2020年11月杭州电子科技大学线性代数期中考试题及解析

一、填空题

1. 已知A为三阶方阵且$|A|=2$，则$\left|\left(-\frac{1}{2}A\right)^{-1}\right|=$____________.

2. 若A是4×3矩阵，且$R(A)=2$，而$B=\begin{pmatrix}9&0&0\\9&-7&0\\8&7&8\end{pmatrix}$，则$R(AB)=$____________.

3. 若齐次线性方程组$\begin{cases}kx_1+x_2+x_3=0\\x_1+kx_2+x_3=0\\x_1+x_2+kx_3=0\end{cases}$有非零解，则$k$应满足的条件是____________.

4. 已知4阶行列式第三行元素分别是-1，0，2，4，第四行元素相应的代数余子式分别是10，5，a，2，则$a=$____________.

5. 设$A=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&3&1\\0&2&1\end{pmatrix}$，则$A^{-1}=$____________.

6. 方阵A为可逆矩阵的充要条件是____________.

二、选择题

1. 设A和B均为n阶方阵，以下等式成立的是（　　）.

A. $|A+B|=|A|+|B|$　　B. $(AB)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$

C. $|AB|=|BA|$　　D. $(A-B)^2=A^2+B^2$

2. 设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&x&x^2&x^3\\1&y&y^2&y^3\\1&z&z^2&z^3\end{pmatrix}$，其中$x,y,z$互不相等，矩阵$A$的秩等于（　　）.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

3. 四阶行列式$\begin{vmatrix}a_1&0&0&a_7\\0&0&a_2&0\\0&a_3&0&0\\0&a_6&a_5&a_4\end{vmatrix}$的值等于（　　）.

A. $a_1a_2a_3a_4$　　B. 0　　C. $-a_7a_2a_3a_4$　　D. $-a_1a_2a_3a_4$

4. 设A为n阶反对称矩阵，且A可逆，则有（　　）.

A. $A^TA^{-1}=-E$　　B. $AA^T=-E$　　C. $A^{-1}=A^T$　　D. $|A^T|=-|A|$

5. 设A为n矩阵，对矩阵A作若干次初等变换得到矩阵B，那么必有（ ）.

A. $|A|=|B|$

B. 若$|A|\neq 0$，则$|B|\neq 0$

C. $|A|\neq|B|$

D. 若$|A|>0$，则$|B|>0$

6. 设A为n阶非零矩阵，E为n阶单位矩阵，若$A^3=0$，则下列说法正确的是（ ）.

A. $A-E$不可逆，$A+E$不可逆

B. $A-E$可逆，$A+E$可逆

C. $A-E$不可逆，$A+E$可逆

D. $A-E$可逆，$A+E$不可逆

三、试求解下列试题

1. 求四阶行列式$D=\begin{vmatrix} -5 & 1 & 3 & -6 \\ 1 & 5 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

2. 用初等行变换把矩阵$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -3 & -7 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 3 & -2 & 8 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}$化为行最简形行列式.

3. 设$f(x)=ax^2+bx+c$，当A为n阶矩阵，E为n阶单位矩阵时，定义$f(A)=aA^2+bA+cE$，现若$f(x)=x^2-3x-2$，而$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$，试求$f(A)$.

4. 设四阶行列式$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$，求$A_{13}-A_{23}-A_{43}$.

四、试求解下列试题

1. 设矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & \lambda & 2 \\ \lambda & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$，问$\lambda$取何值时，（1）矩阵$A$的秩等于$3$；（2）矩阵$A$的秩等于$2$；（3）矩阵$A$的秩等于$1$.

2. 已知矩阵A的伴随矩阵$A^*=\mathrm{diag}(1,1,1,8)$，且满足$ABA^{-1}=BA^{-1}+3E$，试求$|B|$.

3. 设矩阵X满足矩阵方程$X=AX+B$，且$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$，试求矩阵$X$.

五、试解下列各题

1. 已知3阶方阵A满足$|A|=\dfrac{1}{2}$，试求$|(2A)^{-1}-5A^*|$.

2. 问λ取何值时，线性方程组$\begin{cases} -x+\lambda y+2z=1 \\ x-y+\lambda z \quad =2 \\ -5x+5y+4z \ =-1 \end{cases}$有唯一解？问$\lambda$取何值时，该线性方程组的系数矩阵$A$的秩不等于其增广矩阵的秩？

六、证明题

已知n阶方阵A的秩为$n-1$，即$R(A)=n-1$，试证明矩阵A的伴随矩阵的秩等于1，即$R(A^*)=1$.

答案解析看如下知乎链接：2020 年 11 月杭州电子科技大学线性代数期中考试题及解析 - 知乎 (zhihu.com)

看完点个关注点个三连，诸君高数线代双双满绩！~