第二章 线性电路分析方法

2.1 电路约束与方程

2.2 支路电流法

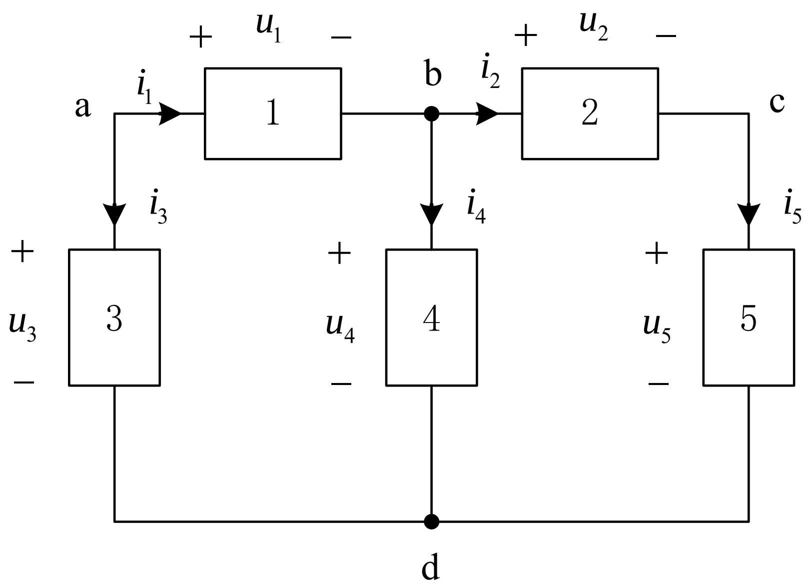
2.3 节点电压法

2.4 线性电路的性质

2.5 戴维南定理和诺顿定理

2.6 最大功率传输定理

2.1 电路约束与方程



包含5条支路、4个节点、3个回路和2个网孔。若以每条支路的电压和电流为变量来列写方程，需要10个独立的方程

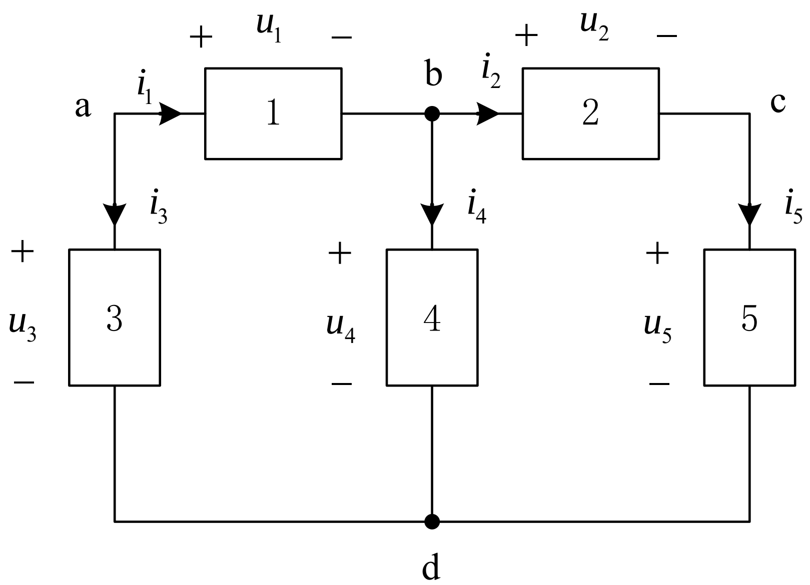
根据1.5节的分析结果：3个独立的KCL，2个独立的KVL

一般情况下，对于含有*b*条支路、*n*个节点的平面电路，具有以下结论：

（1）完备且独立的KCL方程数为*n*-1个（独立节点数）；

（2）完备且独立的KVL方程数为*b*-（*n*-1）个（等于网孔数）。

2.1 电路约束与方程



2b法：
再加上*b*条支路的*b*个独立的VAR方程，总共可以列写2*b*个独立且完备的方程

一般情况下，对于含有*b*条支路、*n*个节点的平面电路，具有以下结论：
（1）完备且独立的KCL方程数为*n*-1个（独立节点数）；
（2）完备且独立的KVL方程数为*b*-（*n*-1）个（等于网孔数）。

2.2 支路电流法

支路电流法是以支路电流为变量，依据基尔霍夫定律（KCL、KVL）和元件的伏安关系（VAR）来列写方程并求解的方法。

支路电流法的一般步骤为：

（1）标注*b*条支路的支路电流，并确定其参考方向；

（2）列写*n*-1个独立节点的KCL方程；

（3）利用VAR，列写以支路电流为变量的*b*-（*n*-1）个网孔的KVL方程；

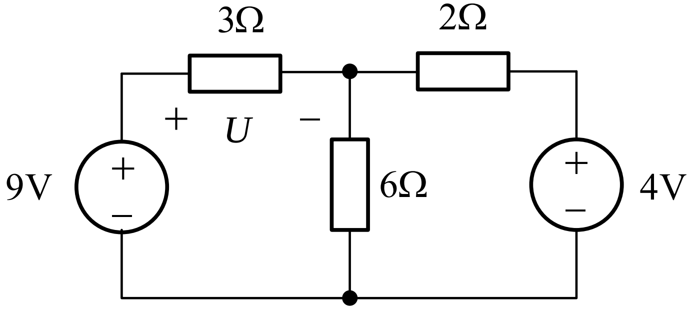
（4）若电路中含有受控源，且受控源不是支路电流，需要根据受控源的控制变量增加附加方程；

（5）根据方程组求解所有支路电流；

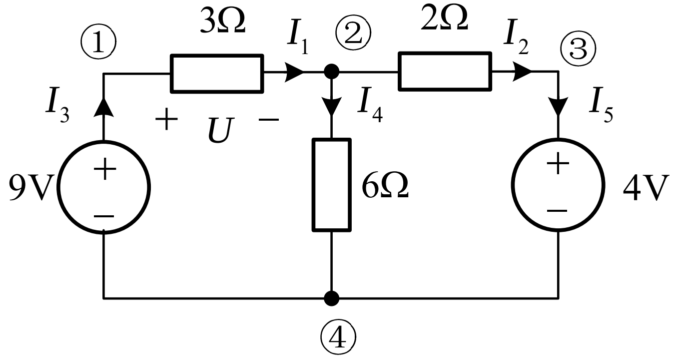
（6）根据支路电流求得其它待求量。

2.2 支路电流法

例2.2-1 求如图2.2-1（a）所示电路中的各支路电流和电压U。



(a)



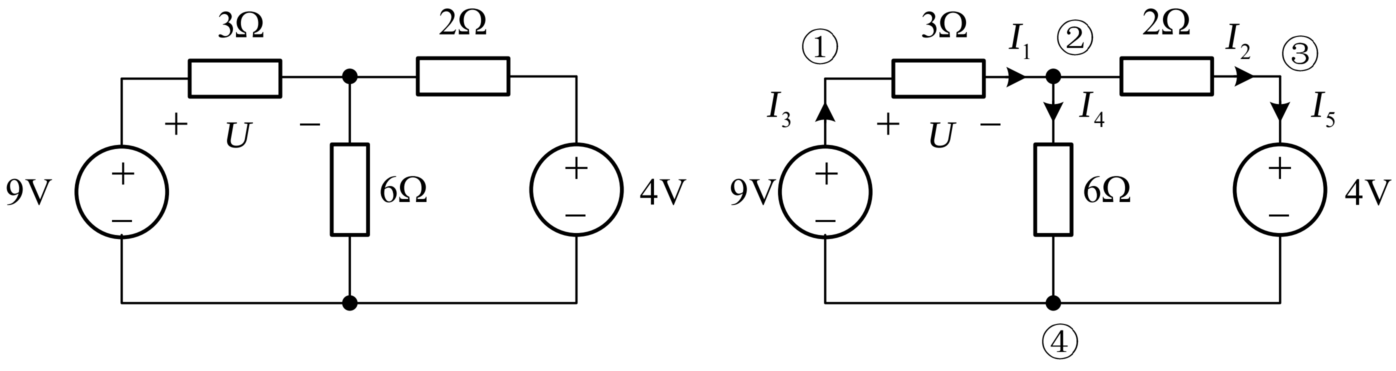
(b)

解 标注各支路电流和节点如图2.2-1（b）所示。该电路包含4节点，任意选取其中的3个节点作为独立节点（例如①、②和③），并列写KCL方程为

$$\begin{cases} I_1 - I_3 = 0 \\ -I_1 + I_2 + I_4 = 0 \\ -I_2 + I_5 = 0 \end{cases}$$

