

第四章 线性电路的正弦稳态分析

本章研究正弦电源激励下线性电路的稳态响应。在线性电路中，若激励是单一频率的正弦信号，则其稳态响应也是该频率的正弦信号，这种电路称为正弦交流电路，简称交流电路。正弦交流电路的稳态分析过程中，一般使用相量来表示正弦交流电压（电流）并利用相量法来分析电路。

本章首先介绍正弦交流电压（电流）及其对应的相量，并介绍阻抗等概念，然后利用相量分析正弦稳态电路并介绍正弦稳态电路的功率计算，最后介绍磁耦合电路的正弦稳态分析。

4.1 正弦交流电基本概念

1. 正弦量的三要素

随时间按照正弦函数规律变化的电压和电流统称正弦交流电。正弦交流电的函数可以用正弦函数（sin）来表示，也可以用余弦函数（cos）来表示，本书统一采用 cos 表示。图 4.1-1 所示正弦电流的函数表达式为

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi) \text{ A} \quad (4.1-1)$$

其中， I_m 、 ω 和 φ 为正弦电流 $i(t)$ 的三要素。

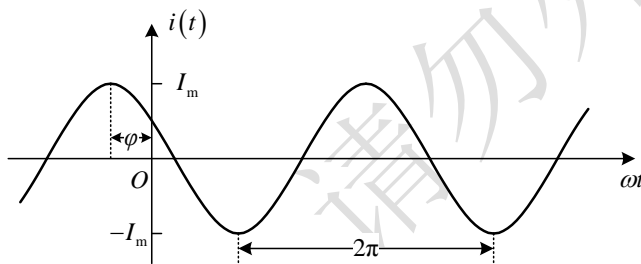


图 4.1-1 正弦电流的波形

I_m 为正弦电流 $i(t)$ 的最大值，也称振幅或者幅度，反映正弦电流振动幅度的大小；

$(\omega t + \varphi)$ 为正弦电流 $i(t)$ 的相位角； φ 为正弦电流 $i(t)$ 的初相角，即 $t=0$ 时 $i(t)$ 的相位角，单位为度（°），一般规定 $|\varphi| \leq 180^\circ$ ； ω 为正弦电流 $i(t)$ 的角频率，反映了正弦电流变化的快慢，单位为弧度/秒（rad/s）。

正弦交流电随时间作周期性变化，周期以 T 表示，单位为秒（s）。正弦交流电的一个周期对应的相位角为 $2\pi \text{ rad/s}$ ，因此有

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (4.1-2)$$

其中， $f = \frac{1}{T}$ 反映了正弦交流电每秒完成的循环次数，称为频率，单位为赫兹（Hz）。我国市电的标准频率为 50Hz。

2. 正弦量的有效值

在实际工程应用中，正弦交流电一般采用有效值来表征。例如，市电电压为 220V，就是指市电电压的有效值为 220V。

交流电的有效值是根据相同平均热效应来定义的，对同一电阻分别通过交流电流 $i(t)$ 和直流电流 I ，若一个周期内电阻消耗的能量相等，则把 I 称为 $i(t)$ 的有效值。即

$$I^2 RT = \int_0^T i^2 R dt$$

设 $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi) A$ ，可得

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi) dt} \\ &= \sqrt{\frac{I_m^2}{T} \int_0^T \frac{1}{2} [1 + \cos(2\omega t + 2\varphi)] dt} \\ &= \frac{I_m}{\sqrt{2}} \\ &= 0.707 I_m \end{aligned} \quad (4.1-3)$$

因此， $i(t)$ 也可以表示为

$$i(t) = \sqrt{2} I \cos(\omega t + \varphi) A \quad (4.1-4)$$

同理，交流电压 $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi) V$ 的有效值为

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 0.707 U_m \quad (4.1-5)$$

因此， $u(t)$ 也可以表示为

$$u(t) = \sqrt{2} U \cos(\omega t + \varphi) V \quad (4.1-6)$$

3. 正弦量的相位比较

在线性电路的正弦稳态分析过程中，经常要比较相同频率正弦量之间的相位关系。设两个同频率的正弦量分别为 $i_1(t) = I_{1m} \cos(\omega t + \varphi_1) A$ 和 $i_2(t) = I_{2m} \cos(\omega t + \varphi_2) A$ ，相位差为

$\varphi = (\omega t + \varphi_1) - (\omega t + \varphi_2) = \varphi_1 - \varphi_2$ 。根据 φ 值的不同，一般可以分成以下三种情况：

(1) $\varphi = 0$ ，即 $\varphi_1 = \varphi_2$ ，称为 $i_1(t)$ 和 $i_2(t)$ 同相，如图 4.1-2 (a) 所示；

(2) $\varphi > 0$ ，即 $\varphi_1 > \varphi_2$ ，称为 $i_1(t)$ 超前 $i_2(t)$ φ 角，或者 $i_2(t)$ 滞后 $i_1(t)$ φ 角，如图 4.1-2 (b) 所示；

(3) $\varphi < 0$ ，即 $\varphi_1 < \varphi_2$ ，称为 $i_1(t)$ 滞后 $i_2(t)$ $|\varphi|$ 角，或者 $i_2(t)$ 超前 $i_1(t)$ $|\varphi|$ 角，如图 4.1-2 (c) 所示。

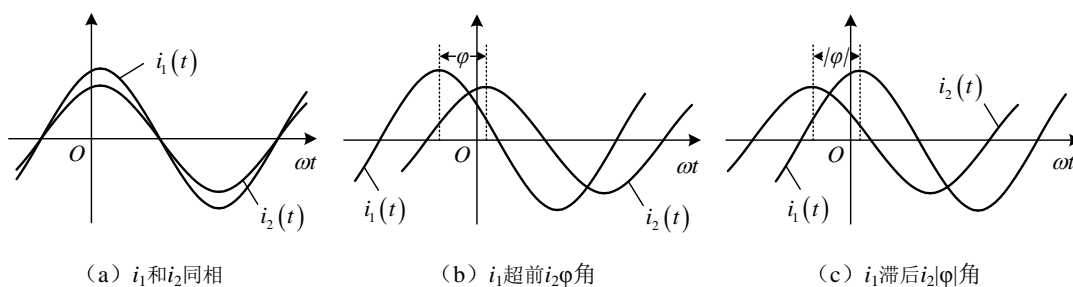


图 4.1-2 相同频率正弦量之间的相位关系

$\varphi \neq 0$ 时有两种特殊情况：当 $\varphi = \pm 90^\circ$ 时，称为 $i_1(t)$ 和 $i_2(t)$ 正交；当 $\varphi = \pm 180^\circ$ 时，称为 $i_1(t)$ 和 $i_2(t)$ 反相。

例 4.1-1 正弦电压 $u_1(t) = 5\sin(314t + 15^\circ)\text{V}$ ， $u_2(t) = -4\cos(314t + 45^\circ)\text{V}$ ，求两个电压的相位差，并比较其相位关系。

解 两正弦电压频率相同，因此可以进行相位比较。将 $u_1(t)$ 和 $u_2(t)$ 化成标准形式，即类似式 (4.1-1) 的形式，可得

$$u_1(t) = 5\sin(314t + 15^\circ) = 5\cos(314t + 15^\circ - 90^\circ) = 5\cos(314t - 75^\circ)\text{V}$$

$$u_2(t) = -4\cos(314t + 45^\circ) = 4\cos(314t + 45^\circ - 180^\circ) = 4\cos(314t - 135^\circ)\text{V}$$

相位差为 $\varphi = -75^\circ - (-135^\circ) = 60^\circ$ ，因此， $u_1(t)$ 和 $u_2(t)$ 的相位关系为 $u_1(t)$ 超前 $u_2(t)$ 60° ，或者 $u_2(t)$ 滞后 $u_1(t)$ 60° 。

4.2 正弦量的相量表示

在正弦稳态交流电路分析中，经常需要对正弦量进行代数求和以及微积分运算，计算过程较为复杂，本节引入相量的概念，将正弦量转化为对应的相量并在相量域进行计算，最后再转化为对应的正弦量，从而简化计算过程。

1. 复数概念

复平面上的任意一点对应一个复数，复数 A 在直角坐标中可以表示为

$$A = a + jb \quad (4.2-1)$$

其中， a 为 A 的实部，即 $a = \text{Re}(A)$ ； b 为 A 的虚部，即 $b = \text{Im}(A)$ ； $j = \sqrt{-1}$ 为虚数单位。

复数 A 也可以看作从原点出发的有向线段，如图 4.2-1 所示，即可以表示为极坐标的形式

$$A = |A|e^{j\theta} = |A|\angle\theta \quad (4.2-2)$$

其中， $|A|$ 为复数 A 的模， θ 为复数 A 的辐角。

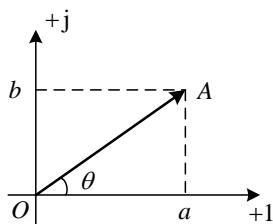


图 4.2-1 复数的图形表示

利用欧拉公式 $e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$ ，可以将复数的直角坐标形式和极坐标形式进行相互转换，即

$$\begin{cases} a = |A| \cos \theta \\ b = |A| \sin \theta \end{cases} \quad \begin{cases} |A| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \theta = \arctan \frac{b}{a} \text{ 或者 } \theta = \arctan \frac{b}{a} \pm 180^\circ \end{cases} \quad (4.2-3)$$

2. 复数的运算

复数的加减一般采用直角坐标形式进行，而复数的乘除一般采用极坐标形式进行，假设两个复数分别为 $A_1 = a_1 + jb_1 = |A_1| \angle \theta_1$ 和 $A_2 = a_2 + jb_2 = |A_2| \angle \theta_2$ ，则有

(1) 复数的加减

$$A_1 \pm A_2 = (a_1 + jb_1) \pm (a_2 + jb_2) = (a_1 \pm a_2) + j(b_1 \pm b_2) \quad (4.2-4)$$

(2) 复数的乘除

$$A_1 A_2 = |A_1| \angle \theta_1 \cdot |A_2| \angle \theta_2 = |A_1| |A_2| \angle (\theta_1 + \theta_2) \quad (4.2-5)$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{|A_1| \angle \theta_1}{|A_2| \angle \theta_2} = \frac{|A_1|}{|A_2|} \angle (\theta_1 - \theta_2) \quad (4.2-6)$$

(3) 几个常用的关系式

$$\begin{cases} 1 \angle 0^\circ = e^{j0^\circ} = \cos 0^\circ + j \sin 0^\circ = 1 \\ 1 \angle 90^\circ = e^{j90^\circ} = \cos 90^\circ + j \sin 90^\circ = j \\ 1 \angle -90^\circ = e^{-j90^\circ} = \cos(-90^\circ) + j \sin(-90^\circ) = -j \\ 1 \angle 180^\circ = e^{j180^\circ} = \cos 180^\circ + j \sin 180^\circ = -1 \end{cases} \quad (4.2-7)$$

3. 正弦量和相量的相互转换

假设电压正弦量为 $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi) = \sqrt{2}U \cos(\omega t + \varphi) \text{ V}$ ，利用欧拉公式可得

$$\begin{aligned} u(t) &= \text{Re} [U_m \cos(\omega t + \varphi) + j U_m \sin(\omega t + \varphi)] \\ &= \text{Re} [U_m e^{j(\omega t + \varphi)}] \\ &= \text{Re} [U_m e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t}] \\ &= \text{Re} [\dot{U}_m \cdot e^{j\omega t}] \end{aligned} \quad (4.2-8)$$

其中， $\dot{U}_m = U_m e^{j\varphi} = U_m \angle \varphi \text{ V}$ 为一个复数， U_m 为正弦量的最大值， φ 为正弦量的初相位。

由于 U_m 为 $u(t)$ 的最大值, 称 \dot{U}_m 为 $u(t)$ 所对应的最大值相量, 可以表示为

$$u(t) \leftrightarrow \dot{U}_m \quad (4.2-9)$$

相量在复平面上的矢量图称为相量图。注意, $u(t)$ 为一个时域函数, 而相量 \dot{U}_m 为一个复数, 两者不相等, 只是在某频率下的一一对应关系。

类似地, 正弦量也可以表示为

$$\begin{aligned} u(t) &= \operatorname{Re} \left[\sqrt{2}U \cos(\omega t + \varphi) + j\sqrt{2}U \sin(\omega t + \varphi) \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[\sqrt{2}U e^{j(\omega t + \varphi)} \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[\sqrt{2}U e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t} \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[\sqrt{2}\dot{U} \cdot e^{j\omega t} \right] \end{aligned} \quad (4.2-10)$$

其中, $\dot{U} = U e^{j\varphi} = U \angle \varphi \text{V}$ 为一个复数, U 为正弦量的有效值, φ 为正弦量的初相位。由于 U 为 $u(t)$ 的有效值, 称 \dot{U} 为 $u(t)$ 所对应的有效值相量, 可以表示为

$$u(t) \leftrightarrow \dot{U} \quad (4.2-11)$$

可见, 最大值相量和有效值相量之间存在以下关系

$$\dot{U}_m = \sqrt{2}\dot{U} \quad (4.2-12)$$

同理, 对于正弦电流 $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi) = \sqrt{2}I \cos(\omega t + \varphi) \text{A}$, 也有最大值相量和有效值相量与之对应, 即

$$i(t) \leftrightarrow \dot{I}_m \quad (4.2-13)$$

$$i(t) \leftrightarrow \dot{I} \quad (4.2-14)$$

可见

$$\dot{I}_m = \sqrt{2}\dot{I} \quad (4.2-15)$$

4. 相量的性质

(1) 相量的线性性质

设正弦量 $u_1(t) = \sqrt{2}U_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \text{V}$, $u_2(t) = \sqrt{2}U_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \text{V}$, 且 $u_1(t) \leftrightarrow \dot{U}_1$,

