杭州电子科技大学学生考试卷（A）卷

考试课程	高等数学 A2	考试日期	2020 年　月　日	成绩	
课程号	A0714202	任课教师姓名			
考生姓名		学号（8 位）		专业	

题号	一 1-8	二 9-12	三 13-16	四 17-19	五 20	六 21
得分						

注意：本卷总共 4 页，总分 100 分，时间 120 分钟

得分	

一、选择题 （本题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分）

1、向量 $\vec{a}=(6,-1,2)$ 在向量 $\vec{b}=(7,-4,4)$ 上的投影为（　B　）

（A）3；　（B）6；　（C）-2；　（D）-4.

2、直线 $\frac{x}{3}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{7}$ 和平面 $3x-2y+7z-8=0$ 的位置关系是（　B　）

（A）平行；　（B）垂直；　（C）斜交；　（D）直线在平面上.

3、极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)}\frac{\sin(xy)}{y}=$（　C　）

（A）0；　（B）1；　（C）2；　（D）不存在.

4、二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的偏导数存在是函数在该点连续的（　D　）

（A）充分非必要条件；　（B）必要非充分条件；　（C）充要条件；　（D）以上都不对.

5、函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $z^3-3xyz=a^3$ 所确定，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=$（　A　）

（A）$\frac{yz}{z^2-xy}$；　（B）$\frac{yz}{xy-z^2}$；　（C）$\frac{xy-z^2}{yz}$；　（D）$\frac{z^2-xy}{yz}$.

6、已知 $\iint\limits_D\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,d\sigma=\pi$，其中 $D:x^2+y^2\le a^2$，则 $a=$（　D　）

（A）1；　（B）$\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$；　（C）$\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$；　（D）$\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$.

7、设 α 为常数，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin n}{n^3}-\frac{\alpha}{\sqrt[3]{n}}\right)$（　C　）

（A）绝对收敛；　（B）条件收敛；　（C）敛散性与有 α 关；　（D）发散.

8、$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的和函数是（　A　）

（A）e^{-x^2}；　（B）e^{x^2}；　（C）$-e^{-x^2}$；　（D）$-e^{x^2}$.

得分	

二、填空题 （本题共 4 小题，每小题 3 分，共 12 分）

9、函数 $u=2xy+2z$ 在点 $(1,1,2)$ 处的方向导数的最大值为________.（ $2\sqrt{3}$ ）

10、交换积分次序 $\int_0^1dx\int_0^{x^2}f(x,y)dy+\int_1^{\sqrt{2}}dx\int_0^{2-x^2}f(x,y)dy=$ $\int_0^1dy\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y}}f(x,y)dx$.

11、设 L 为 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}=1$，其周长 a，则 $\oint_L(3x^2-4xy+2y^2)\,ds=$________.（ $6a$ ）

12、设 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x\le 0\\ 1+x^2, & 0<x\le\pi\end{cases}$，则其以 2π 为周期的傅里叶级数在点 $x=\pi$ 处收敛于______.（ $\frac{1}{2}\pi^2$ ）

得分	

三、计算题（共 4 小题，每题 6 分，共 24 分）

13、设 $z = x\ln(x+\ln y)$，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},dz$.

14、求曲线 $\begin{cases} x^2+z^2=10 \\ y^2+z^2=10 \end{cases}$ 在点 $(1,1,3)$ 处的切线和法平面方程.

15、求 $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^3}dxdy$，其中 D 是由 $x=2$，$y=\sqrt{x}$，$xy=1$ 围成.

16、设 $\int_L (x^2-y)dx-(x+\sin^2 y)dy$，其中 L 是沿曲线 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 从点 $(0,0)$ 到点 $(1,1)$ 的一段弧，证明积分与路径无关，并求积分值.

得分	

四、综合计算题（共 3 小题，17 题 8 分，18-19 各 9 分，共 26 分）

[8 分] 17、求双曲抛物面 $z = xy$ 被柱面 $x^2 + y^2 = 2$ 所截得的曲面面积.

