# 第5章信号的频谱分析与电路系统频域分析

5.1 导言

5.2 周期信号的傅里叶级数

5.3 傅里叶变换

5.4 连续时间系统的频域分析

5.5 滤波器

5.6 振荡电路

# 回顾

- 傅里叶变换
  - 常用信号的傅里叶变换
  - 傅里叶变换性质
    - 线性性
    - 对偶性
    - 尺度变换
    - 共轭特性
    - 对称性

# 本次课学习内容

- 傅里叶变换
  - 傅里叶变换性质
    - 时移与频移特性
    - 卷积定理
    - 时域微分与积分
    - 频域微分与积分
    - Parseval 定理
  - 周期信号的傅里叶变换
- 连续时间系统的频域分析

## 5.3.3 傅里叶变换的性质

- 线性性
- 对偶性
- 尺度变换
- 共轭特性
- 对称性

- 时移与频移特性
- 卷积定理
- 时域微分与积分
- 频域微分与积分
- Parseval 定理

- **频移特性 (Modulation)** → **调制**

$$f(t)\leftrightarrow F(\omega) \Leftrightarrow f(t)e^{\pm j\omega_0 t}\leftrightarrow F(\omega\mp\omega_0)$$

- 频移特性 (Modulation)

→ 调制

$$\boxed{f(t) \leftrightarrow F(\omega) \Leftrightarrow f(t)e^{\pm j\omega_0 t} \leftrightarrow F(\omega \mp \omega_0)}$$

$$1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega) \quad \Rightarrow$$

$$\cos\omega_0 t = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right)$$

$$\leftrightarrow \quad \pi\left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right]$$

- 卷积定理 (Convolution)

时域卷积定理：

$$f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega),\ f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}[f_1(t)*f_2(t)]e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau e^{-j\omega t}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)[\underline{\int_{-\infty}^{\infty}f_2(t-\tau)e^{-j\omega t}dt}]d\tau$$

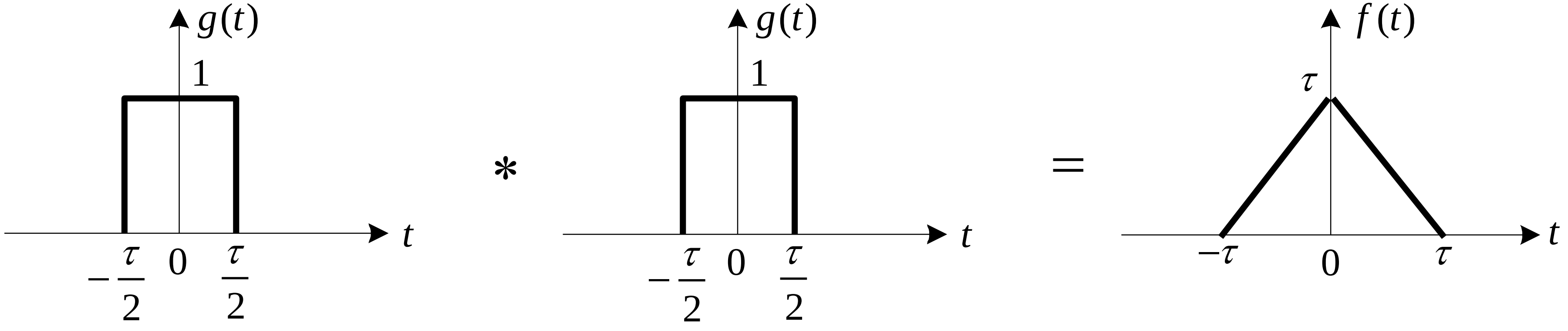
(时移性质)

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)F_2(\omega)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

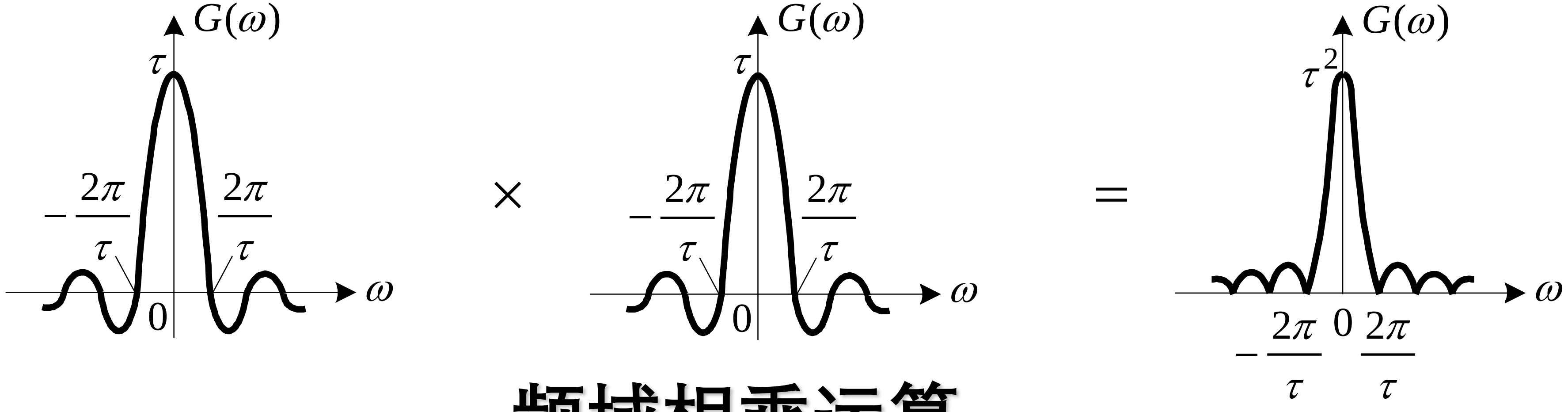
$$=[\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau]F_2(\omega)=F_1(\omega)\cdot F_2(\omega)$$

**时域卷积运算 $\boxed{\leftrightarrow}$ 频域相乘运算**

$$G_\tau(t) * G_\tau(t) = \tau\Delta_{2\tau}(t) \leftrightarrow \left(\tau \mathrm{Sa}(\frac{\omega\tau}{2})\right)\cdot\left(\tau \mathrm{Sa}(\frac{\omega\tau}{2})\right) = \tau^2 \mathrm{Sa}^2(\frac{\omega\tau}{2})$$




# 时域卷积运算




# 频域相乘运算

频域卷积定理：

$$f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega),\ f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$$

