第三章 LTI系统的时域分析

- 3.1 系统的定义与分类
- 3.2 动态电路系统的微分方程描述
- 3.3 LTI连续时间系统的经典法分析
- 3.4 直流电源激励下的一阶动态电路分析
- 3.5 LTI连续时间系统的零输入响应和零状态响应
- 3.6 冲激响应和阶跃响应
- 3.7 卷积积分

回顾

- 直流电源激励下的一阶动态电路分析
  - 换路定则
  - 三要素法

本次课学习内容

- LTI连续时间系统的零输入响应和零状态响应
  - 由一阶动态电路分析引入双零法
  - LTI连续时间系统的双零法

关于三要素法的讨论

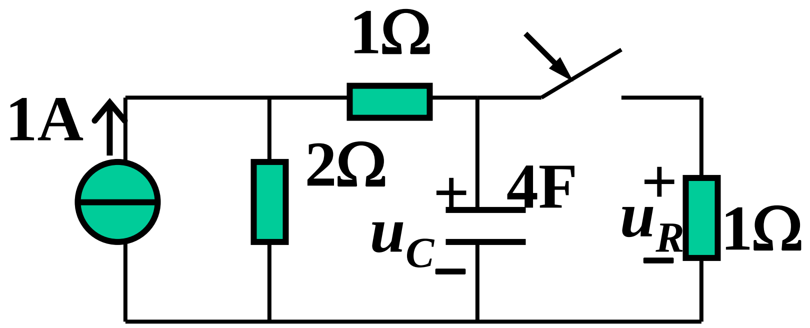
$$y(t) = y(\infty) + [y(0^+) - y(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} \quad t > 0$$

- 适用于：
  - 时间常数、初值、终值比较容易求的场合
    - 直流激励或正弦激励
  - 可用于求电路任意支路的电压或电流
- 仅对1阶电路适用
- 时间常数的概念仅对1阶电路适用

单选题 1分

设置

题图中$u_R(\infty)=$ ____V



A 0

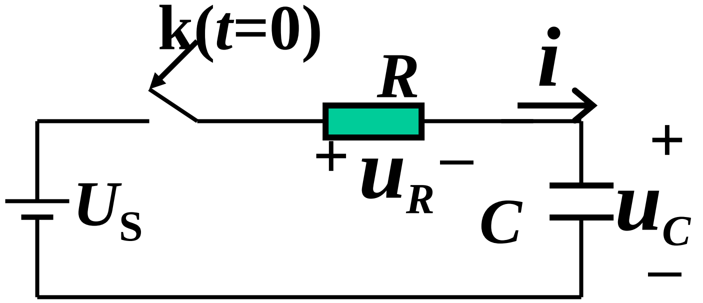
B 0.5

C 1

D 2

提交

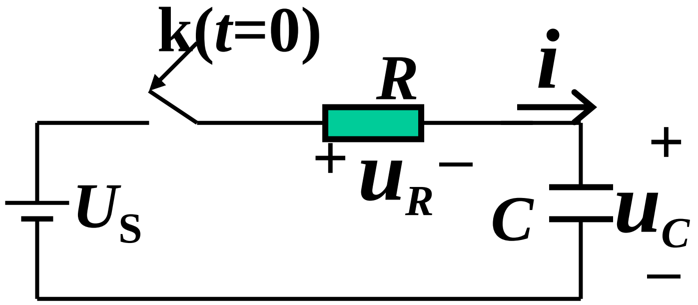
3.4.2 一阶动态电路的响应



$u_C(0^-)=U_0$　求：电容电压$u_C(t)$。

$$u_C = U_S + (U_0 - U_S)e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad t \geq 0$$

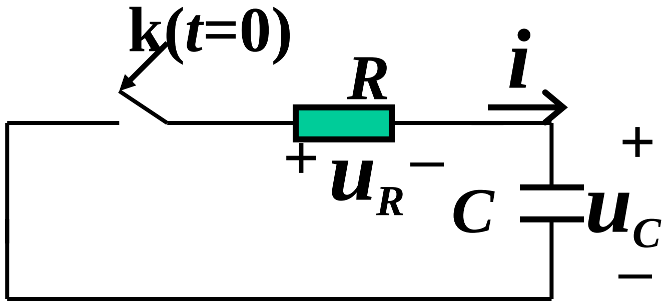
全响应



$u_C(0^-)=0$　零状态(储能元件无初始储能)

$u_C(0^+)=0$　$u_C(\infty)=U_S$　$\tau=RC$

$$u_C = U_S + (0 - U_S)e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad t \geq 0$$



$u_C(0^-)=U_0$　零输入(没有外加电源)