[9 分] 18、求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^{n-1}$ 的收敛域与和函数.

[9 分] 19、求平面 $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} = 1$ 和柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 的交线上与 xoy 平面距离最短的点.

得分	

五、计算题（本题 9 分）

20、求 $\iint\limits_{\Sigma}(z^2-1)x\,dydz+xy\,dzdx+z\,dxdy$，其中 $\Sigma: x^2+y^2=z$，（$0\le z\le 4$）取下侧.

得分	

六、分析题 （本题 5 分）

21、已知，阿贝尔判别法是这样描述的：设 $\{b_n\}$ 为单调有界数列，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\,b_n$ 收敛．下面讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^{p+\frac{1}{n}}}$ $(p\in R)$ 的敛散性，如果收敛请判断绝对收敛与条件收敛.

2019-2020-2 高等数学 A2 期末考卷（A）-参考答案

一、选择题： B B C D A D C A

二、填空题： 9、$2\sqrt{3}$ 10、$\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y}} f(x,y)dx$ 11、$6a$ 12、$\dfrac{\pi^2}{2}$

三、计算题（每题 6 分）

13、$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\ln(x+\ln y)+\dfrac{x}{x+\ln y}$ .... 2 分 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x}{x+\ln y}\cdot\dfrac{1}{y}$ .... 2 分

$dz=[\ln(x+\ln y)+\dfrac{x}{x+\ln y}]dx+\dfrac{x}{y(x+\ln y)}dy$ .... 2 分

14、令 $F(x,y,z)=x^2+z^2-10,\ G(x,y,z)=y^2+z^2-10$

$$\vec{T}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2x & 0 & 2z \\ 0 & 2y & 2z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix}=(-12,-12,4)\text{或}(3,3,-1)$$ .... 2 分

切线 $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-3}{-1}$ .... 2 分

法平面 $3(x-1)+3(y-1)-(z-3)=0,$ 即 $3x+3y-z-3=0$ .... 2 分

15、原式 $=\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}}\dfrac{x^2}{y^3}dy$ .... 3 分

$=\int_1^2 x^2[-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{y^2}]_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}}dx=-\dfrac{1}{2}\int_1^2 x^2(\dfrac{1}{x}-x^2)dx$ .... 2 分

$=-\dfrac{1}{2}[\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{5}x^5]_1^2=\dfrac{47}{20}$ .... 1 分

16、(1) $P=x^2-y,Q=-x-\sin^2 y$， $\dfrac{\partial P}{\partial y}=-1=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ .... 2 分

(2) 原式 $=\int_{L_1}(x^2-y)dx-(x+\sin^2 y)dy+\int_{L_2}(x^2-y)dx-(x+\sin^2 y)dy$

$=\int_0^1 x^2dx-\int_0^1(1+\sin^2 y)dy$ .... 2 分

$=-\dfrac{2}{3}-\int_0^1\dfrac{1-\cos 2y}{2}dy=-\dfrac{7}{6}+\dfrac{1}{4}\sin 2$ .... 2 分

四、综合计算题（17 题 8 分，18-19 题各 9 分）

17、$A=\iint_D \sqrt{1+{z_x}^2+{z_y}^2}d\sigma=\iint_D \sqrt{1+x^2+y^2}d\sigma$ .... 4 分

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+\rho^2}\rho d\rho=\frac{1}{2}2\pi\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+\rho^2}d(1+\rho^2)$ .... 2 分

$=\frac{2}{3}\pi[(1+\rho^2)^{\frac{3}{2}}]_0^{\sqrt{2}}=\frac{2}{3}\pi(3\sqrt{3}-1)$ .... 2 分

18、(1) $\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)/2^{n+1}}{n/2^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}$ .... 2 分

故 $R=2$, 当 $x=\pm2$ 时，级数发散. 收敛域为 $(-2,2)$ .... 2 分

(2) $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}x^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}(x^n)'=(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n})'$ .... 2 分

$=(\frac{\frac{x}{2}}{1-\frac{x}{2}})'=(\frac{x}{2-x})'=\frac{2}{(2-x)^2}$， $x\in(-2,2)$ .... 3 分