$u_2(t) \leftrightarrow \dot{U}_2$, 若 k_1 和 k_2 为常数, 则有

$$k_1 u_1(t) + k_2 u_2(t) = k_1 \operatorname{Re} [\dot{U}_1 e^{j\omega t}] + k_2 \operatorname{Re} [\dot{U}_2 e^{j\omega t}] = \operatorname{Re} [(k_1 \dot{U}_1 + k_2 \dot{U}_2) e^{j\omega t}]$$

可得

$$k_1 u_1(t) + k_2 u_2(t) \leftrightarrow k_1 \dot{U}_1 + k_2 \dot{U}_2 \quad (4.2-16)$$

即，正弦量和相量之间满足线性对应关系。

(2) 相量的微分性质

设正弦量为 $u(t) = \sqrt{2}U \cos(\omega t + \varphi) \text{ V}$ ，且 $u(t) \leftrightarrow \dot{U}$ ，则有

$$\frac{d}{dt} u(t) = -\sqrt{2}\omega U \sin(\omega t + \varphi) = \sqrt{2}\omega U \cos(\omega t + \varphi + 90^\circ)$$

可见，正弦量微分运算后仍为正弦量，且

$$\frac{d}{dt} u(t) \leftrightarrow \omega U \angle(\varphi + 90^\circ) = j\omega U \angle \varphi = j\omega \dot{U} \quad (4.2-17)$$

即，正弦量一次微分后所对应的相量为 $j\omega$ 乘以原正弦量所对应相量。在此基础上可得

$$\frac{d^n}{dt^n} u(t) \leftrightarrow (j\omega)^n \dot{U} \quad (4.2-18)$$

由于最大值相量与有效值相量为 $\sqrt{2}$ 的比例关系，因此，最大值相量同样具有上述线性性质和微分性质。

例 4.2-1 已知 $u_1(t) = \sqrt{2} \sin(2t + 45^\circ) \text{ V}$ ， $u_2(t) = 2\sqrt{2} \cos(2t) \text{ V}$ ，求 $2u_1(t) + u_2(t)$ ， $u_1(t) - u_2(t)$ 和 $\frac{d}{dt} u_1(t) + u_2(t)$ ，并画出各相量图。

解 $u_1(t)$ 和 $u_2(t)$ 为同频率正弦量，因此可以采用相量法进行分析。 $u_1(t)$ 和 $u_2(t)$ 对应的相量分别为

$$u_1(t) = \sqrt{2} \sin(2t + 45^\circ) = \sqrt{2} \cos(2t - 45^\circ) \text{ V} \leftrightarrow \dot{U}_1 = 1 \angle -45^\circ \text{ V}$$

$$u_2(t) = 2\sqrt{2} \cos(2t) \text{ V} \leftrightarrow \dot{U}_2 = 2 \angle 0^\circ \text{ V}$$

(1)

$$2u_1(t) + u_2(t) \leftrightarrow 2\dot{U}_1 + \dot{U}_2 = 2 \angle -45^\circ \text{ V} + 2 \angle 0^\circ = 3.414 - j1.414 = 3.695 \angle -22.5^\circ \text{ V}$$

可得

$$2u_1(t) + u_2(t) = 3.695\sqrt{2} \cos(2t - 22.5^\circ) \text{ V}$$

相量图如图 4.2-2 (a) 所示。

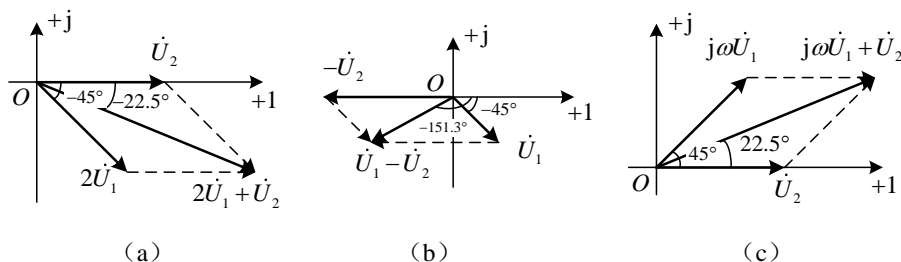


图 4.2-2 例 4.2-1 的图

(2)

$$u_1(t) - u_2(t) \leftrightarrow \dot{U}_1 - \dot{U}_2 = 1\angle -45^\circ - 2\angle 0^\circ = -1.293 - j0.707 = 1.474\angle -151.3^\circ \text{ V}$$

可得

$$u_1(t) - u_2(t) = 1.474\sqrt{2} \cos(2t - 151.325^\circ) \text{ V}$$

相量图如图 4.2-2 (b) 所示。

(3)

$$\frac{d}{dt} u_1(t) + u_2(t) \leftrightarrow j\omega \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = j2 \times 1\angle -45^\circ + 2\angle 0^\circ = 3.695\angle 22.5^\circ \text{ V}$$

可得

$$\frac{d}{dt} u_1(t) + u_2(t) = 3.695\sqrt{2} \cos(2t + 22.5^\circ) \text{ V}$$

相量图如图 4.2-2 (c) 所示。

4.3 基尔霍夫定律的相量形式

1. KCL 的相量表示

KCL 的时域形式为

$$\begin{cases} \sum i_{\lambda} = 0 \\ \sum i_{\text{出}} = 0 \\ \sum i_{\lambda} = \sum i_{\text{出}} \end{cases}$$

当该节点各支路电流都是同频率的正弦量时，利用线性性质可得 KCL 的相量形式为

$$\begin{cases} \sum \dot{i}_{\lambda} = 0 \\ \sum \dot{i}_{\text{出}} = 0 \\ \sum \dot{i}_{\lambda} = \sum \dot{i}_{\text{出}} \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} \sum \dot{i}_{\text{m}\lambda} = 0 \\ \sum \dot{i}_{\text{m出}} = 0 \\ \sum \dot{i}_{\text{m}\lambda} = \sum \dot{i}_{\text{m出}} \end{cases} \quad (4.3-1)$$

2. KVL 的相量表示

KVL 的时域形式为

$$\begin{cases} \sum u_{\text{降}} = 0 \\ \sum u_{\text{升}} = 0 \\ \sum u_{\text{降}} = \sum u_{\text{升}} \end{cases}$$

当该回路各支路电压都是同频率的正弦量时，利用线性性质可得 KVL 的相量形式为

$$\begin{cases} \sum \dot{U}_{\text{降}} = 0 \\ \sum \dot{U}_{\text{升}} = 0 \\ \sum \dot{U}_{\text{降}} = \sum \dot{U}_{\text{升}} \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} \sum \dot{U}_{\text{m降}} = 0 \\ \sum \dot{U}_{\text{m升}} = 0 \\ \sum \dot{U}_{\text{m降}} = \sum \dot{U}_{\text{m升}} \end{cases} \quad (4.3-2)$$

例 4.3-1 如图 4.3-1 所示电路，求 $u_1(t)$ 。

$$(1) \quad u_2(t) = 5\sqrt{2} \cos(10t) \text{ V}, \quad u_3(t) = 10\sqrt{2} \cos(2t + 45^\circ) \text{ V};$$

$$(2) \quad u_2(t) = 5\sqrt{2} \cos(2t) \text{ V}, \quad u_3(t) = 10\sqrt{2} \cos(2t + 45^\circ) \text{ V}.$$

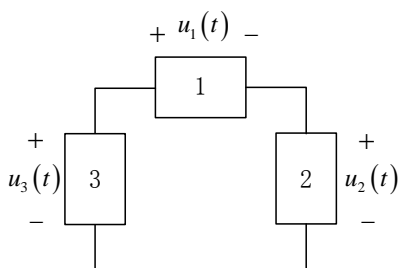


图 4.3-1 例 4.3-1 的图

解 由 KVL 可知: $u_1(t) = u_3(t) - u_2(t)$ 。

(1) 由于 $u_2(t)$ 和 $u_3(t)$ 是不同频率的正弦量, 不能用相量法进行计算, 因此

$$u_1(t) = u_3(t) - u_2(t) = [10\sqrt{2}\cos(2t + 45^\circ) - 5\sqrt{2}\cos(10t)] \text{ V}$$

(2) 由于 $u_2(t)$ 和 $u_3(t)$ 是同频率的正弦量, 可以采用相量法进行计算, 并采用有效值相量, 因此

$$u_1(t) = u_3(t) - u_2(t) \leftrightarrow 10\angle 45^\circ - 5\angle 0^\circ = 2.071 + j7.07 = 7.368\angle 73.7^\circ \text{ V}$$

可得

$$u_1(t) = 7.368\sqrt{2}\cos(2t + 73.7^\circ) \text{ V}$$

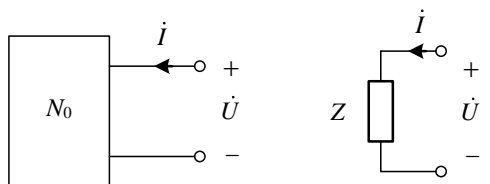
4.4 无源单口网络的阻抗、导纳及等效变换

4.4.1 阻抗和导纳

无源单口网络 N_0 如图 4.4-1 (a) 所示, 定义关联参考方向下的端口电压 $\dot{U} = U\angle\varphi_u \text{ V}$ 和

端口电流 $\dot{I} = I\angle\varphi_i \text{ A}$ 之比为该单口网络的等效阻抗 (impedance), 用 Z 表示, 即

$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U}{I} \angle(\varphi_u - \varphi_i) = |Z| \angle\varphi_z = R + jX \quad (4.4-1)$$



(a) 无源单口网络

(a) 等效阻抗

图 4.4-1 无源单口网络及其等效阻抗

其中, $|Z|$ 为阻抗的模, 其值为端口电压与电流的模之比; $\varphi_z = \varphi_u - \varphi_i$ 为阻抗角, 其值为端口电压超前电流的相位角, 一般情况下 $R \geq 0$, 因此 $|\varphi_z| \leq 90^\circ$; $R = |Z|\cos\varphi_z$ 为电阻分量;

$X = |Z| \sin \varphi_Z$ 为电抗分量；阻抗的单位为欧姆 (Ω)，阻抗可用电阻符号表示，如图 4.1-1 (b) 所示。

定义阻抗的倒数为导纳 (admittance)，用 Y 表示，即

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = \frac{I}{U} \angle(\varphi_i - \varphi_u) = |Y| \angle \varphi_Y = G + jB \quad (4.4-2)$$

其中， $|Y|$ 为导纳的模，其值为端口电流与电压的模之比，因此 $|Y| = 1/|Z|$ ； $\varphi_Y = \varphi_i - \varphi_u$ 为导纳角，其值为端口电压滞后电流的相位角，因此 $\varphi_Y = -\varphi_Z$ ； $G = |Y| \cos \varphi_Y$ 为电导分量；

$B = |Y| \sin \varphi_Y$ 为电纳分量；导纳的单位为西门子 (S)。

需要注意的是，阻抗和导纳都是复数，不是相量，因此都没有对应的正弦量。阻抗和导纳也可以利用电压和电流的最大值相量来计算，即

$$\begin{cases} Z = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} \\ Y = \frac{\dot{I}_m}{\dot{U}_m} \end{cases} \quad (4.4-3)$$

称无源单口网络的 \dot{U} 和 \dot{I} （或者 \dot{U}_m 和 \dot{I}_m ）的关系为该单口网络相量形式的伏安关系。

4.4.2 R 、 L 和 C 的阻抗与导纳

1. 电阻 R

关联参考方向下电阻 R 的时域 VAR 为 $u(t) = Ri(t)$ ，若 $u(t) \leftrightarrow \dot{U}$ ， $i(t) \leftrightarrow \dot{I}$ ，可得其相量形式的 VAR 为

$$\dot{U} = R\dot{I} \quad (4.4-4)$$

因此，电阻的阻抗和导纳分别为

$$\begin{cases} Z_R = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = R \\ Y_R = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = \frac{1}{R} = G \end{cases} \quad (4.4-5)$$

可见，电阻的阻抗角为 0° ，即电阻上的电压和电流同相。

2. 电感 L

关联参考方向下电感 L 的时域 VAR 为 $u(t) = L \frac{d}{dt} i(t)$ ，若 $u(t) \leftrightarrow \dot{U}$ ， $i(t) \leftrightarrow \dot{I}$ ，可得其相量形式的 VAR 为

$$\dot{U} = j\omega L \dot{I} \quad (4.4-6)$$

因此，电感的阻抗和导纳分别为

$$\begin{cases} Z_L = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = j\omega L = jX_L \\ Y_L = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = -j\frac{1}{\omega L} = -jB_L \end{cases} \quad (4.4-7)$$

