杭州电子科技大学学生考试卷（ A ）卷

考试课程	高等数学甲 2（A 层次）	考试日期	2012 年 6 月 日	成 绩	
课程号	A0702173	教师号		任课教师姓名	
考生姓名		学号（8 位）		年级		专业	

题 号	一	二	三					四	五	六
得 分										

一、 填空题（本题共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分）

得分	

1. 设 $z=e^{\sin(xy^2)}$，则 $dz=$ $e^{\sin xy^2}\cos xy^2(y^2dx+2xydy)$

2. 曲线 $\begin{cases}x=y^2\\ z=x^2\end{cases}$ 上点 $(1,1,1)$ 处的法平面方程为 $2x+y+4z-7=0$；

3. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n}(x+1)^n$ 的收敛半径 $R=$ $\frac{1}{2}$；

4. 设 $D=\{(x,y)\,|\,|x|\le\pi,|y|\le1\}$，则 $\iint\limits_D(x-\sin y)dxdy=$ 0；

5. 交换积分次序 $\int dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx=$ $\int_{-1}^{1}dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy$

6. 设 $f(x)$ 有连续导数，L 是任意简单闭曲线，且 $\oint_L e^{2y}(xdx+f(x)dy)=0$，则 $f(x)$ 的表达式为 x^2+C．

二、 选择题（本题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分）

得分	

1. 设 L 是从 $A(1,0)$ 到 $B(-1,2)$ 的直线段，则曲线积分 $\int_L(x+y)ds$ 的结果是（ C ）

(A) $\sqrt{2}$；　(B) 0；　(C) $2\sqrt{2}$；　(D) 2

2. 区域 D 为 $0\le x\le1,-1\le y\le0$，则积分 $\iint\limits_D xe^{xy}dxdy$ 的值为(C).

(A) 1；　(B) $-\frac{1}{e}$；　(C) $\frac{1}{e}$；　(D) e

3. 函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F(xy,z)=x$ 所确定，其中 $F(u,v)$ 具有连续的一阶偏导数，则 z_x+z_y 等于（ C ）

(A) 0；　(B) $\dfrac{1-yF_x-xF_y}{F_2}$；　(C) $\dfrac{1-yF_1-xF_1}{F_2}$；　(D) 1.

4. 设 L 是从 $A(1,\frac{1}{2})$ 沿曲线 $2y=x^2$ 到 $B(2,2)$ 的弧段，则 $\int_L\frac{2x}{y}dx-\frac{x^2}{y^2}dy=$（ D ）

(A) -3；　(B) $\frac{3}{2}$；　(C) 3；　(D) 0.

5. 若 a 为常数，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\sin na}{n^2}-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ 的敛散性为（ C ）

(A) 绝对收敛；　(B) 条件收敛；　(C) 发散；　(D) 收敛性取决于 a 值.

6. 函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处具有两个一阶偏导数是它在该点处连续的（ D ）

(A) 充分条件；(B) 必要条件；(C) 充分必要条件；(D) 既非充分又非必要条件.

7. 设 Σ 为柱面 $x^2+y^2=1$ 介于平面 $z=0$ 和 $z=1$ 之间部分的外侧，则 $\iint\limits_\Sigma y^2dydz=$（ A ）

(A) 0；　(B) $\frac{2}{3}$；　(C) $-\frac{4}{3}$；　(D) $-\frac{2}{3}$.

8. 设曲面 Σ 是上半球面 $x^2+y^2+z^2=R^2\ (z\ge0)$，曲面 Σ_1 是曲面 Σ 在第一卦限中部分，则下列关系成立的是（ C ）

(A) $\iint\limits_\Sigma xdS=4\iint\limits_{\Sigma_1}xdS$；　(B) $\iint\limits_\Sigma ydS=4\iint\limits_{\Sigma_1}xdS$；

(C) $\iint\limits_\Sigma zdS=4\iint\limits_{\Sigma_1}xdS$；　(D) $\iint\limits_\Sigma xyzdS=4\iint\limits_{\Sigma_1}xyzdS$.

