第6章　连续时间系统的s域分析

6.1 拉氏变换

6.2 拉氏反变换

6.3 利用拉氏变换解微分方程

6.4 利用拉氏变换分析电路

6.5 系统函数

回顾

- 拉普拉斯变换
  - 拉氏变换
  - 拉氏变换性质

本次课学习内容

- 拉普拉斯变换
  - 拉氏变换性质
- 拉普拉斯反变换

变换对照表

LT

$\delta(t) \leftrightarrow 1$, 全平面

$\delta^{(n)}(t) \leftrightarrow s^n$, 全平面

$G_\tau(t) \leftrightarrow \frac{1}{s}\left(e^{s\tau/2} - e^{-s\tau/2}\right)$, 全平面

$G_\tau\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \leftrightarrow \frac{1}{s}\left(1 - e^{-s\tau}\right)$, 全平面

$1 \leftrightarrow \cancel{?}$

$\mathrm{sgn}(t) \leftrightarrow \cancel{?}$

FT

$\delta(t) \leftrightarrow 1$

$\delta^{(n)}(t) \leftrightarrow (j\omega)^n$

$G_\tau(t) \leftrightarrow \tau \mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$

$1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$

$\mathrm{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{2}{j\omega}$

变换对照表

LT

$$\varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{1}{s},\quad \mathrm{Re}\{s\} > 0$$

$$t\varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{1}{s^2},\quad \mathrm{Re}\{s\} > 0$$

$$t^2\varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{2}{s^3},\quad \mathrm{Re}\{s\} > 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \delta(t-nT) \leftrightarrow \frac{1}{1-e^{-sT}}, \sigma > 0$$

FT

$$\varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

$$t\varepsilon(t) \leftrightarrow -\frac{1}{\omega^2} + j\pi\delta'(\omega)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$$

$$\leftrightarrow \omega_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0)$$

变换对照表

LT

$$e^{-at}\varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+a},\quad \mathrm{Re}\{s\} > -a$$

$$te^{-at}\varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{1}{(s+a)^2},\quad \mathrm{Re}\{s\} > -a$$

$$e^{-a|t|} \leftrightarrow \frac{2a}{-s^2+a^2},\quad -a < \mathrm{Re}\{s\} < a$$

FT **a>0**

$$e^{-at}\varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\omega+a}, a > 0$$

$$te^{-at}\varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{1}{(j\omega+a)^2}, a > 0$$

$$e^{-a|t|} \leftrightarrow \frac{2a}{\omega^2+a^2},\quad a > 0$$

变换对照表

LT

$$\cos(\omega_0 t) \leftrightarrow \times$$

$$\sin(\omega_0 t) \leftrightarrow \times$$

$$\cos\omega_0 t \cdot \varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{s}{s^2+\omega_0^{\ 2}},\quad \mathrm{Re}\{s\}>0$$

$$\sin\omega_0 t \cdot \varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^{\ 2}},\quad \mathrm{Re}\{s\}>0$$

FT

$$\cos(\omega_0 t) \leftrightarrow$$

$$\pi\left[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)\right]$$

$$\sin(\omega_0 t) \leftrightarrow$$

$$j\pi\left[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)\right]$$

$$\cos(\omega_0 t)\varepsilon(t) \leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2\pi}[\cdots]*\left[\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)\right]$$

变换对照表

LT

$$e^{-at}\cos\omega_0 t\varepsilon(t)\leftrightarrow\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0{}^2},$$

$$\mathrm{Re}\{s\}>-a$$

$$e^{-at}\sin\omega_0 t\varepsilon(t)\leftrightarrow\frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0{}^2},$$

$$\mathrm{Re}\{s\}>-a$$

FT

$$F(j\omega)=F(s)\big|_{s=j\omega},\ a>0$$

$$\frac{j\omega+a}{(j\omega+a)^2+\omega_0{}^2},\ a>0$$

$$\frac{\omega_0}{(j\omega+a)^2+\omega_0{}^2},\ a>0$$

6.1.2 拉氏变换的性质

1. 线性
2. 尺度变换
3. 时移与频移
4. 时域微分与积分(单边*)
5. 频域微分与积分
6. 卷积定理
7. 初值定理(单边)
8. 终值定理(单边)