其中, $X_L = \omega L$ 称为电感的感抗, 单位为欧姆 (Ω); $B_L = \frac{1}{\omega L}$ 称为电感的感纳, 单位为西门子 (S)。

可见, 电感的阻抗角为 90° , 即电感上的电压超前电流 90° 。

3. 电容 C

关联参考方向下电容 C 的时域 VAR 为 $i(t) = C \frac{d}{dt} u(t)$, 若 $u(t) \leftrightarrow \dot{U}$, $i(t) \leftrightarrow \dot{I}$, 可得其相量形式的 VAR 为

$$\dot{U} = \frac{1}{j\omega C} \dot{I} \quad (4.4-8)$$

因此, 电容的阻抗和导纳分别为

$$\begin{cases} Z_C = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C} = -jX_C \\ Y_C = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = j\omega C = jB_C \end{cases} \quad (4.4-9)$$

其中, $X_C = \frac{1}{\omega C}$ 称为电容的容抗, 单位为欧姆 (Ω); $B_C = \omega C$ 称为电容的容纳, 单位为西门子 (S)。

可见, 电容的阻抗角为 -90° , 即电容上的电压滞后电流 90° 。

由于电容和电感元件的阻抗为纯电抗性的, 也称电容和电感为电抗元件。

4.4.3 阻抗元件的串并联及其等效

1. 阻抗的串联

如图 4.4-2 (a) 所示的单口网络, 由 n 个阻抗串联而成, 其等效电路如图 4.4-2 (b) 所示。两个单口网络的端口相量形式 VAR 分别为

$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \cdots + \dot{U}_k + \cdots + \dot{U}_n = (Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_k + \cdots + Z_n) \dot{I}$$

$$\dot{U} = Z_{eq} \dot{I}$$

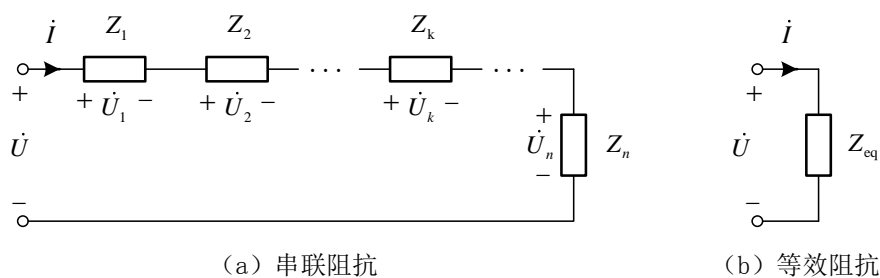


图 4.4-2 串联阻抗及其等效阻抗

可见，两个单口网络等效的条件为

$$Z_{\text{eq}} = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_k + \cdots + Z_n = \sum_{i=1}^n Z_i \quad (4.4-10)$$

因此，多个阻抗的串联可以等效为一个阻抗，其值为串联的多个阻抗之和。串联阻抗具有分压特性，分压公式为

$$\dot{U}_k = \frac{Z_k}{\sum_{i=1}^n Z_i} \dot{U} \quad (4.4-11)$$

2. 阻抗元件的并联

如图 4.4-3 (a) 所示的单口网络，由 n 个阻抗元件并联而成，其等效阻抗如图 4.4-3 (b) 所示，为了分析的方便，在这里采用导纳的概念。两个单口网络的端口相量形式 VAR 分别为

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \cdots + \dot{I}_k + \cdots + \dot{I}_n = (Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_k + \cdots + Y_n) \dot{U} \\ \dot{I} &= Y_{\text{eq}} \dot{U} \end{aligned}$$

可见，两个单口网络等效的条件为

$$Y_{\text{eq}} = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_k + \cdots + Y_n = \sum_{i=1}^n Y_i \quad (4.4-12)$$

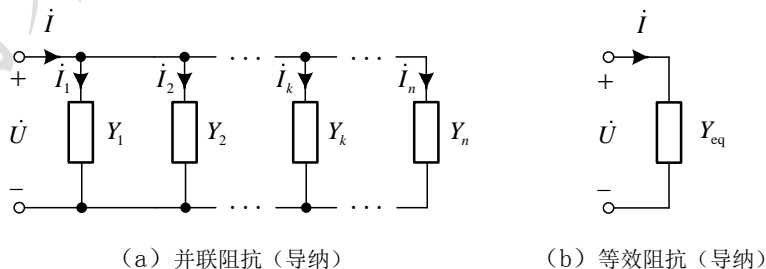


图 4.4-3 并联阻抗（导纳）及其等效阻抗（导纳）

因此，多个导纳的并联可以等效为一个导纳，其值为并联的多个导纳之和。并联导纳具有分流特性，分流公式为

$$i_k = \frac{Y_k}{\sum_{i=1}^n Y_i} i \quad (4.4-13)$$

例 4.4-1 讨论如图 4.4-4 所示 RLC 串联单口网络在不同频率下的阻抗特性。

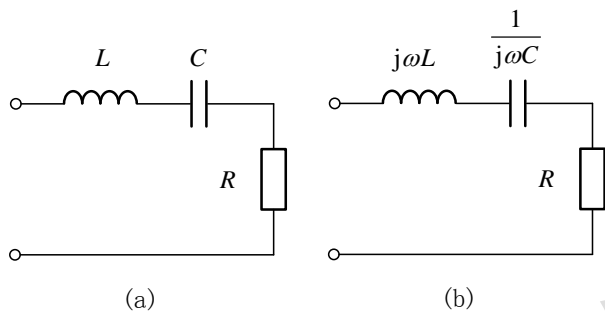


图 4.4-4 例 4.4-1 的图

解 图 4.4-4 (a) 所示电路对应的相量域电路如图 4.4-4 (b) 所示，其等效阻抗为

$$Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + jX = |Z| \angle \varphi_z$$

可见，若 R 、 L 和 C 固定不变，则该单口网络阻抗的电阻分量 R 固定不变，但是阻抗的电抗分量 $X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$ 会随频率的不同而不同。

当 $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ （即 $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ）时， $X = 0$ ， $\varphi_z = 0$ ，单口网络端口的电压和电流同相，

称此时的单口网络呈纯阻性，可以用电阻元件来等效。

当 $\omega L > \frac{1}{\omega C}$ （即 $\omega > \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ）时， $X > 0$ ， $0 < \varphi_z < 90^\circ$ ，单口网络端口的电压超前电

流 φ_z ，称此时的单口网络呈感性，可以用电阻和电感的串并联来等效。

当 $\omega L < \frac{1}{\omega C}$ （即 $\omega < \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ）时， $X < 0$ ， $-90^\circ < \varphi_z < 0$ ，单口网络端口的电压滞后电

流 $|\varphi_z|$ ，称此时的单口网络呈容性，可以用电阻和电容的串并联来等效。

例 4.4-2 求如图 4.4-5 (a) 所示单口网络在 $\omega = 2\text{rad/s}$ 时的等效阻抗和该频率下的简化等效电路。

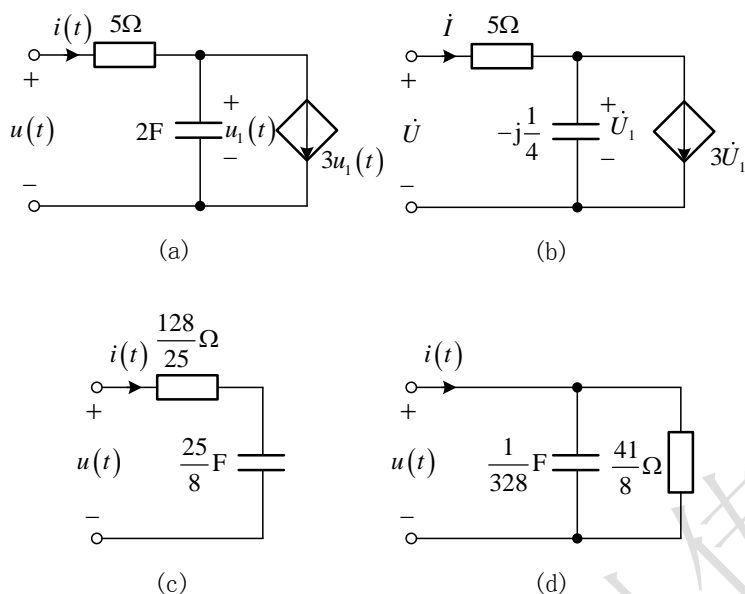


图 4.4-5 例 4.4-2 的图

解 在 $\omega = 2\text{rad/s}$ 时对应的相量域电路如图 4.4-5 (b) 所示。利用 KCL 和 KVL 可得

$$\begin{cases} \dot{I} = \frac{\dot{U}_1}{-j\frac{1}{4}} + 3\dot{U}_1 \\ \dot{U} = 5\dot{I} + \dot{U}_1 \end{cases}$$

解得

$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \left(\frac{128}{25} - j\frac{4}{25} \right) \Omega$$

可见, 在 $\omega = 2\text{rad/s}$ 时该阻抗呈容性, 因此可以等效为电阻和电容的串联, 且 $R = \frac{128}{25} \Omega$,

$\frac{1}{j\omega C} = -j\frac{4}{25}$, 因此 $C = \frac{25}{8} \text{F}$, 该单口网络在 $\omega = 2\text{rad/s}$ 时的 RC 串联等效电路如图 4.4-5

(c) 所示。

该单口网络的等效导纳为

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{\frac{128}{25} - j\frac{4}{25}} = \left(\frac{8}{41} + j\frac{1}{164} \right) \text{S}$$

因此, 在 $\omega = 2\text{rad/s}$ 时, 该单口网络也可以等效为电阻和电容的并联, 且 $\frac{1}{R} = \frac{8}{41}$,

因此 $R = \frac{41}{8} \Omega$, 而 $j\omega C = j\frac{1}{164}$, 因此 $C = \frac{1}{328} \text{F}$, 该单口网络在 $\omega = 2\text{rad/s}$ 时的 RC 并联

等效电路如图 4.4-5 (d) 所示。

4.5 正弦稳态电路的相量分析法

阻抗概念的引入,使得相量形式的 R 、 L 和 C 的 VAR 与时域形式的电阻的 VAR 一致,同时相量形式的基尔霍夫定理与时域形式的基尔霍夫定律一致,因此,基于时域形式的基尔霍夫定律和欧姆定律的电阻电路分析方法和定理同样适用于相量域电路的分析。本节将以例题的形式说明单口网络简化、支路电流法、节点电压法、叠加原理等在相量域的应用。

例 4.5-1 图 4.5-1 (a) 所示电路中, $u_{S1}(t) = 10\sqrt{2} \cos(2t + 45^\circ) \text{V}$, $u_{S2}(t) = 5\sqrt{2} \cos(2t) \text{V}$, $R = 2\Omega$, $L = 4\text{H}$, $C = 0.25\text{F}$, 求电流 $i(t)$ 。

解 由于两电压源为同频率且 $\omega = 2\text{rad/s}$, 因此 R 、 L 和 C 的阻抗分别为 2Ω 、 $j8\Omega$ 和 $-j2\Omega$, 各电压源对应的有效值相量分别为

$$u_{S1}(t) = 10\sqrt{2} \cos(2t + 45^\circ) \text{V} \leftrightarrow \dot{U}_{S1} = 10\angle 45^\circ \text{V}$$

$$u_{S2}(t) = 5\sqrt{2} \cos(2t) \text{V} \leftrightarrow \dot{U}_{S2} = 5\angle 0^\circ \text{V}$$

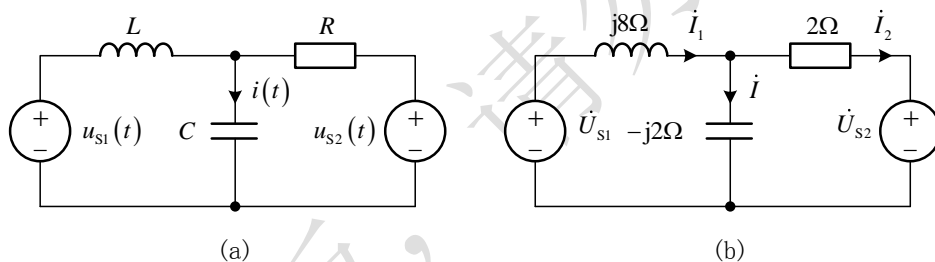


图 4.5-1 例 4.5-1 的图

方法 1 利用支路电流法求解

设置支路电流 \dot{I}_1 和 \dot{I}_2 的相量域电路如图 4.5-1 (b), 列写 KCL 和 KVL 方程可得

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = \dot{I} + \dot{I}_2 \\ \dot{U}_{S1} = j8\dot{I}_1 - j2\dot{I} \\ -j2\dot{I} = 2\dot{I}_2 + \dot{U}_{S2} \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} \dot{I} = 2.190 + j1.741 = 2.798\angle 38.5^\circ \text{A} \\ \dot{I}_1 = 1.431 - j0.449 = 1.500\angle -17.4^\circ \text{A} \\ \dot{I}_2 = -0.759 - j2.190 = 2.318\angle -109.1^\circ \text{A} \end{cases}$$

因此

$$\dot{I} = 2.798\angle 38.5^\circ \text{A} \leftrightarrow i(t) = 2.798\sqrt{2} \cos(2t + 38.5^\circ) \text{A}$$

