习题 1.1

1.对一组整数进行四则运算，所得结果是什么数

解 （1）整数相加得到整数；（2）整数相减得到整数；（3）整数相乘得到整数；（4）整数相除得到的是有理数。所以对一组整数进行四则运算得到的是有理数。

2．写出 4 个数码 1, 2, 3, 4 的所有 4 阶排列.

分析 4 阶排列是指由 1, 2, 3, 4 构成的有序的数组，共有 4！个，每个数字必须出现且只能出现一次，具体做法可以是先确定排在第一位的数，比如为 1，然后排第二位的数分别为 2, 3, 4，接着排第三位、第四位的数.

解

1234	1243	1324	1342	1423	1432
2134	2143	2314	2341	2413	2431
3124	3142	3214	3241	3412	3421
4123	4132	4213	4231	4312	4321

3．分别计算下列四个 4 阶排列的逆序数，然后指出奇排列是（ A ）

（A）4312；　（B）4132；　（C）1342；　（D）2314

分析 计算排列逆序数的方法有两种:

方法一 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)=\tau_1(i_1\text{后面比}i_1\text{小的数的个数})$

$$+\tau_2(i_2\text{后面比}i_2\text{小的数的个数})$$
$$+\cdots\cdots$$
$$+\tau_{n-1}(i_{n-1}\text{后面比}i_{n-1}\text{小的数的个数})$$

方法二 1 前面比 1 大的数的个数＋2 前面比 2 大的数的个数＋……＋$(n-1)$前面比 $n-1$ 大的数的个数.

逆序数是奇数的称为奇排列，逆序数是偶数的成为偶排列.

解 按方法一计算：$\tau(4312)=3+2=5$　　奇排列

$\tau(4132)=3+1=4$　　偶排列

$\tau(1342)=1+1=2$　　偶排列

$\tau(2314)=1+1=2$　　偶排列　　故选 A.

4．计算以下各个排列的逆序数，并指出它们的奇偶性:

（1）314265；(2)314265789；（3）542391786；

（4）987654321；（5）246813579；（6）$n(n-1)\cdots 21$.

解 按习题 3 分析中的方法一计算：

（1）$\tau(314265)=2+1+1=4$ 偶排列

（2）$\tau(314265789)=2+1+1=4$ 偶排列

（3）$\tau(542391786)=4+3+1+1+4+1+1=15$ 奇排列

（4）$\tau(987654321)=8+7+6+5+4+3+2+1=36$ 偶排列

（5）$\tau(246813579)=1+2+3+4=10$ 偶排列

（6）$\tau(n(n-1)\cdots 21)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\dfrac{1}{2}n(n-1)$，这表明该排列的逆序数与 n 有关，故要对 n 进行讨论：

当 $n=4k,4k+1$ 时 $\dfrac{1}{2}n(n-1)$ 为偶数，此时排列 $n(n-1)\cdots 21$.为偶排列；

当 $n=4k+2,4k+3$ 时 $\dfrac{1}{2}n(n-1)$ 为奇数，此时排列 $n(n-1)\cdots 21$.为奇排列.

5．在由 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 组成的下述 9 阶排列中，选择 i与j 使得：

（1）$2147i95j8$为偶排列；（2）$1i25j4896$为奇排列；

（3）$412i5769j$偶排列；（3）$i3142j786$奇排列.

均要求说明理由.

分析 排列$1i25j4896$ 中的两个未知数 i与j 据排列的定义只能取 3 或 7. 因而只有两种情况：1° 132574896 与 2° 172534896，然而我们只需计算上述的一个排列就可得知结果，因为1° 与 2° 是 3 和 7 作一次对换得到的，而作一次对换必改变排列的奇偶性，也就是说若1° 为偶排列，则 2° 必为奇排列. 其余题解法也类似.

解 （1）取 $i=3,\ j=6$ 有 $\tau(214739568)=1+1+2+2=6$ 为偶排列，符合题目要求.

（2）取 $i=3,\ j=7$ 有 $\tau(132574896)=1+1+2+1+1=6$ 为偶排列，故取 $i=7,\ j=3$ 时 172534896 为奇排列，符合题目要求.

（3）取 $i=3,\ j=8$ 有 $\tau(412357698)=3+1+1=5$ 为偶排列，符合题目要求.

（4）取 $i=5,\ j=9$ 有 $\tau(531429786)=4+2+1+3+1+1=12$ 为偶排列. 故取 $i=9,\ j=5$ 时 931425786 为奇排列，符合题目要求.

6.写出全体形如 $5**2*$ 及 $2*5*3$ 的 5 阶排列.总结一下，有 k 个位置数码给定的 $n(n>k)$ 阶排列有多少个？

分析 形如 $5**2*$ 的 5 阶排列中 5 和 2 的位置已经确定，3 个 $*$ 位置只能取数字 1，3，4 中的某一个.

解 形如 $5**2*$ 的 5 阶排列中第一个 $*$ 可取 1，3，4 中的任何一个，故有 3 种取法，第二个 $*$ 可取剩下数字当中的任一个，有两种取法，最后一个 $*$ 只能取余下的那一个数，据乘法原理共有 $3\times2\times1=3!$ 种取法，即形如 $5**2*$ 的阶排列有（5－2）! 个. 同理形如 $2*5*3$ 的阶排列共有（5－3）! 个. 因而，有 k 个位置数码给定的 $n(n>k)$ 阶排列有 $(n-k)!$ 个.

7.自学附录一：连加号 $\sum$ 与连乘号 $\prod$.

习题 1.2

1. 按行列式定义,计算下列行列式(要求写出过程):

(1) $\begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}$;　(2) $\begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix}$;　(3) $\begin{vmatrix} \tan\theta & \sin\theta \\ 1 & \cos\theta \end{vmatrix}$;

(4) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix}$;　(5) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$;　(6) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & d & e \end{vmatrix}$.

分析 计算 2 阶行列式和 3 阶行列式可用对角线法则.

解 (1) $\begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix} = ab^2 - ba^2$;

(2) $\begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix} = 1 - \log_b a \log_a b = 1 - 1 = 0$;

(3) $\begin{vmatrix} \tan\theta & \sin\theta \\ 1 & \cos\theta \end{vmatrix} = \tan\theta \cdot \cos\theta - \sin\theta = 0$;

(4) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix} = 0\times0\times0 + ac\cdot0 + 0\cdot bd - 0\times0\times0 - ab\cdot0 - 0\cdot cd = 0$;

(5) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\times1\times1 + (-1)\times(-1)\times(-1) + 1\times1\times1 - 1\times1\times(-1)$

$-(-1)\times1\times1 - 1\times(-1)\times1 = 1 - 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 4$;

(6) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{vmatrix} = abe + 0c0 + 00d - 0b0 - cda - 00e = abe - acd$.

2. 在 6 阶行列式 $|a_{ij}|$ 中，下列项应该取什么符号？为什么？

(1) $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$;　(2) $a_{32}a_{43}a_{54}a_{11}a_{66}a_{25}$;

(3) $a_{21}a_{53}a_{16}a_{42}a_{65}a_{34}$;　(4) $a_{51}a_{13}a_{32}a_{44}a_{26}a_{65}$.

解 (1) 因 $\tau(234516) + \tau(312645) = 4 + 4 = 8$，所以取正号;

另一种方法是：$a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65} = a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$，因 $\tau(431265) = 6$，所以取正号. (2),

(3), (4) 也可这样做，不再列出.

(2) 因 $\tau(345162)+\tau(234165)=7+4=11$，所以取负号;

(3) 因 $\tau(251463)+\tau(136254)=6+5=11$，所以取负号;

(4) 因 $\tau(513426)+\tau(132465)=6+2=8$，所以取正号.

3. 当 $i=$___，$k=$___时 $a_{1i}a_{32}a_{4k}a_{25}a_{53}$ 成为 5 阶行列式 $|a_{ij}|$ 中一个取负号的项,为什么?

解 i 和 k 只能取 1,4 或者 4,1. 不妨先假设 $i=1,k=4$，则 $a_{1i}a_{32}a_{4k}a_{25}a_{53}=a_{11}a_{32}a_{44}a_{25}a_{53}$，这个项的符号就是 $(-1)^{\tau(13425)+\tau(12453)}=(-1)^4=+1$，不符合要求. 那么当 $i=4,k=1$ 时 $a_{1i}a_{32}a_{4k}a_{25}a_{53}=a_{14}a_{32}a_{41}a_{25}a_{53}$，它和 $a_{11}a_{32}a_{44}a_{25}a_{53}$ 相比就是交换了列指标 1 和 4 的位置，因 $\tau(12453)$ 与 $\tau(42153)$ 相比改变了奇偶性，所以 $a_{14}a_{32}a_{41}a_{25}a_{53}$ 的符号为负. 故应填 $i=4,k=1$.

4. 若 $(-1)^{\tau(4k1i5)+\tau(12345)}a_{41}a_{k2}a_{13}a_{i4}a_{55}$ 是 5 阶行列式 $|a_{ij}|$ 中的一项，则当 $i=$___，$k=$___时该项的符号为正，当 $i=$___，$k=$___时该项的符号为负，为什么?

解 此问和问题 3 类似，i 和 k 只能取 2,3 或者 3,2.不妨先假设 $i=2,k=3$，则符号为 $(-1)^{\tau(43125)+\tau(12345)}=(-1)^5=(-1)$，所以取的是负号. 那么由问题 3 的分析可知当 $i=3,k=2$ 时符号取正. 所以当 $i=3,k=2$ 时该项的符号为正，当 $i=2,k=3$ 时该项的符号为负.

5. 写出 4 阶行列式 $|a_{ij}|$ 中包含因子 $a_{42}a_{23}$ 的项，并指出正负号.

解 参照习题 1.1 的第 6 题知，4 阶行列式 $|a_{ij}|$ 中包含因子 $a_{42}a_{23}$ 的项有 $a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$ 和 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$. 由于 $\tau(1342)=2$，故 $a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$ 取正号; $\tau(4312)=5$，故 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 取负号.

6. 写出 4 阶行列式 $|a_{ij}|$ 中所有取负号且包含因子 a_{23} 的项.

解 类似于第 5 题可推知, 4 阶行列式中包含 a_{23} 的项为

$a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$ $\tau(1324)=1$ 取负号;

$a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$ $\tau(1342)=2$ 取正号; (也可由(1)取负号推知(2)取正号)

$a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}$ $\tau(2341)=3$ 取负号;

$a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}$ $\tau(2314)=2$ 取正号; (也可由(3)取负号推知(4)取正号)

$a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ $\tau(4312)=5$ 取负号;

$a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$ $\tau(4321)=6$ 取正号. (也可由(5)取负号推知(6)取正号)

所以所求的项为 $a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$，$a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}$，$a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$.

7. 按行列式定义，计算下列行列式((4)中 $n>1$，并均要求写出计算过程):

(1) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ a & -2 & 0 \\ 0 & b & -3 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$; (4) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

解 (1)由对角线法则, $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ a & -2 & 0 \\ 0 & b & -3 \end{vmatrix} = (-1)\times(-2)\times(-3)+0\times0\times0+1\cdot ab-1\times(-2)\times0$

$$-(-1)\times0\cdot b-0\cdot a\cdot(-3)=(-6)+ab=ab-6;$$

(2) 根据定义 $|a_{ij}|_{4\times4}=\sum\limits_{j_1j_2j_3j_4}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3j_4)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$.

在行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$ 的通项中，只有 $a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$ 这一项的因子中不含零，所以

原式 $=(-1)^{\tau(1324)}a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}=-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}=-abcd$.

(3) 根据定义 $|a_{ij}|_{5\times5}=\sum\limits_{j_1j_2j_3j_4j_5}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3j_4j_5)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}$.

在行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ 的通项中每一个项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}$ 中最后三个因子 $a_{3j_3}, a_{4j_4}, a_{5j_5}$ 分别取值于行列式最后三行的不同列的三个数，而行列式最后三行中均只有二个数不为零，所以这三个因子中至少一个取零．这样行列式的每一项中都含有因子零，所以每项都为零，从而行列式为零．

(4) 根据定义 $\left|a_{ij}\right|_{n\times n} = \sum\limits_{j_1 j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，该展开式通项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 中 a_{nj_n} 取自 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$ 的第 n 行，现在第 n 行中除了 a_{n1} 外其余元素都为零．故若 $j_n \neq 1$，则对应的行列式展开式中的那一项一定为零，求和时可不考虑．因此只要考虑 $j_n = 1$ 的项．同样对于行列式的第 $n-1$ 行中除了 $a_{n-1,1}$ 和 $a_{n-1,2}$ 外其余元素都为零，且因 $j_n = 1$，从而 j_{n-1} 只能取 2 了．依次类推，行列式展开式的所有项中除去列指标 $j_1 j_2 \cdots j_n = n(n-1)\cdots 1$ 对应的项外都为零．又因为 $\tau(n(n-1)\cdots 1) = \dfrac{1}{2}n(n-1)$，所以原式 $= (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}$．

8. 问 $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$ 为什么错？正确答案是什么？

解 错，原因在于没有搞清楚 4 阶行列式定义而把 2,3 阶行列式的对角线法则误认为对 4 阶行列式也成立．4 阶和 4 阶以上的行列式没有对角线法则．正确答案为：

$$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}.$$

具体解法可参考习题 1.4 第 5 题之(3).

9. 若 n 阶行列式 $D = \left|a_{ij}\right|$ 中元素 a_{ij} $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ 均为整数，则 D 必为整数，这结论对不对？为什么？

解 对．行列式的值是行列式中取自所有不同行不同列的元素乘积的代数和，而整数经

加,减,乘之后仍然为整数.

10. 计算$n(n>1)$阶行列式$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

解　方法一　该行列式的展开式只有一项不为零，即$a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$，而该项带有的符号为$(-1)^{\tau(n(n-1)\cdots 1)}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$，所以原式$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot(-1)^n=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

方法二　直接利用第 7 题第(4)小题的结论得：原式$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot(-1)^n=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

习题 1.3

1. 设 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a\neq 0$，据此计算下列行列式(要求写出计算过程):

(1) $\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{31} \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} 2a_{11} & 3a_{13}-5a_{12} & a_{12} \\ 2a_{21} & 3a_{23}-5a_{22} & a_{22} \\ 2a_{31} & 3a_{33}-5a_{32} & a_{32} \end{vmatrix}$.

分析 利用行列式得性质找出所求行列式与已知行列式的关系.

解 (1) $\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{31} \end{vmatrix} \overset{R_{13}}{=\!=} -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=-a$.

(4) **方法一** $\begin{vmatrix} 2a_{11} & 3a_{13}-5a_{12} & a_{12} \\ 2a_{21} & 3a_{23}-5a_{22} & a_{22} \\ 2a_{31} & 3a_{33}-5a_{32} & a_{32} \end{vmatrix} \overset{C_2+5C_3}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 2a_{11} & 3a_{13} & a_{12} \\ 2a_{21} & 3a_{23} & a_{22} \\ 2a_{31} & 3a_{33} & a_{32} \end{vmatrix}$

$\overset{\text{提取公因子}}{=\!=\!=\!=} 6\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} \overset{C_{23}}{=\!=} -6\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=-6a$.

方法二 注意到该行列式的第二列均为 2 个数的和，可用行列式的性质 5 将该行列式分成 2 个行求和，结果与方法一相同.

2. 用行列式性质计算下列行列式(要求写出计算过程):

(1) $\begin{vmatrix} 1998 & 1999 & 2000 \\ 2001 & 2002 & 2003 \\ 2004 & 2005 & 2006 \end{vmatrix}$；(2) $\begin{vmatrix} a & b+c & 1 \\ b & c+a & 1 \\ c & a+b & 1 \end{vmatrix}$；(3) $\begin{vmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 \\ x_2y_1 & x_2y_2 & x_2y_3 \\ x_3y_1 & x_3y_2 & x_3y_3 \end{vmatrix}$；

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$；(5) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$；(6) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$；

(7) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 201 & 102 & -99 \end{vmatrix}$；(8) $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$.

分析 第(1)至第(4)小题可利用行列式性质求解；第(5)至第(9)小题是采用归结化简为上(下)三角行列式求解.

解 (1) $\begin{vmatrix} 1998 & 1999 & 2000 \\ 2001 & 2002 & 2003 \\ 2004 & 2005 & 2006 \end{vmatrix} \xlongequal{C_3-C_2} \begin{vmatrix} 1998 & 1999 & 1 \\ 2001 & 2002 & 1 \\ 2004 & 2005 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{C_2-C_1} \begin{vmatrix} 1998 & 1 & 1 \\ 2001 & 1 & 1 \\ 2004 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$;

(2) $\begin{vmatrix} a & b+c & 1 \\ b & c+a & 1 \\ c & a+b & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{C_2-C_1} \begin{vmatrix} a & a+b+c & 1 \\ b & a+b+c & 1 \\ c & a+b+c & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{性质4}} 0$;

(3) $\begin{vmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 \\ x_2y_1 & x_2y_2 & x_2y_3 \\ x_3y_1 & x_3y_2 & x_3y_3 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{提取每行的公因子}} x_1x_2x_3 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{性质4}} 0$;

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal[C_4+C_1]{C_3-C_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{下三角形}} 1\times2\times6\times8=96$;

(5) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{性质3}} 4\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[R_4-R_1]{\substack{R_2-R_1 \\ R_3-R_1}} 4\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 9 & 19 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

$\xlongequal[R_4+R_2]{R_3-3R_2} 4\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal[(*)]{R_4-\frac{1}{3}R_3} 4\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{上三角形}}$

$4\times1\times1\times3\times(-\frac{1}{3})=-4$.

注 做到(*)处也可以按第一列展开，再按第一列展开得:

$$\text{原式}=4\begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=4\times(9-10)=-4.$$

(6) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[R_3-R_1]{R_2-R_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{R_{24}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{R_3+R_2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{R_4+R_3}\begin{vmatrix}1&1&1&0\\0&1&1&1\\0&0&1&2\\0&0&0&3\end{vmatrix}\xlongequal{\text{上三角形}}1\times1\times1\times3=3;$$

(7) $$\begin{vmatrix}2&1&-1\\4&-1&1\\201&102&-99\end{vmatrix}\xlongequal{C_3+C_2}\begin{vmatrix}2&1&0\\4&-1&0\\201&102&3\end{vmatrix}\xlongequal{R_1+R_2}\begin{vmatrix}6&0&0\\4&-1&0\\201&102&3\end{vmatrix}\xlongequal{\text{下三角形}}-18;$$

(8) $$\begin{vmatrix}a-b-c&2a&2a\\2b&b-c-a&2b\\2c&2c&c-a-b\end{vmatrix}\xlongequal{R_1+R_2+R_3}\begin{vmatrix}a+b+c&a+b+c&a+b+c\\2b&b-c-a&2b\\2c&2c&c-a-b\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{提取公因子}}(a+b+c)\begin{vmatrix}1&1&1\\2b&b-c-a&2b\\2c&2c&c-a-b\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[R_3-(2c)R_1]{R_2-(2b)R_1}(a+b+c)\begin{vmatrix}1&1&1\\0&-b-c-a&0\\0&0&-c-a-b\end{vmatrix}=(a+b+c)^3.$$

注记 行列式的计算可有多种解法，限于篇幅仅列出一种（未必是最简的），下面题目也一样，不再说明.

3. 用行列式性质计算下列 $n(n>1)$ 阶行列式(要求写出计算过程):

(1) $$\begin{vmatrix}1&a_1&a_2&\cdots&a_{n-1}\\1&a_1+b_1&a_2&\cdots&a_{n-1}\\1&a_1&a_2+b_2&\cdots&a_{n-1}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&a_1&a_2&\cdots&a_{n-1}+b_{n-1}\end{vmatrix};$$ (2) $$\begin{vmatrix}-a_1&a_1&0&\cdots&0&0\\0&-a_2&a_2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&-a_{n-1}&a_{n-1}\\1&1&1&\cdots&1&1\end{vmatrix}.$$

分析 把行列式归结化简为上(下)三角形行列式来求解.

解 (1) $$\begin{vmatrix}1&a_1&a_2&\cdots&a_{n-1}\\1&a_1+b_1&a_2&\cdots&a_{n-1}\\1&a_1&a_2+b_2&\cdots&a_{n-1}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&a_1&a_2&\cdots&a_{n-1}+b_{n-1}\end{vmatrix}\xlongequal[i=2,\cdots n]{R_i-R_1}\begin{vmatrix}1&a_1&a_2&\cdots&a_{n-1}\\0&b_1&0&\cdots&0\\0&0&b_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&b_{n-1}\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{上三角形}}b_1b_2\cdots b_{n-1};$$

(2) $\begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} & a_{n-1} \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{i=1,2,\cdots,n-1}{\overset{C_{i+1}+C_i}{=\!=\!=}}$

$$\begin{vmatrix} -a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \end{vmatrix} \overset{\text{下三角形}}{=\!=\!=} (-1)^n n a_1 a_2 \cdots a_{n-1};$$

4. 证明: $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = 0$.

分析 行列式的证明题是给出结果的计算题，所以从左端开始计算，推出右端即可.

证 左端 $\underset{i=4,3,2}{\overset{C_i - C_{i-1}}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2a+3 & 2a+5 \\ b^2 & 2b+1 & 2b+3 & 2b+5 \\ c^2 & 2c+1 & 2c+3 & 2c+5 \\ d^2 & 2d+1 & 2d+3 & 2d+5 \end{vmatrix} \underset{C_3 - C_2}{\overset{C_4 - C_3}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 2 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 2 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 2 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 =$ 右端.

5. 求下列多项式的根(要求写出计算过程):

(1) $f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 6 & 5 \\ 2 & 2 & 6 & 9-x^2 \end{vmatrix}$; (2) $f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & n-1-x \end{vmatrix}$ $(n>1)$.

解 (1)**方法一** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 6 & 5 \\ 2 & 2 & 6 & 9-x^2 \end{vmatrix} \overset{R_2 - R_1,\ R_3 - 2R_1,\ R_4 - 2R_1}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1-x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3-x^2 \end{vmatrix} \overset{R_4 - R_3}{=\!=\!=}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1-x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4-x^2 \end{vmatrix} = 2(1-x^2)(4-x^2).$$

所以多项式 $f(x)$ 的根为 $x=\pm 1$和$x=\pm 2$.

方法二 $f(x)$ 是 x 的 4 次多项式，且可直接验证 $f(1)=f(-1)=f(2)=f(-2)=0$，

所以 $f(x)$ 的根为 $x=\pm1$和$x=\pm2$.

(2)**方法一** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & n-1-x \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,n]{R_i-R_1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & -x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-2-x \end{vmatrix}$$

$$=-x(1-x)(2-x)\cdots(n-2-x).$$

所以多项式的根为 $x=0, x=1,\cdots, x=n-2.$

方法二 $f(x)$ 是 x 的 $n-1$ 次多项式，且可直接验证 $f(0)=f(1)=\cdots=f(n-2)=0$，

所以 $f(x)$ 的根为 $x=0, x=1,\cdots, x=n-2.$

6. 由 $n(n>1)$ 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}=0,$$

来说明 $n!$ 个不同的 n 阶排列中奇排列和偶排列各占一半.

证 根据行列式的定义 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}=\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}\xlongequal{a_{ij}=1}$

$$\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}=0.$$

所以上式中(-1)的个数和(+1)的个数一样多，(-1)是由奇排列产生的，而(+1)是由偶排列产生的. 同时根据行列式的定义这里包括了所有的 n 阶排列，故可以得到全体 n 阶排列中奇排列的个数与偶排列的个数一样多，各占一半.

习题 1.4

1. 计算下列行列式(要求写出计算过程):

(1) $\begin{vmatrix} x & a & b & 0 & c \\ 0 & y & 0 & 0 & d \\ 0 & e & z & 0 & f \\ g & h & k & u & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; (3) $\begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ e & d & c & b & a \end{vmatrix}$;

(4) $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}$; (5) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ x_1 & x_2 & 0 & 0 & 0 & x_3 \\ a_1 & b_1 & 1 & 1 & 1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & x_1 & x_2 & x_3 & c_2 \\ x_1^2 & x_2^2 & 0 & 0 & 0 & x_3^2 \\ a_3 & b_3 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & c_3 \end{vmatrix}$;

(6) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & x \\ 1 & 4 & 4 & x^2 \\ 1 & 8 & -8 & x^3 \end{vmatrix}$; (7) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$

分析 第(1)至第(4)题可用降阶法解，第(5)至第(8)题可化为范德蒙行列式解.

解 (1) $\begin{vmatrix} x & a & b & 0 & c \\ 0 & y & 0 & 0 & d \\ 0 & e & z & 0 & f \\ g & h & k & u & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第5行展开}} v\begin{vmatrix} x & a & b & 0 \\ 0 & y & 0 & 0 \\ 0 & e & z & 0 \\ g & h & k & u \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第4列展开}} vu\begin{vmatrix} x & a & b \\ 0 & y & 0 \\ 0 & e & z \end{vmatrix}$

$\xlongequal{\text{按第1列展开}} xuv\begin{vmatrix} y & 0 \\ e & z \end{vmatrix} = xyzuv$;

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal[i=4,3,2]{R_i - R_{i-1}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3,4]{R_i - R_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

$\xlongequal{\text{按第1列展开}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{习题1.2第7-(4)题}} (-1)^{\frac{3(3-1)}{2}}(-1)(-4)(-4) = 16$;

(3)**方法一** $\begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ e & d & c & b & a \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第1列展开}} a\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$

$$+(-1)^{5+1}e\begin{vmatrix} b & c & d & e \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{第2个行列式按第4列展开}}$$

$$a^2+e(-1)^{4+1}e\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a^2-e^2;$$

方法二 逐次均按第 2 列展开可得同样结果，具体解法可参见下例.

(4)逐次按第 2 行展开 $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix} = a_2\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = \cdots =$

$$a_2a_3\cdots a_{n-1}\begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & a_n \end{vmatrix} = a_2a_3\cdots a_{n-1}(a_1a_n-1);$$

(5) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ x_1 & x_2 & 0 & 0 & 0 & x_3 \\ a_1 & b_1 & 1 & 1 & 1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & x_1 & x_2 & x_3 & c_2 \\ x_1^2 & x_2^2 & 0 & 0 & 0 & x_3^2 \\ a_3 & b_3 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & c_3 \end{vmatrix} \xlongequal{C_{36}} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 1 & 1 & 1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & x_2 & x_3 & x_1 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & x_2^2 & x_3^2 & x_1^2 \end{vmatrix} \xlongequal{R_{35}}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 & 0 & 0 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & x_2 & x_3 & x_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 1 & 1 & 1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & x_2^2 & x_3^2 & x_1^2 \end{vmatrix} \xlongequal{R_{45}} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 & 0 & 0 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 1 & 1 & 1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & x_2 & x_3 & x_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & x_2^2 & x_3^2 & x_1^2 \end{vmatrix}$$

$$=-D(x_1,x_2,x_3)^2=-(x_3-x_1)^2(x_3-x_2)^2(x_2-x_1)^2;$$

(6) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & x \\ 1 & 4 & 4 & x^2 \\ 1 & 8 & -8 & x^3 \end{vmatrix} = D(1,2,-2,x) = (x+2)(x-2)(x-1)(-2-2)(-2-1)(2-1)$

$= 12(x-1)(x^2-4)$;

(7) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} \underline{\underline{R_3+R_1}} \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \end{vmatrix} \underline{\underline{\text{提取公因子}}}$

$(a+b+c)\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{C_{21}}{\overset{C_{32}}{=\!=}} (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a+b+c)\ D(a,b,c)$

$= (a+b+c)\ (b-a)(c-b)(c-a)$

2. 计算下列 $n(n>1)$ 阶行列式(要求写出计算过程):

(1) $\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & 1+x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}$.

解 (1) $\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} \underline{\underline{\text{按第1列展开}}}$

$(-1)^{1+1}x\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix} + (-1)^{n+1}y\begin{vmatrix} y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & y & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & y \end{vmatrix}$

$= x^n + (-1)^{n+1}y^n$;

(3) $\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & 1+x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{R_i-R_1} \begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n \\ (x_2-x_1)y_1 & (x_2-x_1)y_2 & \cdots & (x_2-x_1)y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (x_n-x_1)y_1 & (x_n-x_1)y_2 & \cdots & (x_n-x_1)y_n \end{vmatrix}$$

$$=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ \vdots & \vdots & & y_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{vmatrix},$$

据此当$n=2$时，原式$=(x_2-x_1)(y_2-y_1)$；当$n>2$时，原式$=0$.

3. 求下列多项式的根(要求写出计算过程):

(1) $f(x)=\begin{vmatrix} x-5 & 1 & -3 \\ 1 & x-5 & 3 \\ -3 & 3 & x-3 \end{vmatrix}$; (2) $f(x)=\begin{vmatrix} x-1 & -2 & -2 \\ -2 & x-1 & -2 \\ -2 & -2 & x-1 \end{vmatrix}$.

解 (1) $\begin{vmatrix} x-5 & 1 & -3 \\ 1 & x-5 & 3 \\ -3 & 3 & x-3 \end{vmatrix} \xlongequal{R_1+R_2} \begin{vmatrix} x-4 & x-4 & 0 \\ 1 & x-5 & 3 \\ -3 & 3 & x-3 \end{vmatrix} \xlongequal{C_2-C_1} \begin{vmatrix} x-4 & 0 & 0 \\ 1 & x-6 & 3 \\ -3 & 6 & x-3 \end{vmatrix}$

$$=(x-4)\begin{vmatrix} x-6 & 3 \\ 6 & x-3 \end{vmatrix} \xlongequal{R_2+R_1} (x-4)\begin{vmatrix} x-6 & 3 \\ x & x \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{C_1-C_2} (x-4)\begin{vmatrix} x-9 & 3 \\ 0 & x \end{vmatrix} = x(x-4)(x-9)$$

所以原多项式的根为$x_1=0, x_2=4, x_3=9$.

(2) $\begin{vmatrix} x-1 & -2 & -2 \\ -2 & x-1 & -2 \\ -2 & -2 & x-1 \end{vmatrix} \xlongequal{R_1+R_2+R_3} \begin{vmatrix} x-5 & x-5 & x-5 \\ -2 & x-1 & -2 \\ -2 & -2 & x-1 \end{vmatrix} = (x-5)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & x-1 & -2 \\ -2 & -2 & x-1 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[R_3+2R_1]{R_2+2R_1} (x-5)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x+1 & 0 \\ 0 & 0 & x+1 \end{vmatrix} = (x+1)^2(x-5)$$

所以原多项式的根为$x_1=x_2=-1, x_3=5$.

4. 计算下列行列式(要求写出计算过程):

(1) $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 9 & 7 & 8 & 9 & 4 & 3 \\ 7 & 4 & 9 & 7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 8 & 0 & 0 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$; (3) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 2 & 0 \\ 0 & 3 & c & 0 \\ 4 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$.

分析 利用行列式分块的性质(例 1.4.5 及思考题 2)求解.

解 (1)

$$\left|\begin{array}{cccc|cc} 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 9 & 7 & 8 & 9 & 4 & 3 \\ \hline 7 & 4 & 9 & 7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 8 & 0 & 0 \end{array}\right| \overset{\text{再分块}}{=\!=} (-1)^{2\times 4}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}\cdot\left|\begin{array}{cc|cc} 7 & 4 & 9 & 7 \\ 5 & 3 & 6 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 8 \end{array}\right|$$

$$=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}=4;$$

(2)
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{C_{23}}{=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{R_{23}}{=\!=} \left|\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=9;$$

(3)
$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 2 & 0 \\ 0 & 3 & c & 0 \\ 4 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} \overset{R_{12}}{=\!=} \begin{vmatrix} 0 & b & 2 & 0 \\ a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & c & 0 \\ 4 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} \overset{R_{23}}{=\!=} \begin{vmatrix} 0 & b & 2 & 0 \\ 0 & 3 & c & 0 \\ a & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} \overset{C_{13}}{=\!=} \left|\begin{array}{cc|cc} 2 & b & 0 & 0 \\ c & 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 4 & d \end{array}\right|$$

$$=\begin{vmatrix} 2 & b \\ c & 3 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a & 1 \\ 4 & d \end{vmatrix}=(6-bc)(ad-4).$$

5. 解本节的思考题 2.

证 (1) 将第 $r+1$ 列与 r 列交换，由将新的 r 列与 r-1 列交换，如此继续，直到将第 r+1 列交换到第 1 列，这样共交换 r 次；再将第 r+2 列如上方法交换至第 2 列，也交换了 r 次，如此继续直到将 r+s 列交换至第 s 列．于是交换了 rs 次后得到

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & c_{11} & \cdots & c_{1s} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & c_{r1} & \cdots & c_{rs} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1s} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{s1} & \cdots & b_{ss} \end{vmatrix} = (-1)^{rs} \begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1rs} & a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{r1} & \cdots & c_{rs} & a_{r1} & \cdots & a_{rr} \\ b_{11} & \cdots & b_{1s} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & \cdots & b_{ss} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

将所得行列式的第 r+1 行依次与第 r 行，r-1 行，……，第 1 行交换．交换 r 次后，r+1 行交换至第 1 行．类似地交换 r 次后将 r+2 行交换至第 2 行，……，交换 r 次后将第 $r+s$ 行交换至第 s 行，于是交换 rs 次后得：

$$(-1)^{rs}(-1)^{rs} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1rs} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rs} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1s} & a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{s1} & \cdots & c_{ss} & a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \overset{\text{例1.4.5}}{=\!=} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & \cdots & b_{ss} \end{vmatrix}$$

(2), (3) 思路与(1)类似，证明过程略去．

习题 1.5

1. 试用克拉默法则解下列方程组:

(1) $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3=-3, \\ 5x_1-2x_2+7x_3=22, \\ 2x_1-5x_2+4x_3=4; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} bx_1-ax_2=-2ab, \\ -2cx_2+3bx_3=bc, \\ cx_1+ax_3=0, \end{cases}$ 其中$abc\neq 0$;

(3) $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3+2x_4=6, \\ 3x_1-3x_2+3x_3+2x_4=5, \\ 3x_1-x_2-x_3+2x_4=3, \\ 3x_1-x_2+3x_3-x_4=4; \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x_1-3x_3-6x_4=9, \\ 2x_1-5x_2+x_3+x_4=8, \\ -x_1+2x_2+2x_4=-5, \\ x_1-7x_2+4x_3+6x_4=0; \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x+y+z=1, \\ x+\varepsilon y+\varepsilon^2 z=\varepsilon, \\ x+\varepsilon^2 y+\varepsilon z=\varepsilon^2, \end{cases}$ 其中ε为三次原根，即$\varepsilon\neq 1$，且$\varepsilon^3=1$的复数.

解 (1) 因为系数行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 5 & -2 & 7 \\ 2 & -5 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal[R_3-2R_1]{R_2-5R_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -7 & 17 \\ 0 & -7 & 8 \end{vmatrix}$

$\xlongequal{R_3-R_2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -7 & 17 \\ 0 & 0 & -9 \end{vmatrix}=63\neq 0$，根据克拉默法则知，有唯一解. 再计算得

$$D_1=\begin{vmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 22 & -2 & 7 \\ 4 & -5 & 4 \end{vmatrix}=63,\quad D_2=\begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 5 & 22 & 7 \\ 2 & 4 & 4 \end{vmatrix}=126,\quad D_3=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 5 & -2 & 22 \\ 2 & -5 & 4 \end{vmatrix}=189.$$

所以方程组(1)的唯一解为 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=1, x_2=\dfrac{D_2}{D}=2, x_3=\dfrac{D_3}{D}=3.$

(2) 因为系数行列式 $D=\begin{vmatrix} b & -a & 0 \\ 0 & -2c & 3b \\ c & 0 & a \end{vmatrix}=-5abc\neq 0$，根据克拉默法则知，有唯一解. 再计算得

$$D_1=\begin{vmatrix} -2ab & -a & 0 \\ bc & -2c & 3b \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix}=5a^2bc,\qquad D_2=\begin{vmatrix} b & -2ab & 0 \\ 0 & bc & 3b \\ c & 0 & a \end{vmatrix}=-5ab^2c,$$

$$D_3=\begin{vmatrix} b & -a & -2ab \\ 0 & -2c & bc \\ c & 0 & 0 \end{vmatrix}=-5abc^2,$$

所以方程组(2)的唯一解为 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=-a, x_2=\dfrac{D_2}{D}=b, x_3=\dfrac{D_3}{D}=c.$

(3) 因为系数行列式 $D=\begin{vmatrix}2&-1&3&2\\2&-3&3&2\\3&-1&-1&2\\3&-1&3&-1\end{vmatrix}\underline{\underline{\dfrac{R_i-R_{i-1}}{i=4,3,2}}}\begin{vmatrix}2&-1&3&2\\1&-2&0&0\\0&2&-4&0\\0&0&4&-3\end{vmatrix}\underline{\underline{C_2-2C_1}}$

$\begin{vmatrix}2&3&3&2\\1&0&0&0\\0&0&-4&0\\0&0&4&-3\end{vmatrix}\underline{\underline{第二行展开}}(-1)\begin{vmatrix}3&3&2\\2&-4&0\\0&4&-3\end{vmatrix}\underline{\underline{C_2-C_1}}-\begin{vmatrix}3&0&2\\2&-6&0\\0&4&-3\end{vmatrix}$=-(54+16)=-70 $\neq 0$,

根据克拉默法则知，有唯一解．再计算得

$$D_1=\begin{vmatrix}6&-1&3&2\\5&-3&3&2\\3&-1&-1&2\\4&-1&3&-1\end{vmatrix}=-70\,,\qquad D_2=\begin{vmatrix}2&6&3&2\\2&5&3&2\\3&3&-1&2\\3&4&3&-1\end{vmatrix}=-70,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}2&-1&6&2\\2&-3&5&2\\3&-1&3&2\\3&-1&4&-1\end{vmatrix}=-70\,,\qquad D_4=\begin{vmatrix}2&-1&3&6\\2&-3&3&5\\3&-1&-1&3\\3&-1&3&4\end{vmatrix}=-70\,,$$

所以方程组(3)的唯一解为 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=1, x_2=\dfrac{D_2}{D}=1, x_3=\dfrac{D_3}{D}=1, x_4=\dfrac{D_4}{D}=1.$

注意 D 的第 2,3,4 列加到第 1 列可得 D_1；D 的第 1,3,4 列加到第 2 列可得 D_2；D 的第 1,2,3 列加到第 4 列可得 D_4．从而 $D_2=D_1$=-70, $D_3=D_1$=-70, $D_4=D_1$=-70.

(4) 因为系数行列式 $D=\begin{vmatrix}1&0&-3&-6\\2&-5&1&1\\-1&2&2&2\\1&-7&4&6\end{vmatrix}=27\neq 0$,根据克拉默法则知，有唯一解．再计算得 $D_1=\begin{vmatrix}9&0&-3&-6\\8&-5&1&1\\-5&2&2&2\\0&-7&4&6\end{vmatrix}=81,\qquad D_2=\begin{vmatrix}1&9&-3&-6\\2&8&1&1\\-1&-5&2&2\\1&0&4&6\end{vmatrix}=-27,$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&0&9&-6\\2&-5&8&1\\-1&2&-5&2\\1&-7&0&6\end{vmatrix}=-108,\qquad D_4=\begin{vmatrix}1&0&-3&9\\2&-5&1&8\\-1&2&2&-5\\1&-7&4&0\end{vmatrix}=27,$$

所以方程组(4)的唯一解为 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=3, x_2=\dfrac{D_2}{D}=-1, x_3=\dfrac{D_3}{D}=-4, x_4=\dfrac{D_4}{D}=1.$

(5) 因 $(1+\varepsilon+\varepsilon^2)(1-\varepsilon)=1-\varepsilon^3=0$，且 $1-\varepsilon\neq 0$ 知，$1+\varepsilon+\varepsilon^2=0$．据此系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&\varepsilon&\varepsilon^2\\1&\varepsilon^2&\varepsilon\end{vmatrix}\xlongequal{C_1+C_2+C_3}\begin{vmatrix}3&1&1\\0&\varepsilon&\varepsilon^2\\0&\varepsilon^2&\varepsilon\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}\varepsilon&\varepsilon^2\\\varepsilon^2&\varepsilon\end{vmatrix}=3(\varepsilon^2-\varepsilon)\neq 0$$

.根据克拉默法则知，有唯一解．再计算得

$$D_1=\begin{vmatrix}1&1&1\\\varepsilon&\varepsilon&\varepsilon^2\\\varepsilon^2&\varepsilon^2&\varepsilon\end{vmatrix}=0,\quad D_2=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&\varepsilon&\varepsilon^2\\1&\varepsilon^2&\varepsilon\end{vmatrix}=3(\varepsilon^2-\varepsilon),\quad D_3=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&\varepsilon&\varepsilon\\1&\varepsilon^2&\varepsilon^2\end{vmatrix}=0,$$

所以方程组(6)的唯一解为 $x=\dfrac{D_1}{D}=0, y=\dfrac{D_2}{D}=1, z=\dfrac{D_3}{D}=0.$

2. 当 λ 取何值时，线性方程组

$$\begin{cases}x_1 \qquad +\lambda x_3 \qquad =0,\\2x_1 \qquad\qquad -x_4=0,\\\lambda x_1+x_2 \qquad\qquad =0,\\\qquad\quad x_3 \quad 2x_4=0,\end{cases}$$

一定只有零解，为什么？

解 计算得 $$D=\begin{vmatrix}1&0&\lambda&0\\2&0&0&-1\\\lambda&1&0&0\\0&0&1&2\end{vmatrix}\xlongequal{C_1+C_4}\begin{vmatrix}1&0&\lambda&0\\0&0&0&-1\\\lambda&1&0&0\\4&0&1&2\end{vmatrix}\xlongequal{\text{第2行展开}}(-1)\begin{vmatrix}1&0&\lambda\\\lambda&1&0\\4&0&1\end{vmatrix}$$

$$=4\lambda-1$$

根据克拉默法则，当 $D\neq 0$ 时，即 $\lambda\neq\dfrac{1}{4}$ 时，原方程组只有零解．

3. 证明：对任意实数 k，线性方程组

$$\begin{cases}(k-1)x_1+kx_2=0,\\-2x_1+(k-1)x_2=0,\end{cases}$$

只有零解．

证 因为 $D=\begin{vmatrix}k-1&k\\-2&k-1\end{vmatrix}=(k-1)^2+2k=k^2+1\neq 0$，根据克拉默法则，该方程组只有零解．

习题 1.6

1. 计算下列行列式(要求写出计算过程):

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & -1 & b & -1 \\ -1 & -1 & c & -1 \\ -1 & 1 & d & 0 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} x+3 & 1 & 2 \\ x & x-1 & 1 \\ 3(x+1) & x & x+3 \end{vmatrix}$.

