杭州电子科技大学学生考试卷（A）卷

考试课程	线性代数	考试日期	2014年1月11日	成 绩			
课程号	A0714030	教师号		任课教师姓名			
考生姓名		学号（8位）		年级		专业	

题 号	一	二	三	四	五	六
得 分						

注意：所有答案全部书写在试卷上，答案写在其他地方视为无效！本课程考试试卷总共4大张，另附两张纸作为草稿纸使用，不得使用其余形式的草稿纸，不得使用计算器等计算工具，否则视为作弊！

得分	

一、填空题（请将答案填写在横线上。本题总共六小题，每题3分，总共18分）

1、设A为五阶方阵，秩(A)=4，A^*是A的伴随矩阵，则秩$(A^*)=$ 1；

2、实二次型$f=x_1^2+2x_2^2-3x_3^2$的秩为 3，正惯性指数为 2，负惯性指数为 1；

3、已知三阶方阵A的三个特征值分别为1，2，3，则$|A^2+2A-3E|=$ 0；

4、若向量组$\alpha_1=[1,1,2]^T$，$\alpha_2=[3,t,1]^T$，$\alpha_3=[0,2,-t]^T$线性相关，则t = -2 或 5；

5、设A是4×3矩阵，秩(A)=2，而$B=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&2&0\\-1&0&3\end{bmatrix}$，则秩(AB)= 2；

6、设A是5×3矩阵，且秩(A)=2，已知η_1，η_2是非齐次线性方程组AX=b的两个相异的解，则AX=b的通解为 $k(\eta_1-\eta_2)+\eta_1$。

得分	

二、选择题（请将正确答案填写在括号中，在字母前勾选所得结果视为无效。本题共六小题，每题3分，共18分）

1、若向量组α，β线性相关，则（ A ）；

（A）α，β对应分量成比例　　（B）其中必有一零向量

（C）α，β一定是非零向量　　（D）α=kβ，k是不为零的数

2、设λ=2是可逆矩阵A的一个特征值，则矩阵$(\frac{1}{3}A^2)^{-1}$有一个特征值等于（ B ）；

（A）$\frac{4}{3}$　　（B）$\frac{3}{4}$　　（C）$\frac{1}{2}$　　（D）$\frac{1}{4}$

3、已知矩阵$\begin{bmatrix}22&30\\-12&x\end{bmatrix}$有一个特征向量$\begin{bmatrix}-5\\3\end{bmatrix}$，则x=（ C ）；

（A）−12　　（B）−14　　（C）−16　　（D）−18

4、若A为正交阵，则下列矩阵中不是正交阵的是（ D ）；

（A）A^{-1}　　（B）A^T　　（C）A^3　　（D）3A

5、若方程组AX=b中，方程的个数小于未知量的个数，则有（ B ）；

（A）AX=b必有无穷多解　　（B）AX=0必有非零解

（C）AX=0仅有零解　　（D）AX=0一定无解

6、设A为m×n矩阵，B为n×m矩阵，则（ B ）；

（A）当m>n时，必有行列式$|AB|\neq 0$　　（B）当m>n时，必有行列式$|AB|=0$

（C）当m<n时，必有行列式$|AB|\neq 0$　　（D）当m<n时，必有行列式$|AB|=0$

得分	

三、试求解下列各题（本题共四小题，每题5分，共20分）

1、求矩阵 $A=\begin{bmatrix}-1 & 3 & -1\\ -3 & 5 & -1\\ -3 & 3 & 1\end{bmatrix}$ 的特征值和特征向量；

$|\lambda E-A| = (\lambda-1)(\lambda-2)^2$ 1′

∴ A的特征值为 $\lambda_1=1$ $\lambda_2=2$（二重）

$\lambda_1=1$ 代入 $(\lambda_1 E-A)X=0$ 得基础解系 $\xi_1=(1,1,1)^T$

∴ A的属于 $\lambda_1=1$ 的所有特征向量为 $k_1\xi_1$ $k_1\neq 0$ 2′

$\lambda_2=2$ 代入 $(\lambda_2 E-A)X=0$ 得基础解系 $\xi_2=(1,1,0)^T$ $\xi_3=(1,0,-3)^T$

∴ A的属于 $\lambda_2=2$ 的所有特征向量为 $k_2\xi_2+k_3\xi_3$，k_2,k_3 不全为0. 2′

2、设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3+x_4^2$，a取何值时f正定？

$A=\begin{pmatrix}a & 1 & 1 & 0\\ 1 & a & -1 & 0\\ -1 & -1 & a & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ 1′

$$\begin{cases}\Delta_1 = a > 0\\ \Delta_2 = a^2-1>0\\ \Delta_3 = a(a-1)(a+1)>0\\ \Delta_4=\Delta_3=a(a-1)(a+1)>0\end{cases}$$ 3′

