杭州电子科技大学学生考试卷（A）卷

考试课程	概率论与数理统计		考试日期	2016 年 6 月　日			成 绩		
课程号	A0714040	教师号		任课教师姓名					
考生姓名		学号（8 位）		年级			专业		
题目	一	二	三	四	五	六	七	八	九
得分									

一、单项选择题（每题 5 分，共 15 分）

1、对于样本空间中任意两个事件 A 与 B，下列事件关系中不正确的是（　　）.

(A) $A-B=A\bar{B}$　　(B) $A\cup B=A\cup(B-AB)$

(C) $A=AB\cup A\bar{B}$　　(D) $(A\cup B)-B=A$

2、设事件 A 与 B 是互不相容，且 $P(A)>0$，$P(B)>0$，则下列式子正确的是（　　）.

(A) $P(B|A)>0$　　(B) $P(A|B)=P(A)$

(C) $P(A|B)=0$　　(D) $P(AB)=P(A)P(B)$

3、若随机变量 X 的概率密度为：$f(x)=\begin{cases} a/(x^2+1), & -1<x<1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$，则 a 的取值为：（　　）.

(A) $\dfrac{2}{\pi}$　　(B) $\dfrac{\pi}{2}$　　(C) 0　　(D) 无法确定

4、设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 均来自正态总体 $N(0,\sigma^2)$ 的两个独立样本，则统计量

$U=\dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{\sqrt{Y_1^2+Y_2^2+\cdots+Y_n^2}}$ 的分布是（　　）.

(A) $\chi^2(n)$　　(B) $t(n)$　　(C) $F(n,n)$　　(D) 不能确定

5、设 X_1,X_2,X_3,X_4 是来自正态分布总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，其中 μ 未知，σ^2 已知，下列估计量中，关于 μ 的最有效的无偏估计量是(　　).

(A) $T_1=\dfrac{1}{6}(X_1+X_2)+\dfrac{1}{3}(X_3+X_4)$　　(B) $T_2=\dfrac{1}{5}(X_1+2X_2+3X_3+4X_4)$

(C) $T_3=\dfrac{1}{4}(X_1+X_2+X_3+X_4)$　　(D) $T_4=\dfrac{1}{5}(X_1+2X_2+X_3+X_4)$

二、填空题（每空 3 分，共 18 分）

1、设事件 A 与 B 相互独立，且满足 $P(A\cup B)=0.8$，$P(B)=0.5$，则 $P(AB)=$__________.

2、若一批产品中 90%是合格品，检查时一个合格品被误认为是次品的概率为 0.05，一个次品被误认为是合格品的概率为 0.05，则一个经检查后被认为是合格品的产品确是合格品的概率为__________.

3、设随机变量 X 的分布律为：$P\{X=k\}=\dfrac{k}{10}$，$k=1,2,3,4$，则 $P\{\dfrac{1}{2}<X\le\dfrac{5}{2}\}=$__________.

4、设随机变量 X 服从二项分布 $b(100,0.2)$，随机变量 Y 服从正态分布 $N(5,1)$，且 X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=0.25$，则 $E(X-2Y+1)=$__________，$D(X-2Y+1)=$__________.

5、设样本 $X_1,X_2,\cdots,X_6$ 来自总体 $N(0,1)$，且 $Y=(X_1+X_2)^2+(X_3+X_4)^2+(X_5+X_6)^2$，要使变量 CY 服从 χ^2 分布，则常数 $C=$__________.

三、(8 分) 一加法器同时收到 30 个噪声电压 V_k $(k=1,2,\cdots,30)$，设它们是相互独立的随机变量，且都在区间（0,10）上服从均匀分布，记 $V=\sum_{k=1}^{30}V_k$，求 $P\{V>130\}$ 的近似值.（结果用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 表示，$x>0$）

四、(15 分) 设随机变量 (X,Y) 的概率分布律为：

Y \ X	0	1	2
-1	0.1	0.1	0.4
1	0.1	0.2	0.1

求(1) 关于 $Z=X+Y$ 的分布律；(2) 概率 $P\{X+Y\le 1\}$；(3) $E(Y)$ 和 $D(Y)$；(4) $Cov(X,Y)$。

四(18 分)、设二维随机变量 (X,Y) 的概率函数为：

$$f(x,y)=\begin{cases} Cxy, & 0<x<1, 0<y<x^2; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(1)求常数 C；(2)求关于 X 和 Y 的边缘概率密度；(3) 问 X 和 Y 是否相互独立？需说明理由；(4)求 $E(XY)$。(5) 求 $Z=X^2-Y$ 的分布函数。

六、(10 分) 设总体 X 具有指数分布，其概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, x>0\\ 0, \quad x\le 0\end{cases}$，其中 θ 是未知参数. 又 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自该总体的一个样本，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为样本值. 试分别求未知参数 θ 的矩估计量和最大似然估计量 $\hat{\theta}$.