2.2 支路电流法

例2.2-1 求如图2.2-1（a）所示电路中的电压各支路电流和电压U。



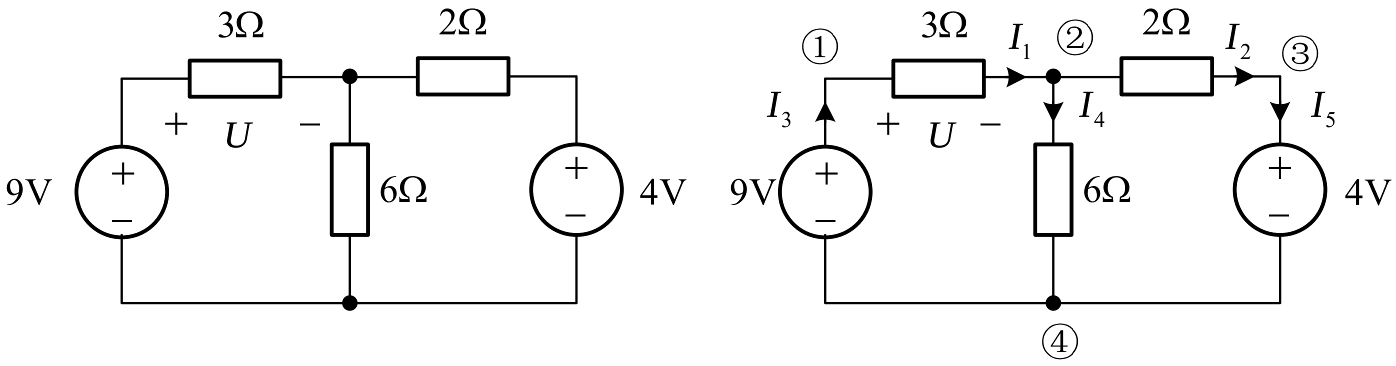
(a)　　　　(b)

解该电路包含2个网孔，因此有两个独立的KVL。根据VAR，利用支路电流来表示支路电压，例如3Ω电阻上的电压 $U=3I_1$ 列写以支路电流为变量的网孔KVL方程为

$$\begin{cases} 3I_1+6I_4-9=0 \\ -6I_4+2I_2+4=0 \end{cases}$$

2.2 支路电流法

例2.2-1 求如图2.2-1（a）所示电路中的各支路电流和电压*U*。



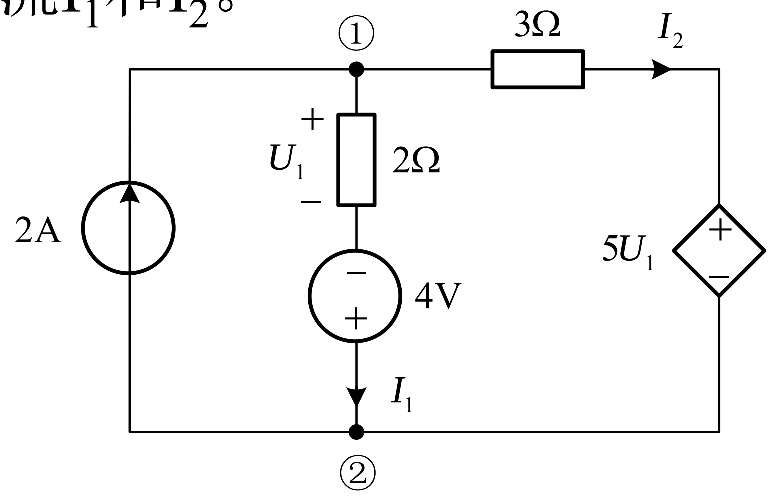
（a） （b）

解得 $I_1 = \dfrac{4}{3}\text{A}$ $I_2 = \dfrac{1}{2}\text{A}$ $I_3 = \dfrac{4}{3}\text{A}$ $I_4 = \dfrac{5}{6}\text{A}$ $I_5 = \dfrac{1}{2}\text{A}$

$$U = 3I_1 = 4\text{V}$$

2.2 支路电流法

例2.2-2 求图2.2-2所示电路的各支路电流I_1和I_2。



解 列写节点①的KCL方程为

$$I_1 + I_2 - 2 = 0$$

对右侧的网孔列写KVL为

$$3I_2 + 5U_1 + 4 - 2I_1 = 0$$

根据受控源的控制变量 U_1 增加附加方程为

$$U_1 = 2I_1$$

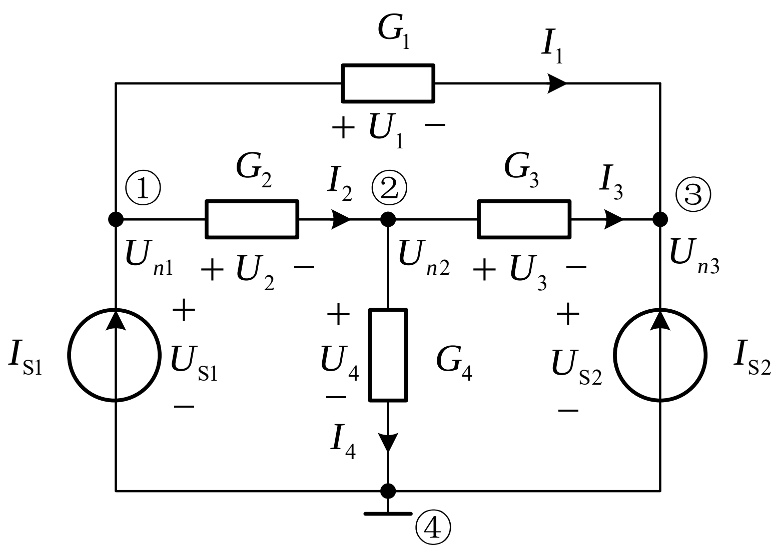
解得 $I_1 = -2\text{A} \quad I_2 = 4\text{A}$

2.2 支路电流法

与支路电流法类似的方法还有支路电压法，是以支路电压为变量，依据基尔霍夫定律（KCL、KVL）和元件的伏安关系（VAR）来列写方程并求解的方法，与支路电流法类似，这里不再赘述。

2.3 节点电压法

选取电路中的一个节点作为参考节点（电位为零，用符号“⊥”表示），其他节点与参考节点之间的电压降称为该节点的节点电压，可见，除去参考节点后，其余的节点是独立的节点。以节点电压为变量列写KCL方程并求解的方法称为节点电压法。



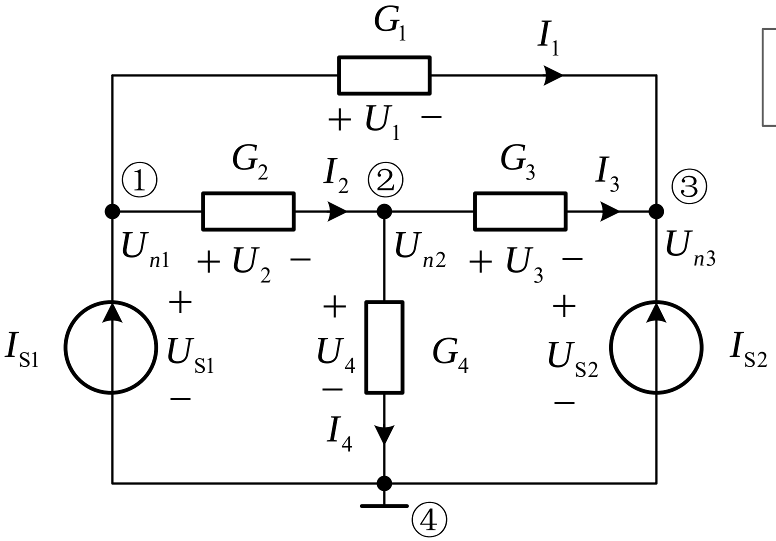
各支路的支路电压均可用节点电压来表示

$$U_1 = U_{n1} - U_{n3}$$

各支路的支路电流也可以用节点电压来表示

$$I_1 = G_1\left(U_{n1} - U_{n3}\right)$$

2.3 节点电压法

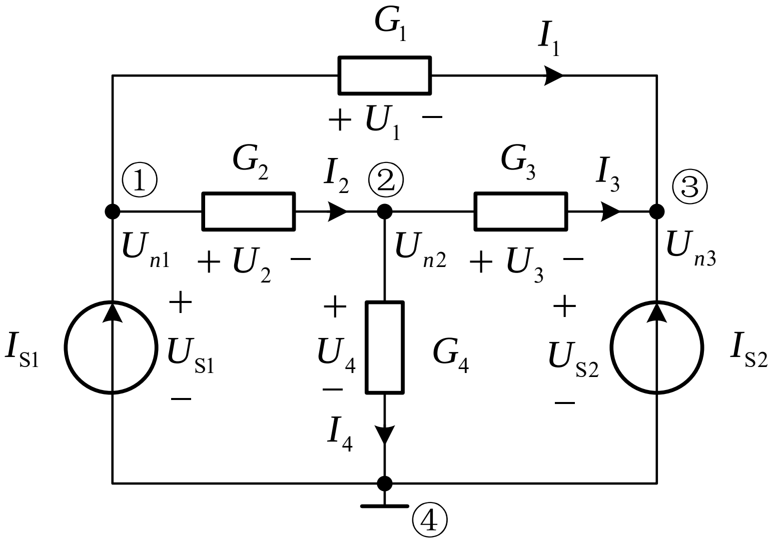


基于节点电压的KVL是恒成立的，例如

$$\left(U_{n1}-U_{n3}\right)+\left(U_{n3}-U_{n2}\right)+\left(U_{n2}-U_{n1}\right)\equiv 0$$

