第四章 线性电路的正弦稳态分析

- 4.1 正弦交流电基本概念
- 4.2 正弦量的相量表示
- 4.3 基尔霍夫定律的相量形式
- 4.4 无源单口网络的阻抗、导纳及等效变换
- 4.5 正弦稳态电路的相量分析法
- 4.6正弦稳态电路的功率
- 4.7 磁耦合电路的正弦稳态分析

回顾

- 正弦稳态电路的功率
  - 瞬时功率
  - 平均功率/有功功率
  - 无功功率

本次课学习内容

- 正弦稳态电路的功率
  - 视在功率
  - 复（数）功率
- 磁耦合电路的正弦稳态分析

4 视在功率

定义：$S \overset{\text{def}}{=} UI$

表征电气设备的容量

单位：VA（伏安）

（例如发电机的发电容量）

功率因数另一种定义

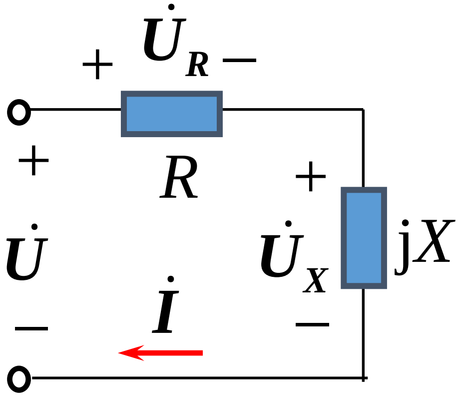
$$\lambda = \frac{P}{S} = \cos\varphi$$

有功功率、无功功率与视在功率的关系

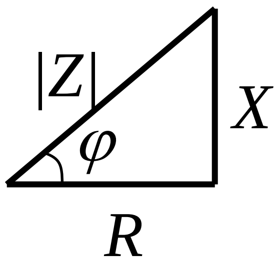
有功功率：$P=UI\cos\varphi$　　单位：W

无功功率：$Q=UI\sin\varphi$　　单位：var

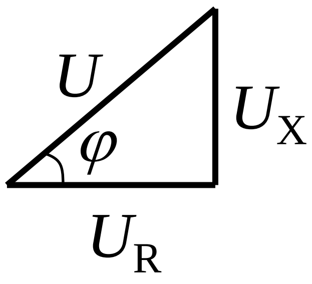
视在功率：$S=UI$　　单位：VA



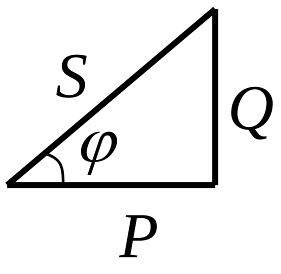
$$\begin{cases} S = \sqrt{P^2 + Q^2} \\ P = S\cos\varphi \\ Q = S\sin\varphi \\ \varphi = \arctan\dfrac{Q}{P} \end{cases}$$



阻抗三角形



电压三角形



功率三角形

三个三角形相似

例4. 6−1 日光灯电路（含镇流器）的电压有效值为$U=220\text{V}$有功功率为 $P=30\text{W}$，电流有效值为$I=0.4\text{A}$，求该电路的视在功率、功率因数、无功功率。

解 $S=UI=220\times0.4=88\text{V}\cdot\text{A}$

由于镇流器为感性的，因此该电路整体呈感性，即 $\varphi>0$

$$\lambda=\frac{P}{S}=\frac{30}{88}=0.34(\text{滞后})$$

$$\varphi=\arccos0.34=70.1^\circ$$

$$Q=S\sin\varphi=88\sin70.1^\circ=82.7\,\text{var}$$

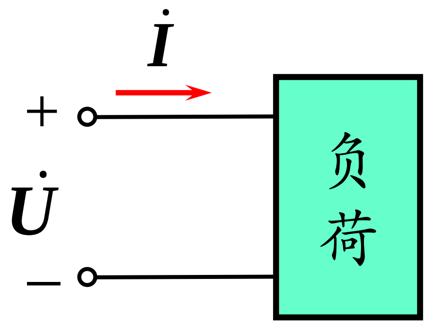
5 复(数)功率(complex power)

$$\dot{U}=U\angle\psi_u\ ,\qquad \dot{I}=I\angle\psi_i$$

$$P=UI\cos(\psi_u-\psi_i)$$

$$=UI\,\mathrm{Re}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\psi_u-\psi_i)}]$$

$$=\mathrm{Re}[\underbrace{U\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi_u}}_{\dot{U}}\ \underbrace{I\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\psi_i}}_{\dot{I}^*}]$$



$$P=\mathrm{Re}[\dot{U}\,\dot{I}^*]\qquad\qquad Q=\mathrm{Im}[\dot{U}\,\dot{I}^*]$$

记: $\tilde{S}=\dot{U}\dot{I}^*$ 称为复功率，单位:VA[伏安]

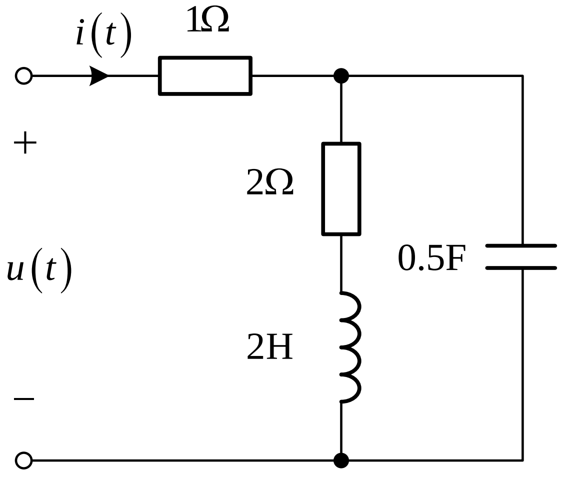
$$\tilde{S}=\dot{U}\dot{I}^*=UI\angle(\psi_u-\psi_i)=UI\angle\varphi=S\angle\varphi$$

$$=UI\cos\varphi+\mathrm{j}UI\sin\varphi=P+\mathrm{j}Q$$

$$\boxed{S=|\tilde{S}|}$$

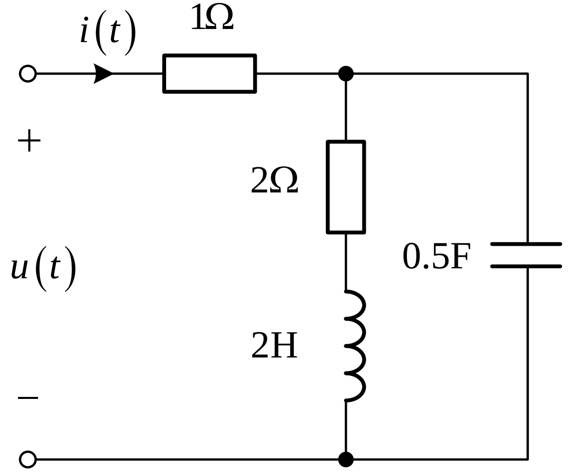
复功率守恒 $\displaystyle\sum_{k=1}^{b}\tilde{S}_k=\sum_{k=1}^{b}\dot{U}_k\dot{I}_k^*=0$

例4. 6−2如图4.6-3（a）所示单口网络，已知端口电压为 $u(t)=\sqrt{2}\cos(2t)\mathrm{V}$，求该单口网络的$P$、$Q$、$\tilde{S}$ 和 λ

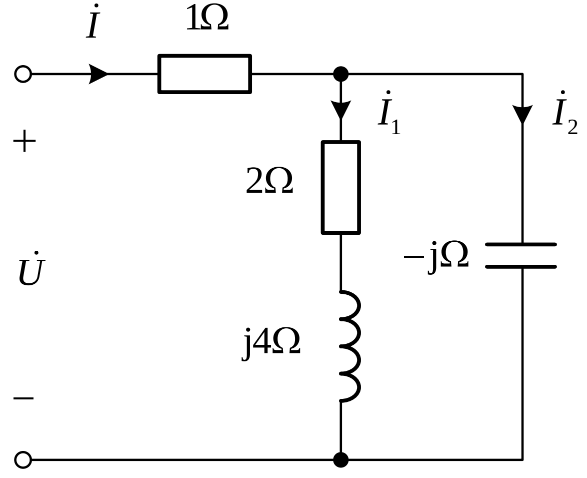


(a)

例4. 6−2如图4.6-3（a）所示单口网络，已知端口电压为 $u(t)=\sqrt{2}\cos(2t)\mathrm{V}$，求该单口网络的$P$、$Q$、$\tilde{S}$ 和 λ



(a)