解 (1) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & -1 & b & -1 \\ -1 & -1 & c & -1 \\ -1 & 1 & d & 0 \end{vmatrix} \overset{R_3+R_1}{\underset{R_4+R_1}{=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & -1 & b & -1 \\ 0 & -1 & a+c & 0 \\ 0 & 1 & a+d & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{按第1列展开}}{=\!=} \begin{vmatrix} -1 & b & -1 \\ -1 & a+c & 0 \\ 1 & a+d & 1 \end{vmatrix}$

$\overset{R_1+R_3}{=\!=} \begin{vmatrix} 0 & a+b+d & 0 \\ -1 & a+c & 0 \\ 1 & a+d & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{按第3列展开}}{=\!=} \begin{vmatrix} 0 & a+b+d \\ -1 & a+c \end{vmatrix} = a+b+d$.

(2) $\begin{vmatrix} x+3 & 1 & 2 \\ x & x-1 & 1 \\ 3(x+1) & x & x+3 \end{vmatrix} \overset{R_3-R_1-R_2}{=\!=} \begin{vmatrix} x+3 & 1 & 2 \\ x & x-1 & 1 \\ x & 0 & x \end{vmatrix} \overset{C_1-C_2-C_3}{=\!=}$

$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ x-1 & x-1 & 1 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} \overset{C_1-C_2}{=\!=} \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ 0 & x-1 & 1 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} = x(x-1)^2$.

2. 试用多种方法证明: 当 $a_i \neq 0 \quad (i=1,2,\cdots,n)$ 时,

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

$$= a_1a_2\cdots a_n(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}).$$

证 方法一 归化

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} \overset{R_i-R_n}{\underset{i=1,\cdots,n-1}{=\!=}}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & -a_n \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & -a_n \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & -a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} \xlongequal[\text{注意} a_i \neq 0]{R_n + \sum_{i=1}^{n-1} -\frac{1}{a_i} R_i} \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & -a_n \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & -a_n \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & -a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+a_n+a_n\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{a_i} \end{vmatrix}$$

$$=a_1a_2\cdots a_n(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i})=\text{右端}.$$

方法二 归纳法

当 $n=1$ 时，$D_1=1+a_1=a_1(1+\frac{1}{a_1})$. 结论成立.

假设 $n-1$ 时结论成立，即有 $D_{n-1}=a_1a_2\cdots a_{n-1}(1+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{a_i})$.

则当 n 时，将 D_n 的第 n 列看成 1+0,1+0,……,1+ a_n，故 D_n 可表示为 2 个行列式之和，而第 2 个行列式按第 n 列展开可算出为 a_nD_{n-1} 从而

$$D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} + a_nD_{n-1}$$

而 $$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[i=1,2,\cdots,n-1]{R_i-R_n} \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = a_1a_2\cdots a_{n-1}.$$

所以 $D_n=a_1a_2\cdots a_{n-1}+a_nD_{n-1}=a_1a_2\cdots a_{n-1}+a_n\ a_1a_2\cdots a_{n-1}(1+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{a_i})$

$$=a_1a_2\cdots a_n(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i})=\text{右端}.$$

方法三 递推

由证明(二)可知 D_n 与 D_{n-1} 存在以下递推关系: $D_n=a_1a_2\cdots a_{n-1}+a_nD_{n-1}$

所以 $D_n=a_1a_2\cdots a_{n-1}+a_nD_{n-1}=a_1a_2\cdots a_n(\frac{1}{a_n}+\sum_{i=1}^{n}\frac{D_{n-1}}{a_i})=\cdots=a_1a_2\cdots a_n(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i})$

=右端.

方法四 加边法

$$D_n=\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 1+a_1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & 1+a_2 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}_{n+1}$$

$$\underset{i=2,3,\cdots,n+1}{\overset{C_i-C_1}{=\!=}}\begin{vmatrix}1 & -1 & -1 & \cdots & -1\\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n\end{vmatrix}\overset{R_1+\sum_{i=2}^{n+1}\frac{1}{a_i}R_i}{=\!=\!=}$$

$$\begin{vmatrix}1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n\end{vmatrix}=a_1a_2\cdots a_n\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)=\text{右端}.$$

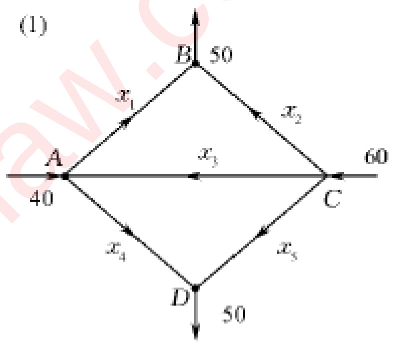
3. 计算 $D_5=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3\\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1\end{vmatrix}$.

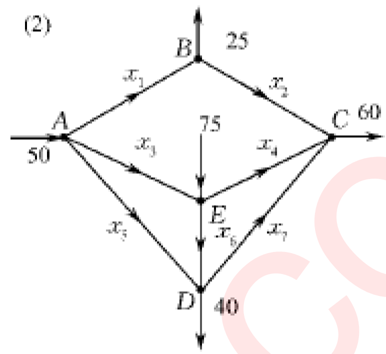
$$D_5=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3\\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1\end{vmatrix}\overset{C_1+\sum_{i=2}^{5}C_i}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}15 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 15 & 1 & 2 & 3 & 4\\ 15 & 5 & 1 & 2 & 3\\ 15 & 4 & 5 & 1 & 2\\ 15 & 3 & 4 & 5 & 1\end{vmatrix}\underset{i=2,3,4,5}{\overset{R_i-R_1}{=\!=}}$$

$$\begin{vmatrix}15 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1\\ 0 & 3 & -2 & -2 & -2\\ 0 & 2 & 2 & -3 & -3\\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4\end{vmatrix}\underset{R_5+R_2}{\overset{R_3+3R_2,\ R_4+2R_2}{=\!=\!=}}\begin{vmatrix}15 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & -5 & -5 & -5\\ 0 & 0 & 0 & -5 & -5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5\end{vmatrix}=3\times 5^4.$$

习题 2.1

1．下列图(1)(2)，分别为某些地区的管道网，并已经标明了流量和流向，请列出确定各段流量 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 的线性方程组.





解 (1)根据各个结点上流进和流出的流量相等，有

$$\begin{cases} x_1-x_3+x_4=40, \\ x_1+x_2=50, \\ x_2+x_3+x_5=60, \\ x_4+x_5=50. \end{cases}$$

(2)根据各个结点上流进和流出的流量相等，有

$$\begin{cases} x_1+x_3+x_5=50, \\ x_1-x_2=25, \\ x_2+x_4+x_7=60, \\ x_5+x_6-x_7=40, \\ -x_3+x_4+x_6=75. \end{cases}$$

2．写出下列线性方程组的系数矩阵 A 和增广矩阵 $\bar{A}$.

(1) $\begin{cases} x_1-x_2=1, \\ x_2-x_3=1, \\ x_3-x_4=1, \\ -x_1+x_4=-1. \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x_4+2x_5-1=0, \\ x_1-3x_4-2=0, \\ x_1+2x_2+3x_3-2=0, \\ -2x_2+4x_3-3x_4+x_5-1=0. \end{cases}$

解 (1)该方程组的系数矩阵为 $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

增广矩阵为 $\overline{A}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0 & \vdots & 1\\ 0 & 1 & -1 & 0 & \vdots & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & \vdots & 1\\ -1 & 0 & 0 & 1 & \vdots & -1\end{bmatrix}$.

(2)该方程组的系数矩阵为 $A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 0 & -3 & 0\\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 4 & -3 & 1\end{bmatrix}$;

增广矩阵为 $\overline{A}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1 & 2 & \vdots & 1\\ 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & \vdots & 2\\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & \vdots & 2\\ 0 & -2 & 4 & -3 & 1 & \vdots & 1\end{bmatrix}$.

3. 只用初等行变换将下列矩阵化为约化阶梯形

(1) $\begin{bmatrix}1 & 7 & 2 & 8\\ 0 & -5 & 3 & 6\\ -1 & -7 & 3 & 7\end{bmatrix}$; (2) $\begin{bmatrix}1 & 3 & 12\\ 4 & 7 & 7\\ 3 & 6 & 9\\ 2 & -3 & 3\end{bmatrix}$; (3) $\begin{bmatrix}1 & -1 & 3 & -1\\ 2 & -1 & -1 & 4\\ 3 & -2 & 2 & 3\\ 1 & 0 & -4 & 5\end{bmatrix}$.

解 (1) $\begin{bmatrix}1 & 7 & 2 & 8\\ 0 & -5 & 3 & 6\\ -1 & -7 & 3 & 7\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3+R_1}\begin{bmatrix}1 & 7 & 2 & 8\\ 0 & -5 & 3 & 6\\ 0 & 0 & 5 & 15\end{bmatrix}\xrightarrow[\frac{1}{5}R_3]{-\frac{1}{5}R_2}\begin{bmatrix}1 & 7 & 2 & 8\\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{6}{5}\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{bmatrix}$

$\xrightarrow[R_1-2R_3]{R_2+\frac{3}{5}R_3}\begin{bmatrix}1 & 7 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{5}\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{bmatrix}\xrightarrow{R_1-7R_2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -\frac{11}{5}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{5}\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{bmatrix}$.

(2) $\begin{bmatrix}1 & 3 & 12\\ 4 & 7 & 7\\ 3 & 6 & 9\\ 2 & -3 & 3\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{R_3-3R_1\\ R_4-2R_1}]{R_2-4R_1}\begin{bmatrix}1 & 3 & 12\\ 0 & -5 & -41\\ 0 & -3 & -27\\ 0 & -9 & -21\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{-\frac{1}{3}R_3\\ -\frac{1}{3}R_4}]{\frac{1}{5}R_2}\begin{bmatrix}1 & 3 & 12\\ 0 & 1 & \frac{41}{5}\\ 0 & 1 & 4\\ 0 & 3 & 7\end{bmatrix}$

$$\xrightarrow{R_{23}}\begin{bmatrix}1&3&12\\0&1&9\\0&1&\dfrac{41}{5}\\0&3&7\end{bmatrix}\xrightarrow[R_4-3R_2]{R_3-R_2}\begin{bmatrix}1&3&12\\0&1&9\\0&0&-\dfrac{5}{4}\\0&0&-20\end{bmatrix}\xrightarrow{-\frac{5}{4}R_3}\begin{bmatrix}1&3&12\\0&1&9\\0&0&1\\0&0&-20\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{R_2-9R_3\\R_1-12R_3}]{R_4-20R_3}\begin{bmatrix}1&3&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{R_1-3R_2}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

(3)
$$\begin{bmatrix}1&-1&3&-1\\2&-1&-1&4\\3&-2&2&3\\1&0&-4&5\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{R_3-3R_1\\R_4-R_1}]{R_2-2rR_1}\begin{bmatrix}1&-1&3&-1\\0&1&-6&6\\0&1&-7&6\\0&1&-7&6\end{bmatrix}\xrightarrow[R_3-R_2]{R_4-R_3}\begin{bmatrix}1&-1&3&-1\\0&1&-6&6\\0&0&-1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{R_2+6R_3\\R_1-3R_3}]{-R_3}\begin{bmatrix}1&-1&0&-1\\0&1&0&6\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{R_1+R_2}\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&6\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

4. 证明互换可通过连续施行若干次倍乘，倍加而实现.

证 以行互换 R_{ij} 为例：列互换可以同样证明.

若 $A=\begin{array}{c}i\\ \\ j\end{array}\begin{bmatrix}a_{i1}&a_{i2}&\dots&a_{in}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{j1}&a_{j2}&\cdots&a_{jn}\end{bmatrix}\xrightarrow{R_j+(-1)R_i}\begin{array}{c}i\\ \\ j\end{array}\begin{bmatrix}a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{j1}-a_{i1}&a_{j2}-a_{i2}&\cdots&a_{jn}-a_{in}\end{bmatrix}$

$$\xrightarrow{R_i+R_j}\begin{array}{c}i\\ \\ j\end{array}\begin{bmatrix}a_{j1}&a_{j2}&\cdots&a_{jn}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{j1}-a_{i1}&a_{j2}-a_{i2}&\cdots&a_{jn}-a_{in}\end{bmatrix}\xrightarrow{R_j+(-1)R_i}\begin{array}{c}i\\ \\ j\end{array}\begin{bmatrix}a_{j1}&a_{j2}&\dots&a_{jn}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\-a_{i1}&-a_{i2}&\cdots&-a_{in}\end{bmatrix}$$

$\xrightarrow{(-1)R_{ji}}\begin{array}{c}i\\ \\ j\end{array}\begin{bmatrix}a_{j1}&a_{j2}&\dots&a_{jn}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\end{bmatrix}$，这相当于 A 中交换第 i 行和第 j 行，所以结论成立.

5. 设 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 .$$

证明：用初等行变换能把n行n 列矩阵 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ 化为 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$.

证 若用第三章知识，结论显然成立．现用本节知识来证明．因$|A|\neq 0$,说明

$a_{11}\quad a_{12}\quad \dots\quad a_{1n}$ 不全为零,故当某个$a_{k1}\neq 0$,通过适当的行互换,可使得a_{k1}位于左上角,用

a_{k1}^{-1}来乘第一行,然后将其余行减去第一行的适当倍数,矩阵A可以化为: $\begin{bmatrix} 1 & a_{12}' & \dots & a_{1n}' \\ 0 & & & \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$,

由于$|A|\neq 0$,此时必有$|A_1|\neq 0$,故可以对 A_1重复对A的讨论，从而证得A可经初等行变换化

为$\begin{bmatrix} 1 & a_{12}' & a_{13}' & \dots a_{1n}' \\ 0 & 1 & a_{23}' & \dots a_{2n}' \\ 0 & 0 & 1 & \dots a_{3n}' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots\ 1 \end{bmatrix}$, 然后再将第$n$行的$-a_{in}'$倍加到第$i$行($i=1,2,\dots,n-1$),再将第

$n-1$行的$-a_{i(n-1)}'$倍加到第i行($i=1,2,\dots,n-2$),这样继续下去,一直到将第2行的$-a_{12}'$倍加

到第1行,此时A就化为$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$，故所证结论成立.

习题 2.2

1.设 $m\times n$ 矩阵 A 的秩为 $r(r>1,且 r<m,r<n)$，问 A 中是否一定存在不为零的 $r-1$ 阶子式？是否存在为零的 r 阶子式？是否存在不为零的 $r+1$ 阶子式？为什么？

解 A 中一定存在不为零的 $r-1$ 阶子式, 否则秩 $(A)<r-1$, 与题设秩（A）$=r$ 矛盾. 由秩（A）$=r$ 知，A 中至少存在一个 r 阶子式不为零，这表明 A 中的 r 阶子式只要有一个不为零即可, 其余可以等于零, 也可以不等于零. A 中一定不存在不为零的 $r+1$ 阶子式, 否则 A 的秩至少是 $r+1$，这也与题设秩（A）$=r$ 矛盾.

2. 求下列矩阵的秩

(1) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & -5 & 4 & 2 & 7 \\ 1 & 5 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; (2) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$;

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; (4) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

分析 求某个元素为已知矩阵的秩的方法是对矩阵 A 进行初等行变换，初等列变换化为阶梯矩阵, 则所得阶梯形矩阵中不为零行的行数即为矩阵 A 的秩.

解 (1) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & -5 & 4 & 2 & 7 \\ 1 & 5 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{13}} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & -5 & 4 & 2 & 7 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3-2R_1]{R_2-3R_1} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -20 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -10 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{R_3-1/2R_2} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -20 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 所以秩 $(A)=2$.

(2) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{14}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow[R_4-R_2]{R_3+R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4+R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, 所以秩 $(A)=4$.

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2-R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_5-R_2]{R_3-R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\xrightarrow[R_4-\frac{1}{2}R_3]{R_5-R_4}\begin{bmatrix}1&0&1&0&0\\0&1&-1&0&0\\0&0&2&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$，所以秩$(A)=5$；本题也可以计算出该矩阵的行列式不为零，得该矩阵秩为 5.

(4) $$\begin{bmatrix}1&-1&2&1&0\\2&-2&4&-1&0\\3&0&6&-2&1\\0&3&0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow[R_3-3R_1]{R_2-2R_1}\begin{bmatrix}1&-1&2&1&0\\0&0&0&-3&0\\0&3&0&-5&1\\0&3&0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{R_{23}}\begin{bmatrix}1&-1&2&1&0\\0&3&0&-5&1\\0&0&0&-3&0\\0&3&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4-R_2}\begin{bmatrix}1&-1&2&1&0\\0&3&0&-5&1\\0&0&0&-3&0\\0&0&0&5&0\end{bmatrix}\xrightarrow{R_4+\frac{3}{5}R_3}\begin{bmatrix}1&-1&2&1&0\\0&3&0&-5&1\\0&0&0&-3&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$，所以秩$(A)=3$.

3. 设矩阵A经过一系列初等行变换和初等列变换化为$\begin{bmatrix}2&0&5&6&-1&8\\0&0&-1&-2&3&4\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0\end{bmatrix}$，则秩$(A)=$___.

解 因为初等变换不改变矩阵的秩，所以上述矩阵的秩即为矩阵 A 的秩，从而秩$(A)=3$，故应填 3.

4. 设$A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&2&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&2&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，$D=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，则与矩阵$A$秩相等的矩阵是__________，且说明理由.

解 $A\xrightarrow[R_3-R_1]{R_2-R_1}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，所以秩$(A)=1$；$B\xrightarrow[R_3-R_1]{R_2-R_1}\begin{bmatrix}1&2&1&1\\0&-1&0&0\\0&-1&0&0\end{bmatrix}$

$\xrightarrow{R_3-R_2}\begin{bmatrix}1&2&1&1\\0&-1&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，所以秩$(B)=2$；$C\xrightarrow{R_2-R_1}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，所以秩$(C)=2$，而矩阵 D 的秩为 1，故应填D.

5. 设$a_i(i=1,2,\dots,m)$不全为零，$b_j(j=1,2,\dots,n)$不全为零，且$A_{m\times n}=\begin{bmatrix}a_1b_1&a_1b_2&\cdots&a_1b_n\\a_2b_1&a_2b_2&\cdots&a_2b_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_mb_1&a_mb_2&\cdots&a_mb_n\end{bmatrix}$，求矩阵$A_{m\times n}$的秩.

解 不妨设$a_i\neq 0$，则

$$A_{m\times n}\xrightarrow{\frac{1}{a_i}R_i}\begin{array}{c}\\ \\ \\ i行\\ \\ \end{array}\begin{bmatrix}a_1b_1 & a_1b_2 & \dots & a_1b_n\\ a_2b_1 & a_2b_2 & \dots & a_2b_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ b_1 & b_2 & \dots & b_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\end{bmatrix}\xrightarrow[j=1,\cdots,i-1,i+1,\cdots,n]{R_j-a_jR_i}\begin{array}{c}\\ \\ \\ i行\\ \\ \end{array}\begin{bmatrix}0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots\\ b_1 & b_2 & \dots & b_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$，由 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 不全为零知，

秩$(A_{m\times n})=1$.

6. 设 $A=\begin{bmatrix}k & 1 & 1 & 1\\ 1 & k & 1 & 1\\ 1 & 1 & k & 1\\ 1 & 1 & 1 & k\end{bmatrix}$, 计算 A 的秩.

解: $$A\xrightarrow{C_1+C_2+C_3+C_4}\begin{bmatrix}k+3 & 1 & 1 & 1\\ k+3 & k & 1 & 1\\ k+3 & 1 & k & 1\\ k+3 & 1 & 1 & k\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{R_2-R_1\\ R_3-R_1\\ R_4-R_1}}\begin{bmatrix}k+3 & 1 & 1 & 1\\ 0 & k-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & k-1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & k-1\end{bmatrix},$$

所以当 $k\neq -4$ 且 $k\neq 1$ 时, 秩$(A)=4$; $k=1$ 时 秩$(A)=1$; $k=-3$ 时， 秩$(A)=3$.

习题 2.3

1. 解下列线性方程组：

（1）$\begin{cases} x_1-x_2+x_3+2x_4=1, \\ -2x_1+2x_2-3x_3+3x_4=2, \\ x_1-x_2+2x_3+5x_4=-1, \\ -x_1+x_2-3x_3+2x_4=4; \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} x_1-x_2+3x_3-4x_4=4, \\ x_2-x_3+x_4=-3, \\ x_1+3x_2+x_4=1, \\ -7x_2+3x_3+x_4=-3; \end{cases}$

（3）$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4=1, \\ x_1-2x_2+x_3-x_4=-1, \\ x_1-2x_2+x_3+5x_4=5; \end{cases}$　　（4）$\begin{cases} x_1+x_2-x_3-x_4=1, \\ 2x_1+x_2+x_3+x_4=4, \\ 4x_1+3x_2-x_3-x_4=6, \\ x_1+2x_2-4x_3-4x_4=-1; \end{cases}$

（5）$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4=0, \\ x_2-x_3+x_4=0, \\ x_1+3x_2-3x_4=0, \\ x_1-4x_2+3x_3-2x_4=0; \end{cases}$　　（6）$\begin{cases} x_1-x_3+x_5=0, \\ x_2-x_4+x_6=0, \\ x_1-x_2+x_5-x_6=0, \\ x_2-x_3+x_6=0, \\ x_1-x_4+x_5=0. \end{cases}$

(1) **解**　将增广矩阵只用初等行变换化为约化阶梯形矩阵.

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & -3 & 2 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[R_4+R_1]{\substack{R_2+2R_1 \\ R_3-R_1}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{R_3+R_2 \\ R_4-2R_2}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{R_4+R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right],$$

故秩$(A)=3\neq$秩$(\overline{A})=4$，所以原方程组无解.

(2) **解**　将增广矩阵只用初等行变换化为阶梯形矩阵.

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3-R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 5 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{R_3-5R_2 \\ R_4+7R_2}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -24 \end{array}\right] \xrightarrow{R_4+2R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{1}{8}R_4]{\frac{1}{2}R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right],$$ 故秩$(A)=$秩$(\overline{A})=4$（未知量个数），从而方程组有唯一解：

$$x_1=-8, x_2=3, x_3=6, x_4=0.$$

(3) **解** 将增广矩阵只用初等行变换化为阶梯形矩阵.

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}1&-2&1&1&\vdots 1\\1&-2&1&-1&\vdots -1\\1&-2&1&5&\vdots 5\end{bmatrix}\xrightarrow[R_3-R_1]{R_2-R_1}\begin{bmatrix}1&-2&1&1&\vdots 1\\0&0&0&-2&\vdots -2\\0&0&0&4&\vdots 4\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3+2R_2}\begin{bmatrix}1&-2&1&1&\vdots 1\\0&0&0&-2&\vdots -2\\0&0&0&0&\vdots 0\end{bmatrix},$$

故秩(A)=秩($\overline{A}$)=2<4(未知量个数)，从而方程组有无穷多个解，且有两个自由未知量. 与原方程组同解的方程组为$\begin{cases}x_1-2x_2+x_3+x_4=1,\\ x_4=1.\end{cases}$ 从而解为$\begin{cases}x_1=2t_1-t_2,\\x_2=t_1,\\x_3=t_2,\\x_4=1,\end{cases}$ 其中t_1,t_2为任意常数.

(4) **解** 将增广矩阵只用初等行变换化为阶梯形矩阵:

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}1&1&-1&-1&\vdots 1\\2&1&1&1&\vdots 4\\4&3&-1&-1&\vdots 6\\1&2&-4&-4&\vdots -1\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{R_3-4R_1\\R_4-R_1}]{R_2-2R_1}\begin{bmatrix}1&1&-1&-1&\vdots 1\\0&-1&3&3&\vdots 2\\0&-1&3&3&\vdots 2\\0&1&-3&-3&\vdots -2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3-R_2]{R_4+R_2}\begin{bmatrix}1&1&-1&-1&\vdots 1\\0&-1&3&3&\vdots 2\\0&0&0&0&\vdots 0\\0&0&0&0&\vdots 0\end{bmatrix},$$ 故秩(A)=秩($\overline{A}$)=2<4(未知量个数)，从而方程组有无穷多个解，且有两个自由未知量. 与原方程组同解的方程组为$\begin{cases}x_1+x_2-x_3-x_4=1,\\-x_2+3x_3+3x_4=2.\end{cases}$ 从而解为

$$\begin{cases}x_1=3-2t_1-2t_2,\\x_2=-2+3t_1+3t_2,\\x_3=t_1,\\x_4=t_2,\end{cases}$$ 其中t_1,t_2为任意常数.

(5) **解** 将增广矩阵只用初等行变换化为约化阶梯形矩阵:

$$A=\begin{bmatrix}1&-2&3&\vdots -4\\0&1&-1&\vdots 1\\1&3&0&\vdots -3\\1&-4&3&\vdots -2\end{bmatrix}\xrightarrow[R_4-R_1]{R_3-R_1}\begin{bmatrix}1&-2&3&\vdots -4\\0&1&-1&\vdots 1\\0&5&-3&\vdots 1\\0&-2&0&\vdots 2\end{bmatrix}\xrightarrow[R_4+2R_2]{R_3-5R_2}\begin{bmatrix}1&-2&3&\vdots -4\\0&1&-1&\vdots 1\\0&0&2&\vdots -4\\0&0&-2&\vdots 4\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{2}R_3]{R_4+R_3}\begin{bmatrix}1&-2&3&\vdots -4\\0&1&-1&\vdots 1\\0&0&1&\vdots -2\\0&0&0&\vdots 0\end{bmatrix}\xrightarrow[R_1-3R_3]{R_2+R_3}\begin{bmatrix}1&-2&0&\vdots 2\\0&1&0&\vdots -1\\0&0&1&\vdots -2\\0&0&0&\vdots 0\end{bmatrix}\xrightarrow{R_1+2R_2}\begin{bmatrix}1&0&0&\vdots 0\\0&1&0&\vdots -1\\0&0&1&\vdots -2\\0&0&0&\vdots 0\end{bmatrix},$$

故秩（A）=3<4(未知量个数)，从而方程组有无穷多解. 与原方程组同解的方程组为

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0, \\ x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$ 而解为 $$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = t, \\ x_3 = 2t, \\ x_4 = t, \end{cases}$$ 其中 t 为任意常数.

(6) **解** 将系数矩阵只用初等行变换化为阶梯形矩阵:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_5-R_1]{R_3-R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4-R_2]{R_3+R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_4+R_3]{R_5+R_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

故秩（A）=3<6(未知量个数)，从而方程组有无穷多解.

再将 A 化为约化阶梯型 $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

据此与原方程组同解的方程组为 $$\begin{cases} x_1 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0, \\ x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

从而解为 $$\begin{cases} x_1 = t_1 - t_2, \\ x_2 = t_1 - t_3, \\ x_3 = t_1, \\ x_4 = t_1, \\ x_5 = t_2, \\ x_6 = t_3, \end{cases}$$ 其中 t_1, t_2, t_3 为任意常数.

2．下列齐次线性方程组哪些不必通过计算直接判断有非零解？为什么？

（1）$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_2 - 7x_3 + 8x_4 = 0; \end{cases}$$ （2）$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$$

（1）**解** 因为系数矩阵 A 是 3×4 矩阵，故秩（$A_{3\times4}$）≤3<4(未知量个数)所以必有非零解.

（2）**解** 由于第三个方程和第一个方程相同，所以它实际上是两个方程三个未知量的齐次线性方程组，同第（1）题的理由，可知有非零解.

3．λ 为何值时，齐次线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + \lambda x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0; \end{cases}$ 只有零解.

解　这是三个方程三个未知量的线性方程组可以用系数行列式来判断.

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[R_1 - R_3]{R_2 - R_3} \begin{vmatrix} \lambda-2 & 2 & 0 \\ -1 & \lambda+1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda+1)+2 = \lambda(\lambda-1),$$

所以当 $\lambda \neq 0$ 且 $\lambda \neq 1$ 时，$|A| \neq 0$．此时该方程组只有零解.

4．若齐次线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_4 = 0, \\ (\lambda+2)x_1 - x_2 + 4x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + \lambda x_4 = 0; \end{cases}$ 有非零解，则 $\lambda =$ ______

解　$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ \lambda+2 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & \lambda \end{vmatrix} = 3(-1)^{4+3} \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ \lambda+2 & -1 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal{R_2 + 2R_3} -3 \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 2\lambda+5 & 0 & 7 \\ \lambda+2 & -1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$-3(-1)(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 2\lambda+5 & 7 \end{vmatrix} = -3(5\lambda-5),$$

所以当 $\lambda = 1$ 时 $|A|$=0，此时有非零解，故应填 1.

5．解习题 2.1 第一题所列出的线性方程

解　（1）由习题 2.1 的第(1)小题知，方程组为 $\begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 = 40, \\ x_1 + x_2 = 50, \\ x_2 + x_3 + x_5 = 60, \\ x_4 + x_5 = 50. \end{cases}$ 将增广矩阵只用初等行变换化为阶梯形矩阵:

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 40 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 50 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 - R_1} \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 40 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 50 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 - R_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 40 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 50 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 50 \end{array}\right] \xrightarrow{R_4 - R_3} \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 40 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 50 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_1 - R_2]{R_2 + R_3}$$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & \vdots & -10 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & \vdots & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \vdots & 50 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$，故秩（A）＝秩（$\bar{A}$）＝3<5(未知量个数)，从而方程组有无穷多个解，且有 2 个自由未知量．与原方程组同解的方程组为 $\begin{cases} x_1 - x_3 - x_5 = -10, \\ x_2 + x_3 + x_5 = 60, \\ x_4 + x_5 = 50, \\ x_3 = t_1, \\ x_5 = t_2. \end{cases}$ 注意到 $x_i (i = 1,2,3,4,5)$ 为非负数，可得解为 $\begin{cases} x_1 = t_1 + t_2 - 10, \\ x_2 = 60 - t_1 - t_2, \\ x_3 = t_1, \\ x_4 = 50 - t_2, \\ x_5 = t_2, \end{cases}$ 其中 t_1, t_2 满足 $t_1 \ge 0, 0 \le t_2 \le 50, 0 \le t_1 + t_2 \le 60$.

（2）由习题 2.1 的第(2)小题知，方程组为 $\begin{cases} x_1 + x_3 + x_5 = 50, \\ x_1 - x_2 = 25, \\ x_2 + x_4 + x_7 = 60, \\ x_5 + x_6 - x_7 = 40, \\ -x_3 + x_4 + x_6 = 75. \end{cases}$ 将增广矩阵只用初等行变换化为阶梯形矩阵：

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 50 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 25 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & \vdots & 40 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 75 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{R_3+R_2 \\ R_5-R_3 \\ R_5-R_4}]{R_2-R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 50 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & \vdots & -25 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & \vdots & 35 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & \vdots & 40 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix},$$

由于秩（A）＝秩（$\bar{A}$）=4<7，从而方程组有无穷多个解，且有 3 个自由未知量．与原方程组同解的方程组为 $\begin{cases} x_1 + x_3 + x_5 = 50, \\ -x_2 - x_3 - x_5 = -25, \\ -x_3 + x_4 - x_5 + x_7 = 35, \\ x_5 + x_6 - x_7 = 40. \end{cases}$ 注意到 $x_i (i = 1,2,3,4,5)$ 为非负数，可得解为

$$\begin{cases} x_1 = 85 - t_1 - t_3, \\ x_2 = 60 - t_1 - t_3, \\ x_3 = -75 + t_1 + t_2, \\ x_4 = t_1, \\ x_5 = 40 - t_2 + t_3, \\ x_6 = t_2, \\ x_7 = t_3, \end{cases}$$

其中 t_1, t_2 满足 $75 \le t_1 + t_2 \le 100, t_1 + t_3 \le 60, t_2 - t_3 \le 40$.

习题 2.4

1. 若一个非齐次线性方程组的增广矩阵经一系列初等行变换化为

$$\left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & -1 & 3 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & \lambda-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-1 & \lambda+1 \end{array}\right],$$

则当 λ =____时，方程组无解；当 λ 为____时，方程组有无穷多解，且含有____个自由未知量.

解 当 $\lambda \neq 1$ 时, 秩(A)=秩($\overline{A}$)=4, 所以方程有解, 含有自由未知量的个数为线性方程组的未知量个数(5)−增广矩阵的秩(4)=1;

当 $\lambda = 1$ 时, 秩(A)=3, 秩($\overline{A}$)=4, 秩(A)$\neq$秩($\overline{A}$), 所以方程组无解.

所以填入的答案为：当 λ =_1_时，方程组无解；当 λ 为不等于 1 的数时，方程组有无穷多解，且含有_1_个自由未知量.

2. 讨论下列线性方程组，当 λ 取何值时方程组无解，有惟一解，有无穷多个解？在有无穷多个解时写出其通解：

(1) $\begin{cases} x_1+x_2+\lambda x_3=2, \\ 3x_1+4x_2+2x_3=\lambda, \\ 2x_1+3x_2-x_3=1; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} (\lambda+3)x_1+x_2+2x_3=\lambda, \\ \lambda x_1+(\lambda-1)x_2+x_3=\lambda, \\ 3(\lambda+1)x_1+\lambda x_2+(\lambda+3)x_3=3; \end{cases}$

(3)* $\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=1, \\ x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda, \\ x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2. \end{cases}$

解 (1) 对线性方程组的增广矩阵 $\overline{A}$ 施行初等行变换化阶梯形：

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & \lambda & 2 \\ 3 & 4 & 2 & \lambda \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3-2R_1]{R_2-3R_1} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & \lambda & 2 \\ 0 & 1 & 2-3\lambda & \lambda-6 \\ 0 & 1 & -1-2\lambda & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3-R_2} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & \lambda & 2 \\ 0 & 1 & 2-3\lambda & \lambda-6 \\ 0 & 0 & -3+\lambda & 3-\lambda \end{array}\right],$$

当 $\lambda \neq 3$ 时, 秩(A)=秩($\overline{A}$)=3=未知量个数, 所以此线性方程组有唯一解;

当 $\lambda = 3$ 时, 秩(A)=秩($\overline{A}$)=2<未知量个数, 所以线性方程组有无穷多解. 原方程组同解于

$$\begin{cases} x_1+x_2+3x_3=2, \\ x_2-7x_3=-3. \end{cases}$$

故通解为 $\begin{cases} x_1=5-10t, \\ x_2=7t-3, \\ x_3=t, \end{cases}$ 其中 t 为任意常数.

(2) 计算该线性方程组的系数矩阵的行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda+3 & 1 & 2 \\ \lambda & \lambda-1 & 1 \\ 3(\lambda+1) & \lambda & \lambda+3 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda-1),$$

由克拉默法则可知, 当 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq 0$ 时, 该线性方程组有唯一解.

下面只需讨论当 $\lambda=1$ 和 $\lambda=0$ 两种情况即可.

当 $\lambda=1$ 时，对线性方程组的增广矩阵 $\overline{A}$ 施行初等行变换化阶梯形:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & \vdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 6 & 1 & 4 & \vdots & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{12}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 4 & 1 & 2 & \vdots & 1 \\ 6 & 1 & 4 & \vdots & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3-6R_1]{R_2-4R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & -2 & \vdots & -3 \\ 0 & 1 & -2 & \vdots & -3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3-R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & -2 & \vdots & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

秩（A）=秩（$\overline{A}$）=2<未知量个数，所以线性方程组有无穷多解．原方程组同解于

$$\begin{cases} x_1+x_3=1, \\ x_2-2x_3=-3. \end{cases}$$

故通解为 $\begin{cases} x_1=1-t, \\ x_2=2t-3, \\ x_3=t, \end{cases}$ 其中 t 为任意常数.

当 $\lambda=0$ 时，对线性方程组的增广矩阵 $\overline{A}$ 施行初等行变换化阶梯形:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & \vdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \vdots & 0 \\ 3 & 0 & 3 & \vdots & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3-R_1} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & \vdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \vdots & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3-R_2} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & \vdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 3 \end{bmatrix}$$

秩（A）$\neq$ 秩（$\overline{A}$），所以此时该线性方程组无解.

（3）对线性方程组的增广矩阵 $\overline{A}$ 施行初等行变换化阶梯形:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \vdots & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \vdots & \lambda^2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{13}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda & \vdots & \lambda^2 \\ 1 & \lambda & 1 & \vdots & \lambda \\ \lambda & 1 & 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3-\lambda R_1]{R_2-R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda & \vdots & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \vdots & \lambda-\lambda^2 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & \vdots & 1-\lambda^3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3+R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda & \vdots & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & -(\lambda-1) & \vdots & -\lambda(\lambda-1) \\ 0 & 0 & -(\lambda+2)(\lambda-1) & \vdots & (\lambda+1)^2(\lambda-1) \end{bmatrix}$$

当 $\lambda\neq1$，且 $\lambda\neq-2$ 时，秩（A）=秩（$\overline{A}$）=3=未知量个数，所以此线性方程组有唯一解;

当 $\lambda=-2$ 时，秩（A）=2，秩（$\overline{A}$）=3，秩（A）$\neq$ 秩（$\overline{A}$），所以此线性方程组无解;

当 $\lambda=1$ 时，秩（A）=秩（$\overline{A}$）=1<未知量个数，所以此线性方程组有无穷多解．原方程组同解于

$$x_1+x_2+x_3=1.$$

故通解为 $\begin{cases} x_1=1-t_2-t_1, \\ x_2=t_2, \\ x_3=t_1, \end{cases}$ 其中 t_1,t_2 为任意常数.

3. 问 a, b 取何值时线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = a, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 3, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = b \end{cases}$$

有解?有解时，写出通解.

解 对线性方程组的增广矩阵$\overline{A}$施行初等行变换化阶梯形:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & \vdots & a \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & \vdots & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & \vdots & b \end{bmatrix} \xrightarrow[R_4-5R_1]{R_2-3R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & \vdots & a-3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & \vdots & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & \vdots & b-5 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_4-R_2]{R_3+R_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & \vdots & a-3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & b-a-2 \end{bmatrix},$$

当$a \neq 0$，或者$b-a-2 \neq 0$时，秩$(A) \neq$ 秩$(\overline{A})$，此线性方程组无解;

仅当$a=0$并且$b-a-2=0$时，秩(A)=秩$(\overline{A})$=2，方程组有解. 即当$a=0$，$b=2$时方程组有无穷多解. 原方程组同解于

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1, \\ -x_2 - 2x_3 - 2x_4 - 6x_5 = -3. \end{cases}$$

故通解为$\begin{cases} x_1 = -2 + 5t_1 + t_2 + t_3, \\ x_2 = 3 - 6t_1 - 2t_2 - 2t_3, \\ x_3 = t_3, \\ x_4 = t_2, \\ x_5 = t_1, \end{cases}$ 其中t_1, t_2, t_3为任意常数.

4 判别齐次线性方程组(n>1)

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1} + x_n = 0, \\ x_1 + x_3 + \cdots + x_{n-1} + x_n = 0, \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1} = 0 \end{cases}$$

是否有非零解.

解 计算该线性方程组的系数矩阵对应的行列式:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} \underline{\underline{C_1+C_2+\cdots+C_n}} \begin{vmatrix} n-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ n-1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ n-1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} = (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{R_i-R_1}}_{i=2,3,\cdots,n} (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1) \neq 0$$，根据克拉默法则该线性方程组不存在非零解.

5　设线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数矩阵 A 的秩等于矩阵 B 的秩，其中

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n & 0 \end{bmatrix}.$$

试证：（Ⅰ）有解.

证　（Ⅰ）的增广矩阵为 $\overline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} & b_{n-1} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}$,

因为系数矩阵的秩不超过增广矩阵的秩，所以有秩($\overline{A}$)≥秩(A).

观察可知，矩阵 B 其实就是在增广矩阵 $\overline{A}$ 下面加了一行，所以秩(B)≥秩($\overline{A}$). 由题意知，秩(A)=秩(B)，据此可得秩(A)≥秩($\overline{A}$). 综上知, 秩($\overline{A}$)=秩(A)，故(Ⅰ)有解.

6. 写出线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = b_1, \\ x_2 - x_3 = b_2, \\ x_3 - x_4 = b_3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n-1} - x_n = b_{n-1}, \\ -x_1 + x_n = b_n \end{cases}$$

有解的充要条件．在有解情况下，写出通解．

解 将增广矩阵只用初等行变换化为阶梯形矩阵：

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & & & & & \vdots & b_1 \\ & 1 & -1 & & & & \vdots & b_2 \\ & & 1 & -1 & & & \vdots & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & & 1 & -1 & \vdots & b_{n-1} \\ -1 & & & & & 1 & \vdots & b_n \end{bmatrix} \xrightarrow{R_n + R_1 + \cdots + R_{n-1}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & & & \vdots & b_1 \\ & 1 & -1 & & & & \vdots & b_2 \\ & & 1 & -1 & & & \vdots & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & & 1 & -1 & \vdots & b_{n-1} \\ & & & & & 0 & \vdots & b_1 + b_2 + \cdots + b_n \end{bmatrix}$$

当 $b_1 + b_2 + \cdots + b_n \neq 0$ 时，秩$(A) \neq$ 秩$(\overline{A})$，所以此时线性方程组无解；

当 $b_1 + b_2 + \cdots + b_n = 0$ 时，秩(A)=秩$(\overline{A})$<未知量个数，所以此时线性方程组有无穷多解．

原方程组同解于 $\begin{cases} x_1 - x_2 = b_1, \\ x_2 - x_3 = b_2, \\ x_3 - x_4 = b_3, \\ \quad \vdots \\ x_{n-1} - x_n = b_{n-1}. \end{cases}$

故通解为 $\begin{cases} x_1 = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{n-1} + t, \\ x_2 = b_2 + b_3 + \cdots + b_{n-1} + t, \\ \quad \vdots \\ x_{n-1} = b_{n-1} + t, \\ x_n = t, \end{cases}$ 其中 t 为任意常数．

7. 已知 n 阶行列式 $D = |a_{ij}| \neq 0$，证明：线性方程组

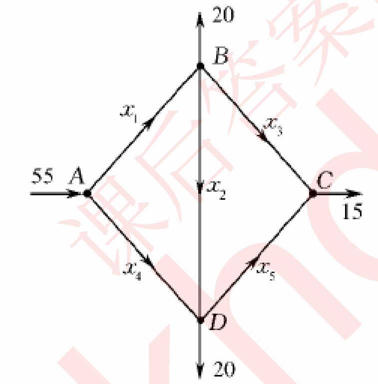
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1,n-1}x_{n-1} = a_{1n}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2,n-1}x_{n-1} = a_{2n}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{n,n-1}x_{n-1} = a_{nn} \end{cases}$$

无解.

证 该线性方程组的增广矩阵 $\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{array}\right]$，由题意 $D = |a_{ij}| \neq 0$ 知，秩$(\overline{A}) = n$.

但是系数矩阵 A 是一个 $n\times(n-1)$ 的矩阵，所以秩$(A) \le n-1 <$ 秩$(\overline{A})$．据此秩$(A) \neq$ 秩$(\overline{A})$，所以该线性方程组无解.

