第九章 重积分 重点

§1 概念和性质

1. 几何意义：
   - 二重积分 —— 平面薄板质量 $m=\iint_D \mu(x,y)\,dxdy$
     - (曲顶)柱体体积 $V=\iint_D f(x,y)\,dxdy$
   - 三重积分 —— 三维空间物体质量 $m=\iiint_\Omega \mu(x,y,z)\,dV$

2. 偏导数连续 $\Rightarrow$ 可微 $\Rightarrow$
   - 可偏导
   - 连续 $\Rightarrow$ 可积（分片连续即可）

3. 性质：
   - ① $\iint_D d\sigma=\iint_D 1\,d\sigma=A_D$；$\iiint_\Omega dV=\iiint_\Omega 1\,dV=V_\Omega$
   - ② 线性性 / 区域可加性
   - ③ 保序性 / 保号性
     - $\Rightarrow \left|\iint_D f(x,y)\,d\sigma\right| \le \iint_D |f(x,y)|\,d\sigma$
     - $\Rightarrow mA_D \le \iint_D f(x,y)\,d\sigma \le MA_D$
   - ④ 积分中值定理. 若 $f(x,y)\in C(D)$，$g(x,y)\in R(D)$，且 $g(x,y)$ 在 D 上不变号，则 $\exists(\xi,\eta)\in D$，使
     $$\iint_D f(x,y)g(x,y)\,d\sigma = f(\xi,\eta)\iint_D g(x,y)\,d\sigma$$
     $\Rightarrow$ 若 $f(x,y)\in C(D)$，则 $\exists(\xi,\eta)\in D$，使
     $$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = f(\xi,\eta)A_D$$

§2 积分的计算

1. 二重积分：
   - ① 直角坐标系
     - X型区域
     - Y型区域
   - ② 极坐标系 $\iint_D f(x,y)\,dxdy=\iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot r\,dr\,d\theta$

注意
① 对称性
奇偶
轮换对称
eg. 概率积分

③ 直角坐标系下换元 $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D^*} f(x(u,v), y(u,v)) \cdot |J|\, du\, dv.$$

! ① $J = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \neq 0$

② J需加绝对值.

③ 广义极坐标 $\begin{cases} x = ar\cos\theta \\ y = br\sin\theta \end{cases}$ 下.

$J = abr$

2、三重积分

① 直角坐标系：柱体法 / 截面法

$\Rightarrow$ 换元 $\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases} \Rightarrow \iiint_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz$

$$= \iiint_{\Omega^*} f(x(u,v,w), y(\cdots), z(\cdots)) \boxed{|J|}\, du\,dv\,dw$$

② 柱面坐标系 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z. \end{cases}$

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dV = \iiint_{\Omega^*} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\, r\,dr\,d\theta\,dz$$

③ 球面坐标系. $\begin{cases} x = \rho\sin\varphi\cos\theta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = \rho\cos\varphi. \end{cases}$

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dV = \iiint_{\Omega^*} f(\rho\sin\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\varphi) \cdot \rho^2\sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta.$$

! 广义球面坐标系:

$\begin{cases} x = a\rho\sin\varphi\cos\theta \\ y = b\rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = c\rho\cos\varphi \end{cases} \Rightarrow |J| = abc\rho^2\sin\varphi$

§3. 重积分的应用

1、平面图形区域面积、VS 立体体积.

2、曲面面积、

① 直角坐标系 —— 曲面 $z=f(x,y),(x,y)\in D$.

$$S=\iint_D \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dx\,dy \quad (dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dx\,dy)$$

② 换元：$\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \\ z=z(u,v) \end{cases}$，$(u,v)\in D_{uv}$.

$$S=\iint_{D_{uv}} \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,du\,dv. \quad A=\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\ B=\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\ C=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

3、质心 ① $m=\iint_D \mu(x,y)\,dx\,dy$ or $\iiint_\Omega \mu(x,y,z)\,dV$

② 质心：$\bar{x}=\dfrac{\iint_D x\mu(x,y)\,d\sigma}{\iint_D \mu(x,y)\,d\sigma}$ or $\dfrac{\iiint_\Omega x\mu(x,y,z)\,dV}{\iiint_\Omega \mu(x,y,z)\,dV}$

$\bar{y},\bar{z}$ 同理

③ 形心：(μ为常数) $\begin{cases} \bar{x}=\dfrac{\iint_D x\,d\sigma}{A_D} \\ \bar{y}=\dfrac{\iint_D y\,d\sigma}{A_D} \end{cases}$

三重积分同理.