19、设所求点为 (x,y,z) ，目标函数 $d=|z|$ .... 2 分

建立辅助函数 $L=z^2+\lambda(\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}-1)+\mu(x^2+y^2-1)$ ，.................. 2 分

可得 $\begin{cases} L_x=\frac{1}{3}\lambda+2\mu x=0 \\ L_y=\frac{1}{4}\lambda+2\mu y=0 \\ L_z=2z+\frac{1}{5}\lambda=0 \\ \frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$ .... 2 分

解得，$x=\frac{4}{5},y=\frac{3}{5},z=\frac{35}{12}$ 或 $x=-\frac{4}{5},y=-\frac{3}{5},z=\frac{85}{12}$ .... 2 分

故所求点为 $(\frac{4}{5},\frac{3}{5},\frac{35}{12})$ .... 1 分

五、计算题（本题 9 分）

20、作辅助面$\Sigma_1: z=4, (x^2+y^2\le 4)$，取上侧. Σ 和Σ_1围成Ω. .... 1 分

利用高斯公式，得

$$\iint_{\Sigma\cup\Sigma_1}(z^2-1)xdydz+xydzdx+zdxdy=\iiint_{\Omega}(z^2+x)dv=\iiint_{\Omega}z^2dv\ ,$$ .... 3 分

而$\iiint_{\Omega}z^2dv=\int_0^4 z^2dz\iint_{D_z}dxdy=\int_0^4 z^2\pi zdz=64\pi$， .... 2 分

又因为 $\iint_{\Sigma_1}(z^2-1)xdydz+xydzdx+zdxdy=\iint_{D_{xy}}4dxdy=16\pi$， .... 2 分

故原式$=48\pi$ .... 1 分

六、分析题（本题 5 分）

21、解答要点

① $p\le 0$，通项$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^{p+\frac{1}{n}}}\ne 0$，故级数发散; ....1 分

② $p>1$，$\left|\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^{p+\frac{1}{n}}}\right|=\dfrac{1}{n^{p+\frac{1}{n}}}<\dfrac{1}{n^p}$，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$收敛，故级数绝对收敛；.......1 分

③ $0<p\le 1$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^p}$收敛，而数列$\left\{\dfrac{1}{n^{\frac{1}{n}}}\right\}$是单减有下界（极限为 1），由阿贝尔判别法，得 题中级数收敛， .... 2 分

另外由于$\left|\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^{p+\frac{1}{n}}}\right|\Big/\dfrac{1}{n^p}\to 1\ (n\to\infty)$，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$发散，故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{p+\frac{1}{n}}}$发散，

所以，题中级数为条件收敛。 .... 1 分

杭州电子科技大学学生考试卷（B）卷

考试课程	高等数学 A2	考试日期	2020 年 9 月 14 日	成绩	
课程号	A0714202	任课教师姓名			
考生姓名		学号（8 位）		专业	

题号	一	二	三	四	五	六
得分						

注意：本卷总共 4 页，总分 100 分，时间 120 分钟

得分	

一、选择题 （本题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分）

1、向量$\vec{a}=(6,-1,2)$在向量$\vec{b}=(7,-4,4)$上的投影$\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\vec{a}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}=$（ B ）.

（A）3； （B）6； （C）-2； （D）-4.

2、已知$z=x+(y-1)\sin(x^2y^3)$，则偏导数$\dfrac{\partial z}{\partial x}$在$(1,1)$的值为（ D ）.

（A）0； （B）-1； （C）2； （D）1.

3、函数$u=2xy+2z$在$(1,1,2)$处的梯度的模为（ A ）.

（A）$2\sqrt{3}$ （B）$2\sqrt{6}$ （C）$2\sqrt{2}$ （D）0

4、交换积分次序，$\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y}} f(x,y)\mathrm{d}x=$（ **A** ）.

