杭州电子科技大学学生考试卷（ A ）卷

考试课程	高等数学甲（1）	考试日期	2013年1 月 日	成 绩	
课程号	A0702171	教师号		任课教师姓名	
考生姓名		学号（8位）		年级		专业	

题号	一	二	三						四	五	六
			1	2	3	4	5	6			
得分											

得分	

一、 填空题（本题共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分）

1. 不定积分 $\int (x-\sin x)dx =$ $\frac{1}{2}x^2+\cos x+C$.

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\arcsin(\frac{\tan x}{2x}), & x<0\\ a, & x\ge 0\end{cases}$，且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$ $\pi/6$.

3. 若积分 $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^q}$ 收敛，则 q 的取值范围是 $q<1$.

4. 设 $f(x)=\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}\,dt$，则 $f'(\frac{\pi}{4})=$ $\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$.

5. 微分方程 $y'x = y\ln y$ 满足 $y(1)=e^{-2}$ 的特解为 $y=e^{-2x}$.

6. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}(\frac{1}{x}-\cot x)=$ $1/3$.

得分	

二、选择题 （本题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分）

1. $f'(x_0)=0$ 是 $f(x)$ 在 x_0 处取得极值的（ D ）

(A) 充分但非必要条件； (B) 必要但非充分条件；

(C) 充分必要条件； (D) 既非充分也非必要条件 .

2. 当 $x\to 0$ 时，$x-\sin x$ 是关于 x^2 的（ A ）

(A) 高阶无穷小； (B) 低阶无穷小； (C) 等价无穷小； (D) 同阶但非等价无穷小 .

3. . 设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某个领域内有定义，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的一个充分条件是（ D ）

（A） $\lim\limits_{h\to+\infty} h[f(a+\frac{1}{h})-f(a)]$ 存在； （B） $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$ 存在；

(C) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ 存在； （D） $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a)-f(a-h)}{h}$ 存在.

4. 定积分 $\int_0^{3\pi/4}|\sin 2x|dx$ 的值是（ C ）

（A） $\frac{1}{2}$； （B） $-\frac{1}{2}$； （C） $\frac{3}{2}$； （D） $-\frac{3}{2}$.

5. 已知 $y=f(\sin x)$，则 $dy=$（ A ）

(A) $f'(\sin x)\cos x dx$； (B) $f'(\sin x)dx$；

(C) $f'(\sin x)\sin x dx$； (D) $f'(\sin x)\cos x$.

6. 设 $f'(\sin^2 x)=\cos^2 x$，则 $f(x)=$（ B ）

(A) $\sin x-\frac{1}{2}\sin^2 x+C$； (B) $x-\frac{1}{2}x^2+C$；

(C) $\sin x-\cos x+C$； (D) $\frac{1}{2}x^2-x+C$.

7. 设函数 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$，则 $\Delta F(x)$ 为（ D ）

(A) $\int_0^x [f(t+\Delta t)-f(t)]dt$； (B) $\int_0^{x+\Delta x} f(t))dt$；

(C) $f(x)\cdot\Delta x$； (D) $\int_0^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_0^x f(t)dt$.

8. 设 $f(x)$ 连续，则 $\lim\limits_{x\to a}\frac{x}{x-a}\int_a^x f(t)dt=$（ A ）

(A) $af(a)$； (B) $f(a)$； (C) a； (D) 0 .

三、计算题（共 6 小题，每小题 6 分，共 36 分）

得分	

1．设 $y=e^{2x}-\ln\cot x$，求 dy．

$$y'=2e^{2x}-\frac{1}{\cot x}\cdot(-\csc^2 x)$$

$$=2e^{2x}+\frac{1}{\cos x\cdot\sin x}$$

$$\therefore dy=\left(2e^{2x}+\frac{1}{\cos x\cdot\sin x}\right)dx$$

得分	

2． $y=\arctan x+x\ln\sqrt{x}$，求 $\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=1}$ 的值

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+x^2}+\ln\sqrt{x}+\frac{1}{2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-2x}{(1+x)^2}+\frac{1}{2x}$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=1}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0$$

得分	

3. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-k}{x}\right)^{-2x}=\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{2}{x}$，求 k 的值.

右边 $=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{1}{x}}=2.$

左边 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-\frac{x}{k}}\right)^{-\frac{x}{k}\cdot\left(\frac{k}{x}\cdot 2x\right)}=e^{2k}$

$\therefore e^{2k}=2 \Rightarrow k=\frac{1}{2}\ln 2$

得分	

4． 求函数 $f(x)=(x-2)^2\cdot\sqrt[3]{x^2}$ 的极值.

