

杭州电子科技大学学生考试卷（ A ）卷

考试课程	概率论与数理统计	考试日期	2011 年 06 月 日		成 绩	
课程号	A0702140	教师号		任课教师姓名		
考生姓名	参考答案	学号（8 位）		年 级		专 业

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十
得分										

一. 单项选择题，将正确答案填在括号内（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设事件 A, B 满足 $P(A) > 0$ ，且 $P(AB) = P(A)P(B)$ ，则下列结论中正确的是（ D ）

- A. $P(A) = P(B|A)$
- B. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- C. A, B 互不相容；
- D. A, B 相互独立；

2. 设随机变量 $X \sim N(3, 9)$ 且 $Y = aX + b \sim N(0, 1)$ ，则（ A ）

- A. $a = 1/3, b = -1$ ；
- B. $a = -1/3, b = -1$
- C. $a = 1/9, b = -1/3$ ；
- D. $a = -1/3, b = 1$

3. 设样本 X_1, X_2, \dots, X_6 为来总体 $N(0, 1)$ ， $Y = \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3)^2 + \frac{1}{3}(X_4 + X_5 + X_6)^2$ ，则 Y 服从的分布为（ C ）

- A. $t(2)$
- B. $t(6)$
- C. $\chi^2(2)$
- D. $\chi^2(6)$

4. 设总体具有分布律：

X	1	2	3
p_k	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

其中 $\theta(0 < \theta < 1)$ 为未知参数， X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的一个样本， \bar{X} ， S^2 为样本

均值与样本方差，则 θ 的矩估计量 $\hat{\theta} =$ （ C ）.

- A. $\frac{1}{2}(3 + \bar{X})$ ；
- B. $\frac{1}{3}(2 - \bar{X})$
- C. $\frac{1}{2}(3 - \bar{X})$ ；
- D. $\frac{1}{3}(2 + \bar{X})$

5. 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，其中 σ^2 未知， X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的一个样本， \bar{X} ， S^2 为样本均值与样本方差，则 μ 的置信水平为 95% 的单侧置信上限为（ B ）.

- A. $\bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}}t_{0.05}(n)$ ；
- B. $\bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}}t_{0.05}(n-1)$
- C. $\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}}t_{0.05}(n)$
- D. $\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}}t_{0.05}(n-1)$

二. 填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 已知事件 A, B 互不相容， $P(A) = \frac{1}{4}$ ， $P(B) = \frac{1}{6}$ ，则 $P(A \cup B) = \underline{5/12}$.

2. 一个口袋装有 8 个球，其中 6 个白球，2 个红球，从袋中取球两次，每次随机地取一只，作放回抽样，即第一次取一只球，观察其颜色后放回袋中，搅匀后再取一球。则取到的两只都是白球的概率为 $\underline{9/16}$.

3. 设 $P\{X = k\} = \frac{b}{k+1}$ （ $k = 1, 2, 3$ ）为离散型随机变量 X 的分布律，则常数 $b = \underline{12/13}$.

4. 设随机变量 X 服从 $N(2, 9)$ 的正态分布， Y 服从 $b(100, 0.8)$ 的二项分布，且 X 与 Y 的相互独立，则 $D(2X - Y + 15) = \underline{52}$.

6大常见分布的期望与方差

5. 设有一组容量为 16 的样本值如下（已经排序过）：122 126 133 140 145 149 150 157 162 166 175 177 183 188 199 212
则样本分位数 $x_{0.3} = \underline{145}$.

三. (本题 12 分) 设连续型随机变量 X 的密度函数为 $f(x) = \begin{cases} kx(x-1), & 1 < x < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$,

(1) 确定常数 k ;

(2) 求 X 的分布函数 $F(x)$;

(3) $E(X)$.