节点电压法列方程的依据 $\begin{cases} \text{KCL} \\ \text{VAR} \end{cases}$

2.3 节点电压法



用节点电压来表示支路电流

KCL

节点①：$I_1 + I_2 - I_{S1} = 0$

节点②：$-I_2 + I_3 + I_4 = 0$

节点③：$-I_1 - I_3 - I_{S2} = 0$

节点①：

$$\left(G_1 + G_2\right)U_{n1} - G_2 U_{n2} - G_1 U_{n3} = I_{S1}$$

节点②：

$$-G_2 U_{n1} + \left(G_2 + G_3 + G_4\right)U_{n2} - G_3 U_{n3} = 0$$

节点③：

$$-G_1 U_{n1} - G_3 U_{n2} + \left(G_1 + G_3\right)U_{n3} = I_{S2}$$

2.3 节点电压法

节点电压标准方程

$$\begin{cases} G_{11}U_{n1}+G_{12}U_{n2}+\cdots+G_{1n}U_{nn}=I_{\mathrm{SS}1} \\ G_{21}U_{n1}+G_{22}U_{n2}+\cdots+G_{2n}U_{nn}=I_{\mathrm{SS}2} \\ \vdots \\ G_{n1}U_{n1}+G_{n2}U_{n2}+\cdots+G_{nn}U_{nn}=I_{\mathrm{SS}n} \end{cases}$$

U_{ni} 为各独立节点的节点电压；

G_{ii} 为节点i的自电导，其值是与该节点直接相连的电导之和；

$G_{ij}\left(i\neq j\right)$ 为节点i和节点j之间的互电导，其值为节点i和节点j之间公有电导之和的负值；

$I_{\mathrm{SS}i}$为流入节点i的电流源电流的代数和

2.3 节点电压法

节点电压法分析电路的步骤如下：

（1）标出参考节点和其他各节点，并设定节点电压；

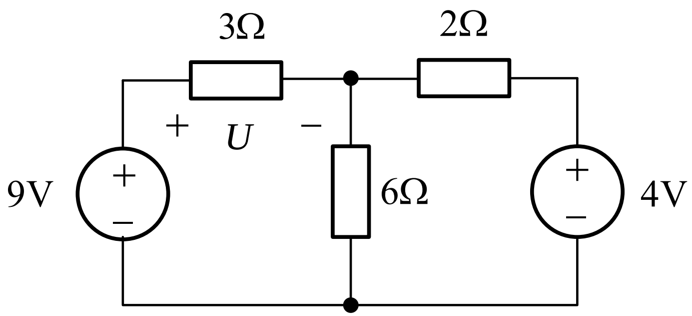
（2）计算自电导和互电导并列写节点电压方程；

（3）求解方程组得到各个节点电压；

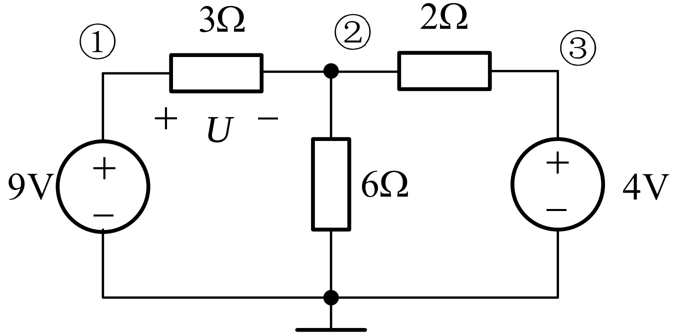
（4）利用节点电压求解其它待求量。

2.3 节点电压法

例2.3-1 利用节点电压法计算图2.3-2（a）所示电路中的电压*U*



(a)



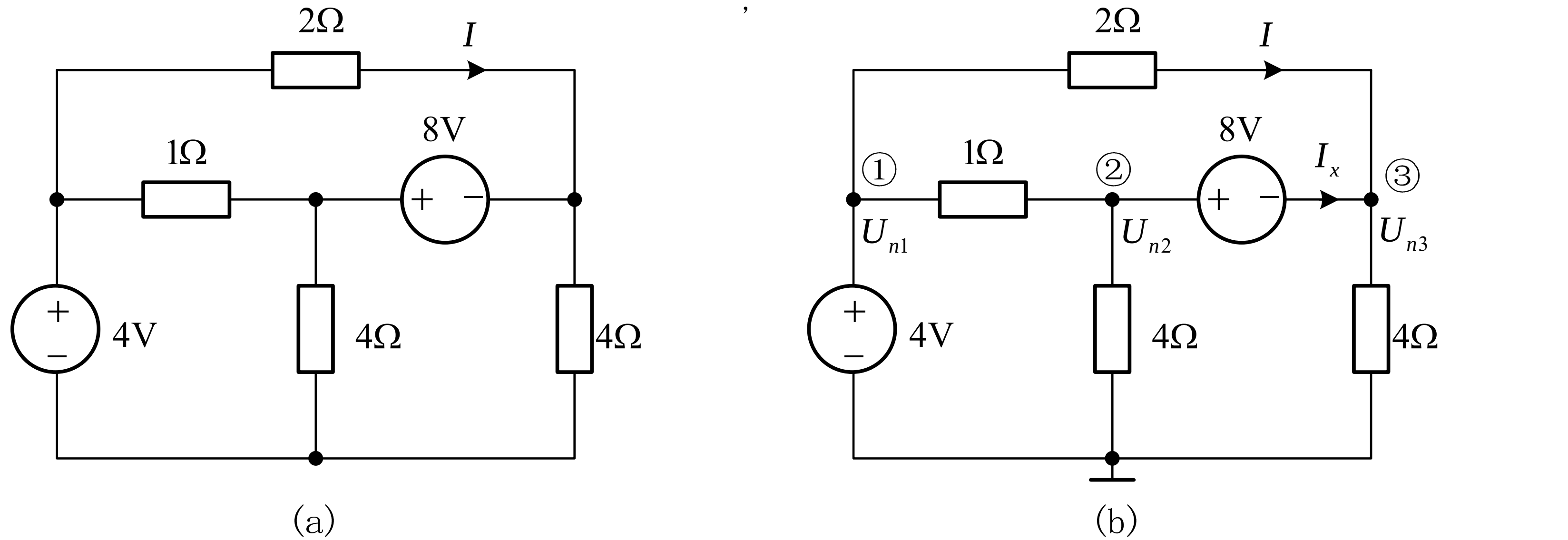
(b)

解：节点②： $-\frac{1}{3}U_{n1}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)U_{n2}-\frac{1}{2}U_{n3}=0$

解得 $U_{n2}=5\text{V}$

$$U=U_{n1}-U_{n2}=9-5=4\text{V}$$

例2.3-2 利用节点电压法计算图2.3-3（a）所示电路中的电流I



解 增加辅助变量I_x

$$\begin{cases} U_{n1} = 4\text{V} \\ -\dfrac{1}{1}U_{n1} + \left(\dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{4}\right)U_{n2} = -I_x \\ -\dfrac{1}{2}U_{n1} + \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4}\right)U_{n3} = I_x \end{cases}$$

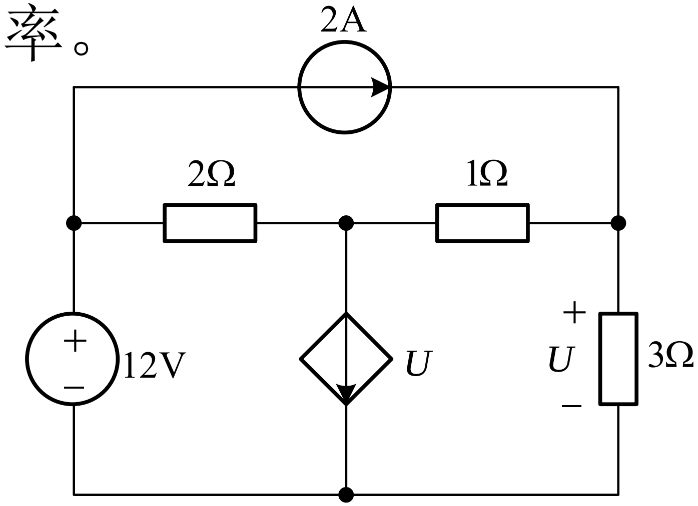
附加方程为 $U_{n2} - U_{n3} = 8\text{V}$

解得 $U_{n1} = 4\text{V}$ $U_{n2} = 6\text{V}$

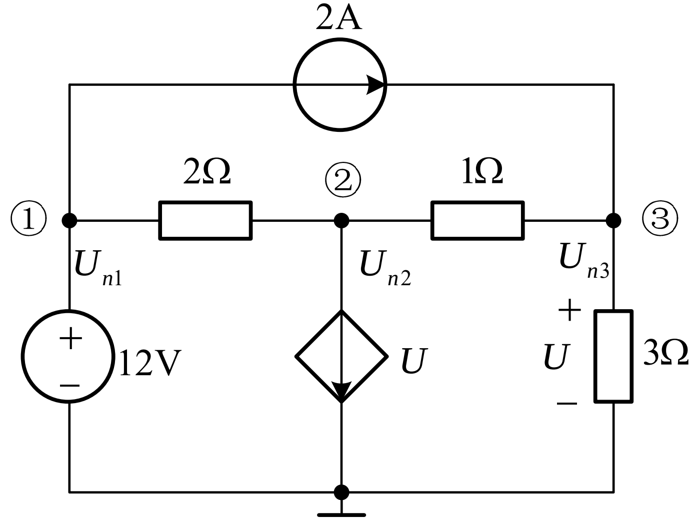
$$U_{n3} = -2\text{V}$$

$$I = \left(U_{n1} - U_{n3}\right)/2 = \left(4 - (-2)\right)/2 = 3\text{A}$$

例2.3-3 利用节点电压法计算如图2.3-4（a）所示电路的电压U和受控源的功率。



(a)