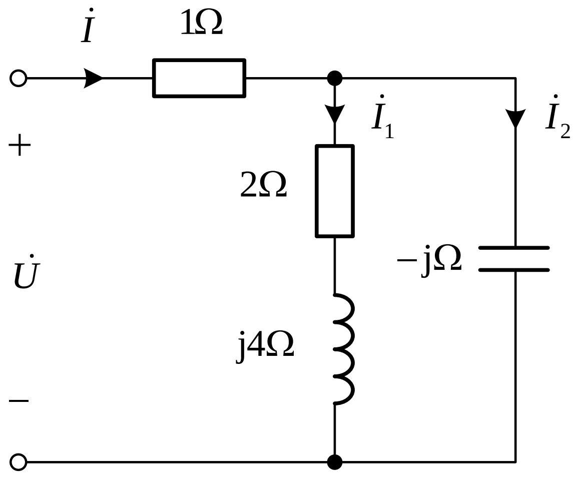
(b)

$$u(t)=\sqrt{2}\cos(2t)\mathrm{V}\leftrightarrow\dot{U}=1\angle0°\mathrm{V}$$

$$\dot{I}=\frac{\dot{U}}{1+(2+\mathrm{j}4)//(-\mathrm{j})}=\frac{1\angle0°}{1.687\angle-46.85°}=0.593\angle46.85°\mathrm{A}$$

例4. 6−2如图4.6-3（a）所示单口网络，已知端口电压为

$u(t)=\sqrt{2}\cos(2t)\mathrm{V}$，求该单口网络的$P$、$Q$、$\tilde{S}$ 和 λ



$$u(t)=\sqrt{2}\cos(2t)\mathrm{V}\leftrightarrow\dot{U}=1\angle 0^\circ\mathrm{V}$$

$$\dot{I}=\frac{\dot{U}}{1+(2+\mathrm{j}4)//(-\mathrm{j})}$$

$$=\frac{1\angle 0^\circ}{1.687\angle-46.85^\circ}=0.593\angle 46.85^\circ\mathrm{A}$$

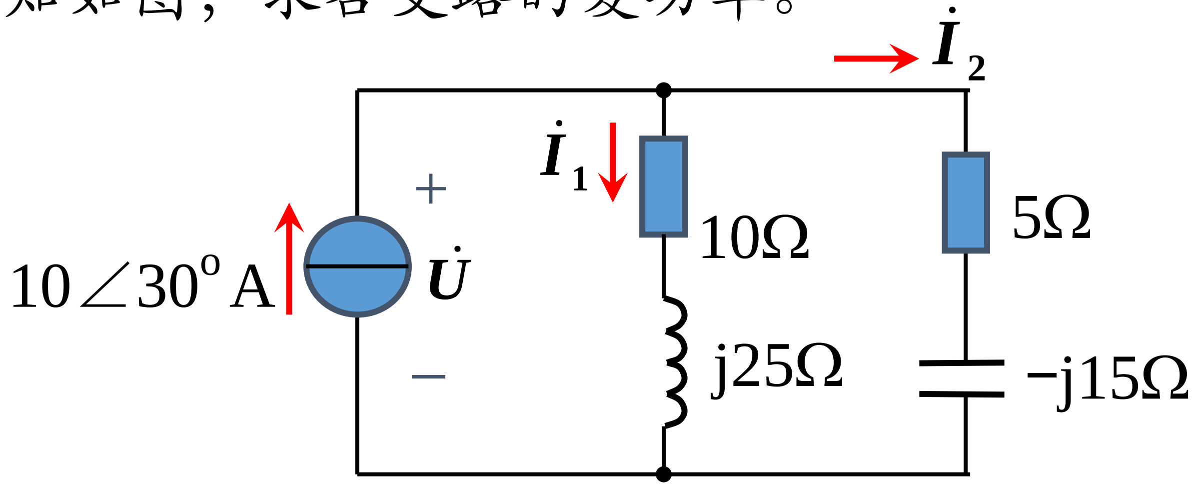
$$\tilde{S}=\dot{U}\dot{I}^*=1\angle 0^\circ\times 0.593\angle-46.85^\circ$$

$$=0.593\angle-46.85^\circ=(0.406-\mathrm{j}0.433)\mathrm{V}\cdot\mathrm{A}$$

$$P=0.406\mathrm{W}\qquad Q=-0.433\mathrm{var}$$

$$\lambda=\frac{P}{S}=\frac{P}{|\tilde{S}|}=\frac{0.406}{0.593}=0.68(\text{超前})$$

例　已知如图，求各支路的复功率。



解

$$\dot{I}_1 = 10\angle 30^{\circ} \times \frac{5-\mathrm{j}15}{10+\mathrm{j}25+5-\mathrm{j}15} = 8.77\angle(-75.3^{\circ}) \quad \mathbf{A}$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_S - \dot{I}_1 = 14.94\angle 64.5^{\circ} \quad \mathbf{A}$$

$$\dot{U} = 10\angle 30^{\circ} \times [(10+\mathrm{j}25) \,||\, (5-\mathrm{j}15)] = 236\angle(-7.1^{\circ}) \quad \mathrm{V}$$

电流源 $\tilde{S}_{吸} = -236\angle(-7.1^{\circ}) \times 10\angle(-30^{\circ}) = -1882 + \mathrm{j}1424 \quad \mathrm{VA}$

支路1 $\tilde{S}_{1吸} = 236\angle(-7.1^{\circ}) \times 8.77\angle(75.3^{\circ}) = 769 + \mathrm{j}1923 \quad \mathrm{VA}$

支路2 $\tilde{S}_{2吸} = 236\angle(-7.1^{\circ}) \times 14.94\angle(-64.5^{\circ}) = 1116 - \mathrm{j}3348 \quad \mathrm{VA}$

- 瞬时功率：电路在瞬时吸收的功率，单位：W

$$p(t)=u(t)i(t)$$

- 有功功率：单位时间内实际发出或消耗的交流电能量，是周期内的平均功率，单位：W

$$P=\frac{1}{T}\int_0^T p(t)\mathrm{d}t=UI\cos\varphi$$

- 无功功率：阻抗中电抗部分能量交换的最大速率，单位：var

$$Q = UI\sin\phi$$

- 视在功率：表示交流电器设备容量的量，单位：VA，即衡量一个用电设备对上级供电设备的供电功率需求

$$S \overset{\text{def}}{=} UI$$

$$\begin{cases} S=\sqrt{P^2+Q^2} \\ P=S\cos\varphi \\ Q=S\sin\varphi \\ \varphi=\arctan\dfrac{Q}{P} \end{cases}$$

- 复(数)功率：辅助计算量，单位：VA

$$\tilde{S} = \dot{U}\dot{I}^*$$

$$= P+\mathrm{j}Q$$

- 4.7 磁耦合电路的正弦稳态分析
  - 互感和互感电压
  - 含互感电路的正弦稳态分析
  - 理想变压器
  - 含理想变压器的正弦稳态分析

1 互感和互感电压（Mutual Inductance）

复习——电感(inductance)