8. 下图是某地区的灌溉渠道网，流量及流向均已在图上标明.



(1) 确定各段的流量 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5；

(2) 如 BC 段渠道关闭，那么 AD 段的流量保持在什么范围内，才能使所有段的流量不超过 30?

解 (1) 该问题可以归结为线性方程组

$$(\text{I}) \quad \begin{cases} x_1 + x_4 = 55, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = -20, \\ x_3 + x_5 = 15, \\ -x_2 - x_4 + x_5 = -20. \end{cases}$$

为此将(I)的增广矩阵用初等行变换化为阶梯形:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 55 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -20 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 15 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & -20 \end{array}\right] \xrightarrow{R_{24}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 55 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & -20 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 15 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -20 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_4+R_1+R_2-R_3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 55 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & \vdots & -20 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \vdots & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix},$$

故与(Ⅰ)同解的线性方程组为$\begin{cases} x_1+x_4=55, \\ -x_2-x_4+x_5=-20, \\ x_3+x_5=15. \end{cases}$所以(Ⅰ)有无穷多个解，

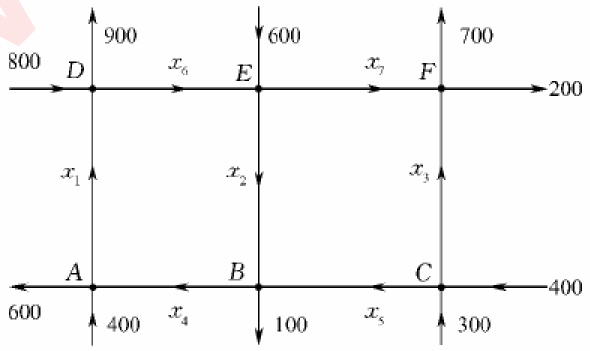
通解为$\begin{cases} x_1=55-t_2, \\ x_2=20+t_1-t_2, \\ x_3=15-t_1, \\ x_4=t_2, \\ x_5=t_1, \end{cases}$

其中t_1,t_2为任意非负的常数，且要满足$\begin{cases} 55-t_2\geq 0, \\ 20+t_1-t_2\geq 0, \\ 15-t_1\geq 0. \end{cases}$

(2) 当 BC 段关闭则$x_3=15-t_1=0$，即$t_1=15$．此时各段流量为$\begin{cases} x_1=55-t_2, \\ x_2=35-t_2, \\ x_3=0, \\ x_4=t_2, \\ x_5=15. \end{cases}$

要使各段都不超过 30，也就是要求$\begin{cases} x_1=55-t_2\leq 30, \\ x_2=35-t_2\leq 30, \\ x_3=0, \\ x_4=t_2\leq 30, \\ x_5=15. \end{cases}$即要求$t_2$满足$15\leq t_2\leq 30$，据此必须要求AD 段的流量在 15 到 30 之间.

9. 图 2.7 所示是某地区的交通网，车流量及流向已在图上标明.



(1) 求出各街道的车流量$x_1,x_2,\cdots,x_7$. 此时，EF 街道车流量应控制在什么范围内才能使所有街道车流量不超过 500?

(2) 若 DE 街道关闭，求出此时各街道的车流量.

解 （1）该问题可以归结为线性方程组

$$(\mathrm{I})\begin{cases} x_1 - x_4 = -200, \\ x_2 - x_4 + x_5 = 100, \\ x_3 + x_5 = 700, \\ x_1 - x_6 = 100, \\ x_2 - x_6 + x_7 = 600, \\ x_3 + x_7 = 900. \end{cases}$$

为此将(Ⅰ)的增广矩阵用初等行变换化为阶梯形:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & -200 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 700 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \vdots & 100 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & \vdots & 600 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 900 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_6-R_3]{\substack{R_4-R_1 \\ R_5-R_2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & -200 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 700 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & \vdots & 300 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & \vdots & 500 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & \vdots & 200 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_6-R_5]{R_5-R_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & -200 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 700 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & \vdots & 300 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & \vdots & 200 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

故与(Ⅰ)同解的线性方程组为 $\begin{cases} x_1 - x_4 = -200, \\ x_1 - x_4 + x_5 = 100, \\ x_3 + x_5 = 700, \\ x_4 - x_6 = 300, \\ -x_5 + x_7 = 200. \end{cases}$ 所以(Ⅰ)有无穷多个解,

通解为 $\begin{cases} x_1 = 100 + t_2, \\ x_2 = 600 - t_1 + t_2, \\ x_3 = 900 - t_1, \\ x_4 = 300 + t_2, \\ x_5 = -200 + t_1, \\ x_6 = t_2, \\ x_7 = t_1, \end{cases}$

其中 t_1, t_2 为任意非负常数，且同时满足 $\begin{cases} 600 - t_1 + t_2 \geq 0, \\ 900 - t_1 \geq 0, \\ -200 + t_1 \geq 0. \end{cases}$

要使得所有路段车流量不超过 500，即要求 $\begin{cases} 0 \le 100+t_2 \le 500, \\ 0 \le 600-t_1+t_2 \le 500, \\ 0 \le 900-t_1 \le 500, \\ 0 \le 300+t_2 \le 500, \\ 0 \le -200+t_1 \le 500, \\ 0 \le t_2 \le 500, \\ 0 \le t_1 \le 500. \end{cases}$

考虑到 t_1, t_2 为非负的，上述不等式化简为 $\begin{cases} 400 \le t_1 \le 500, & (1) \\ 0 \le t_2 \le 200, & (2) \\ 100 \le t_1 - t_2 \le 600. & (3) \end{cases}$. 并且当(1)，(2)成立时(3)也必定成立，所以只需要满足(1)和(2)即可．据此要使所有街道车流量不超过 500，那么 EF 段的流量要求控制在 400 到 500 之间．

(2) DE 街道关闭即 $x_6 = t_2 = 0$，所以此时

$$\begin{cases} x_1 = 100, \\ x_2 = 600 - t_1, \\ x_3 = 900 - t_1, \\ x_4 = 300, \\ x_5 = -200 + t_1, \\ x_6 = 0, \\ x_7 = t_1, \end{cases} \quad \text{其中 } t_1 \text{ 满足 } 200 \le t_1 \le 600.$$

10. 一家服装厂共有 3 个加工车间，第一车间用一匹布能生产衬衣 4 件，长裤 15 条和 3 件外衣；第二车间用一匹布能生产衬衣 4 件，长裤 5 条和 9 件外衣；第三车间用一匹布能生产衬衣 8 件，长裤 10 条和 3 件外衣，现该厂接到一张定单，要求供应 2000 件衬衣，3500 条长裤和 2400 件外衣．问该厂应如何向 3 个车间安排加工任务，以完成该定单?
(提示：设安排第一车间 x_1 匹布，第二车间 x_2 匹布，第三车间 x_3 匹布.)

解　设安排第一车间 x_1 匹布，第二车间 x_2 匹布，第三车间 x_3 匹布．根据题意该问题其实可以化为下面这个线性方程组．

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + 8x_3 = 2000, \\ 15x_1 + 5x_2 + 10x_3 = 3500, \\ 3x_1 + 9x_2 + 3x_3 = 2400. \end{cases}$$

求解该线性方程组:

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 8 & \vdots & 2000 \\ 15 & 5 & 10 & \vdots & 3500 \\ 3 & 9 & 3 & \vdots & 2400 \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{3}R_3]{\frac{1}{4}R_1 \; \frac{1}{5}R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & \vdots & 500 \\ 3 & 1 & 2 & \vdots & 700 \\ 1 & 3 & 1 & \vdots & 800 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 - R_1]{R_2 - 3R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & \vdots & 500 \\ 0 & -2 & -4 & \vdots & -800 \\ 0 & 2 & -1 & \vdots & 300 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & \vdots & 500 \\ 0 & -2 & -4 & \vdots & -800 \\ 0 & 0 & -5 & \vdots & -500 \end{bmatrix}$$

秩(A)=秩$(\overline{A})$=未知量个数，所以该线性方程组有唯一解．该解为:

$$\begin{cases} x_1 = 100, \\ x_2 = 200, \\ x_3 = 100. \end{cases}$$

所以第一车间应加工 100 匹布，第二车间应加工 200 匹，第三车间 100 匹.

11. 某食品厂准备用原料 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 开发一种含脂肪 3%，碳水化合物 12.5%，蛋白质 15%的新产品 2000 公斤，已知原料含脂肪，碳水化合物，蛋白质的百分比如下表：

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
脂肪(%)	2	2	4	6	8
碳水化合物(%)	10	15	5	25	5
蛋白质(%)	20	10	30	5	15

问开发这种新产品有否可能?如果可以，那么有多少种配方可供选择?

解 设配置该新产品需使用 A_1 的量为 x_1 公斤，A_2 为 x_2 公斤，A_3 为 x_3 公斤，A_4 为 x_4 公斤，A_5 为 x_5 公斤. 根据题意该问题可以化为下面这个线性方程组.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2000, \\ 0.02x_1 + 0.02x_2 + 0.04x_3 + 0.06x_4 + 0.08x_5 = 0.03\times 2000, \\ 0.1x_1 + 0.15x_2 + 0.05x_3 + 0.25x_4 + 0.05x_5 = 0.125\times 2000, \\ 0.2x_1 + 0.1x_2 + 0.3x_3 + 0.05x_4 + 0.15x_5 = 0.15\times 2000. \end{cases}$$

为此将(Ⅰ)的增广矩阵用初等行变换化为阶梯形：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 2000 \\ 0.02 & 0.02 & 0.04 & 0.06 & 0.08 & \vdots & 60 \\ 0.1 & 0.15 & 0.05 & 0.25 & 0.05 & \vdots & 250 \\ 0.2 & 0.1 & 0.3 & 0.05 & 0.15 & \vdots & 300 \end{bmatrix} \xrightarrow[20R_4]{\substack{50R_2 \\ 20R_3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 2000 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & \vdots & 3000 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 1 & \vdots & 5000 \\ 4 & 2 & 6 & 1 & 3 & \vdots & 6000 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4-4R_1]{\substack{R_2-R_1 \\ R_3-2R_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 2000 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & \vdots & 1000 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -1 & \vdots & 1000 \\ 0 & -2 & 2 & -3 & -1 & \vdots & -2000 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{23}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 2000 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -1 & \vdots & 1000 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & \vdots & 1000 \\ 0 & -2 & 2 & -3 & -1 & \vdots & -2000 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{R_1-R_2 \\ R_4+2R_2 \\ \frac{1}{3}R_4}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 & 2 & \vdots & 1000 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -1 & \vdots & 1000 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & \vdots & 1000 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2+R_3]{R_1-2R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -6 & -4 & \vdots & -1000 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 2 & \vdots & 2000 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & \vdots & 1000 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \vdots & 0 \end{bmatrix},$$

秩(A)=秩($\overline{A}$)=4<未知量个数，所以该线性方程组有无穷多解. 据此可知可以开发该新产品，并且有无数中可供选择的配方. 解约化阶梯形矩阵对应方程组得：

$$\begin{cases} x_1 = -1000 + 10t, \\ x_2 = 2000 - 7t, \\ x_3 = 1000 - 5t, \\ x_4 = t, \\ x_5 = t, \end{cases}$$ 其中 t 为满足 $100 \le t \le 200$ 的任意常数.

习题 3.1

1．A，B 均为 n 阶方阵，则下述命题正确的是（　），并请说明理由．

(A) 若$|A|=|B|$，则必有 $A=B$．　　（B）若 A ≠ B，　则必有$|A|\neq|B|$．

（C）若 A ≠ B，则必有$|A|=|B|$．　（D）若 $A=B$，　则必有$|A|=|B|$．

解　（A）错．　反例：$A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$．

（B）错．　反例：$A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$．

（C）显然错误．　反例：$A=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$．

（D）对．两个矩阵相等，行列式必然相等．

2．　设 $A=\begin{bmatrix}1&-1&2\\3&0&2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}4&3&0\\2&-1&1\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}-1&2&-1\\0&-5&1\end{bmatrix}$，求

$A-2B+3C$；$3A-2B$．

解　$A-2B+3C=\begin{bmatrix}-10&-1&-1\\-1&-13&3\end{bmatrix}$；$3A-2B=\begin{bmatrix}-5&-9&6\\5&2&4\end{bmatrix}$．

3．若矩阵 X 适合

$$\begin{bmatrix}3&-6&2&0\\1&5&-1&8\\4&3&1&7\end{bmatrix}+2X=\begin{bmatrix}5&4&-4&2\\-7&1&9&4\\6&-1&3&9\end{bmatrix}，求 X．$$

解　移项可得

$$2X=\begin{bmatrix}5&4&-4&2\\-7&1&9&4\\6&-1&3&9\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3&-6&2&0\\1&5&-1&8\\4&3&1&7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&10&-6&2\\-8&-4&10&-4\\2&-4&2&2\end{bmatrix},$$

$$故 X=\begin{bmatrix}1&5&-3&1\\-4&-2&5&-2\\1&-2&1&1\end{bmatrix}.$$

4．设 $A=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&-2&1\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}-1&0&0\\1&-1&0\\0&1&-1\end{bmatrix}$，求 AB；BA；CA；BCA．

解　按照矩阵乘法的定义运算

$$AB=\begin{bmatrix}1&-2&1\\2&-4&2\\3&-6&3\end{bmatrix};\quad BA=[1\times1+2\times(-2)+3\times1]=[0];$$

$$CA=\begin{bmatrix}-1&0&0\\1&-1&0\\0&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\-1\\-1\end{bmatrix};$$

$$BCA=B(CA)=\begin{bmatrix}1&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\-1\\-1\end{bmatrix}=[1\times(-1)+(-2)\times(-1)+1\times(-1)]=[0].$$

5. 设

$$D=\begin{bmatrix}\lambda_1&0&0&\cdots&0\\0&\lambda_2&0&\cdots&0\\0&0&\lambda_3&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&0&\lambda n\end{bmatrix},\quad A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}.$$

(1) 求 $DA=$____ ， $AD=$____；

(2) 若 $\lambda_i\neq\lambda_j$ （$i\neq j$）， 证明：与 D 乘法可换的矩阵必为对角矩阵.

解 （1） 由矩阵乘法运可得：

$$DA=\begin{bmatrix}\lambda_1a_{11}&\lambda_1a_{12}&\cdots&\lambda_1a_{1n}\\\lambda_2a_{21}&\lambda_2a_{22}&\cdots&\lambda_2a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\lambda_na_{n1}&\lambda_na_{n2}&\cdots&\lambda_na_{nn}\end{bmatrix};\quad AD=\begin{bmatrix}\lambda_1a_{11}&\lambda_2a_{12}&\cdots&\lambda_na_{1n}\\\lambda_1a_{21}&\lambda_2a_{22}&\cdots&\lambda na_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\lambda_1a_{n1}&\lambda_2a_{n2}&\cdots&\lambda_na_{nn}\end{bmatrix}$$

（2）与 D 乘法可换的矩阵 A 满足 $DA=AD$. 故 DA 与 AD 的元素对应相等，利用（1）的结果，有 $\lambda_ia_{ij}=\lambda_ja_{ij}$ 从而 $(\lambda_i-\lambda_j)a_{ij}=0$ 由于 $\lambda_i\neq\lambda_j$（$i\neq j$），可得：当 $i\neq j$ 时，$a_{ij}=0$，即 A 为对角矩阵.

6. 用数学归纳法证明：

（1） $\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}1&n&C_n^2\\0&1&n\\0&0&1\end{bmatrix}$，其中 C_n^2 为 n 中取 2 的组合数；

（2）设 B= $\begin{bmatrix}1&4&2\\0&-3&-2\\0&4&3\end{bmatrix}$， 则 $B^n=\begin{cases}E, & n\text{为偶数；}\\B, & n\text{为奇数；}\end{cases}$

(3) $\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}\cos n\varphi & -\sin n\varphi\\ \sin n\varphi & \cos n\varphi\end{bmatrix}$;

(4) $\begin{bmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & c\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}a^n & 0 & 0\\ 0 & b^n & 0\\ 0 & 0 & c^n\end{bmatrix}$.

证 (1) 数学归纳法：当$n=2$时，计算得$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，故结论成立.

假设当$n=k$时，结论成立，即有$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^k=\begin{bmatrix}1 & k & C_k^2\\ 0 & 1 & k\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，

则当$n=k+1$时，

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^{k+1}=\begin{bmatrix}1 & k & C_k^2\\ 0 & 1 & k\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & k+1 & k+C_k^2\\ 0 & 1 & k+1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

因$C_k^2+k=\dfrac{k(k-1)}{2}+k=\dfrac{k(k+1)}{2}=C_{k+1}^2$所以$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^{k+1}=\begin{bmatrix}1 & k+1 & C_{k+1}^2\\ 0 & 1 & k+1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，即当$n=k+1$时，结果成立．由归纳法原理知，对任意大于2得正整数n有$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}1 & n & C_n^2\\ 0 & 1 & n\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

(2) 当$n=1$时，结果显然成立．当$n=2$时，直接计算得$B^2=E$.

假设当$n=k$时，结果成立，即$B^k=\begin{cases}E, & \text{k为偶数；}\\ B, & \text{k为奇数；}\end{cases}$．我们要证明当$n=k+1$时，结果也成立，即可完成证明.

第一种情况：k 为奇数，则

$$B^{k+1}=B^kB=BB=E.$$

第二种情况：k 为偶数，则

$$B^{k+1}=B^kB=EB=B.$$

综上：$B^{k+1}=\begin{cases}E, & \text{k+1为偶数；}\\ B, & \text{k+1为奇数；}\end{cases}$ 即当$n=k+1$时，结论成立．

(3) 当n=1时，结论显然成立．

假设当$n=k$时，结论成立，即$\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}^k=\begin{bmatrix}\cos k\varphi & -\sin k\varphi\\ \sin k\varphi & \cos k\varphi\end{bmatrix}$．

则当$n=k+1$时，

$$\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}^{k+1}=\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}^k\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos k\varphi & -\sin k\varphi\\ \sin k\varphi & \cos k\varphi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos k\varphi\cos\varphi-\sin k\varphi\sin\varphi & -\cos k\varphi\sin\varphi-\sin k\varphi\cos\varphi\\ \sin k\varphi\cos\varphi+\cos k\varphi\sin\varphi & -\sin k\varphi\sin\varphi+\cos k\varphi\cos\varphi\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos(k\varphi+\varphi) & -\sin(\varphi+k\varphi)\\ \sin(\varphi+k\varphi) & \sin(\varphi+k\varphi)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(k+1)\varphi & -\sin(k+1)\varphi\\ \sin(k+1)\varphi & \sin(k+1)\varphi\end{bmatrix}.$$

结论成立．

(4) 当$n=1$时，结论成立．

假设当$n=k$时，结论成立．即$\begin{bmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & c\end{bmatrix}^k=\begin{bmatrix}a^k & 0 & 0\\ 0 & b^k & 0\\ 0 & 0 & c^k\end{bmatrix}$，

则当$n=k+1$时，

$$\begin{bmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & c\end{bmatrix}^{k+1}=\begin{bmatrix}a^k & 0 & 0\\ 0 & b^k & 0\\ 0 & 0 & c^k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^{k+1} & 0 & 0\\ 0 & b^{k+1} & 0\\ 0 & 0 & c^{k+1}\end{bmatrix}$$

结论成立．

7．计算下列矩阵：

(1) $\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}^2$；　　(2) $\begin{bmatrix}x & y & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & b_1\\ a_{12} & a_{22} & b_2\\ b_1 & b_2 & c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ 1\end{bmatrix}$；

(3) $\begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}^2$；　　(4) $\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}^2$；

解　(1) $\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=E_3$

(2) $$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11}x+a_{12}y+b_1 & a_{12}x+a_{22}y+b_2 & b_1x+b_2y+c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$=\left[(a_{11}x+a_{12}y+b_1)x+(a_{12}x+a_{22}y+b_2)y+b_1x+b_2y+c\right]$$

$$=\left[a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2b_2y+2b_1x+c\right]$$

(3) $$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}=4E_4$$

(4) $$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

8．设 E_{ij} 为 n 阶方阵，它的第 i 行第 j 列元素为 1，其余元素均为零（称为**矩阵单位**）.

$A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$，计算 AE_{ij}，$E_{ij}A$，$E_{ik}E_{kj}$.

解 $$AE_{ij}=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{array}{c}\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\ \qquad\quad j \end{array}=\begin{array}{c}\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1i} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{2i} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{ni} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\ \quad j \end{array};$$

$$E_{ij}A=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}0&\cdots&0&\cdots&0\\ \vdots&&\vdots&&\vdots\\ 0&\cdots&1&\cdots&0\\ \vdots&&\vdots&&\vdots\\ 0&\cdots&0&\cdots&0\end{bmatrix}\\ \begin{array}{ccccc}&&{\scriptstyle j}&&\end{array}\end{array}\begin{bmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ 0&0&\cdots&0\\ a_{j1}&a_{j2}&\cdots&a_{jn}\\ 0&0&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ 0&0&\cdots&0\end{bmatrix}\begin{array}{l}\\ \\ \\ i\\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$E_{ik}E_{kj}=\text{第}i\text{行}\begin{array}{c}\begin{bmatrix}0&\cdots&0&\cdots&0\\ \vdots&&\vdots&&\vdots\\ 0&\cdots&1&\cdots&0\\ \vdots&&\vdots&&\vdots\\ 0&\cdots&0&\cdots&0\end{bmatrix}\\ {\scriptstyle k}\end{array}\begin{array}{c}\begin{bmatrix}0&\cdots&0&\cdots&0\\ \vdots&&\vdots&&\vdots\\ 0&\cdots&1&\cdots&0\\ \vdots&&\vdots&&\vdots\\ 0&\cdots&0&\cdots&0\end{bmatrix}\\ {\scriptstyle j}\end{array}\text{第}k\text{行}=i\begin{array}{c}\begin{bmatrix}0&\cdots&0&\cdots&0\\ \vdots&&\vdots&&\vdots\\ 0&\cdots&1&\cdots&0\\ \vdots&&\vdots&&\vdots\\ 0&\cdots&0&\cdots&0\end{bmatrix}\\ {\scriptstyle j}\end{array}=E_{ij}\,.$$

9．设 A 为 n 阶方阵，若 A 与所有 n 阶方阵乘法可换，则 A 一定是数量矩阵.

证 因为 A 与所有 n 阶方阵乘法可换，故与 E_{ij} 乘法可换，利用第 8 题结果有

$$AE_{ij}=E_{ij}A\text{，即}\begin{array}{c}\begin{bmatrix}0&\cdots&0&a_{1i}&0&\cdots&0\\ 0&\cdots&0&a_{2i}&0&\cdots&0\\ \vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\ 0&\cdots&0&a_{ni}&0&\cdots&0\end{bmatrix}\\ {\scriptstyle j}\end{array}=\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ 0&0&\cdots&0\\ a_{j1}&a_{j2}&\cdots&a_{jn}\\ 0&0&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ 0&0&\cdots&0\end{bmatrix}\begin{array}{l}\\ \\ \\ i\\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a_{ii}=a_{jj}\\ a_{ij}=0\end{cases},\forall i,j=1,2,\cdots n\,.\ \text{设}\ a_{11}=\lambda\text{，则}\ A=\begin{bmatrix}\lambda&0&\cdots&0\\ 0&\lambda&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ 0&0&0&\lambda\end{bmatrix}=\lambda E,$$

即 A 为数量矩阵.

10．设 A，B 均为 n 阶方阵，证明：

$$(A+B)(A-B)=A^2-B^2\Leftrightarrow AB=BA;$$
$$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2\Leftrightarrow AB=BA.$$

证 $(A+B)(A-B)=A^2-B^2\Leftrightarrow A^2+BA-AB-B^2=A^2-B^2\Leftrightarrow AB=BA$

$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2\Leftrightarrow A^2+B^2+AB+BA=A^2+2AB+B^2\Leftrightarrow AB=BA$.

11．n 阶方阵 $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ 主对角线上元素之和称为矩阵 A 的迹，且记为 tr $A=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$. 设

A，B 分别为 $m\times n$ 及 $n\times m$ 矩阵，证明：$\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$．

证 设 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix}$，则

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(AB)&=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\cdots+a_{1n}b_{n1}\\ &\quad+a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+\cdots+a_{2n}b_{n2}\\ &\quad\ \ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots\\ &\quad+a_{m1}b_{1m}+a_{m2}b_{2m}+\cdots+a_{mn}b_{nm}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}a_{ji}b_{ij}\end{aligned}$$

同理可得 $\mathrm{tr}(BA)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}b_{ji}a_{ij}$

由于 $\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}a_{ji}b_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}b_{ji}a_{ij}$，可得 $\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$．

12．*试证不存在 n 阶方阵 A，B 满足 $AB-BA=E$．

提示 利用第 11 题结果，用反证法．

证 假如存在 n 阶方阵满足 $AB-BA=E$，则

$$AB=BA+E\Rightarrow \mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA+E)=\mathrm{tr}(BA)+n\,.$$

由于 $n\neq 0$，可得 $\mathrm{tr}(AB)\neq\mathrm{tr}(BA)$，这与 11 题所得结果矛盾．所以假设不成立．即不存在 n 阶方阵 A，B 满足 $AB-BA=E$．

13．设 $f(x)=3x^2-2x+5$，$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix}$，求 $f(A)$．

解

$$f(A)=3A^2-2A+5E=3\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix}-2\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix}+5\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 21 & -23 & 15 \\ -13 & 34 & 10 \\ -9 & 22 & 25 \end{bmatrix}.$$

14．设 $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$，$\alpha=\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}^T$，且 A 的各行元素之和均为 k，求 $A\alpha_{n\times 1}$．

解 $A\alpha_{n\times 1}=\begin{bmatrix}\sum_{j=1}^{n}a_{1j}\\ \sum_{j=1}^{n}a_{2j}\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^{n}a_{nj}\end{bmatrix}\underline{\underline{题设}}\begin{bmatrix}k\\k\\ \vdots\\k\end{bmatrix}=k\alpha$.

15．设 $A=\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_n\end{bmatrix}$，则 $AA^T=$______，$A^TA=$______．

解 $AA^T=\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{n}a_i^2\end{bmatrix}$；$A^TA=\begin{bmatrix}a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 & \cdots & a_1a_n\\ a_2a_1 & a_2^2 & a_2a_3 & \cdots & a_2a_n\\ a_3a_1 & a_3a_2 & a_3^2 & \cdots & a_3a_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_na_1 & a_na_2 & a_na_3 & & a_n^2\end{bmatrix}$.

16．设 A，B 都是对称矩阵，证明：AB 为对称矩阵 $\Leftrightarrow AB=BA$．

证 因 A，B 都是对称矩阵，故 $(AB)^T=B^TA^T=BA$，从而

AB 为对称矩阵 $\Leftrightarrow (AB)^T=AB\Leftrightarrow BA=AB$.

17．*设 A 是实数域上的矩阵，证明：若 $A^TA=O$，则 $A=O$．

提示：考虑 A^TA 主对角线上元素．

证 设 $A=\begin{bmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}$，则 $A^T=\begin{bmatrix}a_{11} & \cdots & a_{m1}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{1n} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}$.

由 $A^TA=O\Rightarrow A^TA$ 的主对角线上元素为零

$\Rightarrow a_{1i}{}^2+a_{2i}{}^2+\cdots+a_{mi}{}^2=0,\forall i=1,2,\cdots,n$，由 a_{ij} 为实数知

$\Rightarrow a_{1i}=0,a_{2i}=0,\cdots,a_{mi}=0,\forall i=1,2,\cdots n$

$\Rightarrow A=O$.

18． 已知 $\alpha=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}_{1\times 3}$，$\beta=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}_{1\times 3}$，设 $A=\alpha^T\beta$，求 $A^n(n>1)$．

解 $\beta\alpha^T=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=[3]$，

$$A^n=\underbrace{(\alpha^T\beta)(\alpha^T\beta)\cdots(\alpha^T\beta)}_{n个}=\alpha^T\underbrace{(\beta\alpha^T)(\beta\alpha^T)\cdots(\alpha^T\beta)}_{n个}\beta=\alpha^T[3]^{n-1}\beta$$

$$=\alpha^T\left[3^{n-1}\right]\beta=3^{n-1}\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ 2 & 1 & \frac{2}{3}\\ 3 & \frac{3}{2} & 1\end{bmatrix}.$$

19． 证明奇数阶反对称行列式为零．利用此结论计算下列行列式：

（1）$\begin{vmatrix}0 & a & b & c & d\\ -a & 0 & e & f & g\\ -b & -e & 0 & h & i\\ -c & -f & -h & 0 & j\\ -d & -g & -i & -j & 0\end{vmatrix}$；（2）$\begin{vmatrix}0 & 1 & 2 & 3 & -4\\ -2 & 0 & -2 & 4 & 6\\ -6 & 3 & 0 & -3 & 6\\ -12 & -8 & 4 & 0 & 4\\ 20 & -15 & 10 & -5 & 0\end{vmatrix}$.

证 设n阶反对称矩阵为A，其中n为奇数.

因$A^T=-A$知，$|A|=|A^T|=|-A|=(-1)^n|A|=-|A|$，故$|A|=0$，

即任意奇数阶反对称行列式为零.

解 （1） 因$\begin{vmatrix}0 & a & b & c & d\\ -a & 0 & e & f & g\\ -b & -e & 0 & h & i\\ -c & -f & -h & 0 & j\\ -d & -g & -i & -j & 0\end{vmatrix}$是反对称行列式，

所以$\begin{vmatrix}0 & a & b & c & d\\ -a & 0 & e & f & g\\ -b & -e & 0 & h & i\\ -c & -f & -h & 0 & j\\ -d & -g & -i & -j & 0\end{vmatrix}=0$.

（2）$\begin{vmatrix}0 & 1 & 2 & 3 & -4\\ -2 & 0 & -2 & 4 & 6\\ -6 & 3 & 0 & -3 & -6\\ -12 & -8 & 4 & 0 & 4\\ 20 & -15 & 10 & -5 & 0\end{vmatrix}=2\times3\times4\times5\begin{vmatrix}0 & 1 & 2 & 3 & -4\\ -1 & 0 & -1 & 2 & 3\\ -2 & 1 & 0 & -1 & -2\\ -3 & -2 & 1 & 0 & 1\\ 4 & -3 & 2 & -1 & 0\end{vmatrix}$

反对称行列式0.

20. 甲、乙、丙、丁四人语文、数学、外语的期中、期末、平时考试成绩如下表所示

期中考试

	语文	数学	外语
甲	94	90	97
乙	85	85	76
丙	98	95	97
丁	60	70	72

期末考试

	语文	数学	外语
甲	90	86	95
乙	78	80	70
丙	92	93	96
丁	66	74	75

平时

	语文	数学	外语
甲	94	80	90
乙	80	80	70
丙	90	90	100
丁	70	80	80

(1) 分别写出表示甲、乙、丙、丁四人的期中，期末，平时成绩的矩阵 A, B, C.

(2) 学校规定学期成绩计算方法是期中考试成绩占 20%，期末考试成绩占 70% ，平时成绩占 10%，若把甲、乙、丙、丁四人期终成绩的矩阵记为 D，写出 A，B，C，D 之间的关系，并由此计算出 D(最后数字用四舍五入表示).

解 (1) $A=\begin{bmatrix}94&90&97\\85&85&76\\98&95&97\\60&70&72\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}90&86&95\\78&80&70\\92&93&96\\66&74&75\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}94&80&90\\80&80&70\\90&90&100\\70&80&80\end{bmatrix}$

(2) $D=0.2A+0.7B+0.1C=\begin{bmatrix}91&86&95\\80&81&71\\93&93&97\\65&74&75\end{bmatrix}$.

21. 某港口在某月份运到 I，II，III三地的甲，乙两种货物的数量以及两种货物一个单位的价格，重量，体积如下表所示

出口量 地区 / 货物	I	II	III	单位价格（万元）	单位重量（吨）	单位体积（米^3）
甲	2000	1200	800	0.2	0.02	0.12
乙	1200	1400	600	0.35	0.05	0.5

(1) 分别写出表示运到三地货物数量的矩阵 A，以及表示货物单位价格，单位重量，单位体积的矩阵 B.

(2) 设表示运到三地的货物总价值，总重量，总体积的矩阵为 C，写出矩阵 A，B，C 的关系，并由此计算出 C.

解 (1) $A=\begin{bmatrix}2000 & 1200\\ 1200 & 1400\\ 800 & 600\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}0.2 & 0.02 & 0.12\\ 0.35 & 0.05 & 0.5\end{bmatrix}$；

(2) $C=AB=\begin{bmatrix}820 & 100 & 840\\ 730 & 94 & 844\\ 370 & 46 & 396\end{bmatrix}$.

习题 3.2

1. 下列矩阵中可逆矩阵是( )，并说明理由.

(A) $\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\1&1&1\end{bmatrix}$.　(B) $\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\end{bmatrix}$.　(C) $\begin{bmatrix}1&2&0\\2&4&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.　(D) $\begin{bmatrix}1&2&0\\2&5&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.

解 (A) 由矩阵的第一第二行对应成比例知，这个矩阵的行列式为零，所以不可逆；

(B) 矩阵不是方阵，所以也不是可逆矩阵；

(C) 同(A) 矩阵的第一第二行对应成比例，所以不可逆；

(D) $\begin{vmatrix}1&2&0\\2&5&0\\0&0&1\end{vmatrix}\underline{\underline{R_2-2R_1}}\begin{vmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=1\neq 0$，所以该矩阵是可逆矩阵.

2. 下列命题正确的是( )，并说明理由.

(A) 若 A 是 n 阶方阵，且 $A\neq O$，则 A 可逆.

(B) 若 A，B 都是 n 阶可逆方阵，则 A+B 也可逆.

(C) 若 AB=0，且 $A\neq O$，则必有 $B=O$.

(D) 设 A 是 n 阶方阵，则 A 可逆 A^T 可逆.

解 (A) 可逆的充要条件是 $|A|\neq 0$ 而不是 $A\neq O$，如 $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\neq O$，但 A 不是可逆矩阵，所以选项(A)是错误的.

(B) 设 $A=E,B=-E$，显然 A,B 都是可逆的，但是 $A+B=O$ 不是可逆矩阵，所以选项(B)是错误的.

(C) 设 $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$，显然 $AB=O$ 且 $A\neq O$，但是 $B\neq O$，所以选项(C)也是错误的.

(D) 由 A 可逆知 $|A|\neq 0$，而 $|A^T|=|A|$，故 $|A^T|\neq 0$，从而 A^T 可逆，所以选项(D)正确.

综上所述应选填 D.

3. 已知 $A^{-1}=\begin{bmatrix}3&5\\-2&-4\end{bmatrix}$，则 A=________.

解 因为 $A=(A^{-1})^{-1}$，所以 $A=\begin{bmatrix}3&5\\-2&-4\end{bmatrix}^{-1}=-\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}-4&-5\\2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&\dfrac{5}{2}\\-1&-\dfrac{3}{2}\end{bmatrix}$

4. 求下列矩阵的逆矩阵：

（1）$\begin{bmatrix}1&2&-3\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$； (2) $\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{bmatrix}$.

解 （1）$\begin{vmatrix}1&2&-3\\0&1&2\\0&0&1\end{vmatrix}=1\neq 0$ 所以该矩阵是可逆的．因为 $AA^*=|A|E$，所以

$$A^*=|A|A^{-1}=A^{-1},$$

而 $A_{11}=1, A_{12}=0, A_{13}=0, A_{21}=-2, A_{22}=1, A_{23}=0$，$A_{31}=7, A_{23}=-2, A_{33}=1$，所以

$A^*=\begin{bmatrix}1&-2&7\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}$，由此可得 $A^{-1}=\begin{bmatrix}1&-2&7\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}$.

(2) $\begin{vmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{vmatrix}=-27\neq 0$ 所以该矩阵是可逆的．因为 $AA^*=|A|E$，所以

$$A^*=|A|A^{-1}=-27A^{-1},$$

而 $A_{11}=-3, A_{12}=-6, A_{13}=-6, A_{21}=-6, A_{22}=-3, A_{23}=6$，$A_{31}=6, A_{23}=6, A_{33}=-3$，所以 $A^*=\begin{bmatrix}-3&-6&6\\-6&-3&6\\-6&6&-3\end{bmatrix}$，由此可得 $A^{-1}=-\frac{1}{27}\begin{bmatrix}-3&-6&6\\-6&-3&6\\-6&6&-3\end{bmatrix}$.

5. 解下列矩阵方程：

（1）$\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}3&5\\5&9\end{bmatrix}$； （2）$\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}5&6\\3&4\\1&2\end{bmatrix}$；

（3）$\begin{bmatrix}1&4\\-1&2\end{bmatrix}X\begin{bmatrix}2&0\\-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&1\\0&-1\end{bmatrix}$.

解 （1）因为 $\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}=-1\neq 0$，所以 $\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$ 可逆，等式两边同左乘 $\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}^{-1}$ 可得

$$X=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}3&5\\5&9\end{bmatrix}=-1\begin{bmatrix}4&-2\\-3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&5\\5&9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&-2\\4&6\end{bmatrix}.$$

（2）因为 $\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{vmatrix}=1\neq 0$，所以 $\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$ 是可逆的，等式两边同左乘 $\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}$ 可得 $X=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}5&6\\3&4\\1&2\end{bmatrix}$.

下面先用习题 4 中方法方法求解 $\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}$. 因为 $AA^*=|A|E$，所以

$$A^*=|A|A^{-1}=A^{-1},$$

而 $A_{11}=1, A_{12}=0, A_{13}=0, A_{21}=-1, A_{22}=1, A_{23}=0$ ，$A_{31}=0, A_{23}=-1, A_{33}=1$ ，所以

$A^*=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$，由此可得 $A^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$.

据此可得 $X=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}5&6\\3&4\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&6\\3&4\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&2\\2&2\\1&2\end{bmatrix}$

（3）因为 $\begin{vmatrix}1&4\\-1&2\end{vmatrix}=6\neq 0$，$\begin{vmatrix}2&0\\-1&1\end{vmatrix}=2\neq 0$ 所以 $\begin{bmatrix}1&4\\-1&2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2&0\\-1&1\end{bmatrix}$ 都是可逆矩阵，在等式两边同左乘 $\begin{bmatrix}1&4\\-1&2\end{bmatrix}^{-1}$，再两边同右乘 $\begin{bmatrix}2&0\\-1&1\end{bmatrix}^{-1}$ 可得

$$X=\begin{bmatrix}1&4\\-1&2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}3&1\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\-1&1\end{bmatrix}^{-1}=(\frac{1}{6}\begin{bmatrix}2&-4\\1&1\end{bmatrix})\begin{bmatrix}3&1\\0&-1\end{bmatrix}(\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&0\\-1&1\end{bmatrix})=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0\end{bmatrix}.$$

6. 解出满足下述条件的矩阵 X：

(1) $(A+2E)X=C$，其中 $A=\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$；

(2) $A^{-1}XA=6A+XA$，其中 $A=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&0&0\\0&\frac{1}{4}&0\\0&0&\frac{1}{7}\end{bmatrix}$；

(3) $A^2+AX-X=E$，其中 $A=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&-3&0\\1&0&0\end{bmatrix}$.

解 (1) 因为 $A+2E=\begin{bmatrix}3&1\\1&4\end{bmatrix}$，可知 $|A+2E|=\begin{vmatrix}3&1\\1&4\end{vmatrix}=11\neq 0$，所以 $A+2E$ 可逆. 所以

$$X=(A+2E)^{-1}C=\frac{1}{11}\begin{bmatrix}4&-1\\-1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}=\frac{1}{11}\begin{bmatrix}4&3\\-1&2\end{bmatrix}$$

(2) 因为 A 可逆，所以可在等式 $A^{-1}XA=6A+XA$ 两边同右乘 A^{-1} 得到 $A^{-1}X=6E+X$，再在两边同左乘 A 得到 $X=6A+AX$，所以有 $(E-A)X=6A$.

因为 $|E-A|=\begin{vmatrix}\frac{2}{3}&&\\&\frac{3}{4}&\\&&\frac{6}{7}\end{vmatrix}\neq 0$，所以 $E-A$ 可逆，据此可得 $X=6(E-A)^{-1}A$

代入可得

$$X=6(E-A)^{-1}A=6\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&&\\&\frac{3}{4}&\\&&\frac{6}{7}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&&\\&\frac{1}{4}&\\&&\frac{1}{7}\end{bmatrix}=6\begin{bmatrix}\frac{3}{2}&&\\&\frac{4}{3}&\\&&\frac{7}{6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&&\\&\frac{1}{4}&\\&&\frac{1}{7}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&&\\&2&\\&&1\end{bmatrix}$$

(3) 由 $A^2+AX-X=E$ 可得 $(A-E)X=-(A-E)(E+A)$. 而

$|A-E|=\begin{vmatrix}0 & 0 & 2\\ 0 & -4 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{vmatrix}=8\neq 0$，所以 $A-E$ 是可逆的，在等式两边同左乘 $(A-E)^{-1}$ 可得

$$X=-(E+A)=\begin{bmatrix}-2 & 0 & -2\\ 0 & 2 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{bmatrix}.$$

7. 设 A 为 n 阶方阵，存在某个正整数 k＞1，使 $A^k=O$（A 称为**幂零矩阵**），证明：$E-A$ 可逆，且其逆为 $E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}$.

证 计算 $(E-A)(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1})=E-A^k$，由题意可知 $A^k=O$，所以 $(E-A)(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1})=E-A^k=E$. 根据定理 3.2.1 的推论可知，$E-A$ 可逆且其逆为 $E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}$.

8. 设 J_n 为所有元素全为 1 的 n(n＞1)阶方阵，证明 $E-J_n$ 可逆，且其逆为

$$E-\frac{1}{n-1}J_n$$

证 计算 $(E-J_n)\ (E-\frac{1}{n-1}J_n)=E^2-J_nE-\frac{1}{n-1}EJ_n+\frac{1}{n-1}{J_n}^2$

$$=E-\frac{n}{n-1}J_n+\frac{1}{n-1}{J_n}^2=E-\frac{1}{n-1}(nE-J_n)J_n$$

计算 $(nE-J_n)J_n=\begin{bmatrix}n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1\\ -1 & n-1 & -1 & \cdots & -1\\ -1 & -1 & n-1 & \cdots & -1\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -1 & -1 & -1 & \cdots & n-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}=O$

据此 $(E-J_n)\ (E-\frac{1}{n-1}J_n)=E-\frac{1}{n-1}(nE-J_n)J_n=E$，根据定理 3.2.1 的推论可知 $E-J_n$ 可逆且其逆为 $E-\frac{1}{n-1}J_n$.

9. 设 A 为 n 阶方阵，适合 $a_mA^m+a_{m-1}A^{m-1}+\cdots+a_1A+a_0E=O$，其中 $a_0\neq 0$，求证：A 可逆，且求出其逆.

