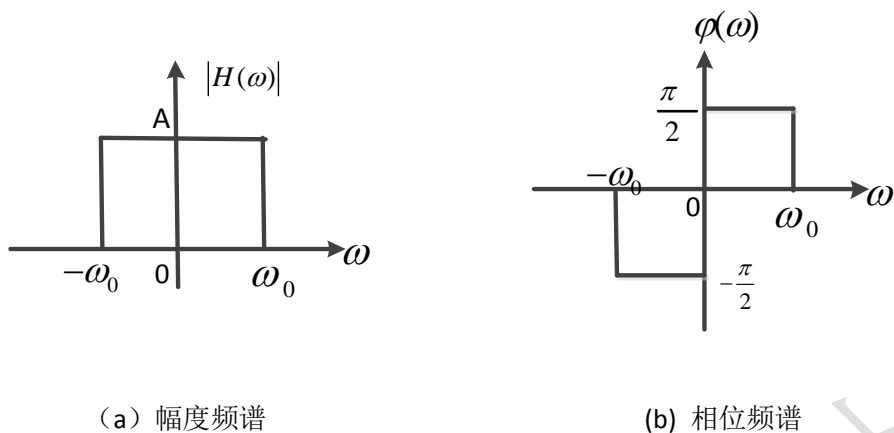
(5) $\frac{3}{-2+j\omega}$

(6) $\delta(\omega - 4) + 3$

(7) $\frac{1}{j\omega}(1 - e^{j2\omega})$

(8) $\frac{2}{(3+j\omega)^2}$

5-10 某系统的频率系统函数的幅频特性和相频特性如题 5-13 图所示, 求该系统的单位冲激响应。



题 5-10 图

5-11 有一因果 LTI 系统, 其频率响应为

$$H(\omega) = \frac{1}{j\omega + 3}$$

对于某一特定的输入 $x(t)$, 观察到系统的输出

$$y(t) = (e^{-3t} + e^{-4t})u(t)$$

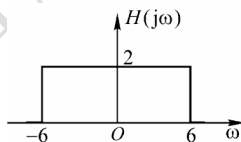
求 $x(t)$ 。

5-12 低通滤波器的频率特性如题 5-12 图所示, 输入信号

(1) $x(t) = 1 + 2\cos(4t) + \cos(8t)$,

(2) $x(t) = 2\sin^2(\pi t) + 2\cos^2(5\pi t)$

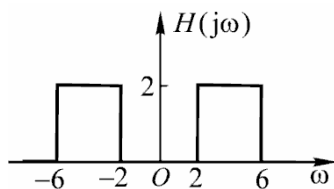
求低通滤波器的输出 $y(t)$, 并画出输入信号 $x(t)$ 及输出信号 $y(t)$ 的频谱图。



题 5-12 图

5-13 理想带通滤波器的频率特性如题 5-13 图所示, 输入信号 $e(t) = 1 + 2\cos(4t) + \cos(8t)$, 求带

通滤波器的输出 $r(t)$, 并画出输入信号 $e(t)$ 及输出信号 $r(t)$ 的频谱图。



题 5-13 图

5-15 利用傅里叶变换性质证明:

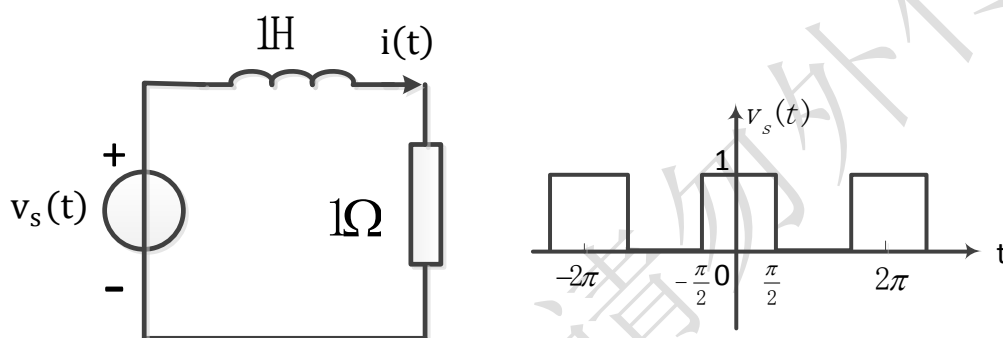
$$\int_{-\infty}^{\infty} S a^2(t) dt = \pi$$