$u_C(0^+)=U_0$　$u_C(\infty)=0$　$\tau=RC$

$$u_C = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad t \geq 0$$

零输入响应(zero-input response) (ZIR)：没有外加激励，由L、C初始储能引起的响应

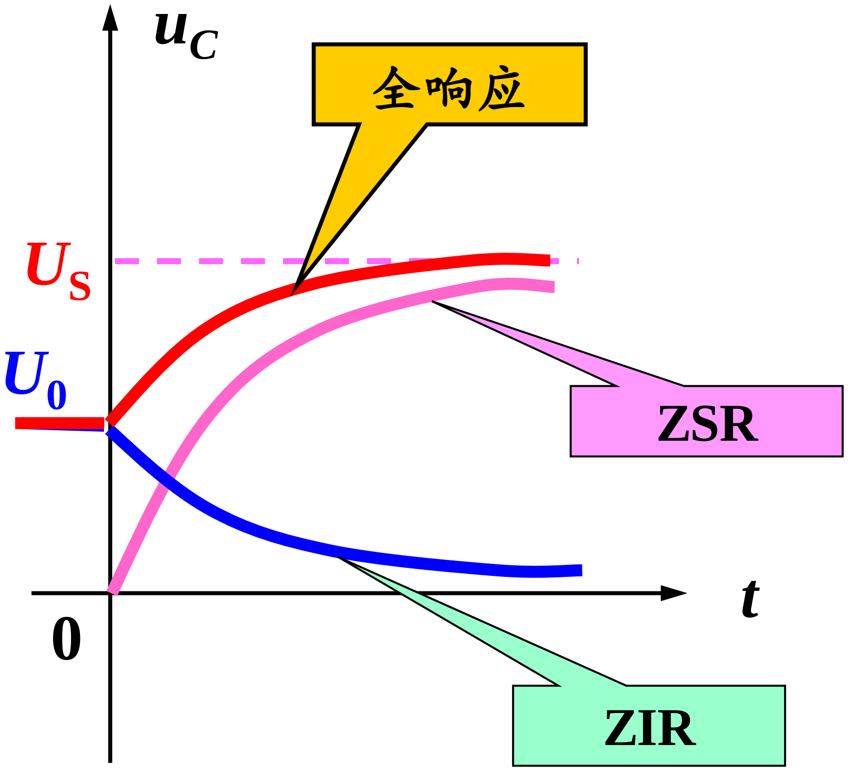
零状态响应(zero-state response) (ZSR)：L、C没有初始储能，由外加激励引起的响应

$$u_C = U_S(1-e^{-\frac{t}{\tau}}) + U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (t \geq 0)$$

ZSR

ZIR

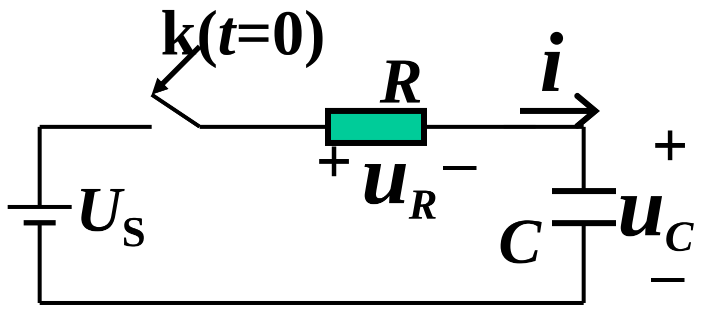
$$\begin{cases} u_C(0^-)=0 \\ i_L(0^-)=0 \end{cases}$$



单选题 1分

设置

电阻电压$u_R(t)$的零状态响应是



$u_C(0^-)=U_0$

A $-U_0\,e^{-\frac{t}{\tau}}$

B $U_S+(U_0-U_S)e^{-\frac{t}{\tau}}$

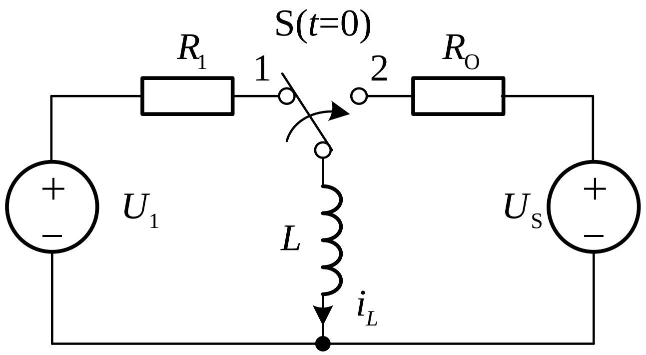
C $U_S\,e^{-\frac{t}{\tau}}$

D $(U_S-U_0)e^{-\frac{t}{\tau}}$

提交

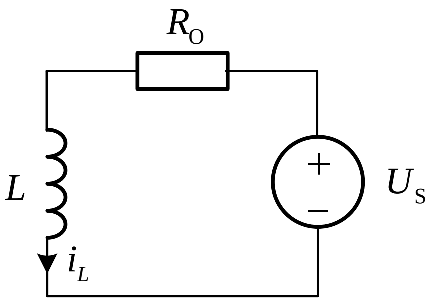
3.4.2 一阶动态电路的响应

一阶RL



$$i_L(0_-)=\frac{U_1}{R_1}$$

换路后



$$\begin{cases} L\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i_L+R_Oi_L=U_S \\ i_L(0_+)=\dfrac{U_1}{R_1} \end{cases}$$

$$i_{Lh}=A\mathrm{e}^{-\frac{1}{L/R_O}t}$$

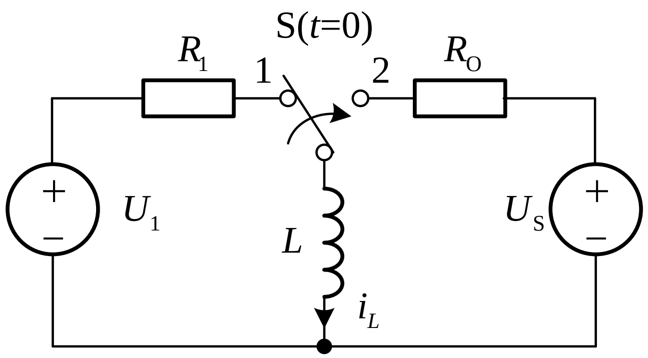
$$i_{Lp}=\frac{U_S}{R_O}$$

$$i_L=\left(A\mathrm{e}^{-\frac{1}{L/R_O}t}+\frac{U_S}{R_O}\right)\qquad(t>0)$$

利用 $i_L(0_+)=\dfrac{U_1}{R_1}$ 可得 $A=\dfrac{U_1}{R_1}-\dfrac{U_S}{R_O}$

$$i_L=\left(\frac{U_1}{R_1}-\frac{U_S}{R_O}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{L/R_O}t}+\frac{U_S}{R_O}\qquad(t>0)$$

