杭州电子科技大学学生考试卷期末（ A）卷[免费]

<table>
<tr><td>考试课程</td><td colspan="2">概率论与数理统计</td><td>考试日期</td><td colspan="2">2009 年
01 月 05 日</td><td>成 绩</td><td></td></tr>
<tr><td>课程号</td><td>A0702140</td><td>教师号</td><td></td><td colspan="2">任课教师姓名</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>考生姓名</td><td>参考答案</td><td>学号（8 位）</td><td></td><td>年级</td><td></td><td>专业</td><td></td></tr>
</table>

一	二	三	四	五	六	七	八	九	十

一、选择题，将正确答案填在括号内（每小题 3 分，共 18 分）

1．设随机事件 A,B 满足 $P(B)=P(B|A)$，则下列结论中正确的是　　　　（　A　）

A．$P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})$　　　　B．$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

C．A,B 互不相容　　　　D．$P(A)=P(B|A)$

2．设 X 是[0，1]上的连续型随机变量，并且 $P\{X\le 0.3\}=0.8$．记 $Y=1-X$，若要使

$P\{Y\le k\}=0.2$，则常数 k =（　B　）．

A．0.2　　　　B．0.7

C．0.8　　　　D．0.3

3．设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)},-\infty<x<+\infty$，则 $Y=2X$ 的概率密度为

（　B　）

A．$\dfrac{1}{\pi(1+y^2)}$　　　　B．$\dfrac{2}{\pi(4+y^2)}$

C．$\dfrac{1}{\pi(1+\frac{y^2}{4})}$　　　　D．$\dfrac{1}{\pi(1+4y^2)}$

4．设 (X,Y) 的联合分布律如下表所示：

X \ Y	0	1	2
-1	1/15	t	1/5
1	s	1/5	3/10

则 (s,t)=(C)时，X 与 Y 相互独立.

A．$(\frac{1}{5},\frac{1}{15})$；　　B．$(\frac{1}{15},\frac{1}{5})$

C．$(\frac{1}{10},\frac{2}{15})$；　　D．$(\frac{2}{15},\frac{1}{10})$

5. $X_1,X_2,\cdots,X_8$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_{10}$ 分别来自两个正态总体 $N(-1,2^2)$ 和 $N(2,5^2)$ 的样本且相互独立，$S_1^{\,2}$ 和 $S_2^{\,2}$ 分别为两个样本的样本方差，则服从 $F(7,9)$ 的统计量是（ D ）.

A．$\dfrac{2S_1^{\,2}}{5S_2^{\,2}}$；　　B．$\dfrac{5S_1^{\,2}}{2S_2^{\,2}}$

C．$\dfrac{4S_2^{\,2}}{25S_1^{\,2}}$；　　D．$\dfrac{25S_1^{\,2}}{4S_2^{\,2}}$

6．在假设检验中，记 H_0 为原假设，H_1 为备择假设，则显著性水平 α 是指（ C ）.

A．$P\{$接受 $H_0 | H_0$ 为假$\}=\alpha$；　　B．$P\{$接受 $H_1 | H_1$ 为假$\}=\alpha$

C．$P\{$拒绝 $H_0 | H_0$ 为真$\}=\alpha$；　　D．$P\{$拒绝 $H_1 | H_1$ 为真$\}=\alpha$

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1.从 5 双不同的鞋子中任取 4 只,这 4 只鞋子中至少有 2 只配成一双的概率是___$\frac{13}{21}$___ .

2．设 $P(A\cup B)=0.8$，$P(B)=0.4$，则 $P(A|\overline{B})=$____$\frac{2}{3}$____ .

3．某人投篮，投中的概率为 0.6，现投了 3 次，则此人投中 2 次的概率为___0.432___ .

4．设 X 与 Y 相互独立且都服从 $N(0,1)$，则 $D(2X-3Y+1)$=___13___ .

5．设随机变量 $X\sim U(-1,2)$，则由切比雪夫不等式 $P\{\left|X-\frac{1}{2}\right|\le 1\}\ge$___1/4___.

