第四章 线性电路的正弦稳态分析

- 4.1 正弦交流电基本概念
- 4.2 正弦量的相量表示
- 4.3 基尔霍夫定律的相量形式
- 4.4 无源单口网络的阻抗、导纳及等效变换
- 4.5 正弦稳态电路的相量分析法
- 4.6正弦稳态电路的功率
- 4.7 磁耦合电路的正弦稳态分析

回顾

- 正弦交流电基本概念
- 正弦量的相量表示

本次课学习内容

- 基尔霍夫定律的相量形式
- 无源单口网络的阻抗、导纳及等效变换

(2) 正弦量的微分和积分

时间域 微分/积分 关系 $\Longrightarrow$ 相量域 代数关系

$$i(t)=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\psi_i)=\mathrm{Re}(\sqrt{2}\dot{I}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})$$

微分

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{Re}(\sqrt{2}\dot{I}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})\right)$$

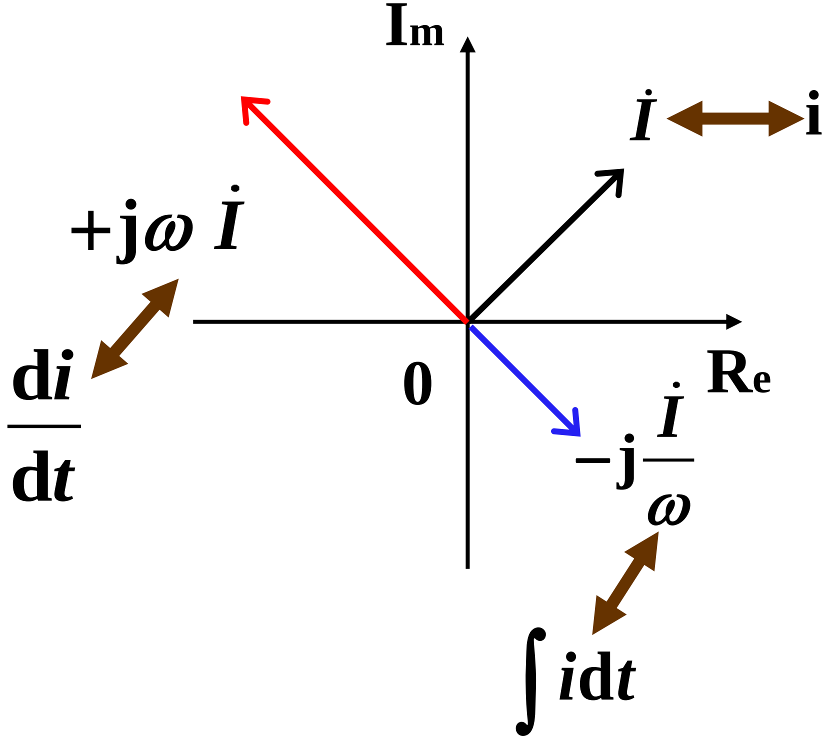
$$=\mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sqrt{2}\dot{I}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})\right)$$

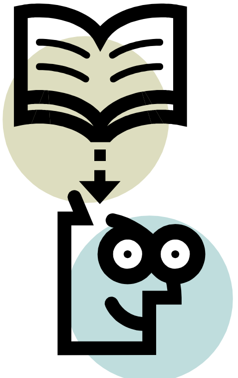
$$=\mathrm{Re}(\sqrt{2}\,\mathrm{j}\omega\dot{I}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})$$

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\rightarrow \mathrm{j}\omega\dot{I}$$

“一乘就转”

积分 $\int i\mathrm{d}t\rightarrow\frac{\dot{I}}{\mathrm{j}\omega}$





例4. 2-1 已知 $u_1(t)=\sqrt{2}\sin(2t+45°)\text{V}$ $u_2(t)=2\sqrt{2}\cos(2t)\text{V}$

求 $2u_1(t)+u_2(t)$，$u_1(t)-u_2(t)$，$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_1(t)+u_2(t)$，并画出各相量图

解 u_1 和 u_2 为同频率正弦量，因此可以采用相量法进行分析

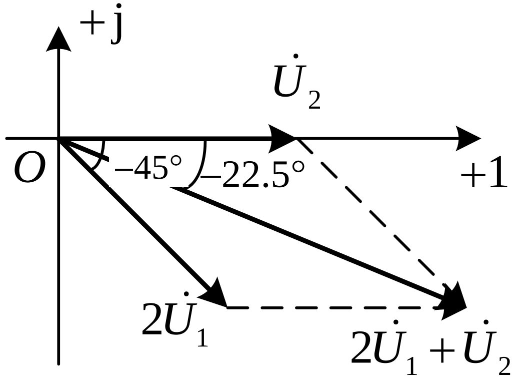
$$u_1(t)=\sqrt{2}\sin(2t+45°)=\sqrt{2}\cos(2t-45°)\text{V}\leftrightarrow\dot{U}_1=1\angle-45°\text{V}$$

$$u_2(t)=2\sqrt{2}\cos(2t)\text{V}\leftrightarrow\dot{U}_2=2\angle0°\text{V}$$

(1) $$2u_1+u_2\leftrightarrow2\dot{U}_1+\dot{U}_2=2\angle-45°\text{V}+2\angle0°$$

$$=3.414-\text{j}1.414=3.695\angle-22.5°\text{V}$$

$$2u_1+u_2=3.695\sqrt{2}\cos(2t-22.5°)\text{V}$$



例4. 2−1 已知 $u_1(t)=\sqrt{2}\sin(2t+45°)\text{V}$　$u_2(t)=2\sqrt{2}\cos(2t)\text{V}$

求 $2u_1(t)+u_2(t)$，$u_1(t)-u_2(t)$，$\dfrac{\text{d}}{\text{d}t}u_1(t)+u_2(t)$，并画出各相量图