(b)

解

$$
\begin{cases}
U_{n1} = 12\text{V} \\
-\dfrac{1}{2}U_{n1} + \left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{1}\right)U_{n2} - \dfrac{1}{1}U_{n3} = -U \\
-\dfrac{1}{1}U_{n2} + \left(\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{3}\right)U_{n3} = 2\text{A}
\end{cases}
$$

根据受控源的控制量与节点电压之间的关系增加附加方程为

$$U = U_{n3} - 0$$

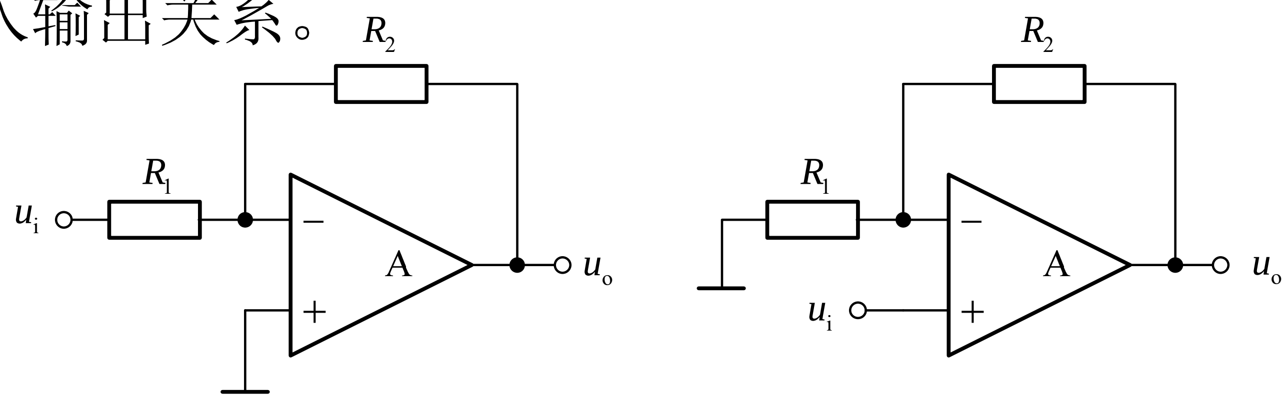
解得 $U_{n1} = 12\text{V} \quad U_{n2} = 4\text{V}$

$$U = U_{n3} = 4.5\text{V}$$

$$P_{\text{受控源}} = \left(U_{n2} - 0\right)U = 18\text{W}$$

2.3 节点电压法

例2.3-4 图2.3-5（a）所示为反相放大器，图2.3-5（b）所示为同相放大器和，求输入输出关系。



(a) 反相放大器　　(a) 同相放大器

解 （a）由运算放大器的特性可知：$i_+ = i_- = 0$

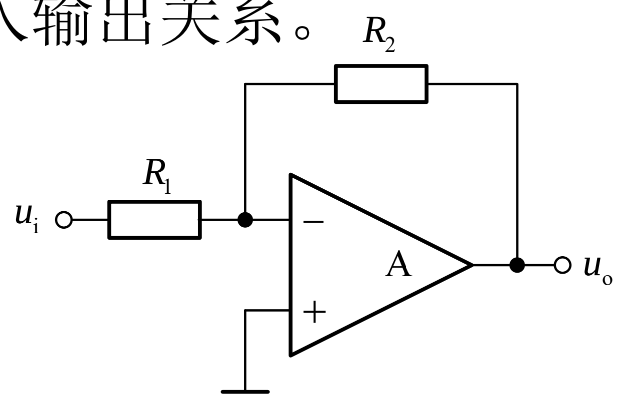
$$\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)u_- - \frac{1}{R_1}u_i - \frac{1}{R_2}u_o = 0$$

由于 $u_+ = u_-$ ，而 $u_+ = 0$，可得

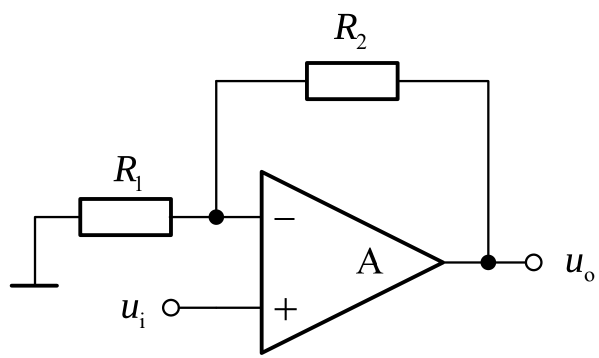
$$u_o = -\frac{R_2}{R_1}u_i$$

放大、反相

例2.3-4 图2.3-5（a）所示为反相放大器，图2.3-5（b）所示为同相放大器和，求输入输出关系。



(a) 反相放大器



(b) 同相放大器

解 （b）由运算放大器的特性可知：$i_+ = i_- = 0$

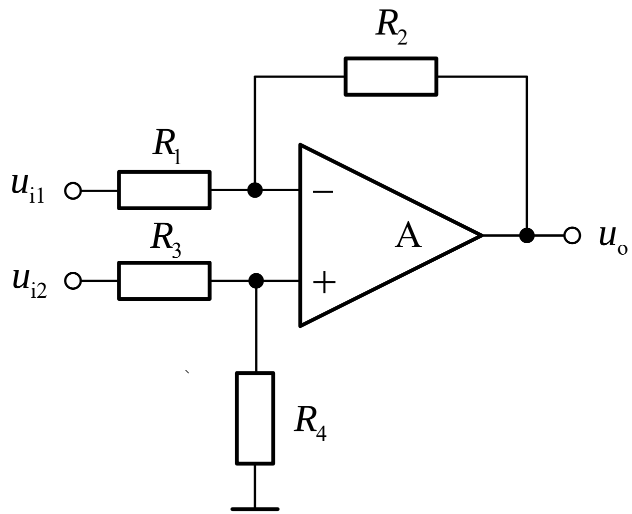
$$\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)u_- - \frac{1}{R_2}u_o = 0$$

由于 $u_+ = u_-$ ，可得

$$u_o = \left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)u_i$$

放大、同相

例2.3-5 求差电路如图2.3-6所示，求其输入输出关系。



解 （a）由运算放大器的特性可知：

$$i_+ = i_- = 0$$

$$\begin{cases} \left(\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}\right)u_- - \dfrac{1}{R_1}u_{i1} - \dfrac{1}{R_2}u_o = 0 \\ \left(\dfrac{1}{R_3}+\dfrac{1}{R_4}\right)u_+ - \dfrac{1}{R_3}u_{i2} = 0 \end{cases}$$

由于 $u_+ = u_-$ ，可得

$$u_o = \frac{R_1+R_2}{R_1}\frac{R_4}{R_3+R_4}u_{i2} - \frac{R_2}{R_1}u_{i1}$$

若满足 $\dfrac{R_2}{R_1}=\dfrac{R_4}{R_3}=k$

则输入输出关系式为

$$u_o = k\left(u_{i2}-u_{i1}\right)$$

2.4 线性电路的性质

线性电路:

由线性电阻、线性受控源和独立源等线性元件组成的电路

线性性质 $\begin{cases} \text{比例性} \\ \text{叠加性} \end{cases}$

比例性也称齐次性，是指当线性电路仅含一个独立源时，电路中的电压（或电流）与独立源呈比例关系。

叠加性，一般用叠加原理来表述。叠加原理：在线性电路中，多个独立源共同作用下的电压（或电流）等于各个独立源单独作用下电压（或电流）的代数和。

2.4 线性电路的性质

叠加原理分析电路的一般步骤为

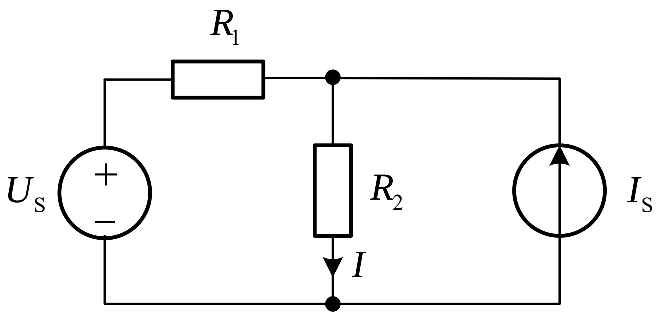
（1）取其中一个独立源单独作用，将其他独立源置零（电压源置零用短路线代替，电流源置零用开路代替），画出该独立源单独作用下的电路图，并求解出该独立源单独作用下的电压（或电流）；

