杭州电子科技大学学生考试卷（ A ）卷——答案及评分标准

一 判断题（每小题 2 分，共 10 分）（正确打“√”，错误打“╳”）

1	2	3	4	5
√	╳	√	√	╳

二 选择题（每小题 2 分，共 20 分）

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	B	D	C	C	B	D	B	A	A

三 综合题（共 70 分）

1. 群$<G,*>$，$G=\{e,a,a^2\ldots a^{17}\}$, $|a|$=18，求

(1) $|a^{12}|$ 和 $|a^{-2}|$

(2) 由 a^3 生成的子群 G_1

(3) 求$[G:G_1]$

(4) 求 G_1 中的所有生成元

(5) 求满足 $a^x=a^{-10}$ 的整数 x，x 的区间为[0,12]

评分标准：10 分，每题 2 分。

(2)出错 1 处扣 1 分。

解：

(1) $|a^{12}|=3$ $|a^{-2}|=9$

(2) 由 a^3 生成的子群 $G_1=\{e,a^3,a^6,a^9,a^{12},a^{15}\}$

(3) $[G:G_1]=3$

(4) G_1 中的所有生成元：a^3，a^{15}

(5) 满足 $a^x=a^{-10}$ 的整数 x，x 的区间为[0,12] $x=8$

2. $<G,\times_7>$，G={1,2,3,4,5,6}

(1) 给出$<G,\times_7>$ 的运算表

(2) 验证$<G,\times_7>$构成群

(3) 给出每个元的次数

(4) $<G,\times_7>$是否为循环群，若是则求出所有生成元

评分标准：12 分，每题 3 分，

(1)出错 1 处扣 1 分

(2)非空、二元运算、结合律 1 分，单位元 1 分，逆元 1 分

(3)出错 1 处扣 1 分，可不写单位元的次数

(4)是循环群 1 分，两生成元各 1 分。

解：

(1) $<G,\times_7>$ 的运算表

$<G,\times_7>$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	1	3	5
3	3	6	2	5	1	4
4	4	1	5	2	6	3
5	5	3	1	6	4	2
6	6	5	4	3	2	1

(2) $<G,\times_7>$ 构成群

G 是非空集合，$<G,\times_7>$ 在 G 满足二元运算，$<G,\times_7>$ 满足结合律

单位元是 1，每个元素均有逆元，3 与 5 互为逆元，2 与 4 互为逆元，6 的逆元是自身

(3) 每个元的次数

|1|=1　|2|=|4|=3　|3|=|5|=6　|6|=2

(4) $<G,\times_7>$是循环群，生成元为 3 和 5

3. $<G,+_{12}>$，G={0, 1, 2, ⋯, 11}，H 是由元素 3 生成的子群

(1) 求 H

(2) 求 H 中每个元素的次数

(3) 求 H 在 G 中的所有右陪集

评分标准：9 分，每题 3 分，

(1)出错 1 处扣 1 分

(2)出错 1 处扣 1 分，可不写单位元的次数

(3)每个 1 分

解：

(1) H={0, 3, 6, 9}

(2) |0|=1　|3|= 4　|6|= 2　|9|= 4

(3) 求 H 在 G 中的所有右陪集

{0, 3, 6, 9}　{1, 4, 7, 10}　{2, 5, 8, 11}

4. （9 分）

群$<G,*>$，H，K 是其子群。定义 G 上的关系 R：

$R=\{<a,b>|\forall a,b\in G,\exists h\in H,k\in K,b=h*a*k\}$

证明 R 是 G 上的等价关系。

评分标准：9 分，自反，对称，传递各 3 分

证明：

自反：$\forall a \in G$，e 是 G 的单位元，因 H，K 是 G 的子群，有$e \in H, e \in K$

令 h=k=e，则 a = e*a*e = h*a*k，有<a,a>$\in R$

即 R 是自反的。

对称：$\forall a, b \in G$，若<a,b>$\in R$，则有$h \in H, k \in K$，使得 b= h*a*k

因 H，K 是 G 的子群，有$h^{-1} \in H, k^{-1} \in K$

有 a= h^{-1}*b*k^{-1}，即<b,a>$\in R$

即 R 是对称的。

传递：$\forall a, b, c \in G$，若<a,b>,<b,c>$\in R$，则有$h, g \in H, k, l \in K$，

使得 b= h*a*k，c= g*b*l

有 c= g*b*l= g*h*a*k*l= (g*h)*a*(k*l)

又因 H，K 是 G 的子群，有$g * h \in H, k * l \in K$

所以<a,c>$\in R$

即 R 是传递的。

5. (p, q)图如图 G 所示，求

(1) 求 G 的关联矩阵

(2) 求 G 的邻接矩阵 A，以及 A 的 2 次幂和 3 次幂矩阵。

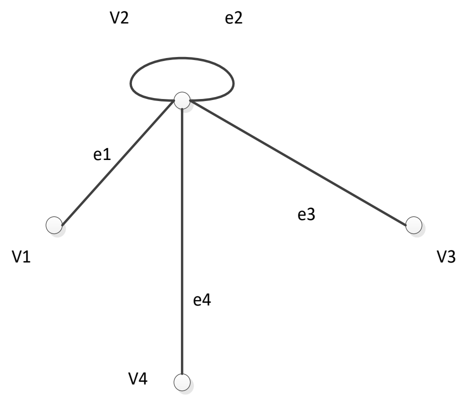
(3) 求顶点 V_1 到 V_2 长度小于或等于 3 的通路的条数。

评分标准：14 分，1, 3 每题 4 分，2 题 6 分

(1)出错 1 处扣 1 分

(2)每个矩阵 2 分，出错 1 处扣 1 分

解：



(1) 关联矩阵

$$M=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&2&1&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

(2) 邻接矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&1&1&1\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix} \qquad A^2=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&4&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$

$$A^3=\begin{pmatrix}1&4&1&1\\4&7&4&4\\1&4&1&1\\1&4&1&1\end{pmatrix}$$

(3) $a_{12} + a^2_{12} + a^3_{12} = 6$

6. （6 分）连通图 G 含有 k 个奇点，证明在图 G 中至少要添加 k/2 条边才能使该图成为欧拉图。

评分标准，以下每点各 2 分。

证明：

(1) 由握手定理可知，图中的奇点为偶数个，即 k 为偶数。

(2) 欧拉图中不存在奇点。
(3) 因此，要将 k 个奇点变为偶点，每两个奇点间添加一条边，使之成为偶点。
至少需要在 k 个奇点间添加 k/2 条边。

7. 如图 G 所示
(1) 求 $\lambda(G)$ 以及 $\kappa(G)$
(2) G 是否为欧拉图，请说明原因。
(3) G 是否为哈密尔顿图，如果是，请指出从 a 开始的哈密尔顿回路，不是请说明理由。
(4) G 中的生成树如图中虚线所示，求枝 ae 的基本割集以及弦 de 的基本回路。

评分标准，10 分，1,2,3 每题 2 分，

4 题 4 分，基本割集 2 分，基本回路 2 分，错 1 处扣 1 分。

解：

(1) $\lambda(G)=4$ $\kappa(G)=4$
(2) 是欧拉图，无奇点
(3) 是哈密尔顿图，哈密尔顿回路为 a-b-c-d-e-a
(4) ae 确定的基本割集为{(a,e),(a,d),(a,b),(a,c)}
de 确定的基本回路为：d-e-c-d