1、设 $f(x)=x\cos\frac{2}{x}+x^2$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的（　　）

（A）连续点；　（B）可去间断点；　（C）无穷间断点；　（D）震荡间断点.

2、若过曲线 $y=x^3-3x$ 上一个点的切线平行于 x 轴，则曲线上这个点为（　　）

（A）$(0,0)$；　（B）$(1,2)$；　（C）$(1,-2)$；　（D）$(2,2)$.

3、设 $f(x)$ 的一个原函数为 $\ln x$，则导函数 $f'(x)=$（　　）

（A）$\frac{1}{x}$；　（B）$x\ln x-x+c$；　（C）$-\frac{1}{x^2}$；　（D）e^{x^2}.

4、下列反常积分收敛的是（　　）

（A）$\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x\mathrm{d}x$；　（B）$\int_{0}^{+\infty}xe^{x}\mathrm{d}x$；　（C）$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$；　（D）$\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$.

5、设$f(x)$连续，则$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x}{x-a}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$的值为（　　）

（A）0；　（B）a；　（C）$f(a)$；　（D）$af(a)$.

6、曲线$y=x^2$绕直线$y=1$旋转所得封闭部分的体积为（　　）

（A）$V=\int_{-1}^{1}\pi(x^2-1)^2\mathrm{d}x$；　（B）$V=\int_{-1}^{1}\pi\sqrt{x^2-1}\mathrm{d}x$；

（C）$V=\int_{-1}^{1}\pi(x^2-1)\mathrm{d}x$；　（D）$V=\int_{-1}^{1}\pi(x^2+1)\mathrm{d}x$.

7、有两个解为$y_1=e^{-x},y_2=3e^{2x}$的二阶常系数齐次线性微分方程是（　　）

（A）$y''-y'+y=0$；　（B）$y''-2y'+y=0$；

（C）$y''-y'-2y=0$；　（D）$y''-y'+2y=0$.

8、若$f(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=2$，则$f(x)$在$x=0$处（　　）

（A）不可导；　（B）可导，且$f'(0)\neq 0$；　（C）取极大值；　（D）取极小值.

9、设 $y=\ln(e^{x}+\sqrt{1+e^{2x}})$，则微分 $\mathrm{d}y=$ $\underline{\dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}\,dx}$.

10、$\int_{-1}^{1}(x+|x|)^{2}\mathrm{d}x=$ $\underline{\dfrac{4}{3}}$.

11、心形线 $\rho=a(1+\cos\theta)$（$a>0$）的全长 $s=$ $\underline{8a}$.

12、微分方程 $y''+2y'+y=xe^{-x}$ 的特解的形式应设为 $\underline{x^2(ax+b)e^{-x},\ a,b待定}$.

13、设 f'' 存在，$y=f(e^{-x})$，求 y''.

$$y'=f'(e^{-x})\cdot(-1)e^{-x}$$

$$y''=f''(e^{-x})e^{-2x}+f'(e^{-x})\cdot e^{-x}$$

14、求函数 $y=e^{\arctan x}$ 的凹凸区间和拐点.

$$y'=e^{\arctan x}\cdot\frac{1}{1+x^2}$$

$$y''=e^{\arctan x}\cdot\frac{1}{(1+x^2)^2}-e^{\arctan x}\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

$$=e^{\arctan x}\frac{(1-2x)}{(1+x^2)^2}$$

令 $y''=0$ 可得：$x=\frac{1}{2}$，$y=$

~~当 $x\in(-\infty,\frac{1}{2})$，$y''<0$. 当 $x\in(\frac{1}{2},+\infty)$，$y''>0$~~

当 $x\in(-\infty,\frac{1}{2})$，$y''>0$. 当 $x\in(\frac{1}{2},+\infty)$ $y''<0$

$\therefore$ $(-\infty,\frac{1}{2})$ 为凹区间，$(\frac{1}{2},+\infty)$ 为凸区间. 拐点 $(\frac{1}{2},e^{\arctan\frac{1}{2}})$

15、求不定积分$\int \frac{\ln \sin x}{\cos^2 x} dx$.

原$= \int \ln \sin x \, d\tan x = \tan x \cdot \ln \sin x - \int \tan x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} dx$

$= \tan x(\ln \sin x) - x + C$

16、证明不等式：$2x\arctan x \geq \ln(1+x^2)$.

令 $f(x) = 2x\arctan x - \ln(1+x^2)$

$f'(x) = 2\arctan x + \frac{2x}{1+x^2} - \frac{2x}{1+x^2} = 2\arctan x$

$f''(x) = \frac{2}{1+x^2} > 0$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$, $f''(0) > 0$

$\therefore$ $f(x)$ 在 $x=0$ 处取极小值，也是最小值.