解　u_1 和 u_2 为同频率正弦量，因此可以采用相量法进行分析

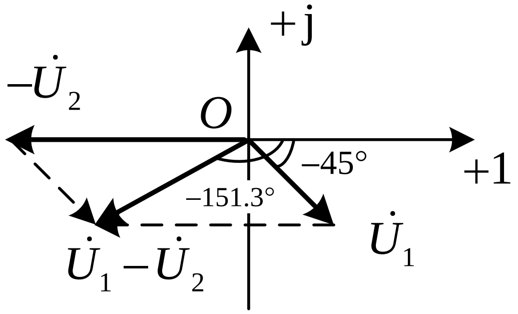
$$u_1(t)=\sqrt{2}\sin(2t+45°)=\sqrt{2}\cos(2t-45°)\text{V}\leftrightarrow\dot{U}_1=1\angle-45°\text{V}$$

$$u_2(t)=2\sqrt{2}\cos(2t)\text{V}\leftrightarrow\dot{U}_2=2\angle0°\text{V}$$

(2)

$$u_1-u_2\leftrightarrow\dot{U}_1-\dot{U}_2=1\angle-45°-2\angle0°=-1.293-\text{j}0.707=1.474\angle\text{-}151.3°\text{V}$$

$$u_1-u_2=1.474\sqrt{2}\cos(2t-151.325°)\text{V}$$



例4. 2-1 已知 $u_1(t)=\sqrt{2}\sin(2t+45°)\,\mathrm{V}$　$u_2(t)=2\sqrt{2}\cos(2t)\,\mathrm{V}$

求 $2u_1(t)+u_2(t)$，$u_1(t)-u_2(t)$，$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_1(t)+u_2(t)$，并画出各相量图

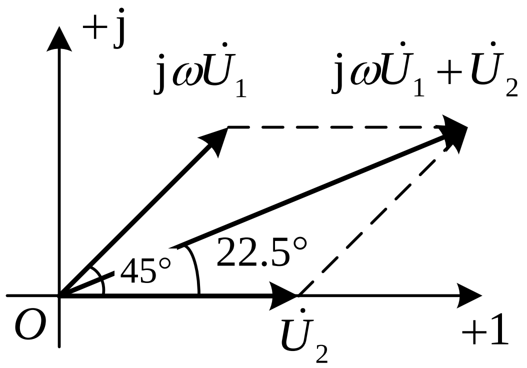
解　u_1 和 u_2 为同频率正弦量，因此可以采用相量法进行分析

$$u_1(t)=\sqrt{2}\sin(2t+45°)=\sqrt{2}\cos(2t-45°)\,\mathrm{V}\leftrightarrow\dot{U}_1=1\angle-45°\,\mathrm{V}$$

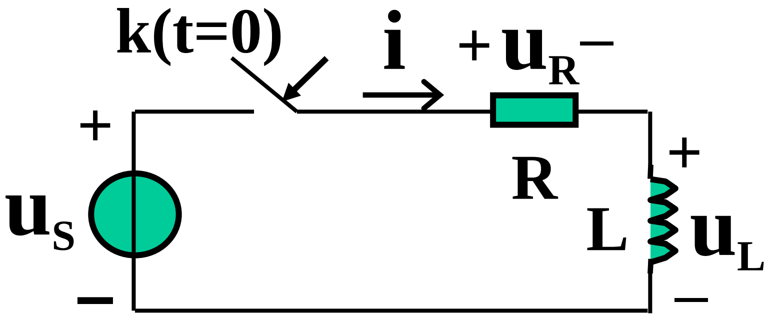
$$u_2(t)=2\sqrt{2}\cos(2t)\,\mathrm{V}\leftrightarrow\dot{U}_2=2\angle0°\,\mathrm{V}$$

(3)
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_1+u_2\leftrightarrow \mathrm{j}\omega\dot{U}_1+\dot{U}_2=\mathrm{j}2\times1\angle-45°+2\angle0°=3.695\angle22.5°\,\mathrm{V}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_1+u_2=3.695\sqrt{2}\cos(2t+22.5°)\,\mathrm{V}$$



(5) 相量的应用



$$u_S=\sqrt{2}U\cos(\omega t+\varphi_u)$$

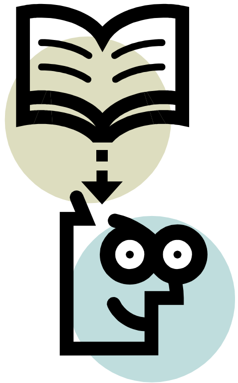
求：i(t), u_L(t) , u_R(t)的稳态解。

$$u_S(t)=Ri(t)+L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}\Rightarrow \dot{U}=R\dot{I}+\mathrm{j}\omega L\dot{I}$$

$$\dot{I}=\frac{\dot{U}}{R+\mathrm{j}\omega L}=\frac{U\angle\varphi_u}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}\angle\arctan\frac{\omega L}{R}}=\frac{U}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\angle(\varphi_u-\arctan\frac{\omega L}{R})$$

$$u_L=L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}\Rightarrow \dot{U}_L=\mathrm{j}\omega L\dot{I}=\frac{\omega LU}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\angle(\varphi_u-\arctan\frac{\omega L}{R}+90°)$$

$$u_R=Ri_L\Rightarrow \dot{U}_R=R\dot{I}=\frac{RU}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\angle(\varphi_u-\arctan\frac{\omega L}{R})$$



搞定！！！

求解顺序

- 列写 ODE
- 将ODE变换为复系数代数方程
- 求解复系数代数方程
- 反变换得到时间表达式

$$u(t)=Ri(t)+L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$i(t)=\frac{\sqrt{2}U}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\cos(\omega t+\varphi_u-\arctan\frac{\omega L}{R})$$

$$\dot{U}=R\dot{I}+\mathrm{j}\omega L\dot{I}$$

$$\dot{I}=\frac{\dot{U}}{R+\mathrm{j}\omega L}=\frac{U}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\angle(\varphi_u-\arctan\frac{\omega L}{R})$$

