杭州电子科技大学学生考试卷（ A ）卷

考试课程	概率论与数理统计	考试日期	2011 年 06 月日	成 绩	
课程号	A0702140	教师号		任课教师姓名	
考生姓名	参考答案	学号（8 位）		年级		专业	

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十
得分										

一．单项选择题，将正确答案填在括号内（每小题 3 分，共 15 分）

1． 设事件 A,B 满足 $P(A)>0$，且 $P(AB)=P(A)P(B)$，则下列结论中正确的是（ D ）

A． $P(A)=P(B|A)$　　B． $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

C． A,B 互不相容；　　D． A,B 相互独立；

2．设随机变量 $X\sim N(3,9)$ 且 $Y=aX+b\sim N(0,1)$，则（ A ）

A． $a=1/3, b=-1$；　　B． $a=-1/3, b=-1$

C． $a=1/9, b=-1/3$；　　D． $a=-1/3, b=1$

3．设样本 $X_1,X_2,\cdots,X_6$ 为来总体 $N(0,1)$，$Y=\frac{1}{3}(X_1+X_2+X_3)^2+\frac{1}{3}(X_4+X_5+X_6)^2$，则 Y 服从的分布为（ C ）

A． $t(2)$　　B． $t(6)$

C． $\chi^2(2)$　　D． $\chi^2(6)$

4．设总体具有分布律：

X	1	2	3
p_k	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

其中 $\theta(0<\theta<1)$ 为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的一个样本，$\overline{X}$，S^2 为样本均值与样本方差，则 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}=$（ C ）．

A． $\frac{1}{2}(3+\overline{X})$；　　B． $\frac{1}{3}(2-\overline{X})$

C． $\frac{1}{2}(3-\overline{X})$；　　D． $\frac{1}{3}(2+\overline{X})$

5．设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其中 σ^2 未知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的一个样本，$\overline{X}$，S^2 为样本均值与样本方差，则 μ 的置信水平为 95%的单侧置信上限为（ B ）．

A． $\overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{0.05}(n)$；　　B． $\overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{0.05}(n-1)$

C． $\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{0.05}(n)$　　D． $\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{0.05}(n-1)$

二．填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1．已知事件 A,B 互不相容，$P(A)=\frac{1}{4}$，$P(B)=\frac{1}{6}$，则 $P(A\cup B)=$ 5/12 ．

2.一个口袋装有 8 个球，其中 6 个白球，2 个红球，从袋中取球两次，每次随机地取一只，作放回抽样，即第一次取一只球，观察其颜色后放回袋中，搅匀后再取一球。则取到的两只都是白球的概率为 9/16 ．

3． 设 $P\{X=k\}=\frac{b}{k+1}$（$k=1,2,3$）为离散型随机变量 X 的分布律，则常数 $b=$ 12/13 ．

4.设随机变量 X 服从 $N(2,9)$ 的正态分布，Y 服从 $b(100,0.8)$ 的二项分布，且 X 与 Y 的相互独立，则 $D(2X-Y+15)$ = 52 ．

5．设有一组容量为 16 的样本值如下（已经排序过）：122 126 133 140 145 149 150 157 162 166 175 177 183 188 199 212

则样本分位数 $x_{0.3}=$ 145 ．

三.（本题 12 分）设连续型随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases} kx(x-1),1<x<2 \\ 0,\text{其他} \end{cases}$，

（1） 确定常数 k；

（2）求 X 的分布函数 $F(x)$；

（3）$E(X)$.