解: (1) 因为 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$ 1 分

所以 $\int_1^2 kx(x-1) dx = 1$ 得 $k = \frac{6}{5}$ 4 分

(2) X 的分布函数 $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$ 5 分

$$= \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ \int_1^x \frac{6}{5} x(x-1) dx, & 1 < x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

.....8 分

$$= \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ \frac{1}{5}(2x^3 - 3x^2 + 1), & 1 < x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

.....9 分

(3) $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx$ 10 分

$$= \int_1^2 x \cdot \frac{6}{5} x(x-1) dx = \frac{17}{10}$$

.....12 分

四. (本题 18 分) 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y) = \begin{cases} Cx^2y, & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

(1) 求常数 C ;

(2) 求关于 X 和关于 Y 的边缘概率密度 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$; 并问 X 与 Y 是否相互独立?

(3) 求概率 $P\{X + Y < 1\}$;

(4) $E(XY)$.

解: (1) $\because \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = 1$ 2 分

即 $\int_0^1 dx \int_0^1 Cx^2y dy = 1$, 得 $C = 6$ 4 分

(2) 关于 X 的边缘概率密度: $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$ 5 分

$$= \begin{cases} \int_0^1 6x^2y dy, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} = \begin{cases} 3x^2, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

.....7 分

关于 Y 的边缘概率密度: $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$

$$= \begin{cases} \int_0^1 6x^2y dx, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} = \begin{cases} 2y, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

.....10 分

显然 $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$

所以 X 与 Y 相互独立.12 分

(3) $P\{X + Y < 1\} = \iint_{x+y < 1} f(x, y) dx dy$ 13 分

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} 6x^2y dy = \frac{1}{10}$$

.....15 分

(4) $E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x, y) dy$ 16 分

$$= \int_0^1 dx \int_0^1 xy \cdot 6x^2y dy = \frac{1}{2}$$

.....18 分

<p>五. (本题 6 分) 一公司有 50 张签约保险单, 各张保险单的索赔金额为 $X_i(i=1,2,\cdots,50)$ (以千美元计) 服从韦布尔分布, 均值 $E(X_i)=5$, 方差 $D(X_i)=6$, 求 50 张保险单的索赔的合计金额大于 300 的概率的近似值 (设各保险单的索赔金额是相互独立. 结果用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 表示)</p> <p>解: 由题意所求概率 $P\{\sum_{i=1}^{50} X_i > 300\}=1-P\{\sum_{i=1}^{50} X_i \leq 300\}$2 分</p> <p style="text-align: center;">中心极限定理服从标准正态分布</p> $=1-P\{\frac{\sum_{i=1}^{50} X_i - 50 \times 5}{\sqrt{50 \times 6}} \leq \frac{300 - 50 \times 5}{\sqrt{50 \times 6}}\}$4 分 $\approx 1 - \Phi(\frac{5\sqrt{3}}{3})$6 分 <p>六. (本题 8 分) 设总体 X 具有密度 $f(x)=\begin{cases}(\theta+1)x^{-\theta}, & x>1 \\ 0, & \text{其它}\end{cases}$, x_1,\cdots,x_n 为 X 的一组样本观察值, 求参数 θ 的最大似然估计值 $\hat{\theta}$.</p> <p>解: 似然函数 $L(x_1,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^n f(x_i)$1 分</p> $=(\theta+1)^n (\prod_{i=1}^n x_i)^{-\theta}$3 分 <p>取对数 $\ln L(x_1,\cdots,x_n)=n\ln(\theta+1)-\theta\sum_{i=1}^n \ln x_i$4 分</p> $\text{令 } \frac{d\ln L}{d\theta} = \frac{n}{\theta+1} - \sum_{i=1}^n \ln x_i = 0$6 分 $\text{得 } \theta = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln x_i} - 1$8 分	<p>所以, 参数 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln x_i} - 1$</p> <p>七. (本题 6 分) 设某种清漆的干燥时间 (以 h 计) 服从正态分布 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 现随机地抽取 9 个样品, 测得干燥时间的均值 $\bar{x}=6.1$ (小时), 样本均方差 $s=0.6$, σ^2 为未知, 求 μ 的置信水平为 95% 的置信区间. ($t_{0.025}(8)=2.3060, t_{0.025}(9)=2.2622$, $t_{0.05}(8)=1.8595$, 精确到第二位小数).</p> <p>解: 这里 $\alpha=0.05$, $n=9$, 故 μ 的置信水平为 95% 的置信区间为:</p> $(\bar{x} - t_{\alpha/2}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{\alpha/2}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}})$3 分 $=(6.1 - 2.306 \cdot \frac{0.6}{3}, 6.1 + 2.306 \cdot \frac{0.6}{3})$5 分 <p>即置信区间为 (5.64, 6.56)6 分</p> <p>八. (本题 8 分) 某种导线, 要求其电阻标准差不超过 0.005Ω. 今在一批导线中取样品 26 根, 测得样本标准差 $s=0.007\Omega$, 设总体为正态分布, 问在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下能认为这批导线电阻的标准差显著地偏大吗?</p> <p>($\chi_{0.05}^2(26)=38.885, \chi_{0.05}^2(25)=37.652, \chi_{0.025}^2(26)=41.923, \chi_{0.025}^2(25)=40.646$)</p> <p>解: 检验假设 $H_0: \sigma^2 \leq 0.005^2$, 备择假设 $H_1: \sigma^2 > 0.005^2$1 分</p> <p>拒绝域为 $\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \geq \chi_{\alpha}^2(n-1)$4 分</p> $= \chi_{0.05}^2(25) = 37.652$ <p>而 $\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{25 \times 0.007^2}{0.005^2} = 49 > 37.652$6 分</p> <p>落在拒绝域内, 故能认为这批导线电阻的标准差显著地偏大.8 分</p>
---	--