- 下面讨论如何直接列写复系数代数方程！！

用相量法求解正弦稳态电路

1 RLC元件电压与电流的相量关系

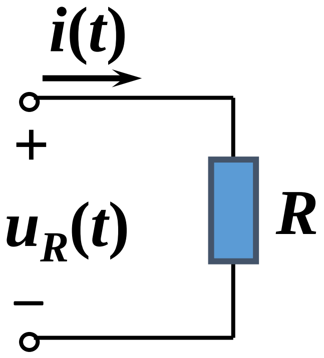
2 相量形式的电路定律和电路的相量模型

3 复阻抗和复导纳

4 用相量法求解正弦稳态电路

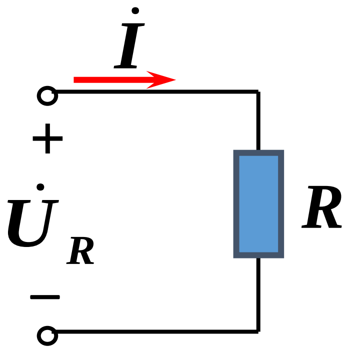
1、RLC元件电压与电流的相量关系

（1）电阻元件



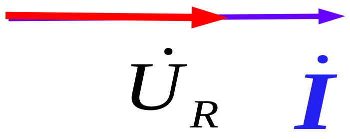
时域模型

$$u_R(t) = Ri(t)$$



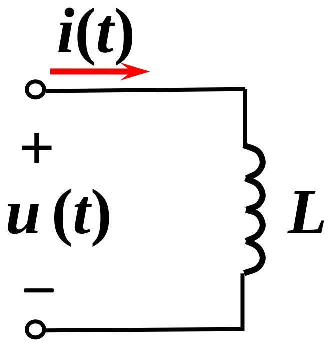
相量模型

$$\dot{U}_R = R\dot{I}$$



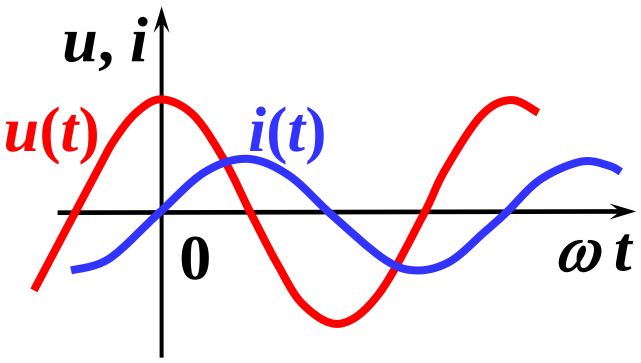
相量图

（2） 电感元件

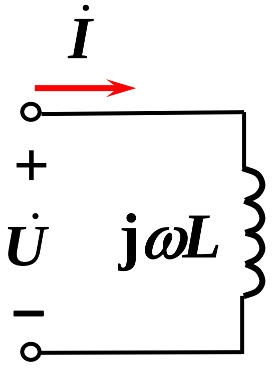


时域模型

$$u(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$



时域波形图

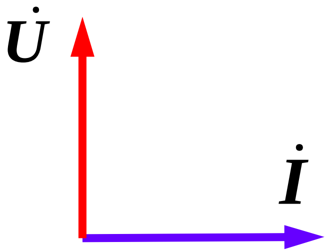


相量模型

$$\dot{U} = j\omega L\,\dot{I}$$

有效值关系：

$U=\omega L I$



相量图

相位关系：

$u(t)$ 超前 $i(t)$ $90°$

$U=\omega L I$ $\dot{U} = \mathrm{j}\omega L \dot{I}$ 错误的写法

定义：$X_L = U/I = \omega L = 2\pi f L$， 单位：欧

$\omega L \cancel{=} \dfrac{u}{i}$

称为“感抗”(inductive reactance)

$\omega L \cancel{=} \dfrac{\dot{U}}{\dot{I}}$

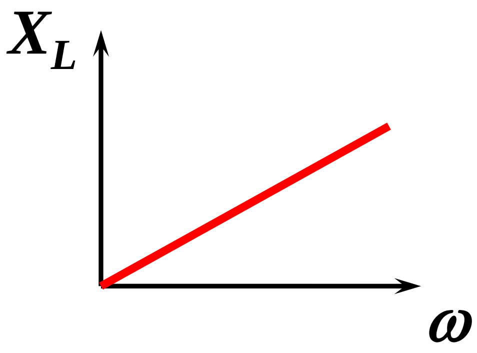
感抗的物理意义:

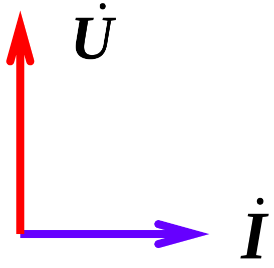
(1) 反映了电感对电流具有限制能力；

(2) 感抗与所通过电流的(角)频率成正比（理想元件如此，实际情况复杂）。

$\omega = 0$（直流），$X_L = 0$（短路）

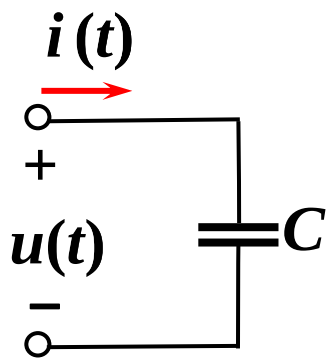
$\omega \to \infty$，$X_L \to \infty$（开路）