证 因为 $a_mA^m+a_{m-1}A^{m-1}+\cdots+a_1A+a_0E=O$，所以有

$A(a_m A^{m-1}+a_{m-1}A^{m-2}+\cdots+a_1)=-a_0 E$． 由题意可知 $a_0\neq 0$，所以可在等式两边同时作数乘 $-\dfrac{1}{a_0}$，由此可得 $-\dfrac{1}{a_0}A(a_m A^{m-1}+a_{m-1}A^{m-2}+\cdots+a_1)=E$，整理得 $A[-\dfrac{1}{a_0}(a_m A^{m-1}+a_{m-1}A^{m-2}+\cdots+a_1)]=E$，根据定理 3.2.1 的推论可知 A 可逆且 $A^{-1}=-\dfrac{1}{a_0}(a_m A^{m-1}+a_{m-1}A^{m-2}+\cdots+a_1)$．

10. 已知 A 为 3 阶方阵，且 $|A|$=3，求

(1) $|A^{-1}|$； (2) $|A^*|$； (3) $|-2A|$； (4) $|(3A)^{-1}|$；

(5) $\left|\dfrac{1}{3}A^*-4A^{-1}\right|$； (6) $(A^*)^{-1}$.

解 (1) $|A^{-1}|=|A|^{-1}=\dfrac{1}{3}$；

(2) 由于 $AA^*=|A|E$，所以 $A^*=|A|A^{-1}=3A^{-1}$，由此可得

$$|A^*|=|3A^{-1}|=3^3|A^{-1}|=27\times\frac{1}{3}=9;$$

(3) $|-2A|=(-2)^3|A|=-8\times 3=-24$；

(4) $|(3A)^{-1}|=|3A|^{-1}=(3^3|A|)^{-1}=(3^3\times 3)^{-1}=\dfrac{1}{81}$；

(5) 由(2)中分析可知 $A^*=3A^{-1}$，所以

$$\left|\frac{1}{3}A^*-4A^{-1}\right|=\left|\frac{1}{3}(3A^{-1})-4A^{-1}\right|=|-3A^{-1}|=(-3)^3|A^{-1}|=-27\times\frac{1}{3}=-9;$$

(6) 由(2)中分析可知 $A^*=3A^{-1}$，则 $(A^*)^{-1}=(3A^{-1})^{-1}=\dfrac{1}{3}(A^{-1})^{-1}=\dfrac{1}{3}A$.

11. 设 A，B 均为 n 阶可逆矩阵，A^*,B^* 为其伴随矩阵，证明：$(AB)^*=B^*A^*$.

证 A,B 都可逆，故 $A^*=|A|A^{-1},B^*=|B|B^{-1}$，且 AB 可逆，从而得到

$$B^*A^*=|A||B|B^{-1}A^{-1}=|AB|(AB)^{-1}=(AB)^*.$$

12. 设 A 是 n 阶方阵，若 $A^2=A$ 且 A≠E，则 A 不是可逆矩阵.

证（反证） 假设 A 是可逆矩阵，那么在等式 $A^2=A$ 两边都左乘 A 的逆矩阵 A^{-1} 可得 $A=E$，这与题设中 $A\neq E$ 矛盾！所以 A 不可逆.

13. 设 A 是 n 阶方阵，如有非零的 n×t 矩阵 B 使 AB=0，则 $|A|$ =0.

证（反证） 若 $|A|\neq 0$，则 A 是可逆矩阵，在等式 $AB=O$ 两边左乘 A^{-1} 得 $B=O$，这与题设矛盾，所以 $|A|=0$.

14. 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2+A-4E=O$，

证明： A 及 $A-E$ 都是可逆矩阵，且写出 A^{-1} 及 $(A-E)^{-1}$.

证 （1） 由题意 $A^2+A-4E=O$ 可得：$A[\frac{1}{4}(A+E)]=E$，根据定理 3.2.1 的推论可知，A 可逆并且 $A^{-1}=\frac{1}{4}(A+E)$.

（2） 由题意 $A^2+A-4E=O$ 可得 $A^2+A-2E=2E$，而这个等式可化为 $(A-E)(A+2E)=2E$，即有 $(A-E)[\frac{1}{2}(A+2E)]=E$，同样根据定理 3.2.1 的推论可知，$A-E$ 可逆并且 $(A-E)^{-1}=\frac{1}{2}(A+2E)$.

习题 3.3

1. 将矩阵适当分块后计算：

（1）$\begin{bmatrix}-1&2&0&0\\3&1&0&0\\0&0&1&2\\0&0&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3&0&0\\4&-1&0&0\\0&0&2&1\\0&0&3&4\end{bmatrix}$；　（2）$\begin{bmatrix}2&0&0&1&0\\0&2&0&0&1\\0&0&2&2&-1\\0&0&0&1&4\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.

解　（1）记 $A=\begin{bmatrix}-1&2\\3&1\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}1&2\\-2&1\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}1&3\\4&-1\end{bmatrix},D=\begin{bmatrix}2&1\\3&4\end{bmatrix}$，则原式可以分块写成

$\begin{bmatrix}A&O\\O&B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C&O\\O&D\end{bmatrix}$，利用分块矩阵的性质计算得$\begin{bmatrix}A&O\\O&B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C&O\\O&D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}AC&O\\O&BD\end{bmatrix}$.

而 $AB=\begin{bmatrix}-1&2\\3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\-2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5&0\\1&7\end{bmatrix}$，　$CD=\begin{bmatrix}1&3\\4&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11&13\\5&0\end{bmatrix}$，据此可得

$$\begin{bmatrix}A&O\\O&B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C&O\\O&D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}AC&O\\O&BD\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5&0&0&0\\1&7&0&0\\0&0&11&13\\0&0&5&0\end{bmatrix}.$$

（2）记 $A=2E,B=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\2&-1\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}1&4\\0&1\end{bmatrix},D=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix},G=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$则原式可以分块写成$\begin{bmatrix}A&B\\O&C\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D\\G\end{bmatrix}$，利用分块矩阵的性质计算得$\begin{bmatrix}A&B\\O&C\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D\\G\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}AD+BG\\CG\end{bmatrix}$.

而 $AD+BG=2ED+BG=2D+BG=\begin{bmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3&2\\2&2&3\\2&4&1\end{bmatrix}$,

$CG=\begin{bmatrix}1&4\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&4\\0&0&1\end{bmatrix}$,

据此可得$\begin{bmatrix}A&B\\O&C\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D\\G\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}AD+BG\\CG\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3&2\\2&2&3\\2&4&1\\0&1&4\\0&0&1\end{bmatrix}$.

2. 设 A 为 n 阶可逆矩阵，计算：

(1) $A^{-1}[A \quad E_n]$;　　(2) $\begin{bmatrix} A \\ E_n \end{bmatrix} A^{-1}$;　　(3) $[A \quad E_n]^T[A \quad E_n]$;

(4) $[A \quad E_n][A \quad E_n]^T$;　　(5) $\begin{bmatrix} A^{-1} \\ E_n \end{bmatrix}[A \quad E_n]$.

解 (1) $A^{-1}[A \quad E_n] = [A^{-1}A \quad A^{-1}E_n] = [E_n \quad A^{-1}]$;

(2) $\begin{bmatrix} A \\ E_n \end{bmatrix} A^{-1} = \begin{bmatrix} AA^{-1} \\ E_n A^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_n \\ A^{-1} \end{bmatrix}$;

(3) $[A \quad E_n]^T [A \quad E_n] = \begin{bmatrix} A \\ E_n \end{bmatrix}[A \quad E_n] = \begin{bmatrix} A^2 & A \\ A & E_n \end{bmatrix}$;

(4) $[A \quad E_n][A \quad E_n]^T = [A \quad E_n]\begin{bmatrix} A \\ E_n \end{bmatrix} = A^2 + E_n$;

(5) $\begin{bmatrix} A^{-1} \\ E_n \end{bmatrix}[A \quad E_n] = \begin{bmatrix} A^{-1}A & A^{-1}E_n \\ E_n A & E_n{}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_n & A^{-1} \\ A & E_n \end{bmatrix}$.

3. 设 $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$，其中 A，B， C，D 均为 n(n>1)阶方阵，则 $M^T =$______.

(A) $\begin{bmatrix} A & C \\ B & D \end{bmatrix}$.　　(B) $\begin{bmatrix} A & C^T \\ B^T & D \end{bmatrix}$.

(C) $\begin{bmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{bmatrix}$.　　(D) $\begin{bmatrix} A^T & B^T \\ C^T & D^T \end{bmatrix}$.

解 $M^T = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{bmatrix}$，故应选填 C.

4. 设 A，B 分别为 r，t 阶方阵，令

$$Q = \begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}.$$

(1) 证明：Q 可逆 $\Leftrightarrow$ A，B 均可逆；

(2) 当 Q 可逆时，求出 Q^{-1}.

(1) **证** Q 可逆 $\Leftrightarrow |Q| \neq 0$， 而 $|Q| = \begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} = (-1)^{rt}|A||B|$， 所以 Q 可逆 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$，且

$|B| \neq 0 \Leftrightarrow A, B$ 均可逆.

(2) 设 $Q^{-1}=\begin{bmatrix} C & D \\ F & G \end{bmatrix}$，则有 $QQ^{-1}=\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C & D \\ F & G \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} E & O \\ O & E \end{bmatrix}$.

而 $\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C & D \\ F & G \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} AF & AG \\ BC & BD \end{bmatrix}$，所以有 $\begin{cases} AF=E \\ AG=O \\ BC=O \\ BD=E \end{cases}$，因为 Q 可逆，由(1)知必有 A,B 可逆，所以由 $AG=O$，$BC=O$ 可得 $G=C=O$．而由 $AF=E$，$BD=E$ 可得 $F=A^{-1}, D=B^{-1}$．所以 $Q^{-1}=\begin{bmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{bmatrix}$.

5. 利用矩阵分块求下列矩阵的逆：

(1) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$； (2) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$；

(3) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$； (4) $\begin{bmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{n\times n}$，

其中 $a_i \neq 0 (i=1,2,\cdots,n)$.

解 (1) 记 $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$，则原矩阵为 $\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$．而 $\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{bmatrix}$.

因为 $A^{-1}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$，$B^{-1}=\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1}=-\begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$，所以可得

$$\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

(2) 记 $A=\begin{bmatrix}3&-2\\5&-3\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}3&4\\1&1\end{bmatrix}$, 则原矩阵为 $\begin{bmatrix}O&A\\B&O\end{bmatrix}$. 而 $\begin{bmatrix}O&A\\B&O\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}O&B^{-1}\\A^{-1}&O\end{bmatrix}$.

因为 $A^{-1}=\begin{bmatrix}3&-2\\5&-3\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-3&2\\-5&3\end{bmatrix}$, $B^{-1}=\begin{bmatrix}3&4\\1&1\end{bmatrix}^{-1}=-\begin{bmatrix}1&-4\\-1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&4\\1&-3\end{bmatrix}$, 所以可得

$$\begin{bmatrix}O&A\\B&O\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}O&B^{-1}\\A^{-1}&O\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&-1&4\\0&0&1&-3\\-3&2&0&0\\-5&3&0&0\end{bmatrix}.$$

(3) 记 $A=\begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$, 则原矩阵为 $\begin{bmatrix}O&A\\B&O\end{bmatrix}$. 而

$$\begin{bmatrix}O&A\\B&O\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}O&B^{-1}\\A^{-1}&O\end{bmatrix}.$$

因为 $A^{-1}=\begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-3&2\\2&-1\end{bmatrix}$, $B^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\1&-1&1\end{bmatrix}$,

所以可得 $\begin{bmatrix}O&A\\B&O\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}O&B^{-1}\\A^{-1}&O\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&-1&1&0\\0&0&1&-1&1\\-3&2&0&0&0\\2&-1&0&0&0\end{bmatrix}$

(4) 记 $A=\begin{bmatrix}a_1&&&\\&a_2&&\\&&\ddots&\\&&&a_{n-1}\end{bmatrix},B=[a_n]$, 则原矩阵为 $\begin{bmatrix}O&A\\B&O\end{bmatrix}$. 而

$$\begin{bmatrix}O&A\\B&O\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}O&B^{-1}\\A^{-1}&O\end{bmatrix}.$$

因为 $A^{-1}=\begin{bmatrix}a_1&&&\\&a_2&&\\&&\ddots&\\&&&a_{n-1}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}a_1^{-1}&&&\\&a_2^{-1}&&\\&&\ddots&\\&&&a_{n-1}^{-1}\end{bmatrix}$, $B^{-1}=[a_n]^{-1}=[a_n^{-1}]$,

所以可得 $\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & a_n^{-1} \\ a_1^{-1} & & & \\ & a_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & a_{n-1}^{-1} & \end{bmatrix}$.

6. 考虑例 3.3.5 的一些变形．仍设 A，B 分别为 r 阶，s 阶方阵，令

$$M_1 = \begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} C & A \\ B & O \end{bmatrix}, \quad M_3 = \begin{bmatrix} O & A \\ B & C \end{bmatrix}.$$

分别写出 M_1, M_2, M_3 可逆的充要条件，并加以证明．且在可逆时求出其逆．

解 （1） M_1 可逆的充要条件为 A, B 均可逆．证明如下：

M_1 可逆 $\Leftrightarrow |M_1| \neq 0$，而 $|M_1| = |A||B| \Leftrightarrow |A| \neq 0$，$|B| \neq 0 \Leftrightarrow A, B$ 均可逆.

设 $M_1 = \begin{bmatrix} K & D \\ F & G \end{bmatrix}$，则有 $M_1 M_1^{-1} = \begin{bmatrix} C & A \\ B & O \end{bmatrix}\begin{bmatrix} K & D \\ F & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & \\ & E \end{bmatrix}$.

而 $\begin{bmatrix} C & A \\ B & O \end{bmatrix}\begin{bmatrix} K & D \\ F & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CK + AF & CD + AG \\ BK & BD \end{bmatrix}$，所以有 $\begin{cases} CK + AF = E \\ CD + AG = O \\ BK = O \\ BD = E \end{cases}$，因为 M_1 可逆，

由 (1) 可知必有 B 可逆，所以由 $BK = O$ 可得 $K = O$；而由 $CK + AF = E$，可得 $F = A^{-1}$；

而由 $BD = E$，可得 $D = B^{-1}$；由 $CD + AG = O$，可得 $G = -A^{-1}CB^{-1}$ 所以

$$M_1 = \begin{bmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \end{bmatrix}.$$

（2） M_2 可逆的充要条件为 A, B 均可逆．证明如 (1)．

用类似 (1) 的方法可以解得 $M_2^{-1} = \begin{bmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \end{bmatrix}$.

（3） M_3 可逆的充要条件为 A, B 均可逆．证明如 (1)．

用类似 (1) 的方法可以解得 $M_2^{-1} = \begin{bmatrix} -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{bmatrix}$.

习题 3.4

1. 下列矩阵中，不是初等矩阵的是( )，并说明理由.

(A) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. (B) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. (C) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. (D) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

解 （A）由 $E \xrightarrow{R_{13}} (A)$ 所以是初等矩阵；

（B）由 $E \xrightarrow{R_{12}} (B)$ 所以是初等矩阵；

（C）不能由 E 经过一次初等变换得到，所以不是初等矩阵；

（D）由 $E \xrightarrow{R_2-2R_1} (D)$ 所以是初等矩阵.

2. 求下列可逆矩阵的逆矩阵：

(1) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$； (2) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$； (3) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$；

(4) $\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & \cdots & a^n \\ 0 & 1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & a & \cdots & a^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n\times n}$； (5)* $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n\times n}$ $(n>1)$.

分析 用初等行变换 $[A \ \vdots \ E] \longrightarrow [E \ \vdots \ A^{-1}]$，即可得到 A^{-1}.

解 (1) $\left[\begin{array}{ccc:ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{array}\right]$,

所以 $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$.

(2) $\left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right]$,

所以 $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$.

(3) $\left[\begin{array}{ccccc:ccccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[i=1,2,3,4,5]{\frac{1}{2}R_i}$

$$\xrightarrow[i=5,4,3,2]{R_{i-1}-\frac{1}{2}R_i} \left[\begin{array}{ccccc:ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{16} & \frac{1}{32} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{16} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right],$$

所以 $A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{16} & \frac{1}{32} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{16} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

(4) $\left[\begin{array}{cccccc:cccccc} 1 & a & a^2 & a^3 & \cdots & a^n & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a & \cdots & a^{n-2} & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1-aR_2}$

$\xrightarrow{R_2-aR_3} \cdots \xrightarrow{R_{n-1}-aR_n} \left[\begin{array}{cccccc:cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & -a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right]$,

所以 $A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(5) $\left[\begin{array}{ccccc:ccccc} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[i=1,2,\cdots,n-1]{R_i-R_n} \xrightarrow{R_n+R_1+R_2+\cdots+R_{n-1}}$

$$\xrightarrow[\frac{1}{n-1}R_n]{-R_i\,(i=1,2,\cdots n-1)}\xrightarrow[i=1,2,\cdots,n-1]{R_i+R_n}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{2-n}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{n-1} & \frac{2-n}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \frac{2-n}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{2-n}{n-1} \end{bmatrix}$$

所以 $A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{2-n}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-1} & \frac{2-n}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \frac{2-n}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{2-n}{n-1} \end{bmatrix}$.

3. 解下列矩阵方程：

（1）$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$；

（2）$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}\boldsymbol{X}\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{bmatrix}$；

（3）* $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$，其中

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}_{n\times n},\quad B=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

求 X.

分析　对于矩阵方程 $AX=C$，当 A 可逆时，只要对矩阵 $\begin{bmatrix} A & C \end{bmatrix}$ 只作初等行变换化为 $\begin{bmatrix} E & A^{-1}C \end{bmatrix}$，即得到解 $X=A^{-1}C$．而对于矩阵方程 $XA=C$，当 A 可逆时，只要对矩阵 $\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix}$ 只作初等列变换化为 $\begin{bmatrix} E \\ CA^{-1} \end{bmatrix}$，即得到解 $X=CA^{-1}$．而对于矩阵方程 $AXB=C$，当

A,B 都可逆时，只要先对矩阵 $\begin{bmatrix} A & C \end{bmatrix}$ 只作初等列变换化为 $\begin{bmatrix} E & A^{-1}C \end{bmatrix}$，再对矩阵 $\begin{bmatrix} B \\ A^{-1}C \end{bmatrix}$ 只作初等列变换化为 $\begin{bmatrix} E \\ A^{-1}CB^{-1} \end{bmatrix}$，即得到解 $X = A^{-1}CB^{-1}$. 或者也可以分别求出 A^{-1}, B^{-1}, 再作矩阵乘法得到解.

解 （1）只用初等行变换

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -4 & -1 \end{array}\right],$$

所以解得 $X = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -3 & -3 & 0 \\ -7 & -4 & -1 \end{bmatrix}$.

（2）先只用初等行变换

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 4 & 3 & -3 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 3 & -2 \\ 3 & 4 & 2 & 4 & 4 & -3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 & 4 \end{array}\right],$$

再只用初等列变换

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -5 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

所以解得 $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

（3）

$$\left[\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[i=1,2,\cdots,n-1]{R_i - R_{i+1}}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{array}\right],$$

所以解得 $X=\begin{bmatrix}1&-1&-1&0&\cdots&0&0\\1&1&-1&-1&\cdots&0&0\\0&1&1&-1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&0&\cdots&1&-1\\0&0&0&0&\cdots&1&2\end{bmatrix}$.

4. 若可逆矩阵 A 作下列变化，则 A^{-1} 相应地有怎样的变化?

(1) A 中 i 行与 j 行互换;

(2) A 中 i 行乘上非零数 k;

(3) $i<j$ 时， A 中第 j 行乘上数 k 加到第 i 行.

解 (1) A 中 i 行与 j 行互换相当于用初等矩阵 $E(i,j)$ 左乘 A 得到 $E(i,j)\ A \overset{\text{记为}}{=\!=} B$, 则

$B^{-1}=(E(i,j)A)^{-1}=A^{-1}E(i,j)^{-1}=A^{-1}E(i,j)$，所以相当于 A^{-1} 中的 i 列与 j 列互换.

(2) A 中 i 行乘上非零数 k 相当于用初等矩阵 $E(i(k))$ 左乘 A 得到 $E(i(k))\ A \overset{\text{记为}}{=\!=} B$, 则

$B^{-1}=(E(i(k))A)^{-1}=A^{-1}E(i(k))^{-1}=A^{-1}E(i(\frac{1}{k}))$, 所以相当于 A^{-1} 中 i 列乘上非零数 $\frac{1}{k}$.

(3) A 中第 j 行乘上数 k 加到第 i 行相当于用初等矩阵 $E(i+j(k),j)$ 左乘 A 得到

$E(i+j(k),j)\ A \overset{\text{记为}}{=\!=} B$, 则 $B^{-1}=(E(i+j(k),j)A)^{-1}=A^{-1}E(i+j(k),j)^{-1}$

$=A^{-1}E(i+j(-k),j)$, 所以相当于 A^{-1} 中第 j 行乘上数 $-k$ 加到第 i 行.

5. * 求满足关系式 $A(E-C^{-1}B)^TC^T=E$ 的矩阵 A，其中

$$B=\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}2&1&3&4\\0&2&1&3\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{bmatrix}.$$

解 由于 $A(E-C^{-1}B)^TC^T=E$，得 $A[C(E-C^{-1}B)]^T=E$，化简为

$A(C-B)^T=E$, $A(C^T-B^T)=E$.

而 $C^T - B^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$，显然是可逆矩阵. 所以只需要求出 $(C^T - B^T)^{-1}$ 即得到 A.

下面只用初等行变换把 $\left[C^T - B^T \ \vdots \ E\right]$ 化为 $\left[E \ \vdots \ A\right]$ 即可.

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right],$$

从而得到 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

6. 设

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} a_{11} + ka_{31} & a_{13} + ka_{33} & a_{12} + ka_{32} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{P}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{P}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{P}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

则下列等式成立的是（　），并说明理由.

（A）$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2 = \boldsymbol{B}$.　（B）$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_3 = \boldsymbol{B}$.　（C）$\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_3 = \boldsymbol{B}$.　（D）$\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_4 = \boldsymbol{B}$.

解　由观察可知 $A \xrightarrow{R_1 + kR_3} \xrightarrow{C_{23}} B$，所以只要对 A 左乘一个初等矩阵 $E(1+3(k),3)$ 再右乘一个初等矩阵 $E(2,3)$ 就得到 B. 显然 $E(1+3(k),3) = P_1$，$E(2,3) = P_3$，所以 $P_1AP_3 = B$，故应选填 B.

习题 3.5

1. 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2&0\\3&6&0\\0&0&0\end{bmatrix},\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}0&0&2\\0&0&0\\-5&0&0\end{bmatrix},\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

则在 B,C,D 中与 A 等价的矩阵为________，并说明理由.

分析 等价的充要条件是两个行列数相同的矩阵的秩相同. 由于 A 是一个 3×3 的秩为 2 的矩阵, 所以只要在 B,C,D 中找出同样是 3×3 的秩为 2 的那个矩阵即是与 A 等价的矩阵.

解 B 是 3×3 的, 但是它的秩为 1 所以不是; C 是 3×3 的同时秩也是 2 所以与 A 等价; D 虽然秩是 2 但是是 4×3 的矩阵, 所以与 A 不等价. 综上知应填 C.

2 下述命题正确的是( )，并说明理由.

(A) 若 A 与 B 等价，则 A=B.

(B) 若方阵 A 与方阵 B 等价，则 $|A|=|B|$.

(C) 若 A 与可逆矩阵 B 等价，则 A 也是可逆矩阵.

(D) 若 A，B，C，D 均为 n 阶方阵. 若 A 与 B 等价，C 与 D 等价，则 A+C 与 B+D 等价.

解 (A) 设 $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$, 由于秩($A$)=秩($B$), 所以他们必等价, 但是显然 $A\neq B$. 据此(A)不正确.

(B) $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}$, 由于秩($A$)=秩($B$), 所以他们必等价, 但是显然 $|A|=1\neq|B|=2$. 据此(B)不正确.

(C) B 是可逆矩阵, 因此 B 是满秩的方阵. 根据题意 A 与 B 等价, 即有秩(A)=秩(B), 所以 A 也是满秩的方阵, 因此 A 也是可逆矩阵. 据此(C)正确.

(D) 设 $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}-1&0\\0&0\end{bmatrix},D=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$, 秩($A$)=秩($B$), 秩($C$)=秩($D$), 所以 A 与 B 等价，C 与 D 等价. 但是显然 $A+C=O,B+D=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$ 不等价. 据此(D)不正确.

综上知应填 C.

3. 已知 $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 2 & a & 6 \end{bmatrix}$ 等价，则 $a=$____，为什么？

解 由于两个矩阵等价，所以两者的秩必相等.

$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_{23}]{R_2+2R_1} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，可知该矩阵的秩为 2，因此 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 2 & a & 6 \end{bmatrix}$ 的秩也必须为 2. 对它作初等行变换.

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 2 & a & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3-2R_1]{R_2-2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & a-4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3-(a-4)R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2(a-4) \end{bmatrix}$，所以要使得它的秩为 2，则 $a=4$. 故应填 4.

4. 证明：秩为 r 的矩阵可表示为 r 个秩为 1 的矩阵之和.

证 设 A 为秩为 r 的 $m\times n$ 矩阵，则它必与矩阵 $\begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix}_{m\times n}$ 等价，所以必存在两个可逆矩阵 P,Q 使得 $A=P\begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix}_{m\times n}Q$ 成立. 而 $\begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix}_{m\times n}$ 可以写成 r 个只有一个元素为 1 其余为零的 $m\times n$ 矩阵的和的形式：

$$\begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix}_{m\times n} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & O_{m-r,n-r} \end{bmatrix}_{m\times n} + \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & O_{m-r,n-r} \end{bmatrix}_{m\times n} + \cdots$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & O_{m-r,n-r} \end{bmatrix}_{m\times n} + \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & O_{m-r,n-r} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

所以有 $A=P\begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix}_{m\times n}Q$

$$=P(\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & O_{m-r,n-r} \end{bmatrix}_{m\times n}+\cdots+\begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & O_{m-r,n-r} \end{bmatrix}_{m\times n})Q$$

$$=P\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & O_{m-r,n-r} \end{bmatrix}_{m\times n}Q+\cdots+P\begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & O_{m-r,n-r} \end{bmatrix}_{m\times n}Q$$

这样 A 就表示成了 r 个矩阵之和的形式. 而任一个 $P\begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & O_{m-r,n-r} \end{bmatrix}_{m\times n}Q$,

由于中间那个矩阵只有一个元素非零, 所以其秩为 1, 而 P,Q 可逆, 所以三个矩阵的积的秩仍然为 1. 这样 A 就表示成了 r 个秩为 1 的矩阵之和了.

5. 上题的逆命题 "r 个秩为 1 的矩阵之和的秩为 r" 是否成立?成立请证明，否则举反例.

证 设 $A_1=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & O_{m-r,n-r} \end{bmatrix}_{m\times n}$, $A_2=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & O_{m-r,n-r} \end{bmatrix}_{m\times n}$,

$$\cdots, A_r=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & O_{m-r,n-r} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

显然 $A_i\,(i=1,2,\cdots,r)$ 的秩都是 1, 但是他们的和 $A=\begin{bmatrix} r & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & O_{m-r,n-r} \end{bmatrix}_{m\times n}$ 的秩是 1 而

不是 r. 所以该逆命题不成立.

6. 若将所有 n 阶方阵按等价分类，可分成几个等价类?每一类的标准形是什么?

解 可以分成$n+1$类，秩为 0 的一类，标准形为O；秩为 1 的一类，标准形为$\begin{bmatrix} E_1 & O \\ O & O \end{bmatrix}$；秩为 2 的一类，标准形为$\begin{bmatrix} E_2 & O \\ O & O \end{bmatrix}$，$\cdots$，秩为$n$的一类，标准形为$E_n$.

7. 设 A 是 n(n>1)阶方阵，A≠0，则存在一个非零矩阵$B_{n\times t}$，使得$AB=O$的充要条件为$|A|=0$.

证 对于必要性的证明同习题 3.2 的第 13 个习题，下面证明该命题的充分性.

若$|A|=0$则可知A是一个不满秩的 n(n>1)阶方阵，据此可知线性方程组$AX=O$有非零解. 设a_1，$\cdots$，a_n为一个非零解，则令$B=\begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n\times t}$. 显然$B$是一个非零的$n\times t$矩阵，并且满足$AB=O$. 所以存在这样的非零矩阵$B_{n\times t}$，使得$AB=O$.

8. 设 A 是 m×n 矩阵，B 是 n×m 矩阵，若 m>n，则必有$|AB|=0$.

证 由于秩$(AB)\le$秩(A)，而A是一个$m\times n$的矩阵且$m>n$，所以秩(A)$\le n$. 据此可得秩$(AB)\le n$. 由于 A 是 m×n 矩阵，B 是 n×m 矩阵，所以AB是一个$m\times m$的方阵，由于秩$(AB)\le n<m$，因此AB是不满秩的，因此$|AB|=0$.

9. 设$A=\begin{bmatrix} 2 & -2 & 7 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，$B$是秩为 1 的 3 × 5 矩阵，问矩阵$(A-E)B$的秩为多少?

解 由$A-E=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$，可知$|A-E|=-2\neq 0$，所以$A-E$是可逆矩阵，因此秩($(A-E)B$)=秩($B$)=1.

10. 设 A 为 5 × 3 矩阵

(1) 秩(AA^T)必______. $\left|AA^T\right|$=______.

(2) 齐次线性方程组(AA^T)$X=O$ 为( ).

(A) 无解；　　(B) 有惟一解；

(C) 有无穷多解；　　(D) 解不确定，可能有解，可能无解.

解 (1) A 为 5 × 3 矩阵，则 A^T 即为一个3×5的矩阵，利用本节第 8 个习题可知$\left|AA^T\right|=0$,

所以秩(AA^T)必小于等于 3.

(2)由(1)知秩(AA^T)≤3<未知数个数，所以必有无穷多解，所以选填 C.

习题 3.6

1. 设 A，B 都是 n(n＞1)阶方阵，k∈P，且 k≠0. 判断下列结论成立的是(　)，且说明理由：

（1）若 $|\boldsymbol{A}|=0$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.　　（2）$|k\boldsymbol{A}|=k|\boldsymbol{A}|$.

（3）$\left|\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}\right|=1$.　　（4）$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$.

（5）$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$.　　（6）$|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|$.

（7）$|(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}||\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}|$.

解 (1) 设 $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$，易知 $|A|=0$，但 $A\neq O$，所以(1)不一定成立.

(2) 设 $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}, k=2$，易得 $|kA|=\begin{vmatrix}2&0\\0&2\end{vmatrix}=4, k|A|=2\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=2$，此时 $|kA|\neq k|A|$，所以(2)不一定成立.

(3) 设 $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}$，易得 $\left|\frac{1}{|A|}A\right|=\begin{vmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\neq 1$, 所以(3)不一定成立.

(4) 设 $A=E, B=-E$，易得 $|A+B|=|O|=0$，$|A|+|B|=2$，此时 $|A+B|\neq|A|+|B|$，所以(4)不一定成立.

(5) (6)都是课本中提及的性质，是成立的.

(7) $|(AB)^T|=|B^TA^T|=|B^T||A^T|=|A^T||B^T|$，所以(7)成立.

综上所述应填(5)、(6)、(7).

2. 以下命题是正确的是(　)，且说明理由：

(1) 对任何矩阵 A，均有 $|AA^T|=|A^TA|$.

(2) A，B，C，D 均为 n(n>1)阶方阵，若 $M=\begin{bmatrix}A&B\\C&D\end{bmatrix}$，

则 $|M|=|A||D|-|B||C|$.

(3) A，B，C，D 均为 n 阶方阵，若 $M=\begin{bmatrix}A&B\\C&D\end{bmatrix}$，则 $M^T=\begin{bmatrix}A&C\\B&D\end{bmatrix}$.

(4) A，B 为 n(n>1)阶方阵则 $\begin{vmatrix}O&A\\B&O\end{vmatrix}=-|A||B|$.

(5) A，B 为可逆矩阵，则 $AXB=C$ 有惟一解 $X=A^{-1}CB^{-1}$.

(6) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & \cdots & n \end{bmatrix}_{n\times n}$ 等价于 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n\times n}$.

解 (1) 设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，则

$$\left|AA^T\right|=\left|\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right|=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=2,\ \left|A^TA\right|=\left|\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=0$$

显然此时$\left|AA^T\right|\neq\left|A^TA\right|$，所以该项不一定成立.

(2) 设 $A=C=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B=D=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，则 $M=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

计算得$|A||D|-|B||C|=1\times1-2\times2=-3$，而 M 中由于第二第四两行相同，所以$|M|=0$.

因此此时$|M|\neq|A||D|-|B||C|$，所以此项不一定正确.

(3) $M^T=\begin{bmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{bmatrix}$，所以$M^T=\begin{bmatrix} A & C \\ B & D \end{bmatrix}$不正确.

(4) $\left|\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}\right|=(-1)^{n^2}|A||B|$，所以$\left|\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}\right|=-|A||B|$ 不正确.

(5) 因为 A，B 为可逆矩阵，所以方程两边同左乘 A^{-1}，再右乘 B^{-1} 即得 $X=A^{-1}CB^{-1}$.

所以是正确的.

(6) 因为 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & \cdots & n \end{bmatrix}_{n\times n} \xrightarrow[i=2,3,\cdots,n]{R_i-iR_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n\times n}$ 据定义知这两个矩阵等价.

综上所述应填(6).

3. 已知 A 为 3 阶方阵，$|A|=a\neq0$，记$G=\begin{bmatrix} O & 2A \\ -A^* & A+A^* \end{bmatrix}$，求

(1) $|G|$;　　(2) $(G^*)^{-1}$.

解 （1） $|G|=\begin{vmatrix} O & 2A \\ -A^* & A+A^* \end{vmatrix}=(-1)^9|2A||-A^*|=(-1)^{12}2^3|A||A^*|=2^3|AA^*|$

因为 $AA^*=|A|E=aE$，所以 $|AA^*|=|aE|=a^3$，据此 $|G|=2^3|AA^*|=8a^3$.

（2）因为 $GG^*=|G|E$，由(1)得 $|G|=8a^3\neq 0$，所以 $GG^*=8a^3E$，因此可得

$(\frac{1}{8a^3}G)G^*=E$，根据定理 3.2.1 的推论可知，G^* 可逆，且 $(G^*)^{-1}=\frac{1}{8a^3}G$.

4. 设 A 是 n 阶可逆方阵，将 A 的第 i 行和第 j 行互换后得到的矩阵记为 B.

（1）证明 B 是可逆矩阵；（2）求 AB^{-1}.

（1）**证** 由题意可知 $A\xrightarrow{R_{ij}}B$，所以可得 $B=E(i,j)A$，因 $A,E(i,j)$ 均为可逆矩阵，

所以 B 也是可逆的，且 $B^{-1}=(E(i,j)A)^{-1}=A^{-1}E(i,j)^{-1}=A^{-1}E(i,j)$

（2）**解** $AB^{-1}=AA^{-1}E(i,j)=E(i,j)$.

5. 设 A 为 m×n 矩阵，B 为 n×m 矩阵. 当 m>n 时证明：

（1）秩（AB）<m；（2）AB 不可逆；

（3）齐次线性方程组 $(AB)X=O$ 有非零解 .

证 (1)秩 $(AB)\le$ 秩（$A_{m\times n}$）$\le n\le m$.

（2）由于 A 是 m×n 矩阵，B 是 n×m 矩阵，所以 AB 是一个 $m\times m$ 的方阵，由于秩 $(AB)\le n<m$，因此 AB 是不满秩的，因此 AB 不可逆.

(3)由(1)知秩（AB）< m，而该线性方程组未知量的个数为 m，所以必有非零解.

6. 设秩（$A_{m\times n}$）=r，证明：

（1）存在 $B_{m\times n},C_{n\times n}$，秩（$B$）=秩（$C$）=r, 使 $A=BC$；

（2）存在 $D_{m\times m},F_{m\times n}$，秩（$D$）=秩（$F$）=r，使 $A=DF$；

（3）存在 $R_{m\times r},S_{r\times n}$，秩（$R$）=秩（$S$）=r，使 $A=RS$.

证 （1）因为秩（$A_{m\times n}$）=r，所以 A 与 $\begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix}_{m\times n}$ 等价，即存在两个可逆矩阵 $P_{m\times m},Q_{n\times n}$

使得 $A=P_{m\times m}\begin{bmatrix}E_r & O\\ O & O\end{bmatrix}_{m\times n}Q_{n\times n}$，令 $B=P_{m\times m}\begin{bmatrix}E_r & O\\ O & O\end{bmatrix}_{m\times n}$，$C=\begin{bmatrix}E_r & O\\ O & O\end{bmatrix}_{n\times n}Q_{n\times n}$，因为

$P_{m\times m},Q_{n\times n}$ 是可逆的而 $\begin{bmatrix}E_r & O\\ O & O\end{bmatrix}_{m\times n}$，$\begin{bmatrix}E_r & O\\ O & O\end{bmatrix}_{n\times n}$ 的秩都为 r，所以秩（B）=秩（C）=r. 并且 B 是 $m\times n$ 的，C 是 $n\times n$ 的. 而且计算可得

$$BC=P_{m\times m}\begin{bmatrix}E_r & O\\ O & O\end{bmatrix}_{m\times n}\begin{bmatrix}E_r & O\\ O & O\end{bmatrix}_{n\times n}Q_{n\times n}=P_{m\times m}\begin{bmatrix}E_r & O\\ O & O\end{bmatrix}_{m\times n}Q_{n\times n}=A.$$

(2) 只需令 $D=P_{m\times m}\begin{bmatrix}E_r & O\\ O & O\end{bmatrix}_{m\times m}$，$F=\begin{bmatrix}E_r & O\\ O & O\end{bmatrix}_{m\times n}Q_{n\times n}$，同(1)分析可知这样构造得到的 $D_{m\times m},F_{m\times n}$ 即为所需的两个矩阵.

(3) 只需令 $R=P_{m\times m}\begin{bmatrix}E_r\\ O\end{bmatrix}_{m\times r}$，$S=\begin{bmatrix}E_r & O\end{bmatrix}_{r\times n}Q_{n\times n}$，同(1)分析可知这样构造得到的 $R_{m\times r},S_{r\times n}$ 即为所需的两个矩阵.

7. 设 C 为可逆矩阵，试问秩（ACB）与秩（AB）是否一定相等?或证明，或举反例.

解 设 $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$,

计算得 $AB=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=O,ACB=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$.

显然秩（ACB）=1，秩（AB）=0，两者不相等. 所以秩（ACB）与秩（AB）不一定相等.

8. 设 A，B 为 n 阶方阵，且秩（A）+秩（B）≤n. 证明：存在可逆矩阵 M 使 $AMB=O$

证 设秩（A）$=r_1$，秩（B）$=r_2$，则存在四个可逆矩阵 P_1,Q_1,P_2,Q_2 使得

$A=P_1\begin{bmatrix}E_{r_1} & O\\ O & O\end{bmatrix}Q_1$，$B=P_2\begin{bmatrix}O & O\\ O & E_{r_2}\end{bmatrix}Q_2$ 成立. 由 $r_1+r_2\le n$ 知，$\begin{bmatrix}E_{r_1} & O\\ O & O\end{bmatrix}\begin{bmatrix}O & O\\ O & E_{r_2}\end{bmatrix}=O$，

取 $M=Q_1^{-1}P_2^{-1}$，则 M 为可逆矩阵，且

$$AMB=P_1\begin{bmatrix}E_{r_1} & O\\ O & O\end{bmatrix}Q_1Q_1^{-1}P_2^{-1}P_2\begin{bmatrix}O & O\\ O & E_{r_2}\end{bmatrix}Q_2$$

$$=P_1\begin{bmatrix}E_{r_1} & O\\ O & O\end{bmatrix}\begin{bmatrix}O & O\\ O & E_{r_2}\end{bmatrix}Q_2=P_1OQ_2=O.$$

故存在可逆矩阵 M 使得 $AMB=O$.

习题 4.1

1. 设 $\alpha=[1,\ \ -1,\ \ 0,\ \ 5]^T$, $\beta=[2,\ \ 0,\ \ 7,\ \ -3]^T$.

(1) 计算 $3\alpha+2\beta$ 及 $2\alpha-3\beta$；

(2) 若 $5\alpha+\gamma=3\beta$，则 $\gamma=$______；

(3) 若 $3\alpha-2\beta+\gamma=O$，则 $\gamma=$______；

解 (1) $3\alpha+2\beta=3[1,\ \ -1,\ \ 0,\ \ 5]^T+2[2,\ \ 0,\ \ 7,\ \ -3]^T=[7,\ \ -3,\ \ 14,\ \ 9]^T$；

$$2\alpha-3\beta=2[1,\ \ -1,\ \ 0,\ \ 5]^T-3[2,\ \ 0,\ \ 7,\ \ -3]^T=[-4,\ \ -2,\ \ -21,\ \ 19]^T.$$

(2) 因为 $5\alpha+\gamma=3\beta$，所以

$$\gamma=3\beta-5\alpha=3[2,\ \ 0,\ \ 7,\ \ -3]^T-5[1,\ \ -1,\ \ 0,\ \ 5]^T=[1,\ \ 5,\ \ 21,\ \ -34]^T.$$

(3) 因为 $3\alpha-2\beta+\gamma=O$，所以

$$\gamma=2\beta-3\alpha=2[2,\ \ 0,\ \ 7,\ \ -3]^T-3[1,\ \ -1,\ \ 0,\ \ 5]^T=[1,\ \ 3,\ \ 14,\ \ -21]^T.$$

2. 设 $3\alpha+4\beta=[2,\ \ 1,\ \ 1,\ \ 2]^T$， $2\alpha+3\beta=[-1,\ \ 2,\ \ 3,\ \ 1]^T$，则 $\alpha=$______；

$\beta=$______.

解

$$3\alpha+4\beta=[2,\ \ 1,\ \ 1,\ \ 2]^T \quad (1)$$

$$2\alpha+3\beta=[-1,\ \ 2,\ \ 3,\ \ 1]^T \quad (2)$$

(1)×2−(2)×3 得 $-\beta=2[2,\ \ 1,\ \ 1,\ \ 2]^T-3[-1,\ \ 2,\ \ 3,\ \ 1]^T=[7,\ \ -4,\ \ -7,\ \ 1]^T$,

所以 $\beta=[-7,\ \ 4,\ \ 7,\ \ -1]^T$. 把 β 代入(1)式可得

$$3\alpha=[2,\ \ 1,\ \ 1,\ \ 2]^T-4[-7,\ \ 4,\ \ 7,\ \ -1]^T=[30,\ \ -15,\ \ -27,\ \ 6]^T,$$

所以 $\alpha=[10,\ \ -5,\ \ -9,\ \ 2]^T$.