解:（1）因为 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$ ……1 分

所以 $\int_1^2 kx(x-1)dx=1$ 得 $k=\frac{6}{5}$ ……4 分

(2) X 的分布函数 $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ ……5 分

$$=\begin{cases} 0,x\le 1 \\ \int_1^x \frac{6}{5}x(x-1)dx,1<x<2 \\ 1,x\ge 2 \end{cases}$$ ……8 分

$$=\begin{cases} 0,x\le 1 \\ \frac{1}{5}(2x^3-3x^2+1),1<x<2 \\ 1,x\ge 2 \end{cases}$$

……9 分

(3) $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ ……10 分

$=\int_1^2 x\cdot\frac{6}{5}x(x-1)dx=\frac{17}{10}$ ……12 分

四.（本题 18 分）设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases} Cx^2y,0<x<1,0<y<1 \\ 0,\text{其它} \end{cases}$

（1）求常数 C；

（2）求关于 X 和关于 Y 的边缘概率密度 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$； 并问 X 与 Y 是否相互独立?

（3）求概率 $P\{X+Y<1\}$；

（4）$E(XY)$.

解：(1) $\because \int_{-\infty}^{+\infty} dx\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=1$ ……2 分

即 $\int_0^1 dx\int_0^1 Cx^2ydy=1$，得 $C=6$ ……4 分

（2）关于 X 的边缘概率密度：$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$ ……5 分

$$=\begin{cases} \int_0^1 6x^2ydy,0<x<1 \\ 0,\text{其它} \end{cases}=\begin{cases} 3x^2,0<x<1 \\ 0,\text{其它} \end{cases}$$ ……7 分

关于 Y 的边缘概率密度：$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$

$$=\begin{cases} \int_0^1 6x^2ydx,0<y<1 \\ 0,\text{其它} \end{cases}=\begin{cases} 2y,0<y<1 \\ 0,\text{其它} \end{cases}$$ ……10 分

显然 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$

所以 X 与 Y 相互独立. ……12 分

（3） $P\{X+Y<1\}=\iint\limits_{x+y<1} f(x,y)dxdy$ ……13 分

$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} 6x^2ydy=\frac{1}{10}$

……15 分

(4) $E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty} dx\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dy$ ……16 分

$=\int_0^1 dx\int_0^1 xy\cdot 6x^2ydy=\frac{1}{2}$ ……18 分

五．（本题 6 分）一公司有 50 张签约保险单，各张保险单的索赔金额为 $X_i(i=1,2,\cdots,50)$（以千美元计）服从韦布尔分布，均值 $E(X_i)=5$，方差 $D(X_i)=6$，求 50 张保险单的索赔的合计金额大于 300 的概率的近似值（设各保险单的索赔金额是相互独立. 结果用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 表示）

解：由题意所求概率 $P\{\sum_{i=1}^{50}X_i>300\}=1-P\{\sum_{i=1}^{50}X_i\le 300\}$ ……2 分

$$=1-P\{(\frac{\sum_{i=1}^{50}X_i-50\times 5}{\sqrt{50\times 6}}\le\frac{300-50\times 5}{\sqrt{50\times 6}}\}$$ ……4 分

$$\approx 1-\Phi(\frac{5\sqrt{3}}{3})$$ ……6 分

六．（本题 8 分）设总体 X 具有密度 $f(x)=\begin{cases}(\theta+1)x^{-\theta}, & x>1\\ 0, & 其它\end{cases}$，$x_1,\cdots,x_n$ 为 X 的一组样本观察值，求参数 θ 的最大似然估计值 $\hat{\theta}$.

解：似然函数 $L(x_1,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)$ ………1 分

$$=(\theta+1)^n(\prod_{i=1}^{n}x_i)^{-\theta}$$ ………3 分

取对数 $\ln L(x_1,\cdots,x_n)=n\ln(\theta+1)-\theta\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$ ………4 分

令 $\frac{d\ln L}{d\theta}=\frac{n}{\theta+1}-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$ ………6 分

得 $\theta=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}-1$ ………8 分

所以，参数 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}-1$

七．（本题 6 分）设某种清漆的干燥时间（以 h 计）服从正态分布 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，现随机地抽取 9 个样品，测得干燥时间的均值 $\bar{x}=6.1$（小时），样本均方差 $s=0.6$，σ^2 为未知，求 μ 的置信水平为 95%的置信区间.（$t_{0.025}(8)=2.3060$, $t_{0.025}(9)=2.2622$，$t_{0.05}(8)=1.8595$, 精确到第二位小数).