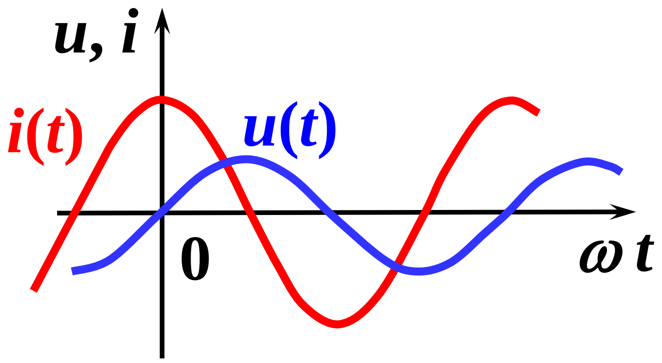
(3) 由于感抗的存在，使电流在相位上落后电压90°。

（3）电容元件

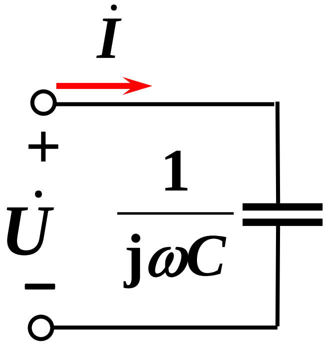


时域模型

$$i(t) = C\frac{du(t)}{dt}$$



时域波形图



相量模型

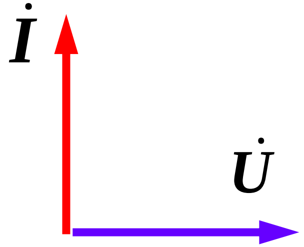
$$\dot{I} = \mathrm{j}\omega C\,\dot{U}$$

有效值关系：

$I=\omega C\ U$

相位关系：

$i(t)$ 超前 $u(t)$ 90°



相量图

$$\dot{U} = -\mathrm{j}\frac{1}{\omega C}\dot{I}$$

$$X_C \overset{\text{定义}}{=} \frac{1}{\omega C}$$

$$\dot{I} = \mathrm{j}\omega C\,\dot{U}$$

错误的写法

$$\frac{1}{\omega C} \neq \frac{u}{i}$$

$$\frac{1}{\omega C} \neq \frac{\dot{U}}{\dot{I}}$$

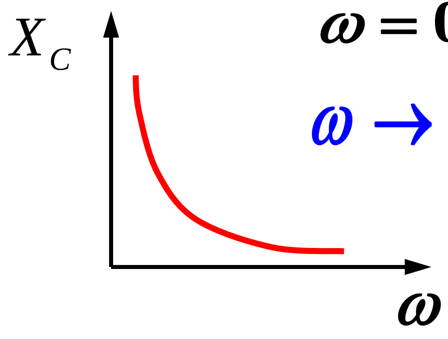
$$\frac{U}{I} = \frac{1}{\omega C}$$

称为“容抗”(capacitive reactance)

容抗的物理意义：

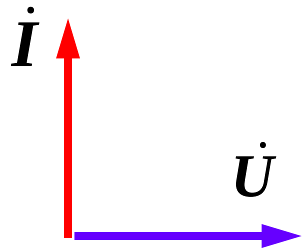
(1) 表征电容对电流有限制作用；

(2) 容抗的绝对值与电容电流的(角)频率成反比；



$\omega = 0$ (直流), $X_C \to \infty$ (隔直作用)

$\omega \to \infty$, $X_C \to 0$ (短路作用)



(3) 由于容抗的存在，使电流在相位上超前（领先）电压90°。

单选题 2分

设置

设电流$i = 0.05\sqrt{2}\cos(1000t + 150^\circ)$A流过10μF电容器。求关联参考方向下电容端电压*u*(*t*)

A $5\sqrt{2}\cos(1000t + 60^\circ)$ V

B $-5\sqrt{2}\cos(1000t + 60^\circ)$ V

C $0.5\sqrt{2}\cos(1000t + 60^\circ)$ V

D $-0.5\sqrt{2}\cos(1000t + 60^\circ)$ V

提交

2、相量形式的电路定律和电路的相量模型

（1）相量形式的基尔霍夫定律

$$\sum i(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum \dot{I} = 0$$

$$\sum u(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum \dot{U} = 0$$

（2）电路元件电压与电流的相量关系

$$u = Ri \quad \Rightarrow \quad \dot{U} = R\dot{I}$$

$$u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad \dot{U} = \mathrm{j}\omega L\dot{I}$$

$$u = \frac{1}{C}\int i\,\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad \dot{U} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\dot{I}$$

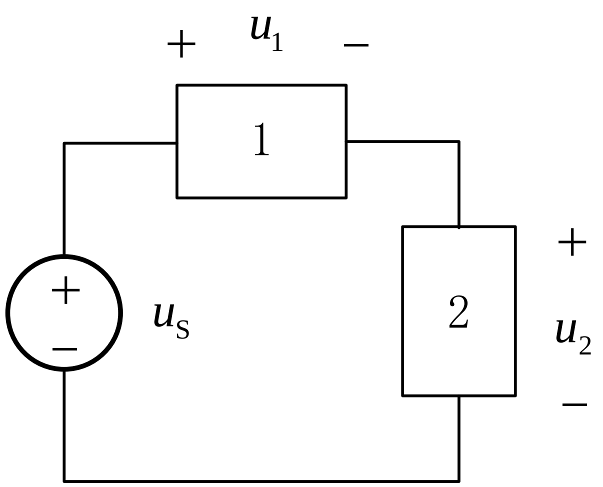
4.3 基尔霍夫定律的相量形式

例 4. 3−1 如图4.3-1所示电路，求 u_1

（1）$u_s = 10\sqrt{2}\cos\left(2t + 45°\right)\mathrm{V}$　$u_2 = 5\sqrt{2}\cos\left(10t\right)\mathrm{V}$

