杭州电子科技大学学生考试（模拟）题解

一、填空题（每空格 2 分）

1．设事件 A,B 相互独立，$P(A)=0.4$ ，$P(B)=0.6$ ，则概率 $P(A\cup B)=$ 0.76 。

2．袋内装有 6 个白球，4 个黑球。从中任取三个，取出的三个球都是白球的概率= 1/6 。

3．设 $X\sim N(10,\sigma^2), P\{10<X<20\}=0.3$，则 $P\{0<X<10\}$ 的值为 0.3 。

4. 设随机变量 X 服从（0，2）上的均匀分布，则随机变量 $Y=X^2$ 在（0，4）上概率密度 $f_Y(y)=$

$\frac{1}{4\sqrt{y}}$ 。

5．设随机变量 X 服从二项分布 $b(10,0.3)$，随机变量 Y 服从正态分布 $N(2,4)$，且 X，Y 相互独立，则 $E(X-2Y)=$ -1 ，$D(X-2Y)=$ 18.1 。

二、试解下列各题

1．（8%）设随机变量 X 的分布律为：

X	-1	2	3
概率	0．3	0．5	0．2

求（1）X 的分布函数 $F(x)$；（2）概率 $P\{X\le 0.25\}, P\{X>2\}$；（3）$E(X), D(X)$。

解：
$$F(x)=\begin{cases}0, x<-1 & \text{.........1分}\\ 0.3, -1\le x<2 & \\ 0.8, 2\le x<3 & \text{.........1分}\\ 1, x\ge 3 & \text{.........1分}\end{cases}$$

$$P\{X\le 0.25\}=P\{X=-1\}=0.3\text{............1分}$$
$$P\{X>2\}=P\{X=3\}=0.2\text{..................1分}$$

$$E(X)=-0.3+2\times0.5+3\times0.2=1.3 \qquad \text{1 分}$$

$$E(X^2)=(-1)^2\times0.3+2^2\times0.5+3^2\times0.2=4.1 \qquad \text{1 分}$$

$$\therefore\quad D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=2.41 \qquad \text{1 分}$$

2、（16%）设二维随机变量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{1}{\pi}, x^2+y^2<1 \\ 0\ , \ \text{其它} \end{cases}$

试问：（1） X,Y 是否相互独立？（2） X,Y 是否相关？ （3）求概率$P\{Y>X\}$。

解 （1） $\Theta\ f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$ …….1 分

$$=\begin{cases} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \dfrac{1}{\pi} dy, -1<x<1 \\ 0, \text{其它} \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}, -1<x<1 \\ 0, \text{其它} \end{cases}$$ …….1 分

$\Theta\ f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$ …….1 分

$$=\begin{cases} \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \dfrac{1}{\pi} dx, -1<y<1 \\ 0, \text{其它} \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi}, -1<y<1 \\ 0, \text{其它} \end{cases}$$ …..….1 分

显然$x^2+y^2<1$时 $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$ ..…….1 分

所以X 与Y 不相互独立. ..…….1 分

（2）Θ $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)dx = \int_{-1}^{1} x\dfrac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}dx=0$ ..…….1 分

$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} yf_Y(y)dy = \int_{-1}^{1} y\dfrac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi}dy=0$ ..…….1 分

$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty} dx\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dy = 0$ ..…….1 分

$\therefore$ $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$ ..…….1 分

$\therefore$ $\rho_{XY}=0$ ..…….1 分

因此 X,Y 不相关 ..…….1 分

（3）$P\{Y>X\}=\iint\limits_{y>x} f(x,y)dxdy$ ..…….2 分

=1/2 ..…….2 分

（或$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta\int_0^1 \dfrac{1}{\pi}\rho d\rho=\dfrac{1}{2}$ ）

三、(10%)设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta},0\le x\le 1\\ 0,else\end{cases}$，其中 $\theta>-1$ 是未知参数，x_1,x_2,Λ,x_n 是 X 的一个样本 X_1,X_2,Λ,X_n 的观察值，试求参数 θ 的矩估计量和最大似然估计值。

解：(1) $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^1 x(\theta+1)x^{\theta}dx=\dfrac{\theta+1}{\theta+2}$ ………2 分

所以令 $E(X)=\overline{X}$，即 $\dfrac{\theta+1}{\theta+2}=\overline{X}$ ………2 分

解得参数 θ 的矩估计量为：$\hat{\theta}=\dfrac{2\overline{X}-1}{1-\overline{X}}$ ………1 分

(2) 似然函数 $L(\theta)=\prod\limits_{i=1}^{n}f(x_i)$ ………1 分

$=\prod\limits_{i=1}^{n}(\theta+1){x_i}^{\theta}=(\theta+1)^n(x_1x_2\Lambda\ x_n)^{\theta}$ ………1 分