三、试解下列各题（本题共 6 小题，每小题 6 分，共 36 分）

得分	

1. 设 $z=\cos\frac{x}{2}+e^{x+2y^2}$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2} + e^{x+2y^2}$ 3'

$\frac{\partial z}{\partial y} = 4y e^{x+2y^2}$ 3'

得分	

2. 计算曲线积分 $I=\int_\Gamma ydx+zdy+xdz$，其中 Γ 为曲线 $x=a\cos t$，$y=a\sin t$，$z=bt$ 上从 $t=0$ 到 $t=2\pi$ 的一段.

$I=\int_\Gamma ydx+zdy+xdz$

$=\int_0^{2\pi}[a\sin t(-a\sin t)+bt\,a\cos t+a\cos t\,b]dt$ 3'

$=-a^2\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,dt+ab\int_0^{2\pi}t\,d\sin t+ab\int_0^{2\pi}\cos t\,dt$

$=-\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos 2t)dt+ab\left[t\sin t\Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\sin t\,dt\right]+ab\sin t\Big|_0^{2\pi}$

$=-\frac{a^2}{2}\left[t-\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{2\pi}$

$=-\pi a^2$ 3'

得分	

3. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{\pi}{n}$ 是绝对收敛还是条件收敛？并说明理由.

$a_n=\sin\frac{\pi}{n}$ 满足 $\sin\frac{\pi}{n+1}<\sin\frac{\pi}{n}$

$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{n}=0$ 3'

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{\pi}{n}$ 收敛

又 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\sin\frac{\pi}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{n}$

$\sin x\sim x \Rightarrow \sin\frac{\pi}{n}\sim\frac{\pi}{n}$ 而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{n}$ 发散.

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{n}$ 发散 2'

故 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{\pi}{n}$ 条件收敛 1'

得分	

4. 求 $I=\iint_D(x^2+y^2-x)dxdy$，其中 D 由直线 $y=2$，$y=x$ 和 $y=2x$ 所围成的闭区域.

D_Y: $0\le y\le 2$. $\frac{y}{2}\le x\le y$

$I=\iint(x^2+y^2-x)dxdy$

$=\int_0^2 dy\int_{\frac{y}{2}}^{y}(x^2+y^2-x)dx$ 4'

$=\int_0^2\left(\frac{19}{24}y^3-\frac{3}{8}y^2\right)dy$

$=\frac{13}{6}$ 2'

得分	

5. 计算二重积分 $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$，其中 D 为闭区域 $x^2+y^2\le 2ax,(a>0)$.

$D:\ -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}.\quad 0\le\rho\le 2a\cos\theta$

$\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy=\iint\limits_D \rho^3 d\rho d\theta$

$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{2a\cos\theta}\rho^3 d\rho$ 4

$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4a^4\cos^4\theta\, d\theta$

$=8a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\, d\theta$ 2'

$=\frac{3}{2}\pi a^4$

得分	

6. 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^{2n}}{n4^n}$ 的收敛域和它的和函数.

$u_n(x)=\frac{(x-2)^{2n}}{n4^n}\ge 0$

$K(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}=\frac{(x-2)^2}{4}$ 1'

(1) 当 $\frac{(x-2)^2}{4}<1$ 即 $0<x<4$ 级数绝对收敛

(2) 当 $\frac{(x-2)^2}{4}>1$ 即 $x<0$ 或 $x>4$ 级数发散 2'

(3) 当 $\frac{(x-2)^2}{4}=1$ $x=0$ $x=4$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^{2n}}{n4^n}\Big|_{x=0}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^{2n}}{n4^n}\Big|_{x=4}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散

收敛域 $C=(0,4)$ 1'

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^{2n}}{n4^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\left(\frac{x-2}{2}\right)^2\right)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}\Big|_{t=\frac{(x-2)^2}{4}}$

$S_0(t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}=\int_0^t\sum\limits_{n=1}^{\infty}t^{n-1}dt=\int_0^t\frac{1}{1-t}dt=-\ln(1-t)$ 2'

$S(x)=S_0(t)\Big|_{t=\frac{(x-2)^2}{4}}=2\ln 2-\ln(4x-x^2)$

四、应用题 [本题共两小题，每题 5 分，共 10 分]

得分	

1. 求曲线 $x=\cos t$，$y=\sin t$，$z=\tan\frac{t}{2}$ 在 $(0,1,1)$ 处的切线和法平面方程.