载流回路中的电流 i

磁感应强度 B

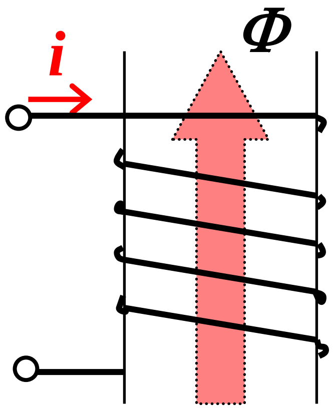
磁通 Φ

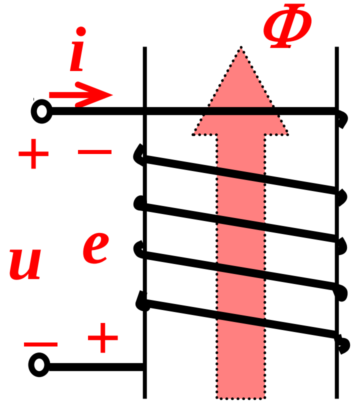
磁链 ψ

磁链ψ的定义

$\psi = N\,\Phi$

$$L \overset{\text{def}}{=} \frac{\psi}{i}$$





i, Φ右螺旋

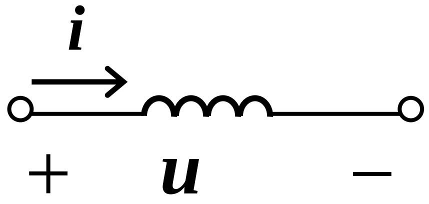
e, Φ右螺旋

u, i 关联

由电磁感应定律

$$e = -\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

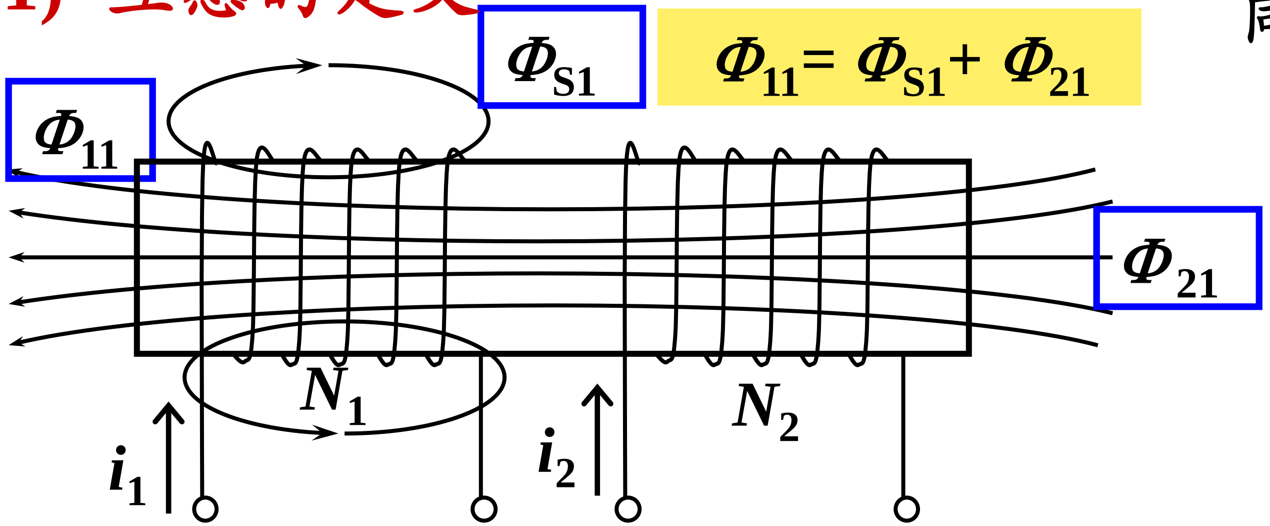
$$u = -e = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$



$$u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

(1) 互感的定义

$\Phi_{11} = \Phi_{S1} + \Phi_{21}$



同理有线圈2的自感

$$L_2 = \frac{\psi_{22}}{i_2}$$

线圈2对1的互感

$$M_{12} = \frac{\psi_{12}}{i_2}$$

载流回路1中的电流 i_1 → 磁感应强度 B → 磁通 Φ_{11}

磁通 Φ_{11} = 主磁通 Φ_{21} + 漏磁通 Φ_{S1}

$\psi_{11} = N_1 \Phi_{11}$ → 磁链 ψ_{11}

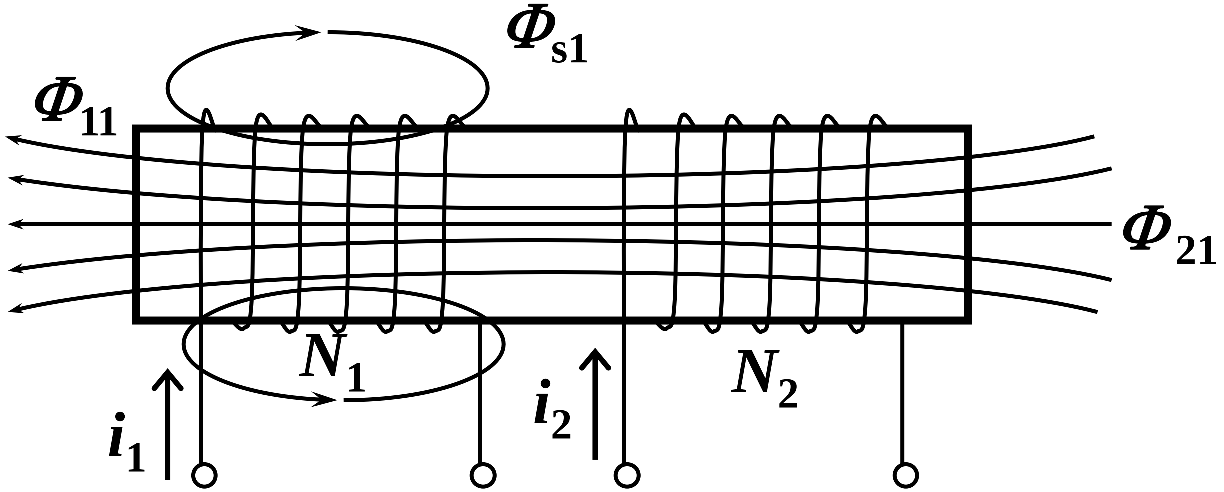
$$L_1 \overset{\text{def}}{=} \frac{\psi_{11}}{i_1}$$

线圈1的自感

$\psi_{21} = N_2 \Phi_{21}$ → 磁链 ψ_{21}

$$M_{21} \overset{\text{def}}{=} \frac{\psi_{21}}{i_1}$$

线圈1对2的互感



$$L_1 = \frac{\Psi_{11}}{i_1} \qquad L_2 = \frac{\Psi_{22}}{i_2}$$

单位 亨 (H)

$$M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{i_1} \qquad M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{i_2}$$

(2) 互感的性质

a） 对于线性电感 $M_{12}=M_{21}=M$

b）互感系数 M 只与两个线圈的几何尺寸、匝数、相互位置和周围的介质磁导率有关。

(3) 耦合系数k (coupling coefficient)

$$k \overset{\text{def}}{=} \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