取对数 $\ln L(\theta)=n\ln(\theta+1)+\theta\ln(x_1x_2\Lambda\ x_n)$ ………1 分

令 $\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\dfrac{n}{\theta+1}+\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i=0$ ……..1 分

解得参数 θ 的最大似然估计值 $\hat{\theta}=-\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i}-1$ …….1 分

四、(8%)有一大批糖果，现从中随机地抽取 16 袋，计算得平均重量 $\bar{x}=502.5$（以克计），样本方差为 $S^2=4.2$，求总体方差 σ^2 的置信水平为 0.95 的置信区间。(设袋装糖果的重量近似地服从正态分布)

解：由题意 $n=16,\alpha=0.05$

σ^2 的置信区间为：$\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$ …….4 分

即 $\left(\dfrac{15\times4.2}{27.488},\dfrac{15\times4.2}{6.262}\right)$ …….2 分

所以：总体方差 σ^2 的置信水平为 0.95 的置信区间（2.292,10.061） …….2 分

五、（8%）某种电子元件的寿命 X （以小时计）服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$， μ,σ^2 均未知，现测 16 只元件，计算得平均寿命 $\bar{x}=231.5$，标准差为 $s=92.6$，问是否有理由认为元件的平均寿命是 225（小时）（取 $\alpha=0.05$）。

解：由题意需检验　$H_0:\mu=225$ ，　　$H_1:\mu\neq 225$　　　　…….2 分

则拒绝域为 $t=\left|\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right|\geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$　　　　…….2 分

由条件 $t=\left|\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right|=\left|\dfrac{231.5-225}{92.6/\sqrt{16}}\right|=0.2826<t_{0.025}(15)=2.1315$　　　　…….2 分

所以不在拒绝域内，故接受 H_0，　　　　…….2 分

即可以认为元件的平均寿命是 225（小时）

六.（6%）设随机变量 X 的概率密度 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2x-1}$,$-\infty<x<+\infty$，求：$E(X)$，$D(X)$。

解：Θ　$f(x)=\dfrac{1}{\pi}e^{-(x-1)^2}=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{(x-1)^2}{2(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}}$　　　　…….3 分

所以　$E(X)=1$　　　$D(X)=\dfrac{1}{2}$　　　　…….3 分

或 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}x\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-(x-1)^2}dx$　　　　…….2 分

令 $u=\dfrac{x-1}{\sqrt{2}}$， $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(1+\sqrt{2}u)\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-u^2/2}\dfrac{1}{\sqrt{2}}du=1$　　　　…….1 分

类似：$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx=\dfrac{3}{2}$　　　　…….2 分

所以：$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\dfrac{1}{2}$　　　　…….1 分

七、（8%）设从均值为μ，方差为σ^2的总体中，分别抽取容量为n_1,n_2的两独立样本。$\overline{X_1}$，$\overline{X_2}$ 分别是两样本的均值。试证，对于任意常数$a,b(a+b=1),Y=a\overline{X_1}+b\overline{X_2}$都是$\mu$的无偏估计，并确定常数$a$,b使$D(Y)$达到最小。

解：因为$E(Y)=E(a\overline{X_1}+b\overline{X_2})=aE(\overline{X_1})+bE(\overline{X_2})$

$=a\mu+b\mu=(a+b)\mu=\mu$（Θ $a+b=1$）　　　　　　　　　　……3 分

所以Y是μ的无偏估计。　　　　　　　　　　　　　　　　　　……1 分

又$D(Y)=D(a\overline{X_1}+b\overline{X_2})=a^2\dfrac{\sigma^2}{n_1}+b^2\dfrac{\sigma^2}{n_2}=\sigma^2(\dfrac{a^2}{n_1}+\dfrac{(1-a)^2}{n_2})$　　　　……2 分

令$\dfrac{dD(Y)}{da}=0$，得$a=\dfrac{n_1}{n_1+n_2}$　　　　　　　　　　　　　　……1 分

$b=\dfrac{n_2}{n_1+n_2}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　……1 分

由最值理论可知当$a=\dfrac{n_1}{n_1+n_2}$，$b=\dfrac{n_2}{n_1+n_2}$时$D(Y)$达到最小。

八、（8%）设产品为废品的概率为 0 .2，求 400 件产品中废品件数不大于 60 的概率的近似值。（结果可用标准正态分布函数$\Phi(x)$表示）

解：以X_i $(i=1\sim 400$ ）表示第i件产品为废品，$X_i\sim(0,1)$

$p=0.2$,$1-p=0.8$，记$X=\sum\limits_{i=1}^{400}X_i$，$n=400$

则所求概率$P\{X\le 60\}=P\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{400}X_i-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le\dfrac{60-np}{\sqrt{np(1-p)}}\}$　　　　……4 分

$\approx\Phi(\dfrac{60-400\times 0.2}{\sqrt{400\times 0.2\times 0.8}})=\Phi(-2.5)=1-\Phi(2.5)$　　　　……2 分