3.4.2 一阶动态电路的响应



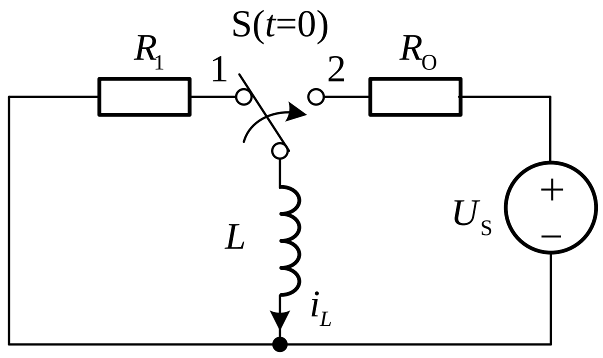
$$i_L=\left(\frac{U_1}{R_1}-\frac{U_S}{R_O}\right)e^{-\frac{1}{L/R_O}t}+\frac{U_S}{R_O}\qquad (t>0)$$

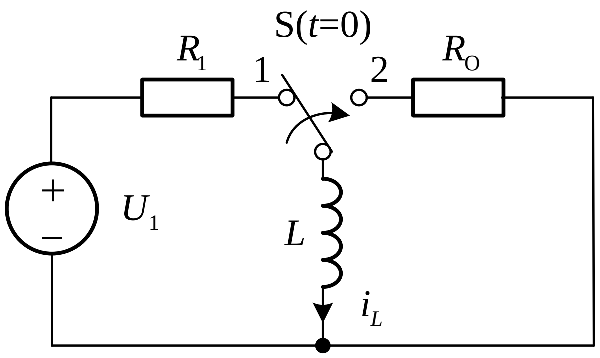
$$\frac{U_1}{R_O}=i_L(0_-)$$

由电路决定

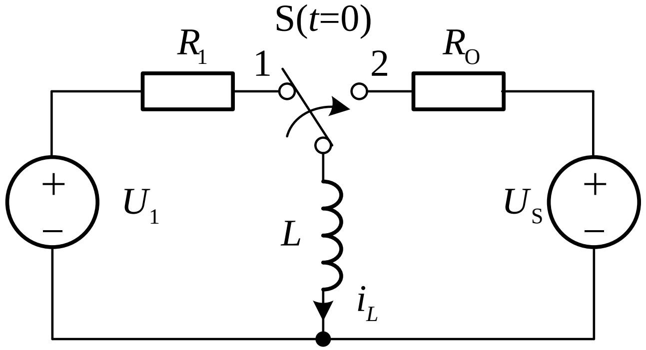
$$i_L=\frac{U_S}{R_O}\left(1-e^{-\frac{1}{L/R_O}t}\right)+i_L(0_-)e^{-\frac{1}{L/R_O}t}\qquad (t>0)$$

零状态响应　零输入响应





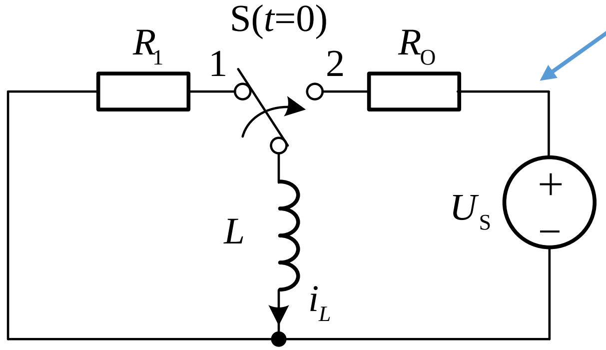
3.4.2 一阶动态电路的响应

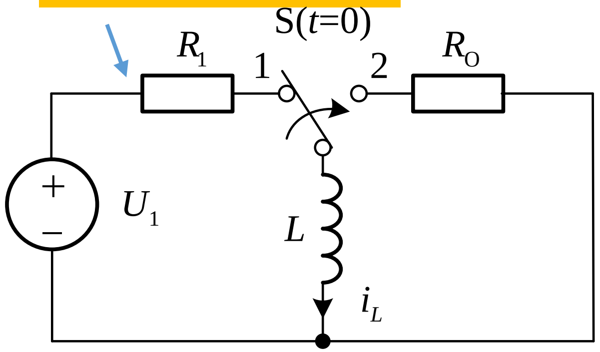


$$i_L=\frac{U_S}{R_O}\left(1-e^{-\frac{1}{L/R_O}t}\right)+i_L(0_-)e^{-\frac{1}{L/R_O}t}\qquad (t>0)$$

零状态响应

零输入响应





$$\begin{cases} L\dfrac{d}{dt}i_{Lzs}+R_O i_{Lzs}=U_S \\ i_{Lzs}(0_-)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} L\dfrac{d}{dt}i_{Lzi}+R_O i_{Lzi}=0 \\ i_{Lzi}(0_-)=U_1/R_1 \end{cases}$$

$$i_{Lzs}=\frac{U_S}{R_O}\left(1-e^{-\frac{1}{L/R_o}t}\right)\qquad (t>0)$$

$$i_{Lzi}=i_L(0_-)e^{-\frac{1}{L/R_O}t}\qquad (t>0)$$

$$\boxed{i_L=i_{Lzs}+i_{Lzi}\qquad (t>0)}$$

稳态响应　　　　暂态响应（瞬态响应）

$$u_C(t)=\overbrace{u_C(\infty)}^{\text{强制分量/非齐次特解}}+\overbrace{[u_C(0^+)-u_C(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}}^{\text{自由分量/齐次通解}}$$

数学视角
方程视角

$$=\underbrace{\left[u_C(\infty)-u_C(\infty)\,e^{-\frac{t}{\tau}}\right]}_{\text{零状态响应}}+\underbrace{u_C(0^+)e^{-\frac{t}{\tau}}}_{\text{零输入响应}}$$

电路视角
能量视角

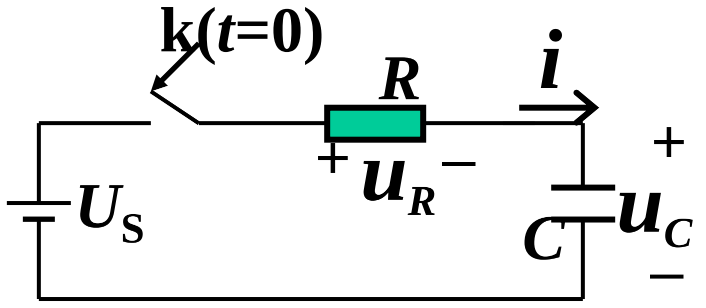
全响应 = 强制分量 + 自由分量
= 零输入响应 + 零状态响应

为什么要这样划分?