4a. 时域微分

$$f(t) \leftrightarrow F(s),\ \alpha < \mathrm{Re}\{s\} < \beta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f^{(n)}(t) \leftrightarrow s^n F(s),\quad \alpha < \mathrm{Re}\{s\} < \beta \\ \text{出现了在原点的零点，若它正好} \\ \text{与确定收敛域边界的极点抵消，} \\ \text{则收敛域将扩大} \end{cases}$$

例9. 已知$\varepsilon(t)$的拉氏变换为$1/s$, 应用时域微分性质求$\delta(t)$的拉氏变换。

解：$\delta(t)=\varepsilon^{(1)}(t)\Rightarrow\delta(t)\leftrightarrow s\cdot 1/s=1$

在原点极点与(时域微分产生的)零点相抵消，
收敛域扩大为全平面

例10. 已知$f(t)$的单边拉氏变换为$F(s)$，收敛域为$\mathrm{Re}\{s\}>\alpha$

请证明:

$f^{(n)}(t)$的单边拉氏变换为

$$s^n F(s)-s^{n-1}f(0^-)-s^{n-2}f^{(1)}(0^-)-\cdots-f^{(n-1)}(0^-)$$

收敛域为$\mathrm{Re}\{s\}>\alpha$

证明：

$$f(t) \xleftrightarrow[\text{单边}LT]{} F(s)$$

$$\Rightarrow f(t)\varepsilon(t) \xleftrightarrow{\text{双边}LT} F(s)$$

$$\Rightarrow f'(t)\varepsilon(t) + f(0)\delta(t) \xleftrightarrow{\text{双边}LT} sF(s)$$

$$\Rightarrow f'(t)\varepsilon(t) \xleftrightarrow{\text{双边}LT} sF(s) - f(0)$$

$$\Rightarrow f'(t) \xleftrightarrow[\text{单边}LT]{} sF(s) - f(0)$$

若不出现在原点的零极点抵消，则

$sF(s)$与$F(s)$的极点相同，收敛域相同

4b. 时域积分

$$f(t) \leftrightarrow F(s),\ \alpha < \mathrm{Re}\{s\} < \beta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \leftrightarrow \dfrac{F(s)}{s} \\ \max(\alpha, 0) < \mathrm{Re}\{s\} < \beta \end{cases}$$

由于产生了在原点的极点，收敛域如式

证明方法：分部积分法、时域微分性质、卷积性质

5. s域微分

$$f(t) \leftrightarrow F(s),\ \alpha < \mathrm{Re}\{s\} < \beta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (-t)^n f(t) \leftrightarrow F^{(n)}(s) = \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n}[F(s)] \\ \alpha < \mathrm{Re}\{s\} < \beta \end{cases}$$

$$F(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$$\frac{dF(s)}{ds}=\int_{-\infty}^{+\infty}(-t)f(t)e^{-st}dt$$

若$f(t)\leftrightarrow F(s),\ \alpha<\mathrm{Re}\{s\}<\beta$

$$\therefore (-t)f(t)\leftrightarrow \frac{dF(s)}{ds},\alpha<\mathrm{Re}\{s\}<\beta$$

例11. 求 $f(t)=t^2\varepsilon(t)$的拉氏变换

解一：$\varepsilon(t)\leftrightarrow\dfrac{1}{s}\quad\Rightarrow t^2\varepsilon(t)=2\int_0^t\int_0^t\varepsilon(\tau)d\tau\leftrightarrow\dfrac{2}{s^3}$ 时域积分

解二：$\varepsilon(t)\leftrightarrow\dfrac{1}{s}\quad\Rightarrow(-t)^2\varepsilon(t)\leftrightarrow\dfrac{d^2}{ds^2}\left(\dfrac{1}{s}\right)=\dfrac{2}{s^3}$ s域微分

收敛域为 $\mathrm{Re}\{s\}>0$

例12. 求 $f(t)=te^{-\alpha t}\varepsilon(t)$的拉氏变换

解：$e^{-\alpha t}\varepsilon(t)\leftrightarrow\dfrac{1}{s+\alpha}$

$$\Rightarrow\left(-t\right)e^{-\alpha t}\varepsilon(t)\leftrightarrow\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s+\alpha}\right)=-\frac{1}{(s+\alpha)^2}$$

$$\Rightarrow\ te^{-\alpha t}\varepsilon(t)\leftrightarrow\frac{1}{(s+\alpha)^2}$$