$$M^2 \le L_1 L_2 \Longrightarrow k \le 1$$

互感不大于两个自感的几何平均值。

$$L_1 = \frac{N_1 \Phi_{11}}{i_1}$$

$$L_2 = \frac{N_2 \Phi_{22}}{i_2}$$

$$M = \frac{N_2 \Phi_{21}}{i_1}$$

$$M = \frac{N_1 \Phi_{12}}{i_2}$$

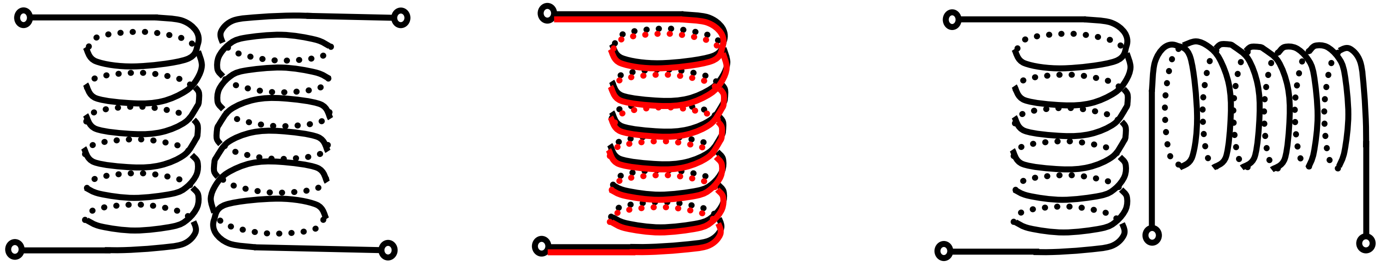
$$\Phi_{11} = \Phi_{S1} + \Phi_{21}$$

$$\Phi_{22} = \Phi_{S2} + \Phi_{12}$$

全耦合: $k = 1$ $\Longrightarrow$ $\Phi_{S1} = \Phi_{S2} = 0$

互感现象
- 利用——变压器，信号和功率的传递
- 避免——干扰

克服：合理布置线圈相互位置减少互感作用



$k<1$ $k=1$ $k=0$

单选题 2分

设置

对于两个耦合的电感线圈，假定其电感分别为2mH和8mH，两者间可能的最大互感为

A 2mH

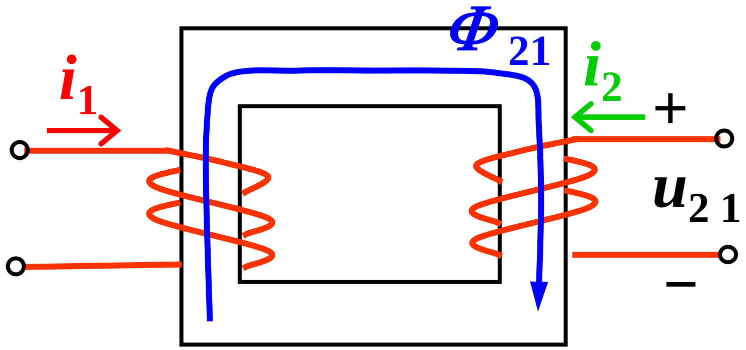
B 4mH

C 6mH

D 8mH

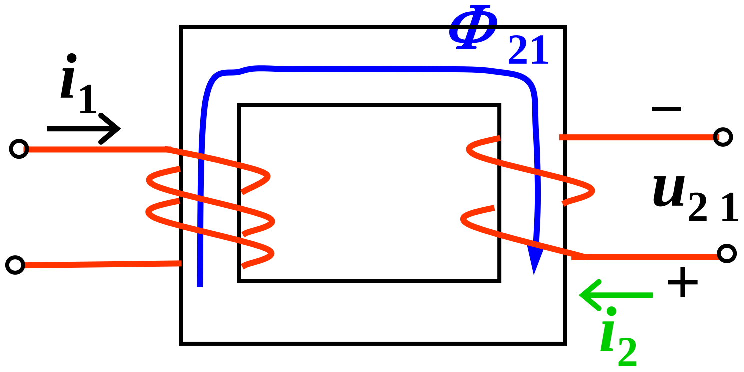
提交

(4) 互感电压



$$u_{21} = M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

互感电压的方向与互感线圈的绕向有关！！其关联电流方向对应于原磁场增强的方向。

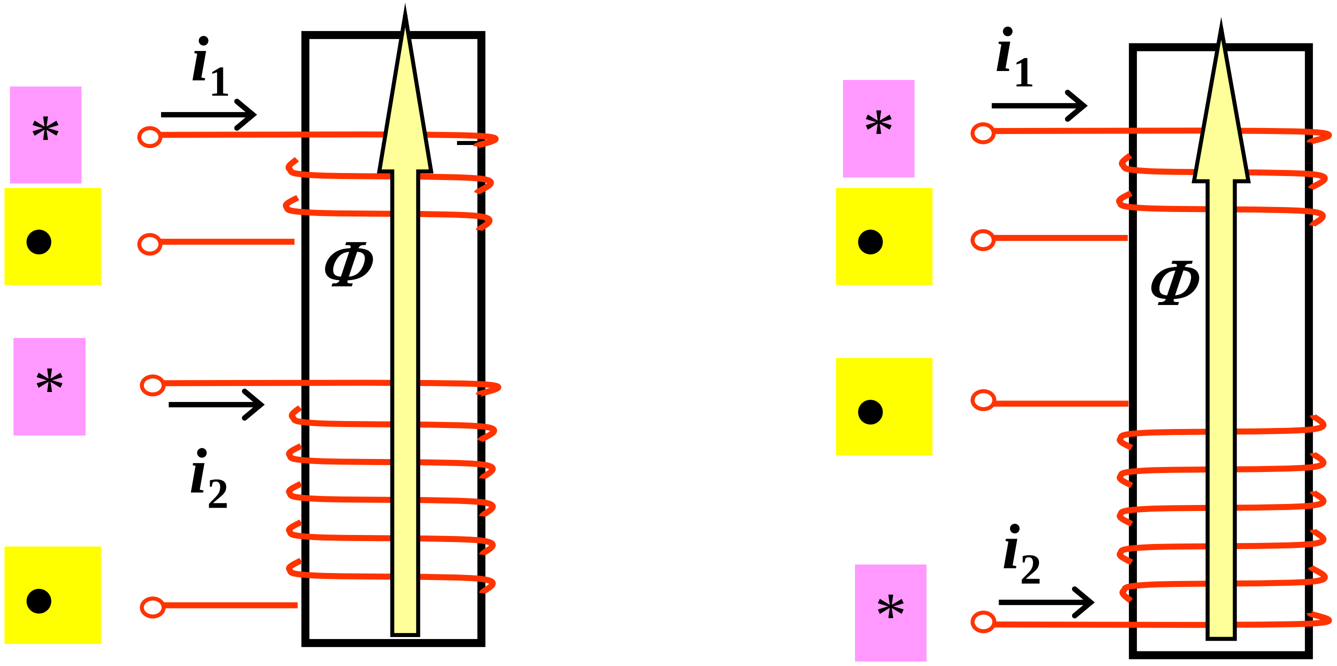


$$u_{21} = M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

2 同名端（Dot Convention）

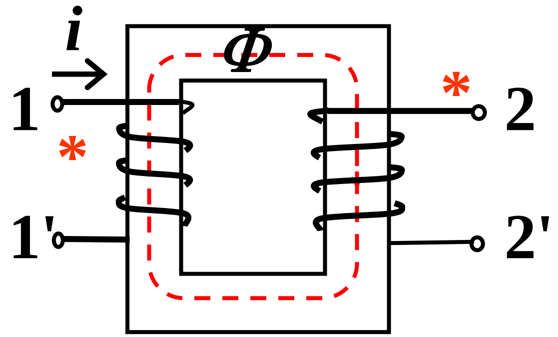
同名端：当两个电流分别从两个线圈的对应端子流入，其所产生的磁场相互加强时，则这两个对应端子称为同名端。

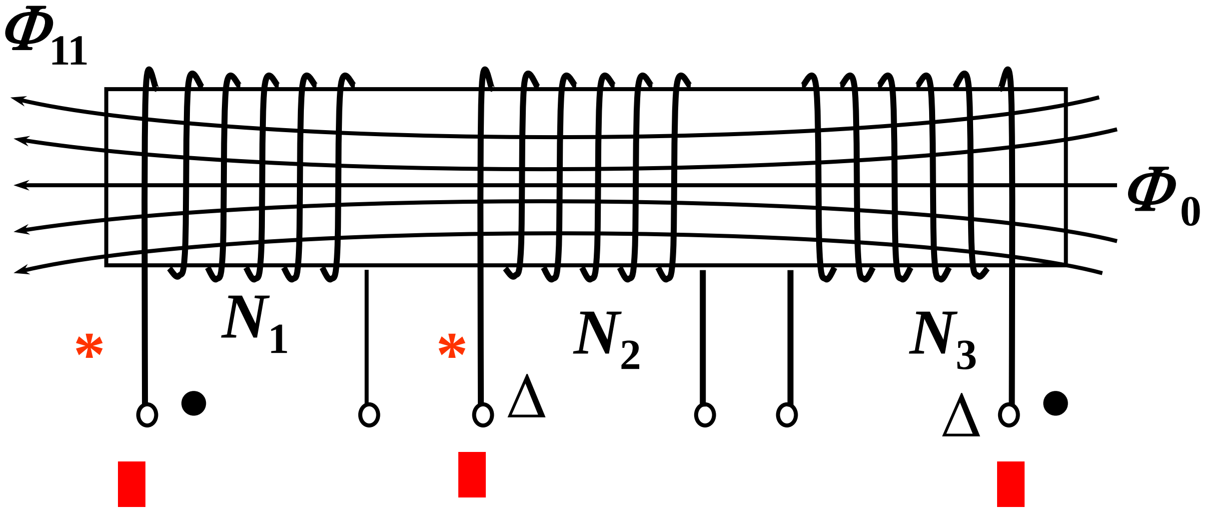
需要解决的问题1：如何根据绕法确定同名端?



注意：线圈的同名端必须两两确定。

例1



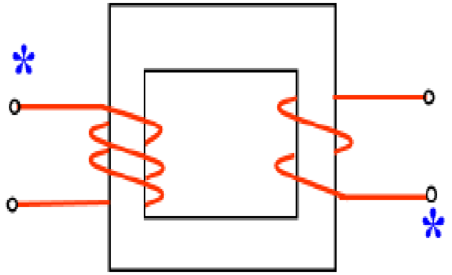


如果3个绕组根据线圈之间的两组关系可以确定另一组关系，则可以用3个点来代替6个点。

单选题 1分

设置

如图标注的同名端是



A 正确的

B 错误的

提交

需要解决的问题2：如何根据同名端确定互感电压？

$$u_{21} = M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

$$u_{21} = -M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

有怎样的记忆方法？

需要解决的问题2：如何根据同名端确定互感电压？

$$u_{21}=M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

$$u_{21}=-M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

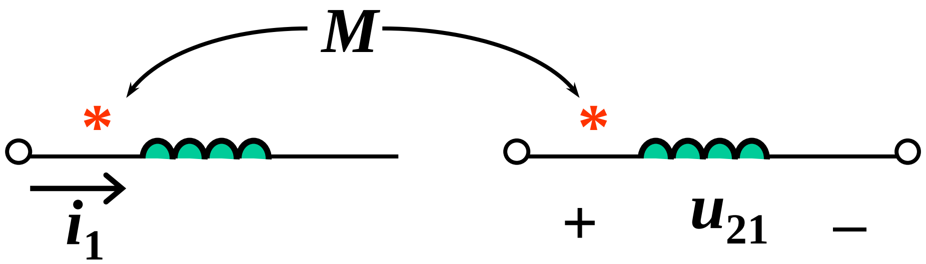
规律：

如果电流参考方向从同名端流入，
互感电压参考方向在同名端为正。

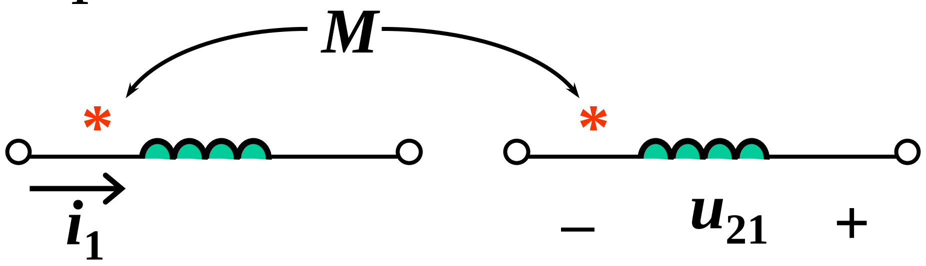
则 $u=M\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$