原因1：ZIR 和 ZSR 都可能出现过渡过程

原因2：ZSR 对于分析一般激励的响应非常重要

激励—响应线性关系



$u_C(0^-)=0$ 零状态

$$u_C = U_S(1-e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad t \geq 0$$

激励	响应
U_S	$u_C = U_S(1-e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad t \geq 0$
$2U_S$	$u_C = 2U_S(1-e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad t \geq 0$
$U_{S1}+U_{S2}$	$u_C = (U_{S1}+U_{S2})(1-e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad t \geq 0$

利用这个性质求任意激励下电路的ZSR

→进而求任意激励作用下电路的响应

3.4.2 一阶动态电路的响应

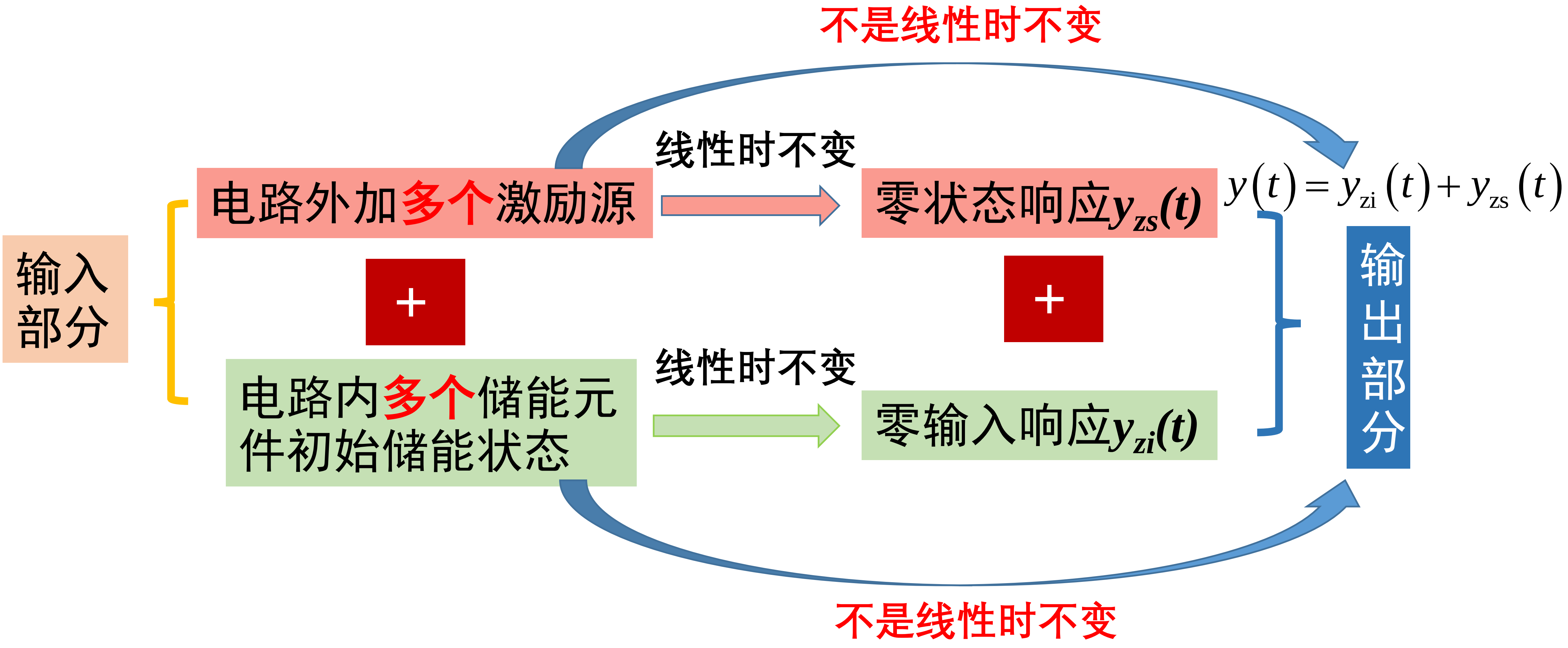
一阶RC或RL电路均可以通过零状态响应和零输入响应来计算完全响应，这种方法称为双零法。

当外加激励增加k倍，零状态响应也增加k倍；而当多个激励电源作用于初始状态为零的电路时可以进行叠加，这些特性称为零状态响应的线性特性。

当起始状态增加k倍，零输入响应也增加k倍，这种特性为零输入响应的线性特性。

3.5 LTI连续时间系统的零输入响应和零状态响应

LTI连续时间系统（可用N阶微分方程描述）



3.5 LTI连续时间系统的零输入响应和零状态响应

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} y(t) = \sum_{l=0}^{m} b_l \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}t^l} x(t) \quad (n \geq m)$$

及起始状态 $y^{(i)}(0_-) \quad (i = 0, 1, \cdots, n-1)$

零输入响应

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} y_{\mathrm{zi}}(t) = 0 \\ y_{\mathrm{zi}}^{(i)}(0_-) = y^{(i)}(0_-) \quad (i = 0, 1, \cdots, n-1) \end{cases}$$