（2）对其余独立源重复步骤（1）；

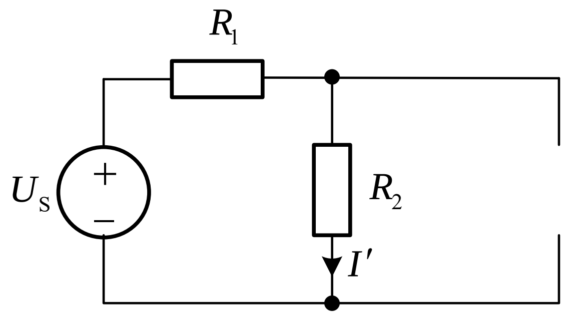
（3）将各个独立源单独作用下的电压（或电流）进行代数求和，得到总的电压（或电流）。

2.4 线性电路的性质

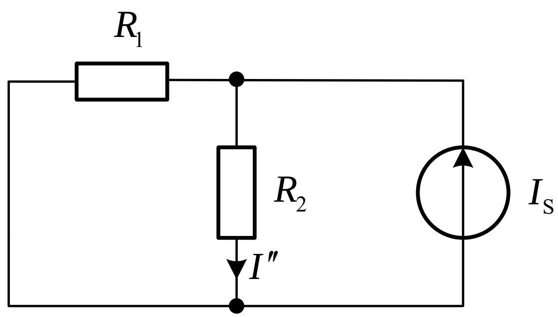
例2.4-1 利用叠加原理计算图2.4-1（a）所示电路中的电流 I。



(a)



(b)



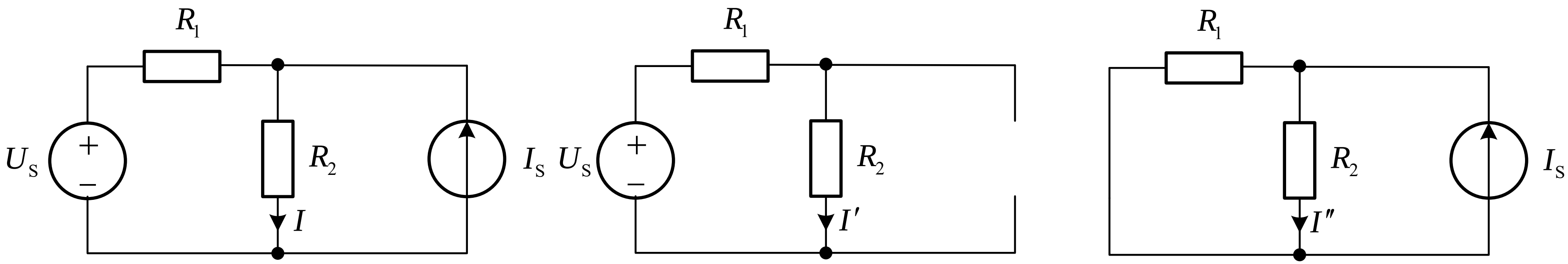
(c)

解 计算得到电压源U_S单独作用下的响应 $I' = \dfrac{1}{R_1 + R_2} U_S$

计算得到电流源I_S单独作用下的响应 $I'' = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2} I_S$

利用叠加原理可得 $I = I' + I'' = \dfrac{1}{R_1 + R_2} U_S + \dfrac{R_1}{R_1 + R_2} I_S$

例2.4-1 利用叠加原理计算图2.4-1（a）所示电路中的电流 I。



(a) (b) (c)

$$I = I' + I'' = \frac{1}{R_1 + R_2}U_S + \frac{R_1}{R_1 + R_2}I_S$$

比例性说明

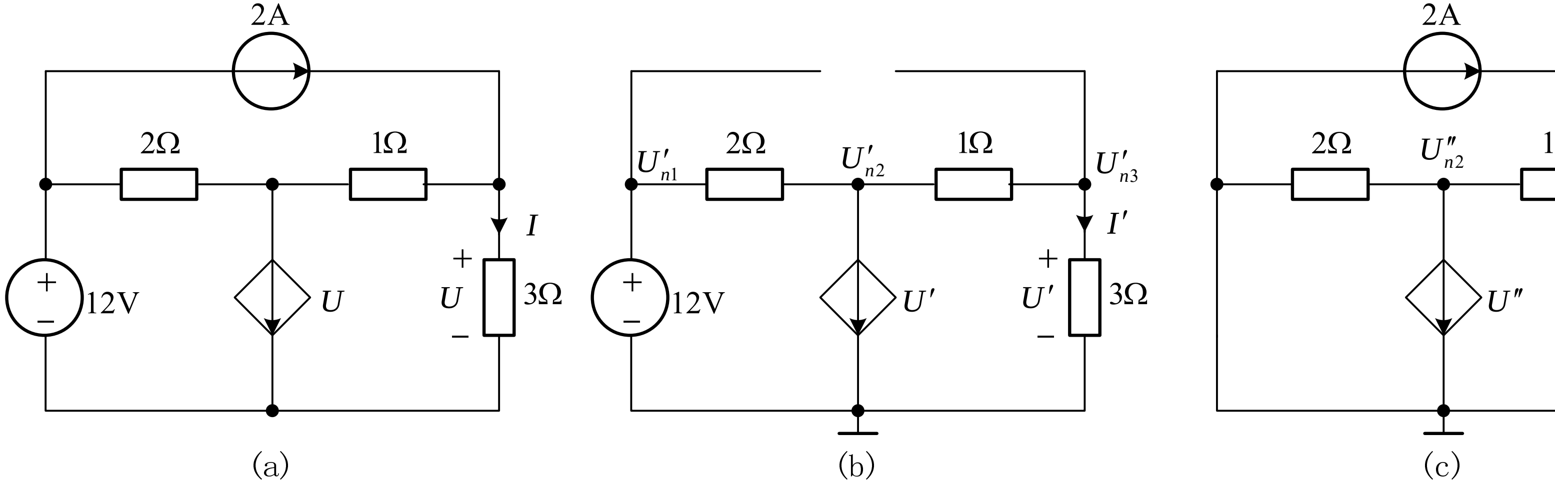
如果电压源改为原来的 k_1 倍，即 k_1U_S

电流源改为原来的 k_2 倍，即 k_2I_S

此时的电流I为 $$I = \frac{1}{R_1 + R_2}k_1U_S + \frac{R_1}{R_1 + R_2}k_2I_S = k_1I' + k_2I''$$

比例性：各独立源单独作用下的电流（电压）与独立源呈比例关系

例2.4-2 利用叠加原理计算如图（a）所示电路中的3Ω电阻的功率



解 （1）12V电压源单独作用时，节点电压方程为

$$
\begin{cases}
U'_{n1} = 12\text{V} \\
-\dfrac{1}{2}U'_{n1} + \left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{1}\right)U'_{n2} - \dfrac{1}{1}U'_{n3} = -U' \\
-\dfrac{1}{1}U'_{n2} + \left(\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{3}\right)U'_{n3} = 0
\end{cases}
$$

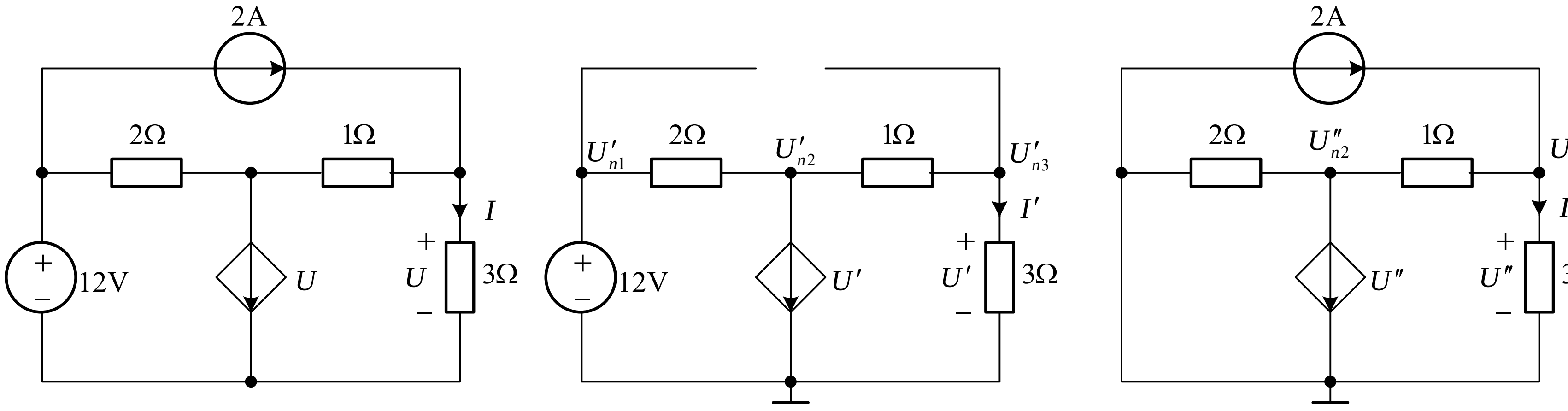
附加方程为 $U' = U'_{n3}$

解得 $U'_{n1} = 12\text{V}$ $\quad U'_{n2} = 4\text{V}$

$U'_{n3} = 3\text{V}$ $\quad U' = 3\text{V}$

$$I' = U'/3 = 1\text{A}$$

例2.4-2 利用叠加原理计算如图（a）所示电路中的3Ω电阻的功率



(a) (b) (c)