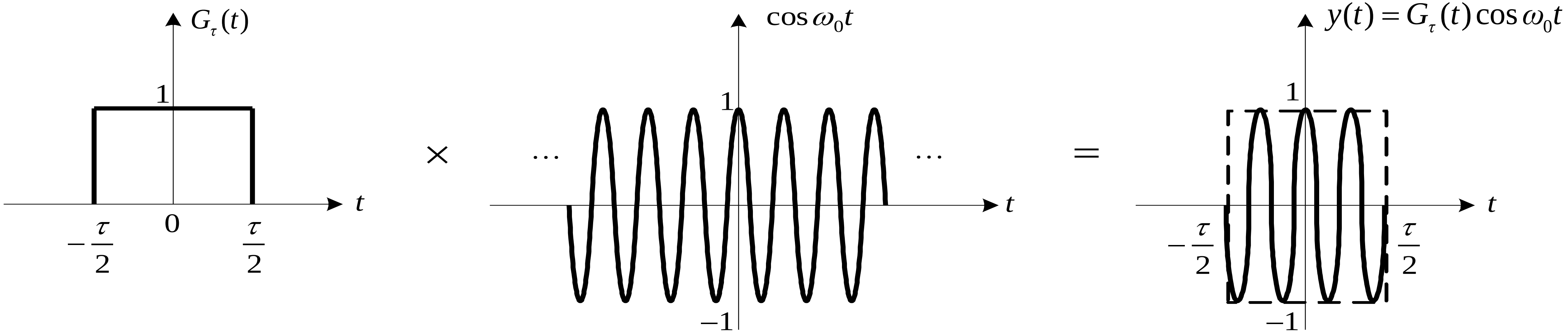
$\Leftrightarrow$

$$f_1(t) \cdot f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)$$

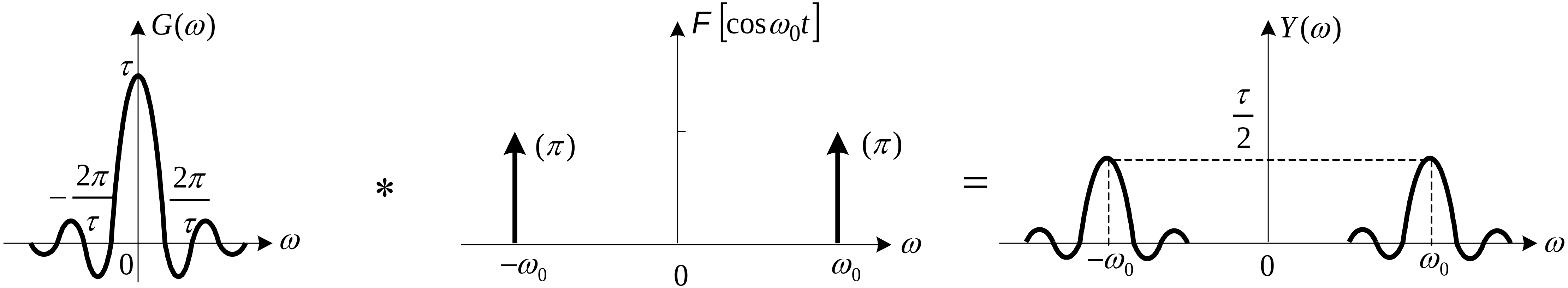
$$f(t)\cos(\omega_0 t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}F(\omega) * \pi\{\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)\}$$

$f(t)*\delta(t-t_0)=f(t-t_0)$

$$= \frac{1}{2}\{F(\omega+\omega_0)+F(\omega-\omega_0)\}$$




时域相乘运算




频域卷积运算

- **时域微分和时域积分 (Differentiation & Integration)**

时域微分

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega) \Leftrightarrow f^{(n)}(t) \leftrightarrow (j\omega)^n F(\omega)$$

时域积分

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega) \Leftrightarrow f^{(-1)}(t) \leftrightarrow \pi F(0)\delta(\omega) + \frac{F(\omega)}{j\omega}$$

试证 $f^{(-1)}(t) \leftrightarrow \pi F(0)\delta(\omega) + \dfrac{F(\omega)}{j\omega}$

证明：

$$f^{(-1)}(t) = f^{(-1)}(t) * \delta(t) = f(t) * \varepsilon(t)$$

$$\leftrightarrow F(\omega) \cdot \left( \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right)$$

$$= \quad \pi F(0)\delta(\omega) + \frac{F(\omega)}{j\omega}$$

求 $f(t)=\delta^{(n)}(t)$ 的傅里叶变换

解：已知 $\delta(t)\leftrightarrow 1$

由时域微分定理 $\delta^{(n)}(t)\leftrightarrow\left(j\omega\right)^{n}$

例：已知 $\mathrm{sgn}(t) \leftrightarrow \dfrac{2}{j\omega}$，求 $f(t)=\dfrac{1}{t^2}$ 的傅里叶变换

解：由对偶性有： $\dfrac{2}{jt} \leftrightarrow 2\pi\,\mathrm{sgn}(-\omega) \Rightarrow \dfrac{1}{t} \leftrightarrow -j\pi\,\mathrm{sgn}(\omega)$

由时域微分性质 $-\dfrac{1}{t^2} \leftrightarrow -j\pi\,\mathrm{sgn}(\omega)\cdot\left(j\omega\right)$

$$\Rightarrow \frac{1}{t^2} \leftrightarrow -\pi\omega\cdot\mathrm{sgn}(\omega) = -\pi\,|\,\omega\,|$$

## • 频域微分和频域积分

频域微分

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega) \Leftrightarrow (-jt)^n f(t) \leftrightarrow F^{(n)}(\omega)$$

频域积分

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega) \Leftrightarrow \pi f(0)\delta(t) - \frac{f(t)}{jt} \leftrightarrow F^{(-1)}(\omega)$$

单选题 2分

设置

已知 $1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$

求 $f(t)=t^n$ 的傅里叶变换

A $\pi(-j)^n\delta^{(n)}(\omega)$

B $\pi(j)^n\delta^{(n)}(\omega)$

C $2\pi(-j)^n\delta^{(n)}(\omega)$

D $2\pi(j)^n\delta^{(n)}(\omega)$

提交

求 $f(t)=t^n$ 的傅里叶变换

解：已知 $1\leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$

由频域微分定理 $(-jt)^n \leftrightarrow \left(2\pi\delta(\omega)\right)^{(n)}$

$$\Rightarrow \quad t^n \quad \leftrightarrow \quad 2\pi(j)^n\delta^{(n)}(\omega)$$

