杭州电子科技大学学生考试卷期末（ A）卷[免费]

<table>
<tr><td colspan="2">考试课程</td><td colspan="2">概率论与数理统计</td><td colspan="2">考试日期</td><td colspan="2">20010 年 01 月 日</td><td colspan="2">成 绩</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">课程号</td><td colspan="2">A0702140</td><td colspan="2">教师号</td><td colspan="2"></td><td colspan="2">任课教师姓名</td><td></td></tr>
<tr><td>考生姓名</td><td>参考答案</td><td>学号（8 位）</td><td></td><td colspan="2">年级</td><td></td><td colspan="2">专业</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>一</td><td>二</td><td>三</td><td>四</td><td>五</td><td>六</td><td>七</td><td>八</td><td>九</td><td>十</td><td>十一</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

一、选择题，将正确答案填在括号内（每小题 3 分，共 12 分）

1．设 A,B 为随机事件，则下列结论中正确的是 （ C ）

A． $P(AB)=P(A)P(B)$ B． $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

C． $P(A\cup B)=1-P(\overline{A}\cap\overline{B})$ D． $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$

2． X 与 Y 不相关，则与之等价的条件是 (B).

（A） $D(XY)=D(X)D(Y)$； (B) $D(X+Y)=D(X-Y)$；

（C） $D(XY)\neq D(X)D(Y)$； （D） $D(X+Y)\neq D(X-Y)$.

3．设 X 与 Y 相互独立， X 与 Y 的分布律相同，为

X（或 Y）	0	1
P	0.3	0.7

则必有(D).

（A） $X=Y$； (B) $P(X=Y)=1$ ；

（C） $P(X=Y)=0$； （D）A，B，C 都不对 .

4．在假设检验中，记 H_0 为原假设， H_1 为备择假设，则显著性水平 α 是指（ C ）.

A． $P\{$接受 $H_0|H_0$ 为假$\}=\alpha$； B． $P\{$接受 $H_1|H_1$ 为假$\}=\alpha$

C． $P\{$拒绝 $H_0|H_0$ 为真$\}=\alpha$； D． $P\{$拒绝 $H_1|H_1$ 为真$\}=\alpha$

二、填空题（每小题 3 分，共 12 分）

1． 10 个产品中有 3 个不合格品和 7 个合格品，从中任取 2 只，其中至少有 1 个不合格

品的概率是$\underline{\quad \frac{7}{15} \quad}$（或$1-\frac{C_7^2}{C_{10}^2}$ ）$\underline{\qquad}$.

2．. 设 $P(A)=0.4, P(A\cup B)=0.7$，当 A，B 互不相容时，$P(B)=\underline{\quad 0.3 \quad}$ ，当 A，B 相互独立时，$P(B)=\underline{\quad 0.5 \quad}$.

3．设 $X\sim b(n,p)$，且 $E(X)=6, D(X)=3.6$，则 $n=\underline{\quad 15 \quad}$ ， $p=\underline{\quad 0.4 \quad}$.

4. 设 X_1,X_2,X_3,X_4,X_5 是取自正态总体 $X\sim N(0,\sigma^2)$ 的一个样本，如果 $\frac{a(X_1+X_2)}{\sqrt{X_3^2+X_4^2+X_5^2}}$ 服从 t 分布，则 $a=\underline{\sqrt{\frac{3}{2}}}$

三、(每小题 4 分，共 8 分) 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases} ax+b, & 0<x<1 \\ 0, & else \end{cases}$，

又已知 $P\{X<\frac{1}{3}\}=P\{X>\frac{1}{3}\}$，(1) 求常数 a 和 b；(2) 求 X 的分布函数 $F(x)$

解 (1) 因为 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$ （1 分）

所以 $\int_0^1 (ax+b)dx=1$

又 $P\{X<\frac{1}{3}\}=P\{X>\frac{1}{3}\}$ 知 $\int_0^{\frac{1}{3}}(ax+b)dx=\frac{1}{2}$

得 $\frac{a}{2}+b=1$，$\frac{a}{18}+\frac{b}{3}=\frac{1}{2}$ （3 分）

解得 $a=-\frac{3}{2}, b=\frac{7}{4}$ （4 分）

(2) X 的分布函数 $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ （2 分）

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ -\frac{3}{4}x^2+\frac{7}{4}x, & 0<x<1 \\ 1, & x\ge 1 \end{cases}$$ （4 分）

四．(每小题 4 分，共 12 分)设二维离散型随机变量（X，Y）的联合分布律如下

$X \backslash Y$	0	1	2
0	0.1	0.05	0.25
1	0	0.1	0.2
2	0.2	0.1	0

(1) 求 X 的边缘分布律;

(2) 计算条件概率 $P\{X+Y\le 2|X\ge 1\}$

(3) 计算 $E[(2X-3Y)^2]$.