（A）$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{x^2} f(x,y)\mathrm{d}y+\int_1^{\sqrt{2}} \mathrm{d}x\int_0^{2-x^2} f(x,y)\mathrm{d}y$ （B）$\int_0^{\sqrt{2}} \mathrm{d}x\int_0^{2-x^2} f(x,y)\mathrm{d}y$

（C）$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{x^2} f(x,y)\mathrm{d}y+\int_1^{\sqrt{2}} \mathrm{d}x\int_0^{1} f(x,y)\mathrm{d}y$ （D）$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{2-x^2} f(x,y)\mathrm{d}y$

5、母线平行于x轴，且通过曲线$\begin{cases}2x^2+y^2+z^2=16\\ x^2-y^2+z^2=0\end{cases}$的柱面方程为（ C ）

（A）椭圆柱面$3x^2+2z^2=16$； （B）椭圆柱面$x^2+2y^2=16$；

（C）双曲柱面$3y^2-z^2=16$； （D）抛物柱面$3y^2-z=16$.

6、设Ω是由$z=\sqrt{2-x^2-y^2}$和$z=x^2+y^2$围成的闭区域，则$\iiint_\Omega (xy^2+yz^2+zx^2)dv=$（ D ）

（A）0； （B）$\iiint_\Omega xy^2dv$； （C）$\iiint_\Omega yz^2dv$； （D）$\iiint_\Omega zx^2dv$.

7、设$L:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{5}=1$周长为$a$，则$\oint_L (5x^2+3xy+4y^2)ds=$（ A ）

（A）$20a$； （B）0； （C）$30a$； （D）$40a$.

8、若$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$在$x=-1$处收敛，则此级数在$x=2$处（ B ）

（A）发散； （B）绝对收敛； （C）条件收敛； （D）无法确定.

得分	

二、填空题 （本题共 4 小题，每小题 3 分，共 12 分）

9、$\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{e^{x\tan y}-1}{\sqrt[3]{2+x^3y}-1}=$__0__________.

10、过点$(1,0,1)$与平面$x+y+z+1=0$平行的平面方程 $x+y+z-2=0$___.

11、幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$的收敛半径$R=$ 1____________.

12、设$f(x)$是以2π为周期的周期函数，在$0\le x\le\pi$上$f(x)=x^2$，它的傅里叶级数为正弦级数，和函数为$s(x)$，则$s(\pi)=$__0__________.

得分	

三、简单计算题（共 5 小题，每题 7 分，共 35 分）

13. 设 $z=(x^2+y^2)e^{xy}$，求偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ 和全微分 dz .

解析： $\frac{\partial z}{\partial x}=2xe^{xy}+(x^2+y^2)ye^{xy}$， ……………………… 2 分

$\frac{\partial z}{\partial y}=2ye^{xy}+(x^2+y^2)xe^{xy}$； ……………………… 2 分

$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$ ……………………… 2 分

$=(2xe^{xy}+(x^2+y^2)ye^{xy})dx+(2ye^{xy}+(x^2+y^2)xe^{xy})dy$ …… 1 分

14. $f(x,y)=2x^2+ax+xy^2+2y$ 在点 $(1,-1)$ 处取得极值，求 a .

解析： $f_x(x,y)=4x+a+y^2$； …………….. 2 分

$f_y(x,y)=2xy+2$ …………….. 2 分

$\begin{cases} f_x(1,-1)=4+a+(-1)^2=5+a=0 \\ f_y(1,-1)=-2+2=0 \end{cases}$ ……… 2 分

故 $a=-5$ …………….. 1 分

15．求直线 $x-2=y-3=\frac{z-4}{2}$ 与平面 $x+y+z-1=0$ 的交点.

解析： 令 $x-2=y-3=\frac{z-4}{2}=t$

则 $x=t+2,y=t+3,z=2t+4$， …………….. 2 分

带入平面方程得到

$t+2+t+3+2t+4-1=0$ …………….. 2 分

得到 $t=-2$，

直线与平面的交点为 $(0,1,0)$ …………….. 3 分

16．求曲面 $z=\frac{x^2}{2}+y^2$ 平行于平面 $2x+2y-z=0$ 的切平面方程.