3. 设 $\varepsilon_1=[1,\ \ 0,\ \ 0,\ \ \cdots,\ \ 0]^T$，$\varepsilon_2=[0,\ \ 1,\ \ 0,\ \ \cdots,\ \ 0]^T$，……，

$\varepsilon_{n-1}=[0,\ \ 0,\ \ \cdots,\ \ 1,\ \ 0]^T$，$\varepsilon_n=[0,\ \ 0,\ \ \cdots,\ \ 0,\ \ 1]^T$，

求 $a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_{n-1}\varepsilon_{n-1}+a_n\varepsilon_n$.

解 $a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_{n-1}\varepsilon_{n-1}+a_n\varepsilon_n$

$$=a_1[1,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 0]^T+a_2[0,\ 1,\ 0,\ \cdots,\ 0]^T+\cdots+a_n[0,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ 1]^T$$

$$=[a_1,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 0]^T+[0,\ a_2,\ 0,\ \cdots,\ 0]^T+\cdots+[0,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ a_n]^T$$

$$=[a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n]^T$$

4. 证明：性质 4. 1. 1.

证 (1) 设 $\alpha=[a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n]^T$，则

$$0\alpha=0[a_1,\ a_2,\ \cdots\ a_n]^T=[0a_1,\ 0a_2,\ \cdots\ 0a_n]^T=[0,\ 0,\ \cdots\ 0]^T=O$$

(2) $kO=k[0,\ 0,\ \cdots,\ 0]^T=[k0,\ k0,\ \cdots,\ k0]^T=O$

(3) 设 $\alpha=[a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n]^T$，则

$$(-k)\alpha=(-k)[a_1,\ a_2,\ \cdots\ a_n]^T=[(-k)a_1,\ (-k)a_2,\ \cdots\ (-k)a_n]^T$$

$$=\begin{cases}k[(-1)a_1,\ (-1)a_2,\ \cdots\ (-1)a_n]^T=k(-\alpha),\\ (-1)[ka_1,\ ka_2,\ \cdots\ ka_n]^T=(-1)(k\alpha).\end{cases}$$

(4) 设 $\alpha=[a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n]^T$，若 $k\alpha=O$，即有

$$k\alpha=k[a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n]^T=[ka_1,\ ka_2,\ \cdots,\ ka_n]^T=O,$$

根据向量相等的定义得

$\begin{cases}k\alpha_1=0,\\ k\alpha_2=0,\\ \vdots\\ k\alpha_n=0.\end{cases}$ 显然当 $k=0$ 时等式都成立，若 $k\neq 0$ 则必有 $\begin{cases}\alpha_1=0,\\ \alpha_2=0,\\ \vdots\\ \alpha_n=0.\end{cases}$ 即 $\alpha=O$.

5. 对任意的 n 元向量 α,β，数域 P 中任意的数 k，证明

(1) $k(\alpha-\beta)=k\alpha-k\beta$;

(2) $(k-t)\alpha=k\alpha-t\alpha$.

证 (1) 设 $\alpha=[a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n]^T$，$\beta=[b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n]^T$，则

$$k(\alpha-\beta)=k([a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n]^T-[b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n]^T)$$

$$=k([a_1-b_1,\ a_2-b_2,\ \cdots,\ a_n-b_n]^T)=[k(a_1-b_1),\ k(a_2-b_2),\ \cdots,\ k(a_n-b_n)]^T$$

$$=[ka_1-kb_1,\ ka_2-kb_2,\ \cdots,\ ka_n-kb_n]^T$$

$$=[ka_1,\ ka_2,\ \cdots,\ ka_n]^T-[kb_1,\ kb_2,\ \cdots,\ kb_n]^T$$

$$=k[a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n]^T-k[b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n]^T=k\alpha-k\beta.$$

(2) $(k-t)\alpha=(k-t)[a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n]^T=[(k-t)a_1,\ (k-t)a_2,\ \cdots,\ (k-t)a_n]^T$

$$=[ka_1-ta_1,\ ka_2-ta_2,\ \cdots,\ ka_n-ta_n]^T$$

$$=[ka_1,\ ka_2,\ \cdots,\ ka_n]^T-[ta_1,\ ta_2,\ \cdots,\ ta_n]^T$$

$$=k[a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n]^T-t[a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n]^T=k\alpha-t\alpha.$$

习题 4.2

1. 指出下述论断正确的是(　)，并说明理由.

(A) 如果当 $k_1 = k_2 = \cdots = k_r = 0$ 时，$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r = O$，则 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关.

(B) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性相关，则存在全不为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_r$，使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r = O$.

(C) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关，$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 线性无关，则 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 线性无关.

(D) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关，则其中每一个向量都不是其余向量的线性组合.

解　(A) 设 $\alpha_1 = [1,\ \ 0]^T, \alpha_2 = [2,\ \ 0]^T$，显然 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = 0\alpha_1 + 0\alpha_2 = O$，但是 $-2\alpha_1 + \alpha_2 = -2[1,\ \ 0]^T + [2,\ \ 0]^T = O$，说明 α_1, α_2 是线性相关的，所以该结论不正确.

(B) 根据线性相关的定义，只要求存在不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_r$，使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r = O$. 所以该选项也是不正确的.

(C) 设 $\alpha_1 = [1,\ \ 0]^T, \alpha_2 = [0,\ \ 1]^T$，显然 α_1, α_2 线性无关.

再设 $\beta_1 = [2,\ \ 0]^T, \beta_2 = [0,\ \ 2]^T$，显然 β_1, β_2 也是线性无关的. 但是对于 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ 有 $-2\alpha_1 - 2\alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 = O$ 成立，所以 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ 线性相关. 该选项也不正确.

(D) 正确. (反证)假设 α_i 能被 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \cdots \alpha_r$ 线性表示，则存在不全为零的数组 $k_1, \cdots, k_{i-1}, k_{i+1}, \cdots, k_r$ 使得 $\alpha_i = k_1\alpha_1 + \cdots + k_{i-1}\alpha_{i-1} + k_{i+1}\alpha_{i+1} + \cdots + k_r\alpha_r$ 成立，这样就有 $k_1\alpha_1 + \cdots + k_{i-1}\alpha_{i-1} + k_{i+1}\alpha_{i+1} + \cdots + k_r\alpha_r - \alpha_i = O$，所以 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性相关，而这与题设矛盾，所以向量组线性无关时其中每一个向量都不是其余向量的线性组合这个结论是正确的.

综上所述应选填 D.

2. 试将向量 β 表示成向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的线性组合：

(1) $\beta = [1,\ \ 2,\ \ 1,\ \ 1]^T$，$\alpha_1 = [1,\ \ 1,\ \ 1,\ \ 1]^T$，$\alpha_2 = [1,\ \ 1,\ \ -1,\ \ -1]^T$，$\alpha_3 = [1,\ \ -1,\ \ 1,\ \ -1]^T$，$\alpha_4 = [1,\ \ -1,\ \ -1,\ \ 1]^T$；

(2) $\beta=[0,\ \ 2,\ \ 0,\ \ -1]^T$，$\alpha_1=[1,\ \ 1,\ \ 1,\ \ 1]^T$，$\alpha_2=[1,\ \ 1,\ \ 1,\ \ 0]^T$，

$\alpha_3=[1,\ \ 1,\ \ 0,\ \ 0]^T$，$\alpha_4=[1,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 0]^T$.

解 (1) 向量 β 表示成向量组的线性组合的表达式系数即为线性方程组 $[\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3\ \ \alpha_4]X=\beta$ 的解，所以先求解该线性方程组. 为此用初等行变换化系数矩阵为阶梯形:

$$[\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3\ \ \alpha_4\ \ \beta]=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&-1&-1&2\\1&-1&1&-1&1\\1&-1&-1&1&1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&0&1&0\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&-4&1\end{bmatrix},$$

求得解为 $\begin{cases}x_1=\dfrac{5}{4},\\x_2=\dfrac{1}{4},\\x_3=-\dfrac{1}{4},\\x_4=-\dfrac{1}{4},\end{cases}$ 所以表达式为 $\beta=\dfrac{5}{4}\alpha_1+\dfrac{1}{4}\alpha_2-\dfrac{1}{4}\alpha_3-\dfrac{1}{4}\alpha_4$.

(2) 向量 β 表示成向量组的线性组合的表达式系数即为线性方程组 $[\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3\ \ \alpha_4]X=\beta$ 的解，所以先求解该线性方程组. 为此用初等行变换化系数矩阵为阶梯形:

$$[\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3\ \ \alpha_4\ \ \beta]=\begin{bmatrix}1&1&1&1&0\\1&1&1&0&2\\1&1&0&0&0\\1&0&0&0&-1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&0&-1\\0&1&0&0&1\\0&0&1&0&2\\0&0&0&1&-2\end{bmatrix},$$

求得解为 $\begin{cases}x_1=-1,\\x_2=1,\\x_3=2,\\x_4=-2,\end{cases}$ 所以表达式为 $\beta=-\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3-2\alpha_4$.

3. 设 $\beta=[7,\ \ -2,\ \ a]^T$，$\alpha_1=[2,\ \ 3,\ \ 5]^T$，$\alpha_2=[3,\ \ 7,\ \ 8]^T$，$\alpha_3=[1,\ \ -6,\ \ 1]^T$.

问 $a=$________时，β 可经 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示？为什么？a 取值为_______时，β 不能经 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示？为什么？

分析 判断向量β是否能被向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示$\Leftrightarrow[\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3]X=\beta$是否有解

$\Leftrightarrow$矩阵$[\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3]$的秩是否与矩阵$[\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3\quad\beta]$的秩相同.

解 对矩阵$[\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3\quad\beta]$作初等行变换化为阶梯形:

$$[\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3\quad\beta]=\begin{bmatrix}2&3&1&\vdots&7\\3&7&-6&\vdots&-2\\5&8&1&\vdots&a\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&2&-1&\vdots&1\\0&1&-3&\vdots&-5\\0&0&0&\vdots&a-15\end{bmatrix}.$$

当$a=15$时，秩($[\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3]$)=秩($[\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3\quad\beta]$)=2，所以$\beta$能被向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示;

当$a\neq15$时，秩($[\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3]$)=2，秩($[\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3\quad\beta]$)=3，两者不相等，所以$\beta$不能被向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示.

综上知第 1 空格填 15，第 2 空格填不等于 15.

4. * 设$\beta=[1,\quad1,\quad b+3,\quad5]^T$，$\alpha_1=[1,\quad0,\quad2,\quad3]^T$，$\alpha_2=[1,\quad1,\quad3,\quad5]^T$，

$\alpha_3=[1,\quad-1,\quad a+2,\quad1]^T$，$\alpha_4=[1,\quad2,\quad4,\quad a+8]^T$.

(1) a,b为何值时，β不能经$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性表示?

(2) a,b为何值时，β能经$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性表示? 并写出该线性表示式.

解 (1) 如上题解分析知, 可对矩阵$[\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3\quad\alpha_4\quad\beta]$作初等行变换化为阶梯形:

$$[\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3\quad\alpha_4\quad\beta]=\begin{bmatrix}1&1&1&1&\vdots&1\\0&1&-1&2&\vdots&1\\2&3&a+2&4&\vdots&b+3\\3&5&1&a+8&\vdots&5\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&1&1&1&\vdots&1\\0&1&-1&2&\vdots&1\\0&0&a+1&0&\vdots&b\\0&0&0&a+1&\vdots&0\end{bmatrix}$$

(1) 当$a=-1$时，$b\neq0$，则秩($[\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3\quad\alpha_4]$)=2,

秩($[\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3\quad\alpha_4\quad\vdots\beta]$)=3，两者不相等，所以此时不能线性表示.

(2) 当$a=-1$时，$b=0$，秩($[\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3\quad\alpha_4]$)=2=秩($[\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3\quad\alpha_4\quad\beta]$)，所以此时能线性表示，表达式系数即为线性方程组$[\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3\quad\alpha_4]X=\beta$的解. 由方程组得解为

$$\begin{cases} x_1 = t_1 - 2t_2, \\ x_2 = 1 - 2t_1 + t_2, \\ x_3 = t_2, \\ x_4 = t_1. \end{cases}$$（其中 t_1, t_2 为任意常数）

故表达式为 $\beta = (t_1 - 2t_2)\alpha_1 + (1 - 2t_1 + t_2)\alpha_2 + t_2\alpha_3 + t_1\alpha_4$（其中 t_1, t_2 为任意常数）.

当 $a \neq -1$ 时，秩（$[\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4]$）=4=秩（$[\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \quad \beta]$），所以也能线性表示. 表达式系数即为线性方程组 $[\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4]X = \beta$ 的解，由方程组解为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-2b}{a+1}, \\ x_2 = 1 + \dfrac{b}{a+1}, \\ x_3 = \dfrac{b}{a+1}, \\ x_4 = 0. \end{cases}$$ 故表达式为 $\beta = \dfrac{-2b}{a+1}\alpha_1 + (1 + \dfrac{b}{a+1})\alpha_2 + \dfrac{b}{a+1}\alpha_3$.

5. 指出下列向量组线性相关的是(　)，并说明理由.

(1) $\alpha_1 = [2, \quad 2, \quad 7, \quad -1]^T$，$\alpha_2 = [3, \quad -1, \quad 2, \quad 4]^T$，$\alpha_3 = [1, \quad 1, \quad 3, \quad 1]^T$；

(2) $\alpha_1 = [4, \quad 3, \quad -1, \quad 1, \quad -1]^T$，$\alpha_2 = [2, \quad 1, \quad -3, \quad 2, \quad -5]^T$，

$\alpha_3 = [1, \quad -3, \quad 0, \quad 1, \quad -2]^T$，$\alpha_4 = [1, \quad 5, \quad 2, \quad -2, \quad 6]^T$.

分析　判断向量组是否线性相关只需要看由该向量组构成的矩阵的秩是否小于向量的个数.

解　对矩阵 $[\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3]$ 作初等变换求秩:

$$[\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 7 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

这表明该矩阵的秩为 3 与向量个数相同，所以该向量组线性无关.

(2) 对矩阵 $[\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4]$ 作初等变换求秩:

$$[\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4] = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 & 5 \\ -1 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & -5 & -2 & 6 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

该矩阵的秩为 3 小于向量的个数 4，所以该向量组线性相关.

综上知应填(2).

6. 设 $\alpha_1=[1,\quad 2,\quad 3]^T$，$\alpha_2=[2,\quad 1,\quad 6]^T$，$\alpha_3=[3,\quad 4,\quad a]^T$. 问 $a=$______时 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关? a 取值为______时 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关? 为什么?

解 如上题分析，对矩阵 $[\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3]$ 作初等变换求秩

$$[\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3]=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&1&4\\3&6&a\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-3&-2\\0&0&a-9\end{bmatrix}$$

当 $a\neq 9$ 时，该矩阵的秩为 3 与向量个数相同，所以向量组线性无关;

当 $a=9$ 时，该矩阵的秩为 2 小于向量个数 3，所以向量组线性相关;

综上所述第 1 空格填 9,第 2 空格填不等于 9.

7. * 设 $\alpha_1=[4,\quad a_1,\quad 0,\quad 0]^T$，$\alpha_2=[4,\quad a_2,\quad 4,\quad 0]^T$，

$\alpha_3=[4,\quad a_3,\quad 4,\quad 4]^T$，$\alpha_4=[4,\quad a_4,\quad 0,\quad 4]^T$.

在 a_1,a_2,a_3,a_4 可任意选取时，下列结论正确的是(　)，并说明理由.

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 必线性相关.　　(B) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 必线性无关.

(C) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 必线性无关.　　(D) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 必线性相关.

解 如第 5 题分析，计算矩阵 $[\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3]=\begin{bmatrix}4&4&4\\a_1&a_2&a_3\\0&4&4\\0&0&4\end{bmatrix}$ 的秩，因为该矩阵的第一第三第四行第一第二第三列交叉元素构成的 3 阶子式 $\begin{vmatrix}4&4&4\\0&4&4\\0&0&4\end{vmatrix}=64\neq 0$，所以这个矩阵的秩至少为 3，同时考虑到该矩阵列数为 3，因此该矩阵的秩为 3 等于向量组中向量的个数，因此 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 必线性无关. 因此(B)是正确的，而(A)是错误的.

再计算矩阵，$[\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3\quad\alpha_4]=\begin{bmatrix}4&4&4&4\\a_1&a_2&a_3&a_4\\0&4&4&0\\0&0&4&4\end{bmatrix}$ 的秩，

该矩阵的秩和 a_1,a_2,a_3,a_4 的取值有关，当 $a_1=a_2=a_3=a_4=0$ 时秩为 3，当

$a_1 = a_2 = a_3 = 0, a_4 = 1$ 时秩为 4. 而当秩为 3 时矩阵的秩小于向量个数，此时向量组线性相关；而当秩为 4 时矩阵的秩等于向量的个数，此时向量组线性无关. 因此选项(C), (D)都不正确.

综上所述应选填 B.

8. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是线性无关的向量组，判断下述 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 是线性相关，还是线性无关：

(1) $\beta_1 = \alpha_1 - \alpha_2$, $\beta_2 = \alpha_2 - \alpha_3$, $\beta_3 = \alpha_3 - \alpha_1$;

(2) $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2$, $\beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3$, $\beta_3 = \alpha_3 - \alpha_1$;

(3) $\beta_1 = \alpha_1 - \alpha_2$, $\beta_2 = \alpha_2 - \alpha_3$, $\beta_3 = \alpha_3 - t\alpha_1$.

解 （1）设 k_1, k_2, k_3 满足 $k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + k_3\beta_3 = O$，则有

$$k_1(\alpha_1 - \alpha_2) + k_2(\alpha_2 - \alpha_3) + k_3(\alpha_3 - \alpha_1) = O,$$

即 $$(k_1 - k_3)\alpha_1 + (k_2 - k_1)\alpha_2 + (k_3 - k_2)\alpha_3 = O.$$

因为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，所以必有 $\begin{cases} k_1 - k_3 = 0 \\ k_2 - k_1 = 0 \\ k_3 - k_2 = 0 \end{cases}$，又因为该齐次线性方程组的系数矩阵的行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$，所以方程组有非零解，即存在不全为零的 k_1, k_2, k_3 满足 $k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + k_3\beta_3 = O$，因此 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性相关.

（2）设 k_1, k_2, k_3 满足 $k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + k_3\beta_3 = O$，则有

$$k_1(\alpha_1 + \alpha_2) + k_2(\alpha_2 + \alpha_3) + k_3(\alpha_3 - \alpha_1) = O,$$

即 $$(k_1 - k_3)\alpha_1 + (k_2 + k_1)\alpha_2 + (k_3 + k_2)\alpha_3 = O,$$

因为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，所以必有 $\begin{cases} k_1 - k_3 = 0, \\ k_2 + k_1 = 0, \\ k_3 + k_2 = 0. \end{cases}$ 又因为该齐次线性方程组的系数矩阵的行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$，所以方程组有非零解，即存在不全为零的 k_1, k_2, k_3 满足

$k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=O$，因此 β_1,β_2,β_3 线性相关.

(3) 设 k_1,k_2,k_3 满足 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=O$，则有

$$k_1(\alpha_1-\alpha_2)+k_2(\alpha_2-\alpha_3)+k_3(\alpha_3-t\alpha_1)=O,$$

即 $$(k_1-tk_3)\alpha_1+(k_2-k_1)\alpha_2+(k_3-k_2)\alpha_3=O.$$

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，所以必有 $\begin{cases}k_1-tk_3=0\\k_2-k_1=0\\k_3-k_2=0\end{cases}$，又因为该齐次线性方程组的系数矩阵的行列式 $\begin{vmatrix}1&0&t\\-1&1&0\\0&-1&1\end{vmatrix}=1-t$，所以 $t=1$ 时，方程组只有零解，即不存在不全为零的 k_1,k_2,k_3 满足 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=O$，此时 β_1,β_2,β_3 线性无关. 当 $t=1$ 时，方程组有非零解，故此时 β_1,β_2,β_3 线性相关.

9. 判断向量组 $\alpha_1=[1,\ 1,\ 1,\ 1]^T$，$\alpha_2=[a,\ b,\ c,\ d]^T$，

$$\alpha_3=\left[a^2,\ b^2,\ c^2,\ d^2\right]^T,\alpha_4=\left[a^3,\ b^3,\ c^3,\ d^3\right]^T.$$

线性相关还是线性无关，要求说明理由(其中 a,b,c,d 为互异的数).

解 如第 5 题分析，计算矩阵 $[\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3\ \ \alpha_4]$ 的秩，因为 $\left|[\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3\ \ \alpha_4]\right|=\left|[\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3\ \ \alpha_4]^T\right|$，而 $\left|[\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3\ \ \alpha_4]^T\right|$ 是一个范德蒙德行列式，由于 a,b,c,d 为互异的数，所以 $\left|[\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3\ \ \alpha_4]^T\right|\neq 0$. 因此 $\left|[\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3\ \ \alpha_4]\right|\neq 0$，据此可知 $[\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3\ \ \alpha_4]$ 是满秩的，即秩为 4，与向量个数相同，所以该向量组线性无关.

习题 4.3

1. 求下列向量组的秩与一个极大线性无关组：

(1) $\alpha_1=[2,\ 1,\ 3,\ -1]^T$，$\alpha_2=[3,\ -1,\ 2,\ 0]^T$，

$\alpha_3=[1,\ 3,\ 4,\ -2]^T$，$\alpha_4=[4,\ -3,\ 1,\ 1]^T$.

(2) $\alpha_1=[1,\ 1,\ 1,\ 1]^T$，$\alpha_2=[1,\ 1,\ -1,\ -1]^T$，

$\alpha_3=[1,\ -1,\ -1,\ 1]^T$，$\alpha_4=[-1,\ -1,\ -1,\ 1]^T$.

(3) $\alpha_1=[1,\ -1,\ 2,\ 4]^T$，$\alpha_2=[0,\ 3,\ 1,\ 2]^T$，$\alpha_3=[3,\ 0,\ 7,\ 14]^T$，

$\alpha_4=[1,\ -1,\ 2,\ 0]^T$，$\alpha_5=[2,\ 1,\ 5,\ 6]^T$.

分析 向量组的秩等于该向量组构成的矩阵的秩，所以求向量组的秩可以转化为求矩阵的秩．先把向量构成矩阵通过矩阵的初等行变换成阶梯形，通过阶梯形便可得到矩阵的秩，它也就是该向量组的秩，而阶梯形的阶梯头所在的列对应的向量便构成该向量组的一个极大线性无关组.

解 (1) $$[\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3\ \ \alpha_4]=\begin{bmatrix}2&3&1&4\\1&-1&3&-3\\3&2&4&1\\-1&0&-2&1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&-1&3&-3\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

所以该向量组的秩为 2，且 α_1，α_2 为它的一个极大线性无关组.

(2) $$[\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3\ \ \alpha_4]=\begin{bmatrix}1&1&1&-1\\1&1&-1&-1\\1&-1&-1&-1\\1&-1&1&1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&1&1&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\\0&0&0&-1\end{bmatrix},$$

所以该向量组的秩为 4，且 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为它的一个极大线性无关组.

(3) $$[\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3\ \ \alpha_4\ \ \alpha_5]=\begin{bmatrix}1&0&3&1&2\\-1&3&0&-1&1\\2&1&7&2&5\\4&2&14&0&6\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&3&1&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

所以该向量组的秩为 3，且 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 为它的一个极大线性无关组.

2. 计算下列向量组的秩，并判断该向量组是否线性相关.

(1) $\alpha_1=[1,\ -1,\ 2,\ 3,\ 4]^T$，$\alpha_2=[3,\ -7,\ 8,\ 9,\ 13]^T$，

$\alpha_3=[-1,\ \ -3,\ \ 0,\ \ -3,\ \ -3]^T$， $\alpha_4=[1,\ \ -9,\ \ 6,\ \ 3,\ \ 6]^T$.

(2) $\beta_1=[1,\ \ -3,\ \ 2,\ \ -1]^T$, $\beta_2=[-2,\ \ 1,\ \ 5,\ \ 3]^T$， $\beta_3=[4,\ \ -3,\ \ 7,\ \ 1]^T$,

$\beta_4=[-1,\ \ -11,\ \ 8,\ \ -3]^T$, $\beta_5=[2,\ \ -12,\ \ 30,\ \ 6]^T$.

解 (1) $[\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3\ \ \alpha_4]=\begin{bmatrix}1&3&-1&1\\-1&-7&-3&-9\\2&8&0&6\\3&9&-3&3\\4&13&-3&6\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&3&-1&1\\0&1&1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

所以该向量组的秩为 2， 小于向量的个数 4， 所以线性相关.

(2)

$$[\beta_1\ \ \beta_2\ \ \beta_3\ \ \beta_4\ \ \beta_5]=\begin{bmatrix}1&-2&4&-1&2\\-3&1&-3&-11&-12\\2&5&7&8&30\\-1&3&1&-3&6\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&-2&4&-1&2\\0&1&5&-4&8\\0&0&1&-1&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

所以该向量组的秩为 3， 小于向量的个数 5， 所以线性相关.

3. 设 $\alpha_1=[1,\ \ 2,\ \ -1]^T$， $\alpha_2=[2,\ \ 4,\ \ \lambda]^T$， $\alpha_3=[1,\ \ \lambda,\ \ 1]^T$.

(1) λ 取何值时 α_1, α_2, α_3 线性相关? λ 取何值时 α_1, α_2, α_3 线性无关? 为什么?

(2) λ 取何值时 α_3 能经 α_1, α_2 线性表示? 且写出表达式.

解 (1) $[\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3]=\begin{bmatrix}1&2&1\\2&4&\lambda\\-1&\lambda&1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&2&1\\0&\lambda+2&2\\0&0&\lambda-2\end{bmatrix}$

当 $\lambda\neq 2$ 且 $\lambda\neq -2$ 时， 矩阵的秩为 3 与向量个数相同， 所以此时该向量组线性无关.
当 $\lambda=2$ 或 $\lambda=-2$ 时， 矩阵的秩为 2 小于向量个数， 所以此时向量组线性相关.

(1) 当 $\lambda=2$ 时， 秩($[\alpha_1\ \ \alpha_2]$)=秩($[\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3]$)=2， 此时 α_3 能经 α_1, α_2 线性表示.

表达式的系数为方程组 $[\alpha_1\ \ \alpha_2]X=\alpha_3$ 的解， 而此时该方程组的解为 $\begin{cases}x_1=0,\\ x_2=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

所以表达式为 $\alpha_3=\dfrac{1}{2}\alpha_2$.

当 $\lambda=-2$ 时， 秩($[\alpha_1\ \ \alpha_2]$)=1， 秩($[\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3]$)=2， 两者不相等， 所以不能

线性表示.

当 $\lambda \neq 2$ 且 $\lambda \neq -2$ 时，秩（$\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\end{bmatrix}$）=2，秩（$\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{bmatrix}$）=3，两者不相等，所以不能线性表示.

4. 下述结论不正确的是(　)，且说明理由.

(A) 秩为 4 的 4×5 矩阵的行向量组必线性无关.

(B) 可逆矩阵的行向量组和列向量组均线性无关.

(C) 秩为 $r(r<n)$的 $m \times n$ 矩阵的列向量组必线性相关.

(D) 凡行向量组线性无关的矩阵必为可逆矩阵.

解 (A) 正确. 如果行向量组线性相关则行向量组的秩必小于行向量的个数 4, 即矩阵的行秩小于 4, 而矩阵的行秩等于矩阵的秩, 因此矩阵的秩小于 4, 这与矩阵的秩为 4 矛盾! 所以行向量组必线性无关.

(B) 正确. 可逆矩阵必为满秩矩阵, 即 $n \times n$ 的可逆矩阵的秩为 n, 而矩阵的秩等于行秩和列秩, 所以矩阵的行秩=列秩=n, 因此行向量组的秩和所含向量个数相同, 据此可知该行向量组必线性无关; 同理列向量组也必线性无关.

(C) 正确. 列向量组含有 n 个向量, 又由于列向量组的秩(即列秩)等于矩阵的秩 r, 而 $r<n$, 即列向量组的秩小于向量组所含向量的个数, 据此列向量组必线性相关.

(D) 设 $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$, 易知该矩阵的行向量组线性无关, 但是它不是方阵, 所以不是可逆矩阵. 所以该选项不正确.

综上所述应选 D.

习题 4.4

1. 下述命题正确的是( )，且说明理由.

(A) 凡行向量组线性相关的矩阵，它的列向量组也线性相关.

(B) 秩为 $r(r<n)$ 的 n 阶方阵的任意 r 个行向量均线性无关.

(C) 若 $m\times n$ 矩阵 A 的秩 $r(r<n)$，则非齐次线性方程组 $AX=b$ 必有无穷多个解.

(D) 若 $m\times n$ 矩阵 A 的秩 $r(r<n)$，则齐次线性方程组 $AX=O$ 必有无穷多个解，且基础解系有 $n-r$ 个线性无关解向量组成.

解 (A)设 $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，行向量是线性相关的，但是列向量线性无关，所以(A)不正确.

(B) 设 $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，则秩($A$)=2，但是显然第二第三行两个向量线性相关，所以该项不正确.

(C) 设 $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，$b=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$，$A$ 的秩为 2<3，但是系数矩阵的秩 2 不等于增广矩阵的秩 3，方程无解，所以该项不正确.

(D) 根据定理 2.3.2 直接可以得到该选项是正确的.

2. 将习题 2.3 第 1 题中的齐次线性方程组的通解用基础解系表示，将该题有解的非齐次线性方程组的通解用其导出组的基础解系来表示.

解 (1) 无解.

(2) 方程组有唯一解，$x_1=-8, x_2=3, x_3=6, x_4=0$.

所以通解为 $\eta=[-8,\quad 3,\quad 6,\quad 0]^T$.

(3) 解为 $\begin{cases}x_1=2t_1-t_2,\\ x_2=t_1,\\ x_3=t_2,\\ x_4=1,\end{cases}$ 其中 t_1,t_2 为任意常数.

所以通解为 $\eta=[0,\quad 0,\quad 0,\quad 1]^T+t_1[2,\quad 1,\quad 0,\quad 0]^T+t_2[-1,\quad 0,\quad 1,\quad 0]^T$ (其中 t_1,t_2 为任意常数).

（4）解为 $\begin{cases} x_1 = 3 - 2t_1 - 2t_2, \\ x_2 = -2 + 3t_1 + 3t_2, \\ x_3 = t_1, \\ x_4 = t_2, \end{cases}$ 其中 t_1, t_2 为任意常数.

所以通解为 $\eta = [3, \ -2, \ 0, \ 0]^T + t_1[-2, \ 3, \ 1, \ 0]^T + t_2[-2, \ 3, \ 0, \ 1]^T$（其中 t_1, t_2 为任意常数）.

（5）解为 $\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = t, \\ x_3 = 2t, \\ x_4 = t, \end{cases}$ 其中 t 为任意常数.

所以通解为 $\eta = t[0, \ 1, \ 2, \ 1]^T$（其中 t 为任意常数）.

（6）解为 $\begin{cases} x_1 = t_1 - t_2, \\ x_2 = t_1 - t_3, \\ x_3 = t_1, \\ x_4 = t_1, \\ x_5 = t_2, \\ x_6 = t_3, \end{cases}$ 其中 t_1, t_2, t_3 为任意常数.

所以通解为

$$\eta = t_1[1, \ 1, \ 1, \ 1, \ 0, \ 0]^T + t_2[-1, \ 0, \ 0, \ 0, \ 1, \ 0]^T + t_3[0, \ -1, \ 0, \ 0, \ 0, \ 1]^T$$

（其中 t_1, t_2, t_3 为任意常数）.

3. 已知 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_t$ 均是非齐次线性方程组 $AX = b$ 的解，$k_1, k_2, \cdots, k_t$ 是一组常数，且 $k_1 + k_2 + \cdots + k_t = 1$，求证：$k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_t\xi_t$ 也是 $AX = b$ 的一个解.

证 把 $X = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_t\xi_t$ 代入 $AX = b$ 的左边得

$$A(k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_t\xi_t) = k_1A\xi_1 + k_2A\xi_2 + \cdots + k_tA\xi_t$$

根据题意 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_t$ 均是非齐次线性方程组 $AX = b$ 的解，所以有 $A\xi_i = b \quad (i = 1, 2, \cdots, t)$.

因此

$$A(k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_t\xi_t) = k_1A\xi_1 + k_2A\xi_2 + \cdots + k_tA\xi_t = k_1b + k_2b + \cdots + k_tb = (k_1 + k_2 + \cdots + k_t)b$$

又因为 $k_1+k_2+\cdots+k_t=1$，故 $A(k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_t\xi_t)=b$．这表明 $k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_t\xi_t$ 也是 $AX=b$ 的一个解.

4. 设 ξ_1,ξ_2,ξ_3 是齐次线性方程组 $AX=O$ 的一个基础解系，则该方程的基础解系还有（ ）.

（A）$\xi_1+\xi_2$，$\xi_2+\xi_3$，$\xi_3+\xi_1$．　　（B）$\xi_1+\xi_2$，$\xi_2+\xi_3$，$\xi_3-\xi_1$．

（C）$\xi_1-\xi_2$，$\xi_2-\xi_3$，$\xi_3-\xi_1$．　　（D）$\xi_1+2\xi_2$，$2\xi_2+3\xi_3$，$3\xi_3-\xi_1$．

解　因为 ξ_1,ξ_2,ξ_3 是齐次线性方程组 $AX=O$ 的一个基础解系，所以 ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性无关，并且 $AX=O$ 的基础解系由三个线性无关的解向量组成．因为所有选项都是由三个向量组成的，并且每个向量都是 $AX=O$ 的解的线性组合，从而都是 $AX=O$ 的解，所以只要找出线性无关的一组即为所求的选项．类似习题 4.2 的第 8 题的方法可推知，当 ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性无关时选项（A）中的三个向量线性无关，（B）、（C）、（D）中的三个向量均线性相关，所以应选填 A.

5. * 已知 5 × 4 矩阵 A 的秩为 3，非齐次线性方程组 $AX=b$ 有 3 个解向量 ξ_1,ξ_2,ξ_3，且

$$\xi_1=[1,\ 2,\ 3,\ 4]^T,\ \xi_2+\xi_3=[2,\ 3,\ 4,\ 5]^T,$$

求 $AX=b$ 的通解.

解　因为 A 是 5 × 4 的矩阵，所以 $AX=b$ 的未知数的个数为 4，又因为秩（A）=3，因此 $AX=b$ 的导出组的基础解系含有 4-3=1 个线性无关的解向量组成.

由于 ξ_1,ξ_2,ξ_3 是 $AX=b$ 三个解，所以 $A(\xi_2+\xi_3-2\xi_1)=b+b-2b=O$，这表明 $\xi_2+\xi_3-2\xi_1$ 是导出组 $AX=O$ 的解，并且因为

$$\xi_2+\xi_3-2\xi_1=[2,\ 3,\ 4,\ 5]^T-2[1,\ 2,\ 3,\ 4]^T=[0,\ -1,\ -2,\ -3]^T\neq O,$$

所以 $\xi_2+\xi_3-2\xi_1$ 又是线性无关的，据此知 $\xi_2+\xi_3-2\xi_1$ 可以作为 $AX=O$ 的一个基础解系．由于 $AX=b$ 的通解是由 $AX=b$ 的一个特解加上导出组的基础解系的线性组合构成，所以 $AX=b$ 的通解为 $\eta=\xi_1+t(\xi_2+\xi_3-2\xi_1)=[1,\ 2,\ 3,\ 4]^T+t[0,\ -1,\ -2,\ -3]^T$（其中 t 为任意数）.

6. 设 A 是 n 阶方阵，B 为 n×s 矩阵，且秩(B)=n，证明：

(1) 若 $AB=O$，则 $A=O$；

(2) 若 $AB=B$，则 $A=E$.

证　(1) 因为 $AB=O$，所以秩（A）+秩（B）$\le n$，由于秩（B）=n，所以秩（A）≤ 0，由此秩（A）=0，即得 $A=O$.

(2) 由题意知 $AB=B$，所以 $(A-E)B=O$，利用(1)可知 $A-E=O$，因此 $A=E$.

7. 证明：矩阵$\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$的秩为 1 的充分必要条件为存在$m$个不全为零的数$a_1,a_2,\cdots,a_m$及 n 个不全为零的数$b_1,b_2,\cdots,b_n$使$a_{ij}=a_ib_j$（$i$=1, 2, ⋯, m；j =1, 2, ⋯, n）.

证 先证必要性，根据习题 3.6 的第 6 个习题的(3)可知存在矩阵$R_{m\times 1},S_{1\times n}$，秩（$R$）=秩（$S$）=1，使$A=RS$．令$a_1,a_2,\cdots,a_m$为$R$的$m$个分量，$b_1,b_2,\cdots,b_n$为$S$的$n$个分量，则因为秩（$R$）=秩（$S$）=1 所以$a_1,a_2,\cdots,a_m$和$b_1,b_2,\cdots,b_n$都不全为零. 同时因为$A=RS$即得$a_{ij}=a_ib_j$（$i$=1, 2, ⋯, m；j =1, 2, ⋯, n）成立.

再证充分性，根据题意存在m个不全为零的数$a_1,a_2,\cdots,a_m$及 n 个不全为零的数$b_1,b_2,\cdots,b_n$使$a_{ij}=a_ib_j$（i =1, 2, ⋯，m；j =1, 2, ⋯，n）．只需令$B=[a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_m]^T$，$C=[b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n]$，则$\left[a_{ij}\right]_{m\times n}=BC$．因为秩（$\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$）≤秩（$B$）≤1，又由于$a_1,a_2,\cdots,a_m$和$b_1,b_2,\cdots,b_n$都不全为零，所以$\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$中必有一非零元素，因此秩（$\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$）>0，据此可得秩（$\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$）=1.

8. * 设 A 为 n(n≥2)阶方阵，证明：

(1) 当秩（A）=n 时，秩（A^*）=n;

(2) 当秩（A）<n−1 时，秩（A^*）=0;

(3) 当秩（A）=n−1 时，秩（A^*）=1.

证 (1) 由于秩（A）=n，所以$|A|\neq 0$，而$AA^*=|A|E$，在等式两边同乘$\frac{1}{|A|}$可得$(\frac{1}{|A|}A)A^*=E$，据此可知A^*是可逆的，所以秩（A^*）=n.

(2) 秩（A）<n−1 时，根据矩阵秩的定义可知A的所有$n-1$阶子式都为 0，而A^*的元素就是A的所有$n-1$阶子式，所以A^*的元素都是 0，即$A^*=O$，所以秩（A^*）=0.

(3) 当秩（A）=n−1 时，A不是满秩的，所以$|A|=0$．又因为$AA^*=|A|E$，所以$AA^*=O$，据此可知秩（A）+秩（A^*）≤n，而秩（A）=n−1，所以秩（A^*）≤1．同时由于

秩(A)=n−1，根据矩阵秩的定义可知 A 至少有一个 $n-1$ 阶子式不为零，而 A^* 的元素就是 A 的所有 $n-1$ 阶子式，所以 A^* 中至少有一个元素不为零．由此可知秩(A^*)≥ 1．

综上所述秩(A^*)=1.

习题 4.5

1. 解第二组的 4 道题.

(1) 讨论矩阵 $\overline{A}=\begin{bmatrix}1&1&3&2&1\\1&3&1&6&3\\1&-5&10&-10&b\\3&-1&15&-2a&3\end{bmatrix}$ 的秩.

(2) 讨论方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+3x_3+2x_4=1,\\x_1+3x_2+x_3+6x_4=3,\\x_1-5x_2+10x_3-10x_4=b,\\3x_1-x_2+15x_3-2ax_4=3,\end{cases}$$

a,b 取何值时无解，有解？有解时何时有惟一解，何时有无穷多个解？且写出这些解.

(3) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 如第一组第 (4) 题所设，$\beta=[1,\ \ 3,\ \ b,\ \ 3]^T$. 问 a,b 取何值时，β 不能经 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表示；a,b 取何值时，β 能经 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表示. 进而何时表法惟一？何时表法无穷？且写出这些表示式.

(4) 讨论 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta$ 的秩，并写出一个极大线性无关组.

解 (1) 仅用初等行变换将 $\overline{A}$ 化为阶梯形:

$$\begin{bmatrix}1&1&3&2&1\\1&3&1&6&3\\1&-5&10&-10&b\\3&-1&15&-2a&3\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&1&3&2&1\\0&1&-1&2&1\\0&0&1&0&b+5\\0&0&0&1-a&-b-3\end{bmatrix}\qquad(*)$$

当 $a\neq1$ 时，矩阵的秩为 4；当 $a=1,b\neq-3$ 时，矩阵的秩为 4；当 $a=1,b=-3$ 时秩为 3.

(2) 该线性方程组的增广矩阵恰好是 (1) 中的矩阵 $\overline{A}$，所以由 (1) 的 (*) 可得

当 $a\neq1$ 时，秩 (A) = 秩（$\overline{A}$）=4= 未知数个数，所以此时方程组有唯一解

$$\begin{cases}x_1=-4b-20,\\x_2=b+6+2\dfrac{b+3}{1-a},\\x_3=b+5,\\x_4=\dfrac{-b-3}{1-a}.\end{cases}.$$

当 $a=1,b\neq -3$ 时，秩(A)=3，而秩$(\overline{A})$=4，所以此时方程组无解.

当 $a=1,b=-3$ 时，秩(A)=秩$(\overline{A})$=3<未知数个数，所以此时方程组有无穷多解

$$\begin{cases} x_1=-8, \\ x_2=3-2t, \\ x_3=2, \\ x_4=t, \end{cases} \text{（其中 } t \text{ 是任意常数）.}$$

(3) 由于 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 恰好是(2)的线性方程组系数矩阵的列向量组，所以由(2)的结果可得:

当 $a\neq 1$ 时，秩(A)=秩$(\overline{A})$=4=未知数个数，所以此时 β 能经 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表示，且表示方法唯一 $\beta=(-4b-20)\alpha_1+(b+6+2\dfrac{b+3}{1-a})\alpha_2+(b+5)\alpha_3+(\dfrac{-b-3}{1-a})\alpha_4$.

当 $a=1,b\neq -3$ 时，秩(A)=3，而秩$(\overline{A})$=4，所以此时 β 不能经 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表示.

当 $a=1,b=-3$ 时，秩(A)=秩$(\overline{A})$=3<未知数个数，此时 β 能经 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表示，且表示方法有无穷多种:

$$\beta=-8\alpha_1+(3-2t)\alpha_2+2\alpha_3+t\alpha_4 \text{（其中 } t \text{ 是任意常数）.}$$

(4) 由于 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta$ 构成的矩阵恰好就是(1)中的矩阵 $\overline{A}$，所以由(1)的(*)可得

当 $a\neq 1$ 时，秩为 4，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 就是它的一个极大线性无关组;

当 $a=1,b\neq -3$ 时，秩为 4，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta$ 就是它的一个极大线性无关组;

当 $a=1,b=-3$ 时，秩为 3，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 就是它的一个极大线性无关组.