七、(6 分) 设测量零件的长度产生的误差 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ 和 σ^2 均未知，今随机地测量 25 个零件，得样本均值 $\bar{x}=0.5$，样本均方差 $s=1.52$，求 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间.
(已知：$t_{0.025}(25)=2.0595$，$t_{0.05}(25)=1.7081$，$t_{0.025}(24)=2.0639$，$t_{0.05}(24)=1.7109$)

八、(6 分) 设两位化验员 A、B 独立地对某种聚合物含氯量用相同的方法各作 10 次测定，其测定值的样本方差依次为 $S_A^2=0.552$ 和 $S_B^2=0.606$. 设 σ_A^2 和 σ_B^2 分别为 A、B 所测定的测定值总体的方差，设两个总体均为正态的，且两样本独立，问根据这些数据能否推断这种聚合物含氯量的波动性有无显著的变化. 即检验假设：$H_0:\sigma_A^2=\sigma_B^2$，$H_1:\sigma_A^2\ne\sigma_B^2$，取显著性水平 $\alpha=0.05$.(已知：$F_{0.025}(9,9)=4.03$，$F_{0.05}(9,9)=3.18$)

九(4 分)、设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\frac{x^n}{n!}e^{-x}, x>0\\ 0, \quad x\le 0\end{cases}$，用切比雪夫不等式证明：

$P\{0<X<2(n+1)\}\ge\frac{n}{n+1}$.

2016.6

杭州电子科技大学学生考试卷（A）卷 参考答案

一、单项选择题（每题 3 分，共 15 分）

1、D　2、C　3、A　4、B　5、C

二、填空题（每空 3 分，共 18 分）

1、0.3　2、171/172 =0.994　3、0.3　4、11　16　5、0.5

三、(8 分)

解：由题意知 $E(V_k)=5$，$D(V_k)=\frac{100}{12}$，$=\frac{25}{3}$ -1分 ------------2 分

由中心极限定理可知所求概率为：

$$P\{V>130\}=P\{\sum_{k=1}^{30}V_k>130\}=\underbrace{1-P\{\sum_{k=1}^{30}V_k\le 130\}}_{1分}=1-P\{\frac{\sum_{k=1}^{30}V_k-30\times5}{\sqrt{30\times\frac{100}{12}}}\le\frac{130-30\times5}{\sqrt{30\times\frac{100}{12}}}\}$$

2分

---------3 分

$$\approx 1-\Phi(-\frac{2\sqrt{10}}{5})=\underbrace{1-[1-\Phi(\frac{2\sqrt{10}}{5})]}_{1分}=\Phi(\frac{2\sqrt{10}}{5})=\Phi(1.2649)$$ ------2 分

2分

四、(15 分)

解：(1) 关于 $Z=X+Y$ 的分布律为：

Z	-1	0	1	2	3
P	0.1	0.1	0.5	0.2	0.1

有1~2个正确得1分

有列式 正确 可给分

-------3 分

(2) $P\{X+Y\le 1\}=\underbrace{1-P\{X+Y=2\}-P\{X+Y=3\}}=0.7$ ------3 分

(3) 关于 Y 的边缘分布律为：

Y	-1	1
P	0.6	0.4

1分 ?

从而有 $E(Y)=-1\times0.6+1\times0.4=-0.2$，$E(Y^2)=(-1)^2\times0.6+1^2\times0.4=1.0$，故 1分

-1分

$D(Y)=\underbrace{E(Y^2)-[E(Y)]^2}_{1分}=\underbrace{1.0-(-0.2)^2=0.96}_{1分}$

------------4 分

(4) 关于 X 的边缘分布律为：

X	0	1	2
P	0.2	0.3	0.5

1分 ?

从而有：$E(X)=0\times0.2+1\times0.3+2\times0.5=1.3$，— 1分

$E(XY)=0\times(-1)\times0.1+0\times1\times0.1+1\times(-1)\times0.1+1\times1\times0.2+2\times(-1)\times0.4+2\times1\times0.1=-0.5$

从而有 $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=-0.5-1.3\times(-0.2)=-0.24$ —2分

老先生分析得，可由两个情况给分

1分　　1分　　——————5分

五(18分)

解：(1)由 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1$，从而有 $\int_0^1dx\int_0^{x^2}Cxydy=1$，所以 $C=12$；

1分　　1分　　1分 ——————3分

(2)关于 X 的边缘概率密度：$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^{x^2}12xydy=6x^5, & 0<x<1,\\ 0, & otherwise.\end{cases}$

1分　　2分

~~从而其分布函数为：~~ $F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}f_X(x)dx=\begin{cases}0, & x<0\\ \cancel{\int_0^x 6x^5dx=x^6,\ 0\le x<1,} \\ 1, & x\ge1.\end{cases}$

关于 Y 的边缘概率密度：

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{\sqrt{y}}^{1}12xydx=6y(1-y), & 0<y<1,\\ 0, & otherwise.\end{cases}$