5-16 已知系统的输入为 $x(t)$ ，系统输出为 $y(t)$ ，求下列系统的频率响应 $H(\omega)$

$$(1) \quad y(t) = \frac{d}{dt} x(t) \quad (2) \quad y(t) = x(t-t_0) \quad (3) \quad y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

$$(4) \quad \frac{d^2}{dt^2} y(t) + 3 \frac{d}{dt} y(t) + 2y(t) = \frac{d}{dt} x(t) + 4x(t)$$

5-17 题 5-17 图 (a) 所示的周期性方波电压作用于 RL 电路 (见图 5-17 图 (b))，试求电流 $i(t)$ 的前五次谐波。



题 5-17 图

5-18 题 5-18 图所示为一个带通网络。求：

(1) 证明系统函数：

$$H(\omega) = \frac{U_2(\omega)}{U_1(\omega)} = -K \frac{\frac{1}{Q} \frac{j\omega}{\omega_0}}{\left[\frac{j\omega}{\omega_0} \right]^2 + \frac{1}{Q} \frac{j\omega}{\omega_0} + 1}$$

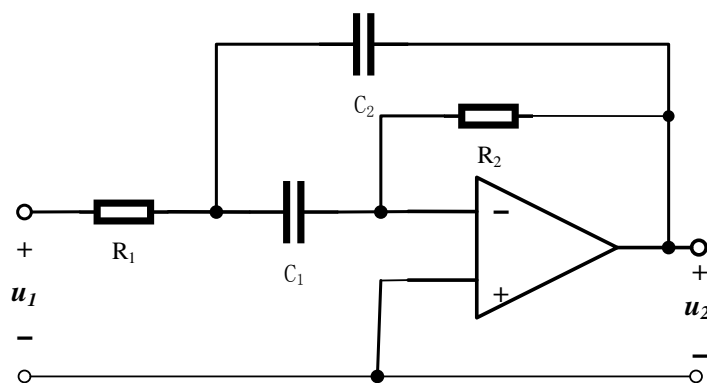
其中 $K = \frac{R_2}{R_1} \frac{C_1}{C_1 + C_2} = H(\omega_0)$ ——谐振时传输比；

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}$ ——谐振中心频率， $Q = \frac{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}{R_1 (C_1 + C_2)}$ ——品质因数。

(2) 若给定 $Q = 10$ ， $C_1 = C_2 = 0.05 \mu F$ ， $R_1 = 100 \Omega$ ，试选择 R_2 的值，并计算 ω_0 和 $H(\omega_0)$ ；

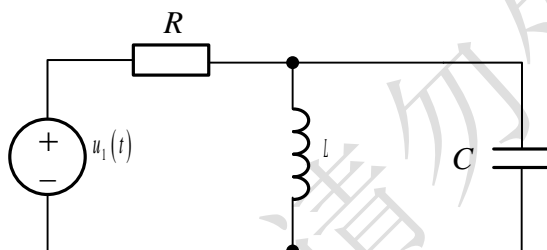
(3) 求出 $H(\omega)$ 的零点和极点，并画在复平面上；

(4) 若 $u_1(t) = [10 \sin(5000t) + 6 \sin(1000t) + 3 \sin(15000t) + \sin(20000t)] mV$ ，试问输出 $u_2(t)$ 中哪次谐波最大？其幅度为多少？



题 5-18 图

题 5-19 如题 5-19 图所示电路，已知 $R = 3\Omega$, $L = 2H$, $C = \frac{1}{18}F$, $u_1(t) = \varepsilon(t)V$ ，求：（1）传输函数 $H(\omega) = U_2(\omega)/U_1(\omega)$ ；（2）单位冲激响应 $h(t)$ ；（3）单位阶跃响应 $u_2(t)$ 。



题 5-19 图