收敛域为 $\mathrm{Re}\{s\}>-\alpha$

6. 时域卷积定理

$$\left.\begin{array}{l} f_1(t) \leftrightarrow F_1(s), \quad \alpha_1 < \mathrm{Re}\{s\} < \beta_1 \\ f_2(t) \leftrightarrow F_2(s), \quad \alpha_2 < \mathrm{Re}\{s\} < \beta_2 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(s) \cdot F_2(s) \\ \max\left(\alpha_1, \alpha_2\right) < \mathrm{Re}\{s\} < \min(\beta_1, \beta_2) \\ \text{若极零点抵消，收敛域可能扩大} \end{cases}$$

例13：利用时域卷积定理，证明拉普拉斯变化的时域积分定理

证：

$$\left.\begin{aligned} &f^{(-1)}(t) = f(t) * \varepsilon(t) \\ &f(t) \leftrightarrow F(s), \quad \alpha < \mathrm{Re}\{s\} < \beta \\ &\varepsilon(t) \leftrightarrow 1/s, \qquad 0 < \mathrm{Re}\{s\} \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow f^{(-1)}(t) \leftrightarrow \frac{F(s)}{s}, \quad \max(0,\alpha) < \mathrm{Re}\{s\} < \beta$$

例14. $f_1(t)=e^{-\alpha t}\varepsilon(t), f_2(t)=\varepsilon(t)$，求 $f_1(t)*f_2(t)$ 及其拉氏变换

解：$e^{-\alpha t}\varepsilon(t)\leftrightarrow\dfrac{1}{s+\alpha}$，$\varepsilon(t)\leftrightarrow\dfrac{1}{s}$

$$\Rightarrow f_1(t)*f_2(t)\leftrightarrow\frac{1}{s+\alpha}\cdot\frac{1}{s}=\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\alpha}\right)$$

收敛域为 $\mathrm{Re}\{s\}>\max\left(-\alpha,0\right)$

求反变换有：$f_1(t)*f_2(t)=\dfrac{1}{\alpha}\left(1-e^{-\alpha t}\right)\varepsilon(t)$

7. 初值定理

若 $\mathscr{L}\left[f(t)\right]=F(s)$，则 $\lim\limits_{t\to 0_+} f(t)=f(0_+)=\lim\limits_{s\to\infty} sF(s)$

若$F(s)$不是真分式，应首先化为真分式：

$$F(s)=K\frac{\prod\limits_{r=1}^{M}(s-z_r)}{\prod\limits_{k=1}^{N}(s-p_k)}$$

$M<N$时为真分式

$$F(s)=F_1(s)+F_2(s)$$

整式　　真分式

整式对应的是冲激函数及其导数，在 $t=0_+$时的值为0

所以，$\lim\limits_{t\to 0_+} f(t)=f(0_+)=\lim\limits_{s\to\infty} sF_2(s)$

(初值定理只适用于单边变换)

例15： $F(s)=\dfrac{1}{s}$，求$f(0_+)=?$

$$f(0_+)=\lim_{t\to 0_+} f(t)=\lim_{s\to\infty} sF(s)=1$$

单位阶跃信号的初始值为1。

例16： $F(s)=\dfrac{2s}{s+1}$，求$f(0_+)=?$

因为 $F(s)=\dfrac{2s}{s+1}=-\dfrac{2}{s+1}+2$

所以 $f(0_+)=\lim\limits_{s\to\infty}\left[s\left(-\dfrac{2}{s+1}\right)\right]$

$$=\lim_{s\to\infty}\frac{-2s}{s+1}=\lim_{s\to\infty}\frac{-2}{1+\dfrac{1}{s}}=-2$$

8. 终值定理

若 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$，则 $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)=\lim\limits_{s\to 0} sF(s)$

终值定理应用的前提是 $f(\infty)$ 必须存在

判断的依据是 $F(s)$所有极点均在s的左半平面，或者在虚轴上只允许有 $s=0$ 的一个单极点。

(终值定理只适用于单边变换)

例17： $F(s)=\dfrac{s+2}{s^{2}+3s+2}$

因极点为均在左半平面，终值 $f(\infty)$ 存在：

$$f(\infty)=\lim_{s\to 0}s\frac{s+2}{s^{2}+3s+2}=\lim_{s\to 0}\frac{s^{2}+2s}{s^{2}+3s+2}=0$$

