

## 线性代数小练习

1. 计算  $n$  阶行列式  $D_n = \det(a_{ij})$ , 其中  $a_{ij} = |i - j|$  (这里是绝对值).
2.  $\alpha_1 = (1, 2, 3)^T, \alpha_2 = (1, 3, 4)^T, \alpha_3 = (2, -1, 1)^T, \beta = (2, 5, a + 3)^T$ , 问  $a$  取何值时,  $\beta$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表出, 并写出表达式.

3. (1) 已知  $A$  是  $n$  阶可逆矩阵,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  是  $n$  维线性无关的列向量, 证明

$A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$  线性无关.

- (2) 设  $A$  是  $n \times m$  矩阵,  $B$  是  $m \times n$  矩阵, 其中  $n < m$ ,  $E$  是  $n$  阶单位矩阵, 若  $AB = E$ , 证明:  $B$  的列向量线性无关.

4. (1) 已知  $\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  是矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix}$  的一个特征向量.

① 试确定参数  $a, b$  及特征向量  $\xi$  所对应的特征值;

② 问  $A$  能不能相似于对角阵? 说明理由.

- (2) 将以下二次型用正交变换化为标准型, 并写出所用的正交变换.

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

5. 已知二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2tx_1x_2 + 10x_1x_3 + 6x_2x_3.$$

试问  $t$  取何值时, 二次型是正定的?