重要！！

例2

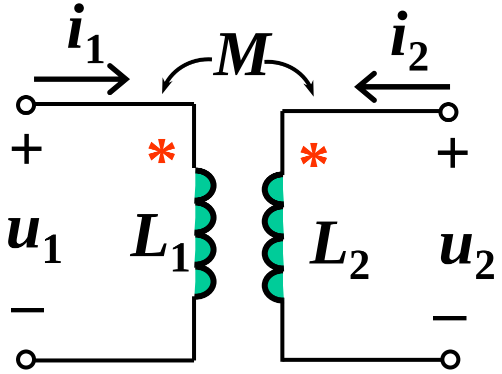


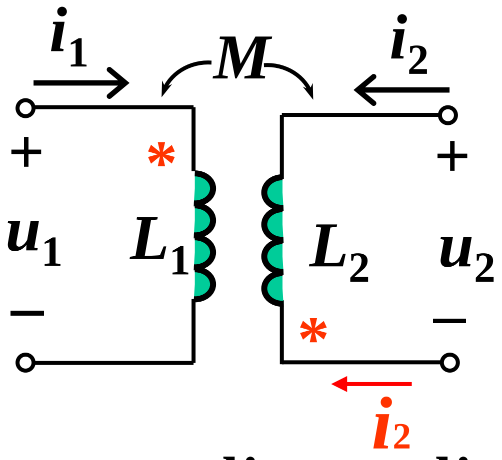
$$u_{21} = M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$



$$u_{21} = \boxed{-}M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

例3





时域形式

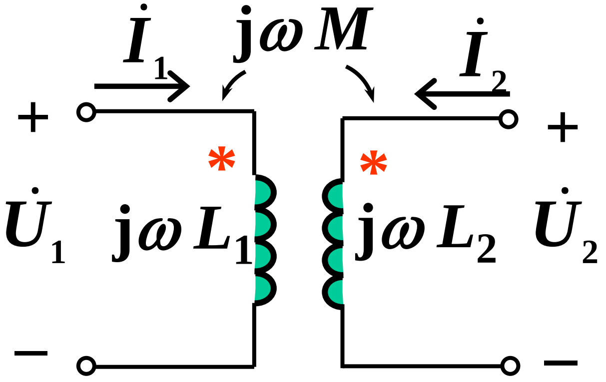
$$u_1 = L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

$$u_2 = M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

$$u_1 = L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

$$u_2 = -M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

在正弦稳态分析中，其相量形式的方程为

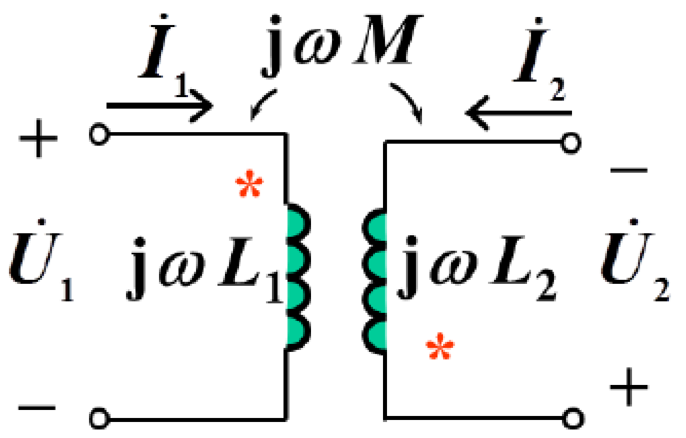


$$\dot{U}_1 = \mathrm{j}\omega L_1\dot{I}_1 + \mathrm{j}\omega M\dot{I}_2$$

$$\dot{U}_2 = \mathrm{j}\omega M\dot{I}_1 + \mathrm{j}\omega L_2\dot{I}_2$$

单选题 2分

下列公式正确的是



A
$$\dot{U}_1 = j\omega L_1\dot{I}_1 + j\omega M\dot{I}_2$$
$$\dot{U}_2 = j\omega M\dot{I}_1 + j\omega L_2\dot{I}_2$$

B
$$\dot{U}_1 = j\omega L_1\dot{I}_1 - j\omega M\dot{I}_2$$
$$\dot{U}_2 = j\omega M\dot{I}_1 + j\omega L_2\dot{I}_2$$

C
$$\dot{U}_1 = j\omega L_1\dot{I}_1 - j\omega M\dot{I}_2$$
$$\dot{U}_2 = j\omega M\dot{I}_1 - j\omega L_2\dot{I}_2$$

D
$$\dot{U}_1 = -j\omega L_1\dot{I}_1 - j\omega M\dot{I}_2$$
$$\dot{U}_2 = -j\omega M\dot{I}_1 + j\omega L_2\dot{I}_2$$