零状态响应

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} y_{\mathrm{zs}}(t) = \sum_{l=0}^{m} b_l \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}t^l} x(t) \\ y_{\mathrm{zs}}^{(i)}(0_-) = 0 \quad (i = 0, 1, \cdots, n-1) \end{cases}$$

例3.5-1 LTI系统方程为 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t)+5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)+4y(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)+2x(t)$

$y(0_-)=2, y'(0_-)=1$ ，求该系统在下列不同激励下的完全响应 $y(t)$

（1）$x(t)=\varepsilon(t)$ （2）$x(t)=\mathrm{e}^{-3t}\varepsilon(t)$

（3）$x(t)=5\varepsilon(t)-3\mathrm{e}^{-3t}\varepsilon(t)$ （4）$x(t)=4\varepsilon(t)+2\mathrm{e}^{-3(t-1)}\varepsilon(t-1)$

解 系统起始状态不变，所以在不同因果信号激励下，系统的零输入响应不变。求解该系统零输入响应的微分方程为

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y_{zi}(t)+5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y_{zi}(t)+4y_{zi}(t)=0\\ y_{zi}(0_-)=2, y'_{zi}(0_-)=1\end{cases}\qquad \begin{cases}y_{zi}(0_+)=y_{zi}(0_-)=2\\ y'_{zi}(0_+)=y'_{zi}(0_-)=1\end{cases}$$

$$y_{zi}(t)=\left(A_1\mathrm{e}^{-t}+B_1\mathrm{e}^{-4t}\right)\varepsilon(t)\qquad \begin{cases}y_{zi}(0_+)=A_1+B_1=2\\ y'_{zi}(0_+)=-A_1-4B_1=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A_1=3\\ B_1=-1\end{cases}$$

该系统的零输入响应为 $y_{zi}(t)=\left(3\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-4t}\right)\varepsilon(t)$

例3.5-1 LTI系统方程为 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t)+5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)+4y(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)+2x(t)$

$y(0_-)=2$ $y'(0_-)=1$ ，求该系统在下列不同激励下的完全响应 $y(t)$

（1） $x(t)=\varepsilon(t)$

（2） $x(t)=\mathrm{e}^{-3t}\varepsilon(t)$

（3） $x(t)=5\varepsilon(t)-3\mathrm{e}^{-3t}\varepsilon(t)$

（4） $x(t)=4\varepsilon(t)+2\mathrm{e}^{-3(t-1)}\varepsilon(t-1)$

求解该系统零状态响应的微分方程为

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y_{zs}(t)+5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y_{zs}(t)+4y_{zs}(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)+2x(t)\\ y_{zs}(0_-)=0, y'_{zs}(0_-)=0\end{cases}$$

3.5 LTI连续时间系统的零输入响应和零状态响应

例3.5-1 LTI系统方程为 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t)+5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)+4y(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)+2x(t)$

$y(0_-)=2, y'(0_-)=1$ ，求该系统在下列不同激励下的完全响应 $y(t)$

（1） $x(t)=\varepsilon(t)$　　（2） $x(t)=\mathrm{e}^{-3t}\varepsilon(t)$

（3） $x(t)=5\varepsilon(t)-3\mathrm{e}^{-3t}\varepsilon(t)$　　（4） $x(t)=4\varepsilon(t)+2\mathrm{e}^{-3(t-1)}\varepsilon(t-1)$

（1） 将 $x(t)=\varepsilon(t)$ 代入该系统的零状态响应微分方程

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y_{zs1}(t)+5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y_{zs1}(t)+4y_{zs1}(t)=\delta(t)+2\varepsilon(t)\\ y_{zs1}(0_-)=0, y'_{zs1}(0_-)=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}y_{zs1}(0_+)=y_{zs1}(0_-)=0\\ y'_{zs1}(0_+)=y'_{zs1}(0_-)+1=1\end{cases}$$

例3.5-1 LTI系统方程为 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t)+5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)+4y(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)+2x(t)$

$y(0_-)=2, y'(0_-)=1$，求该系统在下列不同激励下的完全响应 $y(t)$

（1） $x(t)=\varepsilon(t)$　　（2） $x(t)=\mathrm{e}^{-3t}\varepsilon(t)$

（3） $x(t)=5\varepsilon(t)-3\mathrm{e}^{-3t}\varepsilon(t)$　　（4） $x(t)=4\varepsilon(t)+2\mathrm{e}^{-3(t-1)}\varepsilon(t-1)$

（1）在 $t>0$ 时，微分方程可以简化为

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y_{zs1}(t)+5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y_{zs1}(t)+4y_{zs1}(t)=2$$

$$y_{zs1}(t)=\left(\frac{1}{2}+A_2\mathrm{e}^{-t}+B_2\mathrm{e}^{-4t}\right)\varepsilon(t)$$

$$\begin{cases} y_{zs1}(0_+)=\frac{1}{2}+A_2+B_2=0 \\ y'_{zs1}(0_+)=-A_2-4B_2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_2=-\frac{1}{3} \\ B_2=-\frac{1}{6} \end{cases}$$

3.5 LTI连续时间系统的零输入响应和零状态响应

例3.5-1 LTI系统方程为 $\frac{d^2}{dt^2}y(t)+5\frac{d}{dt}y(t)+4y(t)=\frac{d}{dt}x(t)+2x(t)$

$y(0_-)=2, y'(0_-)=1$ ，求该系统在下列不同激励下的完全响应 $y(t)$

（1） $x(t)=\varepsilon(t)$ （2） $x(t)=e^{-3t}\varepsilon(t)$

（3） $x(t)=5\varepsilon(t)-3e^{-3t}\varepsilon(t)$ （4） $x(t)=4\varepsilon(t)+2e^{-3(t-1)}\varepsilon(t-1)$