$f(x)=(x-2)^2x^{2/3} \quad x\in(-\infty,+\infty)$

$f'(x)=2(x-2)x^{2/3}+\frac{2}{3}(x-2)^2\cdot x^{-1/3}=\frac{4}{3}\cdot\frac{(x-2)(2x-1)}{\sqrt[3]{x}}$

令 $f'(x)=0 \Rightarrow x=1/2$、 or $x=2$

x	$(-\infty,0)$	$(0,1/2)$	$1/2$	$(1/2,2)$	2	$(2,+\infty)$
f'	$-$	$+$	0	$-$	0	$+$
f	↘	↗		↘		↗

$\therefore$ 极大值 $f(1/2)=\frac{9}{8}\sqrt[3]{2}$

极小值 $\begin{cases} f(0)=0 \\ f(2)=0 \end{cases}$

得分	

5. 已知 $f(x)$ 的一个原函数是 $\ln\sin x$，求 $\int xf(1-x^2)dx$.

由已知. $d\ln\sin x = f(x)dx$ ∴

$\int xf(1-x^2)dx = -\frac{1}{2}\int f(1-x^2)\,d(1-x^2) \overset{1-x^2=t}{=\!=} -\frac{1}{2}\int f(t)dt$

$= -\frac{1}{2}\ln\sin t + C$

$= -\frac{1}{2}\ln\sin(1-x^2) + C$

得分	

6. 计算 $\int_0^2 (1+\frac{x}{2})\sqrt{2x-x^2}\,dx$.

∵ $\sqrt{2x-x^2} = \sqrt{1-(x-1)^2}$ ∴ 令 $x-1=t$.

原积分 $= \int_{-1}^{1}(\frac{3}{2}+\frac{t}{2})\sqrt{1-t^2}\,dt$

$= 3\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt$

$= 3\cdot\frac{1}{4}\pi$

得分	

四、[本题 10 分]

1. [4 分]方程 $\ln(x^2+y) = x^3y + \cos x$ 确定隐函数 $y = y(x)$，求 $y'(0)$.

$\frac{2x+y'}{x^2+y} = 3x^2y + x^3y' - \sin x$

$x=0$ 时 $\ln y = 1 \Rightarrow y = e$

∴ $y'(0) = 0$

2. [6 分] 求微分方程 $y'' + 2y' - 3y = xe^{-3x}$ 的通解.

① $r^2+2r-3=0 \Rightarrow (r+3)(r-1)=0 \Rightarrow r_1=1.\ r_2=-3$

∴ $Y = C_1e^x + C_2e^{-3x}$

② $m=1.\ \lambda=-3$

令特解 $y^* = (ax+b)\cdot x e^{-3x} = (ax^2+bx)e^{-3x}$

$y^{*\prime} = [-3ax^2+(2a-3b)x+b]e^{-3x}$

$y^{*\prime\prime} = [9ax^2+(-12a+9b)x+(2a-6b)]e^{-3x}$

代入得. $a=-1/8$ $b=1/16$ ∴ $y^* = \frac{x}{16}(-2x+1)e^{-3x}$

③ 通解 $y = \frac{x}{16}(-2x+1)e^{-3x} + C_1e^x + C_2e^{-3x}$

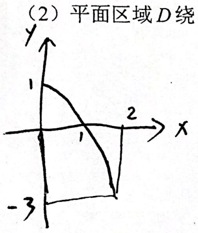
得分	

五、应用题[本题 7 分]

已知平面区域D由抛物线$y=1-x^2$和x轴、y轴及直线$x=2$围成，

试求（1）平面区域D的面积； $x=\sqrt{1-y}$ $x^2=1-y$

（2）平面区域D绕y轴旋转一周生成的旋转体的体积.



(1) $D=\int_0^1 1-x^2 dx-\int_1^2 1-x^2 dx=2$

(2) $V=\int_0^1 \pi x^2 dy+\left[\pi\cdot 2^2\cdot 3-\int_{-3}^{0}\pi x^2 dy\right]$

$=\int_0^1 \pi(1-y)dy+12\pi-\int_{-3}^{0}\pi(1-y)dy$

$=\pi\left[1-\frac{1}{2}+12-(3+\frac{9}{2})\right]$

$=5\pi$

得分	

六、证明题 [本题 5 分]

设函数$f(x)$在$[-a,a](a>0)$上具有二阶连续导数，且$f(0)=0$，试证明：

在$[-a,a]$上至少存在一点ξ，使得 $a^3 f''(\xi)=3\int_{-a}^{a} f(x)dx$.