（2）2A电流源单独作用时，节点电压方程为

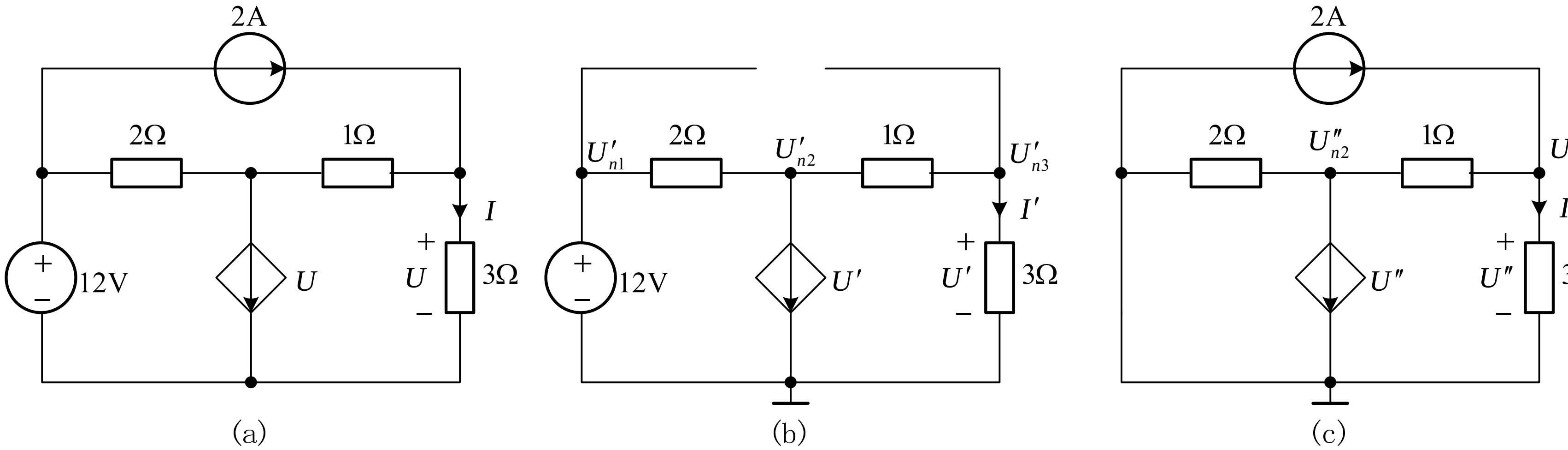
$$\begin{cases} \left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{1}\right)U''_{n2}-\dfrac{1}{1}U''_{n3}=-U'' \\ -\dfrac{1}{1}U''_{n2}+\left(\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{3}\right)U''_{n3}=2 \end{cases}$$

附加方程为 $U''=U''_{n3}$

解得 $U''_{n2}=0\quad U''_{n3}=\dfrac{3}{2}\text{V}\quad U''=\dfrac{3}{2}\text{V}$

$$I''=\frac{U''}{3}=\frac{1}{2}\text{A}$$

例2.4-2 利用叠加原理计算如图（a）所示电路中的3Ω电阻的功率



（3）利用叠加原理可得

$$U = U' + U'' = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}\text{V}$$

$$I = I' + I'' = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\text{A}$$

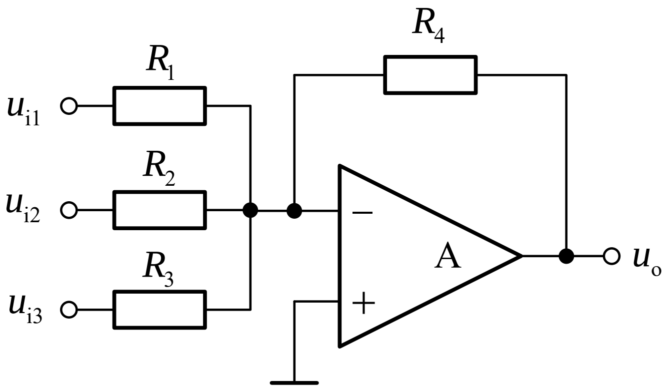
3Ω电阻的吸收的功率为

$$P_{3\Omega} = UI = \frac{9}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{27}{4}\text{W} \quad （吸收 \frac{27}{4}\text{W}）$$

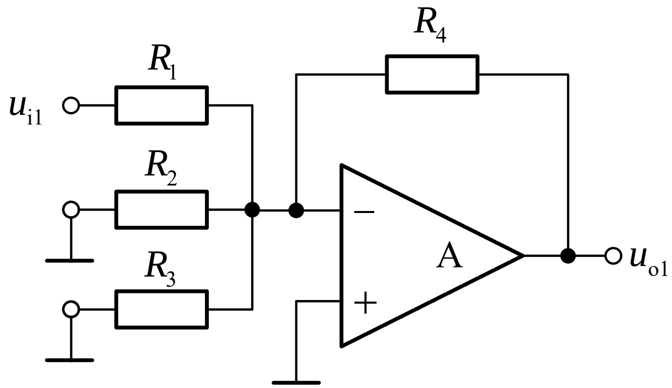
问题：功率是否可用叠加原理？

2.4 线性电路的性质

例2.4-3 反相求和电路如图2.4-3（a）所示，求其输入输出关系。



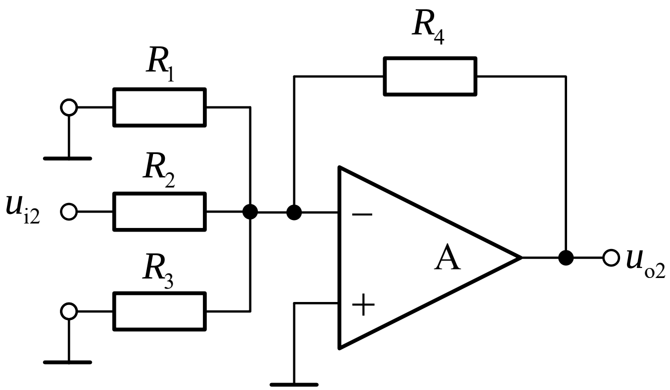
(a)



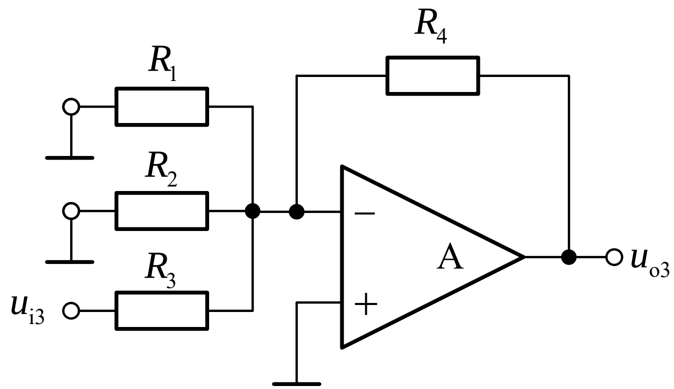
(b)

$$u_{o1} = -\frac{R_4}{R_1} u_{i1}$$

$$u_{o2} = -\frac{R_4}{R_2} u_{i2}$$



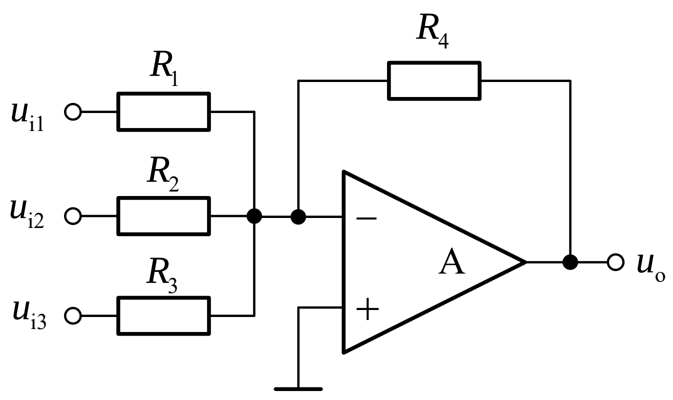
(c)



(d)

$$u_{o3} = -\frac{R_4}{R_3} u_{i3}$$

例2.4-3 反相求和电路如图2.4-3（a）所示，求其输入输出关系。



(a)