例18： $F(s)=\dfrac{2s}{s^{2}-3s+2}$

因极点在右半平面，所以终值 $f(\infty)$不存在。

例19. $f(t)=e^{-\alpha t}\sin\omega_0 t\varepsilon(t)$，求$f(\infty)$

解：$e^{-\alpha t}\sin\omega_0 t\varepsilon(t)\leftrightarrow\dfrac{\omega_0}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$

收敛域为 $\mathrm{Re}\{s\}>-\alpha$

$$\Rightarrow f(\infty)=\begin{cases}\lim\limits_{s\to 0}s\cdot\dfrac{\omega_0}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}=0,\alpha>0\\ \text{不定或无界，}\quad\alpha\le 0\end{cases}$$

对典型信号，验证初值定理和终值定理！

性质对照表

$$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \leftrightarrow a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$$

$$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

$$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \leftrightarrow a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega)$$

$$\boxed{F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)}$$

$$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

$$\boxed{f^*(t) \leftrightarrow F^*(-\omega)}$$

奇偶虚实对称性

性质对照表

$$f(t-t_0)\leftrightarrow F(s)e^{-st_0}$$

$$f(t-t_0)\leftrightarrow F(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

$$f(t)e^{s_0 t}\leftrightarrow F(s-s_0)$$

$$f(t)e^{j\omega_0 t}\leftrightarrow F(\omega-\omega_0)$$

$$f^{(n)}(t)\leftrightarrow s^n F(s)$$

$$f^{(n)}(t)\leftrightarrow (j\omega)^n F(\omega)$$

$$f(t)\varepsilon(t)\leftrightarrow F(s)$$

$$f^{(n)}(t)\varepsilon(t)\leftrightarrow$$

$$s^n F(s)-s^{n-1}f(0^-)-s^{n-2}f^{(1)}(0^-)-\cdots-f^{(n-1)}(0^-)$$

性质对照表

$$f^{(-1)}(t) \leftrightarrow \frac{F(s)}{s}$$

$$f^{(-1)}(t) \leftrightarrow \frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)$$

$$(-t)^n f(t) \leftrightarrow F^{(n)}(s)$$

$$(-jt)^n f(t) \leftrightarrow F^{(n)}(\omega)$$

$$f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(s) \cdot F_2(s)$$

$$f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$$

$$\boxed{f_1(t) \cdot f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)}$$

性质对照表

$F(s)$为真分式

$$f(0^+) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

$sF(s)$的极点

$\in\{$左半平面$\}$

$$f(\infty) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2\, d\omega$$

6.2 求拉氏反变换

- 留数法
- 查表法
- 部分分式法

- **查表法**

例1. 已知$F(s)=2+\dfrac{s+2}{(s+2)^2+4}$

- **查表法**

例1. 已知$F(s)=2+\dfrac{s+2}{(s+2)^2+4}$

解：查表得：

$$\begin{cases} \delta(t)\leftrightarrow 1 \\ e^{-2t}\cos 2t\varepsilon(t)\leftrightarrow \dfrac{s+2}{(s+2)^2+4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2\delta(t)+e^{-2t}\cos 2t\varepsilon(t)\leftrightarrow 2+\frac{s+2}{(s+2)^2+4}$$

例2. 已知$F(s)=\dfrac{1}{s^3}\left(1-e^{-s\tau}\right)$

例2. 已知$F(s)=\frac{1}{s^3}\left(1-e^{-s\tau}\right)$

解：查表得：

$$\begin{cases} t\varepsilon(t)\leftrightarrow \dfrac{1}{s^2} \\ G_\tau(t-\tau/2)\leftrightarrow \dfrac{1}{s}\left(1-e^{-s\tau}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow t\varepsilon(t)*G_\tau(t-\tau/2)\leftrightarrow \frac{1}{s^3}\left(1-e^{-s\tau}\right)$$

$$\Rightarrow t\varepsilon(t)*[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-\tau)]\leftrightarrow \frac{1}{s^3}\left(1-e^{-s\tau}\right)$$

$$\Rightarrow [\int_{-\infty}^{t}\tau\varepsilon(\tau)d\tau]*[\delta(t)-\delta(t-\tau)]\leftrightarrow \frac{1}{s^3}\left(1-e^{-s\tau}\right)$$

$$\Rightarrow [\frac{t^2}{2}\varepsilon(t)]*[\delta(t)-\delta(t-\tau)]\leftrightarrow \frac{1}{s^3}\left(1-e^{-s\tau}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}t^2\varepsilon(t)-\frac{1}{2}\left(t-\tau\right)^2\varepsilon(t-\tau)\leftrightarrow \frac{1}{s^3}\left(1-e^{-s\tau}\right)$$