提交

互感的去耦等效，变压器

1　互感的去耦等效

串联

并联

单点联

互感的去耦等效

2　变压器

空心变压器

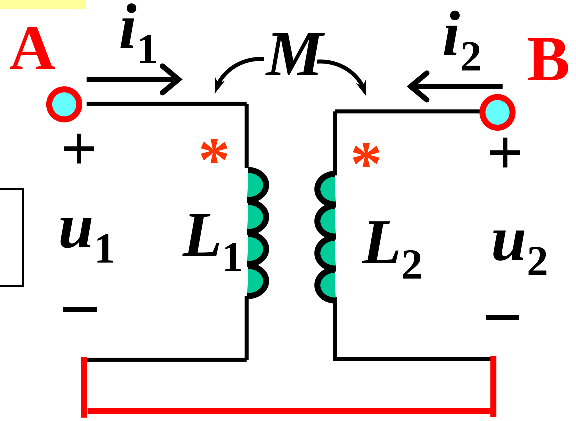
理想变压器

含理想变压器电路的计算

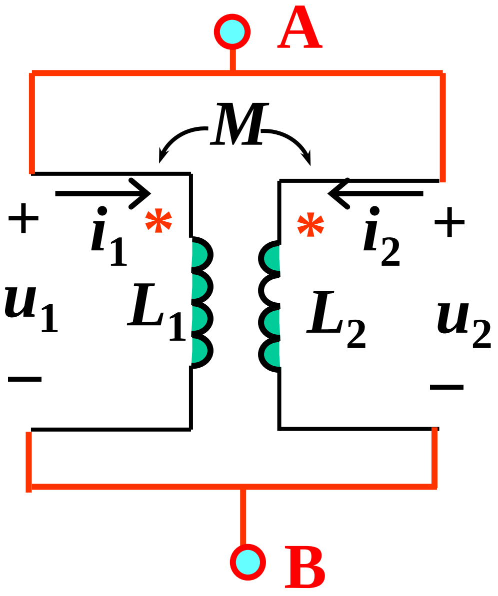
1 互感的去耦等效

串联

4端→2端

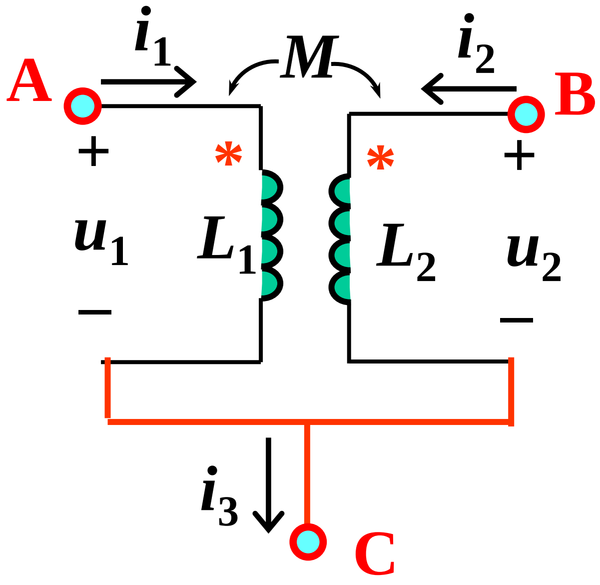


并联



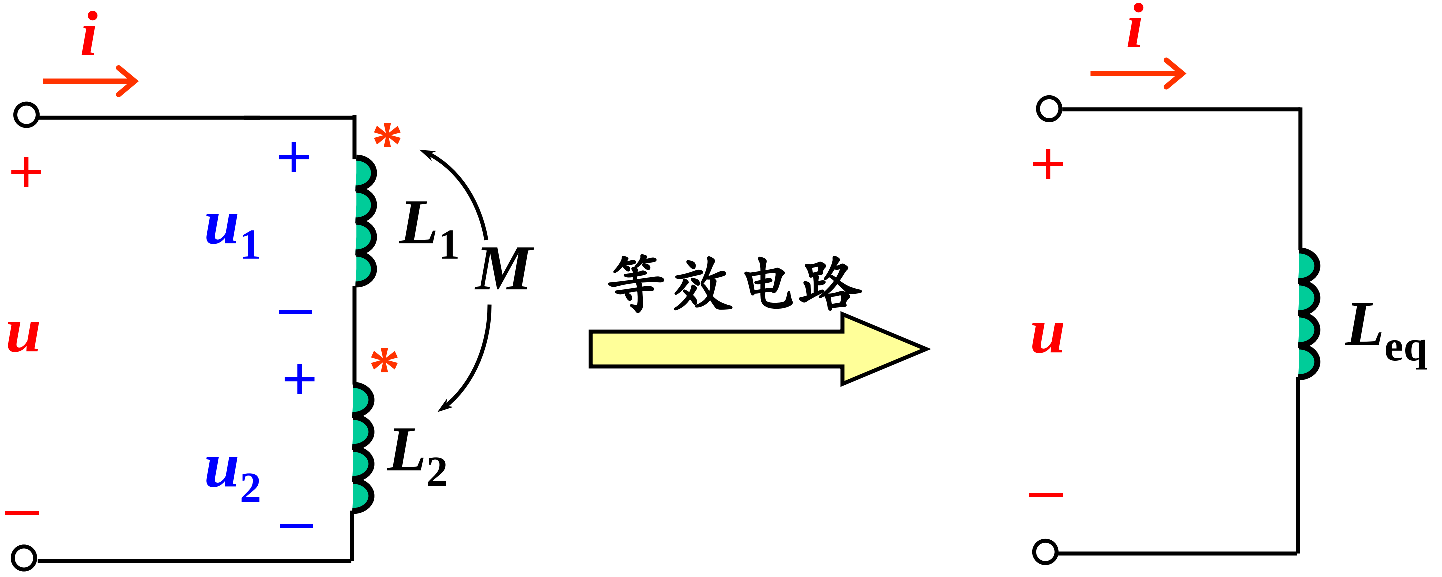
4端→2端

单公共节点联



4端→3端

(1) 互感线圈的串联　　同名端顺串连接



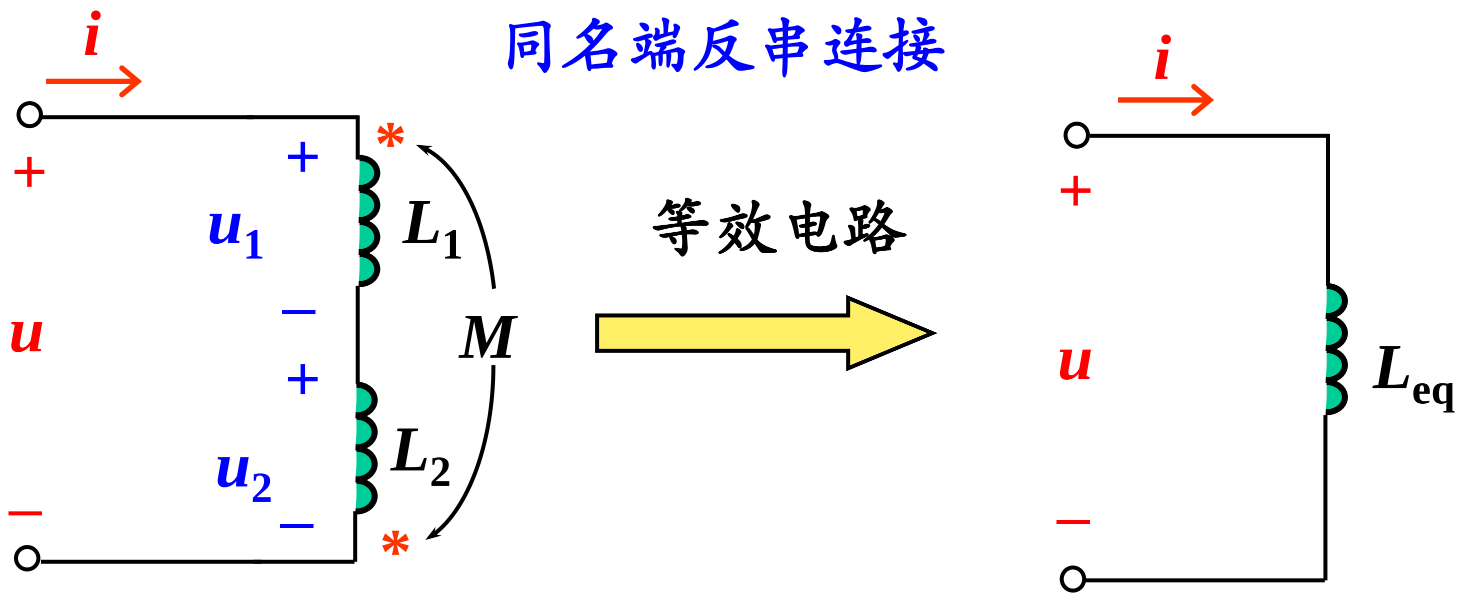
$$u = L_1 \frac{di}{dt} \boxed{+ M \frac{di}{dt}} + L_2 \frac{di}{dt} \boxed{+ M \frac{di}{dt}}$$

$$= (L_1 + L_2 + 2M) \frac{di}{dt}$$

$$= L_{eq} \frac{di}{dt}$$

$$L_{eq} = L_1 + L_2 + 2M$$

同名端反串连接



$$u = L_1\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \boxed{-M\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}} + L_2\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \boxed{-M\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}}$$

$$= (L_1 + L_2 - 2M)\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

$$= L_{\mathrm{eq}}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{L_{\mathrm{eq}} = L_1 + L_2 - 2M \geq 0}$$

问题：如何测量互感值?

$$L_{顺} = L_1 + L_2 + 2M \qquad L_{反} = L_1 + L_2 - 2M$$

* 顺接一次，反接一次，就可以测出互感：

$$M = \frac{L_{顺} - L_{反}}{4}$$

* 全耦合 $M = \sqrt{L_1 L_2}$

当 $L_1 = L_2 = L$ 时，$M = L$

$$L_{eq} = \begin{cases} 4M & 顺串 \\ 0 & 反串 \end{cases}$$

单选题 2分

设置

两电感线圈同名端顺串连接时电感值为10mH，同名端反串连接时电感值为2mH。则其互感为（ ）。

A 8 mH

B 2 mH

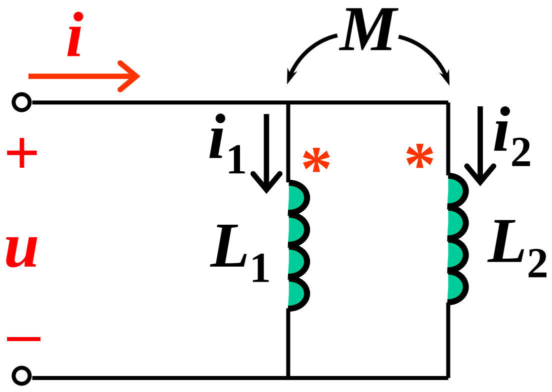
C 4 mH

D 5 mH

提交

(2) 互感线圈的并联

同名端在同侧



$$\begin{cases} u = L_1 \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \\ \quad = L_2 \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + M \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \\ i = i_1 + i_2 \end{cases}$$