2. 设 A，B 分别为 $m\times n$，$t\times n$ 矩阵，证明:
(1) 若 $AX=O$ 的解均为 $BX=O$ 的解，则秩$(A)\geqslant$秩(B);
(2) 若 $AX=O$ 与 $BX=O$ 同解，则秩(A)=秩(B);
(3) 若 $AX=O$ 的解均为 $BX=O$ 的解，且秩(A)=秩(B)，则 $AX=O$ 与 $BX=O$ 同解;
(4) 若秩(A)=秩(B)，问是否能导出 $AX=O$ 与 $BX=O$ 同解?

解 (1) 因为 $AX=O$ 的解均为 $BX=O$ 的解，所以 $AX=O$ 的基础解系中的解也都是 $BX=O$ 的解，所以 $BX=O$ 的基础解系中所含的向量的个数不少于 $AX=O$ 的基础解系中所含向量的个数. 而 $BX=O$ 的基础解系中所含的向量的个数为 n-秩(B)，$AX=O$ 的基础解系中所含向量的个数为 n-秩(A)，因此 n-秩$(B)\geq n$-秩(A)，所以秩$(A)\geqslant$秩(B).

(2) 因为 $AX=O$ 与 $BX=O$ 同解，所以 $AX=O$ 的基础解系也就是 $BX=O$ 的基础解系，所以两者的基础解系所含向量个数相同，因此 n-秩(B)= n-秩(A)，即有秩(A)=秩(B).

(3) 因为秩(A)=秩(B)，所以 n-秩(B)= n-秩(A)，据此可知 $AX=O$ 和 $BX=O$ 的基础解系

所含向量的个数相同. 因为 $AX=O$ 的解均为 $BX=O$ 的解, 所以 $AX=O$ 的某一基础解系 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_t$ ($t=n$-秩(A))也是 $BX=O$ 的基础解系, 因此 $AX=O$ 与 $BX=O$ 同解.

(4) 设 $A=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1&2\\0&0\end{bmatrix}$, 显然满足秩($A$)=秩($B$), 但是 $\begin{cases}x_1=1,\\x_2=-1.\end{cases}$ 是 $AX=O$ 的一个解, 但是不是 $BX=O$ 的解. 所以不能导出 $AX=O$ 与 $BX=O$ 同解.

3. [*] 设 A, B, C 均为 n 阶矩阵, 且秩(A)=秩(BA), 证明: 秩(AC)=秩(BAC).

证 设 ξ 是 $AX=O$ 的任意一个解, 则有 $A\xi=O$, 所以 $BA\xi=B(A\xi)=BO=O$, 所以 ξ 也一定是 $BAX=O$ 的解, 据此可得 $AX=O$ 的解都是 $BAX=O$ 的解. 又因为秩(A)=秩(BA), 根据本节第 2 个习题(3)可知 $AX=O$ 和 $BAX=O$ 同解. 和证明 $AX=O$ 的解都是 $BAX=O$ 的解类似的过程可得 $ACX=O$ 的解一定是 $BACX=O$ 的解. 另一方面, 设 η 是 $BACX=O$ 的任意一个解则有 $BAC\eta=O$, 即 $BA(C\eta)=O$, 可知 $C\eta$ 是 $BAX=O$ 的一个解, 已经证明 $AX=O$ 和 $BAX=O$ 同解, 所以 $C\eta$ 也一定是 $AX=O$ 的解, 即有 $AC\eta=O$, 所以 η 也就是 $ACX=O$ 的解, 据此可得 $BACX=O$ 的解也一定是 $ACX=O$ 的解, 所以 $BACX=O$ 和 $ACX=O$ 同解. 根据本节第 2 个习题(2)可得秩(AC)=秩(BAC).

4. [*] 设 A, B, C 分别为 $m\times n$, $n\times s$, $s\times m$ 矩阵, 且秩(CA)=秩(A), 证明: 秩(CAB)=秩(AB).

证 类似于本节习题 3 中方法可证明 $AX=O$ 的解都是 $CAX=O$ 的解, 又因为秩(CA)=秩(A) 根据根据本节第 2 个习题(3)可知 $AX=O$ 和 $CAX=O$ 同解. 同样易证 $ABX=O$ 的解都是 $CABX=O$ 的解. 另一方面, 设 η 是 $CABX=O$ 的任意一个解则有 $CAB\eta=O$, 即 $CA(B\eta)=O$, 可知 $B\eta$ 是 $CAX=O$ 的一个解, 已经证明 $AX=O$ 和 $CAX=O$ 同解, 所以 $B\eta$ 也一定是 $AX=O$ 的解, 即有 $AB\eta=O$, 所以 η 也就是 $ABX=O$ 的解, 据此可得 $CABX=O$ 的解也一定是 $ABX=O$ 的解, 所以 $CABX=O$ 和 $ABX=O$ 同解. 根据本节第 2 个习题(2)可得秩(CAB)=秩(AB).

习题 5.2

1. 下列向量组中，(　)是 P^3 的一组基，为什么?

(A) $[1,\ 1,\ 0]^T$，$[0,\ 1,\ 1]^T$，$[1,\ 0,\ 1]^T$；

(B) $[1,\ -1,\ 0]^T$，$[0,\ 1,\ -1]^T$，$[-1,\ 0,\ 1]^T$；

(C) $[1,\ 1,\ 0]^T$，$[0,\ 1,\ 1]^T$，$[-1,\ 0,\ 1]^T$；

(D) $[1,\ 2,\ 0]^T$，$[0,\ 2,\ 1]^T$，$[-1,\ 0,\ 1]^T$.

分析　P^3 中的基应该是三个线性无关的 3 元向量，所以只要找出线性无关的一组即为所需的选项.

解　(A) $\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3-R_1}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&-1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3+R_2}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&2\end{bmatrix}$，秩为 3，所以该向量组线性无关.

(B) $\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\-1&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3+R_1}\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&-1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3+R_2}\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$，秩为 2，所以该向量组线性相关.

(C) $\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\-1&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3+R_1}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3-R_2}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$，秩为 2，所以该向量组线性相关.

(D) $\begin{bmatrix}1&2&0\\0&2&1\\-1&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3+R_1}\begin{bmatrix}1&2&0\\0&2&1\\0&2&1\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3-R_2}\begin{bmatrix}1&2&0\\0&2&1\\0&0&0\end{bmatrix}$，秩为 2，所以该向量组线性相关.

综上所述应填 A.

2. 当 k 取值为______时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 P^3 的一组基(要说明理由)，其中

$$\alpha_1=[1,\ 1,\ 3]^T,\ \alpha_2=[2,\ 1,\ 6]^T,\ \alpha_3=[3,\ 4,\ k]^T$$

分析　当这三个向量线性无关时，该向量组即为 P^3 的一组基.

解 $\begin{bmatrix}1&1&3\\2&1&6\\3&4&k\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&1&3\\0&-1&0\\0&0&k-9\end{bmatrix}$，当 $k\neq 9$ 时，秩为 3，此时该向量组线性无关，即为 P^3 的一组基，故应填 $k\neq 9$.

3. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 P^3 的一组基，则( )也是 P^3 的一组基，且说明理由

(A) $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，$2\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3$，$\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3$.

(B) $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，$2\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3$.

(C) $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_1$.

(D) $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_3$.

分析 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是一组基，所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，只要找出向量组线性无关的选项即为所需.

解 因为 $[\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\quad \alpha_1+\alpha_2\quad \alpha_1]=[\alpha_1\quad \alpha_2\quad \alpha_3]\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$，而 $\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$ 是可逆矩阵，所以 $[\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\quad \alpha_1+\alpha_2\quad \alpha_1]$ 的秩和 $[\alpha_1\quad \alpha_2\quad \alpha_3]$ 的秩相同，由于 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，所以 $[\alpha_1\quad \alpha_2\quad \alpha_3]$ 的秩为 3. 据此可知 $[\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\quad \alpha_1+\alpha_2\quad \alpha_1]$ 的秩也是 3，由此可得 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_1$ 线性无关. 类似方法可证明选项(A) 、(B)、 (D)的向量组线性相关，综上所述应选填 C.

4. *设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是 P^4 的一组基，若

$\beta_1=\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4$，$\beta_2=\alpha_1+3\alpha_2-2\alpha_3-\alpha_4$，$\beta_3=\alpha_1+4\alpha_2-3\alpha_3+k\alpha_4$

则当 k 取何值时 β_1，β_2，β_3 线性无关；k 取何值时 β_1，β_2，β_3 线性相关，均需说明理由.

解 设 k_1,k_2,k_3 满足 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=O$，

即 $k_1(\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4)+k_2(\alpha_1+3\alpha_2-2\alpha_3-\alpha_4)+k_3(\alpha_1+4\alpha_2-3\alpha_3+k\alpha_4)=O$.

整理得

$(k_1+k_2+k_3)\alpha_1+(2k_1+3k_2+4k_3)\alpha_2+(-k_1-2k_2-3k_3)\alpha_3+(-k_1-k_2+kk_3)\alpha_4=O$.

由于$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，所以必有(Ⅰ)$\begin{cases} k_1+k_2+k_3=0, \\ 2k_1+3k_2+4k_3=0, \\ -k_1-2k_2-3k_3=0, \\ -k_1-k_2+kk_3=0. \end{cases}$

因为 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & k \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & k+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，所以当$k=-1$ 时，秩为 2, 此时(Ⅰ)有非零解，即存在不全为零的k_1,k_2,k_3满足$k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=O$，因此此时$\beta_1$，$\beta_2$，$\beta_3$线性相关；当$k\neq-1$时，秩为 3, 此时(Ⅰ)只有零解，即不存在不全为零的k_1,k_2,k_3满足$k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=O$，因此此时$\beta_1$，$\beta_2$，$\beta_3$线性无关.

5. 证明：向量组

$\alpha_1=[1,\ 2,\ -1,\ -2]^T$，$\alpha_2=[2,\ 3,\ 0,\ 1]^T$，$\alpha_3=[1,\ 3,\ -1,\ 1]^T$，

$\alpha_4=[1,\ 2,\ 1,\ 3]^T$是$P^4$中的一组基，并求向量$\alpha=[7,\ 14,\ -1,\ -2]^T$在该基下坐标.

解 $[\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3\ \ \alpha_4]=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$，

可得秩($[\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3\ \ \alpha_4]$)=4，这四个向量线性无关，所以该向量组是$P^4$中的一组基.

$$[\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3\ \ \alpha_4\ \vdots\ \alpha] \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right],$$

可知方程组$[\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3\ \ \alpha_4]\,X=\alpha$的解为$\begin{cases} x_1=6, \\ x_2=-1, \\ x_3=-1, \\ x_4=4. \end{cases}$

所以向量α在该基下的坐标为$[6,\ -1,\ -1,\ 4]^T$.

6. 在向量空间P^3中，取两组基

(Ⅰ)：$\alpha_1=[1,\ \ 0,\ \ 1]^T$，$\alpha_2=[1,\ \ 1,\ \ 0]^T$，$\alpha_3=[0,\ \ 1,\ \ 1]^T$；

(Ⅱ)：$\alpha_1'=[1,\ \ 0,\ \ 3]^T$，$\alpha_2'=[2,\ \ 2,\ \ 2]^T$，$\alpha_3'=[-1,\ \ 1,\ \ 4]^T$

(1) 求基(Ⅰ)到基(Ⅱ)的过渡矩阵.

(2) 设α在基(Ⅰ)下坐标为$[1,\ \ 1,\ \ 3]^T$，求α在(Ⅱ)下的坐标.

解 (1)记基(Ⅰ)到基(Ⅱ) 的过渡矩阵为M，则$M=[\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3]^{-1}[\alpha_1'\ \ \alpha_2'\ \ \alpha_3']$，利用习题 3.2 第 5 题的方法可求出$M$.

$$[\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3\ \vdots\ \alpha_1'\ \ \alpha_2'\ \ \alpha_3']=\begin{bmatrix}1&1&0&\vdots&1&2&-1\\0&1&1&\vdots&0&2&1\\1&0&1&\vdots&3&2&4\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{bmatrix}1&0&0&\vdots&2&1&1\\0&1&0&\vdots&-1&1&-2\\0&0&1&\vdots&1&1&3\end{bmatrix},$$

所以从基(Ⅰ)到基(Ⅱ)的过渡矩阵为$M=\begin{bmatrix}2&1&1\\-1&1&-2\\1&1&3\end{bmatrix}$.

(2) $X'=M^{-1}X=\begin{bmatrix}2&1&1\\-1&1&-2\\1&1&3\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{2}{3}\\\frac{5}{3}\\\frac{2}{3}\end{bmatrix}$，所以坐标为$\left[-\frac{2}{3},\ \ \frac{5}{3},\ \ \frac{2}{3}\right]^T$.

7. 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$为向量空间$P^n$的一组基，求这个基到基$\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\alpha_1$的过渡矩阵.

解 因为$\alpha_2=0\alpha_1+1\alpha_2+0\alpha_3+\cdots+0\alpha_n$；$\alpha_3=0\alpha_1+0\alpha_2+1\alpha_3+\cdots+0\alpha_n$；…… ；

$\alpha_n=0\alpha_1+0\alpha_2+0\alpha_3+\cdots+1\alpha_n$；　$\alpha_1=1\alpha_1+0\alpha_2+0\alpha_3+\cdots+0\alpha_n$.

所以从基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$到基$\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\alpha_1$的过渡矩阵为$\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0&1\\1&0&\cdots&0&0\\0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&0\end{bmatrix}$.

8. *在向量空间 P^4 中，取

$\alpha_1=[2,\ 1,\ -1,\ 1]^T$，$\alpha_2=[0,\ 3,\ 1,\ 0]^T$，$\alpha_3=[5,\ 3,\ 2,\ 1]^T$，

$\alpha_4=[6,\ 6,\ 1,\ 3]^T$.

证明：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 可作为 P^4 的一组基，且在 P^4 中求一个非零向量 α，使它在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 下的坐标与在常用基下的坐标相同.

解 $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，所以秩（$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$)=4, 故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 可作为 P^4 的一组基，且从常用基到基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的过渡矩阵为 $[\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3\ \ \alpha_4]$.

设所求向量 $\alpha=[a,\ b,\ c,\ d]^T$，则它在常用基下的坐标为 $[a,\ b,\ c,\ d]^T$，α 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 下坐标为 $[\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3\ \ \alpha_4]^{-1}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$，从而 α 应满足

$$[\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3\ \ \alpha_4]^{-1}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}，\text{即}[\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3\ \ \alpha_4]\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix},$$

移项得 $([\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3\ \ \alpha_4]-E)\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}=O$. 求解方程组 $(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}-E)X=O$ 得解为：$X=[k,\ k,\ k,\ -k]^T$，所以所求的向量 $\alpha=[k,\ k,\ k,\ -k]^T$（$k$ 可取任意非零常数）.

习题 5.3

1. 下述 R^3 的非空子集为 R^3 的子空间的是（ ），并说明理由.

（A）$W_1=\{[x,\ y,\ 1]^T|x,y\in R\}$. （B）$W_2=\{[x,\ y,\ 0]^T|x,y\in R\}$.

（C）$W_3=\{[x,\ y,\ x^2]^T|x,y\in R\}$. （D）$W_3=\{[x,\ 1,\ 0]^T|x\in R\}$.

解 （A）取 W_1 中的两个元素 $[1,\ 1,\ 1]^T,[0,\ 1,\ 1]^T$，则两者之和为 $[1,\ 2,\ 2]^T\notin W_1$，所以 W_1 不是子空间.

（C）取 W_3 中的两个元素 $[1,\ 1,\ 1]^T,[1,\ 2,\ 1]^T$，则两者之和为 $[2,\ 3,\ 2]^T$，不满足第三个分量是第一个分量的平方，所以 $[2,\ 3,\ 2]^T\notin W_3$，因此 W_3 不是子空间.

（D）取 W_4 中的两个元素 $[1,\ 1,\ 0]^T,[0,\ 1,\ 0]^T$，则两者之和为 $[1,\ 2,\ 0]^T\notin W_4$，所以 W_4 不是子空间.

（B）可以容易验证 W_2 关于数乘和加发是封闭的，所以它是 R^3 的子空间.

综上所述应选填 B.

2. 设 A 是数域 P 上 $m\times n$ 矩阵，问非齐次线性方程组 $AX=b$ 的解向量的全体是否是 P^n 的子空间？为什么？

解 设 ξ_1,ξ_2 是 $AX=b$ 的两个解向量，但是由于 $A(\xi_1+\xi_2)=A\xi_1+A\xi_2=b+b=2b$，故 $\xi_1+\xi_2$ 不是 $AX=b$ 的解向量，即 $AX=b$ 的解向量的全体关于加法不是封闭的，所以不是 P^n 的子空间.

3. 求下列齐次线性方程组的解空间的维数和一组基：

（1）$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+4x_4=0,\\ 3x_1+x_2+6x_3+2x_4=0,\\ -x_1+x_2-2x_3+x_4=0.\end{cases}$$

（2）$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4-x_5=0,\\ 2x_1+x_2-x_3-x_4+x_5=0,\\ x_1+7x_2-5x_3-5x_4+5x_5=0,\\ 3x_1-x_2-2x_3+x_4-x_5=0.\end{cases}$$

(3) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

分析 齐次线性方程组的一个基础解系即为解空间的一组基，而基础解系所含线性无关向量个数 $n -$ 秩(A)即为解空间的维数.

解 (1) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 6 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，因此方程组的解为 $\begin{cases} x_1 = -2t, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = t, \\ x_4 = 0. \end{cases}$

(t 任意取值)改写成向量形式为 $X = t\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (t 任意取值). 所以该解空间的一组基为 $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$，维数为 1.

(2) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & -5 & -5 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$，因此方程组的

解为 $\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = 0, \\ x_4 = t, \\ x_5 = t, \end{cases}$ (t 任意取值)，向量形式为 $X = t\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (t 任意取值). 所以该解空间的一组基为 $\begin{bmatrix} 0, & 0, & 0, & 1, & 1 \end{bmatrix}^T$，维数为 1.

(3) **解** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，因此方程组的解为

$$\begin{cases} x_1 = t_1 + t_2, \\ x_2 = -2t_1 - 2t_2, \\ x_3 = t_1, \\ x_4 = t_2, \end{cases}$$ （t_1, t_2 任意取值），向量形式为 $X = t_1\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ （t_1, t_2 任意取值）.

所以该解空间的一组基为 $[1,\ -2,\ 1,\ 0]^T, [1,\ -2,\ 0,\ 1]^T$，维数为 2.

4[*]. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，若任意一个 n 元向量 α 都是齐次线性方程组 $AX=0$ 的解，则 $A=O_{m\times n}$.

证 因为任意一个 n 元向量 α 都是齐次线性方程组 $AX=0$ 的解，所以 $AX=0$ 的解空间就是 P^n.

因此解空间的维数为 n，从而有 $n-$ 秩$(A)=n$，即得秩$(A)=0$，所以 $A=O_{m\times n}$.

习题 5.4

1. 在欧氏空间 R^4 中，设 $\alpha=[1,\ 2,\ 3,\ 4]^T$，$\beta=[-1,\ 1,\ -2,\ -6]^T$．求

（α,β）；（$3\alpha+2\beta,3\alpha-2\beta$）；$\|\alpha\|$；$\|\alpha+\beta\|$ 及 $\|\alpha-\beta\|$．

解 （α,β）$=1\times(-1)+2\times1+3\times(-2)+4\times(-6)=-29$；

（$3\alpha+2\beta,3\alpha-2\beta$）$=9(\alpha,\alpha)-4(\beta,\beta)=270-168=102$；

$\|\alpha\|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}=\sqrt{30}$；

$\|\alpha+\beta\|=\sqrt{(\alpha+\beta,\alpha+\beta)}=\sqrt{14}$；

$\|\alpha-\beta\|=\sqrt{(\alpha-\beta,\alpha-\beta)}=\sqrt{130}$．

2. 在欧氏空间 R^4 中，取 $\alpha=[1,\ -2,\ 1,\ -1]^T$，$\beta=[-1,\ 3,\ k,\ 2]^T$，则 $k=$____时 α,β 正交，为什么?

分析 $\alpha\perp\beta\Leftrightarrow(\alpha,\beta)$．

解 （α,β）$=1\times(-1)+(-2)\times3+1\times k+(-1)\times2=k-9=0\Leftrightarrow k=9$．因此当 $k=9$ 时 α,β 正交.

3. 在欧氏空间 R^n 中，若 β 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 均正交，则 β 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的任一线性组合 $\sum_{i=1}^{m}k_i\alpha_i$ 都正交.

证 因 β 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 均正交，所以 $(\beta,\alpha_i)=0,\quad i=1,2,\cdots,m.$

因此 $(\beta,\sum_{i=1}^{m}k_i\alpha_i)=\sum_{i=1}^{m}k_i(\beta,\alpha_i)=0$，所以 β 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的线性组合 $\sum_{i=1}^{m}k_i\alpha_i$ 都正交.

4. 在欧氏空间 R^4 中，求一单位向量 α，使其与

$\alpha_1=[1,\ 1,\ -1,\ 1]^T$，$\alpha_2=[1,\ -1,\ -1,\ 1]^T$，$\alpha_3=[2,\ 1,\ 1,\ 3]^T$

都正交.

解 设 $\alpha=[x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4]^T$，根据题意 α 为单位向量可知 $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=1$．(1)

同时 α 与 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 都正交，据此可得 $\begin{cases}(\alpha,\alpha_1)=x_1+x_2-x_3+x_4=0,\\(\alpha,\alpha_2)=x_1-x_2-x_3+x_4=0,\\(\alpha,\alpha_3)=2x_1+x_2+x_3+3x_4=0.\end{cases}$ 从而可解得

$\begin{cases}x_1=-\dfrac{4}{3}t,\\x_2=0,\\x_3=-\dfrac{1}{3}t,\\x_4=t.\end{cases}$（其中 t 为任意取值）．又因为条件(1)可知 $t=\pm\dfrac{3}{\sqrt{26}}$，

所以 $\alpha=[x_1,\quad x_2,\quad x_3,\quad x_4]^T=\pm\dfrac{1}{\sqrt{26}}[4,\quad 0,\quad 1,\quad -3]^T$．

5. 已知欧氏空间 R^4 中向量

$\alpha_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}[1,\quad 1,\quad 0,\quad 0]^T$，$\alpha_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}[0,\quad 0,\quad 1,\quad 1]^T$，$\alpha_3=\dfrac{1}{\sqrt{2}}[-1,\quad 1,\quad -1,\quad 1]^T$，

$\alpha_4=\dfrac{1}{\sqrt{2}}[1,\quad -1,\quad -1,\quad 1]^T$，$\beta=[1,\quad 1,\quad 1,\quad 1]^T$

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是否是 R^4 的一组标准正交基；

(2) 若 $\alpha=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+4\alpha_4$，求：$\|\alpha\|$，$(\alpha,\beta)$．

解 (1) $\begin{bmatrix}(\alpha_1,\alpha_1)&(\alpha_1,\alpha_2)&(\alpha_1,\alpha_3)&(\alpha_1,\alpha_4)\\(\alpha_2,\alpha_1)&(\alpha_2,\alpha_2)&(\alpha_2,\alpha_3)&(\alpha_2,\alpha_4)\\(\alpha_3,\alpha_1)&(\alpha_3,\alpha_2)&(\alpha_3,\alpha_3)&(\alpha_3,\alpha_4)\\(\alpha_4,\alpha_1)&(\alpha_4,\alpha_2)&(\alpha_4,\alpha_3)&(\alpha_4,\alpha_4)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$，所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是 R^4 的一组标准正交基.

(2) $\|\alpha\|=\sqrt{(\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+4\alpha_4,\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+4\alpha_4)}=\sqrt{30}$；

α 在 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 下的坐标为 $[1,\quad 2,\quad 3,\quad 4]^T$，而 β 在 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 下的坐标为

$[(\beta,\alpha_1),\quad(\beta,\alpha_2),\quad(\beta,\alpha_3),\quad(\beta,\alpha_4)]^T=\left[\sqrt{2},\quad\sqrt{2},\quad 0,\quad 0\right]^T$，所以

$(\alpha,\beta)=([1,\quad 2,\quad 3,\quad 4]^T,\left[\sqrt{2},\quad\sqrt{2},\quad 0,\quad 0\right]^T)=3\sqrt{2}$．

6. 已知 $\alpha_1=[1,\quad 2,\quad 1]^T$，$\alpha_2=[2,\quad 3,\quad 3]^T$，$\alpha_3=[3,\quad 7,\quad 1]^T$ 是欧氏空间 R^3 的一组基，将它改造成为 R^3 的一组标准正交基.

解 先进行正交化得到 $\beta_1=\alpha_1=[1,\quad 2,\quad 1]^T$；

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=[2,\quad 3,\quad 3]^T-\frac{11}{6}[1,\quad 2,\quad 1]^T=\left[\frac{1}{6},\quad -\frac{2}{3},\quad \frac{7}{6}\right]^T;$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2=\left[\frac{3}{11},\quad -\frac{1}{11},\quad -\frac{1}{11}\right]^T.$$

再进行单位化得到 $\gamma_1=\dfrac{\beta_1}{\|\beta_1\|}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}[1,\quad 2,\quad 1]^T$；

$$\gamma_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}=\frac{1}{\sqrt{66}}[1,\quad -4,\quad 7]^T;$$

$$\gamma_3=\frac{\beta_3}{\|\beta_3\|}==\frac{1}{\sqrt{11}}[3,\quad -1,\quad -1]^T.$$

$\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 即为所求的标准正交基.

7. 已知 $\alpha_1=[1,\quad 1,\quad 0,\quad 0]^T$，$\alpha_2=[1,\quad 0,\quad 1,\quad 0]^T$，$\alpha_3=[-1,\quad 0,\quad 0,\quad 1]^T$ 是线性无关向量组，求与此向量组等价的两两正交的单位向量组.

解 先进行正交化得到 $\beta_1=\alpha_1=[1,\quad 1,\quad 0,\quad 0]^T$；

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\left[\frac{1}{2},\quad -\frac{1}{2},\quad 1,\quad 0\right]^T;$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2=\left[-\frac{1}{3},\quad \frac{1}{3},\quad \frac{1}{3},\quad 1\right]^T.$$

在进行单位化得到 $\gamma_1=\dfrac{\beta_1}{\|\beta_1\|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}[1,\quad 1,\quad 0,\quad 0]^T$；

$$\gamma_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}[1,\quad -1,\quad 2,\quad 0]^T;$$

$$\gamma_3=\frac{\beta_3}{\|\beta_3\|}==\frac{1}{2\sqrt{3}}[-1,\quad 1,\quad 1,\quad 3]^T.$$

$\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 就是所求的两两正交的单位向量组.

习题 5.5

1. 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$与向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$等价，令

$$W=\{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_t\alpha_t \mid k_1,k_2,\cdots,k_t\in P\},$$

$$V=\{l_1\beta_1+l_2\beta_2+\cdots+l_s\beta_s \mid l_1,l_2,\cdots,l_s\in P\},$$

其中P为数域，证明：$W=V$

证 因为向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$与向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$等价，所以存在矩阵$A_{s\times t},B_{t\times s}$使得

$$[\alpha_1\quad \alpha_2\quad \cdots\quad \alpha_t]=[\beta_1\quad \beta_2\quad \cdots\quad \beta_s]A \quad (1)\ ;$$

$$[\beta_1\quad \beta_2\quad \cdots\quad \beta_s]=[\alpha_1\quad \alpha_2\quad \cdots\quad \alpha_t]B \quad (2)\ .$$

任取W中元素$\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_t\alpha_t$，则即有$\alpha=[\alpha_1\quad \alpha_2\quad \cdots\quad \alpha_t]\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_t\end{bmatrix}$，由(1)式

得$\alpha=[\alpha_1\quad \alpha_2\quad \cdots\quad \alpha_t]\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_t\end{bmatrix}=[\beta_1\quad \beta_2\quad \cdots\quad \beta_s](A\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_t\end{bmatrix})$，从而可知$\alpha$也可以表示成

$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$的线性组合的形式，所以$\alpha\in V$，因此可得$W\subseteq V$.

类似的任取W中元素$\beta=l_1\beta_1+l_2\beta_2+\cdots+l_s\beta_s$，则即有$\beta=[\beta_1\quad \beta_2\quad \cdots\quad \beta_s]\begin{bmatrix}l_1\\l_2\\\vdots\\l_s\end{bmatrix}$，

由(2)式得$\beta=[\beta_1\quad \beta_2\quad \cdots\quad \beta_s]\begin{bmatrix}l_1\\l_2\\\vdots\\l_s\end{bmatrix}=[\alpha_1\quad \alpha_2\quad \cdots\quad \alpha_t](B\begin{bmatrix}l_1\\l_2\\\vdots\\l_s\end{bmatrix})$，从而可知$\beta$也可以

表示成$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$的线性组合的形式，所以$\beta\in W$，因此可得$V\subseteq W$.

综上可知$V=W$.

2. 设：（Ⅰ）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$与（Ⅱ）：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$是向量空间$P^n$的两组基

(1) 证明在基（Ⅰ），基（Ⅱ）下坐标完全相同向量的全体组成的集合W是P^n的一个子空间

(2)* 设基(Ⅰ)到基(Ⅱ)的过渡矩阵为M，若秩$(E-M)=r$，则$\dim(W)=n-r$.

证 (1) 设α,β是W中任意两个向量，且

$$\alpha=[\alpha_1\quad\alpha_2\quad\cdots\quad\alpha_n]\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{bmatrix}=[\beta_1\quad\beta_2\quad\cdots\quad\beta_n]\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{bmatrix};$$

$$\beta=[\alpha_1\quad\alpha_2\quad\cdots\quad\alpha_n]\begin{bmatrix}l_1\\l_2\\\vdots\\l_n\end{bmatrix}=[\beta_1\quad\beta_2\quad\cdots\quad\beta_n]\begin{bmatrix}l_1\\l_2\\\vdots\\l_n\end{bmatrix}.$$

则

$$\alpha+\beta=[\alpha_1\quad\alpha_2\quad\cdots\quad\alpha_n]\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{bmatrix}+[\alpha_1\quad\alpha_2\quad\cdots\quad\alpha_n]\begin{bmatrix}l_1\\l_2\\\vdots\\l_n\end{bmatrix}=[\alpha_1\quad\alpha_2\quad\cdots\quad\alpha_n]\begin{bmatrix}k_1+l_1\\k_2+l_2\\\vdots\\k_n+l_n\end{bmatrix}$$

$$=[\beta_1\quad\beta_2\quad\cdots\quad\beta_n]\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{bmatrix}+[\beta_1\quad\beta_2\quad\cdots\quad\beta_n]\begin{bmatrix}l_1\\l_2\\\vdots\\l_n\end{bmatrix}=[\beta_1\quad\beta_2\quad\cdots\quad\beta_n]\begin{bmatrix}k_1+l_1\\k_2+l_2\\\vdots\\k_n+l_n\end{bmatrix}$$

所以$\alpha+\beta\in W$.

$$k\alpha=k[\alpha_1\quad\alpha_2\quad\cdots\quad\alpha_n]\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{bmatrix}=[\alpha_1\quad\alpha_2\quad\cdots\quad\alpha_n]\begin{bmatrix}kk_1\\kk_2\\\vdots\\kk_n\end{bmatrix}$$

$$=k[\beta_1\quad\beta_2\quad\cdots\quad\beta_n]\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{bmatrix}=[\beta_1\quad\beta_2\quad\cdots\quad\beta_n]\begin{bmatrix}kk_1\\kk_2\\\vdots\\kk_n\end{bmatrix}$$

所以$k\alpha\in W$.

(2) 由题意可知

$$W=\left\{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n \left| [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_n]\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{bmatrix}=[\beta_1 \quad \beta_2 \quad \cdots \quad \beta_n]\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{bmatrix}\right.\right\}$$

设基（Ⅰ）到基（Ⅱ）的过渡矩阵为 M，则有

$$[\beta_1 \quad \beta_2 \quad \cdots \quad \beta_n]=[\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_n]M.$$

所以 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 满足 $[\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_n]\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{bmatrix}=[\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_n]M\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{bmatrix}$,

即要求 $[\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_n](E-M)\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{bmatrix}=O$，又因为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是一组基，所以 $[\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_n]$ 是一个可逆矩阵，因此 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 即为满足 $(E-M)\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{bmatrix}=O$ 的数组，

由此可知 W 中向量在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的坐标全体就是方程组 $(E-M)X=O$ 的解向量的全体．因为秩 $(E-M)=r$，所以坐标向量组的极大线性无关组含有的向量个数为 $n-r$，从而可得 $\dim(W)=n-r$.

3. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 n 维欧氏空间 R^n 的一组基，证明：若 R^n 中向量 β_1,β_2 满足

$$(\beta_1,\alpha_i)=(\beta_2,\alpha_i),\ i=1,2,\cdots,n,$$

则 $\beta_1=\beta_2$.

证　根据题意 $(\beta_1,\alpha_i)=(\beta_2,\alpha_i),\ i=1,2,\cdots,n,$ 即有 $(\beta_1-\beta_2,\alpha_i)=0,\ i=1,2,\cdots,n,$ 利用课本例题例 5.5.1 可知 $\beta_1-\beta_2=O$，所以有 $\beta_1=\beta_2$.

习题 6.1

1. 设 A,B 均为 n 阶方阵，则下述命题正确的是(　)，且说明理由.

(A) 若 A 与 B 等价，则 A 与 B 必相似.　(B) 若 A 与 B 相似，则 A 与 B 必等价.

解　(A) 设 $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&0\\0&4\end{bmatrix}$，因为秩($A$)=秩($B$)所以 A 与 B 等价；但是由于 $|A|\neq|B|$，所以 A 与 B 不相似. 因此(A)不正确.

(B) A 与 B 相似，即存在可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP=B$，所以秩(A)=秩(B)，因此 A 与 B 等价. (B)是正确的.

因此该题应选(B).

2. 已知 ξ_1,ξ_2 是线性方程组 $AX=O$ 的一个基础解系，求 A 的一个特征值和特征向量.

解　ξ_1,ξ_2 是线性方程组 $AX=O$ 的一个基础解系，所以有 $A\xi_i=O=0\xi_i\ (i=1,2)$，因此可知 ξ_1,ξ_2 是 A 的特征值为 0 的特征向量.

3. 设 A,B 均为 n 阶方阵，试证：若 A 可逆，则 AB 与 BA 相似.

证　因为 A 可逆，令 $P=A$，则有 $P^{-1}(AB)P=A^{-1}ABA=BA$，所以 AB 与 BA 相似.

4. 设 A 与 B 相似，C 与 D 相似，试证：

$$\begin{bmatrix}A&O\\O&C\end{bmatrix}\text{与}\begin{bmatrix}B&O\\O&D\end{bmatrix}\text{相似.}$$

证　因为 A 与 B 相似，所以存在可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP=B$. 又因为 C 与 D 相似，所以同样存在可逆矩阵 Q 使得 $Q^{-1}CQ=D$. 下面令 $G=\begin{bmatrix}P&O\\O&Q\end{bmatrix}$，因为 P,Q 可逆，所以 G 也是可逆的并且有 $G^{-1}=\begin{bmatrix}P^{-1}&O\\O&Q^{-1}\end{bmatrix}$. 则有

$$G^{-1}\begin{bmatrix}A&O\\O&C\end{bmatrix}G=\begin{bmatrix}P^{-1}&O\\O&Q^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A&O\\O&C\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P&O\\O&Q\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}P^{-1}AP&O\\O&Q^{-1}CQ\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}B&O\\O&D\end{bmatrix}$$

由此可得 $\begin{bmatrix}A&O\\O&C\end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix}B&O\\O&D\end{bmatrix}$ 相似.

5. 设 $A=\xi\eta^T$，其中 $\xi=[x_1,\quad x_2,\quad \cdots,\quad x_n]^T\neq O$，$\eta=[y_1,\quad y_2,\quad \cdots,\quad y_n]^T\neq O$.
求证：ξ 是 A 的特征向量，并指出其对应的特征值.

证　因为 $A=\xi\eta^T$，所以 $A\xi=\xi\eta^T\xi=\xi(\eta^T\xi)$，而 $\eta^T\xi=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$，所以 $A\xi=\xi(\eta^T\xi)=(\eta^T\xi)\xi=(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n)\xi$，根据特征向量的定义可得 ξ 是 A 的特征向量并且对应的特征值为 $\eta^T\xi=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$.

6* 设 λ_0 是 n 阶方阵 A 的一个特征值．记 A 的属于 λ_0 的特征向量的全体及零向量为

$$W_{\lambda_0}=\left\{\xi\in P^n \,\middle|\, A\xi=\lambda_0\xi\right\}.$$

证明：

(1) 若 $\xi_1,\xi_2\in W_{\lambda_0}$，则 $\xi_1+\xi_2\in W_{\lambda_0}$；

(2) 若 $\xi_1\in W_{\lambda_0}$，则对任意的 $k\in P$ 有 $k\xi_1\in W_{\lambda_0}$；

(3) 由(1)，(2)导出 W_{λ_0} 为 P^n 的一个子空间，称为属于 λ_0 的特征子空间．特征子空间 W_{λ_0} 中任意非零向量都是 A 的属于 λ_0 的特征向量.

证　(1) $\xi_1,\xi_2\in W_{\lambda_0}$，所以有 $A\xi_1=\lambda_0\xi_1$，$A\xi_2=\lambda_0\xi_2$，

而 $A(\xi_1+\xi_2)=A\xi_1+A\xi_2=\lambda_0\xi_1+\lambda_0\xi_2=\lambda_0(\xi_1+\xi_2)$，所以 $\xi_1+\xi_2\in W_{\lambda_0}$.

(2) $\xi_1\in W_{\lambda_0}$，所以 $A\xi_1=\lambda_0\xi_1$，而 $A(k\xi_1)=kA\xi_1=k\lambda_0\xi_1=\lambda_0(k\xi_1)$，因此 $k\xi_1\in W_{\lambda_0}$.

(3) 由(1)，(2)可知非空集合 $W_{\lambda_0}=\left\{\xi\in P^n \,\middle|\, A\xi=\lambda_0\xi\right\}$ 中元素符合加法和数乘的封闭性，所以构成一个子空间.

习题 6.2

1. 若方阵 A 有一个特征值为-1，则 $|A+E|=$__________，且说明理由.

解 方阵 A 的特征值 λ 满足 $|\lambda E-A|=0$，所以有 $|-E-A|=0$．从而 $|E+A|=(-1)^n|-E-A|=0$.

2. 命题:“若 $\frac{1}{2}$ 不是方阵 A 的特征值，则 $E-2A$ 为可逆矩阵”对不对?为什么?

解 对，因为 $\frac{1}{2}$ 不是方阵 A 的特征值，所以 $\left|\frac{1}{2}E-A\right|\neq 0$，从而 $|E-2A|=2^n\left|\frac{1}{2}E-A\right|\neq 0$. 故 $E-2A$ 为可逆矩阵.

3. 求出下列矩阵的全部特征值和特征向量

(1) $\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&5&-2\\-2&4&-1\end{bmatrix}$; (2) $\begin{bmatrix}4&-5&2\\5&-7&3\\6&-9&4\end{bmatrix}$; (3) $\begin{bmatrix}1&-3&4\\4&-7&8\\6&-7&7\end{bmatrix}$;

(4) $\begin{bmatrix}-1&3&-1\\-3&5&-1\\-3&3&1\end{bmatrix}$; (5) $\begin{bmatrix}5&3&1&1\\-3&-1&1&-1\\0&0&1&0\\0&0&2&2\end{bmatrix}$; (6) $\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$.

解 (1) $\left|\lambda E-\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&5&-2\\-2&4&-1\end{bmatrix}\right|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&0\\2&\lambda-5&2\\2&-4&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-3)$，所以特征值为 1,1,3.

求解方程组 $(E-\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&5&-2\\-2&4&-1\end{bmatrix})X=O$，得属于特征值 1 的特征向量为

$\xi_1=k_1[2,\ \ 1,\ \ 0]^T+k_2[-1,\ \ 0,\ \ 1]^T$ (其中 k_1,k_2 为不同时为零的任意数).

求解方程组 $(3E-\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&5&-2\\-2&4&-1\end{bmatrix})X=O$，得属于特征值 3 的特征向量为

$\xi_2=k_3[0,\ \ 1,\ \ 1]^T$ (其中 k_3 为不为零的任意数).

(2) $\left|\lambda E-\begin{bmatrix}4 & -5 & 2\\ 5 & -7 & 3\\ 6 & -9 & 4\end{bmatrix}\right|=\begin{vmatrix}\lambda-4 & 5 & -2\\ -5 & \lambda+7 & -3\\ -6 & 9 & \lambda-4\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-1)$，所以特征值为 0,0,1.

求解方程组 $(E-\begin{bmatrix}4 & -5 & 2\\ 5 & -7 & 3\\ 6 & -9 & 4\end{bmatrix})X=O$，得属于特征值 1 的特征向量为

$\xi_1=k_1[1, \quad 1, \quad 1]^T$ (其中 k_1 为不为零的任意数).

求解方程组 $(0E-\begin{bmatrix}4 & -5 & 2\\ 5 & -7 & 3\\ 6 & -9 & 4\end{bmatrix})X=O$，得属于特征值 0 的特征向量为

$\xi_2=k_2[1, \quad 2, \quad 3]^T$ (其中 k_2 为不同时为零的任意数).

(3) $\left|\lambda E-\begin{bmatrix}1 & -3 & 4\\ 4 & -7 & 8\\ 6 & -7 & 7\end{bmatrix}\right|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 3 & -4\\ -4 & \lambda+7 & -8\\ -6 & 7 & \lambda-7\end{vmatrix}=\lambda^3-\lambda^2-5\lambda-3=(\lambda+1)^2(\lambda-3)$，

所以特征值为-1,-1,3.

求解方程组 $(3E-\begin{bmatrix}1 & -3 & 4\\ 4 & -7 & 8\\ 6 & -7 & 7\end{bmatrix})X=O$，得属于特征值 3 的特征向量为

$\xi_1=k_1[1, \quad 2, \quad 1]^T$ (其中 k_1 为不为零的任意数).

求解方程组 $(-E-\begin{bmatrix}1 & -3 & 4\\ 4 & -7 & 8\\ 6 & -7 & 7\end{bmatrix})X=O$，得属于特征值-1 的特征向量为

$\xi_2=k_2[1, \quad 2, \quad 2]^T$ (其中 k_2 为不为零的任意数).

(4) $\left|\lambda E-\begin{bmatrix}-1 & 3 & -1\\ -3 & 5 & -1\\ -3 & 3 & 1\end{bmatrix}\right|=\begin{vmatrix}\lambda+1 & -3 & 1\\ 3 & \lambda-5 & 1\\ 3 & -3 & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda^3-5\lambda^2+8\lambda-4=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$，

所以特征值为 1,2,2.

