杭州电子科技大学学生考试卷（A）卷

考试课程	概率论与数理统计	考试日期	2017 年 1 月 5 日	成 绩	
课程号	A0714040	教师号	/	任课教师姓名	
考生姓名	张言	学号（8 位）	00	年级	大N
专业	无				

题目	一	二	三	四	五	六	七	八	九
得分									

一、单项选择题（每题 3 分，共 15 分）

1、设随机事件 A、B 互斥，则下列等式正确的是（ D ）

(A) $\bar{A}\cap\bar{B}=\phi$　　(B) $A=\bar{B}$

(C) $\bar{A}\cup\bar{B}=\phi$　　(D) $\bar{A}\cup\bar{B}=S$

2、若随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} x, & 0<x<1 \\ k-x, & 1\le x<2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$，则 k 的取值为（ C ）

(A) 1　　(B) -1　　(C) 2　　(D) -2

3、设任意随机变量 X, Y，下列等式不正确的是（ B ）

(A) $D(X)=Cov(X,X)$　　(B) $E(XY)=E(X)E(Y)$

(C) $E(X-Y)=E(X)-E(Y)$　　(D) $Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$

4、设随机变量 X, Y 相互独立，其分布函数分别为 $F_1(x)$ 与 $F_2(y)$，则随机变量 $Z=\min(X,Y)$ 的分布函数 $F_Z(z)$ 等于（ D ）

(A) $\min\{F_1(z), F_2(z)\}$　　(B) $\frac{1}{2}[F_1(z)+F_2(z)]$

(C) $F_1(z)F_2(z)$　　(D) $1-[1-F_1(z)][1-F_2(z)]$

5、设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ,σ^2 未知，X_1，X_2，X_3，…，X_n 为来自该总体的样本，则下列统计量是 σ^2 的无偏估计量是（ A ）

(A) $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 = S^2$　　(B) $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X}^2)$

(C) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$　　(D) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X}^2)$

二、填空题（每空 3 分，共 18 分）

$\frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}=\frac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)}=\frac{P(A\cup B)-P(B)}{1-P(B)}=\frac{2}{3}$

1、设事件 A、B，已知 $P(A\cup B)=0.8$，$P(B)=0.4$，则 $P(A|\bar{B})=$ $\underline{2/3}$

2、在一批产品中，有 7 件正品，3 件次品，不放回地抽取 3 件产品，则至少取到 1 件次品的概率= $\underline{\frac{17}{24}}$　　$1-\frac{C_7^3}{C_{10}^3}$

$C\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{4})^k=1$

3、设随机变量 X 的分布律为：$P\{X=k\}=C(\frac{1}{4})^k, (k=1,2,3,\ldots)$，则 $C=$ $\underline{3}$

4、设随机变量 $X\sim N(2,4)$，$Y\sim b(10,0.3)$，$Z\sim\chi^2(5)$，且 X、Y、Z 相互独立，则 $E(X-Y)=$ $\underline{-1}$，$D(X-Z+1)=$ $\underline{14}$

5、设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ,σ^2 未知，X_1，X_2，…，X_n 为一样本，$\bar{X}$，S^2 分别为样本均值和样本方差，则在显著水平为 α 下的检验假设 $H_0:\mu=\mu_0$，$H_1:\mu\ne\mu_0$ 的拒绝域为 $\underline{|t|>t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}$ （或 $\left|\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\right|>t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$）

三、（本题 8 分）一文具店有三种水笔出售，由于售出哪一种水笔是随机的，因而售出一支水笔的价格是一个随机变量 X，它取 1 元、1.2 元、1.5 元各个值的概率分别为 0.3、0.2、0.5。求：（1）求 X 的分布函数 $F(x)$；（2）利用中心极限定理计算：若售出 300 支水笔，售出价格为 1.2 元的水笔多于 60 支的概率

解

X	1	1.2	1.5
P	0.3	0.2	0.5

(1) $F(x)=\begin{cases} 0, & x<1 \\ 0.3, & 1\le x<1.2 \\ 0.5, & 1.2\le x<1.5 \\ 1 & x\ge 1.5 \end{cases}$