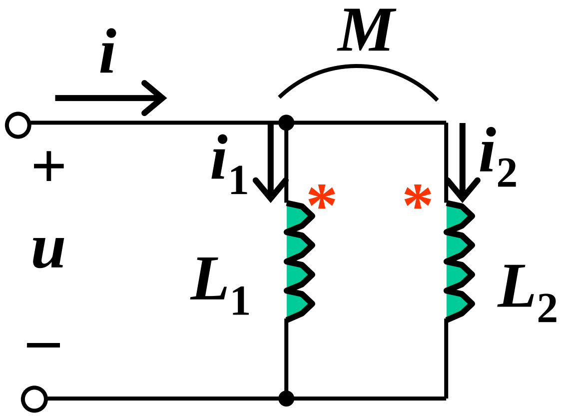
解得u, i的关系

$$u = \frac{(L_1 L_2 - M^2)}{L_1 + L_2 - 2M} \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

$$L_{eq} = \frac{(L_1 L_2 - M^2)}{L_1 + L_2 - 2M}$$

记不住

同名端在同侧互感并联电路的去耦等效分析



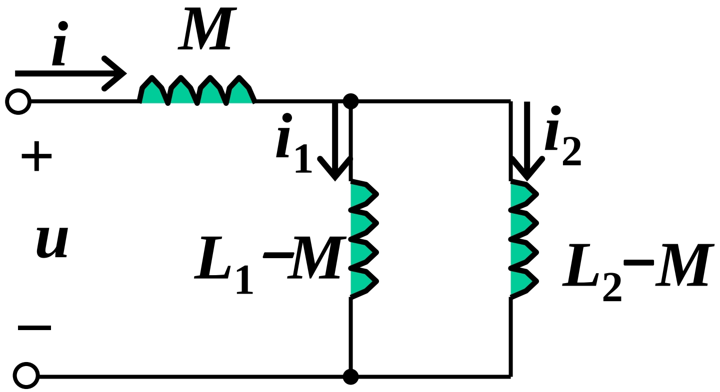
$$\begin{cases} u = L_1 \dfrac{di_1}{dt} + M\dfrac{di_2}{dt} \\ u = L_2 \dfrac{di_2}{dt} + M\dfrac{di_1}{dt} \end{cases}$$

$i_2 = i - i_1$

$i_1 = i - i_2$

$$\begin{cases} u = (L_1 - M)\dfrac{di_1}{dt} + M\dfrac{di}{dt} \\ u = (L_2 - M)\dfrac{di_2}{dt} + M\dfrac{di}{dt} \end{cases}$$

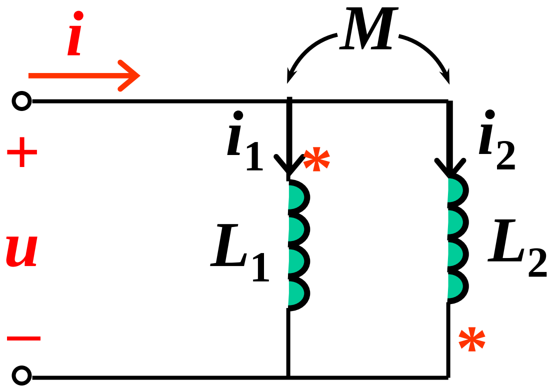
画等效电路



$(L_1-M)//(L_2-M)+M$

$$L_{eq} = \frac{(L_1L_2 - M^2)}{L_1 + L_2 - 2M}$$

同理可推得同名端在异侧互感并联电路的去耦等效分析

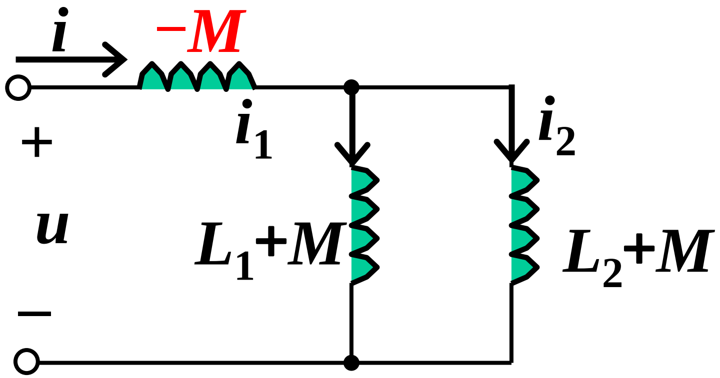


$$\begin{cases} u=(L_1+M)\dfrac{di_1}{dt}-M\dfrac{di}{dt} \\ u=(L_2+M)\dfrac{di_2}{dt}-M\dfrac{di}{dt} \end{cases}$$

等效电路

$$(L_1+M)//(L_2+M)-M$$

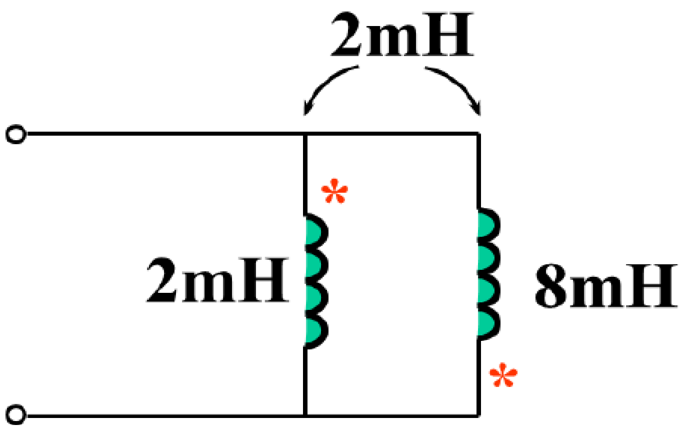
$$L_{eq}=\frac{(L_1L_2-M^2)}{L_1+L_2+2M}$$



单选题 2分

设置

该端口的去耦等效电感为



A 0.857 mH

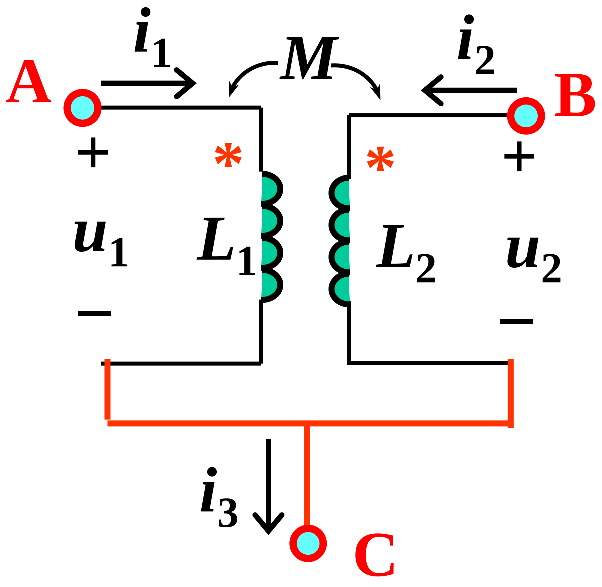
B 0.962 mH

C 4.857 mH

D 2 mH

提交

(3) 有一个公共节点互感线圈的去耦等效电路



2个同名端都靠近（远离）公共节点

$$u_{AC}=u_1 \qquad i_3=i_1+i_2$$

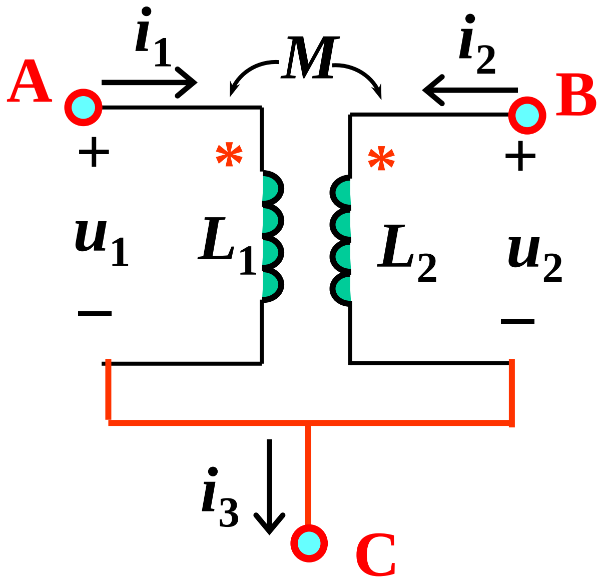
$$=L_1\frac{di_1}{dt}+M\frac{di_2}{dt}$$