（1） $y_{zs1}(t)=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}e^{-t}-\frac{1}{6}e^{-4t}\right)\varepsilon(t)$

$$y_1(t)=y_{zi}(t)+y_{zs1}(t)$$

$$=\left(3e^{-t}-e^{-4t}\right)\varepsilon(t)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}e^{-t}-\frac{1}{6}e^{-4t}\right)\varepsilon(t)$$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{8}{3}e^{-t}-\frac{7}{6}e^{-4t}\right)\varepsilon(t)$$

例3.5-1 LTI系统方程为 $\frac{d^2}{dt^2}y(t)+5\frac{d}{dt}y(t)+4y(t)=\frac{d}{dt}x(t)+2x(t)$

$y(0_-)=2, y'(0_-)=1$，求该系统在下列不同激励下的完全响应 $y(t)$

（1） $x(t)=\varepsilon(t)$　　（2） $x(t)=e^{-3t}\varepsilon(t)$

（3） $x(t)=5\varepsilon(t)-3e^{-3t}\varepsilon(t)$　　（4） $x(t)=4\varepsilon(t)+2e^{-3(t-1)}\varepsilon(t-1)$

（2） 将 $x(t)=e^{-3t}\varepsilon(t)$ 代入该系统的零状态响应微分方程

$$\begin{cases}\frac{d^2}{dt^2}y_{zs2}(t)+5\frac{d}{dt}y_{zs2}(t)+4y_{zs2}(t)=e^{-3t}\delta(t)-e^{-3t}\varepsilon(t)=\delta(t)-e^{-3t}\varepsilon(t)\\ y_{zs2}(0_-)=0, y'_{zs2}(0_-)=0\end{cases}$$

$$\boxed{f(t)\delta(t-t_0)=f(t_0)\delta(t-t_0)}$$

$$\begin{cases}y_{zs2}(0_+)=y_{zs2}(0_-)=0\\ y'_{zs2}(0_+)=y'_{zs2}(0_-)+1=1\end{cases}$$

例3.5-1 LTI系统方程为 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t)+5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)+4y(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)+2x(t)$

$y(0_-)=2, y'(0_-)=1$，求该系统在下列不同激励下的完全响应 $y(t)$

（1）$x(t)=\varepsilon(t)$ （2）$x(t)=\mathrm{e}^{-3t}\varepsilon(t)$

（3）$x(t)=5\varepsilon(t)-3\mathrm{e}^{-3t}\varepsilon(t)$ （4）$x(t)=4\varepsilon(t)+2\mathrm{e}^{-3(t-1)}\varepsilon(t-1)$

（2）在 $t>0$ 时，微分方程可以简化为

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y_{zs2}(t)+5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y_{zs2}(t)+4y_{zs2}(t)=-\mathrm{e}^{-3t}$$

$$y_{zs}(t)=\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3t}+A_3\mathrm{e}^{-t}+B_3\mathrm{e}^{-4t}\right)\varepsilon(t)$$

$$\begin{cases} y_{zs2}(0_+)=\frac{1}{2}+A_3+B_3=0 \\ y'_{zs2}(0_+)=-\frac{3}{2}-A_3-4B_3=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_3=\frac{1}{6} \\ B_3=-\frac{2}{3} \end{cases}$$

3.5 LTI连续时间系统的零输入响应和零状态响应

例3.5-1 LTI系统方程为 $\frac{d^2}{dt^2}y(t)+5\frac{d}{dt}y(t)+4y(t)=\frac{d}{dt}x(t)+2x(t)$

$y(0_-)=2, y'(0_-)=1$ ，求该系统在下列不同激励下的完全响应 $y(t)$

（1） $x(t)=\varepsilon(t)$ （2） $x(t)=e^{-3t}\varepsilon(t)$

（3） $x(t)=5\varepsilon(t)-3e^{-3t}\varepsilon(t)$ （4） $x(t)=4\varepsilon(t)+2e^{-3(t-1)}\varepsilon(t-1)$

（2）

$$y_{zs}(t)=\left(\frac{1}{2}e^{-3t}+\frac{1}{6}e^{-t}-\frac{2}{3}e^{-4t}\right)\varepsilon(t)$$

$$y_2(t)=y_{zi}(t)+y_{zs2}(t)$$

$$=\left(3e^{-t}-e^{-4t}\right)\varepsilon(t)+\left(\frac{1}{2}e^{-3t}+\frac{1}{6}e^{-t}-\frac{2}{3}e^{-4t}\right)\varepsilon(t)$$

$$=\left(\frac{1}{2}e^{-3t}+\frac{19}{6}e^{-t}-\frac{5}{3}e^{-4t}\right)\varepsilon(t)$$

例3.5-1 LTI系统方程为 $\frac{d^2}{dt^2}y(t)+5\frac{d}{dt}y(t)+4y(t)=\frac{d}{dt}x(t)+2x(t)$

$y(0_-)=2, y'(0_-)=1$ ，求该系统在下列不同激励下的完全响应 $y(t)$

（1） $x(t)=\varepsilon(t)$ （2） $x(t)=e^{-3t}\varepsilon(t)$

（3） $x(t)=5\varepsilon(t)-3e^{-3t}\varepsilon(t)$ （4） $x(t)=4\varepsilon(t)+2e^{-3(t-1)}\varepsilon(t-1)$

（3）在已知激励为$x(t)=\varepsilon(t)$和 $x(t)=e^{-3t}\varepsilon(t)$ 的零状态响应的情况下，利用LTI系统中零状态响应与激励之间的线性关系，可得激励信号为 $x(t)=5\varepsilon(t)-3e^{-3t}\varepsilon(t)$ 时零状态响应为

$$y_{zs3}(t)=5y_{zs1}(t)-3y_{zs2}(t)$$

$$=5\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}e^{-t}-\frac{1}{6}e^{-4t}\right)\varepsilon(t)-3\left(\frac{1}{2}e^{-3t}+\frac{1}{6}e^{-t}-\frac{2}{3}e^{-4t}\right)\varepsilon(t)$$

$$=\left(\frac{5}{2}-\frac{3}{2}e^{-3t}-\frac{13}{6}e^{-t}+\frac{7}{6}e^{-4t}\right)\varepsilon(t)$$