（2）$u_s = 10\sqrt{2}\cos\left(2t + 45°\right)\mathrm{V}$　$u_2 = 5\sqrt{2}\cos\left(2t\right)\mathrm{V}$

解 （1）由于u_1 和 u_S 是不同频率的正弦量，不能用相量法进行计算，因此



$$u_1 = u_S - u_2$$

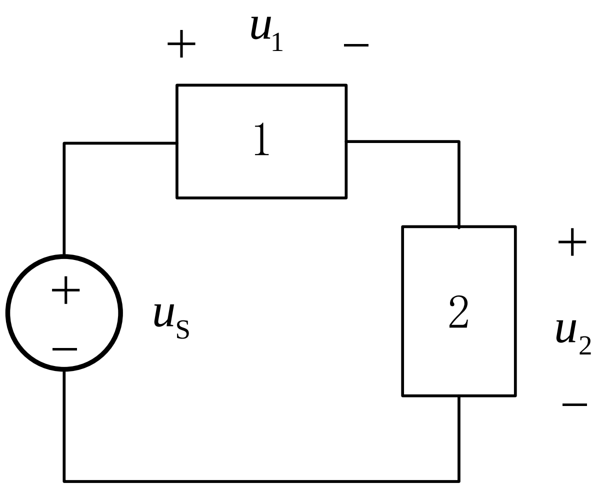
$$= \left[10\sqrt{2}\cos\left(2t + 45°\right) - 5\sqrt{2}\cos\left(10t\right)\right]\mathrm{V}$$

例 4. 3−1 如图4.3-1所示电路，求 u_1

（1）$u_s = 10\sqrt{2}\cos\left(2t + 45°\right)\text{V}$　$u_2 = 5\sqrt{2}\cos\left(10t\right)\text{V}$

（2）$u_s = 10\sqrt{2}\cos\left(2t + 45°\right)\text{V}$　$u_2 = 5\sqrt{2}\cos\left(2t\right)\text{V}$

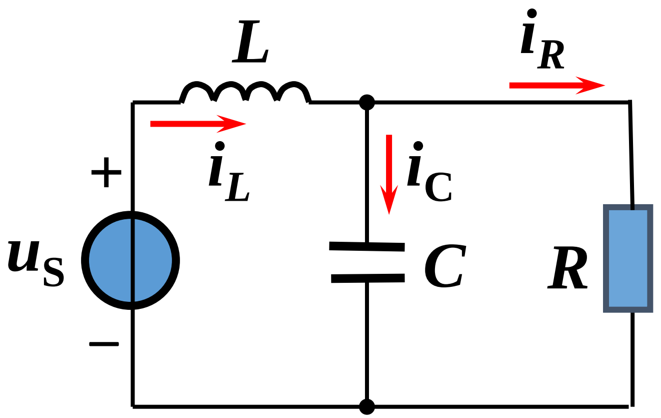
（2）由于u_1 和 u_S 是同频率的正弦量，可以用相量法进行计算，



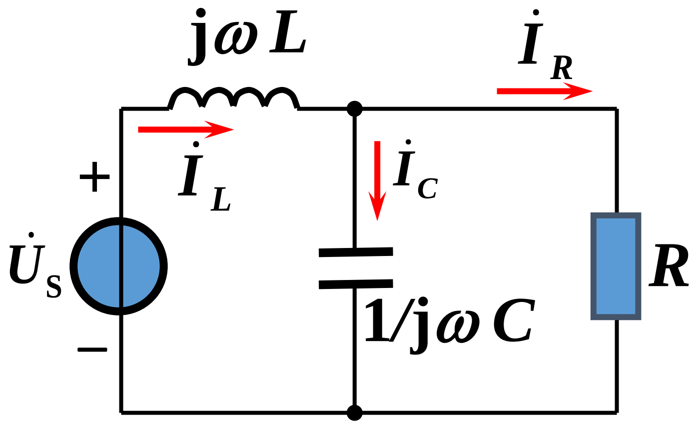
$$u_1 = u_S - u_2 \leftrightarrow 10\angle 45° - 5\angle 0°$$
$$= 2.071 + \text{j}7.07 = 7.368\angle 73.7°\text{V}$$

$$u_1 = 7.368\sqrt{2}\cos\left(2t + 73.7°\right)\text{V}$$

(3) 电路的相量模型（以单电源RLC电路为例）



电路时域模型



电路相量模型

$$\begin{cases} i_L = i_C + i_R \\ L\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{C}\displaystyle\int i_C \mathrm{d}t = u_S \\ R\, i_R = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int i_C \mathrm{d}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{I}_L = \dot{I}_C + \dot{I}_R \\ \mathrm{j}\omega L\dot{I}_L + \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}\dot{I}_C = \dot{U}_S \\ R\dot{I}_R = \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}\dot{I}_C \end{cases}$$