• 部分分式法

通常$F(s)$具有如下的有理分式形式：

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

a_i, b_i 为实数， m, n 为正整数。

当 $m<n$ 时，$F(s)$为有理真分式形式：

可分解为

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{b_m(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{a_n(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

• 部分分式法

当 $m<n$时，$F(s)$为有理真分式形式：

可分解为

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{b_m(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{a_n(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

零点为: $z_1, z_2, \cdots z_m$

$$\left(因为B(s)=0 \Rightarrow F(s)=0\right)$$

极点为: $p_1, p_2, \cdots p_n$

$$\left(因为A(s)=0 \Rightarrow F(s)=\infty\right)$$

• 部分分式法（m<n）

1.第一种情况：单阶实数极点

$$F(s)=\frac{B(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

$p_1,p_2,\cdots p_n$ 为不同的实数根。

2. 第二种情况：极点有重根存在

3. 第三种情况：极点为共轭复数

• 第一种情况：单阶实数极点

$$F(s)=\frac{B(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

$p_1, p_2, \cdots p_n$ 为不同的实数根。

$$F(s)=\frac{K_1}{s-p_1}+\frac{K_2}{s-p_2}+\cdots+\frac{K_n}{s-p_n}$$

将上式两边同乘 $(s-p_1)$

$$(s-p_1)F(s)=K_1+(s-p_1)(\frac{K_2}{s-p_2}+\cdots+\frac{K_n}{s-p_n})$$

令 $s=p_i$

$$K_i=(s-p_i)F(s)\Big|_{s=p_i}$$

$$\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s-p_i}]=\mathrm{e}^{p_i t}\,\varepsilon(t)$$

例1：已知 $F(s)=\dfrac{10(s+2)(s+5)}{s(s+1)(s+3)}$ ，求其逆变换

解：部分分式法 $F(s)=\dfrac{k_1}{s}+\dfrac{k_2}{s+1}+\dfrac{k_3}{s+3}$

其中 $k_1=sF(s)\big|_{s=0}=s\dfrac{10(s+2)(s+5)}{s(s+1)(s+3)}\Bigg|_{s=0}=\dfrac{100}{3}$

$$k_2=(s+1)F(s)\big|_{s=-1}=(s+1)\frac{10(s+2)(s+5)}{s(s+1)(s+3)}\Bigg|_{s=-1}=-20$$

$$k_3=(s+3)F(s)\big|_{s=-3}=(s+3)\frac{10(s+2)(s+5)}{s(s+1)(s+3)}\Bigg|_{s=-3}=-\frac{10}{3}$$

例1：已知 $F(s)=\dfrac{10(s+2)(s+5)}{s(s+1)(s+3)}$ ，求其逆变换

$$\therefore F(s)=\frac{100}{3s}-\frac{20}{s+1}-\frac{10}{3(s+3)}$$

$$\therefore f(t)=(\frac{100}{3}-20e^{-t}-\frac{10}{3}e^{-3t})\varepsilon(t)$$

例2：已知 $F(s)=\dfrac{s^3+5s^2+9s+7}{(s+1)(s+2)}$ ，求其逆变换

解： $$F(s)=s+2+\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}=s+2+\frac{k_1}{s+1}+\frac{k_2}{s+2}$$

其中

$$k_1=(s+1)\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}\bigg|_{s=-1}=2$$

$$k_2=(s+2)\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}\bigg|_{s=-2}=-1$$

$$\therefore F(s)=s+2+\frac{2}{s+1}-\frac{1}{s+2} \qquad \therefore f(t)=\delta'(t)+2\delta(t)+(2e^{-t}-e^{-2t})\varepsilon(t)$$