三、（本题 7 分）设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases} ax+b, 0<x<1 \\ 0 \quad , else \end{cases}$，

又已知 $P\{X<\frac{1}{3}\}=P\{X>\frac{1}{3}\}$，（1）求常数 a 和 b；(2) 求 X 的分布函数 $F(x)$

解：（1）因为 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$ （1 分）

所以 $\int_0^1 (ax+b)dx=1$

又 $P\{X<\frac{1}{3}\}=P\{X>\frac{1}{3}\}$ 知 $\int_0^{\frac{1}{3}}(ax+b)dx=\frac{1}{2}$

得 $\frac{a}{2}+b=1$，$\frac{a}{18}+\frac{b}{3}=\frac{1}{2}$ （3 分）

解得 $a=-\frac{3}{2}, b=\frac{7}{4}$ （4 分）

（2） X 的分布函数 $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ （5 分）

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ -\frac{3}{4}x^2+\frac{7}{4}x, & 0<x<1 \\ 1, & x\ge 1 \end{cases}$$ （7 分）

四.（本题 15 分）设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases} Cxy^2, 0<y<x<1 \\ 0, \text{其它} \end{cases}$

（1）求常数 C；

（2）求关于 X 和关于 Y 的边缘概率密度； 并问 X 与 Y 是否相互独立？

（3）求概率 $P\{X+Y<1\}$.

解： (1) $\because \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=1$ （2 分）

即 $\int_0^1 dx \int_0^x Cxy^2 dy=1$，得 $C=15$ （4 分）

（2）关于 X 的边缘概率密度

$\because f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$ （5 分）

$$=\begin{cases} \int_0^x 15xy^2 dy, 0<x<1 \\ 0, \text{其它} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 5x^4, 0 < x < 1 \\ 0, 其它 \end{cases}$$ （7 分）

关于 Y 的边缘概率密度

$\because f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$

$$= \begin{cases} \int_y^1 15xy^2 dx, 0 < y < 1 \\ 0, 其它 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{15}{2} y^2 (1-y^2), 0 < y < 1 \\ 0, 其它 \end{cases}$$ （10 分）

显然当 $0 < y < x < 1$ 时 $f(x,y) \neq f_X(x) f_Y(y)$

所以 X 与 Y 不相互独立. （12 分）

(2) $P\{X + Y < 1\} = \iint\limits_{x+y<1} f(x,y)dxdy = \int_0^{\frac{1}{2}} dy \int_y^{1-y} 15xy^2 dx$ （13 分）

（或 $= \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^x 15xy^2 dy + \int_{\frac{1}{2}}^1 dx \int_0^{1-x} 15xy^2 dy$）

$= \frac{5}{64}$ （15 分）

五.（本题 8 分）设随机变量 (X, Y) 的概率分布律为：

Y \ X	0	1	2
-1	0.3	0.1	0.2
1	0.1	0.3	0

求：（1）关于 $Z = XY$ 的分布律；

（2）协方差 $Cov(X, Y)$.

解：（1）因 (X, Y) 的取值为 $(0,-1), (0,1), (1,-1), (1,1), (2,-1), (2,1)$

故 $Z = X \cdot Y$ 的取值为: 0　0　-1　1　-2　2

所以 $Z = X \cdot Y$ 的分布律为

$Z = X \cdot Y$	-2	-1	0	1
P	0.2	0.1	0.4	0.3

（3 分）

（2）$E(XY) = -2\times 0.2 + (-1)\times 0.1 + 0\times 0.4 + 1\times 0.3 = -0.2$　（4 分）

$E(X) = 0\times 0.4 + 1\times 0.4 + 2\times 0.2 = 0.8$　（5 分）

$E(Y) = -1\times 0.6 + 1\times 0.4 = -0.2$　（6 分）

故 $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = -0.04$　（8 分）

六.（本题 6 分）设各零件的重量都是随机变量，它们相互独立，且服从相同的分布，其数学期望为 0.5kg ，均方差为 0.1kg ，问 5000 只零件的总重量超过 2510kg 的概率约为多少？（结果用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 表示）

解：记 $X_i (i = 1,2,\cdots,5000)$ 为第 i 只零件的重量，由题意 $E(X_i) = 0.5$, $D(X_i) = 0.1^2$

所求概率 $P\{\sum_{i-1}^{5000} X_i > 2510\}=1 - P\{\sum_{i-1}^{5000} X_i \le 2510\}$　（1 分）

$$=1 - P\{(\frac{\sum_{i=1}^{5000} X_i - 5000\cdot 0.5}{\sqrt{5000}\cdot 0.1} \le \frac{2510 - 5000\cdot 0.5}{\sqrt{5000}\cdot 0.1}\}$$　（5 分）

$$\approx 1 - \Phi(\sqrt{2})$$　（6 分）

七．（本题 6 分）设总体 X 具有概率密度 $f(x;\theta)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta}, & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，其中 $\theta>-1$ 是未知参数. 又 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自该总体的一个样本，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为样本值. 试求未知参数 θ 的最大似然估计量.