例3.5-1 LTI系统方程为 $\frac{d^2}{dt^2}y(t)+5\frac{d}{dt}y(t)+4y(t)=\frac{d}{dt}x(t)+2x(t)$

$y(0_-)=2, y'(0_-)=1$ ，求该系统在下列不同激励下的完全响应 $y(t)$

（1） $x(t)=\varepsilon(t)$　　（2） $x(t)=e^{-3t}\varepsilon(t)$

（3） $x(t)=5\varepsilon(t)-3e^{-3t}\varepsilon(t)$　　（4） $x(t)=4\varepsilon(t)+2e^{-3(t-1)}\varepsilon(t-1)$

（3）

$$
\begin{aligned}
y_3(t) &= y_{zi}(t)+y_{zs3}(t) \\
&= \left(3e^{-t}-e^{-4t}\right)\varepsilon(t)+\left(\frac{5}{2}-\frac{3}{2}e^{-3t}-\frac{13}{6}e^{-t}+\frac{7}{6}e^{-4t}\right)\varepsilon(t) \\
&= \left(\frac{5}{2}-\frac{3}{2}e^{-3t}+\frac{5}{6}e^{-t}+\frac{1}{6}e^{-4t}\right)\varepsilon(t)
\end{aligned}
$$

例3.5-1 LTI系统方程为 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t)+5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)+4y(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)+2x(t)$

$y(0_-)=2, y'(0_-)=1$，求该系统在下列不同激励下的完全响应 $y(t)$

（1） $x(t)=\varepsilon(t)$

（2） $x(t)=\mathrm{e}^{-3t}\varepsilon(t)$

（3） $x(t)=5\varepsilon(t)-3\mathrm{e}^{-3t}\varepsilon(t)$

（4） $x(t)=4\varepsilon(t)+2\mathrm{e}^{-3(t-1)}\varepsilon(t-1)$

(4) 利用LTI系统中零状态响应与激励之间的线性时不变关系

$$y_{zs4}(t)=4y_{zs1}(t)+2y_{zs2}(t-1)$$

$$=4\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-t}-\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-4t}\right)\varepsilon(t)+2\left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3(t-1)}+\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-(t-1)}-\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-4(t-1)}\right]\varepsilon(t-1)$$

$$=\left(2-\frac{4}{3}\mathrm{e}^{-t}-\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-4t}\right)\varepsilon(t)+\left[\mathrm{e}^{-3(t-1)}+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-(t-1)}-\frac{4}{3}\mathrm{e}^{-4(t-1)}\right]\varepsilon(t-1)$$

3.5 LTI连续时间系统的零输入响应和零状态响应

例3.5-1 LTI系统方程为 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t)+5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)+4y(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)+2x(t)$

$y(0_-)=2,\ y'(0_-)=1$ ，求该系统在下列不同激励下的完全响应 $y(t)$

（1） $x(t)=\varepsilon(t)$

（2） $x(t)=\mathrm{e}^{-3t}\varepsilon(t)$

（3） $x(t)=5\varepsilon(t)-3\mathrm{e}^{-3t}\varepsilon(t)$

（4） $x(t)=4\varepsilon(t)+2\mathrm{e}^{-3(t-1)}\varepsilon(t-1)$

（4） $y_4(t)=y_{zi}(t)+y_{zs4}(t)$

$$=\left(3\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-4t}\right)\varepsilon(t)+\left(2-\frac{4}{3}\mathrm{e}^{-t}-\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-4t}\right)\varepsilon(t)$$

$$+\left[\mathrm{e}^{-3(t-1)}+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-(t-1)}-\frac{4}{3}\mathrm{e}^{-4(t-1)}\right]\varepsilon(t-1)$$

$$=\left(2+\frac{5}{3}\mathrm{e}^{-t}-\frac{5}{3}\mathrm{e}^{-4t}\right)\varepsilon(t)+\left[\mathrm{e}^{-3(t-1)}+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-(t-1)}-\frac{4}{3}\mathrm{e}^{-4(t-1)}\right]\varepsilon(t-1)$$

3.5 LTI连续时间系统的零输入响应和零状态响应

例3.5-1 LTI系统方程为 $\frac{d^2}{dt^2}y(t)+5\frac{d}{dt}y(t)+4y(t)=\frac{d}{dt}x(t)+2x(t)$

$y(0_-)=2, y'(0_-)=1$，求该系统在下列不同激励下的完全响应 $y(t)$

（1）$x(t)=\varepsilon(t)$　　（2）$x(t)=e^{-3t}\varepsilon(t)$

（3）$x(t)=5\varepsilon(t)-3e^{-3t}\varepsilon(t)$　　（4）$x(t)=4\varepsilon(t)+2e^{-3(t-1)}\varepsilon(t-1)$

小结：

① 在t>0时，不管输入信号如何，对于固定结构(即齐次方程相同)的系统而言，其零输入响应都是一样的；

②不同的输入信号，引起该系统不同的零状态响应，即输入不同，零状态响应需要重新计算

③可利用LTI连续时间系统的零状态响应与激励之间的**线性时不变关系**，计算组合激励的零状态响应

LTI连续时间系统完全响应的求解

- 如果是一阶动态电路系统，且输入有限时，三要素法较方便。
- 如果是多阶动态系统，则
  - 经典法：
    - 特解
    - 齐次解←初值
    - 完全解
  - 双零法
    - 零输入响应←初值
    - 零状态响应
    - 完全解

习题：3-15，3-16
提交截止时间：4月23日（周五）早8点

经典时域方法：微分方程解法不足之处

- 若微分方程右边激励项较复杂，则难以处理。
- 若激励信号发生变化，则须全部重新求解。
- 若初始条件发生变化，则须全部重新求解。
- 这种方法是一种纯数学方法，无法突出系统响应的物理概念。

Q：一般来说，在某一时刻，初始状态是确定的，所以零输入响应是明确的；那么有没有办法将所有可能的输入都表征成某几类信号的线性组合形式，从而利用线性时不变性来求解零状态响应呢?