- 第二种情况：有重根存在

$$F(s)=\frac{K_{11}}{(s-p_1)^m}+\frac{K_{12}}{(s-p_1)^{m-1}}+\cdots+\frac{K_{1m}}{(s-p_1)}$$

$$K_{1i}=\frac{1}{(i-1)!}\cdot\left[\frac{d^{i-1}}{ds^{i-1}}\left[(s-p_1)^m F(s)\right]\right]\Bigg|_{s=p_1}$$

例3：已知 $F(s)=\dfrac{s-2}{s(s+1)^3}$ ，求其逆变换

解： $$F(s)=\frac{k_{11}}{(s+1)^3}+\frac{k_{12}}{(s+1)^2}+\frac{k_{13}}{s+1}+\frac{k_2}{s}$$

令 $$F_1(s)=(s+1)^3F(s)=\frac{s-2}{s}$$

$$k_{11}=F_1(s)\Big|_{s=-1}=\frac{s-2}{s}\bigg|_{s=-1}=3$$

$$k_{12}=\frac{d}{ds}F_1(s)\Big|_{s=-1}=\frac{s-(s-2)}{s^2}\bigg|_{s=-1}=2$$

例3：已知 $F(s)=\dfrac{s-2}{s(s+1)^3}$ ，求其逆变换

$$k_{13}=\frac{1}{2!}\frac{d^2}{ds^2}F_1(s)\Big|_{s=-1}=\frac{1}{2}\frac{-4}{s^3}\Big|_{s=-1}=2$$

$$k_2=sF(s)\Big|_{s=0}=s\frac{s-2}{s(s+1)^3}\Big|_{s=0}=-2$$

$$\therefore F(s)=\frac{3}{(s+1)^3}+\frac{2}{(s+1)^2}+\frac{2}{s+1}-\frac{2}{s}$$

$$\therefore\ f(t)=\left((\frac{3}{2}t^2+2t+2)e^{-t}-2\right)\varepsilon(t)$$

$$t\varepsilon(t)\leftrightarrow\frac{1}{s^2},\ \ \mathrm{Re}\{s\}>0$$

$$t^2\varepsilon(t)\leftrightarrow\frac{2}{s^3},\ \ \mathrm{Re}\{s\}>0$$

• 第三种情况：极点为共轭复数

$$F(s)=\frac{B(s)}{(s+\alpha-\mathrm{j}\beta)(s+\alpha+\mathrm{j}\beta)}$$

共轭极点出现在 $-\alpha\pm\mathrm{j}\beta$

$$F(s)=\frac{K_1}{s+\alpha-\mathrm{j}\beta}+\frac{K_2}{s+\alpha+\mathrm{j}\beta}$$

$$K_1=(s+\alpha-\mathrm{j}\beta)F(s)\Big|_{s=-\alpha+\mathrm{j}\beta}=\frac{B(-\alpha+\mathrm{j}\beta)}{2\mathrm{j}\beta}$$

$$K_2=(s+\alpha-\mathrm{j}\beta)F(s)\Big|_{s=-\alpha-\mathrm{j}\beta}=\frac{B(-\alpha-\mathrm{j}\beta)}{-2\mathrm{j}\beta}$$

例4. 求$F(s)=\dfrac{s+8}{s^3+4s^2+8s}$的拉氏反变换

解：$$F(s)=\frac{s+8}{s[(s+2)^2+4]}=\frac{k_1}{s}+\frac{k_2}{s+2-j2}+\frac{k_3}{s+2+j2}$$

$$k_1=sF(s)\big|_{s=0}=s\frac{s+8}{s^3+4s^2+8s}\bigg|_{s=0}=1$$

$$F(s)=\frac{1}{s}-\frac{s+3}{(s+2)^2+4}$$

太繁琐！就此打住！！

令 $$F_1(s)=-\frac{s+3}{(s+2)^2+4}=\frac{k_2}{s+2-j2}+\frac{k_3}{s+2+j2}$$

例4. 求$F(s)=\dfrac{s+8}{s^3+4s^2+8s}$的拉氏反变换

解：$F(s)=\dfrac{s+8}{s[(s+2)^2+4]} = \dfrac{1}{s}-\dfrac{s+3}{(s+2)^2+4}$

$$=\frac{1}{s}-\frac{s+2}{(s+2)^2+2^2}-\frac{1}{2}\frac{2}{(s+2)^2+2^2}$$

$$\leftrightarrow \left\{1-e^{-2t}\left(\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\right\}\varepsilon(t)$$