$$=(L_1-M)\frac{di_1}{dt}+M\frac{di_3}{dt}$$

$$u_{BC}=u_2 \qquad i_3=i_1+i_2$$

$$=L_2\frac{di_2}{dt}+M\frac{di_1}{dt}$$

$$=(L_2-M)\frac{di_2}{dt}+M\frac{di_3}{dt}$$

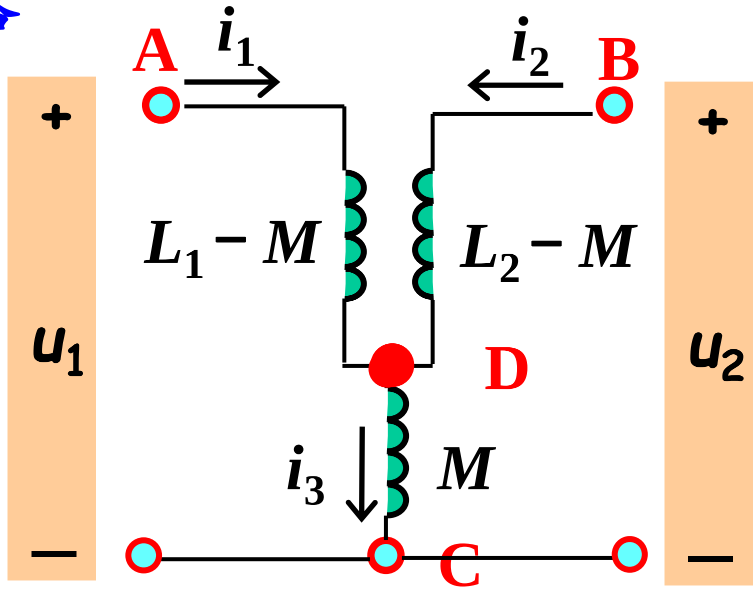


$$u_{AC} = (L_1 - M)\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_3}{dt}$$

$$u_{BC} = (L_2 - M)\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_3}{dt}$$

$$i_3 = i_1 + i_2$$

等效电路



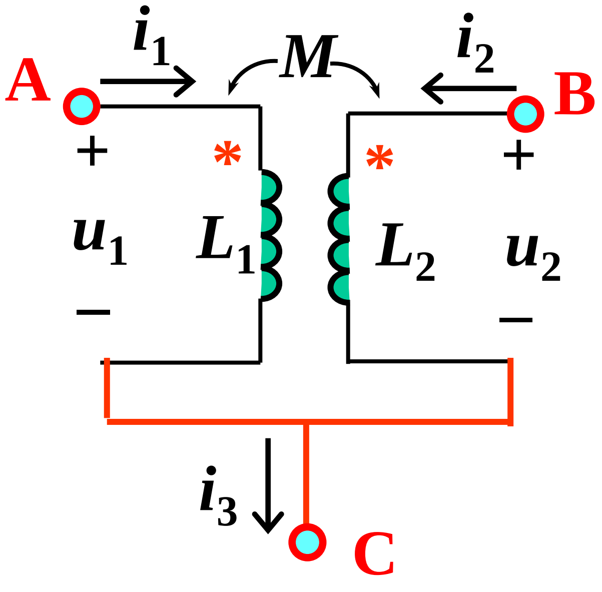
强调:

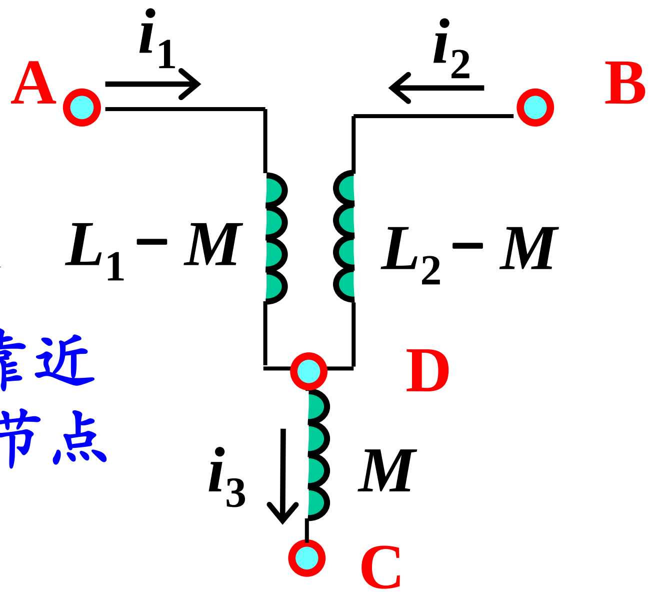
多了个节点D

$u_1 = u_{AC} \neq u_{AD}$

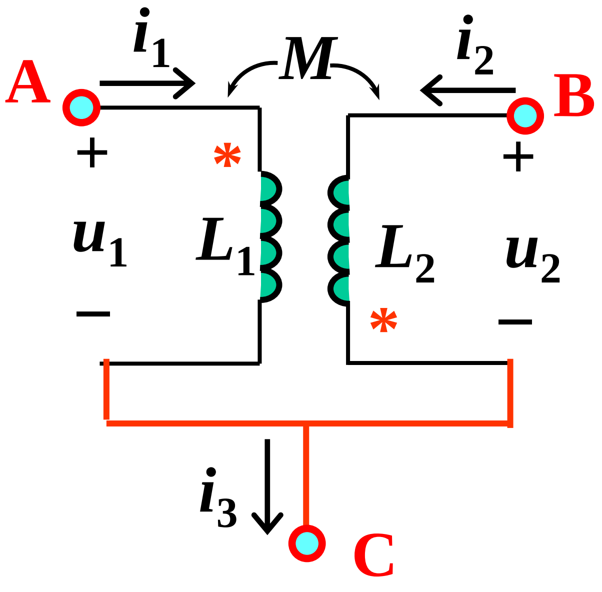
$u_2 = u_{BC} \neq u_{BD}$

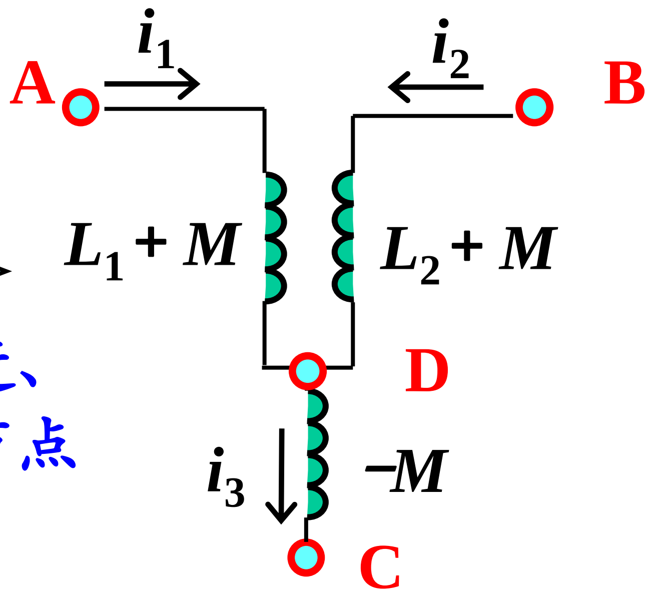
L_1-M, L_2-M，M都不是真电感





2个同名端都靠近
（远离）公共节点



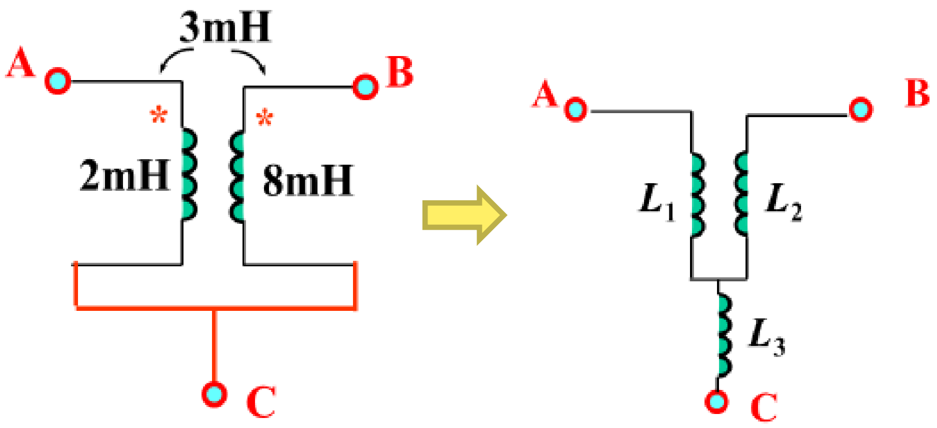


同名端1个靠近、
1个远离公共节点

单选题 2分

设置

如图所示，去耦等效电路中，L_1 的电感值为



A 1mH

B −1mH

C 5mH

D 3mH

提交

习题：4-13，4-16，4-17；提交截止时间：5月15日早8点