解 (1) X 的分布律为

X	0	1	2
P	0.4	0.3	0.3

———————— 4 分

（2）$P\{X+Y\le 2|X\ge 1\}=\dfrac{P\{X+Y\le 2且X\ge 1\}}{P\{X\ge 1\}}$ ———————— 2 分

$=\dfrac{0.3}{0.6}=\dfrac{1}{2}$ ———————— 4 分

(3) $E[(2X-3Y)^2]=E(4X^2+9Y^2-12XY)$

$=4E(X^2)+9E(Y^2)-12E(XY)$ ———————— 2 分

$E(X^2)=0^2\times 0.4+1^2\times 0.3+2^2\times 0.3=1.5$

$E(Y^2)=0^2\times 0.3+1^2\times 0.25+2^2\times 0.45=2.05$

$E(XY)=0\times 0\times 0.1+0\times 1\times 0.05+0\times 2\times 0.25+1\times 0\times 0+1\times 1\times 0.1+$
$1\times 2\times 0.2+2\times 0\times 0.2+2\times 1\times 0.1+2\times 2\times 0$

$=0.7$

$E[(2X-3Y)^2]=4\times 1.5+9\times 2.05-12\times 0.7$

$=16.05$ ———————— 4 分

五.（本题 8 分）设各零件的重量都是随机变量，它们相互独立，且服从相同的分布，其数学期望为 $E(x)=0.5\,\mathrm{kg}$ ，均方差为 $\sqrt{D(X)}=0.1\,\mathrm{kg}$ ，问 5000 只零件的总重量超过 $2510\,\mathrm{kg}$ 的概率约为多少？（结果用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 表示）

解 记 $X_i(i=1,2,\cdots,5000)$ 为第 i 只零件的重量，由题意 $E(X_i)=0.5$, $D(X_i)=0.1^2$

所求概率 $P\{\sum_{i-1}^{5000}X_i>2510\}=1-P\{\sum_{i-1}^{5000}X_i\le 2510\}$ ————2 分

$=1-P\{(\dfrac{\sum_{i=1}^{5000}X_i-5000\cdot 0.5}{\sqrt{5000}\cdot 0.1}\le\dfrac{2510-5000\cdot 0.5}{\sqrt{5000}\cdot 0.1}\}$ —— 6 分

$\approx 1-\Phi(\sqrt{2})$ ———————— 8 分

六.（每小题 4 分，共 12 分）设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} Ce^{-y}, 0<x<y \\ 0, \text{其它} \end{cases}$$

（1）求常数C；

（2）求关于X和关于Y的边缘概率密度； 并问X与Y是否相互独立?

（3）求概率$P\{X+Y<1\}$.

解 （1）由$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1$得 ———————— 1 分

$\int_0^{+\infty}dy\int_0^y Ce^{-y}dx=1$（或$\int_0^{+\infty}dx\int_x^{+\infty}Ce^{-y}dy=1$） ———————— 2 分

$\int_0^{+\infty}dy\int_0^y Ce^{-y}dx=C\int_0^{+\infty}ye^{-y}dy=C=1\Rightarrow C=1$ ———————— 4 分

（或$\int_0^{+\infty}dx\int_x^{+\infty}Ce^{-y}dy=C\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=C=1\Rightarrow C=1$）

（2）$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$ ———————— 1 分

$x>0$时

$=\int_x^{+\infty}e^{-y}dy$

e^{-x} ———————— 2 分

$y>0$时

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$

$=\int_0^y e^{-y}dx=ye^{-y}$ ———————— 3 分

$$f_X(x)=\begin{cases} e^{-x}, x>0 \\ 0, x\le 0 \end{cases}, f_Y(y)=\begin{cases} ye^{-y}, y>0 \\ 0, y\le 0 \end{cases}$$

当$0<x<y$时$f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$

所以X与Y不相互独立. ———————— 4 分

（3）$P\{X+Y<1\}=\iint\limits_{x+y<1}f(x,y)dxdy$ ———————— 1 分

$=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_x^{1-x}e^{-y}dy$ ———————— 2 分

$=1+\frac{1}{e}-\frac{2}{\sqrt{e}}$ ———————— 4 分

七、(本题 10 分)对某种新式导弹的最大飞行速度 X 进行 16 次独立测试,测得样本均值 $\overline{x}=425m/s$,样本标准差 $s=3.8$。根据以往经验,可以认为最大飞行速度服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,其中 μ,σ^2 均未知.试对检验水平 $\alpha=0.05$ 求总体数学期望 μ 的置信区间 (精确到第二位小数。 其中 $t_{0.05}(15)=1.7531, t_{0.05}(16)=1.7459$, $t_{0.025}(15)=2.1315$, $t_{0.025}(16)=2.1199$)。

解　置信区间为$(\overline{x}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}},\overline{x}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}})$ ———————— 7 分

$t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}=t_{0.025}(15)\frac{3.8}{\sqrt{16}}=2.1315\times\frac{3.8}{4}=2.02$ ————————9 分

从而置信区间为(422.98, 427.02). ———————————— 10 分

八、(每小题 5 分，共 10 分）设 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 为取自总体 X 的一组样本， X 的概率密度函数为

$$f(x,\theta)=\begin{cases}\theta x^{\theta-1} & 0\le x\le 1\\ 0 & 其他\end{cases}$$，其中 $\theta>0$ 是参数，试求

（1）　参数 θ 的矩估计量;（2）参数 θ 的最大似然估计量.