求解方程组 $(1E-\begin{bmatrix}-1&3&-1\\-3&5&-1\\-3&3&1\end{bmatrix})X=O$，得属于特征值 1 的特征向量为

$\xi_1=k_1[1,\quad 1,\quad 1]^T$ (其中 k_1 为不为零的任意数).

求解方程组 $(2E-\begin{bmatrix}-1&3&-1\\-3&5&-1\\-3&3&1\end{bmatrix})X=O$，得属于特征值 2 的特征向量为

$\xi_2=k_2[1,\quad 1,\quad 0]^T+k_3[1,\quad 0,\quad -3]^T$ (其中 k_2,k_3 为不为零的任意数).

(5) $$\left|\lambda E-\begin{bmatrix}5&3&1&1\\-3&-1&1&-1\\0&0&1&0\\0&0&2&2\end{bmatrix}\right|=\begin{vmatrix}\lambda-5&-3&-1&-1\\3&\lambda+1&-1&1\\0&0&\lambda-1&0\\0&0&-2&\lambda-2\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^4-7\lambda^3+18\lambda^2-20\lambda+8=(\lambda-1)(\lambda-2)^3,$$

所以特征值为 1,2,2,2.

求解方程组 $(1E-\begin{bmatrix}5&3&1&1\\-3&-1&1&-1\\0&0&1&0\\0&0&2&2\end{bmatrix})X=O$，得属于特征值 1 的特征向量为

$\xi_1=k_1[7,\quad -9,\quad 1,\quad -2]^T$ (其中 k_1 为不为零的任意数).

求解方程组 $(2E-\begin{bmatrix}5&3&1&1\\-3&-1&1&-1\\0&0&1&0\\0&0&2&2\end{bmatrix})X=O$，得属于特征值 2 的特征向量为

$\xi_2=k_2[-1,\quad 0,\quad 0,\quad 3]^T+k_3[-1,\quad 1,\quad 0,\quad 0]^T$ (其中 k_2,k_3 为不为零的任意数).

(6) $$\left|\lambda E-\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}\right|=\begin{vmatrix}\lambda&0&0&-1\\0&\lambda&-1&0\\0&-1&\lambda&0\\-1&0&0&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^4-2\lambda^2+1=(\lambda+1)^2(\lambda-1)^2,$$

所以特征值为-1,-1,1,1.

求解方程组 $(E-\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix})X=O$，得属于特征值 1 的特征向量为

$\xi_1=k_1[1,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 1]^T+k_2[0,\ \ 1,\ \ 1,\ \ 0]^T$ (其中 k_1,k_2 为不全为零的任意数).

求解方程组 $(-E-\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix})X=O$，得属于特征值-1 的特征向量为

$\xi_2=k_3[0,\ \ -1,\ \ 1,\ \ 0]^T+k_4[-1,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 1]^T$ (其中 k_3,k_4 为不为零的任意数).

4. 判断上题中哪些矩阵可以对角化，对那些可对角化的矩阵 A，写出可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵，并写出该对角矩阵.

解 (1) 3 阶矩阵有 3 个线性无关的特征向量，所以能对角化. 可逆矩阵可取 $P=\begin{bmatrix}2&-1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}$，相应对角矩阵为 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&3\end{bmatrix}$.

(2) 3 阶矩阵最多只有 2 个线性无关的特征向量，少于 3 个，所以不能对角化.

(3) 3 阶矩阵最多只有 2 个线性无关的特征向量，少于 3 个，所以不能对角化.

(4) 3 阶矩阵有 3 个线性无关的特征向量，所以能对角化. 可逆矩阵可取 $P=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&-3\end{bmatrix}$，相应对角矩阵为 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&2\end{bmatrix}$.

(5) 4 阶矩阵最多只有 3 个线性无关的特征向量，少于 4 个，所以不能对角化.

(6) 4 阶矩阵有 4 个线性无关的特征向量，所以能对角化. 可逆矩阵可取 $P=\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&1&-1&0\\0&1&1&0\\1&0&0&1\end{bmatrix}$，相应对角矩阵为 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&-1\end{bmatrix}$.

5. 设 3 阶方阵 A 有特征值-1,1,2，它们所对应的特征向量分别为 ξ_1,ξ_2,ξ_3，令 $P=[\xi_1\ \ \xi_2\ \ \xi_3]$，则 $P^{-1}AP$ 为( )，且说明理由.

(A) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. (B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. (C) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. (D) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

解 ξ_1是属于特征值-1的特征向量，所以对角矩阵主对角线上第一个元素为-1；同理第二个元素是1，第三个为2，因此 $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$，故应选填A.

6. 设上三角矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

它的主对角线上元素互异，证明： A 能与对角矩阵相似.

证 $$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ 0 & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})\cdots(\lambda - a_{nn}),$$

因为 A 的主对角线上元素互异，所以 A 有 n 个互异的特征值. 因此 A 能与对角矩阵相似.

7. 设 A 为 n 阶方阵，证明: A 与 A^T 有相同的特征多项式.

证 A^T 的特征多项式为 $|\lambda E - A^T| = |((\lambda E)^T - A)^T| = |(\lambda E - A)^T| = |\lambda E - A|$，

而 $|\lambda E - A|$ 是 A 的特征多项式，所以 A 与 A^T 有相同的特征多项式.

8*. 设 ξ_1, ξ_2 分别是方阵 A 的属于 λ_1, λ_2 的特征向量，若 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，证明： $\xi_1 + \xi_2$ 不可能是 A 的特征向量.

证（反证） 假设 $\xi_1 + \xi_2$ 是 A 的属于特征值 λ 的特征向量，则有 $A(\xi_1 + \xi_2) = \lambda(\xi_1 + \xi_2)$，又因为 ξ_1, ξ_2 分别是 A 的属于 λ_1, λ_2 的特征向量，所以有 $A\xi_1 = \lambda_1\xi_1, A\xi_2 = \lambda_2\xi_2$. 又因为 $A(\xi_1 + \xi_2) = A\xi_1 + A\xi_2$，由此可知 $\lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2 = \lambda\xi_1 + \lambda\xi_2$，即有 $(\lambda - \lambda_1)\xi_1 + (\lambda - \lambda_2)\xi_2 = O$，因为 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，所以 $(\lambda - \lambda_1)$ 和 $(\lambda - \lambda_2)$ 不全为零，这表明

ξ_1,ξ_2 线性相关，这与属于不同特征值的特征向量必线性无关矛盾！所以假设不成立，即有 $\xi_1+\xi_2$ 不是 A 的特征向量.

9*. 已知 3 阶矩阵 A 的特征值为 1，2，2， 且 A 不能与对角矩阵相似，则秩(E-A)=______；秩(2E-A)=______，并说明理由.

解 因为 1 是 A 的一重根，所以(E-A)X=O 的基础解系含有 1 个向量，因此 3-秩(E-A)=1，从而可知秩(E-A)=2. 又因为 2 是 A 的二重根，所以(2E-A)X=O 的基础解系含有向量的个数为 1 或 2，由于 A 不能与对角矩阵相似，则可知 A 的线性无关的特征值个数小于 3，所以(2E-A)X=O 的基础解系含有向量的个数只能为 1，故有 3-秩(2E-A)=1，所以秩(2E-A)=2.

10*.已知 $A=\begin{bmatrix}0&0&1\\x&1&2x-3\\1&0&0\end{bmatrix}$ 能与对角矩阵相似，求 x.

解 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&0&-1\\-x&\lambda-1&3-2x\\-1&0&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda&-1\\-1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)$， A 的特征值为 $-1,1,1$. 因为 A 与对角矩阵相似，所以要求特征根的重数 n_i 与 $(\lambda_i E-A)X=O$ 的基础解系所含向量个数 r_i 相等. -1 是一重根所以一定满足；要 2 重特征值 1 满足，也就是要 $(E-A)X=O$ 的基础解系含有 2 个向量，由此可知 n-秩($E-A$)=2，因此秩($E-A$)=1.

$E-A=\begin{bmatrix}1&0&-1\\-x&0&-2x+3\\-1&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow[R_3+R_1]{R_2+xR_1}\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&0&-3x+3\\0&0&0\end{bmatrix}$，所以当且仅当 $x=1$ 时秩($E-A$)=1,从而所求 $x=1$.

习题 6.3

1. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{bmatrix}$ 与矩阵 $B=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&y&1\\0&0&-1\end{bmatrix}$ 相似．求 x,y

解 因为矩阵 A 与矩阵 B 相似，所以 $\mathrm{tr}\,A=\mathrm{tr}\,B$，$|A|=|B|$，从而有 $\begin{cases}2+x=2+y+1,\\-2=-2y,\end{cases}$ 解得 $x=0, y=1.$

2. 设

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

则下述结论正确的是(　)，且说明理由．

(A) A 与 B 等价，且 A 与 B 相似．

(B) A 与 B 等价，但 A 与 B 不相似．

(C) A 与 B 不等价，且 A 与 B 不相似．

(D) A 与 B 不等价，但 A 与 B 相似．

解 因为秩(A)=1=秩(B)，所以 A 与 B 等价．又因为 tr A=4, tr$B$=1，即有 $trA\neq trB$，所以 A 与 B 不相似．综上可知(B)是正确的，故应选填 B.

3. 已知 3 阶矩阵 A 的特征值为-1,1,2，求

(1) 矩阵 A^2+A-2E 的特征值；

(2) $|A^2+A-2E|$.

解 (1) 取 $f(x)=x^2+x-2$，则 $A^2+A-2E=f(A)$，

所以 $f(A)=A^2+A-2E$ 的特征值为 $f(-1)=2, f(1)=0, f(2)=2$.

(2) $|A^2+A-2E|=f(-1)f(1)f(2)=2\times0\times2=0$.

4. 设 3 阶方阵 A 的行列式 $|A|$=-2，A^*有一个特征值为 6，则 A^{-1} 必有一个特征值为____；A 必有一个特征值为_____；$5A^{-1}-3A^*$ 必有一个特征值为_______；$A(E+A)$ 必有一个特征值为______；$5A^{-1}-3A$ 必有一个特征值为_______.

以上各项均要求写出计算过程.

解 （1）由 $AA^*=|A|E$ 可得 $A^{-1}=-\frac{1}{2}A^*$，A^*有一个特征值为 6，所以 A^{-1} 必有一个特征值为 $-\frac{1}{2}\times 6=-3$.

(2) $A=(A^{-1})^{-1}$，所以 A 必有一个特征值为 $\frac{1}{-3}=-\frac{1}{3}$.

(3) $5A^{-1}-3A^*=5\times(-\frac{1}{2}A^*)-3A^*=-\frac{11}{2}A^*$，所以必有一个特征值为 $-\frac{11}{2}\times 6=-33$.

(4) 取 $f(x)=x^2+x$，则 $A(E+A)=A^2+A=f(A)$，因 A 有一个特征值为 $-\frac{1}{3}$，所以 $f(A)$ 必有一个特征值为 $f(-\frac{1}{3})=(-\frac{1}{3})^2-\frac{1}{3}=-\frac{2}{9}$.

(5) $5A^{-1}-3A=5A^{-1}-3(A^{-1})^{-1}$，所以必有一个特征值为 $5\times(-3)-3\times(-3)^{-1}=-14$.

5. 设 $A=\begin{bmatrix}1&-2&2\\-2&-2&4\\2&4&-2\end{bmatrix}$.

(1) 计算 $A^k\ (k>1)$；(2) 求 $A^3+3A^2-24A+28E$.

解 （1）$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&2&-2\\2&\lambda+2&-4\\-2&-4&\lambda+2\end{vmatrix}=\lambda^3+3\lambda^2-24\lambda+28=(\lambda-2)^2(\lambda+7)$，所以特征值为 2, 2, −7.

求解方程组 $(2E-\begin{bmatrix}1&-2&2\\-2&-2&4\\2&4&-2\end{bmatrix})X=O$，得到属于 2 的线性无关的特征向量为 $\xi_1=[2,\ \ 0,\ \ 1]^T,\xi_2=[-2,\ \ 1,\ \ 0]^T$.

求解方程组 $(-7E-\begin{bmatrix}1&-2&2\\-2&-2&4\\2&4&-2\end{bmatrix})X=O$，得到属于−7 的线性无关的特征向量为 $\xi_3=\left[-\frac{1}{2},\ \ -1,\ \ 1\right]^T$.

ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性无关，故 A 能对角化．取 $P=[\xi_1\ \ \xi_2\ \ \xi_3]$ 则 P 为可逆矩阵，且

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}2 & & \\ & 2 & \\ & & -7\end{bmatrix}\xlongequal{记为}\Lambda.\ 求得\ A=P\Lambda P^{-1},\ 从而\ A^k=(P\Lambda P^{-1})^k=P\Lambda^k P^{-1}$$

$$A^k=\begin{bmatrix}2 & -2 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2^k & & \\ & 2^k & \\ & & (-7)^k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -2 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}2^{k+3}+(-7)^k & -2^{k+1}+2(-7)^k & 2^{k+1}-2(-7)^k\\ -2^{k+1}+2(-7)^k & 5\cdot 2^{k+1}+4(-7)^k & 2^{k+1}-4(-7)^k\\ 2^{k+1}-2(-7)^k & 2^{k+2}-4(-7)^k & 5\cdot 2^{k+1}+4(-7)^k\end{bmatrix}.$$

(2) 取 $f(x)=x^3+3x^2-24x+28$，则 $A^3+3A^2-24A+28E=f(A)$ 的特征值为

$f(2)=0,\ f(2)=0,\ f(-7)=0$，所以 $A^3+3A^2-24A+28E=POP^{-1}=O$.

6. 设 n 阶方阵 A 的 n 个特征值为 1，2，…，n，求 $|A+E|$.

解 方阵 A 的 n 个特征值为 1，2，…，n，所以 $A+E$ 的特征值为 2,3, ……, n, $n+1$.

所以 $|A+E|=(n+1)!$.

7. 已知 3 阶方阵 A 的特征值为 0，1，2，所对应的特征向量分别为

$$[1,\ 1,\ 1]^T,\ [1,\ 1,\ 0]^T,\ [1,\ 0,\ 0]^T$$

求(1) A^k，其中 k 为任意正整数；(2) $|A^3+A^2-4A+2E|$； (3) $A^3+A^2-4A+2E$.

分析 本题与第 5 题类似，故解法相同，下面仅列出简要解答.

解 (1) 由方阵 A 的特征值为 0，1，2，所对应的特征向量分别为 $[1,\ 1,\ 1]^T$，

$[1,\ 1,\ 0]^T$，$[1,\ 0,\ 0]^T$，可知 $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0 & & \\ & 1 & \\ & & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$，所以

$$A^k=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0 & & \\ & 1 & \\ & & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}^{-1}\cdots\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0 & & \\ & 1 & \\ & & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0 & & \\ & 1 & \\ & & 2^k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2^n & 1-2^n & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

(2) 取 $f(x)=x^3+x^2-4x+2$，方阵 A 的特征值为 0，1，2，所以 $f(A)=A^3+A^2-4A+2E$ 的特征值为 $f(0)=2, f(1)=0, f(2)=6$．因此 $\left|A^3+A^2-4A+2E\right|=f(0)f(1)f(2)=0$.

(3) $A^3+A^2-4A+2E=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}2&&\\&0&\\&&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&-6&2\\0&0&2\\0&0&2\end{bmatrix}$.

8*. 设矩阵

$$A=\begin{bmatrix}a&-1&c\\5&b&3\\1-c&0&-a\end{bmatrix},\qquad |A|=-1,$$

A*有一个特征值 λ_0，属于 λ_0 的特征向量为 $\xi=\begin{bmatrix}-1, & -1, & 1\end{bmatrix}^T$，求 a,b,c 和 λ_0 的值.

解 由题设知，$A^*\xi=\lambda_0\xi$，两边左乘 A，利用 $AA^*=|A|E=-E$ 可得：$A\xi=-\dfrac{1}{\lambda_0}\xi$ 即有

$$\begin{bmatrix}a&-1&c\\5&b&3\\1-c&0&-a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1, & -1, & 1\end{bmatrix}^T=-\frac{1}{\lambda_0}\begin{bmatrix}-1, & -1, & 1\end{bmatrix}^T.$$ 由此可得

$$\begin{cases}-a+1+c=\dfrac{1}{\lambda_0}, & (1)\\ -5-b+3=\dfrac{1}{\lambda_0}, & (2)\\ c-1-a=-\dfrac{1}{\lambda_0}. & (3)\end{cases}$$

利用 (1) 和 (3) 可知 $2=2\dfrac{1}{\lambda_0}$，从而得到 $\lambda_0=1$，由此可得 $\begin{cases}c=a,\\ b=-3.\end{cases}$ 再根据 $|A|=-1$，可得 $|A|=a-3=-1$，即有 $a=2$．综上可得 $a=2, b=-3, c=2, \lambda_0=1$.

9. 设 A 为 n 阶方阵，证明：

$|A|=0 \Leftrightarrow$ 零是 A 的一个特征值.

证 $\Rightarrow$ $|A|=0$ 所以 $|0E-A|=0$，因此零是 A 的一个特征值.

$\Leftarrow$ 零是 A 的一个特征值，所以 $|0E-A|=0$ 即有 $|A|=0$.

10. 设 $n(n>1)$阶上三角矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{bmatrix}.$$

若 $A\neq aE$，则 A 不能与对角矩阵相似.

证 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-a & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ 0 & \lambda-a & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ 0 & 0 & \lambda-a & \cdots & -a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda-a \end{vmatrix}=(\lambda-a)^n$，所以 a 是 A 的 n 重根. 如果 A 能与对角矩阵相似，则必有 $(aE-A)X=O$ 的基础解系含有 n 个向量，

即 n-秩($aE-A$)=n，也就是秩($aE-A$)=0，从而得到此时 $aE-A=O$，即 $A=aE$，这与条件 $A\neq aE$ 矛盾！所以 A 不能与对角矩阵相似.

11*. 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2+4A+4E=O$，证明: A 的特征值仅为-2.

证 设 λ 为 A 的任意一个特征值，ξ 是 A 的属于 λ 的特征向量，则有 $A\xi=\lambda\xi$，所以

$(A^2+4A+4E)\xi=\lambda^2\xi+4\lambda\xi+4\xi=O\xi=O$，由 $\xi\neq O$ 可得 $\lambda^2+4\lambda+4=(\lambda+2)^2=0$，

即得 $\lambda=-2$，所以 A 的特征值仅为-2.

习题 6.4

1. 实对称矩阵是矩阵能对角化的充分条件,还是必要条件?为什么?

解 因为实对称矩阵一定能对角化，所以充分性是成立的，但是设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&0&3\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$ 不是实对称矩阵,但是我们知道他有三个互异的特征值 1,2,3 所以它一定能对角化. 因此可知必要性不成立. 所以实对称矩阵是矩阵能对角化的充分但不必要条件.

2. 求可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP$ 为对角阵，且写出这对角阵：

(1) $A=\begin{bmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&3\end{bmatrix}$；(2) $A=\begin{bmatrix}3&1&0&-1\\1&3&-1&0\\0&-1&3&1\\-1&0&1&3\end{bmatrix}$；

(3) $A=\begin{bmatrix}2&-1&-1&1\\-1&2&1&-1\\-1&1&2&-1\\1&-1&-1&2\end{bmatrix}$.

解 （1） $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-5&1&-3\\1&\lambda-5&3\\-3&3&\lambda-3\end{vmatrix}=\lambda^3-13\lambda^2+36\lambda=\lambda(\lambda-4)(\lambda-9)$，所以特征值为 0,4,9.

解线性方程组 $(0E-\begin{bmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&3\end{bmatrix})X=O$，得属于特征值 0 的线性无关的一个特征向量为 $[-1,\ \ 1,\ \ 2]^T$.

解线性方程组 $(4E-\begin{bmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&3\end{bmatrix})X=O$，得属于特征值 4 的线性无关的一个特征向量为 $[1,\ \ 1,\ \ 0]^T$.

解线性方程组 $(9E-\begin{bmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&3\end{bmatrix})X=O$，得属于特征值 9 的线性无关的一个特征向量为 $[1,\ \ -1,\ \ 1]^T$.

所以 $P=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}$，对角矩阵为 $\begin{bmatrix}0 & & \\ & 4 & \\ & & 9\end{bmatrix}$.

(2) $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -1 & 0 & 1\\ -1 & \lambda-3 & 1 & 0\\ 0 & 1 & \lambda-3 & -1\\ 1 & 0 & -1 & \lambda-3\end{vmatrix}=\lambda^4-12\lambda^3+50\lambda^2-84\lambda+45$

$=(\lambda-1)(\lambda-3)^2(\lambda-5)$，所以特征值为 1,3,3,5.

解线性方程组 $(3E-\begin{bmatrix}3 & 1 & 0 & -1\\ 1 & 3 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 3 & 1\\ -1 & 0 & 1 & 3\end{bmatrix})X=O$，得属于特征值 3 的两个线性无关的特征向量为 $[1,\ \ 0,\ \ 1,\ \ 0]^T$, $[0,\ \ 1,\ \ 0,\ \ 1]^T$.

解线性方程组 $(5E-\begin{bmatrix}3 & 1 & 0 & -1\\ 1 & 3 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 3 & 1\\ -1 & 0 & 1 & 3\end{bmatrix})X=O$，得属于特征值 5 的一个线性无关的特征向量为 $[1,\ \ 1,\ \ -1,\ \ -1]^T$.

解线性方程组 $(E-\begin{bmatrix}3 & 1 & 0 & -1\\ 1 & 3 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 3 & 1\\ -1 & 0 & 1 & 3\end{bmatrix})X=O$，得属于特征值 1 的一个线性无关的特征向量为 $[1,\ \ -1,\ \ -1,\ \ 1]^T$.

所以 $P=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$，对角矩阵为 $\begin{bmatrix}3 & & & \\ & 3 & & \\ & & 5 & \\ & & & 1\end{bmatrix}$.

(3) $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 1 & 1 & -1\\ 1 & \lambda-2 & -1 & 1\\ 1 & -1 & \lambda-2 & 1\\ -1 & 1 & 1 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)^3(\lambda-5)$，所以特征值为 1,1,1,5.

解线性方程组$(E-\begin{bmatrix}2&-1&-1&1\\-1&2&1&-1\\-1&1&2&-1\\1&-1&-1&2\end{bmatrix})X=O$，得属于特征值 1 的三个线性无关的特征向量为$[1,\ 1,\ 0,\ 0]^T$，$[1,\ 0,\ 1,\ 0]^T$，$[1,\ 0,\ 0,\ -1]^T$.

解线性方程组$(5E-\begin{bmatrix}2&-1&-1&1\\-1&2&1&-1\\-1&1&2&-1\\1&-1&-1&2\end{bmatrix})X=O$，得属于特征值 5 的一个线性无关的特征向量为$[1,\ -1,\ -1,\ 1]^T$.

所以$P=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&0&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&-1&1\end{bmatrix}$，对角矩阵为$\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&5\end{bmatrix}$.

3. 求正交矩阵 U 使$U^{-1}AU$ 为对角阵，且写出这对角阵，这里 A 即第 2 题中的 A.

（1）把三个属于不同特征值的特征向量单位化.

$$\frac{[-1,\ 1,\ 2]^T}{\left\|[-1,\ 1,\ 2]^T\right\|}=\frac{1}{\sqrt6}[-1,\ 1,\ 2]^T,\quad \frac{[1,\ 1,\ 0]^T}{\left\|[1,\ 1,\ 0]^T\right\|}=\frac{1}{\sqrt2}[1,\ 1,\ 0]^T,$$

$$\frac{[1,\ -1,\ 1]^T}{\left\|[1,\ -1,\ 1]^T\right\|}=\frac{1}{\sqrt3}[1,\ -1,\ 1]^T.$$

由此得到$U=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{2}{\sqrt6}&0&\frac{1}{\sqrt3}\end{bmatrix}$，对角矩阵为$\begin{bmatrix}0&&\\&4&\\&&9\end{bmatrix}$.

(2) 因为四个线性无关的特征向量已经两两正交了，所以只要对他们单位化即可.

$$\frac{[1,\ 0,\ 1,\ 0]^T}{\left\|[1,\ 0,\ 1,\ 0]^T\right\|}=\frac{1}{\sqrt2}[1,\ 0,\ 1,\ 0]^T,\quad \frac{[0,\ 1,\ 0,\ 1]^T}{\left\|[0,\ 1,\ 0,\ 1]^T\right\|}=\frac{1}{\sqrt2}[0,\ 1,\ 0,\ 1]^T,$$

$$\frac{[1,\ 1,\ -1,\ -1]^T}{\left\|[1,\ 1,\ -1,\ -1]^T\right\|}=\frac{1}{2}[1,\ 1,\ -1,\ -1]^T,$$

$$\frac{[1,\quad -1,\quad -1,\quad 1]^T}{\left\|[1,\quad -1,\quad -1,\quad 1]^T\right\|}=\frac{1}{2}[1,\quad -1,\quad -1,\quad 1]^T$$

由此得到$U=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\sqrt{2} & 0 & 1 & 1\\ 0 & \sqrt{2} & 1 & -1\\ \sqrt{2} & 0 & -1 & -1\\ 0 & \sqrt{2} & -1 & 1\end{bmatrix}$，对角矩阵为$\begin{bmatrix}3 & & & \\ & 3 & & \\ & & 5 & \\ & & & 1\end{bmatrix}$.

(3) 先对属于特征值 1 的三个特征向量进行正交化.

$\xi_1=[1,\quad 1,\quad 0,\quad 0]^T,\xi_2=[1,\quad 0,\quad 1,\quad 0]^T,\xi_3=[1,\quad 0,\quad 0,\quad -1]^T$.

$\eta_1=\xi_1=[1,\quad 1,\quad 0,\quad 0]^T$;

$$\eta_2=\xi_2-\frac{(\xi_2,\eta_1)}{(\eta_1,\eta_1)}\eta_1=[1,\quad 0,\quad 1,\quad 0]^T-\frac{1}{2}[1,\quad 1,\quad 0,\quad 0]^T=\left[\frac{1}{2},\quad -\frac{1}{2},\quad 1,\quad 0\right]^T;$$

$$\eta_3=\xi_3-\frac{(\xi_3,\eta_1)}{(\eta_1,\eta_1)}\eta_1-\frac{(\xi_3,\eta_2)}{(\eta_2,\eta_2)}\eta_2=\frac{1}{3}[1,\quad -1,\quad -1,\quad -3]^T.$$

再对向量进行单位化，得到三个正交单位向量，从而得到四个两两正交的单位向量:

$\frac{1}{\sqrt{2}}[1,\quad 1,\quad 0,\quad 0]^T$, $\frac{1}{\sqrt{6}}[1,\quad -1,\quad 2,\quad 0]^T$, $\frac{\sqrt{3}}{6}[1,\quad -1,\quad -1,\quad -3]^T$, $\frac{1}{2}[1,\quad -1,\quad -1,\quad 1]^T$. 由此得到 $U=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$，对角矩阵为

$$\begin{bmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 5\end{bmatrix}.$$

4*. 设 A, B 均为 n 阶实对称矩阵，证明:

A 与 B 相似$\Leftrightarrow A, B$ 有相同的特征多项式.

证 $\Rightarrow$ 显然成立.

$\Leftarrow$ A, B 有相同的特征多项式，则 A, B 必有相同的特征根(包括重数)．不妨设这些根为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，因为 A，B 均为 n 阶实对称矩阵，所以存在可逆矩阵 P,Q 使得

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix},\ Q^{-1}BQ=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}.$$ 由此可知 $P^{-1}AP=Q^{-1}BQ$，

所以有 $A=(QP^{-1})^{-1}BQP^{-1}$，其中 QP^{-1} 是可逆的，因此 A 与 B 相似．

5. 已知 1，1，-1 是 3 阶实对称矩阵 A 的 3 个特征值，

向量 $\xi_1=[1,\quad 1,\quad 1]^T$，$\xi_2=[2,\quad 2,\quad 1]^T$

是 A 的属于 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的特征向量．

(1) 求 A 的属于特征值-1 的特征向量；
(2) 求出矩阵 A．

解 （1）设 A 的属于-1 的特征向量为 $\xi_3=[a,\quad b,\quad c]^T$，则 ξ_3 和 $\xi_1=[1,\quad 1,\quad 1]^T$，$\xi_2=[2,\quad 2,\quad 1]^T$ 均正交，所以有 $\begin{cases}a+b+c=0,\\ 2a+2b+c=0.\end{cases}$ 从而得到 $\xi_3=t[1,\quad -1,\quad 0]^T$（$t$ 为任意非零常数）．

（2）对 $\xi_1=[1,\quad 1,\quad 1]^T,\xi_2=[2,\quad 2,\quad 1]^T$ 进行正交化得到

$$\eta_1=\xi_1=[1,\quad 1,\quad 1]^T,\ \eta_2=\xi_2-\frac{(\xi_2,\eta_1)}{(\eta_1,\eta_1)}\eta_1=\left[\frac{1}{3},\quad \frac{1}{3},\quad -\frac{2}{3}\right]^T$$

再对三个向量进行单位化得到正交单位向量组：

$$\frac{1}{\sqrt3}[1,\quad 1,\quad 1]^T,\ \frac{\sqrt6}{2}\left[\frac{1}{3},\quad \frac{1}{3},\quad -\frac{2}{3}\right]^T,\ \frac{1}{\sqrt2}[1,\quad -1,\quad 0]^T.$$

由此可得 $U=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt3} & \frac{\sqrt6}{6} & \frac{1}{\sqrt2}\\ \frac{1}{\sqrt3} & \frac{\sqrt6}{6} & -\frac{1}{\sqrt2}\\ \frac{1}{\sqrt3} & -\frac{\sqrt6}{3} & 0\end{bmatrix}$，对角矩阵为 $\Lambda=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & -1\end{bmatrix}$，

因此 $A=U\Lambda U^T=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0\end{bmatrix}^T$

$$=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

6*. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$，矩阵 $B=(kE+A)^2$，其中 $k\in R$，求一个对角矩阵 Λ，使得 B 与 Λ 相似.

解 由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & -1\\ 0 & \lambda-2 & 0\\ -1 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)^2$ 知，A 的特征值为 0, 2, 2. 所以实对称矩阵 A 与对角阵 $\begin{bmatrix}0 & & \\ & 2 & \\ & & 2\end{bmatrix}$ 相似. 记 $f(x)=x^2+2kx+k^2$，则 $B=(kE+A)^2=k^2E+2kA+A^2=f(A)$，所以 B 的特征值为 $f(0)=k^2, f(2)=k^2+4k+4, f(2)=k^2+4k+4$. 从而实对称矩阵 B 与对角矩阵

$\Lambda=\begin{bmatrix}f(0) & & \\ & f(2) & \\ & & f(2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k^2 & & \\ & k^2+4k+4 & \\ & & k^2+4k+4\end{bmatrix}$ 相似.

习题 6.5

1. n 阶方阵 A 有 n 个互异的特征值是 A 能与对角矩阵相似的(　).
(A) 充分必要条件.　　(B) 充分而非必要条件.
(C) 必要而非充分条件.　　(D) 既非充分也非必要条件.

解　A 有 n 个互异的特征值, 则 A 一定能与对角矩阵相似. 但实对称矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$ 有相同的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=5$, 但 A 能与对角矩阵相似. 综上应该选(B)

2. 设 A,B 为 n 阶方阵，且 A 与 B 相似，则下述结论正确的是(　)，且说明理由.
(A) $\lambda E-A=\lambda E-B$.
(B) A 与 B 有相同的特征值和特征向量.
(C) A 与 B 都能与一个对角矩阵相似.
(D) 对任意常数 k，$kE-A$ 与 $kE-B$ 相似.

解　设 $A=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$，取可逆矩阵 $P=E(1,2)$，构作 $B=P^{-1}AP=E(1,2)AE(1,2)=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}$，则 A 与 B 相似但 $\lambda E-A=\begin{bmatrix}\lambda-1&-1\\0&\lambda-1\end{bmatrix}$ 与 $\lambda E-B=\begin{bmatrix}\lambda-1&0\\-1&\lambda-1\end{bmatrix}$ 不相等，故(A)不正确. 解 $(E-A)X=O$ 可得 A 的属于 1 的特征向量为 $k[1,\ \ 0]^T$，其中 k 为任意非零常数. 解 $(E-B)X=O$ 可得 B 的属于 1 的特征向量为 $t[0,\ \ 1]^T$，其中 t 为任意常数. 这表明 A,B 属于 1 的特征向量不相同. 故(B)不正确. 同时也说明 A,B 的线性无关的特征向量最多只有 1 个，所以 A,B 不能对角化，故(C)不正确. 下证(D)正确. 因 A 与 B 相似，所以存在可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP=B$. 对任意常数 k 有 $P^{-1}(kE-A)P=P^{-1}(kE)P-P^{-1}AP=kE-P^{-1}AP=kE-B$，所以 $kE-A$ 与 $kE-B$ 相似.

综上所述应选填 D.

3. 下列矩阵中不能对角化的矩阵是_____，且说明理由.

(A) $\begin{bmatrix}1&2&3\\2&0&4\\3&4&5\end{bmatrix}$.　(B) $\begin{bmatrix}1&2&3\\0&0&4\\0&0&5\end{bmatrix}$.　(C) $\begin{bmatrix}1&2&3\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$.　(D) $\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&4\\0&0&1\end{bmatrix}$.

解　(A)中矩阵为实对称矩阵,所以能对角化. (B)中矩阵有 3 个相异特征值 1,2,5 所以能对角化,

(C)中矩阵有 2 重根 0 对应的齐次线性方程组的基础解系由 2 个线性无关的特征向量组成, 所以能对角化. 根据习题 6.3 的第 10 题可知 $n(n>1)$ 阶上三角矩 $A=\begin{bmatrix} a & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{bmatrix}$. 若 $A\neq aE$，则 A 不能与对角矩阵相似. 选项(D)中的矩阵是一个对角线相同的非数量矩阵的上三角矩阵, 所以该矩阵不能对角化. 因此选填 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

4. 设

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

问 A，B 中哪一个矩阵可以对角化?为什么?

解 两个矩阵都有一个两重特征根 0, $0E-A=-A$ 的秩为 1, 即 $n_0=n-$ 秩$(-A)$=2 所以能对角化. 而 $0E-B=-B$ 的秩为 2, 即 $n_0'=n-$ 秩$(-B)$=1 所以不能对角化.

5. b 为任意实数时，问矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 0 & b & b & \cdots & b \\ b & 0 & b & \cdots & b \\ b & b & 0 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

能否对角化?为什么?若能对角化，请写出与 A 相似的对角矩阵.

解 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda & -b & -b & \cdots & -b \\ -b & \lambda & -b & \cdots & -b \\ -b & -b & \lambda & \cdots & -b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -b & -b & -b & \cdots & \lambda \end{vmatrix}$, 根据例 1.3.5 可知该行列式的值为

$|\lambda E-A|=[\lambda-(n-1)b](\lambda+b)^{n-1}$, 所以 A 的特征值为一个一重特征值 $(n-1)b$ 和一个 $n-1$ 重特征值 $-b$. 秩$([(n-1)bE-A])=n-1$, 所以 $n_1=n-(n-1)=1$ 与重数相同.

秩$([-bE-A])=1$, 所以 $n_2=n-1$ 与重数相同. 所以 A 能对角化, 与其相似的对角矩阵为

$$\begin{bmatrix} (n-1)b & & & \\ & -b & & \\ & & \ddots & \\ & & & -b \end{bmatrix}.$$

6. 设 n 阶方阵 A 适合 $A^2=E$，证明 A 的特征值或为 1，或为-1.

证 设 λ 为 n 阶方阵 A 的任意一个特征值，ξ 为 A 的属于 λ 的特征向量，则有 $A\xi=\lambda\xi$. 所以 $A^2\xi=\lambda^2\xi=\xi$，即有 $\lambda^2=1$，因此 A 的特征值或为 1，或为-1.

7. 设矩阵 A 与 B 相似，其中

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & a \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}.$$

(1) 求 a,b 的值；

(2) 求可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP=B$.

解 (1) 矩阵 A 与 B 相似，所以 tr$A$=tr$B$，$|A|=|B|$，由此可以得到 $\begin{cases} 5+a=4+b, \\ 6a-6=4b. \end{cases}$，从而可知 $a=5,b=6$.

(2) A 与 B 相似，所以 A 的特征值为 2,2,6.

求解方程组 $(2E-\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix})X=O$，得到属于 2 的线性无关的特征向量为 $[1,\ \ 0,\ \ 1]^T,[-1,\ \ 1,\ \ 0]^T$.

求解方程组 $(6E-\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix})X=O$，得到属于 6 的线性无关的特征向量为 $\left[\frac{1}{3},\ \ -\frac{2}{3},\ \ 1\right]^T$.

所以 $P=\begin{bmatrix}1 & -1 & \frac{1}{3}\\ 0 & 1 & -\frac{2}{3}\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

8. 已知矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ a & 1 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 2 & 0\\ 2 & 3 & c & 2\end{bmatrix},$$

问 a 与 c 取何值时 A 能与对角矩阵相似?为什么?

解 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & 0 & 0\\ -a & \lambda-1 & 0 & 0\\ -2 & -3 & \lambda-2 & 0\\ -2 & -3 & -c & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-2)^2$，所以 A 有一个两重特征值 1 和一个两重特征值 2. $n_1=n-$秩$(E-A), n_2=n-$秩$(2E-A)$，A 能与对角矩阵相似的充要条件为 $n_1=2, n_2=2$. 因此要求秩($E-A$)=秩($2E-A$)=2.

$E-A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ -a & 0 & 0 & 0\\ -2 & -3 & -1 & 0\\ -2 & -3 & -c & -1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{bmatrix}-1 & -c & -3 & -2\\ 0 & -1 & -3 & -2\\ 0 & 0 & 0 & -a\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，要使得秩($E-A$)=2，必有 $a=0$；$2E-A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -a & 1 & 0 & 0\\ -2 & -3 & 0 & 0\\ -2 & -3 & -c & 0\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{bmatrix}1 & -a & -2 & -2\\ 0 & 1 & -3 & -3\\ 0 & 0 & 0 & -c\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，要使得秩($2E-A$)=2，必有 $c=0$. 综上 $a=0$，$c=0$.

9. 已知矩阵

$$A=\begin{bmatrix}2 & 2 & 0\\ 8 & 2 & a\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix}$$

相似于对角矩阵 Λ，试确定常数 a 的值；并求可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP=\Lambda$.

解 $|\lambda E-A|=\begin{bmatrix}\lambda-2 & -2 & 0\\ -8 & \lambda-2 & -a\\ 0 & 0 & \lambda-6\end{bmatrix}=(\lambda+2)(\lambda-6)^2$，特征值为-2,6,6. 因为 A 相似于对角矩阵，所以秩($6E-A$)=1. 而 $6E-A=\begin{bmatrix}4 & -2 & 0\\ -8 & 4 & -a\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{bmatrix}4 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -a\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，故 $a=0$.

求解线性方程组 $(-2E-\begin{bmatrix}2 & 2 & 0\\ 8 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix})X=O$，得到属于-2 的线性无关的特征向量 $[0,\ \ 0,\ \ 1]^T$.

求解线性方程组 $(6E-\begin{bmatrix}2 & 2 & 0\\ 8 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix})X=O$，得到属于 6 的线性无关的特征向量 $[1,\ \ 2,\ \ 0]^T,[1,\ \ -2,\ \ 0]^T$.

所以得到 $P=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 2 & -2\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$.

10*. 附录三中例 3.1 已阐明了对 $n\times m$ 矩阵 A，$m\times n$ 矩阵 B 而言，若 $\lambda\neq 0$ 有 $|\lambda E_n-AB|=\lambda^{n-m}|\lambda E_m-BA|$. 利用此说明矩阵 AB 与矩阵 BA 特征值之间的关系.

解 AB 与 BA 的特征多项式只差因子 λ^{n-m}，从而它们有相同的非零特征值，特别地当 A,B 都是 n 阶方阵时，AB 与 BA 有相同的特征多项式.

习题 7.1

1. 用配方法化下列二次型为标准形，并写出非退化的线性替换：

(1) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2+4x_2x_3+5x_3^2$；

(2) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2-2x_1x_3+2x_2^2$；

(3) $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-4x_1x_2+x_2^2-4x_2x_3$；

(4) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3$.

解 (1) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2+4x_2x_3+5x_3^2=(x_1+x_2)^2+(x_2+2x_3)^2+x_3^2$，

令 $\begin{cases} y_1=x_1+x_2, \\ y_2=x_2+2x_3, \\ y_3=x_3. \end{cases}$ 则 $\begin{cases} x_1=y_1-y_2+2y_3, \\ x_2=y_2-2y_3, \\ x_3=y_3. \end{cases}$ 因为 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$，所以线性替换是非退化的．从而得到标准形 $y_1^2+y_2^2+y_3^2$．

(2) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2-2x_1x_3+2x_2^2=2(\frac{1}{2}x_1+x_2)^2+\frac{1}{2}(x_1-2x_3)^2-2x_3^2$，

令 $\begin{cases} y_1=\frac{1}{2}x_1+x_2, \\ y_2=x_1-2x_3, \\ y_3=x_3. \end{cases}$ 则 $\begin{cases} x_1=y_1-y_2+2y_3, \\ x_2=y_2-y_3, \\ x_3=y_3. \end{cases}$ 因为 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$，所以线性替换是非退化的．从而得到标准形 $2y_1^2+\frac{1}{2}y_2^2-2y_3^2$．

(3) $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-4x_1x_2+x_2^2-4x_2x_3=2(x_1-x_2)^2-(x_2+2x_3)^2+4x_3^2$，

令 $\begin{cases} y_1=x_1-x_2, \\ y_2=x_2+2x_3, \\ y_3=x_3. \end{cases}$ 则 $\begin{cases} x_1=y_1-y_2-2y_3, \\ x_2=y_2-2y_3, \\ x_3=y_3. \end{cases}$ 因为 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$，所以线性替换是非退化的．从而得到标准形 $2y_1^2-y_2^2+4y_3^2$．

(4) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3$

先令 $\begin{cases} x_1=y_1-y_2, \\ x_2=y_1+y_2, \\ x_3=y_3. \end{cases}$

则 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=y_1^2-y_2^2+2y_1y_3=(y_1+y_3)^2-y_2^2-y_3^2$

令$\begin{cases} z_1 = y_1 + y_3, \\ z_2 = y_2, \\ z_3 = y_3. \end{cases}$ 则$\begin{cases} x_1 = z_1 + z_2 - z_3, \\ x_2 = z_1 - z_2 - z_3, \\ x_3 = z_3. \end{cases}$ 因为$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$，所以线性替换是非退化的. 从而得到标准形 $z_1^2 - z_2^2 - z_3^2$.