方法二 利用节点电压法求解

设各节点电压如图 4.5-2 所示, 可得节点电压方程为

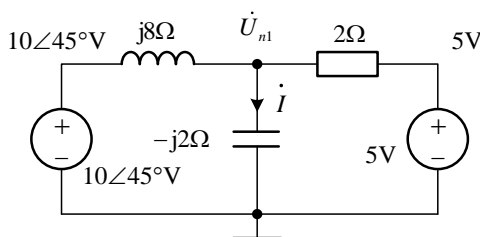


图 4.5-2 节点电压法求例 4.5-1

$$\left(\frac{1}{j8} + \frac{1}{-j2} + \frac{1}{2} \right) \dot{U}_{n1} - \frac{1}{j8} \times 10\angle 45^\circ \text{V} - \frac{1}{2} \times 5 = 0$$

解得

$$\dot{U}_{n1} = 3.4828 - j4.380 = 5.596\angle -51.5^\circ \text{V}$$

因此

$$\dot{i} = \frac{\dot{U}_{n1}}{-j2} = \frac{5.596\angle -51.5^\circ}{-j2} = 2.798\angle 38.5^\circ \text{A} \leftrightarrow i(t) = 2.798\sqrt{2} \cos(2t + 38.5^\circ) \text{A}$$

方法三 利用单口网络简化求解

利用电源等效将 $10\angle 45^\circ \text{V}$ 电压源与 $j8\Omega$ 阻抗的串联等效为 $\frac{5}{4}\angle -45^\circ \text{A}$ 电流源与 $j8\Omega$ 阻抗的并联，将 5V 电压源与 2Ω 阻抗的串联等效为 2.5A 电流源与 2Ω 阻抗的并联，如图 4.5-3 (a) 所示；将两个电流源并联等效为 $\left(2.5 + \frac{5}{4}\angle -45^\circ \right) \text{A}$ 电流源，将 $j8\Omega$ 与 2Ω 的并联等效为 $(1.882 + j0.471)\Omega$ 的阻抗，如图 4.5-3 (b) 所示。

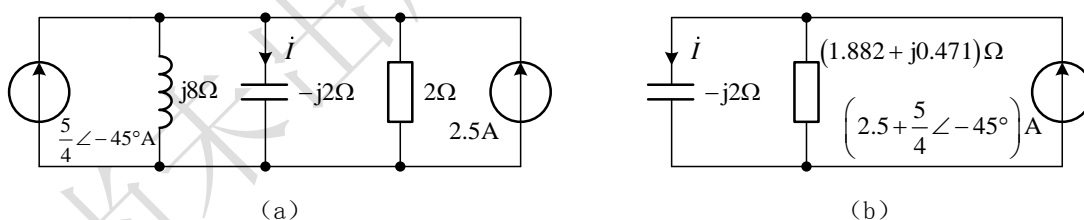


图 4.5-3 利用单口网络简化求解例 4.5-1

利用分流公式可得

$$\dot{i} = \frac{1.882 + j0.471}{-j2 + 1.882 + j0.471} \times \left(2.5 + \frac{5}{4}\angle -45^\circ \right) = 2.190 + j1.742 = 2.798\angle 38.5^\circ \text{A}$$

因此

$$\dot{i} = 2.798\angle 38.5^\circ \text{A} \leftrightarrow i(t) = 2.798\sqrt{2} \cos(2t + 38.5^\circ) \text{A}$$

事实上，本例采用了诺顿等效电路的概念，即，本例中将除待求支路外的单口网络等效为电流源与阻抗的并联，同样地，也可以采用戴维南等效电路的概念对电路进行求解。

方法四 利用叠加原理求解

利用叠加原理可得两个电压源单独作用的相量域电路如图 4.5-4 所示，解得

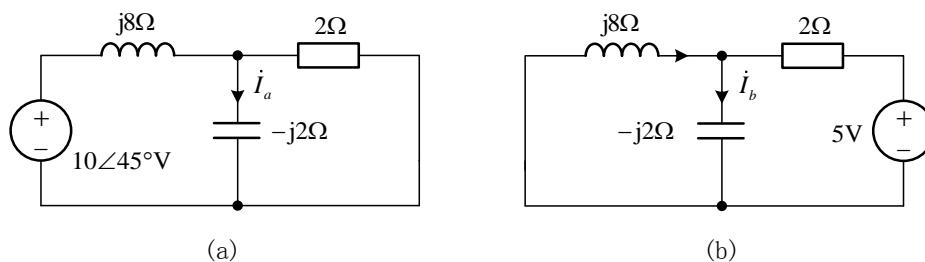


图 4.5-4 利用叠加原理求解例 4.5-1

$$\dot{I}_a = \frac{2 // (-j2)}{j8 + 2 // (-j2)} \times 10\angle 45^\circ = (0.990 + j0.141) \text{ A}$$

$$\dot{I}_b = \frac{j8 // (-j2)}{2 + j8 // (-j2)} \times 5 = (1.2 + j1.6) \text{ A}$$

因此

$$\dot{I} = \dot{I}_a + \dot{I}_b = (2.190 + j1.741) = 2.798\angle 38.5^\circ \text{ A} \leftrightarrow i(t) = 2.798\sqrt{2} \cos(2t + 38.5^\circ) \text{ A}$$

例 4.5-2 图 4.5-1 (a) 所示电路中， $u_{S1}(t) = 10\sqrt{2} \cos(2t + 45^\circ) \text{ V}$ ，

$u_{S2}(t) = 5\sqrt{2} \cos(4t) \text{ V}$ ， $R = 2\Omega$ ， $L = 4\text{H}$ ， $C = 0.25\text{F}$ ，求电流 $i(t)$ 。

解 本例电路结构与例 4.5-1 一致，区别为：例 4.5-1 中两电压源频率一样，而本例中两电压源频率不同。因此，本例需要分别计算单个电压源作用下的响应，并利用叠加原理在时域进行叠加，从而得到两个电压源共同作用下的响应。 $u_{S1}(t)$ 单独作用时 $\omega = 2\text{rad/s}$ ，其相量域电路如图 4.5-5 (a) 所示，其中 $\dot{U}_{S1} = 10\angle 45^\circ \text{ V}$ ； $u_{S2}(t)$ 单独作用时 $\omega = 4\text{rad/s}$ ，其相量域电路如图 4.5-5 (b) 所示，其中 $\dot{U}_{S2} = 5\angle 0^\circ \text{ V}$ 。可得

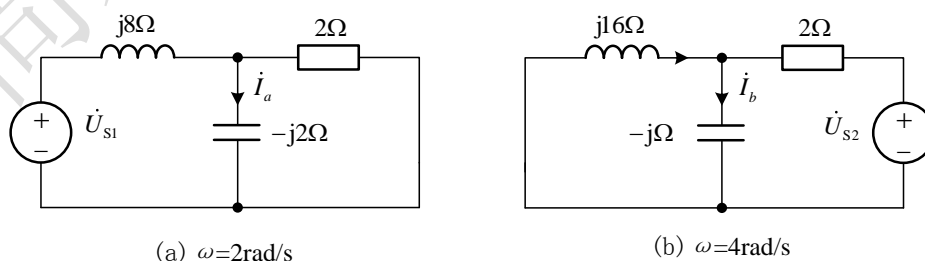


图 4.5-5 例 4.5-2 的图

$$\dot{I}_a = \frac{2 // (-j2)}{j8 + 2 // (-j2)} \times 10\angle 45^\circ = (0.990 + j0.141) = 1\angle 8.1^\circ \text{ A} \leftrightarrow i_a(t) = \sqrt{2} \cos(2t + 8.1^\circ) \text{ A}$$

$$i_b = \frac{\frac{j16//(-j)}{2+j16//(-j)} \times 5}{-j} = (2.076 + j1.107) = 2.353 \angle 28.1^\circ \text{ A} \leftrightarrow i_b(t) = 2.353\sqrt{2} \cos(4t + 28.1^\circ) \text{ A}$$

最后，在时域进行叠加，可得

$$i(t) = i_a(t) + i_b(t) = [\sqrt{2} \cos(2t + 8.1^\circ) + 2.353\sqrt{2} \cos(4t + 28.1^\circ)] \text{ A}$$

例 4.5-3 计算如图 4.5-6 (a) 所示单口网络的戴维南等效电路。

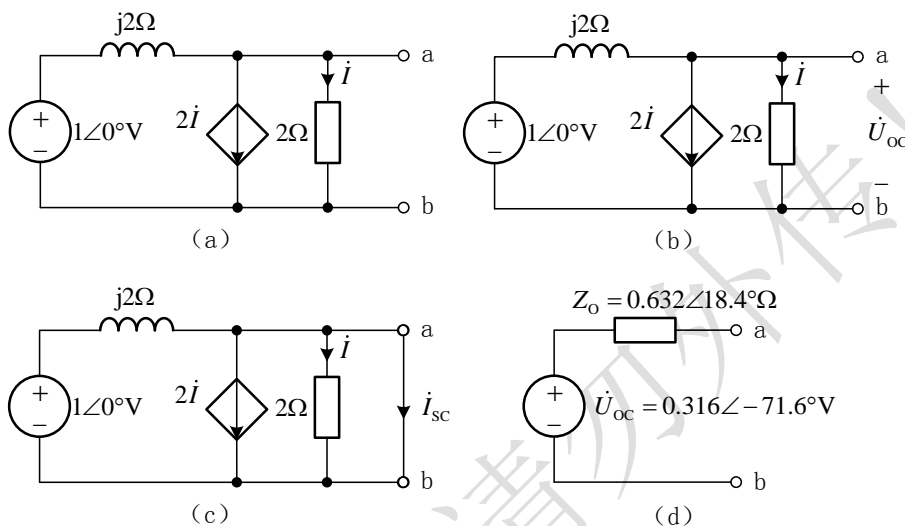


图 4.5-6 例 4.5-3 的图

解 本例采用开路电压-短路电流法来计算戴维南等效电路。

(1) 求开路电压。电路如图 4.5-6 (b) 所示，由 KVL 可得

$$1 = j2 \times (i + 2i) + 2i$$

解得

$$i = \frac{1}{2 + j6} = 0.158 \angle -71.6^\circ \text{ A}$$

所以

$$\dot{U}_{oc} = 2\dot{I} = 0.316 \angle -71.6^\circ \text{ V}$$

(2) 求短路电流。电路如图 4.5-6 (c) 所示，此时 $\dot{I} = 0$ ，可得

$$\dot{I}_{sc} = \frac{1}{j2} = \frac{1}{2} \angle -90^\circ \text{ A}$$

(3) 求等效阻抗。

$$Z_o = \frac{\dot{U}_{oc}}{\dot{I}_{sc}} = \frac{0.316 \angle -71.6^\circ}{\frac{1}{2} \angle -90^\circ} = 0.632 \angle 18.4^\circ \Omega$$

该单口网络的戴维南等效电路如图 4.5-6 (d) 所示。

4.6 正弦稳态电路的功率

4.6.1 有功功率和无功功率

如图 4.6-1 (a) 所示无源单口网络, 设其端口电压和电流分别为

$$u(t) = \sqrt{2}U \cos(\omega t + \varphi_u) \leftrightarrow \dot{U} = U \angle \varphi_u$$

$$i(t) = \sqrt{2}I \cos(\omega t + \varphi_i) \leftrightarrow \dot{I} = I \angle \varphi_i$$

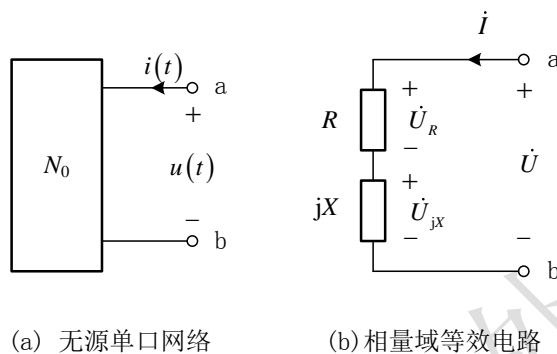


图 4.6-1 无源单口网络及其相量域等效电路

图 4.6-2 (b) 为该单口网络的相量域简化后的等效电路, 即

$$Z = R + jX = |Z| \angle \varphi_Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U}{I} \angle (\varphi_u - \varphi_i)$$

其中, $R = |Z| \cos \varphi_Z$, $X = |Z| \sin \varphi_Z$, $\varphi_Z = \varphi_u - \varphi_i$ 。可得

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{U}_R = \frac{R}{R + jX} \dot{U} = \frac{|Z| \cos \varphi_Z}{|Z| \angle \varphi_Z} U \angle \varphi_u = U \cos \varphi_Z \angle \varphi_i \\ \quad \leftrightarrow u_R(t) = \sqrt{2}U \cos \varphi_Z \cos(\omega t + \varphi_i) \\ \dot{U}_{jX} = \frac{jX}{R + jX} \dot{U} = \frac{j|Z| \sin \varphi_Z}{|Z| \angle \varphi_Z} U \angle \varphi_u = U \sin \varphi_Z \angle (\varphi_i + 90^\circ) \\ \quad \leftrightarrow u_{jX}(t) = \sqrt{2}U \sin \varphi_Z \cos(\omega t + \varphi_i + 90^\circ) = -\sqrt{2}U \sin \varphi_Z \sin(\omega t + \varphi_i) \end{array} \right.$$