**例：利用性质求矩形脉冲的傅里叶变换，并求三矩形脉冲信号的傅里叶变换。**

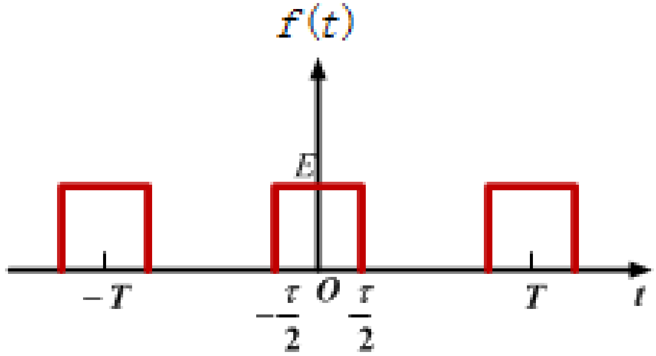
**解：对矩形脉冲求微分** $\frac{d}{dt}G_\tau(t)=\delta\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-\delta\left(t-\frac{\tau}{2}\right)$

$$\delta\left(t+\frac{\tau}{2}\right)\leftrightarrow e^{j\omega\frac{\tau}{2}}\quad,\quad\delta\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\leftrightarrow e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}\qquad\therefore\frac{d}{dt}G_\tau(t)\leftrightarrow e^{j\omega\frac{\tau}{2}}-e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}$$

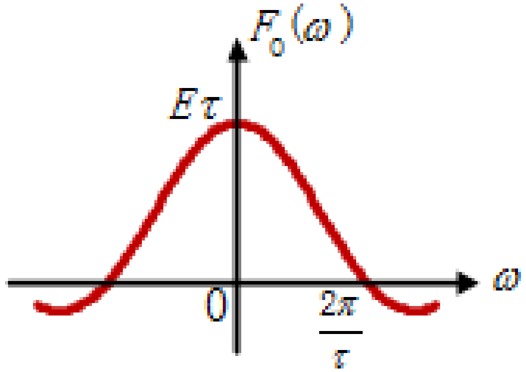
**利用线性及积分性质** $\boxed{f(t)\leftrightarrow F(\omega)\Leftrightarrow f^{(-1)}(t)\leftrightarrow\pi F(0)\delta(\omega)+\frac{F(\omega)}{j\omega}}$

$$G_\tau(t)\leftrightarrow\frac{1}{j\omega}\left(e^{j\omega\frac{\tau}{2}}-e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}\right)=\frac{2}{\omega}\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)=\tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

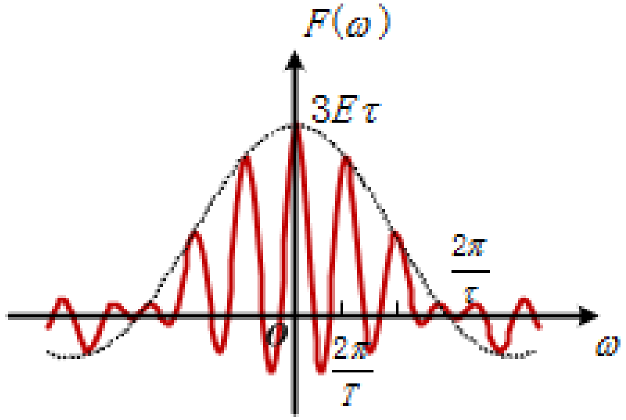
# 傅里叶性质举例




三矩形脉冲




单矩形脉冲频谱




三矩形脉冲频谱

$$EG_\tau(t+T) \leftrightarrow E\tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)e^{j\omega T},\ EG_\tau(t-T) \leftrightarrow E\tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)e^{-j\omega T}$$

$$F(\omega) = E\tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\left(1+e^{j\omega T}+e^{-j\omega T}\right)$$

$$= E\tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\left(1+2\cos\left(\omega T\right)\right)$$

- **Parseval 定理**

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 \, d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) [\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\omega) e^{-j\omega t} d\omega] dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\omega) [\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt] d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\omega) F(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 \, d\omega$$

例：计算信号的能量 $f(t)=2\cos(997t)\dfrac{\sin 5t}{\pi t}$

$$f(t)\leftrightarrow F(\omega) \Leftrightarrow F(t)\leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$$

$$G_\tau(t)\leftrightarrow \tau Sa(\frac{\omega\tau}{2}) \Leftrightarrow \tau Sa(\frac{t\tau}{2})\leftrightarrow 2\pi G_\tau(-\omega)$$

解： $\dfrac{\sin 5t}{\pi t}\leftrightarrow \mathrm{G}_{10}(\omega)$,

$$\Rightarrow 2\cos(997t)\frac{\sin 5t}{\pi t}\leftrightarrow \mathrm{G}_{10}(\omega-997)+\mathrm{G}_{10}(\omega+997)$$

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2\,d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}(10+10)=\frac{10}{\pi}$$

## 5.3.4 周期信号的傅里叶变换

对周期信号$f_T(t)$，$\omega_0=\dfrac{2\pi}{T}$，有：

$$f_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\omega_0 t},\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

其中，$F_n=\dfrac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f_T(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$

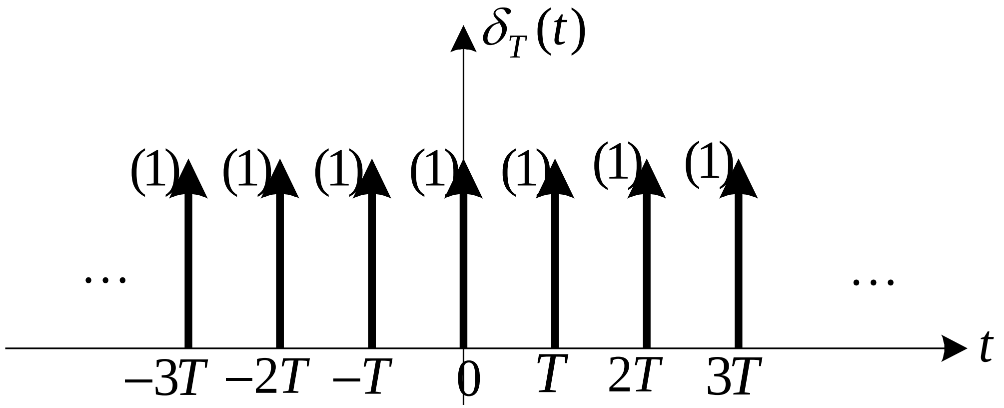
$$e^{jn\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - n\omega_0)$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \cdot e^{jn\omega_0 t} \leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \cdot 2\pi\delta(\omega - n\omega_0) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n\delta(\omega - n\omega_0)$$

$$f_T(t) \leftrightarrow F_T(\omega)$$

$$= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n\delta(\omega - n\omega_0), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

