杭州电子科技大学学生考试卷（A）卷

考试课程	线性代数	考试日期	2013 年 1 月　日	成 绩	
课程号	A0702020	教师号		任课教师姓名	
考生姓名		学号（8 位）		年级		专业	

题 号	一	二	三	四	五	六
得 分						

注意：所有答案全部书写在试卷上，答案写在其他地方视为无效！本课程考试试卷总共 4 大张，另附两张纸作为草稿纸使用，不得使用其余形式的草稿纸，不得使用计算器等计算工具，否则视为作弊！

得分	

一、填空题（请将答案填写在横线上。本题总共六小题，每题 3 分，总共 18 分）

1、二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_1x_2+x_1x_3$ 的矩阵是 $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$；

2、若向量组 $\alpha_1=[1,1,0]^T$，$\alpha_2=[1,3,-1]^T$，$\alpha_3=[5,3,a]^T$ 线性相关，则 a 的取值为 1；

3、设 A 为 n 阶正交阵，且 $|A|>0$，则 $|A|=$ 1；

4、设 $\alpha_1=[1,0,0]^T$，$\alpha_2=[-1,-1,1]^T$，$\alpha_3=[1,0,-1]^T$，是（是或否）构成向量空间 $\mathbb{R}^3$ 的一组基；

5、设 3 阶方阵 A 的特征值为 1，-1，0，则 $|3A|=$ 0；

6、设 A 为 5 阶方阵，秩 $(A)=4$，A^* 为 A 的伴随矩阵，则齐次线性方程组 $A^*X=0$ 的基础解系含向量的个数为： 4。

得分	

二、选择题（**请将正确答案填写在括号中，在字母前勾选所得结果视为无效。**本题共六小题，每题 3 分，共 18 分）

1、行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \end{vmatrix}$ （ B ）；

（A） $abcdef$　（B） $-abdf$　（C） $abdf$　（D） cdf

2、若 A 是 n 阶对称矩阵，B 是 n 阶反对称矩阵，则有（ A ）；

（A） A^2 是对称矩阵　（B） AB 是反对称矩阵

（C） B^2 是反对称矩阵　（D） $AB-BA$ 是反对称矩阵

3、设 A，B 都是 n 阶方阵，且 A 与 B 相似，则（ B ）；

（A） A 与 B 的特征矩阵相同　（B） A 与 B 的特征方程相同

（C） A 与 B 相似于同一个对角阵　（D）存在正交阵 P，使 $P^{-1}AP=B$

4、下列二阶矩阵可对角化的是（ C ）；

（A） $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$　（B） $\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$　（C） $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$　（D） $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

5、已知 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & t \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$，$B$ 为三阶非零矩阵，且满足 $AB=0$，则（ C ）；

（A） $t=6$ 时 B 的秩为 1　（B） $t=6$ 时 B 的秩为 2

（C） $t\neq 6$ 时 B 的秩为 1　（D） $t\neq 6$ 时 B 的秩为 2

6、设 A 是 5×3 矩阵，则齐次线性方程组 $(AA^T)X=0$ 有（ C ）；

（A）无解　（B）有惟一解

（C）有无穷多解　（D）可能有解，可能无解

得分	

三、试求解下列各题（本题共四小题，每题5分，共20分）

1、求解矩阵方程 $\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$；

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & -1 & 1 & 1 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 0 & 5 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -3 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -7 & -4 & -1\end{array}\right) \quad 3'$$

$$\therefore \quad X=\begin{pmatrix}5 & 3 & 1\\ -3 & -3 & 0\\ -7 & -4 & -1\end{pmatrix} \qquad 2'$$