$\cos\omega_0 t\cdot\varepsilon(t)\leftrightarrow\dfrac{s}{s^2+\omega_0^2}$，$\mathrm{Re}\{s\}>0$

$\sin\omega_0 t\cdot\varepsilon(t)\leftrightarrow\dfrac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$，$\mathrm{Re}\{s\}>0$

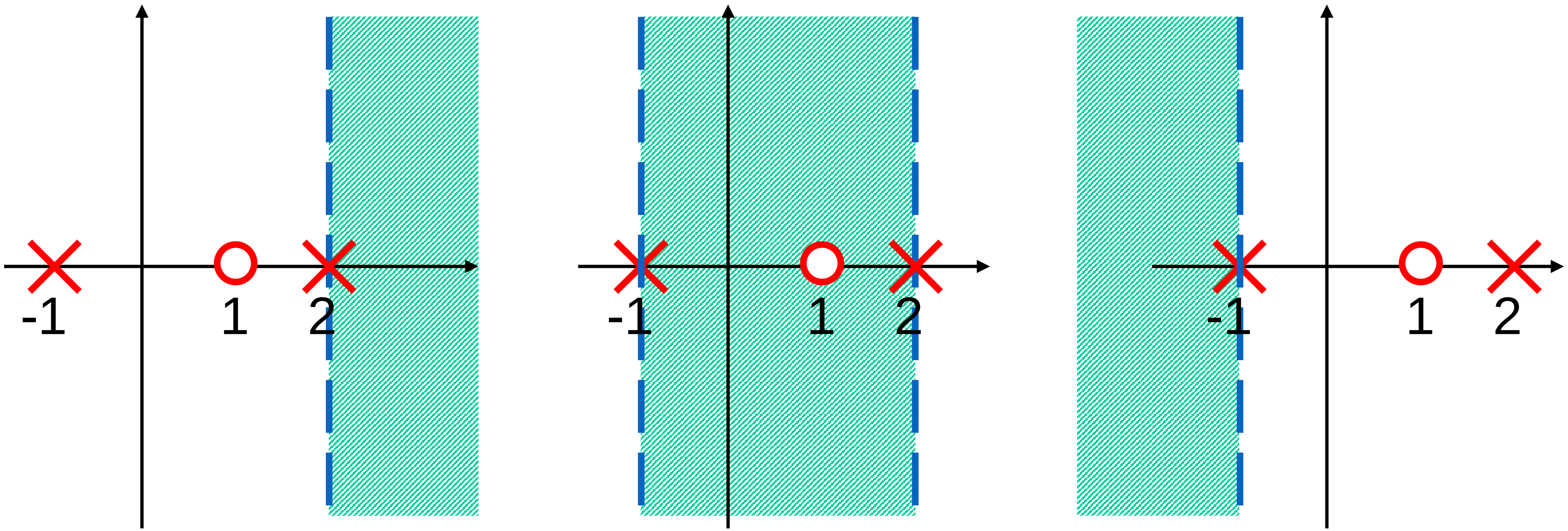
习题：6-3~6-5；提交截止时间：6月18日早8点

求指定收敛域的拉氏反变换

例5. 已知 $H(s)=\dfrac{s-1}{(s+1)(s-2)}$，求它在不同的收敛域上反变换

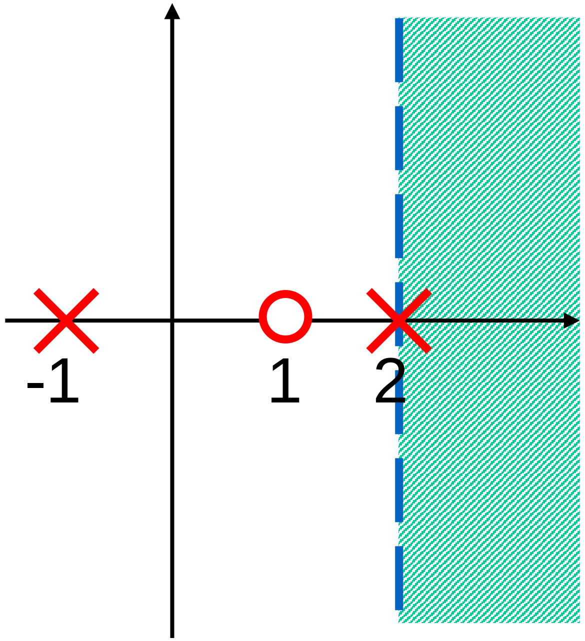
例5. 已知 $H(s)=\dfrac{s-1}{(s+1)(s-2)}$，求它在不同的收敛域上反变换