例：求 $\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$ 的傅里叶变换

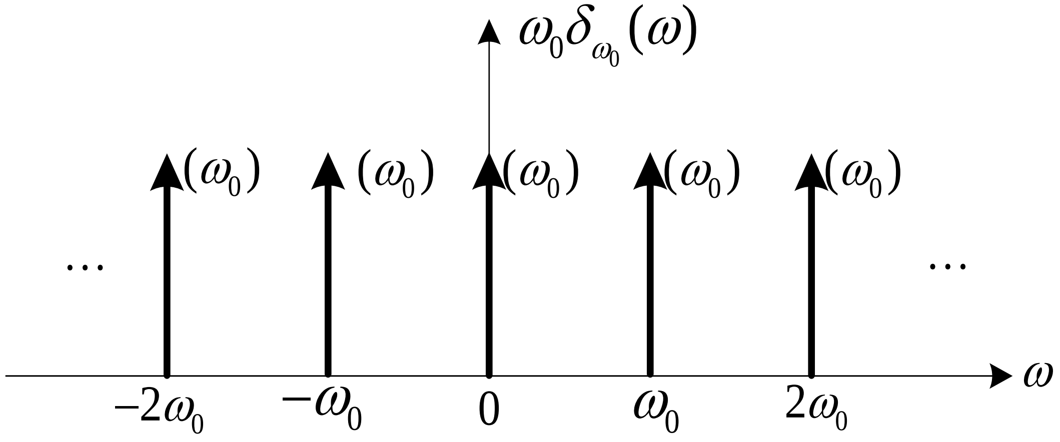



解：$F_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\delta_T(t)e^{-jn\omega_0 t}dt=\frac{1}{T}$

$$\Rightarrow\ \delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\cdot e^{jn\omega_0 t}=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{jn\omega_0 t}$$

$$\Rightarrow \delta_T(t)\ \leftrightarrow\ \frac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_0)$$

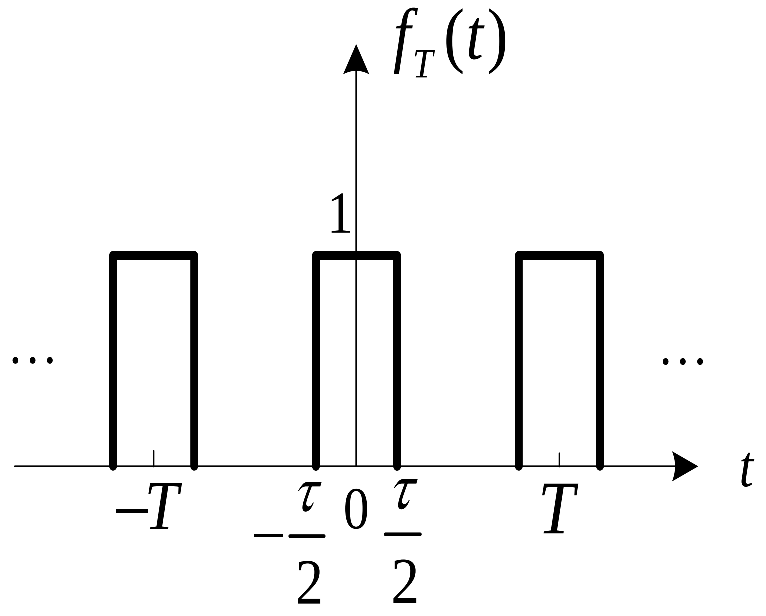
$$=\omega_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_0)\triangleq\omega_0\delta_{\omega_0}(\omega)$$

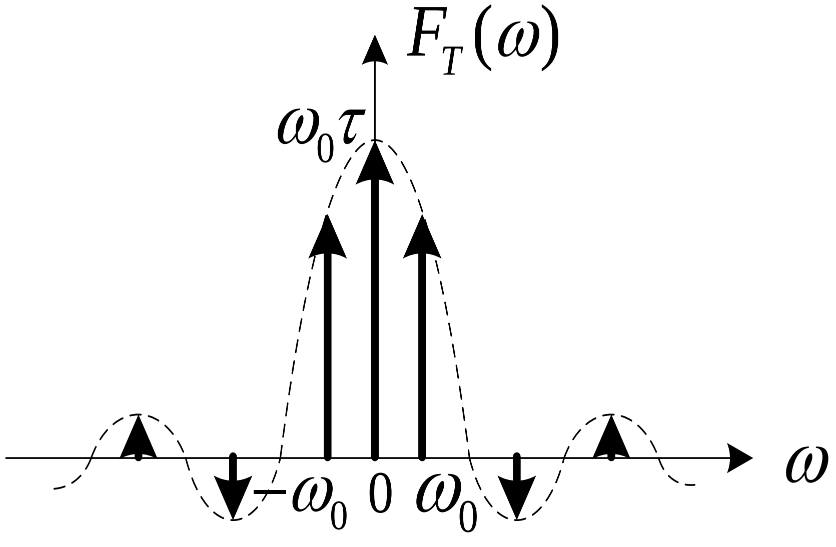


例：已知 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$，求 $f_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t-nT)$ 的傅里叶变换

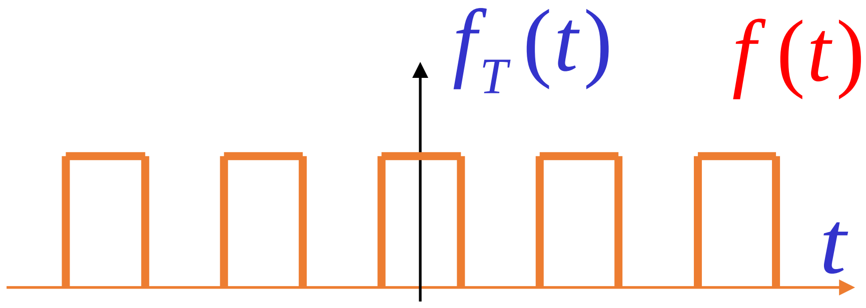
解：$f_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t-nT)=f(t)*\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$

$$\Rightarrow f_T(t)\leftrightarrow F(\omega)\cdot\omega_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_0) = \omega_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(n\omega_0)\delta(\omega-n\omega_0)$$