∴ $a>1$ 时 f 正定. 1′

3、在欧氏空间 R^3 中，设有两组基：

(I): $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$；(II): $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=\alpha_3$；设 α 在基(I)下的坐标为 $X=[1,1,1]^T$，求 α 在基(II)下的坐标；

基(I)到基(II)的过渡矩阵为 $M=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ 2′

设 α 在基(II)下的坐标为 $Y=(y_1,y_2,y_3)^T$ 1′

则有 $Y=M^{-1}X$ 1′

$(M\,\vdots\,X)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right)$

∴ α 在基(II)下的坐标为 $(1,0,0)^T$ 1′

4、判别矩阵 $A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$ 能否和对角矩阵相似。若与对角矩阵相似，求一个可逆矩阵

使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵。

$|\lambda E-A| = (\lambda-3)(\lambda-2)(\lambda+1)$

∴ A有三个互异特征值为 $\lambda_1=-1$ $\lambda_2=2$ $\lambda_3=3$ 2′

∴ A可对角化.

$\lambda_1=-1$ 代入 $(\lambda_1E-A)X=0$ 得基础解系 $\xi_1=(3,0,-1)^T$

$\lambda_2=2$ ⋯ $(\lambda_2E-A)X=0$ ⋯⋯ $\xi_2=(0,0,1)^T$

$\lambda_3=3$ ⋯ $(\lambda_3E-A)X=0$ ⋯⋯ $\xi_3=(1,4,1)^T$

令 $P=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 4\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ 为可逆阵 且 $P^{-1}AP=\mathrm{diag}(-1,2,3)$ 3′

四、试求解下列各题（本题共四小题，每题 6 分，共 24 分）

得分	

1、设向量组 $\alpha_1=[1,1,2]^T$，$\alpha_2=[0,2,1]^T$，$\alpha_3=[2,0,3]^T$，$\alpha_4=[1,1,0]^T$，求 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个极大线性无关组，将其余向量用该极大线性无关组线性表示；

$$(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4) \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 为一个极大线性无关组. $3'$

$$(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_4 \,\vdots\, \alpha_3) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$\therefore$ $\alpha_3 = 2\alpha_1 - \alpha_2$ $3'$

2、设矩阵 A 与 B 相似，其中 $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & x \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix}$，求 x 与 y 的值；

$\because$ A, B 相似

$\therefore \begin{cases} trA = trB \\ |A| = |B| \end{cases}$ $2'$

$\therefore \begin{cases} x-y=-1 \\ 3x-2y=3 \end{cases}$ $2'$

$\therefore \begin{cases} x=5 \\ y=6 \end{cases}$ $2'$

3、设 A 为三阶方阵，有 3 个不同的特征值 λ_1，λ_2，λ_3，对应的特征向量分别为 α_1，α_2，α_3，若 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，证明：$\beta$，$A\beta$，$A^2\beta$ 线性无关；

令 $k_1\beta + k_2(A\beta) + k_3(A^2\beta) = 0$. $1'$

$A\beta = A(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) = A\alpha_1 + A\alpha_2 + A\alpha_3 = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \lambda_3\alpha_3$

$A^2\beta = A(\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3) = \lambda_1^2\alpha_1 + \lambda_2^2\alpha_2 + \lambda_3^2\alpha_3$

$\therefore$ $k_1(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) + k_2(\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3) + k_3(\lambda_1^2\alpha_1+\lambda_2^2\alpha_2+\lambda_3^2\alpha_3) = 0$.

$(k_1+\lambda_1k_2+\lambda_1^2k_3)\alpha_1 + (k_1+\lambda_2k_2+\lambda_2^2k_3) + (k_1+\lambda_3k_2+\lambda_3^2k_3)\alpha_3 = 0$.

