HDU 数学营

19年杭州電子科技大学高数下A期末考试题

（2019年6月24日）

本次码字与排版，均由知乎 ID:她的糖（QQ：1138472374）完成。由于其水平有限，难免会出现一些编排上的小错误，敬请各位同学批评指正。

一、选择题（本题共8小题，每小题3分，共24分）

1. 对于任意两个向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$，下列等式正确的是（　　）.

A. $|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^2$　　B. $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^2$　　C. $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$　　D. $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|^2\boldsymbol{b}$

2. 函数$u=xy+yz+zx$在点$(1,1,0)$处的梯度的模为（　　）.

A. 8　　B. $\sqrt{22}$　　C. $\sqrt{6}$　　D. 3

3. 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$满足$u_n\geqslant v_n>0(n=1,2,3...)$，则必有（　　）.

A. 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛　　B. 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$发散

C. 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛　　D. 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散

4. $I_1=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}(x^4+y^4)d\sigma$，$I_2=\iint\limits_{|x|\leqslant 1,|y|\leqslant 1}(x^4+y^4)d\sigma$，$I_3=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}(2x^2y^2)d\sigma$，则（　　）.

A. $I_1\leqslant I_2\leqslant I_3$　　B. $I_3\leqslant I_1\leqslant I_2$　　C. $I_2\leqslant I_3\leqslant I_1$　　D. $I_1\leqslant I_3\leqslant I_2$

5. 设Ω是由$z=x^2+y^2,x^2+y^2=1,z=0$围成的闭区域，则$\iiint\limits_{\Omega}xzdv$可以化为三次积分（　　）.

A. $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 d\rho\int_0^{\rho}\rho\cos\theta zdz$　　B. $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 d\rho\int_0^{\rho^2}\rho\cos\theta zdz$

C. $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 d\rho\int_0^{\rho^2}\rho^2\cos\theta zdz$　　D. $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 d\rho\int_0^{\rho}\rho^2\cos\theta zdz$

6. 设Σ是平面$x+y+z=4$被柱面$x^2+y^2=1$截出的有限部分，则对面积的曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}xdS=$（　　）.

A. 0　　B. π　　C. $4\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{3}$

7. 已知$(x+ay^2)dx+(4xy-e^y)dy$是某函数的全微分，则$a=$（　　）.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

8. 设$\sum_{n=1}^{\infty}C_n x^n$在点$x=-3$处条件收敛，则该级数的收敛半径（　　）.

A. 等于3　　B. 大于3　　C. 小于3　　D. 不能确定

二、填空题（本题共 4 小题，每小题 3 分，共 12 分）

9. 设两平面为$x-2y+2z+1=0$与$-x+y+5=0$，则两平面的夹角为__________.

10. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2-\sqrt{4+xy}}{xy}=$__________.

11. 设平面内曲线L：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$的周长为$a$，则$\int_L(3x^2+4y^2)ds=$__________.

12. $f(x)$是周期为2π的函数，$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\leqslant x<0,\\ 1, & 0\leqslant x<\pi\end{cases}$，是它一个周期上的表达式，设它的傅里叶级数和函数为$s(x)$，则$s\left(\dfrac{5\pi}{2}\right)=$__________.

三、简单计算题（本题共 5 小题，每题 6 分，共 30 分）

13. 设$z=xy^3+\ln(2x+y)$，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$和$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

14. 求曲面$\ln\dfrac{x}{z}+y-z=0$在点$M(1,1,1)$处的切平面和法线方程.

15. 已知函数$f(x,y)=3x^3-xy^3+ax$在点$(1,0)$处取得极值，求参数a的值.

16. 交换积分次序并计算$\int_1^3 dx\int_{x-1}^2 \sin y^2 dy$.

17. 将函数$f(x)=\dfrac{1}{2-x}$展开成x的幂级数，并求其收敛域.

四、计算题（本题共 3 小题，每题 7 分，共 21 分）

18. 求曲面 $z=x^2+2y^2$ 和 $z=6-2x^2-y^2$ 所围成的立体的体积.

19. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$ 的收敛域及和函数.

20. 已知有向曲线 L 是从起点 $A(0,0)$ 沿着 $x=\sqrt{2y-y^2}$ 到达终点 $B(1,1)$，求解积分

$I=\int_L (\sin x-y^2)\,dx-(2xy+\sin y)\,dy$ 时，

(1) 验证该积分是否跟路径有关；

(2) 求出该积分 I 的值.

五、综合题（本题 8 分）

21. 求对坐标的曲面积分 $\iint_{\Sigma}(2x+\sin y)dydz - zdxdy$，其中，有向曲面 Σ 为旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 介于平面 $z=0$ 与 $z=1$ 之间部分的外侧.

六、证明题（本题 5 分）

22. 设 $z = xf(x+y) + yg(x+y)$，其中 $f(u)$, $g(u)$ 均有二阶连续的导函数，试证明：

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$