

一、填空题 (每小题 3 分, 共 18 分)

1. 设事件 A 的概率 $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.3$, 且事件 A, B 互不相容, $\therefore P(AB) = 0$

$$\text{则 } P(A \cup B) = \frac{P(A) + P(B) - P(AB)}{P(A) + P(B) - P(AB)} = P(A) + P(B) = 0.7$$

2. 设事件 A 的概率 $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.3$, 且事件 A, B 相互独立, $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$

$$\text{则 } P(A\bar{B}) = \frac{P(A - AB)}{P(A) - P(AB)} = \frac{P(A) - P(AB)}{P(A) - P(AB)} = P(A)(1 - P(B)) = P(A) \cdot P(\bar{B}) = 0.28$$

3. 设事件 A 的概率 $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.3$, 且 $P(A|B) = 0.2$, $\therefore P(AB) = \frac{P(A)P(B)}{P(A|B)}$

$$\text{则 } P(A\bar{B}) = \frac{P(A) - P(AB)}{P(A) - P(AB)} = P(A) - P(B) \cdot P(A|B) = 0.4 - 0.3 \times 0.2 = 0.34$$

4. 某种型号的器件的寿命 X (以小时记) 具有以下的概率密度

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1000}{x^2}, & x > 1000 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$\text{现从一大批此种器件中任取 1 只, 则此只器件的寿命小于 1500 小时的概率为 } P\{X < 1500\} = \int_{1000}^{1500} \frac{1000}{x^2} dx = \frac{1}{3}$$

5. 若随机变量 $X \sim N(2, 16)$, 则 $P\{-2 < X < 6\} = P\{\frac{-2-2}{4} < \frac{X-2}{4} < \frac{6-2}{4}\}$ (结果用

$$\text{标准正态分布函数 } \Phi(x) \text{ 表示, 且 } x > 0) = P\{-1 < \frac{X-2}{4} < 1\} = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1$$

6. 设二维连续型随机变量 (X, Y) 服从平面区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$ 上的均匀分

$$\text{布, 则 } (X, Y) \text{ 在 } D \text{ 上的概率密度函数 } f(x, y) = \frac{1}{\pi}$$

二、试解下列各题 (共 20 分)

1. (本题 10 分) 某工厂有三台机器同时生产日光灯, 已知第二台机器的产量是第一台机器产量的 4 倍, 第三台机器的产量是第一台机器产量的 3 倍, 而第一、二、三台机器产品次品率分布为 0.05, 0.04, 0.03, 现在从三台机器生产的日光灯中任取一只, 求

(1) 这只日光灯是次品的概率;

(2) 已知取出的日光灯为次品, 此日光灯属于第一台机器生产的概率.

解: (1) 设 A_i ($i=1, 2, 3$) 表示日光灯由第 i 台机器生产.

设 B 表示日光灯为次品.

$$\text{由题可知: } P(A_1) = \frac{1}{8}, P(A_2) = \frac{4}{8}, P(A_3) = \frac{3}{8}$$

$$P(B|A_1) = 0.05, P(B|A_2) = 0.04, P(B|A_3) = 0.03$$

由全概率公式可得:

$$P(B) = P(BA_1) + P(BA_2) + P(BA_3) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3) \\ = 0.05 \times \frac{1}{8} + 0.04 \times \frac{4}{8} + 0.03 \times \frac{3}{8} = \frac{3}{80}$$

(2) 由贝叶斯公式:

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{8} \times 0.05}{\frac{3}{80}} = \frac{1}{16}$$

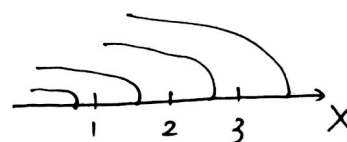
2. (本题 10 分) 将 3 只球随机地放入 4 个杯子中去, 设随机变量 X 表示杯子中球

的最大个数. (1) 求 X 的分布律; (2) X 的分布函数 $F(x)$;

$$\text{解: } \begin{array}{c|ccc} X & 1 & 2 & 3 \\ \hline P & \frac{C_4^3}{4^3} & \frac{C_4^2 C_2^2}{4^3} & \frac{C_4^1}{4^3} \end{array}$$

$$\text{即: } \begin{array}{c|ccc} X & 1 & 2 & 3 \\ \hline P & \frac{3}{8} & \frac{9}{16} & \frac{1}{16} \end{array}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \frac{3}{8}, & 1 \leq x < 2 \\ \frac{15}{16}, & 2 \leq x < 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}$$



三、(本题 10 分) 设随机变量 X 的分布律为:

X	-3	0	1
P	0.3	0.6	0.1

求(1) $Y = X^2 + 1$ 的分布律; (2) 概率 $P\{X < 1\}$.

解: (1) 将 X 的所有取值代入 $Y = X^2 + 1$ 可求 Y 的所有可能取值为 1, 2, 10.

故 $P\{Y=1\} = P\{X=0\} = 0.6$; $P\{Y=2\} = P\{X=1\} = 0.1$

$P\{Y=10\} = P\{X=-3\} = 0.3$.

即

Y	1	2	10
P	0.6	0.1	0.3

(2) $P\{X < 1\} = P\{X=0\} + P\{X=-3\} = 0.6 + 0.3 = 0.9$

或 $P\{X < 1\} = 1 - P\{X \geq 1\} = 1 - P\{X=1\} = 1 - 0.1 = 0.9$

四、(本题 12 分) 设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 < x < 0 \\ k, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

(1) 求 k ; (2) 求 X 的分布函数 $F(x)$; (3) 概率 $P\{|X| > \frac{1}{2}\}$.

