杭州电子科技大学学生考试卷（ ）卷

考试课程	线性代数	考试日期	2021 年 11 月 日	成 绩	

课程号	A0714030	教师号		任课教师姓名			
考生姓名		学号（8 位）		年级		专业	

题 号	一	二	三	四	五	六
得 分						

注意：所有答案全部书写在试卷上，答案写在其他地方视为无效！

得分	

一、填空题（请将答案填写在横线上。共六小题，每题 3 分，总共 18 分）

1、已知 A 为三阶方阵且 $|A|=2$，则 $|-2A^{-1}|=$ $\underline{-4}$；

2、设 A 是 4×4 矩阵，且 $R(A)=3$，而 $B=\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\1&3&9&27\\1&-2&4&-8\\1&5&25&125\end{pmatrix}$，则 $R(AB)=$ $\underline{3}$；

3、若齐次线性方程组 $\begin{cases}kx_1+2x_2+x_3=0\\x_1+kx_2+2x_3=0\\2x_1+x_2+kx_3=0\end{cases}$ 有非零解，则 k 应满足的条件为 $\underline{k=-3}$；

4、已知行列式 $\begin{vmatrix}-1&1&1\\1&-1&x\\1&1&-1\end{vmatrix}$ 是关于 x 的一次多项式，则 x 的系数为 $\underline{2}$；

5、方阵 A 满足 $A^2-2A+E=0$，则 $(A-2E)^{-1}=$ $\underline{-A}$；

6、设 $A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\3&4&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&4\end{pmatrix}$，则 $A^{-1}=$ $\begin{pmatrix}4&-1&0&0\\-3&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1/4\end{pmatrix}$

得分	

二、选择题（请将正确答案填写在括号中，在字母前勾选所得结果视为无效

本题共六小题，每题 3 分，共 18 分）

1、设 A 和 B 均为 n 阶方阵，以下等式成立的是（ C ）；

（A） $|A+B|=|A|+|B|$　　（B） $(AB)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$

（C） $|AB|=|BA|$　　（D） $(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$

2、设矩阵 $A=\begin{pmatrix}x&1&1\\1&x&1\\1&1&x\end{pmatrix}$，且 $R(A)=2$，则 x 等于（ B ）；

（A） 1　　（B） -2　　（C） -1　　（D） 2

3、若 n 阶方阵 A 可逆，则下列说法不正确的是（ D ）；

（A） $|A|\neq 0$　　（B） A 为满秩矩阵

（C） A 与 n 阶单位矩阵 E 等价　　（D） 方程组 $AX=b$ 有无穷多解

4、若非齐次线性方程组 $A_{5\times4}X=b$ 无解，且增广矩阵 $B=(A,b)$ 的秩等于 4，则系数矩阵 A 的秩为（ A ）；

（A） 3　　（B） 4　　（C） 2　　（D） 5

5、若矩阵 A 经过若干次初等列变换得到矩阵 B，那么有（ B ）；

（A） 存在矩阵 P，使得 $PA=B$　　（B） 存在矩阵 P，使得 $BP=A$

（C） 存在矩阵 P，使得 $PB=A$　　（D） 方程组 $AX=0$ 与 $BX=0$ 同解

6、设矩阵 A 的秩为 r，则 A 中（ C ）；

（A） 所有 r 阶子式都不为 0　　（B） 所有 $r-1$ 阶子式全为 0

（C） 所有 $r+1$ 阶子式全为 0　　（D） 所有 $r-1$ 阶子式都不为 0

1、求四阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \end{vmatrix}$；

解：$D=\begin{vmatrix} 11 & 2 & 2 & 2 \\ 11 & 5 & 2 & 2 \\ 11 & 2 & 5 & 2 \\ 11 & 2 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ ……2分 $=11\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ ……2分

$=11\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}=297$ ……2分

2、设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & \lambda \\ 2 & 5 & \lambda & -1 \\ 1 & 1 & -6 & 10 \end{pmatrix}$，且 $R(A)=3$，求 λ 的值；

解：$A\to\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & \lambda \\ 0 & 1 & \lambda+2 & -1-2\lambda \\ 0 & -1 & -5 & 10-\lambda \end{pmatrix}$ ……2分 $\to\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & \lambda \\ 0 & 1 & \lambda+2 & -1-2\lambda \\ 0 & 0 & \lambda-3 & 9-3\lambda \end{pmatrix}$ ……2分