$\because$ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关. 1

$\therefore \begin{cases} k_1+\lambda_1k_2+\lambda_1^2k_3=0 \\ k_1+\lambda_2k_2+\lambda_2^2k_3=0 \\ k_1+\lambda_3k_2+\lambda_3^2k_3=0 \end{cases}$ $1'$ 系数行列式 $= \prod\limits_{1\le i<j\le 3}(\lambda_j-\lambda_i) \neq 0$

$\therefore$ $k_1=k_2=k_3=0$ $1'$ $\therefore$ $\beta, A\beta, A^2\beta$

4、设向量组 (I)：$\beta_1=[0,1,-1]^T, \beta_2=[a,2,1]^T, \beta_3=[b,1,0]^T$ 及向量组 (II)：$\alpha_1=[1,2,-3]^T$，$\alpha_2=[3,0,1]^T, \alpha_3=[9,6,-7]^T$ 有相同的秩，且 β_3 可由 α_1,α_2 线性表示，求 a,b 的值。

$\because$ $R(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3) = 2$ $1'$

$\therefore$ $|\beta_1\ \beta_2\ \beta_3| = -(a-3b) = 0$ $1'$

$\therefore$ $a = 3b$ $1'$

$\because$ β_3 可由 α_1, α_2 线性表示.

$\therefore$ $|\alpha_1\ \alpha_2\ \beta_3| = 2(b-5) = 0$ $1'$

$\therefore$ $b = 5$ $1'$

$\therefore$ $a = 15$ $1'$

得分	

五、(10 分) 设三阶实对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=-2$，对应于 λ_3 的特征向量为 $\xi_1=[-1,1,2]^T$，求

(1) 对应于 λ_1 的特征向量；

(2) 求 A。

(1) 设对应于 λ_1 的特征向量为 $\xi=(x_1,x_2,x_3)^T$ $\quad 2'$

$\because \xi \perp \xi_1 \quad \therefore -x_1+x_2+2x_3=0$

得基础解系 $\xi_2=(1,1,0)^T \quad \xi_3=(2,0,1)^T$

$\therefore$ 对应于 λ_1 的特征向量为 $k_2\xi_2+k_3\xi_3 \quad k_2, k_3$ 不全为0. $\quad 2'$

(2) 令 $P=(\xi_1\ \xi_2\ \xi_3)=\begin{pmatrix}-1&1&2\\1&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}$ 可逆. $\quad 2'$

且 $P^{-1}AP=diag(-2,1,1)$

$A=P\,diag(-2,1,1)\,P^{-1}$

其中 $P^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac16&\frac16&\frac13\\ \frac16&\frac56&-\frac13\\ \frac13&-\frac13&\frac13\end{pmatrix}$ $\quad 2'$

$\therefore A=\begin{pmatrix}\frac12&\frac12&1\\ \frac12&\frac12&-1\\ 1&-1&-1\end{pmatrix}$ $\quad 2'$

得分	

六、(10 分) 用正交线性替换将实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_2^2-2x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3+8x$

化为标准形，并写出正交线性替换。

$A=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&-2&4\\2&4&-2\end{pmatrix}$ $\quad 1'$

$|\lambda E-A|=(\lambda+7)(\lambda-2)^2$ $\quad 1'$

$\therefore$ A的特征值为 $\lambda_1=-7 \quad \lambda_2=2$ (二重)

$\lambda_1=-7$ 代入 $(\lambda_1E-A)X=0$ 得基础解系 $\xi_1=(2,1,-1)^T$

$\lambda_2=2 \cdots (\lambda_2E-A)X=0 \quad \cdots\cdots \quad \xi_2=(2,-1,0)^T \quad \xi_3=(2,0,1)^T$

$\xi_2'=\xi_2=(2,-1,0)^T$ $\quad 1'$

$\xi_3'=\xi_3-\frac{(\xi_3,\xi_2')}{(\xi_2',\xi_2')}\xi_2'=(\frac25,\frac45,1)^T$

$\eta_1=\frac{\xi_1}{\|\xi_1\|}=\frac{1}{\sqrt6}(2,1,-1)^T$

$\eta_2=\frac{\xi_2'}{\|\xi_2'\|}=\frac{1}{\sqrt5}(2,-1,0)^T$

$\eta_3=\frac{\xi_3'}{\|\xi_3'\|}=\frac{1}{3\sqrt5}(2,4,5)^T$

$U=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt6}&\frac{2}{\sqrt5}&\frac{2}{3\sqrt5}\\ \frac{1}{\sqrt6}&-\frac{1}{\sqrt5}&\frac{4}{3\sqrt5}\\ -\frac{1}{\sqrt6}&0&\frac{\sqrt5}{3}\end{pmatrix}$ 为正交阵. $\quad 3'$

正交线性替换 $X=UY$. $\quad 1'$

标准形 $-7y_1^2+2y_2^2+2y_3^2$ $\quad 1'$