2、设 A 是 n 阶可逆方阵，将 A 的第 i 列和第 j 列互换后得到的矩阵记为 B。

（1）证明 B 为可逆矩阵；　　（2）求 $B^{-1}A$。

证(1) $\because$ A可逆 $\therefore |A|\neq 0$

$|B|=-|A|\neq 0$

$\therefore$ B可逆　$2'$

(2) $\because B=AE(i,j)$　$2'$

$\therefore B^{-1}A=(AE(i,j))^{-1}A=(E(i,j))^{-1}=E(i,j)$

$1'$

3、已知 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+tx_2^2+tx_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3$ 正定，求 t 的取值范围；

$$A=\begin{pmatrix}2 & 2 & -2\\ 2 & t & 0\\ -2 & 0 & t\end{pmatrix} \qquad 1'$$

$\because$ f正定

$$\therefore \begin{cases}\Delta_1=2>0\\ \Delta_2=\begin{vmatrix}2 & 2\\ 2 & t\end{vmatrix}=2(t-2)>0 & 1'\\ \Delta_3=|A|=t(t-4)>0 & 1'\end{cases}$$

$2'$

$\therefore \quad t>4$

4、设 $\alpha_1=[-2,1,3]^T$，$\alpha_2=[-1,0,1]^T$，$\alpha_3=[-2,-5,-1]^T$，证明 α_1，α_2，α_3 是 R^3 的一组基。并求 $\alpha=[4,12,6]^T$ 在这组基下的坐标。

证：$\because |(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)|=2\neq 0$

$\therefore$ $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是$R^3$的一组基。　$2'$

$$(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \vdots\ \alpha)=\left(\begin{array}{ccc:c}-2 & -1 & -2 & 4\\ 1 & 0 & -5 & 12\\ 3 & 1 & -1 & 6\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 0 & 0 & 7\\ 0 & 1 & 0 & -16\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{array}\right) \qquad 2'$$

$\therefore$ α在$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下坐标为$(7,-16,-1)^T$

$$-\frac{1}{5} \quad \frac{2}{5} \quad -\frac{1}{5} \qquad \frac{3}{5} \quad -\frac{1}{5} \quad \frac{7}{5} \quad 0 \quad 1$$

$\alpha_1 =$

四、试求解下列各题（本题共四小题，每题 6 分，共 24 分）

得分	

1、设 $\alpha_1=[1,1,2,3]^T$，$\alpha_2=[1,-1,1,1]^T$，$\alpha_3=[1,3,3,5]^T$，$\alpha_4=[4,-2,5,6]^T$，$\alpha_5=[3,1,5,7]^T$，求该向量组的秩，并确定一个极大线性无关组，将其余向量用该极大线性无关组线性表出；

$$(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4\ \alpha_5) \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad 1' \quad 1'$$

∴ 该向量组的秩为 2.

选取 α_1, α_2 为一个极大线性无关组. 1'

$\alpha_3 = 2\alpha_1 - \alpha_2$

$\alpha_4 = \alpha_1 + 3\alpha_2$

$\alpha_5 = 2\alpha_1 + \alpha_2$ 1'

$\alpha_2 = 2\alpha_1 - \alpha_3$

1' $\alpha_1 = \frac{1}{2}\alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_3$

1' $\begin{cases} \alpha_4 = \frac{7}{2}\alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_3 = 7\alpha_1 - 3\alpha_3 \\ \alpha_5 = 2\alpha_2 + \alpha_3 \end{cases}$ $\alpha_5 = 4\alpha_1 - 2\alpha_3$

2、已知 $\xi=[2,2,-2]^T$ 是矩阵 $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{bmatrix}$ 的一个特征向量，确定参数 a、b 及特征向量 ξ 所对应的特征值；

∵ $A\xi = \lambda\xi$ 1'

∴ $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} -2 = 2\lambda \\ 2a+4 = 2\lambda \\ 2b+2 = -2\lambda \end{cases}$ 2'

∴ $\begin{cases} a = -3 & 1' \\ b = 0 & 1' \\ \lambda = -1 & 1' \end{cases}$

3、已知矩阵 $A=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & x & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 与 $B=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ 相似，求 x 与 y 的值；

∵ A, B 相似. $|\lambda E - A| = |\lambda E - B|$ 2'

∴ $trA = trB$

$\begin{vmatrix} \lambda+2 & 0 & 0 \\ -2 & \lambda-x & -2 \\ -3 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda+2)[(\lambda-x)(\lambda-1)-2]$