解: (1) 由 $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-1}^0 x^2 dx + \int_0^1 k dx = \frac{1}{3} + k$

得 $k = \frac{2}{3}$

(2).

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \int_{-1}^x t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_{-1}^x = \frac{x^3+1}{3}, & -1 \leq x < 0 \\ \int_{-1}^0 t^2 dt + \int_0^x \frac{2}{3} dt = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}x, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

(3). $P\{|X| > \frac{1}{2}\} = 1 - P\{|X| \leq \frac{1}{2}\} = 1 - P\{-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{2}\} = 1 - [F(\frac{1}{2}) - F(-\frac{1}{2})]$
 $= \frac{5}{6}$

五、(本题 18 分) 设二维随机变量 (X, Y) 的联合分布律为:

$X \backslash Y$	0	1
0	0.2	0.1
1	0.5	0.2

(1) 求关于 X 与关于 Y 的边缘分布律;

(2) 求在条件 $X=1$ 下关于 Y 的条件分布律.

(3) 求概率 $P\{X+Y \leq 1\}$;

(4) 求条件概率 $P\{Y < 1 | X+Y=1\}$;

(5) 证明: X 与 Y 不相互独立.

解: (1)

X	0	1
P	0.3	0.7

Y	0	1
P	0.7	0.3

(2) $P\{Y=0 | X=1\} = \frac{P\{Y=0, X=1\}}{P\{X=1\}} = \frac{0.5}{0.7} = \frac{5}{7}$

$P\{Y=1 | X=1\} = \frac{P\{Y=1, X=1\}}{P\{X=1\}} = \frac{0.2}{0.7} = \frac{2}{7}$

即

Y	0	1
$P\{Y=j X=1\}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{2}{7}$

(3). $P\{X+Y \leq 1\} = 1 - P\{X+Y > 1\} = 1 - P\{X=1, Y=1\} = 1 - 0.2 = 0.8$

(4). $P\{Y < 1 | X+Y=1\} = \frac{P\{Y < 1, X+Y=1\}}{P\{X+Y=1\}} = \frac{P\{Y=0, X=1\}}{P\{X=0, Y=1\} + P\{X=1, Y=0\}} = \frac{0.5}{0.6} = \frac{5}{6}$

(5). 由 $P\{X=0, Y=0\} = 0.2$ 而 $P\{X=0\} \cdot P\{Y=0\} = 0.3 \times 0.7 = 0.21$

且 $P\{X=0, Y=0\} \neq P\{X=0\} \cdot P\{Y=0\}$

故 X 与 Y 是不相互独立的.

六、(本题 18 分) 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 3, & 0 < x < 1, 0 < y < x^2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

解: (1) $f_x(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$

(1) 求关于 X 和关于 Y 的边缘概率密度:

(2) 求条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$:

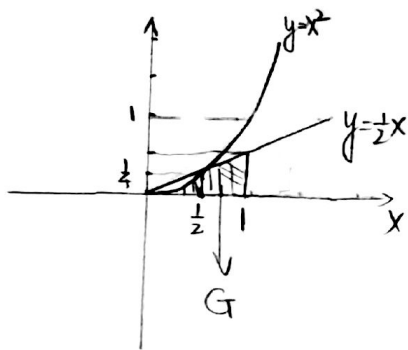
$$= \begin{cases} \int_0^{x^2} 3 dy = 3x^2, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(3) 求概率 $P\{2Y < X\}$:

(4) 求条件概率 $P\{Y < \frac{1}{8} | X = \frac{1}{2}\}$. $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \int_{\sqrt{y}}^1 3 dx = 3(1 - \sqrt{y}), & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

(2). $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_x(x)} = \begin{cases} \frac{3}{3x^2} = \frac{1}{x^2}, & 0 < y < x^2, 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

(3). $P\{2Y < X\} = P\{(x, y) \in G\} = \iint_G f(x, y) dx dy$
 $= \int_{\frac{1}{2}}^1 dx \int_0^{x^2} 3 dy + \int_{\frac{1}{2}}^1 dx \int_{\frac{x}{2}}^{x^2} 3 dy$
 $= \frac{11}{16}$



(4) 由 (2) 可知 $f_{Y|X}(y|x=\frac{1}{2}) = \begin{cases} 4, & 0 < y < \frac{1}{4} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

故条件概率 $P\{Y < \frac{1}{8} | X = \frac{1}{2}\} = \int_0^{\frac{1}{8}} f_{Y|X}(y|x=\frac{1}{2}) dy = \int_0^{\frac{1}{8}} 4 dy = \frac{1}{2}$

七、(本题 4 分) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{9}, & 0 < x < 3 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

而随机变量 $Y = \begin{cases} 2, & X \leq 1 \\ X, & 1 < X < 2 \\ 1, & X \geq 2 \end{cases}$ 求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$.

解: 由 Y 的表达式可知, Y 的取值范围为 $1 \leq Y \leq 2$.

故当 $y < 1$ 时, $F_Y(y) = 0$.

当 $y \geq 2$ 时, $F_Y(y) = 1$.

当 $1 \leq y < 2$ 时,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y \leq y\} = P\{Y=1 \cup 1 < Y \leq y\} \\ &= P\{Y=1\} + P\{1 < Y \leq y\} = P\{X \geq 2\} + P\{1 < X \leq y\} \\ &= \int_2^3 \frac{x^2}{9} dx + \int_1^y \frac{x^2}{9} dx = \frac{y^3 + 18}{27} \end{aligned}$$

综上有:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 1 \\ \frac{y^3 + 18}{27}, & 1 \leq y < 2 \\ 1, & y \geq 2 \end{cases}$$