解 (1) $E(X)=\int_0^1 x\theta x^{\theta-1}dx=\int_0^1\theta x^{\theta}dx=\frac{\theta}{\theta+1}$, ———————— 2 分

令 $E(X)=\overline{X}$,则 $\hat{\theta}=\frac{\overline{X}}{1-\overline{X}}$ ———————— 5 分

(2) $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\theta X_i^{\theta-1}=\theta^n(\prod_{i=1}^{n}X_i)^{\theta-1}$, ———————— 2 分

则 $\ln L(\theta)=n\ln\theta+(\theta-1)\sum_{i=1}^{n}\ln X_i$

于是令 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{n}{\theta}+\sum_{i=1}^{n}\ln X_i=0$ ———————— 4 分

即 $\hat{\theta}=-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$ 为所求的最大似然估计. ———————— 5 分

得分	

九、(本题 8 分) （10%）某种导线，要求其电阻标准差不超过 0.005Ω.今在一批导线中取样品 9 根,测得 $s=0.007\Omega$,设总体为正态分布,问在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下能认为这批导线电阻的标准差显著地偏大吗？

($\chi^2_{0.05}(8)=15.507, \chi^2_{0.05}(9)=16.909, \chi^2_{0.025}(8)=17.535, \chi^2_{0.025}(9)=19,023$)

解 这里 $\alpha=0.05$, $n=9$

由题意需检验假设 $H_0:\sigma^2\le 0.05^2$, 备择假设 $H_1:\sigma^2>0.05^2$ ——— 2 分

拒绝域 $\dfrac{(n-1)s^2}{{\sigma_0}^2}\ge\chi^2_\alpha(n-1)$ ——————— 4 分

即 $\dfrac{8s^2}{0.005^2}\ge 15.507$

因 $\dfrac{8s^2}{0.005^2}=\dfrac{8\times 0.007^2}{0.05^2}=15.608>15.507$

故在拒绝域内（即拒绝 H_0 ）, 可以认为这批导线电阻的标准差显著地偏大。——— 8 分

十、（本题 4 分）设总体 X 具有概率密度 $f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{3}{\theta^3}x^2, & 0\le x\le\theta\\ 0, & 其它\end{cases}$, 其中 $\theta>0$ 是未知参数， $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为取自总体的样本， $\hat{\theta}=C\cdot\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$ 是 θ 的一个估计量。试确定常数 C，使 $\hat{\theta}$ 成为 θ 的无偏估计。

解 令 $Y=\max\{X_1,\cdots,X_n\}$，则

$$F_{\mathrm{Y}}(y)=P\{Y\le y\}=P\{X_1\le \mathrm{y},\cdots,X_n\le y\}=\prod_{i=1}^{n}F_X(y)={F_X}^n(y)$$

$$f_Y(y)=nf_X(y){F_X}^{n-1}(y)$$

$$F_X(y)=\begin{cases}0, y<0\\ \int_0^y\dfrac{3}{\theta^3}x^2dx, 0\le y\le\theta\\ 1, y\ge\theta\end{cases}=\begin{cases}0, y<0\\ \dfrac{y^3}{\theta^3}, 0\le y\le\theta\\ 1, y\ge\theta\end{cases}$$

从而

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{3n}{\theta^{3n}}y^{3n-1},0\le y\le\theta\\ 0,其它\end{cases}$$ ————————————— 2 分

$$E(\hat{\theta})=CE(Y)=C\int_0^{\theta}\frac{3n}{\theta^{3n}}y^{3n}dy=C\cdot\frac{3n}{3n+1}\theta$$

$\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计时有 $E(\hat{\theta})=\theta$，从而 $C=\dfrac{3n+1}{3n}$。 ————————————— 4 分

十一、（本题 4 分）设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim N(\mu,\sigma_1^2)$， $Y\sim N(\mu,\sigma_2^2)$，求 $E(|X-Y|)$ 和 $D(|X-Y|)$。

解 记 $Z=X-Y$，则 $Z\sim N(0,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$，从而

$$E(|X-Y|)=E(|Z|)$$

$$=\int^{+\infty}\frac{|x|}{\sqrt{\quad}}\exp(-\frac{x^2}{2(\quad)})dx$$

$$=\sqrt{\frac{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}{\quad}}$$

$$E(Z^2)=\int^{\infty}\frac{x}{\sqrt{\quad}}\exp(-\frac{x}{2(\quad)})dx$$

$$=\sigma_1^2+\sigma_2^2$$

$$D(|X-Y|)=E(Z^2)-E^2(Z)$$

$$=(1-\frac{2}{\quad})(\sigma_1^2+\sigma_2^2)$$