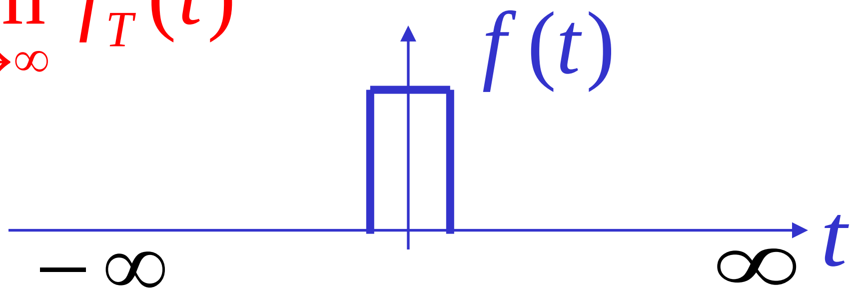


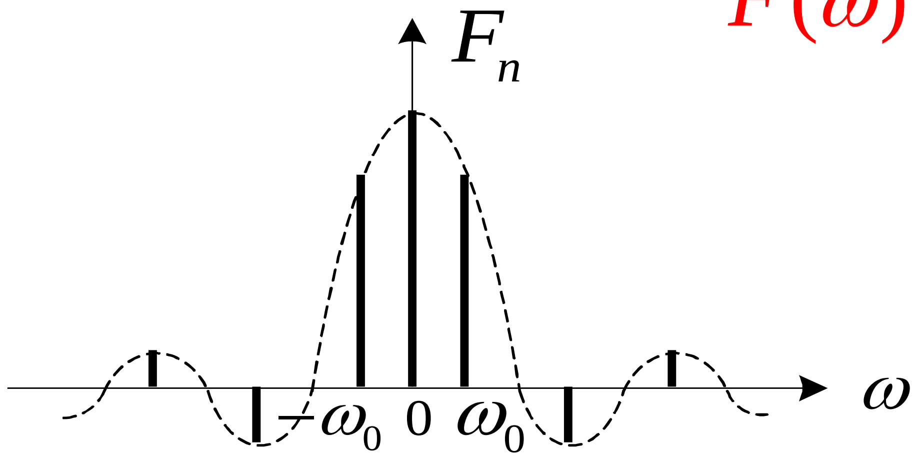
# 小结：从傅里叶级数到傅里叶变换




$$f(t)=\lim_{T\to\infty} f_T(t)$$



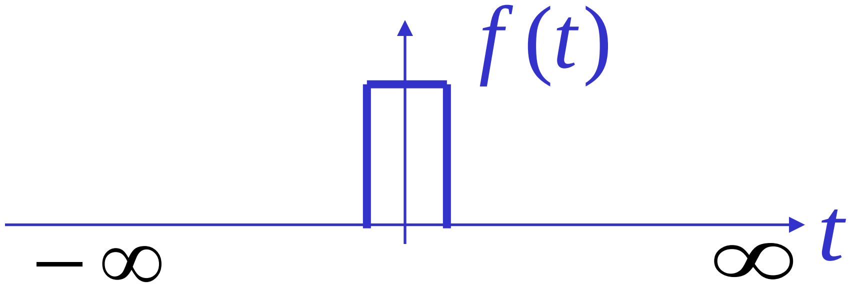

$$F(\omega)=\lim_{\Delta f\to 0}\frac{F_n}{\Delta f}$$

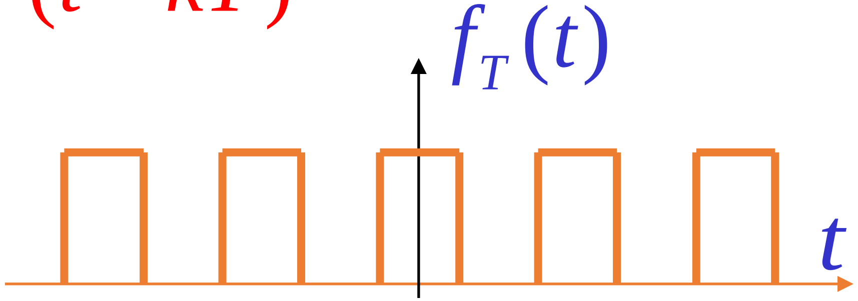



**离散性,谐波性,衰减性 →**

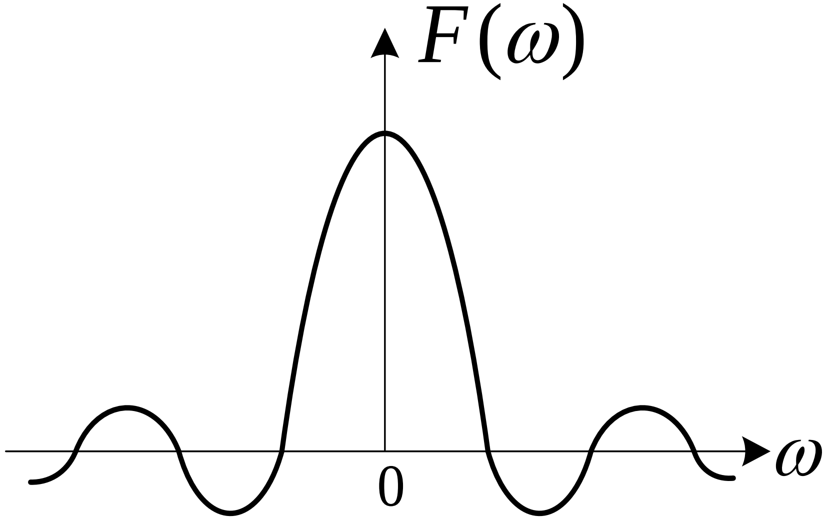
# 小结：从傅里叶变换到傅里叶级数

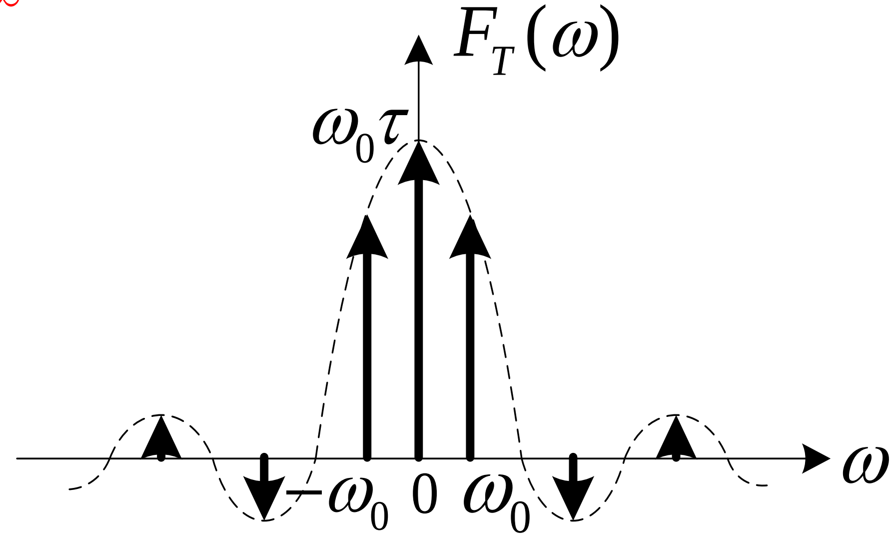
$$f_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t-kT)$$