$f(0) = 0$, $f(x) \geqslant f(0)$

即 $2x\arctan x \geqslant \ln(1+x^2)$

17、求曲线 $y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\sqrt{\cos t}\,\mathrm{d}t$ $(-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2})$ 的弧长.

$$\cancel{\$}\ y'=\sqrt{\cos x},$$

$$S=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos x}\,dx=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos x}\,dx$$

$$=2\sqrt{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos\frac{x}{2}\,dx=4\sqrt{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\cos t\,dt=4$$

18、求微分方程：$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y(\ln y-\ln x)$ 的通解.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}\ln\frac{y}{x},\ 令\ u=\frac{y}{x}.\ (x>0.\ y>0)\Rightarrow u>0$$

$$u+x\frac{du}{dx}=u\ln u\Rightarrow\frac{du}{dx}=\frac{u(\ln u-1)}{x}$$

$$\frac{du}{u(\ln u-1)}=\frac{1}{x}dx\Rightarrow\ln|\ln u-1|=\ln x+C_1$$

$$\frac{\ln u-1}{x}=\pm e^{C_1}\Rightarrow\frac{\ln u-1}{x}=C\ 即$$

$$\ln u-1=Cx\ (C任意常数)$$

$$\cancel{\ln\frac{y}{x}}\ \ln y-\ln x-1=Cx$$

19、求$\int_0^2 f(x-1)dx$，其中$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{1+e^x}, & x<0,\\ \frac{1}{1+x}, & x\ge 0\end{cases}$.

$$\int_0^2 f(x-1)dx \xlongequal{x-1=t} \int_{-1}^1 f(t)\,dt = \int_{-1}^0 \frac{1}{1+e^x}dx + \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx$$

$$=\int_{-1}^0 \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}dx + \ln(1+x)\Big|_0^1 = -\ln(1+e^{-x})\Big|_{-1}^0 + \ln(1+x)\Big|_0^1$$

$$\cancel{=\ln(1+e)+\ln 2 \quad =\ln(2+2e)}$$

$$=-\ln 2+\ln(1+e)+\ln 2 \quad =\ln(1+e)$$

20、已知函数$f(x)=\begin{cases}x, & x<1,\\ x^2, & x\ge 1.\end{cases}$ 求积分$\int_0^x f(t)dt$.

当$x<1$时 $\int_0^x f(t)dt=\int_0^x t\,dt=\frac{1}{2}x^2$

当$1\le x$时 $\int_0^x f(t)dt=\int_0^1 f(t)dt+\int_1^x f(t)dt$

$$=\int_0^1 t\,dt+\int_1^x t^2\,dt$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{6}$$

$$\therefore \int_0^x f(t)dt=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2, & x<1\\ \frac{1}{3}x^3+\frac{1}{6}, & x\ge 1\end{cases}$$

21、设有连接两点 $A(0,1), B(1,0)$ 的一段向上凸的曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$，对于 $\overset{\frown}{AB}$ 上的任意一点 $P(x,y)$，曲线弧 $\overset{\frown}{AP}$ 与直线段 $\overline{AP}$ 所围成图形的面积为 x^3，求曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的方程.

令曲线弧方程 $y=f(x)$、令 $P(a, f(a))$，则所围图形面积为 a^3.

直线 $\overline{AP}$ 方程为：$y = \frac{f(a)-1}{a}x+1$，

$$\int_0^a f(x) - \frac{f(a)-1}{a}x - 1 \, dx = a^3$$

$$\int_0^a f(x)dx = a^3 + \frac{1}{2}(f(a)-1)a + a = a^3 + \frac{1}{2}(f(a)+1)a$$

即 $\int_0^x f(t)dt = x^3 + \frac{1}{2}(f(x)+1)x$

$$f(x) = 3x^2 + \frac{1}{2}(f(x)+1) + \frac{1}{2}f'(x)\cdot x.$$

即 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - 6x - \frac{1}{x}$，齐次方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ 解为 $y=Cx$.

令 $y=C(x)\cdot x$ 为上式解，则 $C'(x)\cdot x = -6x - \frac{1}{x}$

$C'(x) = -6 - \frac{1}{x^2}$，$C(x) = -6x + \frac{1}{x} + C$

$\therefore y = -6x^2 + 1 + Cx$ C为任意常数.

由B在曲线上，即 $y(1)=0 \Rightarrow C+1-6=0$，$C=5$

即曲线为 $y=-6x^2+5x+1$

22、设 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(x)$ 在 (a,b) 内二阶可导，$f(a)=f(b)=0$，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$，证明：

（1）在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=f(\xi)$.

（2）在 (a,b) 内至少存在一点 $\eta(\eta\neq\xi)$，使得 $f''(\eta)=f(\eta)$.

(1). 令 $E(x)=e^{-x}f(x)$. 则 $E(a)=E(b)=0$

则存在 ξ, 使得 $E'(\xi)=0$. $E'(\xi)=-e^{-\xi}f(\xi)+e^{-\xi}f'(\xi)=0$

即 $f'(\xi)=f(\xi)$.

(2). 令 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$,则 $F(a)=F(b)=0.\Rightarrow$ 存在 ξ_1 , $F'(\xi_1)=f(\xi_1)=0$

$\xi_1\in(a,b)$

则由(1)知 存在 $\xi_2\in(a,\xi_1)$, $\xi_3\in(\xi_1,b)$

使得 $f'(\xi_2)=f(\xi_2)$. $f'(\xi_3)=f(\xi_3)$

令 $G(x)=e^{x}(f'(x)-f(x))$, 则 $G(\xi_2)=G(\xi_3)=0$

则存在 $\eta\in(\xi_2,\xi_3)$. $G'(\eta)=0$.

$G'(x)=+e^{x}(f'(x)-f(x))+e^{x}(f''(x)-f'(x))$

$\cancel{=e^{-x}(f''(x)}$ $=e^{x}(f''(x)-f(x))$

即 $e^{\eta}(f''(\eta)-f(\eta))=0\Rightarrow f''(\eta)=f(\eta)$.