∴ $\begin{cases} x = y+2 & 1' \\ x+y = -2 & 1' \end{cases}$

∴ $\begin{cases} x = 0 & 1' \\ y = -2 & 1' \end{cases}$

4、已知 α_1、α_2、α_3 是齐次线性方程组 $AX=0$ 的一个基础解系，若 $\beta_1=\alpha_1-\alpha_2$，$\beta_2=\alpha_2-\alpha_3$，$\beta_3=\alpha_3-t\alpha_1$，讨论 t 满足什么条件时，β_1、β_2、β_3 也是 $AX=0$ 的基础解系。

令 $k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + k_3\beta_3 = 0$ 1'

即 $k_1(\alpha_1-\alpha_2) + k_2(\alpha_2-\alpha_3) + k_3(\alpha_3 - t\alpha_1) = 0$

$(k_1 - tk_3)\alpha_1 + (k_2 - k_1)\alpha_2 + (k_3 - k_2)\alpha_3 = 0$ 1'

∵ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 $AX=0$ 的一个基础解系.

∴ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关 1'

∴ $\begin{cases} k_1 - tk_3 = 0 \\ k_2 - k_1 = 0 \\ k_3 - k_2 = 0 \end{cases}$ 1'

∵ $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 是 $AX=0$ 的基础解系.

∴ $k_1 = k_2 = k_3 = 0$

∴ $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -t \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$ 1' 即 $t \neq 1$ 1'

得分	

五、（10 分）设三阶实对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=6$，$\lambda_2=\lambda_3=3$，与特征值 $\lambda_1=6$ 对应的特征向量为 $\xi_1=[1,1,1]^T$，求

（1）与特征值 $\lambda_2=\lambda_3=3$ 对应的特征向量；

（2）求矩阵 A。

(1) 设与特征值 $\lambda_2=3$ 对应的特征向量为 $\xi=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

则 $\xi\perp\xi_1$ 1'

$\therefore x_1+x_2+x_3=0$

得基础解系 $\xi_2=(1,-1,0)^T$ 2'

$\xi_3=(1,0,-1)^T$

$\therefore$ 与特征值 λ_2 对应的特征向量为 $k_2\xi_2+k_3\xi_3$ 1'

(k_2,k_3 不全为0)

(2) 令 $P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$ 1' P可逆 且存

$P^{-1}AP=\mathrm{diag}(6,3,3)$ 1' 其中 $P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}$ 2'

$\therefore A=P\,\mathrm{diag}(6,3,3)P^{-1}$

$=\begin{pmatrix}4&1&1\\1&4&1\\1&1&4\end{pmatrix}$ 2'

得分	

六、（10 分）用正交线性替换化实二次型

$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_2^2-2x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3+8x_2x_3$

为标准形，并写出正交线性替换。

$A=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&-2&4\\2&4&-2\end{pmatrix}$ 2'

$|\lambda E-A|=(\lambda+7)(\lambda-2)^2$ $\therefore A$的特征值 $\lambda_1=-7$ $\lambda_2=2$ 二重. 1'

$\lambda_1=-7$ 代入 $(\lambda_1E-A)X=0$ 得基础解系 $\xi_1=(1,2,-2)^T$ 1'

$\lambda_2=2$ 代入 $(\lambda_2E-A)X=0$ - - - - - $\xi_2=(-2,1,0)^T$

$\xi_3=(2,0,1)^T$

正交化 $\xi_2'=\xi_2$ 2'

$\xi_3'=\xi_3-\frac{(\xi_3,\xi_2')}{(\xi_2',\xi_2')}\xi_2'=\frac{1}{5}(2,4,5)^T$

单位化 $\eta_2=\frac{1}{\sqrt5}(-2,1,0)^T$

$\eta_3=\frac{1}{3\sqrt5}(2,4,5)^T$ 2'

$\eta_1=\frac{1}{3}(1,2,-2)^T$

令 $U=\begin{pmatrix}\frac13&-\frac{2}{\sqrt5}&\frac{2}{3\sqrt5}\\\frac23&\frac{1}{\sqrt5}&\frac{4}{3\sqrt5}\\-\frac23&0&\frac{5}{3\sqrt5}\end{pmatrix}$ 1'

作正交线性替换 $X=UY$，化二次型为标准形 $-7y_1^2+2y_2^2+2y_3^2$