该单口网络的瞬时功率为

$$\begin{aligned} p(t) &= u(t)i(t) \\ &= \sqrt{2}U \cos(\omega t + \varphi_u) \times \sqrt{2}I \cos(\omega t + \varphi_i) \\ &= 2UI \cos(\omega t + \varphi_u) \cos(\omega t + \varphi_i) \\ &= UI \cos \varphi_Z + UI \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i) \end{aligned}$$

可见, 瞬时功率由两部分组成, 一部分为恒定分量 $UI \cos \varphi_Z$, 另一部分为正弦分量

$UI \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)$, 如图 4.6-2 所示, 当 $p(t) > 0$ 时, 单口网络从外电路吸收功率; 当

$p(t) < 0$ 单口网络释放功率给外电路, 即单口网络与外电路之间存在能量的交换, 并且周期

内吸收功率和释放功率的间隔由 $|\varphi_Z|$ 确定。

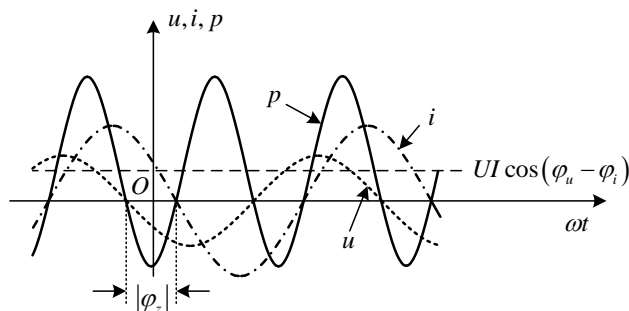


图 4.6-2 瞬时功率

有功功率为瞬时功率在一个周期内的平均值,也称平均功率,用 P 表示,单位为瓦特(W)。

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T [UI \cos \varphi_Z + UI \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)] dt = UI \cos \varphi_Z$$

由于 $U = |Z|I$, 因此有功功率也可以写作

$$P = UI \cos \varphi_Z = I^2 |Z| \cos \varphi_Z = I^2 R = I^2 \operatorname{Re}(Z) \quad (4.6-1)$$

事实上, 单口网络有功功率就是单口网络中电阻分量消耗功率的平均值, 即

$$P_R = \frac{1}{T} \int_0^T u_R(t) i(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \sqrt{2}U \cos \varphi_Z \cos(\omega t + \varphi_i) \times \sqrt{2}I \cos(\omega t + \varphi_i) dt = UI \cos \varphi_Z = P$$

单口网络电抗分量 jX 上的瞬时功率为

$$\begin{aligned} p_{jX}(t) &= u_{jX}(t) i(t) \\ &= -\sqrt{2}U \sin \varphi_Z \sin(\omega t + \varphi_i) \times \sqrt{2}I \cos(\omega t + \varphi_i) \\ &= UI \sin \varphi_Z \sin(2\omega t + 2\varphi_i + 180^\circ) \end{aligned}$$

可见, $p_{jX}(t)$ 的平均值为零, 即电抗分量 jX 不消耗有功功率。但是电抗分量与外电路存在能量交换, 定义单口网络能量交换速率(瞬时功率)的最大值为单口网络的无功功率, 用 Q 表示, 单位为乏(var), 即

$$Q = UI \sin \varphi_Z$$

由于 $U = |Z|I$, 因此无功功率也可以写作

$$Q = UI \sin \varphi_Z = I^2 |Z| \sin \varphi_Z = I^2 X = I^2 \operatorname{Im}(Z) \quad (4.6-2)$$

单口网络总的有功功率等于单口网络中各电阻元件的有功功率之和, 单口网络总的无功功率等于单口网络中各电抗性元件(电容和电感)的无功功率之和, 即

$$\begin{cases} P = \sum_k P_{R_k} \\ Q = \sum_k Q_{jX_k} \end{cases} \quad (4.6-3)$$

下面讨论 R 、 L 、 C 元件的有功功率和无功功率。

1. R 元件

设电阻 R 上的电流为 $i(t) = \sqrt{2}I \cos(\omega t + \varphi_i) \text{ A}$ ，其有效值相量为 $\dot{I} = I \angle \varphi_i \text{ A}$ 。由于电阻上的电压和电流同相位，即阻抗角 $\varphi_Z = 0^\circ$ ，因此，关联参考方向下电阻上的电压为 $u(t) = \sqrt{2}U \cos(\omega t + \varphi_i) = \sqrt{2}RI \cos(\omega t + \varphi_i) \text{ V}$ ，其对应的有效值相量为 $\dot{U} = U \angle \varphi_i = RI \angle \varphi_i \text{ V}$ 。因此，电阻上的有功功率和无功功率分别为

$$\begin{cases} P_R = UI \cos 0^\circ = UI = I^2 R \\ Q_R = UI \sin 0^\circ = 0 \end{cases} \quad (4.6-4)$$

2. L 元件

设电感 L 上的电流为 $i(t) = \sqrt{2}I \cos(\omega t + \varphi_i) \text{ A}$ ，其有效值相量为 $\dot{I} = I \angle \varphi_i \text{ A}$ 。由于电感上的电压超前电流 90° ，即阻抗角 $\varphi_Z = 90^\circ$ ，因此，关联参考方向下电感上的电压为 $u(t) = \sqrt{2}U \cos(\omega t + \varphi_i + 90^\circ) = \sqrt{2}\omega LI \cos(\omega t + \varphi_i + 90^\circ) \text{ V}$ ，其对应的有效值相量为 $\dot{U} = U \angle (\varphi_i + 90^\circ) = \omega LI \angle (\varphi_i + 90^\circ) \text{ V}$ 。因此，电感上的有功功率和无功功率分别为

$$\begin{cases} P_L = UI \cos 90^\circ = 0 \\ Q_L = UI \sin 90^\circ = UI = \omega LI^2 \end{cases} \quad (4.6-5)$$

3. C 元件

设电容 C 上的电流为 $i(t) = \sqrt{2}I \cos(\omega t + \varphi_i) \text{ A}$ ，其有效值相量为 $\dot{I} = I \angle \varphi_i \text{ A}$ 。由于电容上的电压滞后电流 90° ，即阻抗角 $\varphi_Z = -90^\circ$ ，因此，关联参考方向下电容上的电压为 $u(t) = \sqrt{2}U \cos(\omega t + \varphi_i - 90^\circ) = \sqrt{2} \frac{1}{\omega C} I \cos(\omega t + \varphi_i - 90^\circ) \text{ V}$ ，其对应的有效值相量为 $\dot{U} = U \angle (\varphi_i - 90^\circ) = \frac{1}{\omega C} I \angle (\varphi_i - 90^\circ) \text{ V}$ 。因此，电容上的有功功率和无功功率分别为

$$\begin{cases} P_C = UI \cos(-90^\circ) = 0 \\ Q_C = UI \sin(-90^\circ) = -UI = -\frac{1}{\omega C} I^2 \end{cases} \quad (4.6-6)$$

4.6.2 视在功率和复功率

1. 视在功率和功率因数

图 4.6-1 所示单口网络端口电压和电流有效值的乘积定义为单口网络的视在功率，用 S 表示，单位为伏安 ($\text{V} \cdot \text{A}$)，即

$$S = UI \quad (4.6-7)$$

视在功率常用来表示电气设备的功率容量，电气设备的额定电压与额定电流的乘积为该电气设备的视在功率，也是该设备可能提供的最大有功功率。而实际上电气设备的有功功率小于视在功率，定义有功功率与视在功率之比为功率因数，用 λ 表示，即

$$\lambda = \frac{P}{S} = \cos \varphi_Z \quad (4.6-8)$$

其中， φ_Z 为单口网络端口电压和电流的相位差，也称功率因数角。由于无法通过功率因数来判断阻抗角（功率因数角）的正负，一般通过在功率因数后标注“超前”来说明该端口电流超前电压，即 $-90^\circ \leq \varphi_Z < 0$ 时功率因数需标注“超前”；通过在功率因数后标注“滞后”来说明该端口电流滞后电压，即 $0^\circ < \varphi_Z \leq 90^\circ$ 时功率因数需标注“滞后”。

单口网络有功功率、无功功率、视在功率和功率因数之间的相互关系为

$$\begin{cases} S = \sqrt{P^2 + Q^2} \\ P = S \cos \varphi_Z \\ Q = S \sin \varphi_Z \\ \varphi_Z = \arctan \frac{Q}{P} \end{cases} \quad (4.6-9)$$

例 4.6-1 日光灯电路（含镇流器）的电压有效值为 $U = 220\text{V}$ ，电流有效值为 $I = 0.4\text{A}$ ，有功功率为 $P = 30\text{W}$ ，求该电路的视在功率、功率因数、和无功功率。

解 $S = UI = 220 \times 0.4 = 88\text{V} \cdot \text{A}$

由于镇流器为感性的，因此该电路整体呈感性，即 $\varphi_Z > 0$ ，因此

$$\lambda = \frac{P}{S} = \frac{30}{88} = 0.34 (\text{滞后})$$

可得 $\varphi_Z = \arccos 0.34 = 70.1^\circ$ 。

$$Q = S \sin \varphi_Z = 88 \sin 70.1^\circ = 82.7 \text{ var}$$

或者

$$Q = \sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{88^2 - 30^2} = 82.7 \text{ var}$$

2. 复功率

定义单口网络电压相量 \dot{U} 和电流相量 \dot{I} 的共轭 \dot{I}^* 的乘积为复功率，用 \tilde{S} 表示，单位为伏安 ($\text{V} \cdot \text{A}$)，即

$$\begin{aligned} \tilde{S} &= \dot{U} \dot{I}^* = U \angle \varphi_u I \angle (-\varphi_i) = UI \angle (\varphi_u - \varphi_i) \\ &= UI \angle \varphi_Z \\ &= S \angle \varphi_Z \\ &= P + jQ \end{aligned} \quad (4.6-10)$$

复功率是一个辅助计算功率的复数，不是相量，其实部为单口网络的有功功率，虚部为单口网络的无功功率。

例 4.6-2 如图 4.6-3 (a) 所示单口网络，已知端口电压为 $u(t) = \sqrt{2} \cos(2t) \text{ V}$ ，求该单口网络的 P 、 Q 、 \tilde{S} 和 λ 。

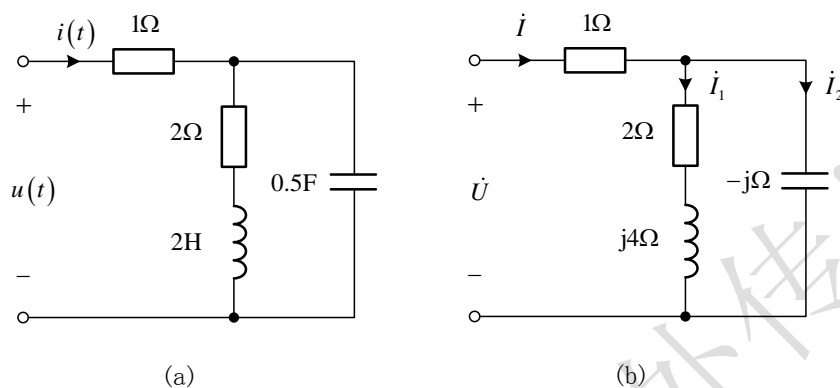


图 4.6-3 例 4.6-2 的图

解 相量域电路如图 4.6-3 (b) 所示，其中 $u(t) = \sqrt{2} \cos(2t) \text{ V} \leftrightarrow \dot{U} = 1 \angle 0^\circ \text{ V}$ ，可得

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{1 + (2 + j4) // (-j)} = \frac{1 \angle 0^\circ}{1.687 \angle -46.85^\circ} = 0.593 \angle 46.85^\circ \text{ A}$$

$$\tilde{S} = \dot{U} \dot{I}^* = 1 \angle 0^\circ \times 0.593 \angle -46.85^\circ = 0.593 \angle -46.85^\circ = (0.406 - j0.433) \text{ V} \cdot \text{A}$$

因此

$$P = 0.406 \text{ W}, \quad Q = -0.433 \text{ var}$$

该单口网络的电流超前电压，因此该单口网络的功率因数为

$$\lambda = \frac{P}{S} = \frac{P}{|\tilde{S}|} = \frac{0.406}{0.593} = 0.68 (\text{超前})$$

也可以通过单口网络内各元件的有功功率和无功功率的代数和来计算总的有功功率和无功功率。由分流公式可得

$$\dot{I}_1 = \frac{-j}{(2 + j4) + (-j)} \dot{I} = 0.165 \angle -99.46^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{2 + j4}{(2 + j4) + (-j)} \dot{I} = 0.736 \angle 53.98^\circ \text{ A}$$

可得

$$P_{1\Omega} = I^2 \times 1 = 0.593^2 \times 1 = 0.352 \text{ W}$$

$$P_{2\Omega} = I_1^2 \times 2 = 0.165^2 \times 2 = 0.055 \text{ W}$$

$$Q_L = I_1^2 \times 4 = 0.165^2 \times 1 = 0.109 \text{ W}$$

$$Q_C = I_2^2 \times (-1) = 0.736^2 \times (-1) = -0.542 \text{ W}$$

单口网络中的有功功率和无功功率为

$$P = P_{1\Omega} + P_{2\Omega} = 0.407 \text{ W}, \quad Q = Q_L + Q_C = -0.433 \text{ var}$$