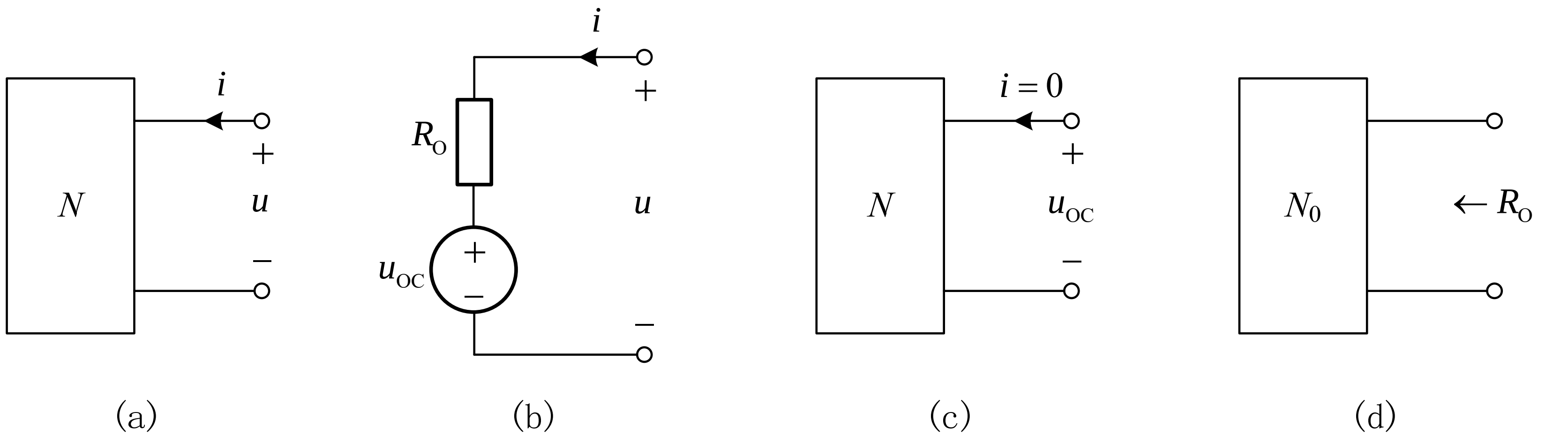
$$u_o = u_{o1} + u_{o2} + u_{o3} = -\frac{R_4}{R_1}u_{i1} - \frac{R_4}{R_2}u_{i2} - \frac{R_4}{R_3}u_{i3}$$

2.5 戴维南定理和诺顿定理

戴维南定理：对外电路而言，线性有源单口网络N总可以用一个理想电压源 u_{OC} 和电阻 R_O 的串联来等效，该电路称为戴维南等效电路

u_{OC} 为该网络N的端口开路电压

R_O 为无源单口网络N_0的等效电阻



2.5 戴维南定理和诺顿定理

戴维南等效电路求解的步骤一般如下：

（1）求开路电压 u_{OC}

（2）求等效电路 R_O

等效电阻R_O的计算方法：

（1）利用等效变换化简得到-适用于无受控源电路

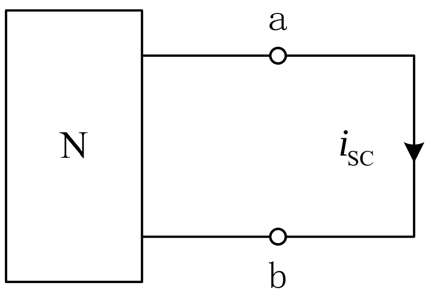
（2）开路电压-短路电流法

（3）外施电源法

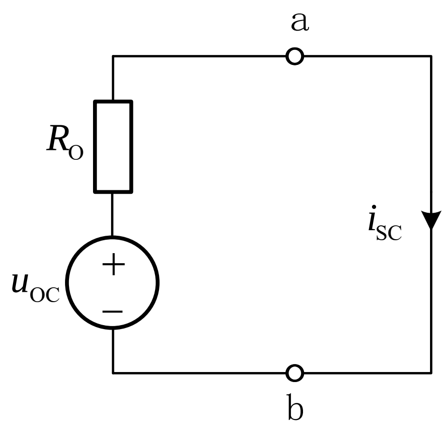
2.5 戴维南定理和诺顿定理

等效电阻R_O的计算方法：

（2）开路电压-短路电流法



（a）求短路电流



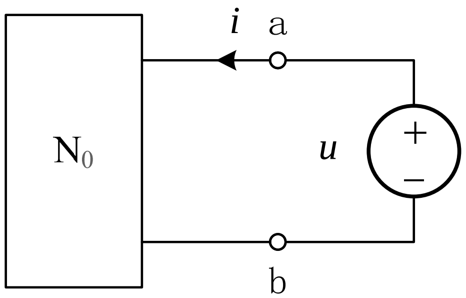
（b）求短路电流时的等效电路

$$R_O = u_{OC} / i_{SC}$$

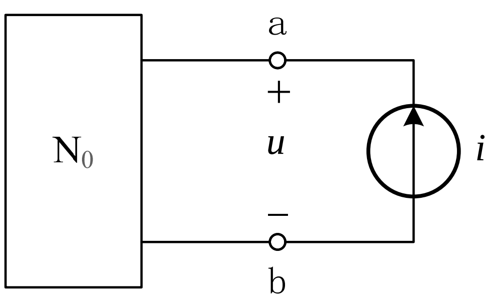
等效电阻R_O的计算方法：

（3）外施电源法

将单口网络N内的独立源置零得到无源单口网络N_0



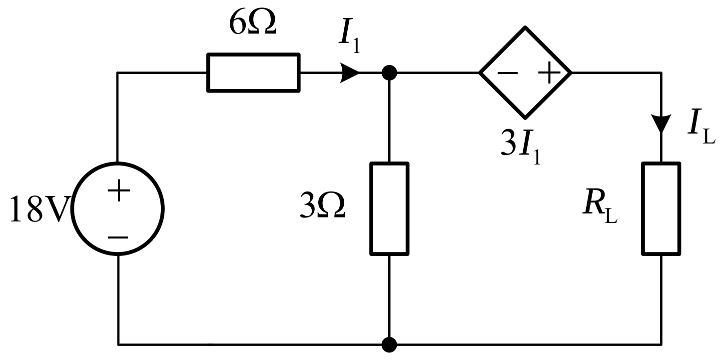
（a）外施电压源法



（b）外施电流源法

$$R_O = u / i$$

例2. 5-1 利用戴维南等效电路分别计算图a所示电路在负载电阻 R_L 为 3Ω 和 4Ω 时的电流 I_L

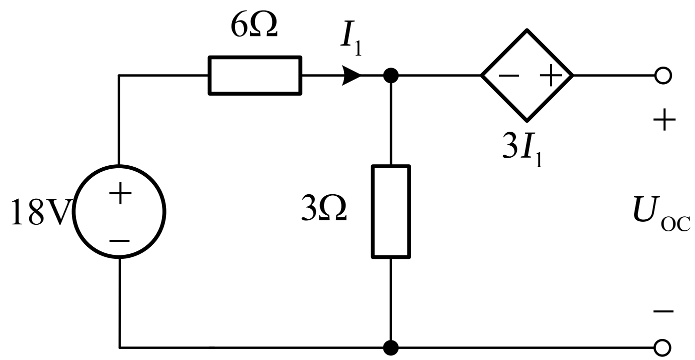


(a)

解 （1）计算U_{OC}

$$I_1 = \frac{18}{6+3} = 2\text{A}$$

$$U_{OC} = 3I_1 + 3I_1 = 3\times2 + 3\times2 = 12\text{V}$$



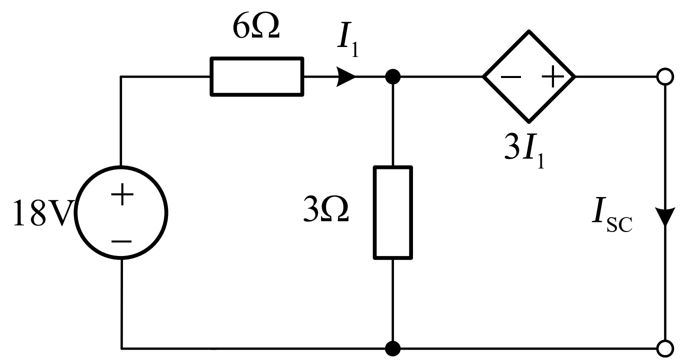
（2）计算R_O

方法一：开路电压-短路电流法

方法二：外施电压源法

例2. 5-1 利用戴维南等效电路分别计算图a所示电路在负载电阻 R_L 为3Ω和4Ω 时的电流 I_L

（2）计算R_O 方法一：开路电压-短路电流法



$$6I_1 - 3I_1 = 18\text{V} \quad \Rightarrow \quad I_1 = 6\text{A}$$

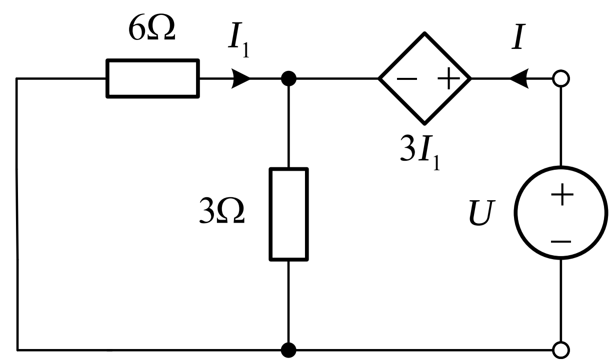
$$I_{SC} = I_1 + \frac{3I_1}{3} = 2I_1 = 2\times 6 = 12\text{A}$$

$$R_O = \frac{U_{OC}}{I_{SC}} = \frac{12}{12} = 1\Omega$$

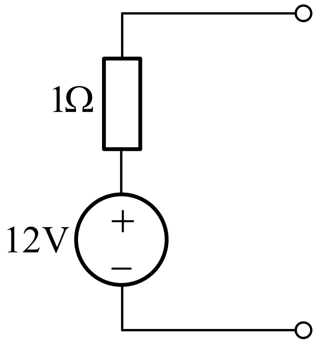
方法二：外施电压源法

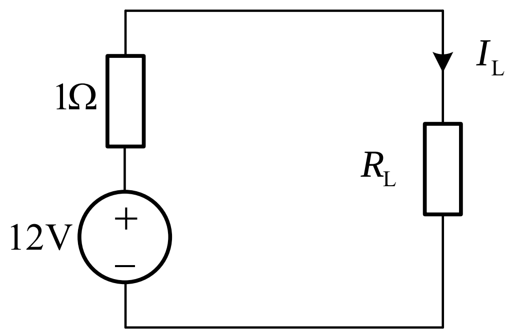
$$\begin{cases} U = 3I_1 - 6I_1 \\ I_1 = -I/3 \end{cases}$$