解析： 令 $F(x,y,z)=\frac{x^2}{2}+y^2-z$，切平面的法向量 $\vec{n}=(x,2y,-1)$， …………….. 2 分

切平面与已知平面平行，

所以 $\frac{x}{2}=\frac{2y}{2}=\frac{-1}{-1}\Rightarrow x=2,y=1\Rightarrow z=3$，所以切点 $(2,1,3)$， …………….. 2 分

所求切平面为 $2x+2y-z-3=0$. …………….. 3 分

17. 计算二重积分 $\iint_D \ln(1+x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 及坐标轴所围成的第二象限内的闭区域.

解析： $D:\begin{cases} \frac{\pi}{2}\le\theta\le\pi, \\ 0\le\rho\le 1 \end{cases}$ …………….. 2 分

$\therefore$ 积分$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\ln(1+\rho^2)\rho\,\mathrm{d}\rho$ …………….. 3 分

$=\frac{\pi}{4}(2\ln 2-1).$ …………….. 2 分

得分	

四、综合计算题（共 2 小题，每题 8 分，共 16 分）

18．求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)x^n$ 的收敛域及和函数.

解析： $\lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{n+2}=1$，所以幂级数收敛半径是 $R=1$，收敛区间为 $(-1,1)$，

当 $x=\pm1$ 时，级数发散，所以原级数收敛域为 $(-1,1)$；　……………..　3 分

设幂级数的和函数为 $s(x)$，则

$$s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n+\sum_{n=0}^{\infty}x^n=(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1})'+\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

$$=(\frac{x}{1-x})'+\frac{1}{1-x}$$ ……………..　3 分

$$=\frac{2-x}{(1-x)^2},\quad x\in(-1,1).$$ ……………………..　2 分

19. 设 L 是从 $A(1,\frac{1}{2})$ 沿曲线 $2y=x^2$ 到 $B(2,2)$ 的弧段，求 $\int_L\frac{2x}{y}dx-\frac{x^2}{y^2}dy$.

解析： $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{2x}{y^2}$，曲线积分跟路径无关，　……………..　3 分

选折线 ACB，其转折的点 $C(2,\frac{1}{2})$，则

原式 $=(\int_{AC}+\int_{CB})\frac{2x}{y}dx-\frac{x^2}{y^2}dy=\int_1^2 4xdx+\int_{\frac{1}{2}}^2(-\frac{4}{y^2})dy$ ……………..　3 分

$=0$.　……………..　2 分

得分	

五、应用计算题（本题 8 分）

20、计算曲面积分 $I=\iint_{\Sigma} xz^2dydz+yx^2dzdx+zy^2dxdy$，其中 Σ 为曲面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 的外侧.

解析： 补一面，取 $\Sigma_0: z=0, x^2+y^2\le R^2$，取下侧 …………….. 2 分

$I=(\iint_{\Sigma+\Sigma_0}-\iint_{\Sigma_0})(xz^2dydz+yx^2dzdx+zy^2dxdy)$ …………….. 2 分

$=\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dv-0$

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{R}r^2\cdot r^2\sin\varphi dr=\frac{2}{5}\pi R^5.$ …………….. 4 分

得分	

六、综合计算题 （本题 5 分）

21、设曲面 Σ 的方程为 $F(z-ax,z-by)=0$，其中 $F(u,v)$ 具有一阶连续偏导数，且 $F_u+F_v\ne 0$，证明：曲面 Σ 上任一点处的法线恒与一常向量垂直。

证明： 令 $G(x,y,z)=F(u,v)=F(z-ax,z-by)$

曲面 Σ 上任一点处的法向量为

$\vec{n}=(G_x,G_y,G_z)$

$=(-aF_u,-bF_v,F_u+F_v)$ …………….. 2 分

显然，$(-aF_u,-bF_v,F_u+F_v)\bullet(b,a,ab)=0$，故…………….. 2 分

存在常向量 (b,a,ab) 与 $\vec{n}$ 垂直。 …………….. 1 分