解：这里 $\alpha=0.05$，$n=9$，故 μ 的置信水平为 95%的置信区间为：

$$(\bar{x}-t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}},\bar{x}+t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}})$$ ……3 分

$$=(6.1-2.306\cdot\frac{0.6}{3},6.1+2.306\cdot\frac{0.6}{3})$$ ……5 分

即置信区间为 $(5.64\ ,\ 6.56)$ ……6 分

八．（本题 8 分）某种导线，要求其电阻标准差不超过 0.005Ω.今在一批导线中取样品 26 根，测得样本标准差 $s=0.007\Omega$，设总体为正态分布，问在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下能认为这批导线电阻的标准差显著地偏大吗?

（$\chi^2_{0.05}(26)=38.885,\chi^2_{0.05}(25)=37.652,\chi^2_{0.025}(26)=41.923,\chi^2_{0.025}(25)=40.646$）

解：检验假设 $H_0:\sigma^2\le 0.005^2$, 备择假设 $H_1:\sigma^2>0.005^2$ ……1 分

拒绝域为 $\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}\ge\chi^2_\alpha(n-1)$ ……4 分

$$=\chi^2_{0.05}(25)=37.652$$

而 $\chi^2=\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0{}^2}=\frac{25\times 0.007^2}{0.005^2}=49>37.652$ ……6 分

落在拒绝域内, 故能认为这批导线电阻的标准差显著地偏大. ……8 分

九．（本题 8 分）设总体 X 服从指数分布，其概率密度为：$f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}, & x>0\\ 0, & 其他\end{cases}$

其中 $\theta>0$ 为未知参数，又设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的一个样本，

（1）求函数 $Z=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$ 的分布函数 $F_Z(z)$ 和概率密度函数 $f_Z(z)$；

（2）问统计量 $Z=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$ 是否为 θ 的无偏估计量？

解：（1）设 Z 的分布函数 $F_Z(z)$，则 $F_Z(z)=P\{Z\le z\}$

$=P\{\min(X_1,X_2,\cdots,X_n\}\le z\}=1-P\{X_1>z,X_2>z,\cdots,X_n>z\}$

………1 分

由 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的独立性，且与总体同分布，故

当 $z>0$ 时，$F_Z(z)=1-(1-F_X(z))^n=1-(1-(1-e^{-z/\theta}))^n$

$=1-e^{-nz/\theta}$ ………3 分

得：Z 的分布函数为 $F_Z(z)=\begin{cases}1-e^{-nz/\theta}, & z>0\\ 0, & 其他\end{cases}$ ………4 分

所以：Z 的概率密度函数 $f_Z(z)=\begin{cases}\frac{n}{\theta}e^{-nz/\theta}, & z>0\\ 0, & 其他\end{cases}$ ………5 分

（2）因 $E(Z)=\int_{-\infty}^{+\infty}zf(z)dz$

$=\int_0^{+\infty}z\cdot\frac{n}{\theta}e^{-nz/\theta}dz=\frac{\theta}{n}$ ………7 分

得 $E(Z)\ne\theta$，故 Z 不是 θ 的无偏估计量. ………8 分

（或直接用指数分布的期望公式）

十．（本题 4 分）设随机变量 X 的方差 $D(X)=0$，

证明：$P\{X=E(X)\}=1$，即 X 以概率 1 取常数 $E(X)$.

证明：用反证法，假设 $P\{X=E(X)\}\ne1$，即 $P\{X=E(X)\}<1$

也即 $P\{X\ne E(X)\}>0$， ……1 分

则对于某一个数 $\varepsilon>0$，$P\{|X-E(X)|\ge\varepsilon\}>0$ ……2 分

但由切比雪夫不等式，对任意 $\varepsilon>0$，

有 $P\{|X-E(X)|\ge\varepsilon\}\le\frac{D(X)}{\varepsilon^2}=0$ ……4 分

矛盾，于是 $P\{X=E(X)\}=1$