$T(t)=(x_t,y_t,z_t)=(-\sin t,\cos t,\frac{1}{2}\sec^2\frac{t}{2})$ 1'

$(0,1,1)$ 对应 $t=\frac{\pi}{2}$ 1'

$T(t)\Big|_{(0,1,1)}=(-1,0,1)$ 1'

切线：$\frac{x-0}{-1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-1}{1}$ 1'

法平面 $-(x-0)+0(y-1)+(z-1)=0$

即 $z-x=\phi$ 1'

得分	

2. Ω 是由 $z=0$，$z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$，$x^2+y^2-y=0$ 所围的空间区域，求 Ω 的体积.

Ω 用柱面坐标可表示为

$0\le\theta\le\pi$，$0\le\rho\le\sin\theta$，$0\le z\le\sqrt{3}\rho$ 2'

$V_体=\iiint\limits_\Omega dV=\iiint\limits_\Omega \rho\, d\rho d\theta dz$ 1'

$=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{\sin\theta}\rho\, d\rho\int_0^{\sqrt{3}\rho}dz$ 1'

$=\sqrt{3}\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{\sin\theta}\rho^2 d\rho$

$=\frac{\sqrt{3}}{3}\int_0^{\pi}\sin^3\theta\, d\theta$

$=\frac{\sqrt{3}}{3}\int_0^{\pi}(\cos^2\theta-1)\,d\cos\theta$ 1'

$=\frac{4\sqrt{3}}{9}$

得分	

五、综合题[本题 7 分]

计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)dS$，其中 Σ 为为曲面 $x^2+y^2=2z$ 介于平面 $z=0$ 和 $z=2$ 之间的部分的上侧，$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为 Σ 在点 (x,y,z) 处的法向量的方向余弦.

补面 $\Sigma_1 = \ z=2 \ (x^2+y^2\le 4)$ 取上侧.

记 Σ 和 Σ_1 围成之间区域为 Ω，则 Σ_1 和 Σ^- 为 Ω 外侧表面. 利用 Gauss 1'

$$\oiint\limits_{\Sigma_1+\Sigma^-} (x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)dS$$

$$=\oiint\limits_{\Sigma_1+\Sigma^-} x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy = 2\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)dV$$ 3'

而 $2\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)dV = 2\iiint\limits_{\Omega}x\,dV+2\iiint\limits_{\Omega}y\,dV+2\iiint\limits_{\Omega}z\,dV$ 1'

$$=2\int_0^2 z\,dz\iint\limits_{x^2+y^2\le 2z}dxdy = 2\int_0^2 \pi\cdot 2z^2dz = \frac{32}{3}\pi$$ 1'

$$\iint\limits_{\Sigma_1} x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy = \iint\limits_{x^2+y^2\le 4}2^2dxdy = 16\pi$$ 1'

$$\iint\limits_{\Sigma^-} x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy = \frac{32}{3}\pi-16\pi = -\frac{16}{3}\pi$$

故 $I=\iint\limits_{\Sigma} x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy = \frac{16}{3}\pi$ 1'

得分	

六、证明题[本题 5 分]

证明：设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，证明：

$$\int_0^1 f(x)dx\int_x^1 f(y)dy = \frac{1}{2}\left[\int_0^1 f(u)du\right]^2.$$

记 $D_1=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,\ x\le y\le 1\}$

$D_2=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x\}$

D_1 和 D_2 关于直线 $y=x$ 对称 $g(x,y)=f(x)\cdot f(y)=g(y,x)$

$$\iint\limits_{D_1\cup D_2} g(x,y)d\sigma = \iint\limits_{D_1\cup D_2} g(y,x)d\sigma \Rightarrow$$ 1'

$$\iint\limits_{D_1} f(x)f(y)d\sigma = \iint\limits_{D_2} f(x)f(y)d\sigma$$ 1'

$$\int_0^1 f(x)dx\int_x^1 f(y)dy = \iint\limits_{D_1} f(x)f(y)d\sigma$$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_{D_1\cup D_2} f(x)f(y)d\sigma$$ 1'

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx\int_0^1 f(y)dy$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int_0^1 f(u)du\right)^2$$ 1'