系统响应求解方法

1. 经典时域分析方法:　　求解微分方程

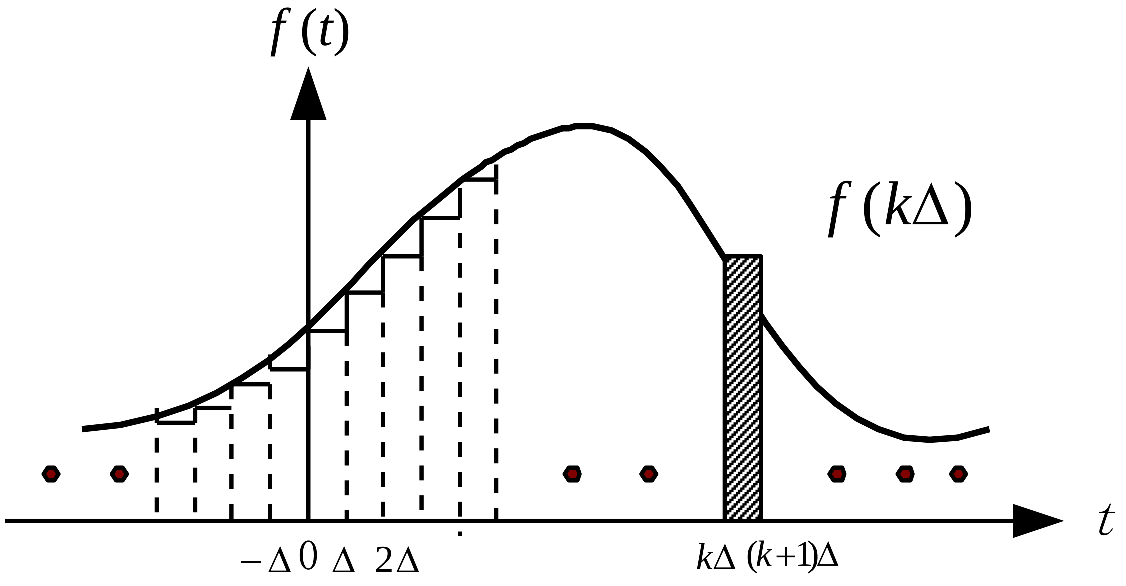
2.卷积法:

系统完全响应=零输入响应+零状态响应

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t) = y_{zi}(t) + f(t) * h(t)$$

- 求解齐次微分方程得到零输入响应
- 利用卷积积分可求出零状态响应

连续时间信号可分解为冲激函数的线性组合



连续信号表示为冲激信号的迭加

$$f(t) \approx \cdots + f(0)[\varepsilon(t) - \varepsilon(t-\Delta)] + f(\Delta)[\varepsilon(t-\Delta) - \varepsilon(t-2\Delta)] + \cdots$$

$$+ f(k\Delta)[\varepsilon(t-k\Delta) - \varepsilon(t-k\Delta-\Delta)] + \cdots$$

$$f(t)=\cdots+f(0)\frac{[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-\Delta)]}{\Delta}\Delta+f(\Delta)\frac{[\varepsilon(t-\Delta)-\varepsilon(t-2\Delta)]}{\Delta}\Delta+\cdots$$

$$+f(k\Delta)\frac{[\varepsilon(t-k\Delta)-\varepsilon(t-k\Delta-\Delta)]}{\Delta}\Delta+\cdots$$

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(k\Delta)\frac{[\varepsilon(t-k\Delta)-\varepsilon(t-k\Delta-\Delta)]}{\Delta}\Delta$$

当$\Delta\to0$时，$k\Delta\to\tau$，$\Delta\to d\tau$，且 $\frac{[\varepsilon(t-k\Delta)-\varepsilon(t-k\Delta-\Delta)]}{\Delta}\to\delta(t-\tau)$

$$\boxed{f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau}$$

取样性

信号分解为$\delta(t)$的线性组合物理意义与实际应用

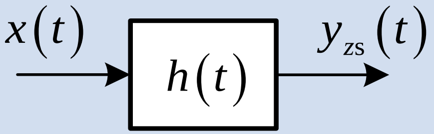
$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

物理意义：

不同的信号都可以分解为冲激序列，
信号不同只是它们的系数不同。

实际应用：

当求解信号$f(t)$通过**LTI**系统产生的零状态响应时，
只需**求解冲激信号通过该系统产生的零状态响应**，
然后**利用线性时不变**系统的**特性**，进行叠加和延时即可求得信号$f(t)$产生的零状态响应。

	序号	激励	LTI系统	零状态响应
	1	$\delta(t)$		$h(t)$
时不变	2	$\delta(t-\tau)$		$h(t-\tau)$
线性	3	$x(\tau)\delta(t-\tau)\Delta\tau$		$x(\tau)h(t-\tau)\Delta\tau$
叠加性	4	$\sum x(\tau)\delta(t-\tau)\Delta\tau$		$\sum x(\tau)h(t-\tau)\Delta\tau$
	5	$\lim\limits_{\Delta\tau\to0}\sum x(\tau)\delta(t-\tau)\Delta\tau$		$\lim\limits_{\Delta\tau\to0}\sum x(\tau)h(t-\tau)\Delta\tau$
	6	$x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau$		$y_{zs}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau$

定义 $f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau=f_1(t)*f_2(t)$ 为$f_1(t)$与$f_2(t)$的卷积积分

则 $y_{zs}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau=x(t)*h(t)$