$\because R(A)=3 \quad \therefore \lambda\neq 3$ ……2分

3、化矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$ 为行最简形矩阵；

……2分

解：$A\to\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -4 & -3 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -4 \\ 0 & -3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

……2分 ……2分

4、已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$，试求 AB^T。

解：$B^T=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ……2分

$AB^T=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 17 \\ 14 & 13 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}$

……4分

3、设矩阵 X 满足矩阵方程 X=AX+B，且 $A=\begin{pmatrix} \cdots \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} \cdots \\ 2 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$，试求矩阵 X。

解：$X-AX=B$

$(E-A)X=B$ …2分

$\because |E-A|\neq 0 \quad \therefore E-A$ 可逆 …1分

$\therefore X=(E-A)^{-1}B$ …1分

$\therefore \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \therefore X=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ …2分

1、设四阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$，求 $A_{13}+A_{23}+A_{43}$。

解：$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=A_{13}+A_{23}+A_{43}$ …2分

$=-\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}=-4$ …4分

2、设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，矩阵 X 满足 $AX+E=A^2+X$，试求 $|X|$。

解：$AX-X=A^2-E$

$(A-E)X=(A-E)(A+E)$ …2分

$\because |A-E|\neq 0 \quad \therefore A-E$ 可逆 …1分

$\therefore X=A+E$ …1分

$\therefore |X|=|A+E|=9$ …2分

4、已知 a 是常数，且矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & -a \end{pmatrix}$ 可经初等变换化为矩阵 $B=\begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，试求 a。

解：由于 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & -a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 3 & -3a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ …2分

$\because R(A)=2 \quad \therefore R(B)=2$ …1分

$\begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1+a & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-a \end{pmatrix}$ …2分 $\quad \therefore a=2$ …1分

$x-y+\lambda z=2$ 无解，有唯一解，或有无穷多解？并在有无穷多解时求出其通解。

$-5x+5y+4z=-1$

解: $|A|=\begin{vmatrix}-1 & \lambda & 2\\ 1 & -1 & \lambda\\ -5 & 5 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & \lambda & 2\\ 0 & \lambda-1 & \lambda+2\\ 0 & 0 & 4+5\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(5\lambda+4)=0$

$\Rightarrow \lambda_1=1,\ \lambda_2=-\frac{4}{5}$

…3分

① 当 $\lambda\neq1$ 且 $\lambda\neq-\frac{4}{5}$ 时，方程组有唯一解. …1分

② 当 $\lambda=1$ 时 $B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 2\\ -5 & 5 & 4 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 3 & 3\\ 0 & 0 & 9 & 9\end{pmatrix}\to$ …2分

$\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 有无穷多解:

$\begin{cases}x_1=-1-t\\ x_2=t\\ x_3=1\end{cases}$ 或 $x=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}t+\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ …2分

③ 当 $\lambda=-\frac{4}{5}$ 时, $B=\begin{pmatrix}-1 & -\frac{4}{5} & 2 & 1\\ 1 & -1 & -\frac{4}{5} & 2\\ -5 & 5 & 4 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1 & -\frac{4}{5} & 2 & 1\\ 0 & -\frac{9}{5} & \frac{6}{5} & 3\\ 0 & 0 & 0 & 9\end{pmatrix}$ …1分

$\therefore$ 方程组无解 …1分

已知 n 阶方阵 A 的秩为 $n-1$，即 $R(A)=n-1$，试证明 $R(A^*)=1$，其中 A^* 为矩阵 A 的伴随矩阵。

证明: $A\cdot A^*=|A|\cdot E$ …1分

因为 $R(A)=n-1$，所以 A 不可逆，$|A|=0$ …1分

$\therefore A\cdot A^*=0$ …1分

$\therefore R(A)+R(A^*)\leq n$ …1分

$\therefore R(A^*)\leq 1$

因为 $R(A)=n-1$，即 A 存在一个 $n-1$ 阶子式非零 …1分

又因为 A^* 中的元素都是矩阵 A 的 $n-1$ 阶子式，

所以 $A^*\neq0$，即 $R(A^*)\geq1$ …1分

$\therefore R(A^*)=1$