时域的微分方程

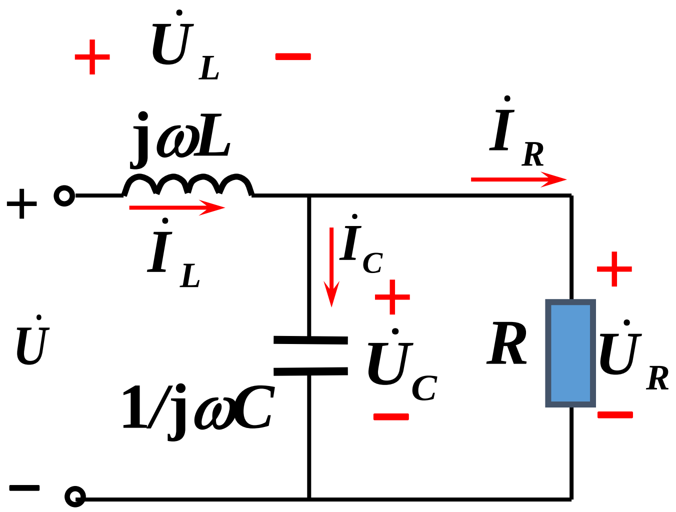
相量形式的代数方程

(4） 相量图(phasor diagram)：一张图上画出若干相量

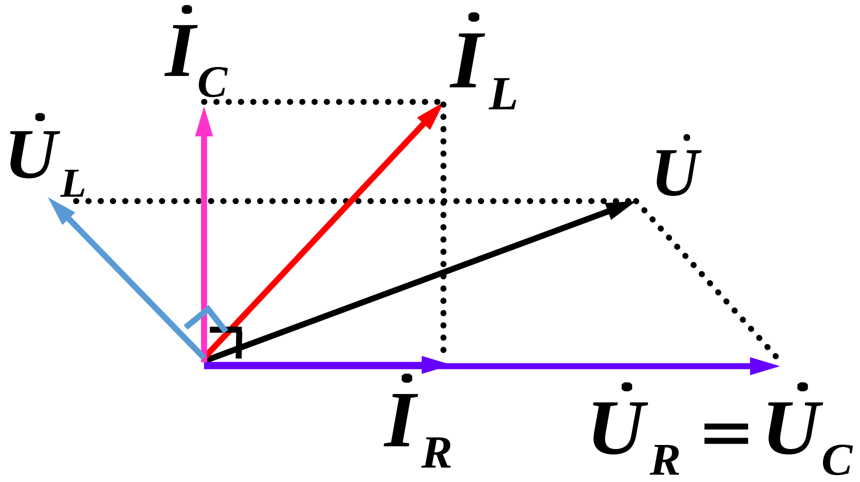
（a）随t增加，复函数在逆时针旋转 $A(t)=\sqrt{2}\,U\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}=\sqrt{2}\,\dot{U}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$

（b）同频率正弦量的相量，才能表示在同一张相量图中

（c）选定一个参考相量（设其初相位为零——水平线方向）



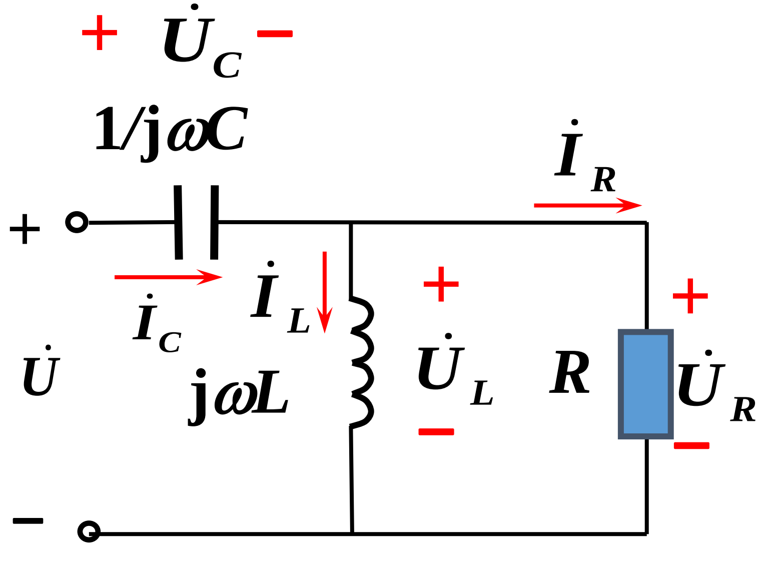
选 $\dot{U}_R$ 作为参考相量



单选题 2分

设置

下列关于$\dot{U}_L$和$\dot{U}$ 相位关系的陈述，正确的是（ ）



A $\dot{U}_L$可能超前$\dot{U}$ 0~180°

B $\dot{U}_L$可能滞后$\dot{U}$ 0~180°

C $\dot{U}_L$只可能超前$\dot{U}$ 0~90°

D $\dot{U}_L$只可能滞后$\dot{U}$ 0~90°

提交

3、复阻抗和复导纳

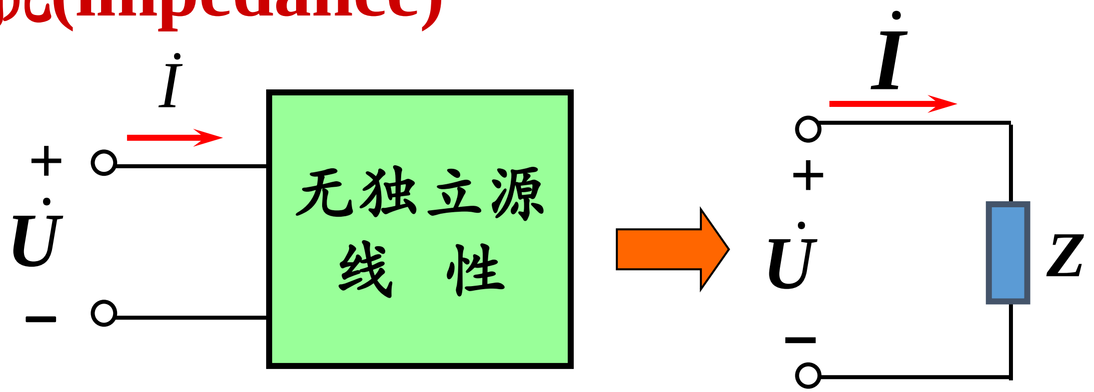
$$\dot{U} = R\dot{I}$$

$$\dot{U} = \mathrm{j}\omega L\dot{I}$$

$$\dot{U} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\dot{I}$$

（1）复阻抗(impedance)

正弦激励下



复阻抗:

$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}}$$

特殊情况:

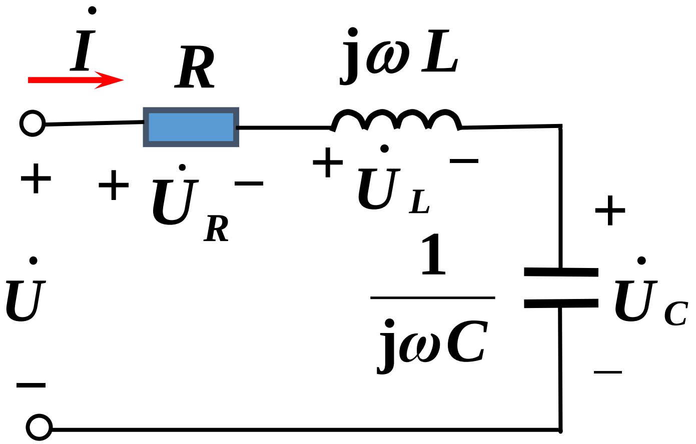
纯电阻 $Z_R = R$

纯电感 $Z_L = \mathrm{j}\omega L = \mathrm{j}X_L$

纯电容 $Z_C = {1}/{\mathrm{j}\omega C} = -\mathrm{j}X_C$

$X_L = \omega L$ 感抗

$X_C = {1}/{\omega C}$ 容抗



RLC串联的情况

复 阻 抗 $Z = \dfrac{\dot{U}}{\dot{I}} = \dfrac{\dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C}{\dot{I}}$

$$= R + \mathrm{j}\omega L + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}$$

$$= R + \mathrm{j}(\omega L - \frac{1}{\omega C})$$

$$= R + \mathrm{j}X$$

电 阻

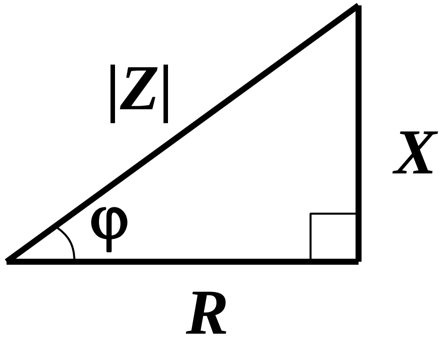
电 抗

复 阻 抗

$$Z = R + \mathrm{j}X = |Z| \angle \varphi$$

$$\begin{cases} |Z| = \dfrac{U}{I} & \text{阻抗的模} \\ \varphi = \psi_u - \psi_i & \text{阻抗角} \end{cases}$$

单位：Ω



阻抗三角形

对*R-L-C* 串联电路模型的具体分析：

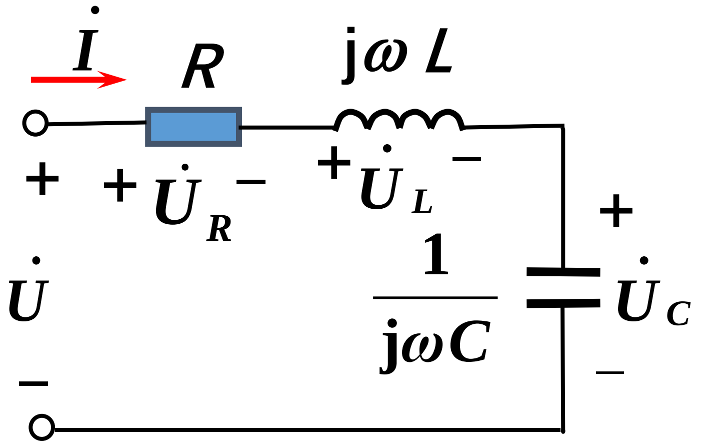
$$\boxed{Z = R+\mathrm{j}(\omega L - 1/\omega C) = R + \mathrm{j}X = |Z|\angle\varphi} \qquad \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = Z$$

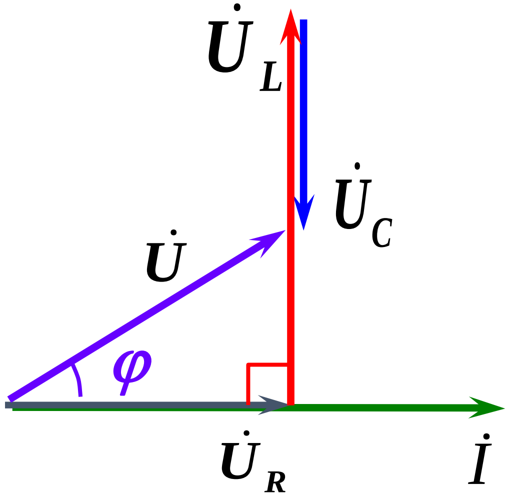
$\omega L > 1/\omega C$，$X > 0$， $\varphi > 0$， 电压超前电流， 电路呈感性；

$\omega L<1/\omega C$ ，$X < 0$， $\varphi < 0$， 电压落后电流， 电路呈容性；

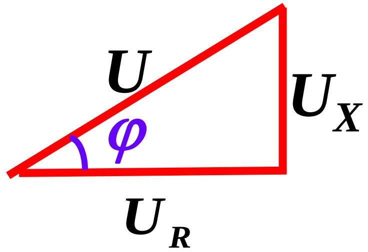
$\omega L=1/\omega C$ ，$X=0$， $\varphi =0$， 电压与电流同相， 电路呈纯阻性。