3. 功率因数的提高

由于工作原理的需要，电力系统中的负载一般都是功率因数较低的感性负载，例如电动机等。一方面，功率因数过低会造成设备容量的浪费；另一方面，由于 $I = \frac{P}{U \cos \varphi_z}$ ，当负

载的工作电压和有功功率固定时，功率因数越低，会使线路上的电流越大，从而造成线路上的功率损耗。

一般通过并联电容的方法来提高感性负载的功率因数。一方面，并联形式不会改变感性负载的工作电压，保证了负载的正常工作；另一方面，感性负载的无功功率为正值，而电容的无功功率为负值，通过并联电容可以使整体电路的无功功率数值减小，从而减小视在功率，在负载有功功率不变的情况下，提高功率因数。

如图 4.6-4 所示，虚线框内为感性负载，利用并联电容来提高功率因数，并联电容前后 \dot{U} 不变，设 $\dot{U} = U \angle 0^\circ$ 。由于并联电容前后感性负载上的电压不变，因此， \dot{I}_1 和感性负载的有功功率和无功功率也不变。

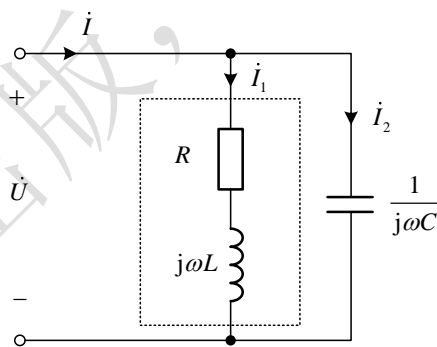


图 4.6-4 功率因数的提高

未并联电容时， $\dot{I} = \dot{I}_1$ 且感性负载的阻抗角为 φ_1 ($0 < \varphi_1 < 90^\circ$)，功率因数为 $\lambda_1 = \cos \varphi_1$

(滞后)。并联电容后， \dot{I}_2 超前 \dot{U} 相位 90° ，由 KCL 可知 $\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$ ，若 $I_2 < I_1 \sin \varphi_1$ ，则 \dot{I}

超前 \dot{U} 相位 φ_2 ，且 $0 < \varphi_2 < \varphi_1$ ，因此，并联电容后的功率因数为 $\lambda_2 = \cos \varphi_2$ (滞后) $> \lambda_1$ ，

可见，功率因数提高了，如图 4.6-5 (a) 所示。

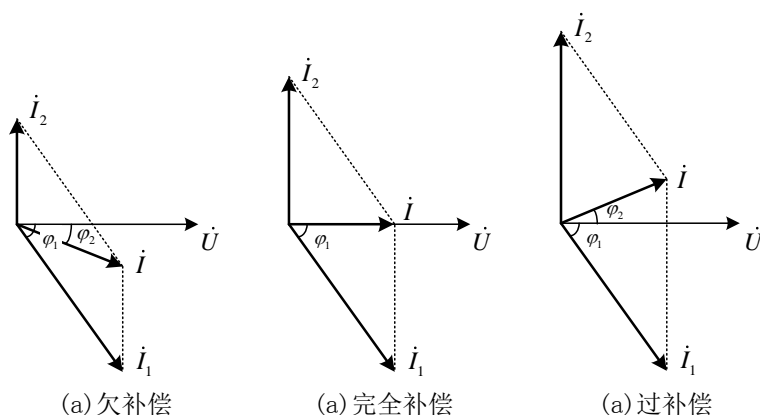


图 4.6-5 三种补偿情况

并联电容不影响感性负载的正常工作，即并联电容前后感性负载的有功功率和无功功率不变，因此

$$Q_L = P \tan \varphi_1$$

并联电容后整体负载中的无功功率为

$$Q = Q_C + Q_L = P \tan \varphi_2$$

可得

$$Q_C = Q - Q_L = P(\tan \varphi_2 - \tan \varphi_1)$$

又由于

$$Q_C = -\frac{1}{\omega C} I_2^2 = -\frac{1}{\omega C} (\omega C U)^2 = -\omega C U^2$$

因此，功率因数角(阻抗角)为 φ_1 的感性负载提高功率因数到功率因数角(阻抗角)为 φ_2 ，所需并联电容的大小为

$$C = \frac{P(\tan \varphi_1 - \tan \varphi_2)}{\omega U^2} \quad (4.6-11)$$

采用并联电容来提高功率因数，可分为以下三种情况：

(1) 当 $|Q_C| < Q_L$ 时， $Q > 0$ ， $\lambda_2 < 1$ （滞后），整体负载仍为感性，称为欠补偿，相量图如图 4.6-5 (a) 所示。

(2) 当 $|Q_C| = Q_L$ 时， $Q = 0$ ， $\lambda_2 = 1$ ，整体负载呈纯阻性，称为完全补偿，相量图如图 4.6-5 (b) 所示。

(3) 当 $|Q_C| > Q_L$ 时， $Q < 0$ ， $\lambda_2 < 1$ （超前），整体负载呈容性，称为过补偿，相量图如图 4.6-5 (c) 所示。

例 4.6-3 感性负载如图 4.6-6 所示，利用电阻为 0.1Ω 的输电线供电，负载电压的有效值为 220V，电源角频率为 $\omega = 314\text{rad/s}$ 。为使功率因数提高到 0.9（滞后）需要并联多大的电

容？并联电容前后输电线的功率损耗分别为多大？

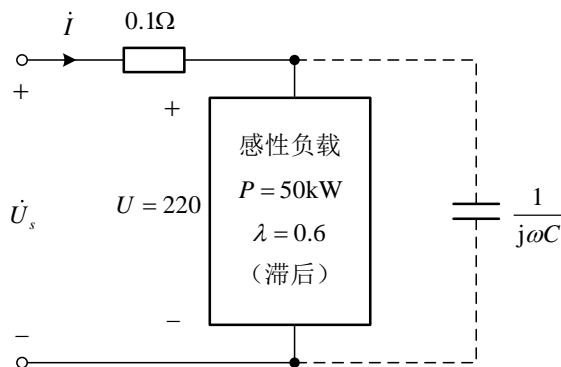


图 4.6-6 例 4.6-3 的图

解 (1) 并联电容前

$$I_{\text{前}} = \frac{P}{U\lambda} = \frac{50 \times 10^3}{220 \times 0.6} = 378.79 \text{ A}$$

因此，并联电容前 0.1Ω 输电线的功率损耗为

$$P_{0.1\text{前}} = 0.1 I_{\text{前}}^2 = 0.1 \times 378.79^2 = 14.35 \text{ kW}$$

感性负载的功率因数角为 $\varphi_1 = \arccos(0.6) = 53.13^\circ$ 。

(2) 并联电容后功率因数为 0.9 (滞后)，因此，整体负载的功率因数角为

$$\varphi_2 = \arccos(0.9) = 25.84^\circ$$

可得

$$C = \frac{P(\tan \varphi_1 - \tan \varphi_2)}{\omega U^2} = \frac{50 \times 10^3 (\tan 53.13^\circ - \tan 25.84^\circ)}{314 \times 220^2} = 2.793 \text{ mF}$$

$$I_{\text{后}} = \frac{P}{U\lambda_2} = \frac{50 \times 10^3}{220 \times 0.9} = 252.53 \text{ A}$$

因此，并联电容后 0.1Ω 输电线的功率损耗为

$$P_{0.1\text{后}} = 0.1 I_{\text{后}}^2 = 0.1 \times 252.53^2 = 6.38 \text{ kW}$$

可见，功率因数提高后，输电线上的损耗减小了。

4.6.3 最大功率传输定理

最大功率传输定理研究负载满足什么条件时可以获得最大有功功率。在第二章中得出了直流纯电阻电路的最大功率传输条件，本节将给出正弦稳态电路的最大功率传输条件。将含正弦源的单口网络用戴维南等效电路来表示，如图 4.6-7 所示，其中 \dot{U}_{OC} 为其戴维南等效电压

源有效值相量， $Z_0 = R_0 + jX_0 = |Z_0| \angle \varphi_{Z_0}$ 为其等效阻抗，负载阻抗为 $Z_L = R_L + jX_L$

$= |Z_L| \angle \varphi_{Z_L}$ 。

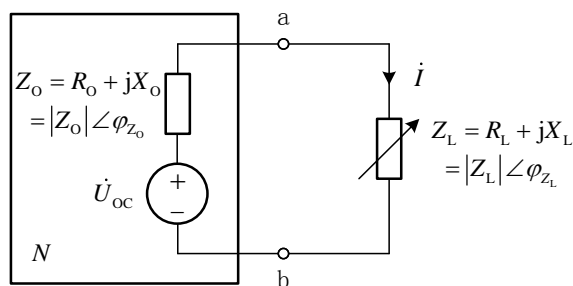


图 4.6-7 最大功率传输定理

1. 共轭匹配

负载阻抗 Z_L 的 R_L 和 X_L 均独立可变, 可得

$$\dot{i} = \frac{\dot{U}_{oc}}{Z_o + Z_L} = \frac{\dot{U}_{oc}}{(R_o + R_L) + j(X_o + X_L)}$$

电流 \dot{i} 的有效值为

$$I = \frac{U_{oc}}{\sqrt{(R_o + R_L)^2 + (X_o + X_L)^2}}$$

负载阻抗 Z_L 获得的有功功率为

$$P_L = I^2 R_L = \frac{R_L U_{oc}^2}{(R_o + R_L)^2 + (X_o + X_L)^2}$$

一般情况下, R_o 和 R_L 总是大于零的, 而 X_L 仅出现在分母中, 因此, 当 $X_o + X_L = 0$,

即 $X_L = -X_o$ 时, 对于任何 R_L , P_L 均最大, 此时 P_L 为

$$P_L = \frac{R_L U_{oc}^2}{(R_o + R_L)^2}$$

令 $dP_L / dR_L = 0$, 即

$$\frac{dP_L}{dR_L} = U_{oc}^2 \frac{R_o - R_L}{(R_o + R_L)^3} = 0$$

可得 $R_L = R_o$, 又有 $\left. \frac{d^2 P_L}{dR_L^2} \right|_{R_L=R_o} = -\frac{U_{oc}^2}{8R_o^3} < 0$, 因此在 $Z_L = R_o - jX_o$ 时, P_L 为最大值,

即负载获得最大有功功率的条件为

$$Z_L = R_L + jX_L = R_o - jX_o = Z_o^* \quad (4.6-12)$$

称为共轭匹配, 共轭匹配条件下, 负载获得的最大有功功率为

$$P_{L\max} = \frac{U_{OC}^2}{4R_O} \quad (4.6-13)$$

2. 模匹配

负载阻抗 Z_L 的 $|Z_L|$ 可变, 而 φ_{Z_L} 固定, 例如负载为一个可调电阻, 此时负载可以获得最大有功功率的条件为

$$|Z_L| = |Z_O| \quad (4.6-14)$$

称为模匹配, 模匹配条件下, 负载获得的最大有功功率为

$$P_{L\max} = \frac{U_{OC}^2 \cos \varphi_{Z_L}}{2|Z_O| \left[1 + \cos(\varphi_{Z_O} - \varphi_{Z_L}) \right]} \quad (4.6-15)$$

例 4.6-4 在如图 4.6-8 (a) 所示单口网络端接负载, 已知 $u_s(t) = 10\sqrt{2} \cos(5t) \text{ V}$, $C = 0.1 \text{ F}$, $R = 2 \Omega$, 计算共轭匹配和模匹配 (负载为纯电阻) 条件及各条件下负载可以获得的最大功率。

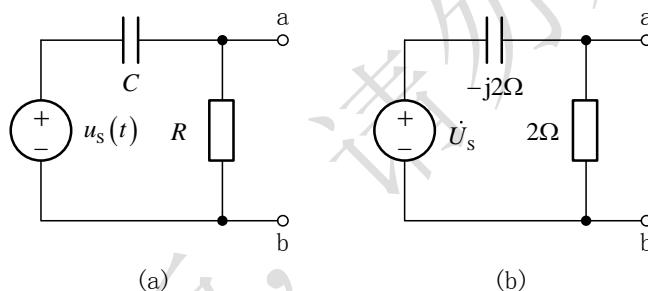


图 4.6-8 例 4.6-4 的图

解 相量域电路如图 4.6-8 (b) 所示, 其中 $\dot{U}_s = 10 \angle 0^\circ$ 。可得

$$\dot{U}_{OC} = \frac{2}{2-j2} \times 10 \angle 0^\circ = 5\sqrt{2} \angle 45^\circ \text{ V}$$

$$Z_O = 2 // (-j2) = \frac{2 \times (-j2)}{2-j2} = 1-j = \sqrt{2} \angle -45^\circ \Omega$$

(1) 共轭匹配

当 $Z_L = Z_O^* = (1+j) \Omega$ 时, 达到共轭匹配, 此时

$$P_{L\max} = \frac{U_{OC}^2}{4R_O} = \frac{(5\sqrt{2})^2}{4 \times 1} = 12.5 \text{ W}$$