解：似然函数 $L(x_1,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i)$ （1 分）

$$=(\theta+1)^n\prod_{i=1}^{n}x_i^{\theta}$$ （2 分）

$$\ln L(x_1,\cdots,x_n)=n\ln(\theta+1)+\theta\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

$$\frac{d\ln L}{d\theta}=\frac{n}{\theta+1}+\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$$ （4 分 ）

得 $\hat{\theta}=-\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}-1$

故 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}=-\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}-1$ （6 分）

八．（本题 5 分）设某种清漆的干燥时间服从正态分布 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，现随机地抽取 9 个样品，测得干燥时间的均值 $\bar{x}=6$（小时），样本均方差 $s=0.6$，σ^2 为未知，求 μ 的置信水平为 95%的置信区间．（$t_{0.025}(8)=2.3060$，$t_{0.025}(9)=2.2622$，精确到第二位小数).

解：这里 $\alpha=0.05$，$n=9$，故 μ 的置信水平为 95%的置信区间

为：$(\bar{x}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\dfrac{s}{\sqrt{n}},\bar{x}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\dfrac{s}{\sqrt{n}})$ （3 分）

$$=(6-2.3060\cdot\frac{0.6}{3},6+2.3060\cdot\frac{0.6}{3})$$

$$=(5.54\,,\,6.46)$$ （5 分）

九.（本题 6 分）某产品的一项质量指标 $X \sim N(\mu, 0.05^2)$，现从一批产品中随机地抽取 5 件，测得样本方差 $s^2 = 0.0078$，问根据这一数据能否推断该批产品的方差较以往的有显著的变化？(取显著性水平 $\alpha = 0.05$）

（$\chi^2_{0.025}(5) = 12.833$，$\chi^2_{0.975}(4) = 0.484$，$\chi^2_{0.95}(4) = 0.711$，$\chi^2_{0.975}(5) = 0.831$

$\chi^2_{0.025}(4) = 11.143$）

解：这里 $\alpha = 0.05$, $n = 5$

由题意需检验假设 $H_0 : \sigma^2 = 0.05^2$, 备择假设 $H_1 : \sigma^2 \neq 0.05^2$ （2 分）

则拒绝域为

$$\frac{(n-1)s^2}{{\sigma_0}^2} \le \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) \quad \text{或} \quad \frac{(n-1)s^2}{{\sigma_0}^2} \ge \chi^2_{\alpha/2}(n-1)$$ （4 分）

$$\text{因} \frac{(n-1)s^2}{{\sigma_0}^2} = \frac{4 \times 0.0078}{0.05^2} = 12.48 > 11.143$$

故在拒绝域内（即拒绝 H_0）, 可以认为该批产品的方差较以往的有显著的变化. （7 分）

十.（本题 4 分）设 $X_1, X_2 ..., X_n$ 是总体 $N(0, 1)$ 的简单随机样本，记 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$，

$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$，$T = \overline{X}^2 - \frac{1}{n}S^2$，证：$D(T) = \frac{2}{n(n-1)}$

证：因 $D(T) = E(T^2) - [E(T)]^2 = E(T^2) - 0$ （1 分）

（因 $E(S^2) = 1$，$E(\overline{X}) = 0$，$D(\overline{X}) = 1/n$ 得 $E(T) = 0$）

而 $E(T^2) = E[\overline{X}^4 - (2/n)\overline{X}^2 S^2 + S^4 / n^2]$ （*）

因 $\overline{X} \sim N(0, 1/n)$

得 $(\overline{X}\sqrt{n})^2 \sim \chi^2(1)$,

故 $D(n\overline{X}^2) = 2 = n^2 D(\overline{X}^2) = n^2[E(\overline{X}^4) - (E(\overline{X}^2))^2]$

得 $E(\overline{X}^4) = 3/n^2$ （2 分）

又 $(n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1)$（$\sigma = 1$）

$E((n-1)S^2) = n-1$，
$D((n-1)S^2) = 2(n-1) = (n-1)^2\{E(S^4) - [E(S^2)]^2\}$
得 $ES^4 = (n+1)/(n-1)$ （3 分）

代入（*）式得 $D(T) = \dfrac{2}{n(n-1)}$ （4 分）