解：$H(s)=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{s+1}+\dfrac{1}{s-2}\right)$，极点如图



例5. 已知 $H(s)=\dfrac{s-1}{(s+1)(s-2)}$，求它在不同的收敛域上反变换

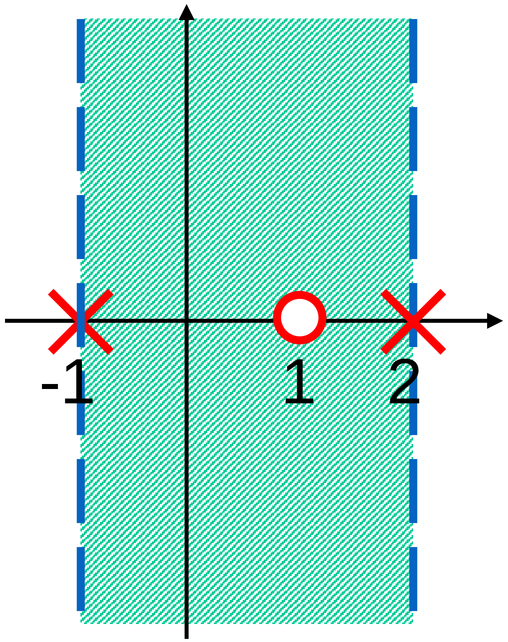
解：$H(s)=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{s+1}+\dfrac{1}{s-2}\right)$，极点如图



$$h(t)=\left(\frac{2}{3}e^{-t}+\frac{1}{3}e^{2t}\right)\varepsilon(t),\qquad \mathrm{Re}\{s\}>2$$

例5. 已知 $H(s)=\dfrac{s-1}{(s+1)(s-2)}$，求它在不同的收敛域上反变换

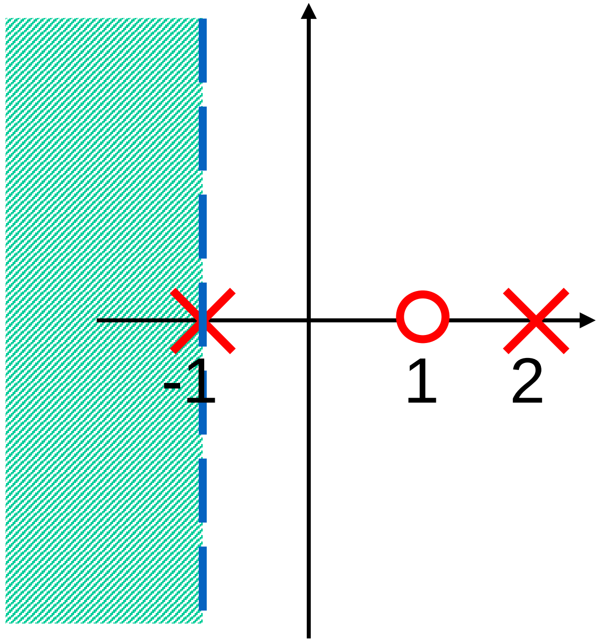
解：$H(s)=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{s+1}+\dfrac{1}{s-2}\right)$，极点如图



$$h(t)=\frac{2}{3}e^{-t}\varepsilon(t)-\frac{1}{3}e^{2t}\varepsilon(-t),\ \ -1<\mathrm{Re}\{s\}<2$$

例5. 已知 $H(s)=\dfrac{s-1}{(s+1)(s-2)}$，求它在不同的收敛域上反变换

解：$H(s)=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{s+1}+\dfrac{1}{s-2}\right)$，极点如图



$$h(t)=-\left(\frac{2}{3}e^{-t}+\frac{1}{3}e^{2t}\right)\varepsilon(-t),\ \mathrm{Re}\{s\}<-1$$