九. (本题 8 分) 设总体 X 服从指数分布, 其概率密度为: $f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

其中 $\theta > 0$ 为未知参数, 又设 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的一个样本,

(1) 求函数 $Z = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ 的分布函数 $F_Z(z)$ 和概率密度函数 $f_Z(z)$;

(2) 问统计量 $Z = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ 是否为 θ 的无偏估计量?

解: (1) 设 Z 的分布函数 $F_Z(z)$, 则 $F_Z(z) = P\{Z \leq z\}$

$$= P\{\min(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq z\} = 1 - P\{X_1 > z, X_2 > z, \dots, X_n > z\}$$

.....1 分

由 X_1, X_2, \dots, X_n 的独立性, 且与总体同分布, 故

当 $z > 0$ 时, $F_Z(z) = 1 - (1 - F_X(z))^n = 1 - (1 - (1 - e^{-z/\theta}))^n$

$$= 1 - e^{-nz/\theta}$$

.....3 分

得: Z 的分布函数为 $F_Z(z) = \begin{cases} 1 - e^{-nz/\theta}, & z > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

.....4 分

所以: Z 的概率密度函数 $f_Z(z) = \begin{cases} \frac{n}{\theta} e^{-nz/\theta}, & z > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

.....5 分

(2) 因 $E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} zf(z)dz$

$$= \int_0^{+\infty} z \cdot \frac{n}{\theta} e^{-nz/\theta} dz = \frac{\theta}{n}$$

.....7 分

得 $E(Z) \neq \theta$, 故 Z 不是 θ 的无偏估计量.

.....8 分

(或直接用指数分布的期望公式)

十. (本题 4 分) 设随机变量 X 的方差 $D(X) = 0$,

证明: $P\{X = E(X)\} = 1$, 即 X 以概率 1 取常数 $E(X)$.

证明: 用反证法, 假设 $P\{X = E(X)\} \neq 1$, 即 $P\{X = E(X)\} < 1$

也即 $P\{X \neq E(X)\} > 0$,

.....1 分

则对于某一个数 $\varepsilon > 0$, $P\{|X - E(X)| \geq \varepsilon\} > 0$

.....2 分

但由切比雪夫不等式, 对任意 $\varepsilon > 0$,
 有 $P\{|X - E(X)| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2} = 0$

.....4 分

矛盾, 于是 $P\{X = E(X)\} = 1$