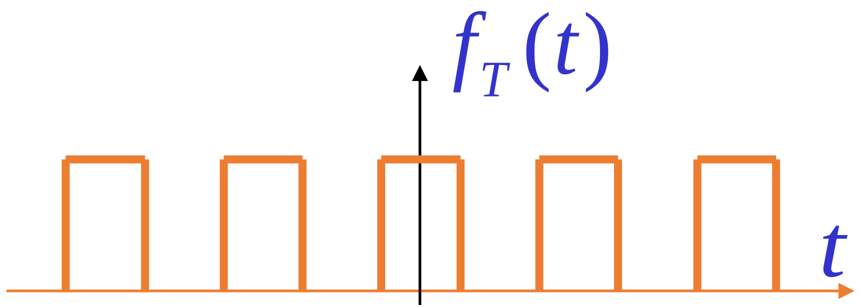



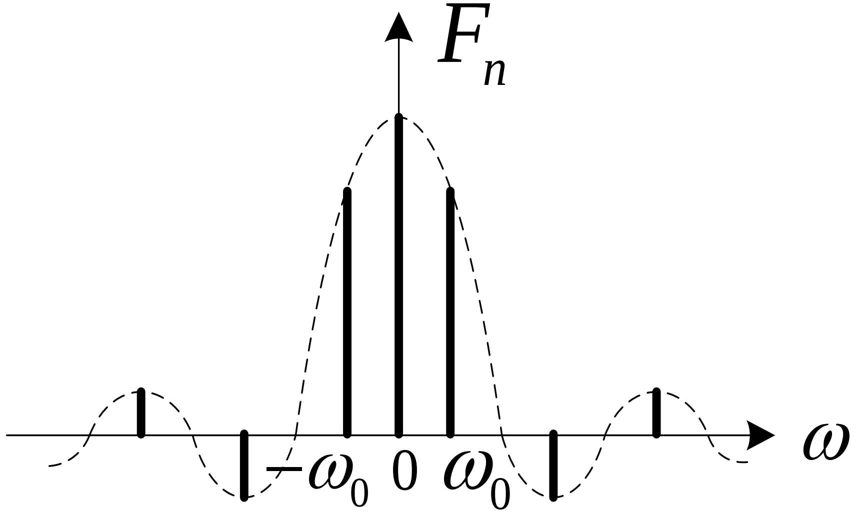

$$F_T(\omega) = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_0)\delta(\omega - n\omega_0)$$

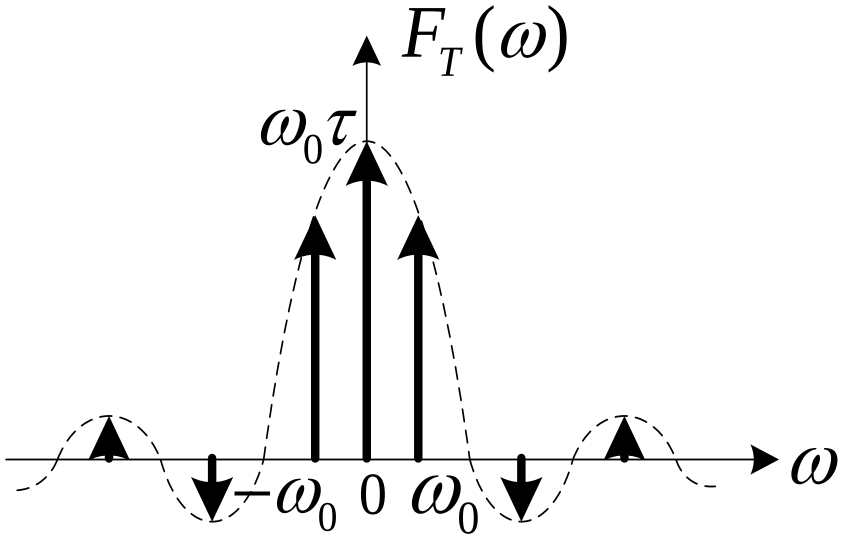


# 小结：周期信号的傅里叶级数与傅里叶变换




$F_T(\omega) = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_0)$ 密度性：$F_T(\omega) \sim \lim_{\Delta f \to 0} \frac{F_n}{\Delta f}$

# 5.4连续时间系统的频域分析

- **5.4.1 频域系统函数**
- **5.4.2 利用系统函数求响应**

# 5.4.1 频域系统函数

$$x(t) = x(t) * \delta(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow y_{zs}(t) = x(t) * h(t)$$

**设输入、输出及单位冲激响应的傅里叶变换分别为：**

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega), y_{zs}(t) \leftrightarrow Y_{zs}(\omega), h(t) \leftrightarrow H(\omega)$$

$$Y_{zs}(\omega) = X(\omega) H(\omega)$$

$$H(\omega) = \frac{Y_{zs}(\omega)}{X(\omega)} = F\left[h(t)\right]$$

## 5.4.1 频域系统函数

$$H(\omega)=\frac{Y_{zs}(\omega)}{X(\omega)}=F\left[h(t)\right]$$

单位冲激响应h(t)是在冲激信号作用下的系统零状态响应，它与系统的输入信号无关，因此，可以用单位冲激响应来描述系统的时域特性。

$H(\omega)$ 是单位冲激响应的傅里叶变换，同样与输入无关，因此可用于描述系统的频域特性。

**定义频域系统函数（系统频率响应）**

$$H(\omega)=\frac{Y_{zs}(\omega)}{X(\omega)}=\mathcal{F}\left[h(t)\right]$$

$H(\omega)$**的求解：**

**（1）根据系统输入及它的零状态响应计算；**

**（2）计算单位冲激响应的傅里叶变换得到；**

**（3）利用微分方程计算；**

**（4）利用电路计算。**

**例5.4-1 已知激励信号** $x(t)=e^{-3t}\varepsilon(t)$ **，系统在该激励作用下的零状态响应为** $y_{zs}(t)=\left(e^{-2t}-e^{-3t}\right)\varepsilon(t)$ **求该系统的频域系统函数** $H(\omega)$ **。**

**解：**

$$x(t)=e^{-3t}\varepsilon(t)\leftrightarrow X(\omega)=\frac{1}{j\omega+3}$$

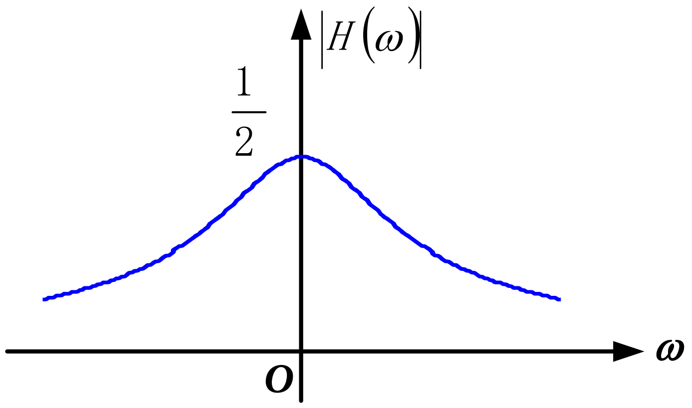
$$y_{zs}(t)=\left(e^{-2t}-e^{-3t}\right)\varepsilon(t)\leftrightarrow$$