2. 用配方法化二次型为标准形时，应如何配方才能保证使用的是非退化的线性替换?下述两小题中所用的配方合适吗?正确的配方应如何做?

(1) $f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2 = 2x_1^2 + 2(x_1 - x_2)^2 + 4x_2^2$

$$= 2y_1^2 + 2y_2^2 + 4y_3^2,$$

其中线性替换为

$$\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_1 - x_2, \\ y_3 = x_2. \end{cases}$$

(2)

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2 = (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 + x_1)^2$$

$$= y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$$

其中线性替换为

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2, \\ y_2 = x_2 - x_3, \\ y_3 = x_3 + x_1. \end{cases}$$

解 (1) 错，因为$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$，所以线性替换$\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_1 - x_2, \\ y_3 = x_2. \end{cases}$是退化的，所以错.

正确的为 $f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2 = (2x_1 - x_2)^2 + 5x_2^2 = y_1^2 + 5y_2^2$,

其中线性替换为$\begin{cases} y_1 = 2x_1 - x_2, \\ y_2 = x_2, \\ y_3 = x_3. \end{cases}$ 则$\begin{cases} x_1 = y_1 - \frac{1}{2}y_2, \\ x_2 = y_2, \\ x_3 = y_3. \end{cases}$ 因为$\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$，所以该线性替换是非退化的.

(2) 错，因为$\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&-1&1\end{vmatrix}=0$，所以线性替换$\begin{cases}y_1=x_1+x_2,\\y_2=x_2-x_3,\\y_3=x_3+x_1.\end{cases}$是退化的，所以错.

正确的为 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2-2x_2x_3+2x_3^2$

$$=2(x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3)^2+\frac{3}{2}(x_2-x_3)^2=2y_1^2+\frac{3}{2}y_2^2$$

其中线性替换为$\begin{cases}y_1=x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3,\\y_2=x_2-x_3,\\y_3=x_3.\end{cases}$ 则 $\begin{cases}x_1=y_1-\frac{1}{2}y_2-y_3,\\x_2=y_2+y_3,\\x_3=y_3.\end{cases}$ 因为

$\begin{vmatrix}1&-\frac{1}{2}&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{vmatrix}=1\neq 0$，所以该线性替换是非退化的.

习题 7.2

1. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_1x_2-2x_1x_3+3x_2^2+4x_2x_3$ 的矩阵为 ( ).

(A) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. (B) $\begin{bmatrix} 2 & \frac{3}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

(C) $\begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. (D) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

解 二次型的矩阵为 $\begin{bmatrix} a_{11} & \frac{1}{2}a_{12} & \cdots & \frac{1}{2}a_{1n} \\ \frac{1}{2}a_{12} & a_{22} & \cdots & \frac{1}{2}a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{2}a_{1n} & \frac{1}{2}a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$，所以上述二次型的矩阵为 $\begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. 所以选填 C.

2. 写出下列二次型的矩阵表示和二次型的矩阵：

(1) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_1x_2-2x_1x_3+2x_2^2+3x_2x_3-3x_3^2$；

(2) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+\sqrt{2}x_1x_2+4x_1x_3-5x_2^2$；

(3) $f(x_1,x_2,x_3)=(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2$；

(4) $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_{n-1}x_n=\sum_{i=1}^{n-1}x_ix_{i-1}$.

解 (1) $f(x_1,x_2,x_3)=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{3}{2} \\ -1 & \frac{3}{2} & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$,

所以该二次型的矩阵为$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{3}{2} \\ -1 & \frac{3}{2} & -3 \end{bmatrix}$.

(2) $f(x_1,x_2,x_3)=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -5 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$,

所以该二次型的矩阵为$\begin{bmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -5 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(3) $f(x_1,x_2,x_3)=a_1^2x_1^2+2a_1a_2x_1x_2+2a_1a_3x_1x_3+a_2^2x_2^2+2a_2a_3x_2x_3+a_3^2x_3^2$

$=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 \\ a_1a_2 & a_2^2 & a_2a_3 \\ a_1a_3 & a_2a_3 & a_3^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$,

所以该二次型的矩阵为$\begin{bmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 \\ a_1a_2 & a_2^2 & a_2a_3 \\ a_1a_3 & a_2a_3 & a_3^2 \end{bmatrix}$.

(4) $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_{n-1}x_n$

$$=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

所以该二次型的矩阵为 $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

3. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

则 $f(x_1,x_2,x_3)=$____________________.

解 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_3+x_2^2$

4. 用正交线性替换化下列实二次型为标准形，并写出正交线性替换：

(1) $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+4x_2x_3+3x_3^2$；

(2) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-4x_1x_2+4x_1x_3-2x_2^2+8x_2x_3-2x_3^2$；

(3) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=2x_1x_2-2x_3x_4$；

(4) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=2x_1x_2+2x_1x_3-2x_1x_4-2x_2x_3+2x_2x_4+2x_3x_4$.

解 （1） $f(x_1,x_2,x_3)=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

计算特征多项式 $\left|\lambda E-\begin{bmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{bmatrix}\right|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&0\\0&\lambda-3&-2\\0&-2&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-5)$，得到特征值为 1, 2, 5.

解方程 $(E-\begin{bmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{bmatrix})X=O$，得到属于 1 的 1 个线性无关的特征向量为 $[0,\ \ -1,\ \ 1]^T$.

解方程 $(2E-\begin{bmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{bmatrix})X=O$，得到属于 2 的 1 个线性无关的特征向量为 $[1,\ \ 0,\ \ 0]^T$.

解方程 $(5E-\begin{bmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{bmatrix})X=O$，得到属于 5 的 1 个线性无关的特征向量为 $[0,\ \ 1,\ \ 1]^T$.

三个向量已经两两正交，所以只要单位化即可得到单位正交向量组：

$$\frac{1}{\sqrt{2}}[0,\ \ -1,\ \ 1]^T,\ [1,\ \ 0,\ \ 0]^T,\ \frac{1}{\sqrt{2}}[0,\ \ 1,\ \ 1]^T.$$

所以 $U=\begin{bmatrix}0&1&0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$，因此正交变换为 $X=\begin{bmatrix}0&1&0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}Y$，而标准型为 $f(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$.

(2) $f(x_1,x_2,x_3)=[x_1\ \ x_2\ \ x_3]\begin{bmatrix}1&-2&2\\-2&-2&4\\2&4&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$

计算特征多项式 $\left|\lambda E-\begin{bmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & -2 & 4\\ 2 & 4 & -2\end{bmatrix}\right|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & -2\\ 2 & \lambda+2 & -4\\ -2 & -4 & \lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda+7)(\lambda-2)(\lambda-2)$，

得到特征值为-7, 2, 2.

解方程 $(-7E-\begin{bmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & -2 & 4\\ 2 & 4 & -2\end{bmatrix})X=O$，得到属于-7 的 1 个线性无关的特征向量为

$\left[-\dfrac{1}{2},\quad -1,\quad 1\right]^T$，单位化得到 $\dfrac{1}{3}[-1,\quad -2,\quad 2]^T$.

解方程 $(2E-\begin{bmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & -2 & 4\\ 2 & 4 & -2\end{bmatrix})X=O$，得到属于 2 的 2 个线性无关的特征向量为

$[2,\quad 0,\quad 1]^T,[-2,\quad 1,\quad 0]^T$. 把这两个向量通过施密特正交化得到

$\dfrac{1}{\sqrt{5}}[2,\quad 0,\quad 1]^T,\dfrac{1}{3\sqrt{5}}[-2,\quad 5,\quad 4]^T$.

所以 $U=\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{\sqrt{5}} & -\dfrac{2}{3\sqrt{5}}\\ -\dfrac{2}{3} & 0 & \dfrac{5}{3\sqrt{5}}\\ \dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{\sqrt{5}} & \dfrac{4}{3\sqrt{5}}\end{bmatrix}$，因此正交变换为 $X=\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{\sqrt{5}} & -\dfrac{2}{3\sqrt{5}}\\ -\dfrac{2}{3} & 0 & \dfrac{5}{3\sqrt{5}}\\ \dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{\sqrt{5}} & \dfrac{4}{3\sqrt{5}}\end{bmatrix}Y$，而标准型为 $f(y_1,y_2,y_3)=-7y_1^2+2y_2^2+2y_3^2$.

（3） $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=[x_1\quad x_2\quad x_3\quad x_4]\begin{bmatrix}0 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}$,

计算特征多项式 $\left|\lambda E-\begin{bmatrix}0 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{bmatrix}\right|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 0 & 0\\ 1 & \lambda & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)^2(\lambda-1)^2$，得到特征值为-1, -1, 1, 1.

解方程 $(-E-\begin{bmatrix}0&-1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&-1&0\end{bmatrix})X=O$，得到属于-1 的 2 个线性无关的特征向量为 $[0,\ 0,\ 1,\ 1]^T,[1,\ 1,\ 0,\ 0]^T$.

解方程 $(E-\begin{bmatrix}0&-1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&-1&0\end{bmatrix})X=O$，得到属于 1 的 2 个线性无关的特征向量为 $[0,\ 0,\ -1,\ 1]^T,[-1,\ 1,\ 0,\ 0]^T$.

四个向量都已经是两两正交，所以对四个向量进行单位化得到单位正交向量组：

$$\frac{1}{\sqrt{2}}[0,\ 0,\ 1,\ 1]^T,\frac{1}{\sqrt{2}}[1,\ 1,\ 0,\ 0]^T,\frac{1}{\sqrt{2}}[0,\ 0,\ -1,\ 1]^T,\frac{1}{\sqrt{2}}[-1,\ 1,\ 0,\ 0]^T$$

所以 $U=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\end{bmatrix}$，因此正交变换为

$X=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\end{bmatrix}Y$，而标准型为 $f(y_1,y_2,y_3,y_4)=-y_1^2-y_2^2+y_3^2+y_4^2$.

（4） $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=[x_1\ \ x_2\ \ x_3\ \ x_4]\begin{bmatrix}0&1&1&-1\\1&0&-1&1\\1&-1&0&1\\-1&1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}$

计算特征多项式 $\left|\lambda E-\begin{bmatrix}0&1&1&-1\\1&0&-1&1\\1&-1&0&1\\-1&1&1&0\end{bmatrix}\right|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&-1&1\\-1&\lambda&1&-1\\-1&1&\lambda&-1\\1&-1&-1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+3)(\lambda-1)^3$，得到特征值为-3, 1, 1, 1.

解方程 $(-3E-\begin{bmatrix}0&1&1&-1\\1&0&-1&1\\1&-1&0&1\\-1&1&1&0\end{bmatrix})X=O$，得到属于-3 的 1 个线性无关的特征向量为 $[1,\ -1,\ -1,\ 1]^T$. 单位化得到 $\left[\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right]^T$

解方程 $(E-\begin{bmatrix}0&1&1&-1\\1&0&-1&1\\1&-1&0&1\\-1&1&1&0\end{bmatrix})X=O$，得到属于 1 的 3 个线性无关的特征向量为 $[-1,\ 0,\ 0,\ 1]^T,[1,\ 0,\ 1,\ 0]^T,[1,\ 1,\ 0,\ 0]^T$. 对这三个向量进行施密特正交化得到 $\frac{1}{\sqrt{2}}[-1,\ 0,\ 0,\ 1]^T,\frac{1}{\sqrt{6}}[1,\ 0,\ 2,\ 1]^T,\frac{1}{2\sqrt{3}}[1,\ 3,\ -1,\ 1]^T$.

所以 $U=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{2\sqrt{3}}\\-\frac{1}{2}&0&0&\frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{1}{2}&0&\frac{2}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{2\sqrt{3}}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{2\sqrt{3}}\end{bmatrix}$,

因此正交变换为 $X=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{2\sqrt{3}}\\-\frac{1}{2}&0&0&\frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{1}{2}&0&\frac{2}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{2\sqrt{3}}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{2\sqrt{3}}\end{bmatrix}Y$，而标准型为

$f(y_1,y_2,y_3,y_4)=-3y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2$.

5. 在习题 7. 1 第 1 题(3)中已用配方法化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-4x_1x_2+x_2^2-4x_2x_3$$

为标准形. 现要求用正交线性替换化该二次型为标准形，并写出正交线性替换. 请对比一下两种方法所得的标准形是否相同.

解 $f(x_1,x_2,x_3)=\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -2 & 0\\ -2 & 1 & -2\\ 0 & -2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$

计算特征多项式 $\left|\lambda E-\begin{bmatrix}2 & -2 & 0\\ -2 & 1 & -2\\ 0 & -2 & 0\end{bmatrix}\right|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 2 & 0\\ 2 & \lambda-1 & 2\\ 0 & 2 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda+2)$，得到特征值为 1, 4, −2.

解方程 $(E-\begin{bmatrix}2 & -2 & 0\\ -2 & 1 & -2\\ 0 & -2 & 0\end{bmatrix})X=O$，得到属于 1 的 1 个线性无关的特征向量为 $\begin{bmatrix}-2, & -1, & 2\end{bmatrix}^T$，单位化得到 $\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-2, & -1, & 2\end{bmatrix}^T$.

解方程 $(4E-\begin{bmatrix}2 & -2 & 0\\ -2 & 1 & -2\\ 0 & -2 & 0\end{bmatrix})X=O$，得到属于 4 的 1 个线性无关的特征向量为 $\begin{bmatrix}2, & -2, & 1\end{bmatrix}^T$，单位化得到 $\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2, & -2, & 1\end{bmatrix}^T$.

解方程 $(-2E-\begin{bmatrix}2 & -2 & 0\\ -2 & 1 & -2\\ 0 & -2 & 0\end{bmatrix})X=O$，得到属于−2 的 1 个线性无关的特征向量为 $\begin{bmatrix}1, & 2, & 2\end{bmatrix}^T$，单位化得到 $\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1, & 2, & 2\end{bmatrix}^T$.

所以 $U=\begin{bmatrix}-\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}$，因此正交变换为 $X=\begin{bmatrix}-\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}Y$，而标准型为 $f(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+4y_2^2-2y_3^2$. 所以两者所得标准型不相同.

6. (1) 设 A 是一个 n 阶对称矩阵，若对任意的 $X=\begin{bmatrix}x_1, & x_2, & \cdots, & x_n\end{bmatrix}^T$，有 $X^TAX=O$，

求证：$A=O$

(2) 利用(1)证明性质 7. 2. 1.

证 (1) 设 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$，令 $X=X_i\,(i=1,2,\cdots,n)$（X_i 满足 $x_i=1,x_j=0,j\neq i$)，则有 $X^TAX=a_{ii}=0\quad(i=1,2,\cdots,n)$，

再令 $X=X_{ij}\,(i,j=1,2,\cdots,n,i\neq j)$（$X_{ij}$ 满足 $x_i=1,x_j=1,x_s=0,s\neq i,s\neq j$），则有 $X_{ij}{}^TAX_{ij}=a_{ij}+a_{ji}+a_{ii}+a_{jj}=0\quad(i,j=1,2,\cdots,n)$，因为 $a_{ii}=0,a_{jj}=0\,(i,j=1,2,\cdots,n)$，并且由于 A 是一个 n 阶对称矩阵所以有 $a_{ij}=a_{ji}$，所以由 $a_{ij}+a_{ji}+a_{ii}+a_{jj}=0\quad(i,j=1,2,\cdots,n)$ 可得 $a_{ij}=0\quad(i,j=1,2,\cdots,n)$，因此 $A=O$.

(2) 若存在两个对称矩阵 A,B 使得 $f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX$，$f(x_1,x_2,x_3)=X^TBX$，则两式相减得 $X^T(A-B)X=O$ 对任意 X 成立. 由于 A,B 都是对称矩阵，所以两者的差 $A-B$ 也是对称矩阵，根据(1)可知 $A-B=O$，从而得到 $A=B$.

7. 证明性质 7. 2. 2.

证 (1) A,B 合同，则存在一个可逆矩阵 C 满足 $C^TAC=B$，因为 C 可逆，所以 C^T 也是可逆的，因此秩(A)=秩(B).

(2) A 对称，则 $A^T=A$，所以 $B^T=(C^TAC)^T=C^TA^TC=C^TAC=B$，由此可得 B 是对称矩阵.

习题 7.3

1. 求出习题 7.1 第 1 题中的二次型的秩和正惯性指数.

解 (1) 标准形为 $y_1^2+y_2^2+y_3^2$, 所以秩为 3, 正惯性指数为 3.

(2) 标准形为 $2y_1^2+\frac{1}{2}y_2^2-2y_3^2$, 所以秩为 3, 正惯性指数为 2.

(3) 标准形为 $2y_1^2-y_2^2+4y_3^2$, 所以秩为 3, 正惯性指数为 2

(4) 标准形为 $z_1^2-z_2^2-z_3^2$, 所以秩为 3, 正惯性指数为 1.

2. 设 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+8x_1x_2-12x_1x_3+2x_2^2-12x_2x_3-15x_3^2$

(1) 用配方法将该二次型化为标准形，求出其秩和正惯性指数.
(2) 用正交线性替换将该二次型化为标准形，求出其秩的正惯性指数.
(3) 比较两种方法所得标准形是否相同?
(4) 若要求该二次型的秩和正惯性指数用哪种方法简便.

解 (1) $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+8x_1x_2-12x_1x_3+2x_2^2-12x_2x_3-15x_3^2$

$$=2(x_1+2x_2-3x_3)^2-6(x_2-x_3)^2-27x_3^2,$$

所以标准型为 $2y_1^2-6y_2^2-27y_3^2$, 秩为 3, 正惯性指数为 1.

(2) $f(x_1,x_2,x_3)=\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 4 & -6\\ 4 & 2 & -6\\ -6 & -6 & -15\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$,

$\left|\lambda E-\begin{bmatrix}2 & 4 & -6\\ 4 & 2 & -6\\ -6 & -6 & -15\end{bmatrix}\right|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -4 & 6\\ -4 & \lambda-2 & 6\\ 6 & 6 & \lambda+15\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda+18)(\lambda-9)$, 求得特征值为

-2,-18,9. 所以标准型为 $-2y_1^2-18y_2^2+9y_3^2$, 秩为 3, 正惯性指数为 1.

(3)不相同.
(4)配方法.

3. 任何一个 n 阶对称的可逆实矩阵必定与 n 阶单位矩阵__________, 且说明理由.
(A) 合同. (B) 相似. (C) 等价. (D) 以上都不对.

解 一个 n 阶可逆矩阵一定能通过初等变化变为一个单位矩阵, 也就是说它与单位矩阵等价,

所以选项(C)成立. 至于(A),(B)只要令 $A=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 2\end{bmatrix}$ 即可得到 A 是一个 n 阶对称的可逆实

矩阵但是它与 E 不相似，与 E 不合同．综上所述应选填 C．

4. 设 A, B 均为 n 阶实对称矩阵．则 A, B 合同的充要条件是(　)，且说明理由．
(A) A, B 均为可逆矩阵.
(B) A, B 有相同的秩.
(C) A, B 有相同的正惯性指数，相同的负惯性指数.
(D) A, B 有相同的特征多项式.

解　根据课本定理 7.3.3 可知 A, B 合同的充要条件是 A, B 有相同的秩和相同的正惯性指数．而因为负惯性指数=秩-正惯性指数，所以这也等价于 A, B 有相同的正惯性指数，相同的负惯性指数．所以选项(C)是正确的．对于选项(A)和(B)只要令 $A=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & -1\end{bmatrix}$ 即可知是错误的．对于(D)只要令 $A=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 3\end{bmatrix}$ 可知 A, B 有相同的秩和相同的正惯性指数，所以合同，但是 A, B 的特征多项式不同．所以选项(D)不是充要条件．

综上所述应选填 D．

5. 设
$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix},$$
则下列矩阵中与 A 合同的是(　)，且说明理由．

(A) $\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix}$.　(B) $\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & -1\end{bmatrix}$.　(C) $\begin{bmatrix}1 & & \\ & -1 & \\ & & -1\end{bmatrix}$.　(D) $\begin{bmatrix}-1 & & \\ & -1 & \\ & & -1\end{bmatrix}$.

解　$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & 0\\ -2 & \lambda-2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda^2-3\lambda-2)$，所以它的特征值为 $-1, -\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{2}$，所以 A 的秩为 3，正惯性指数为 1，上述选项中只有(C)中矩阵的秩为 3，正惯性指数为 1，所以与 A 合同的是(C)中矩阵．故应选填 C．

6*. 如果把 n 阶实对称矩阵按合同分类，即两个 n 阶实对称矩阵属于同一类当且仅当它们在实数域上合同，问共有几类?每一类中最简单的矩阵是什么?

解　因为两个矩阵合同的充要条件是有相同的秩和相同的正惯性指数，按秩从 0, 1, 2, 到 n 有 n+1 大类，秩为 0 时正惯性指数只有一种可能就是 0；秩为 1 时正惯性指数有 0, 1 两种可

能，秩为 2 时正惯性指数有 0, 1, 2 三种可能;⋯⋯；秩为 n 时正惯性指数有 0, 1, 2, ⋯⋯, n 共 n+1 种可能．所以一共有 1+2+⋯⋯+ n+1= $\dfrac{(n+2)(n+1)}{2}$ 种可能，所以一共有 $\dfrac{(n+2)(n+1)}{2}$ 多个合同类．秩为 i，正惯性指数为 j $(j\le i)$ 的合同类中最简单的矩阵是一个对角矩阵它主对角线上前 j 个元数为 1, 中间 $i-j$ 个元素为−1, 其他为 0.

7*. 设 A, B, C, D 均为 n 阶实对称矩阵，在实数域上 A 与 B 合同, C 与 D 合同．问下述结论是否正确，为什么?

(1) $A+C$ 与 $B+D$ 合同;

(2) $\begin{bmatrix} A & O \\ O & C \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} B & O \\ O & D \end{bmatrix}$ 合同.

解 (1) 不正确,

令 $A=\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -3 \end{bmatrix}$，显然 A 与 B 合同, C 与 D 合同, 但是 $A+C=O$，$B+D=\begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & -1 \end{bmatrix}$，两者秩不同所以不合同．所以(1)不正确.

(2) 正确，A 与 B 合同，C 与 D 合同，所以存在两个可逆矩阵 F,G 满足 $F^TAF=B, G^TCG=D$．令 $K=\begin{bmatrix} F & \\ & G \end{bmatrix}$，因为 F,G 可逆，所以 K 也可逆．又有

$$K^T\begin{bmatrix} A & O \\ O & C \end{bmatrix}K=\begin{bmatrix} F^T & \\ & G^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & O \\ O & C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F & \\ & G \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} F^TAF & \\ & G^TCG \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} B & \\ & D \end{bmatrix}$$，所以 $\begin{bmatrix} A & O \\ O & C \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} B & O \\ O & D \end{bmatrix}$ 合同．因此(2)是正确的.

8. 设

$$A=\begin{bmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} a_3 & & \\ & a_2 & \\ & & a_1 \end{bmatrix},$$

则取 C=____________，就有 $C^TAC=B$．从而 A 与 B 合同.

解 显然有 $A\xrightarrow{R_{13}}\xrightarrow{C_{13}}B$，所以 $\begin{bmatrix} & & 1\\ & 1 & \\ 1 & & \end{bmatrix}A\begin{bmatrix} & & 1\\ & 1 & \\ 1 & & \end{bmatrix}=B$，而

$\begin{bmatrix} & & 1\\ & 1 & \\ 1 & & \end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix} & & 1\\ & 1 & \\ 1 & & \end{bmatrix}$，所以只要令 $C=\begin{bmatrix} & & 1\\ & 1 & \\ 1 & & \end{bmatrix}$ 就有 $C^TAC=B$.

综上知应填 $\begin{bmatrix} & & 1\\ & 1 & \\ 1 & & \end{bmatrix}$.

9. 证明：矩阵 $diag\left[\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_n\right]$ 与 $diag\left[\lambda_{i_1},\ \lambda_{i_2},\ \cdots,\ \lambda_{i_n}\right]$ 合同，其中 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列.

解 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，所以 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 可以通过若干次互换变成 $1,2,\cdots,n$. 而每次互换就相当于交换 $\lambda_{i_s},\lambda_{i_t}$ 的位置，由第 8 个习题可知这就相当于同时左乘右乘同一个互换得到的初等矩阵 $E(i_s,i_t)$. 由此可知

$E(i_{s_m},i_{t_m})\cdots E(i_{s_2},i_{t_2})E(i_{s_1},i_{t_1})diag\left[\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_n\right]E(i_{s_1},i_{t_1})E(i_{s_2},i_{t_2})\cdots E(i_{s_m},i_{t_m})$

$=diag\left[\lambda_{i_1},\ \lambda_{i_2},\ \cdots,\ \lambda_{i_n}\right]$.

设 $C=E(i_{s_1},i_{t_1})E(i_{s_2},i_{t_2})\cdots E(i_{s_m},i_{t_m})$,

则 $C^T=E(i_{s_m},i_{t_m})^T\cdots E(i_{s_2},i_{t_2})^TE(i_{s_1},i_{t_1})^T=E(i_{s_m},i_{t_m})\cdots E(i_{s_2},i_{t_2})E(i_{s_1},i_{t_1})$

所以得到 $C^Tdiag\left[\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_n\right]C=diag\left[\lambda_{i_1},\ \lambda_{i_2},\ \cdots,\ \lambda_{i_n}\right]$，因此矩阵 $diag\left[\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_n\right]$ 与 $diag\left[\lambda_{i_1},\ \lambda_{i_2},\ \cdots,\ \lambda_{i_n}\right]$ 合同.

习题 7.4

1. 下列矩阵中，正定矩阵是(　)，且说明理由.

(A) $\begin{bmatrix}1&2&1\\2&5&3\\1&3&0\end{bmatrix}$. (B) $\begin{bmatrix}1&2&1\\0&5&3\\0&0&3\end{bmatrix}$. (C) $\begin{bmatrix}1&2&3\\2&5&7\\3&7&10\end{bmatrix}$. (D) $\begin{bmatrix}1&2&-1\\2&5&-2\\-1&-2&6\end{bmatrix}$.

解 (A) $\begin{vmatrix}1&2&1\\2&5&3\\1&3&0\end{vmatrix}=-2<0$，所以(A)不是正定的.

(B) 不是对称矩阵所以不是正定的.

(C) $\begin{vmatrix}1&2&3\\2&5&7\\3&7&10\end{vmatrix}=0$，所以(C)不是正定的.

(D)的顺序主子式 $|1|>0, \begin{vmatrix}1&2\\2&5\end{vmatrix}=1>0, \begin{vmatrix}1&2&-1\\2&5&-2\\-1&-2&6\end{vmatrix}=5>0$，所以是正定的.

1. 若矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&m&n+2\\0&m-1&m\end{bmatrix}$$

为正定矩阵，则 m 必定满足(　)，且说明理由.

(A) $m>\frac{1}{2}$.　　(B) $m<\frac{2}{3}$.

(C) $m>-2$.　　(D) 与 n 有关，不能确定.

解 $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&m&n+2\\0&m-1&m\end{bmatrix}$ 正定，首先要求 A 是对称矩阵，所以有 $n+2=m-1$. 还必须要求三个顺序主子式都大于零．所以要求 $|1|=1>0, \begin{vmatrix}1&0\\0&m\end{vmatrix}=m>0, \begin{vmatrix}1&0&0\\0&m&m-1\\0&m-1&m\end{vmatrix}=2m-1>0$. 因此要求 $m>\frac{1}{2}$，所以应选填 A.

3. 使实二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=[x_1,\quad x_2,\quad x_3]\begin{bmatrix} k & k & 1 \\ k & k & 0 \\ 1 & 0 & k^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

正定的 k 存在吗?为什么?

解 要求正定即要求所有顺序主子式都大于零，但是该二次型的矩阵的二阶顺序主子式为 $\begin{vmatrix} k & k \\ k & k \end{vmatrix}=0$，所以不存在使其正定的 k.

4. 用定理 7. 4. 1(3)来判断下列二次型是否正定：

(1) $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+4x_1x_2-4x_1x_3+5x_2^2-8x_2x_3+5x_3^2$；

(2) $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-4x_1x_2+x_2^2-4x_2x_3$；

(3) $f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+3x_2^2+2x_2x_3+3x_3^2$.

解 (1) $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+4x_1x_2-4x_1x_3+5x_2^2-8x_2x_3+5x_3^2$ 的矩阵为 $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$.

求解特征多项式 $\left|\lambda E-\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}\right|$，可以得到特征值为 1,1,10，都大于零，所以正定.

(2) $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-4x_1x_2+x_2^2-4x_2x_3$ 的矩阵为 $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.求解特征多项式 $\left|\lambda E-\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}\right|$，可以得到特征值为-2,1,4，不全大于零，所以不是正定的.

(3) $f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+3x_2^2+2x_2x_3+3x_3^2$ 的矩阵为 $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$，求解特征多项式 $\left|\lambda E-\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}\right|$，可以得到特征值为 2,2,5，都大于零，所以正定.

5. 判断下列二次型是否正定：

(1) $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+4x_1x_2-4x_1x_3+5x_2^2-2x_2x_3+5x_3^2$；

(2) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_3+x_2^2+2x_2x_3+2x_3^2$

(3) $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\sum_{i=1}^{n-1}x_ix_{i+1}$.

解 (1) $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+4x_1x_2-4x_1x_3+5x_2^2-2x_2x_3+5x_3^2$ 的矩阵为$\begin{bmatrix}5&2&-2\\2&5&-1\\-2&-1&5\end{bmatrix}$,

顺序主子式为$|5|=5>0,\begin{vmatrix}5&2\\2&5\end{vmatrix}=21>0,\begin{vmatrix}5&2&-2\\2&5&-1\\-2&-1&5\end{vmatrix}=88>0$, 所以此二次型是正定的.

(2) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_3+x_2^2+2x_2x_3+2x_3^2$ 的矩阵为$\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&2\end{bmatrix}$, 顺序主子式为

$|1|=1>0,\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=1>0,\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&2\end{vmatrix}=0$, 所以此二次型不是正定的.

(3) $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\sum_{i=1}^{n-1}x_ix_{i+1}$ 的矩阵为$\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&0&\cdots&0\\\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}&\cdots&0\\0&\frac{1}{2}&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\end{bmatrix}$, D_i 表示第 i 个

顺序主子式, 利用行列式按行展开公式对最后一行展开可以得到递推关系式

$D_i=D_{i-1}-\frac{1}{4}D_{i-2}$, 因为 $D_1=|1|=1,D_2=\begin{vmatrix}1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&1\end{vmatrix}=\frac{3}{4}$, 利用递推关系用数学归纳法可以证

明 $D_i=\frac{i+1}{2^i}>0$, 由此可知所有顺序主子式都大于零, 因此此二次型是正定的.

6. t 取何值时下列二次型是正定的:

(1) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2tx_1x_2-2x_1x_3+x_2^2+4x_2x_3+5x_3^2$;

(2) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=t(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+x_4^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$.

解 (1) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2tx_1x_2-2x_1x_3+x_2^2+4x_2x_3+5x_3^2$ 的矩阵为 $\begin{bmatrix}1 & t & -1\\ t & 1 & 2\\ -1 & 2 & 5\end{bmatrix}$,

要求二次型正定即要求所有顺序主子式

$|1|=1>0,\begin{vmatrix}1 & t\\ t & 1\end{vmatrix}=1-t^2>0,\begin{vmatrix}1 & t & -1\\ t & 1 & 2\\ -1 & 2 & 5\end{vmatrix}=-t(5t+4)>0$，由此可得 $-\frac{4}{5}<t<0$ 时此二次型正定.

(2) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=t(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+x_4^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$ 的矩阵为 $\begin{bmatrix}t & 1 & 1 & 0\\ 1 & t & -1 & 0\\ 1 & -1 & t & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，要求二次型正定即要求所有顺序主子式

$$|t|=t>0,\begin{vmatrix}t & 1\\ 1 & t\end{vmatrix}=t^2-1>0,\begin{vmatrix}t & 1 & 1\\ 1 & t & -1\\ 1 & -1 & t\end{vmatrix}=(t+1)^2(t-2)>0,\begin{vmatrix}t & 1 & 1 & 0\\ 1 & t & -1 & 0\\ 1 & -1 & t & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=(t+1)^2(t-2)>0.$$

由此可得 $t>2$ 时此二次型正定.

7. 已知 $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ 是正定矩阵，求证：$a_{ii}>0$，$i=1,2,\cdots,n$.

证 $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ 是正定矩阵，所以 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$ 是正定二次型，所以对于任意非零向量 X 都有 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX>0$．现令 $X=X_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ (X_i 满足 $x_i=1,x_j=0,j\neq i$), 则有 $X^TAX=a_{ii}>0\quad(i=1,2,\cdots,n)$.

8*. 已知 A 为 $m\times n$ 实矩阵，求证：

A^TA 为正定矩阵 $\Leftrightarrow$ 秩(A)=n.

证 $\Rightarrow$ 因为 A^TA 为正定矩阵，所以对任意的 n 维非零向量 X 都有 $X^T(A^TA)X>0$，即有 $(AX)^T(AX)>0$，所以不存在非零向量使得 $AX=O$，因此可得秩(A)=n..

$\Leftarrow$ 首先显然 A^TA 是一个对称矩阵，现取任意一个 n 维非零向量 ξ，不妨设 $A\xi=\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_m\end{bmatrix}^T$

则 $\xi^T(A^TA)\xi=(A\xi)^TA\xi=\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_m\end{bmatrix}=\sum_{i=1}^m a_i^2\ge 0$，并且当且仅当 $A\xi=\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_m\end{bmatrix}^T=O$ 时取到 0. 又因为秩(*A*)=*n* 所以 $AX=O$ 只有零解，而 ξ 是非零向量，所以 $A\xi=\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_m\end{bmatrix}^T\ne O$，因此 $\xi^T(A^TA)\xi>0$，由此可得 A^TA 为正定矩阵.

9*. 设 *A* 为 *n* 阶正定矩阵, *P* 为 $n\times m$ 实矩阵，求证：

$$P^TAP \text{ 为正定矩阵} \Leftrightarrow \text{秩}(P)=m.$$

证 $\Rightarrow$ 假设秩 (*P*)<*m*, 则 $PX=O$ 有非零解 ξ，由此可知 $\xi^T(P^TAP)\xi=(P\xi)^TA(P\xi)=O^TAO=0$，这与 P^TAP 为正定矩阵矛盾. 所以假设不成立，因此秩(*P*)=*m*.

$\Leftarrow$ 首先因为 $(P^TAP)^T=P^TAP$，所以 P^TAP 是对称矩阵. 现取任意一个 *n* 维非零向量 ξ，因为秩(*P*)=*m*, 所以 $PX=O$ 只有零解，由此可知 $P\xi\ne O$. 又因为 *A* 为 *n* 阶正定矩阵，所以 $(P\xi)^TA(P\xi)>0$，即有 $\xi^T(P^TAP)\xi=(P\xi)^TA(P\xi)>0$，所以 P^TAP 为正定矩阵.

10. 证明性质 7. 4. 1.

证 *A* 正定，所以性质中的矩阵显然都是对称矩阵.

(1) *A* 正定，则 *A* 的所有特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 都大于零，因为 kA 的所有特征值为 $k\lambda_1,k\lambda_2,\cdots,k\lambda_n$，$k$ 为正数，所以这些特征值也都大于零，因此 kA 正定.

(2) 因为 A^{-1} 的所有特征值为 $\lambda_1^{-1},\lambda_2^{-1},\cdots,\lambda_n^{-1}$，所以这些特征值也都大于零，因此 A^{-1} 正定.

(3) 因为 $A^*=|A|A^{-1}$，所以 A^* 的所有特征值为 $|A|\lambda_1^{-1},|A|\lambda_2^{-1},\cdots,|A|\lambda_n^{-1}$，由于 *A* 正定，所以 $|A|>0$，所以这些特征值也都大于零，由此可得 A^* 正定.

(4) 因为 A^k 的所有特征值为 $\lambda_1^k,\lambda_2^k,\cdots,\lambda_n^k$，所以这些特征值也都大于零，因此 A^k 正定.

(5) 因为 *C* 是可逆矩阵，即有秩(*C*)=*n*，根据本节第 9 个习题可知 C^TAC 是正定矩阵.

11. A, B 为正定矩阵，证明 $\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$ 为正定矩阵.

证 首先因为 $\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A^T & O \\ O & B^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$，所以 $\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$ 是对称矩阵. 又因为 A, B 都正定，所以他们的特征值都大于零. $\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$ 的特征多项式为 $\left|\lambda E_{2n} - \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}\right| = \left|\begin{bmatrix} \lambda E & O \\ O & \lambda E \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}\right| = \begin{vmatrix} \lambda E - A & \\ & \lambda E - B \end{vmatrix} = |\lambda E - A||\lambda E - B|$，所以 $\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$ 的所有特征值为 A, B 的所有特征值，因此都大于零，由此可知 $\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$ 是正定的.

习题 7.5

1. 写出二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+6x_2^2$ 的矩阵.

解 $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

2. 已知二次型 $x_1^2+4x_1x_2+x_2^2+6x_2x_3+ax_3^2$ 的秩为 2，则 $a=$________，为什么?

解 该二次型的矩阵为 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & a \end{bmatrix}$，由题意知, 秩($A$)=2, 将 A 用初等变换化为阶梯形 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & a \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & a+3 \end{bmatrix}$，因秩($A$)=2, 所以 $a=-3$.

3. 设

$$A=\begin{bmatrix} 2-a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a+3 \end{bmatrix}$$

是正定矩阵，则 a 的取值是________，且说明理由.

解 $A=\begin{bmatrix} 2-a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a+3 \end{bmatrix}$ 正定，所以它的顺序主子式都大于零，即有 $|2-a|=2-a>0, \begin{vmatrix} 2-a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1-a>0, \begin{vmatrix} 2-a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a+3 \end{vmatrix}=(1-a)(3+a)>0$. 所以 a 的取值为 $-3<a<1$.

4. 设 $f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX$ 经正交替换化为标准形 $3y_1^2+5y_2^2$，求 A 的特征值及 $|A|$.

解 $f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX$ 经正交替换化为标准形 $3y_1^2+5y_2^2$，所以 A 的特征值为 3, 5, 0. 因此 $|A|=3\times5\times0=0$.

5. 若实对称矩阵 A 与矩阵

$$B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&2\\0&2&0\end{bmatrix}$$

合同，求二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX$ 的规范形.

解 因为 A,B 合同，所以 A,B 有相同的规范形. 因为 $|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&0\\0&\lambda&-2\\0&-2&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+2)$，所以 B 的所有特征值为-3, 1, 2，因此 B 的标准形为 $-3y_1^2+y_2^2+2y_3^2$，规范形为：$z_1^2+z_2^2-z_3^2$. 由此可知 A 的规范形也为 $z_1^2+z_2^2-z_3^2$.

6. 设

$$A=\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}&&&1\\&&1&\\&1&&\\1&&&\end{bmatrix}.$$

(1) A 与 B 是否等价?为什么?

(2) A 与 B 是否相似?为什么?

(3) A 与 B 是否在实数域上合同?为什么?

解 (1) 秩(A)=秩(B)，所以 A 与 B 等价.

(2) tr$A$=4，但是 tr$B$=0，两者不相等，所以 A 与 B 不相似.

(3) $|\lambda E-A|=(\lambda-1)^4$，所以 A 的所有的特征值为 1, 1, 1, 1，秩为 4，正惯性指数为 4. 但是 $|\lambda E-B|=(\lambda-1)^2(\lambda+1)^2$，所以 B 的所有特征值为-1, -1, 1, 1，秩为 4，正惯性指数为 2. 两者的正惯性指数不想等，所以不合同.

7*. 设 A 是 n 阶正定矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 均为 n 元非零的实的列向量，且满足 $\alpha_i^TAa_j=0(i\neq j;i,j=1,2,\cdots,n)$. 证明：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关.

证 设存在一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 满足 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=O$，取任意一个 α_i，在等式两边同左乘 α_i^TA 得到 $\alpha_i^TAk_1\alpha_1+\cdots+\alpha_i^TAk_i\alpha_i+\cdots+\alpha_i^TAk_n\alpha_n=0$ (*)，根据题意 $\alpha_i^TAa_j=0(i\neq j;i,j=1,2,\cdots,n)$，所以 (*) 式可化为

$k_1\alpha_i^T A\alpha_1+\cdots+k_i\alpha_i^T A\alpha_i+\cdots+k_n\alpha_i^T A\alpha_n=k_i\alpha_i^T A\alpha_i=0$，又因为 A 是 n 阶正定矩阵，所以对于非零向量 α_i 必有 $\alpha_i^T A\alpha_i\neq 0$，由此可得 $k_i=0$（$i=1,2,\cdots,n$），所以 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关.

8[*]. 已知

$$A=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&t\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\3&3&3\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&3&5\\0&0&5\end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&1&0\end{bmatrix}.$$

问：

(1) t 取值在什么范围时，A 为正定矩阵?为什么?

(2) t 取何值时，A 与 B 等价?为什么?

(3) t 取何值时，A 与 C 相似?为什么?

(4) t 取何值时，A 与 D 合同?为什么?

解 (1) $A=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&t\end{bmatrix}$ 正定 $\Leftrightarrow A$ 的所有顺序主子式都大于零，即有

$$|2|=2>0,\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}=3>0,\begin{vmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&t\end{vmatrix}=3t>0.$$ 所以要求 $t>0$ 即可.

(2) A 与 B 等价充要条件是秩（A）= 秩（B），因为

$$B=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\3&3&3\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{初等变换}}\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-3&-6\\0&0&0\end{bmatrix},$$ 所以秩（B）=2，所以要求秩（A）=2. 而

$$A=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&t\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{初等变换}}\begin{bmatrix}2&1&0\\0&\frac{3}{2}&0\\0&0&t\end{bmatrix},$$ 只有当 $t=0$ 时秩（A）=2，所以当 $t=0$ 时 A 与 B 等价.

(3) A 与 C 相似，则必有 tr A=tr$C$，所以有 $t+4=9$，从而得到 $t=5$. 所以 $t\neq 5$ 时 A 与 C 不相似，当 $t=5$ 时，A 与 C 都能与对角矩阵相似，且 $|\lambda E-A|=|\lambda E-C|=(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-5)$，所以 A 与 C 相似(参见习题 6. 4 的第 4 题).

(4) A 与 D 合同则要求秩相等并且有相同的正惯性指数. $D=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&1&0\end{bmatrix}$, 所以

秩 (D)=3, 又由于 $|\lambda E-D|=(\lambda-2)(\lambda^2-2\lambda-1)$, 所以 D 的正惯性指数为 2. 而

$A=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&t\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}2&1&0\\0&\frac{3}{2}&0\\0&0&t\end{bmatrix}$ 且 $|\lambda E-A|=(\lambda-t)(\lambda-1)(\lambda-3)$, 所以要秩为 3 则

$t\neq 0$, 要正惯性指数为 2, 则要求 $t\leq 0$, 因此当 $t<0$ 时 A 与 D 合同.