1分　　2分

~~从而其分布函数为：~~ $F_Y(y)=\int_{-\infty}^{y}f_Y(y)dy=\begin{cases}0, & y<0\\ \cancel{\int_0^y 6y(1-y)dy=3y^2-2y^3,\ 0\le y<1,}\\ 1, & y\ge1.\end{cases}$

1分　　1分　　——————6分

(3)显然，$f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$，所以 X 和 Y 不相互独立．——2分

(4) 由 $E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xy\,f(x,y)dxdy=\int_0^1dx\int_0^{x^2}xy\cdot12xy\,dxdy=4/9$ ——3分

1分　　1分　　1分

(5) 令 $F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X^2-Y\le z\}$，

1分

当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=P\{X^2-Y\le z\}=0$；

当 $0\le z<1$ 时，

$F_Z(z)=P\{X^2-Y\le z\}=1-P\{Y\le X^2-z\}=1-\int_{\sqrt{z}}^{1}dx\int_0^{x^2-z}12xydy=z^3+3z-3z^2$

当 $z\ge1$ 时，$F_Z(z)=P\{X^2-Y\le z\}=1$．

即分布函数：$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ z^3+3z-3z^2, & 0\le z<1,\\ 1, & z\ge1\end{cases}$　　2分　　~~密度函数为~~：

$f_Z(z)=\begin{cases}3z^2+3-6z, & 0\le z<1,\\ 0, & 其它\end{cases}$

1分　　——————4分

① $E(X)=\theta$ —— 2分
② 令 $E(X)=\bar X$ —— 1分
③ $\hat\theta=\bar X$ —— 1分

六、(10 分)

解：(1)先求矩估计量：$\bar{X}=E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x)dx=\int_0^{+\infty}x\cdot\frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}dx=\int_0^{+\infty}xd(-e^{-x/\theta})$ 1分

$=\left[-xe^{-x/\theta}\right]_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-x/\theta}dx=0+\theta\int_0^{+\infty}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx=\theta$ 2分，从而未知参数 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}=\bar{X}$。 1分

——————4 分

(2)再求最大似然估计量：其似然函数 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\theta)=\prod_{i=1}^{n}[\frac{1}{\theta}e^{-x_i/\theta}]=\theta^{-n}e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i}$ 1分 2分

取对数 $\ln L(\theta)=-n\ln\theta-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i$，令 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=-\frac{n}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}x_i=0$，得 $\hat{\theta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$，即

未知参数 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\bar{X}$。 3分

——————6 分

七、(7 分)

解：由题意，$n=25$，$\alpha=0.05$，μ 的置信区间为 枢轴量：$\frac{\bar X-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$ —— 2分

$\left(\bar{x}\pm\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)=(\bar{x}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\bar{x}+\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1))$ ————5 分

分位点 1
自由度 1

数据代入有：$(0.5-\frac{1.52}{\sqrt{25}}t_{0.025}(24),0.5+\frac{1.52}{\sqrt{25}}t_{0.025}(24))=$ ~~(-0.02,1.02)~~ ———2 分

(−0.13, 1.13)
or (−0.127, 1.127)

八、(6 分)

解：由题意 $n_1=n_2=10$，需检验假设：$H_0:\sigma_A^2=\sigma_B^2$，$H_1:\sigma_A^2\neq\sigma_B^2$，则拒绝域为：

$F\geq F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$ 1分 或 $F\leq F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$ 1分，且 $F=\frac{S_A^2}{S_B^2}$ 1分 ——————3 分

由于 $F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)=\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_2-1,n_1-1)}$， ——————1 分

从而拒绝域为：$\frac{s_A^2}{s_B^2}\geq F_{0.025}(9,9)=4.03$ 或 $\frac{s_A^2}{s_B^2}\leq F_{1-0.025}(9,9)=\frac{1}{4.03}=0.248$。 ——1 分

现 $\frac{s_A^2}{s_B^2}=\frac{0.552}{0.606}=0.911$，不在拒绝域内，从而接受 H_0，即认为波动性无显著的变化。1 分

32/73

14
13

九、(4 分)

证：由 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)dx=\int_0^{+\infty} x\frac{x^n}{n!}e^{-x}dx=\int_0^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}d(-e^{-x})$

$$=\left[-\frac{x^{n+1}}{n!}e^{-x}\right]_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}(n+1)\frac{x^n}{n!}e^{-x}dx=0+(n+1)\int_0^{+\infty}\frac{x^n}{n!}e^{-x}dx=n+1$$

------1 分

同理，可计算出 $E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot f(x)dx=(n+2)(n+1)$

而 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=(n+2)(n+1)-(n+1)^2=(n+1)$ ------1 分

由切比雪夫不等式，得 $P\{0<X<2(n+1)\}=P\{-(n+1)<X-(n+1)<n+1\}$ —1 分

$$=P\{|X-(n+1)|<n+1\}\geq 1-\frac{n+1}{(n+1)^2}=\frac{n}{n+1}$$ ------1 分