$=1-0.9938=0.0062$　　　　　　　　　　　　　　　　　　……2 分

注意：学号以 039***（或 029*****）（或 019*****）开头的学生可选做九、十、十一、十二题中任两题，其他学生只能选做九、十两题，选错题做的一律不得分。**

九、（8%）设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$， X_1, X_2, Λ, X_n 是 X 的一个样本，试确定常数 C，使

$C\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$ 为 σ^2 的无偏估计。

解：由题意即要使 $E[C\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2]=\sigma^2$， …….2 分

$$但 E[C\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2]=C\sum_{i=1}^{n-1}[E(X_{i+1}^2-2E(X_{i+1})E(X_i)+E(X_i^2)]$$ …….2 分

$$=2C\sum_{i=1}^{n-1}\{E(X^2)-[E(X)]^2\}=2C\sum_{i=1}^{n-1}D(X)$$

$$=2C(n-1)\sigma^2$$ …….2 分

所以 $C=\dfrac{1}{2(n-1)}$，此时 $C\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$ 为 σ^2 的无偏估计。 …….2 分

十、（8%）设总体 $X \sim N(0,1)$， $X_1, X_2, \Lambda, X_{16}$ 是 X 的一个样本，

$Y=(\sum_{i=1}^{4}X_i)^2+(\sum_{i=5}^{8}X_i)^2+(\sum_{i=9}^{12}X_i)^2+(\sum_{i=13}^{16}X_i)^2$，试确定常数 C，使 CY 服从 χ^2 分布。

解：由题意可知 $\sum_{i=1}^{4}X_i \sim N(0,4)$ …….2 分

所以 $\dfrac{\sum_{i=1}^{4}X_i}{2} \sim N(0,1)$ …….2 分

同理：$\dfrac{\sum_{i=5}^{8}X_i}{2} \sim N(0,1)$， $\dfrac{\sum_{i=9}^{12}X_i}{2} \sim N(0,1)$， $\dfrac{\sum_{i=13}^{16}X_i}{2} \sim N(0,1)$ 且相互独立。

$$(\frac{\sum_{i=1}^{4}X_i}{2})^2+(\frac{\sum_{i=5}^{8}X_i}{2})^2+(\frac{\sum_{i=9}^{12}X_i}{2})^2+(\frac{\sum_{i=13}^{16}X_i}{2})^2 \sim \chi^2(4)$$ …….2 分

所以 $\dfrac{1}{4}Y \sim \chi^2(4)$，从而 $C=\dfrac{1}{4}$ …….2 分

十一、（8%）设随机变量(X,Y)的概率分布律为：

Y \ X	-1	0	1
0	0．2	0．1	0．2
1	0．1	0．3	0．1

求：(1) 关于 X 的边缘分布律；(2) 关于 $Z=X^2$ 的分布律；(3) 数学期望 $E(X^2)$，$E(XY)$。

解：（1）关于 X 的边缘分布律为

X	-1	0	1
P	0.3	0.4	0.3

…….3 分

(2) 关于 $Z=X^2$ 的分布律为

Z	0	1
P	0.4	0.6

…….3 分

(3)易求 $E(X^2)=0.6$ …….1 分

$E(XY)=(-1)\times1\times0.1+1\times1\times0.1=0$ …….1 分

十二、（8%）将两信息分别编码为 A 和 B 传递出去，接收站收到时，A 被误收作 B 的概率为 0.02，而 B 被误收作 A 的概率为 0.01，信息 A 和信息 B 传送的频率程度为 1：2，问：

（1）接收站收到信息 A 的概率是多少？

（2）若接收站收到的信息是 A，则原发信息是 A 的概率是多少？

解：设 A 事件为“接收站收到信息 A”，B 事件为“原发信息为 A”，$\overline{B}$ 表示“原发信息为 B”

由题意：$P(B)=\dfrac{1}{3},P(\overline{B})=\dfrac{2}{3},P(A|B)=0.98,P(A|\overline{B})=0.01$

（1）由全概率公式 $P(A)=P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})$ ……..2 分

$=\dfrac{1}{3}\times0.98+\dfrac{2}{3}\times0.01=\dfrac{1}{3}$ ………2 分

(2)由贝叶斯公式 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{P(B)P(A|B)}{P(A)}=0.98$ ……..4 分

以下数据备查：$\Phi(2)=0.9772,\ \Phi(2.5)=0.9938$，

$t_{0.05}(15)=1.7531, t_{0.025}(15)=2.1315$，$t_{0.05}(16)=1.7459, t_{0.025}(16)=2.1199$，

$\chi_{0.025}{}^2(15)=27.488$，$\chi_{0.975}{}^2(15)=6.262$，$\chi_{0.05}{}^2(15)=24.996$，$\chi_{0.95}{}^2(15)=7.261$