画相量图：选电流相量为参考相量（以$\omega L > 1/(\omega C)$为例）

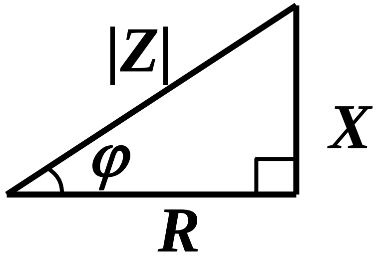




$$U = \sqrt{U_R^2 + U_X^2}$$



电压三角形

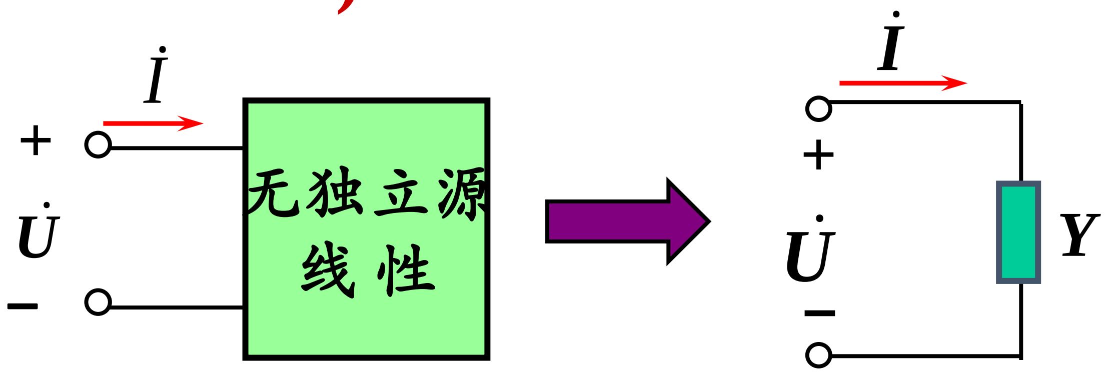


阻抗三角形

交流电路中，元件电压的模可能大于总电压的模

（2） 复导纳(admittance)

正弦激励下

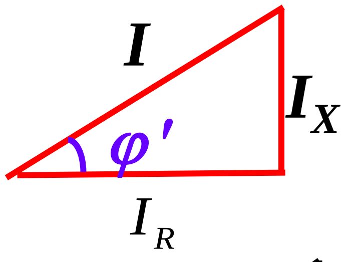


复导纳：

$$Y=\frac{\dot{I}}{\dot{U}}=G+\mathrm{j}B=|Y|\angle\varphi'$$

电导　电纳

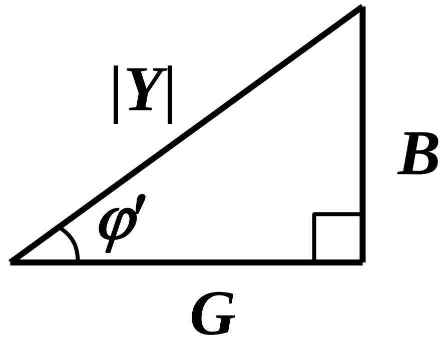
电流三角形



$$\begin{cases} |Y|=\dfrac{I}{U} & \text{导纳的模} \\ \varphi'=\psi_i-\psi_u & \text{导纳角} \end{cases}$$

单位：S

$$Y=\frac{1}{Z}$$



导纳三角形

(3) 阻抗的串、并联

串联 $Z = \sum Z_k$ ， $\dot{U}_k = \dfrac{Z_k}{\sum Z_k}\dot{U}$

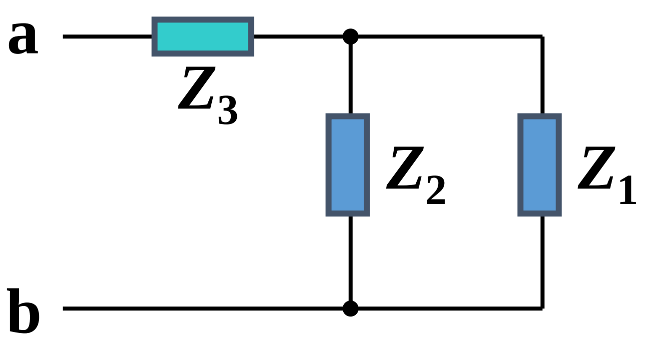
并联 $Y = \sum Y_k$ ， $\dot{I}_k = \dfrac{Y_k}{\sum Y_k}\dot{I}$

例：已知 Z_1=（10+j6.28）Ω;

Z_2=（20−j31.9）Ω;

Z_3=（15+j15.7）Ω。

求：阻抗 Z_{ab}。



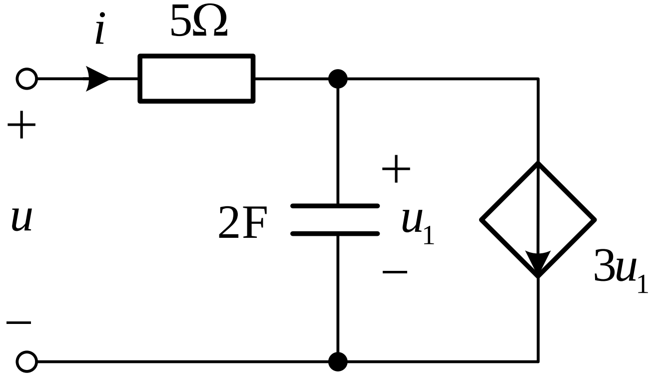
解：

$$Z_{ab} = Z_3 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

$$= 15 + j15.7 + \frac{(10 + j6.28)(20 - j31.9)}{10 + j6.28 + 20 - j31.9}$$

$$= (25.9 + j18.6)\Omega$$

例4. 4−2 求如图4.4-5（a）所示单口网络在 $\omega = 2\text{rad/s}$ 时的等效阻抗和该频率下的简化等效电路。



(a)

$$\begin{cases} \dot{I} = \dfrac{\dot{U}_1}{-\mathrm{j}\dfrac{1}{4}} + 3\dot{U}_1 \\ \dot{U} = 5\dot{I} + \dot{U}_1 \end{cases} \Rightarrow \quad Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \left(\frac{128}{25} - \mathrm{j}\frac{4}{25}\right)\Omega$$

习题：4-4, 4-5, 4-6，提交截止时间5月14日（周五）早8点