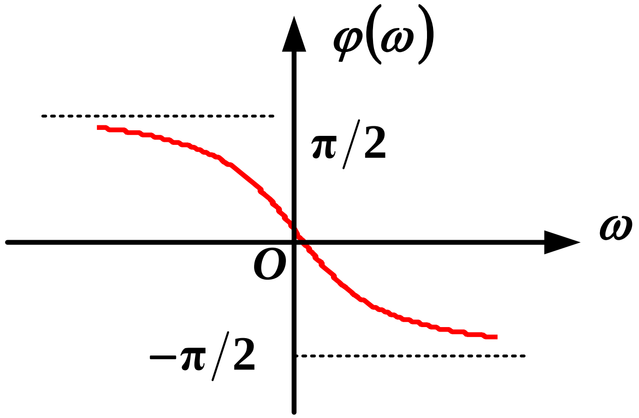
$$Y_{zs}(\omega)=\frac{1}{j\omega+2}-\frac{1}{j\omega+3}=\frac{1}{(j\omega+3)(j\omega+2)}$$

$$H(\omega)=\frac{1}{j\omega+2}$$

$H(\omega)$ **是复函数，写成模和辐角的形式：**

$$H(\omega)=\frac{1}{j\omega+2}=\frac{1}{\sqrt{\omega^2+2^2}}e^{-j\arctan\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$



**例5.4-2 已知描述连续时间系统的微分方程为**

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2x'(t) + x(t)$$

**求该系统的频域系统函数。**

**解：对微分方程两边求傅里叶变换，利用傅里叶变换的时域微分特性**

$$(j\omega)^2 Y(\omega) + 3j\omega Y(\omega) + 2Y(\omega) = 2j\omega X(\omega) + X(\omega)$$

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{2j\omega + 1}{(j\omega)^2 + 3j\omega + 2}$$

## 5.4.1 频域系统函数

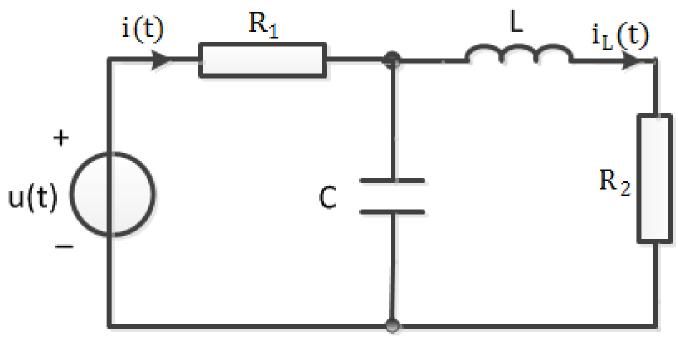
$$H(\omega)=\frac{Y(\omega)}{X(\omega)}=\frac{2j\omega+1}{(j\omega)^2+3j\omega+2}$$

$$|H(\omega)|==\frac{\sqrt{(2\omega)^2+1}}{\sqrt{(2-\omega^2)^2+(3\omega)^2}}=\sqrt{\frac{4\omega^2+1}{\omega^4+5\omega^2+4}}$$

$$\varphi(\omega)=\arctan(2\omega)-\arctan\left(\frac{3\omega}{2-\omega^2}\right)$$

**同学们可以尝试用MATLAB绘制幅频特性和相频特性图！**

**例5.4-3求电路图的频率响应函数。（思考：有几个频率响应？）**




时域电路

$$i_C(t) = C\frac{du_C(t)}{dt}$$

$$u_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$$

# 5.4.1 频域系统函数

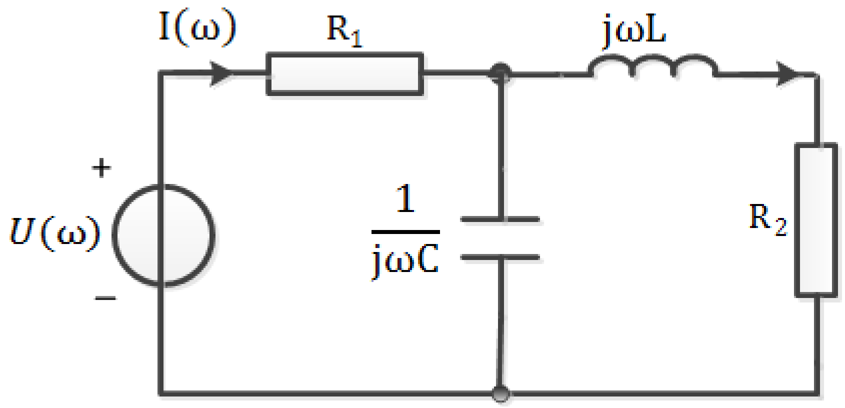
$$i_C(t) = C\frac{du_C(t)}{dt} \leftrightarrow I_C(\omega) = j\omega C U_C(\omega)$$

$$u_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} \leftrightarrow U_L(\omega) = j\omega L I_L(\omega)$$

**系统输入为** $u(t)$ **,输出为**$i(t)$

$$H(\omega) = \frac{I(\omega)}{U(\omega)}$$

$$= \frac{1}{R_1 + (j\omega L + R_2) // \frac{1}{j\omega C}}$$




**频域电路**

## 1）系统的输入是周期信号

根据周期信号傅里叶级数展开理论，任何一个周期信号都可以分解为复指数函数的线性表示形式。对于LTI系统，系统的输出满足叠加原理，先来讨论周期信号的基本组成单元--复指数信号作用到线性时不变系统的响应。

系统的频率响应 $H(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)e^{-j\omega t}dt$

系统的输入信号 $x(t)=Ke^{j\omega_1 t}$

## 复指数信号作用下的响应

$$H(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$x(t)=Ke^{j\omega_1 t} \longrightarrow \boxed{\begin{matrix}H(\omega)\\ h(t)\end{matrix}} \longrightarrow y(t)=x(t)*h(t)$$

**系统的响应**

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t-\tau)h(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}Ke^{j\omega_1(t-\tau)}h(\tau)d\tau$$

$$=Ke^{j\omega_1 t}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j\omega_1\tau}h(\tau)d\tau=Ke^{j\omega_1 t}H(\omega_1)$$

**可见，系统的输出等于系统输入与频域系统函数在输入频率处的值相乘。**

## 2.利用频域系统函数求响应

$$\boxed{H(\omega) = |H(\omega)| e^{j\varphi(\omega)}}$$

**频域系统函数在输入信号频率 $\omega_1$ 处的值**

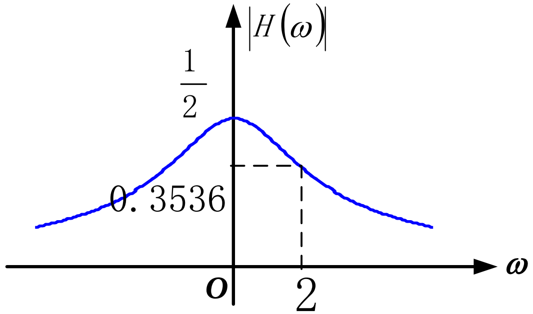
$$H(\omega_1) = |H(\omega_1)| e^{j\varphi(\omega_1)}$$