(2) 模匹配

当 $|Z_L| = |Z_O| = \sqrt{2} \Omega$ 时, 达到模匹配, 此时 $\varphi_{Z_L} = 0$, 可得

$$P_{L_{\max}} = \frac{U_{OC}^2 \cos \varphi_{Z_L}}{2|Z_O| [1 + \cos(\varphi_{Z_O} - \varphi_{Z_L})]} = \frac{(5\sqrt{2})^2}{2 \times \sqrt{2} [1 + \cos(-45^\circ)]} = 10.36 \text{ W}$$

可见，由于共轭匹配更具有可调节性，因此共轭匹配条件下负载获得的有功功率更大。

4.7 磁耦合电路的正弦稳态分析

4.7.1 含互感电路的正弦稳态分析

互感线圈时域模型如图 4.7-1 (a) 所示，其时域 VAR 为

$$\begin{cases} u_1(t) = L_1 \frac{d}{dt} i_1(t) + M \frac{d}{dt} i_2(t) \\ u_2(t) = L_2 \frac{d}{dt} i_2(t) + M \frac{d}{dt} i_1(t) \end{cases} \quad (4.7-1)$$

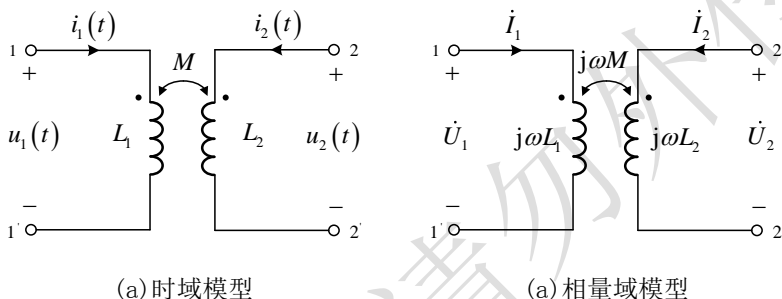


图 4.7-1 互感线圈的时域和相量域模型

其对应相量域模型如图 4.7-1 (b) 所示，相量域 VAR 为

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1 \end{cases} \quad (4.7-2)$$

例 4.7-1 将图 4.7-2 (a) 所示互感线圈用图 4.7-2 (b) 所示 T 型双口网络进行等效。

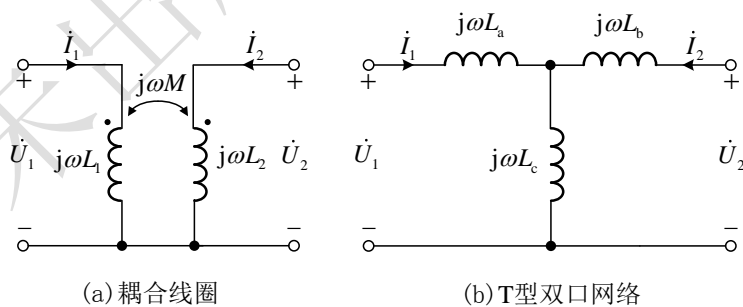


图 4.7-2 例 4.7-1 的图

解 列写图 4.7-2 (a) 的 VAR 方程，可得

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1 \end{cases}$$

列写图 4.7-2 (b) 的 VAR 方程，可得

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = j\omega L_a \dot{I}_1 + j\omega L_c (\dot{I}_1 + \dot{I}_2) = j\omega (L_a + L_c) \dot{I}_1 + j\omega L_c \dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = j\omega L_b \dot{I}_2 + j\omega L_c (\dot{I}_1 + \dot{I}_2) = j\omega L_c \dot{I}_1 + j\omega (L_b + L_c) \dot{I}_2 \end{cases}$$

由此可得, 若

$$\begin{cases} L_1 = L_a + L_c \\ L_2 = L_b + L_c \\ M = L_c \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} L_a = L_1 - M \\ L_b = L_2 - M \\ L_c = M \end{cases}$$

两个双口网络等效, 即其端口的 VAR 方程完全相同。

例 4.7-2 如图 4.7-3 所示含互感电路, 已知 $\dot{U}_s = 10\angle 0^\circ \text{V}$, 计算各支路电流。

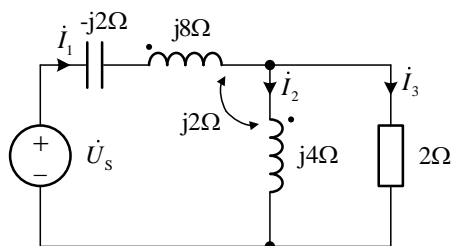


图 4.7-3 例 4.7-2 的图

解 列写 KCL 和 KVL 方程, 可得

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3 \\ -j2\dot{I}_1 + (j8\dot{I}_1 + j2\dot{I}_2) + (j4\dot{I}_2 + j2\dot{I}_1) = 10\angle 0^\circ \\ j4\dot{I}_2 + j2\dot{I}_1 = 2\dot{I}_3 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = 0.608 - j1.149 = 1.300\angle -62.1^\circ \text{A} \\ \dot{I}_2 = -0.811 - j0.135 = 0.822\angle -170.5^\circ \text{A} \\ \dot{I}_3 = 1.419 - j1.014 = 1.744\angle -35.5^\circ \text{A} \end{cases}$$

互感线圈利用电磁感应原理, 实现从一个回路到另一个回路的能量或者信号的传输。一般把与电源相连的叫初级线圈, 与负载相连的叫次级线圈, 能量通过互感线圈由电源传递给负载。若要考虑到电感上面的绕线电阻, 可在初级线圈和次级线圈分别串联一个小电阻来近似表示实际的变压器模型。

图 4.7-4 (a) 中初级和次级回路的 KVL 方程分别为

$$\begin{cases} \dot{U} = j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 \\ (j\omega M \dot{I}_1 + j\omega L_2 \dot{I}_2) + Z_L \dot{I}_2 = 0 \end{cases}$$

可得

$$\dot{U} = \left(j\omega L_1 + \frac{(\omega M)^2}{j\omega L_2 + Z_L} \right) \dot{I}_1$$

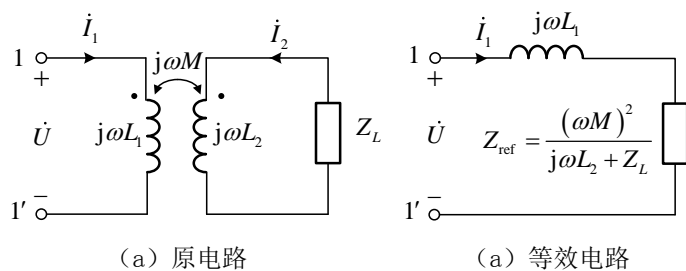


图 4.7-4 互感线圈电路的反映阻抗

所以，图 4.7-4 (a) 所示单口网络 1-1' 的等效阻抗为 $Z = j\omega L_1 + \frac{(\omega M)^2}{j\omega L_2 + Z_L}$ ，可以等效为

图 4.7-4 (b) 所示电路。

可见，在次级回路开路，或没有次级线圈，或没有互感时，图 4.7-4 (a) 所示单口网络的阻抗仅为初级线圈的等效阻抗 $j\omega L_1$ 。由于互感及次级回路的存在，相当于在初级回路增加一

部分阻抗 $\frac{(\omega M)^2}{j\omega L_2 + Z_L}$ ，这部分阻抗叫做次级回路在初级回路的反映阻抗，记作

$$Z_{\text{ref}} = \frac{(\omega M)^2}{j\omega L_2 + Z_L} \quad (4.7-3)$$

例 4.7-3 如图 4.7-5 所示电路，其中 $\dot{U}_s = 5\angle 0^\circ \text{V}$ ，求电流 \dot{I}_1 和 \dot{I}_2 。

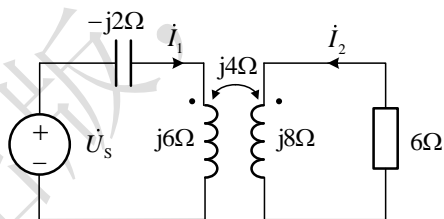


图 4.7-5 例 4.7-3 的图

解 次级回路在初级回路的反映阻抗为

$$Z_{\text{ref}} = \frac{(\omega M)^2}{j\omega L_2 + Z_L} = \frac{4^2}{j8 + 6} = (0.96 - j1.28)\Omega$$

可得

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_s}{-j2 + j6 + Z_{\text{ref}}} = \frac{5\angle 0^\circ}{-j2 + j6 + 0.96 - j1.28} = 0.577 - j1.635 = 1.733\angle -70.6^\circ \text{A}$$

次级回路的 KVL 为

$$(j8\dot{I}_2 + j4\dot{I}_1) + 6\dot{I}_2 = 0$$

可得

$$\dot{I}_2 = \frac{-j4}{6+j8} \dot{I}_1 = -0.577 + j0.385 = 0.693 \angle 146.3^\circ \text{ A}$$

4.7.2 含理想变压器电路的正弦稳态分析

理想变压器时域模型如图 4.7-6 (a) 所示, 其中 $1:n$ 为初级线圈与次级线圈的匝数比, 其时域 VAR 为

$$\begin{cases} \frac{u_1(t)}{u_2(t)} = \frac{1}{n} \\ \frac{i_1(t)}{i_2(t)} = -\frac{n}{1} \end{cases} \quad (4.7-4)$$

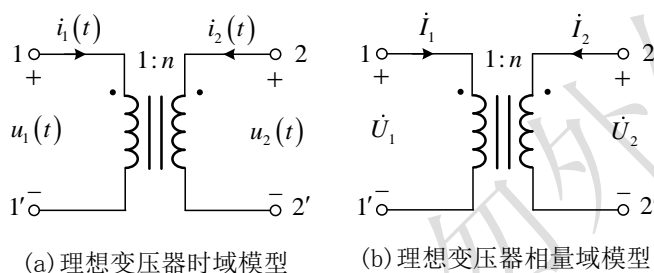


图 4.7-6 理想变压器时域及相量域模型

其对应的相量域模型如图 4.7-6 (b) 所示, 相量域 VAR 为

$$\begin{cases} \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \frac{1}{n} \\ \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} = -\frac{n}{1} \end{cases} \quad (4.7-5)$$

如图 4.7-7 (a) 所示, 在理想变压器次级线圈接负载 Z_L 构成次级回路。单口网络 1-1' 的等效阻抗为

$$Z = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{\dot{U}_2 / n}{-n \dot{I}_2} = -\frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} \frac{1}{n^2} = \frac{Z_L}{n^2}$$

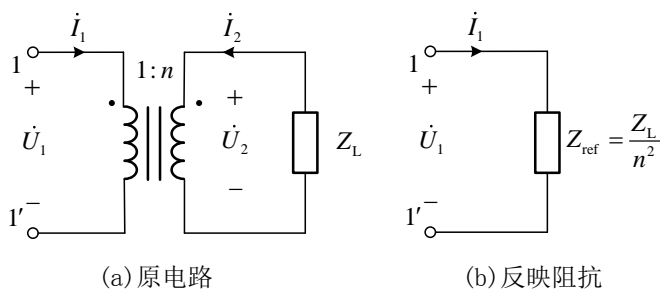


图 4.7-7 理想变压器的反映阻抗

在理想变压器的次级线圈接负载 Z_L , 相当于直接在初级线圈端口接阻抗大小为 $\frac{Z_L}{n^2}$ 的负

载, 称

$$Z_{\text{ref}} = \frac{Z_L}{n^2} \quad (4.7-6)$$

为理想变压器次级回路到初级回路的反映阻抗。

例 4.7-4 电路如图 4.7-8(a) 所示, 已知 $u_s(t) = 2\sqrt{2} \cos(2t) \text{ V}$, $R_s = 4\Omega$, $R_L = 100\Omega$, 问, 为使负载获得最大有功功率, n 应为多少? 负载能够获得的最大功率为多少?