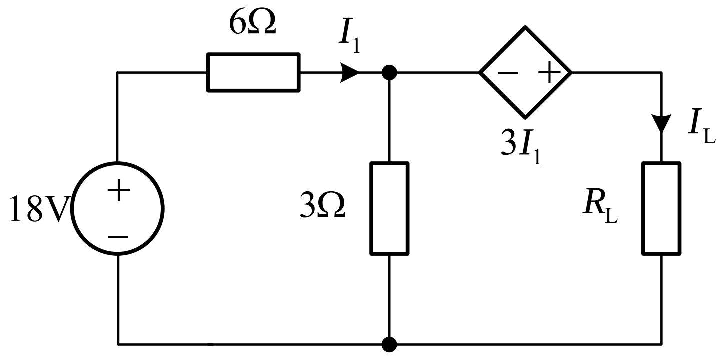
$$R_O = U / I = 1\Omega$$



例2. 5-1 利用戴维南等效电路分别计算图a所示电路在负载电阻 R_L 为 3Ω 和 4Ω 时的电流 I_L







(a)

当 R_L 为 3Ω 时，$I_L = 12/(1+3) = 3\text{A}$

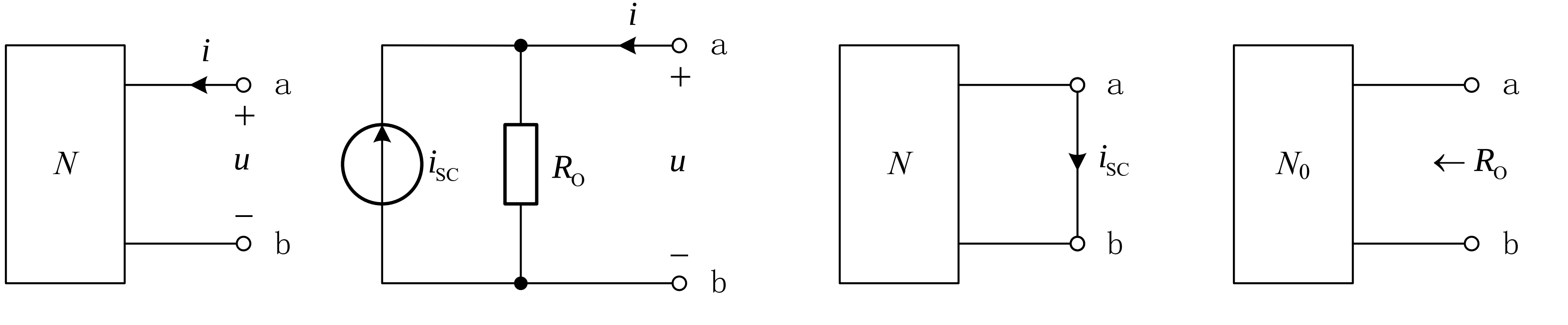
当 R_L 为 4Ω 时，$I_L = 12/(1+4) = 2.4\text{A}$

2.5 戴维南定理和诺顿定理

诺顿定理：对外电路而言，线性有源单口网络N总可以用一个理想电流源i_{SC}和电阻R_O的并联来等效，该电路称为诺顿等效电路

i_{SC} 为该网络N的端口短路电流

R_O 为无源单口网络N_0的等效电阻



(a) (b) (c) (d)

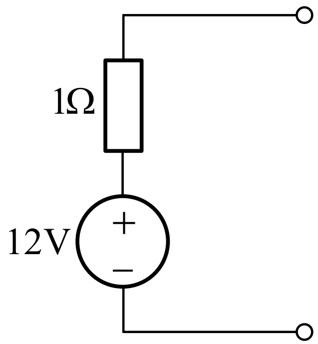
诺顿等效电路求解的步骤一般如下：

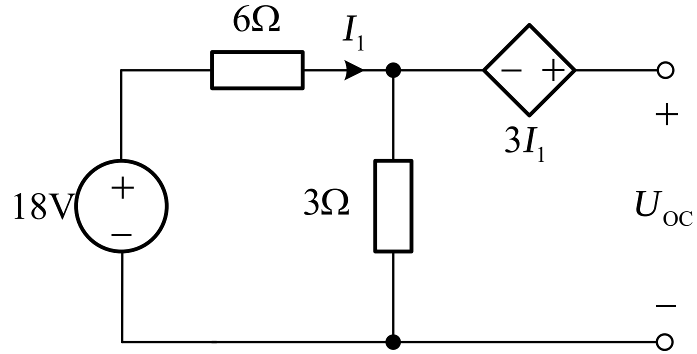
（1）求短路电流i_{SC}

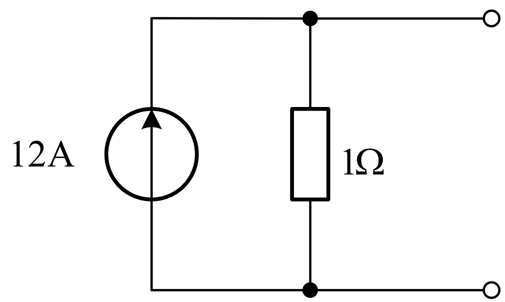
（2）求等效电阻R_O

类比戴维南定理

例 2.5-2 求图2.5-4（b）所示单口网络的诺顿等效电路

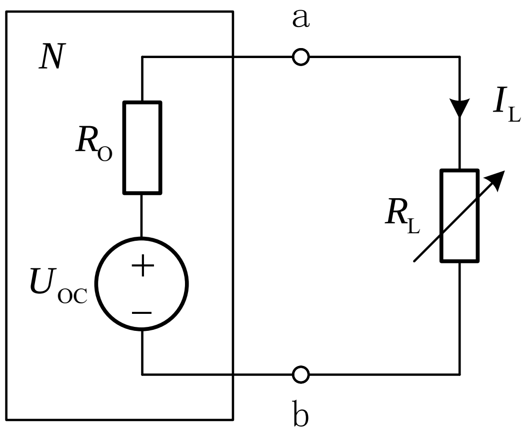






2.6 最大功率传输定理

在电子电路及通信等系统中，给定含源单口网络的情况下，分析负载电阻为何值时可以得到最大的功率，这就是所谓最大功率传输的问题



$$P_L = I_L^2 R_L = \left(\frac{U_{OC}}{R_O + R_L} \right)^2 R_L$$

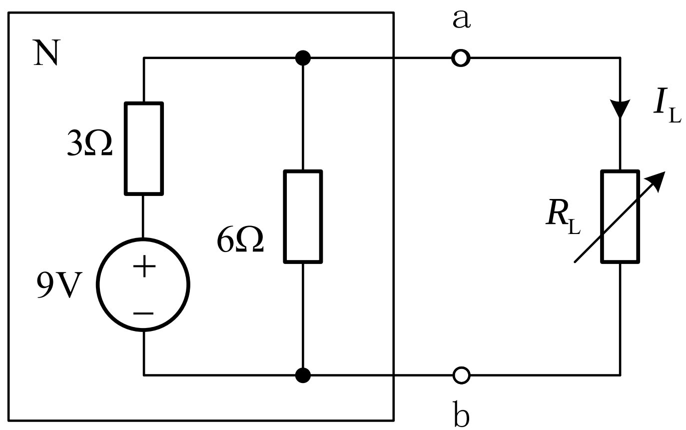
当 $R_L = R_O$ 时，R_L 可以获得最大的功率。

负载可以获得的最大功率为

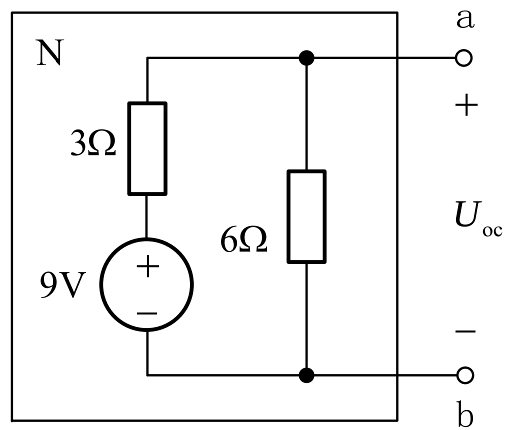
$$P_{L\max} = \frac{U_{OC}^2}{4R_O}$$

2.6 最大功率传输定理

例 2.6−1 计算如图2.6-2（a）所示单口网络N在负载R_L为多大时，R_L可以获得最大功率，最大功率为多少？



(a)



(b)

$$U_{OC} = \frac{6}{3+6} \times 9 = 6\text{V}$$

$$R_O = 3//6 = 2\Omega$$

当负载电阻$R_L = R_O = 2\Omega$ 时，负载可以获得最大功率，最大功率为

$$P_{L\max} = \frac{U_{OC}^2}{4R_O} = \frac{6^2}{4\times 2} = \frac{9}{2}\text{W}$$