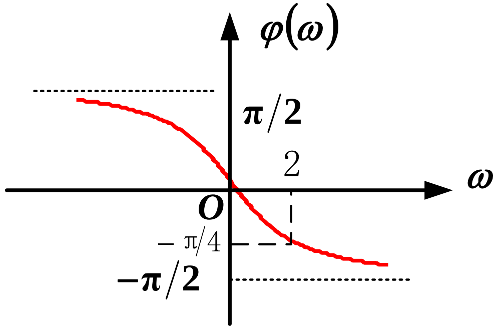
**因此，得到输出信号为**

$$y(t) = Ke^{j\omega_1 t} H(\omega_1) = K|H(\omega_1)| e^{j[\omega_1 t + \varphi(\omega_1)]}$$

**幅度---相位**

例5.4-4系统的幅频特性和相频特性如图所示，输入 $x(t) = 1 + 3e^{j2t}$ 求系统的响应。




解：输入信号包含直流和频率$\omega = 2$的复指数信号，系统幅频特性和相频特性在这两个频率上的值从图中读出列在下表中：

| 频率$\omega_1$ | 幅频特性取值 | 相频特性取值 |
|---|---|---|
| $\omega_1 = 0$ | 0.5 | 0 |
| $\omega_1 = 2$ | 0.3536 | $-\frac{\pi}{4}$ |

# 5.4.2 利用系统函数求响应

$$H\left(\omega_1\right) = \left|H\left(\omega_1\right)\right| e^{j\varphi\left(\omega_1\right)}$$

$$H\left(0\right) = \left|H\left(0\right)\right| e^{j\varphi\left(0_1\right)} = 0.5$$

$$H\left(2\right) = \left|H\left(2\right)\right| e^{j\varphi\left(2\right)} = 0.3536e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

$$x\left(t\right) = 1 + 3e^{j2t}$$

$$\Longrightarrow$$

$$y(t) = 1 \times 0.5 + 3 \times 0.3536e^{j\left(2t-\frac{\pi}{4}\right)}$$

## 5.4.2 利用系统函数求响应

### 正弦信号作用下响应

**当输入信号为** $x(t) = K\cos(\omega_1 t) = \dfrac{K}{2}\left(e^{j\omega_1 t} + e^{-j\omega_1 t}\right)$

$$\Rightarrow \quad y(t) = \frac{K}{2}\left(e^{j\omega_1 t} H(\omega_1) + e^{-j\omega_1 t} H(-\omega_1)\right)$$

**频域系统函数** $H(\omega)$ **的模** $|H(\omega)|$ **是** $\omega$ **的偶函数，**

**辐角** $\varphi(\omega)$**是** $\omega$ **的奇函数。**

$$|H(\omega_1)| = |H(-\omega_1)|, \varphi(\omega_1) = -\varphi(-\omega_1)$$

$$y(t) = \frac{K}{2}|H(\omega_1)|\left(e^{j\omega_1 t} e^{j\varphi(\omega_1)} + e^{-j\omega_1 t} e^{-j\varphi(\omega_1)}\right)$$

$$= K|H(\omega_1)|\cos\left[\omega_1 t + \varphi(\omega_1)\right]$$

结论?

# 周期信号输入下的响应小结

**输入信号** → $H(\omega)=|H(\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$ → **输出信号**

| | |
|---|---|
| $Ke^{j\omega_1 t}$ | $K\left\|H(\omega_1)\right\|e^{j[\omega_1 t+\varphi(\omega_1)]}$ |
| $K\cos(\omega_1 t+\theta)$ | $K\left\|H(\omega_1)\right\|\cos[\omega_1 t+\theta+\varphi(\omega_1)]$ |
| $K\sin(\omega_1 t+\theta)$ | $K\left\|H(\omega_1)\right\|\sin[\omega_1 t+\theta+\varphi(\omega_1)]$ |
| $\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\omega_1 t}$ | $\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\left\|H(n\omega_1)\right\|e^{j(n\omega_1 t+\varphi(n\omega_1))}$ |

**LTI系统输入信号与输出信号同频率，只有幅度和相位的变换！**

**例5.4-5 已知LTI系统的频率响应和输入信号，求响应。**

$$H(\omega) = \frac{1}{j\omega + 2} \qquad x(t) = 2\cos(2t) + 1.5\sin\left(3t + \frac{\pi}{3}\right)$$

**解：输入信号包含两个频率，频域系统函数在这两个频率处的幅度和相位分别为：**

$$H(2) = \frac{1}{j2 + 2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{-j\frac{\pi}{4}} \qquad H(3) = \frac{1}{j3 + 2} = \frac{1}{\sqrt{13}} e^{-j\arctan\frac{3}{2}}$$

$$y(t) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{2}} \cos\left(2t - \frac{\pi}{4}\right) + 1.5 \times \frac{1}{\sqrt{13}} \sin\left(3t + \frac{\pi}{3} - \arctan\left(\frac{3}{2}\right)\right)$$

## 5.4.2 利用系统函数求响应

根据频域系统函数的定义，系统输入，输出的傅里叶变换和频域系统函数这三者之中已知任意两项，可求得第三项。

对于系统分析，系统是确定的，即$\mathbf{H}(\omega)$确定，已知输入求输出，或者已知输出求输入两种情况；而对于系统综合（即系统设计），根据用户需求，明确输入和输出信号求频域系统函数的过程，本课程主要讨论系统分析。

# 5.4.2 利用系统函数求响应

**例5.4-6 描述某系统的微分方程** $y'(t)+2y(t)=x(t)$

$x(t)=e^{-t}\varepsilon(t)$ **求系统的零状态响应。**

**解：根据微分方程求出频域系统函数** $H(\omega)=\dfrac{1}{j\omega+2}$

$$x(t)=e^{-t}\varepsilon(t)\leftrightarrow X(\omega)=\frac{1}{j\omega+1}$$

$$Y(\omega)=X(\omega)H(\omega)=\frac{1}{j\omega+1}\frac{1}{j\omega+2}$$

$$y(t)=\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{1}{j\omega+1}\frac{1}{j\omega+2}\right]=\left(e^{-t}-e^{-2t}\right)\varepsilon(t)$$

**利用频域系统函数求响应，要求熟练掌握常用信号的傅里叶正反变换，省去了繁琐的解方程或求卷积过程。**

**习题：5-6~5-11。**
**截止时间：6月4日早8点**