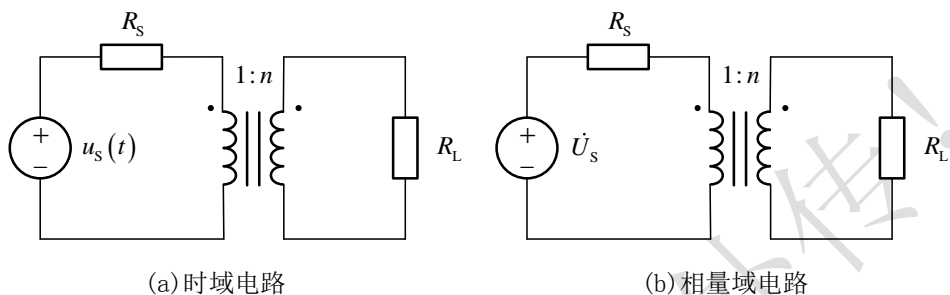


图 4.7-8 例 4.7-4 的图

解 在实际电路中, 经常利用理想变压器实现单口网络与负载之间的最大功率传输。图 4.7-8 (b) 为图 4.7-8 (a) 对应的相量域电路, 其中 $\dot{U}_s = 2\angle 0^\circ \text{ V}$ 。为实现最大功率传输, 需要满足

$$R_s = R_{\text{ref}} = \frac{R_L}{n^2}$$

即

$$4 = \frac{100}{n^2}$$

解得

$$n = 5$$

由于理想变压器为无耗元件, 因此

$$P_{L\text{max}} = \frac{U_s^2}{4R_s} = \frac{2^2}{4 \times 4} = 0.25 \text{ W}$$

习题 4

4-1 比较下列正弦量的相位关系。

(1) $u_1(t) = \cos(2t) \text{ V}$, $u_2(t) = \sqrt{2} \sin(2t + 45^\circ) \text{ V}$;

(2) $i_1(t) = -5\sqrt{2} \sin(2t) \text{ A}$, $i_2(t) = -3\sqrt{2} \cos(2t) \text{ A}$

4-2 写出下列正弦量所对应的有效值相量和最大值相量。

(1) $u_1(t) = \cos(2t) \text{ V}$;

(2) $u_2(t) = \sqrt{2} \sin(2t + 45^\circ) \text{ V}$;

(3) $i_1(t) = -5\sqrt{2} \sin(2t) \text{ A}$;

(4) $i_2(t) = -3\sqrt{2} \cos(2t) \text{ A}$

4-3 写出下列相量所对应的正弦量的表达式, 其中 $\omega = \pi \text{ rad/s}$ 。

(1) $\dot{U}_1 = \sqrt{2} \angle -45^\circ \text{ V}$;

(2) $\dot{U}_2 = (4 + j4) \text{ V}$;

(3) $\dot{U}_{3m} = (-4 + j4) \text{ V}$;

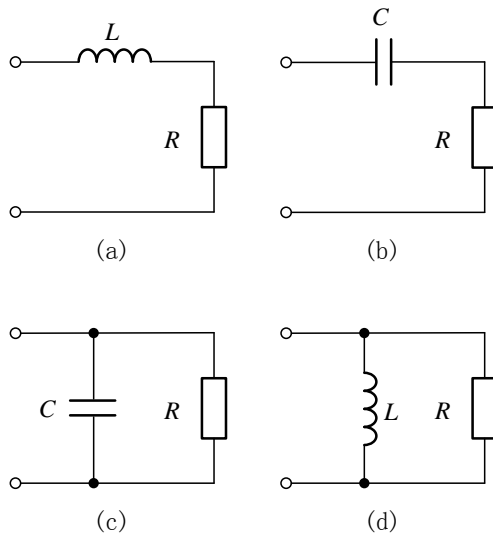
(4) $\dot{U}_{4m} = 4e^{j60^\circ} \text{ V}$

4-4 利用相量法计算下列各式。

(1) $\cos(2t) + \sin(2t)$;

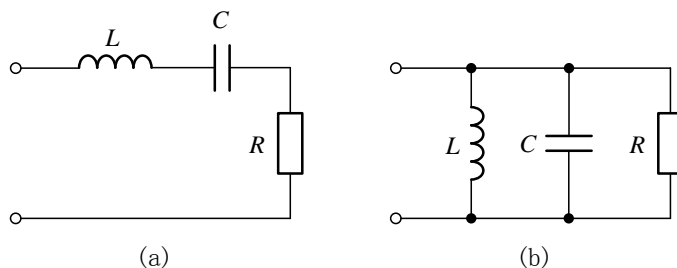
(2) $\sqrt{2} \cos(4t) - 3\sqrt{2} \sin(4t - 45^\circ)$

4-5 计算题图 4-5 所示各个单口网络的等效阻抗。



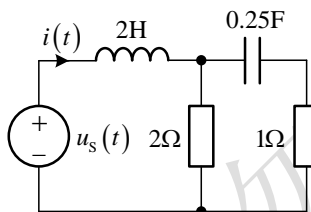
题图 4-5

4-6 计算题图 4-6 所示各个单口网络的等效阻抗。



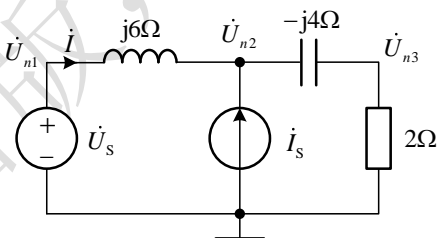
题图 4-6

4-7 如题图 4-7 所示电路，已知 $u_s(t) = 2\sqrt{2} \cos(2t) \text{ V}$ ，求电流 $i(t)$ 。



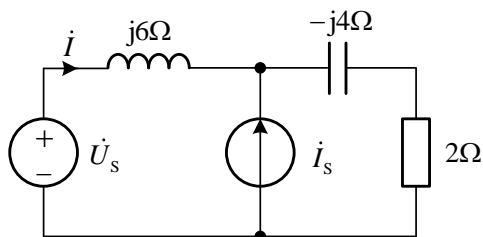
题图 4-7

4-8 题图 4-8 所示中， $\dot{U}_s = \sqrt{2} \angle 0^\circ \text{ V}$ ， $\dot{I}_s = 2 \angle 30^\circ \text{ A}$ ，利用节点电压法计算各节点电压及 \dot{I} 。



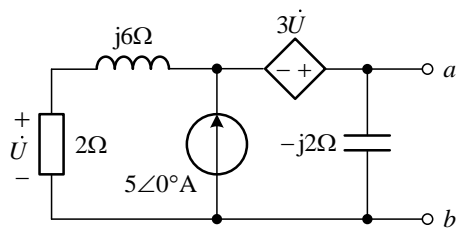
题图 4-8

4-9 利用叠加原理计算题图 4-9 所示电路中的电流 \dot{I} ，其中 $\dot{U}_s = \sqrt{2} \angle 0^\circ \text{ V}$ ， $\dot{I}_s = 2 \angle 30^\circ \text{ A}$ 。



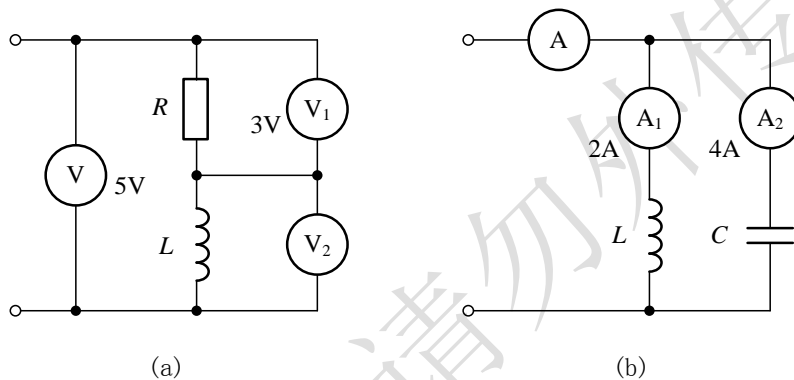
题图 4-9

4-10 计算题图 4-10 所示单口网络的戴维南等效电路。



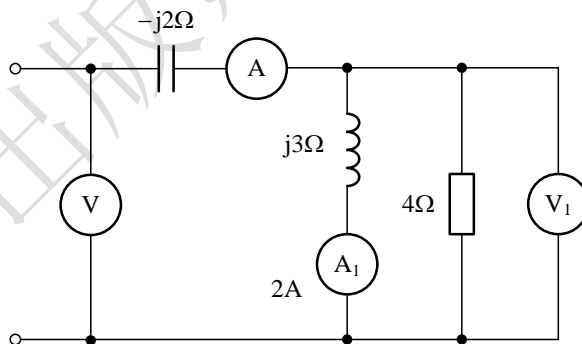
题图 4-10

4-11 求题图 4-11 所示交流电表 V_2 和 A 的读数（注：交流电表的示数为其测量的交流电压或交流电流的有效值）。



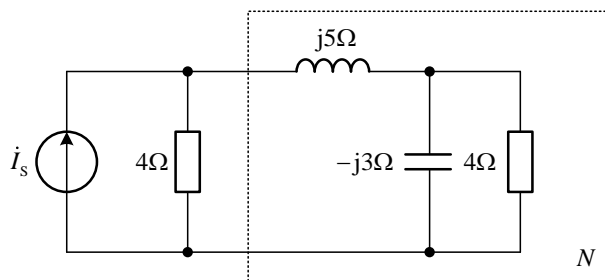
题图 4-11

4-12 求题图 4-12 中交流电表 V_1 、 V 和 A 的读数。



题图 4-12

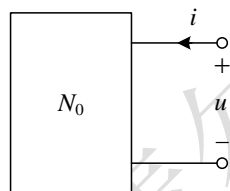
4-13 题图 4-13 所示电路中, $\dot{I}_S = 10\angle 0^\circ \text{A}$, 求虚线框内单口网络的有功功率、无功功率、复功率和功率因数。



题图 4-13

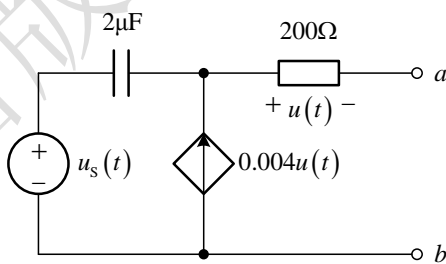
4-14 题图 4-14 所示无源单口网络，其端口电压和端口电流分别为 $u = 220\sqrt{2} \cos(314t) \text{ V}$ ， $i = 2\sqrt{2} \cos(314t - 30^\circ) \text{ A}$ ，求

- (1) 单口网络的等效阻抗；
- (2) 单口网络的 P 、 Q 和 λ ；
- (3) 若要将功率因数提高到 0.98（滞后），需并联多大的电容？



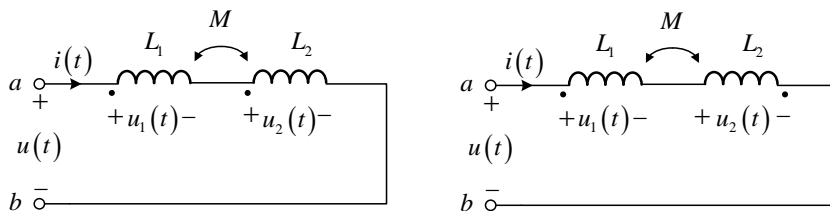
题图 4-14

4-15 题图 4-15 所示单口网络中， $u_s(t) = 20 \cos(1000t) \text{ V}$ ，在单口网络接负载 Z_L ，求 Z_L 为何值时可以获得最大有功功率，最大有功功率为多少？



题图 4-15

4-16 计算题图 4-16 所示单口网络的等效电感。

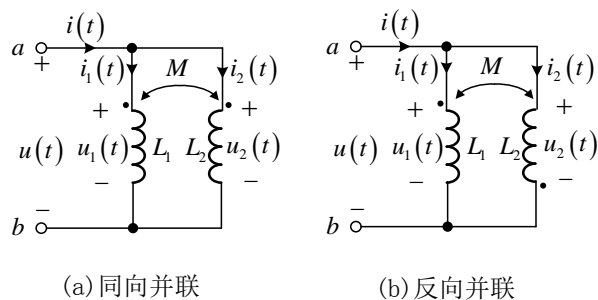


(a) 同向串联

(b) 反向串联

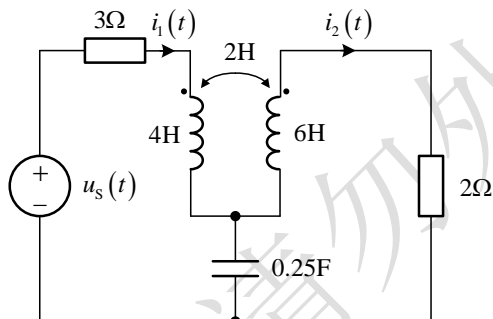
题图 4-16

4-17 计算题图 4-17 所示单口网络的等效电感。



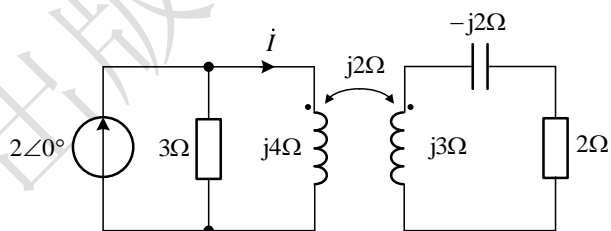
题图 4-17

4-18 题图 4-18 所示电路中, $u_s(t) = 5\sqrt{2} \cos(2t) \text{ V}$, 求 $i_1(t)$ 和 $i_2(t)$ 。



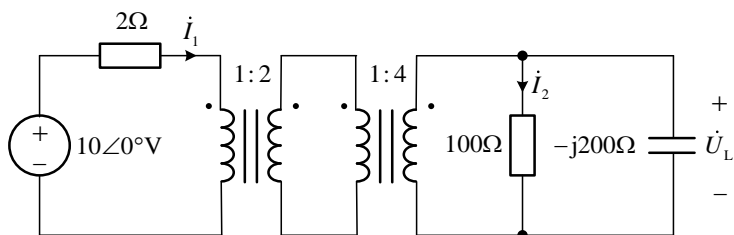
题图 4-18

4-19 计算题图 4-19 所示电路中的电流 \dot{I} 。



题图 4-19

4-20 求题图 4-20 所示电路中的 \dot{I}_1 、 \dot{I}_2 和 \dot{U}_L 。



题图 4-20

尚未出版，请勿外传！