(2) 设 Y 为售出300支水笔中售价为1.2元的水笔支数

则 $Y\sim b(300, 0.2)$，$E(Y)=300\times0.2=60$

$D(Y)=300\times0.2\times0.8=48$

由中心极限定理，

$Y \overset{\text{近似}}{\sim} N(60, 48)$

故 $P\{Y\ge60\}\approx1-\Phi(\frac{60-60}{\sqrt{48}})=1-\Phi(0)=\frac{1}{2}$

四、（本题 18 分） 设随机变量 (X,Y) 的概率分布律为：

Y \ X	-2	-1	1	2
1	0	1/4	1/4	0
4	1/4	0	0	1/4

求：(1) 关于 XY 的分布律；

(2) $P\{X \le 0 \mid Y=1\}$；

(3) $E(X)$，$E(Y)$ 和 $E(XY)$；

(4) 验证 X 和 Y 是不相关的，但 X 和 Y 是不相互独立的。

解：(1) XY 的可能取值为 $-8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8$，故有

XY	-8	-4	-2	-1	1	2	4	8
P	$\frac14$	0	0	$\frac14$	$\frac14$	0	0	$\frac14$

即

XY	-8	-1	1	8
P	$\frac14$	$\frac14$	$\frac14$	$\frac14$

(2) $$P\{X\le 0 \mid Y=1\} = \frac{P\{X\le 0, Y=1\}}{P\{Y=1\}} = \frac{P\{X=-2,Y=1\}+P\{X=-1,Y=1\}}{P\{Y=1\}} = \frac{\frac14}{\frac14+\frac14} = \frac12$$

(3) 易知

X	-2	-1	1	2
P	$\frac14$	$\frac14$	$\frac14$	$\frac14$

Y	1	4
P	$\frac12$	$\frac12$

故有 $E(X) = -2\times\frac14 + (-1)\times\frac14 + 1\times\frac14 + 2\times\frac14 = 0$

$E(Y) = 1\times\frac12 + 4\times\frac12 = \frac52$

$E(XY) = -8\times\frac14 + (-1)\times\frac14 + 1\times\frac14 + 8\times\frac14 = 0$

(4) $\because E(XY) = 0 = E(X)\cdot E(Y)$ $\therefore$ X与Y不相关

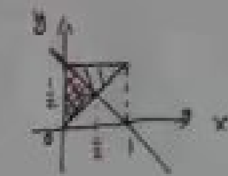
又$\because$ $P\{X=-2, Y=1\} = 0 \ne P\{X=-2\}\cdot P\{Y=1\} = \frac14\times\frac12$

$\therefore$ X与Y不相互独立

五、（本题 15 分）设二维随机变量 (X,Y) 的概率函数为：

$$f(x,y) = \begin{cases} 8xy, & 0<x<1, x<y<1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

(1) 求关于 X 和 Y 的边缘概率密度 $f_X(x)$，$f_Y(y)$；



(2) 求概率 $P\{X+Y\le 1\}$

(3) 求 $D(X)$ 的值。

解：(1) $$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \begin{cases} \int_x^1 8xy\,dy, & 0<x<1 \\ 0 & 其他 \end{cases} = \begin{cases} 4x(1-x^2), & 0<x<1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = \begin{cases} \int_0^y 8xy\,dx, & 0<y<1 \\ 0, & 其他 \end{cases} = \begin{cases} 4y^3, & 0<y<1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

(2) $$P\{X+Y\le 1\} = \iint_{x+y\le 1} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^{\frac12} dx \int_x^{1-x} 8xy\,dy = \int_0^{\frac12} 4x[(1-x)^2 - x^2]\,dx$$

$$= \int_0^{\frac12} (4x - 8x^2)\,dx = 2x^2\Big|_0^{\frac12} - \frac83 x^3\Big|_0^{\frac12} = \frac12 - \frac83\cdot\left(\frac12\right)^3 = \frac16$$

(3) $$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx = \int_0^1 4x^2(1-x^2)\,dx = \frac43 - \frac45 = \frac{8}{15}$$

$\because$ $$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\,dx = \int_0^1 4x^3(1-x^2)\,dx = 1 - \frac46 = \frac13$$

$\therefore$ $$D(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac13 - \left(\frac{8}{15}\right)^2 = \frac{11}{225}$$

六、（本题 8 分） 设总体 X 具有分布律：

X	1	2	3
p_i	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

其中 $\theta(0<\theta<1)$ 为未知参数，已知取得了样本值 $x_1=1$，$x_2=2$，$x_3=1$，试求 θ 的矩估计值和最大似然估计值。

解：矩估计法，

$E(X)=1\times\theta^2+2\times2\theta(1-\theta)+3(1-\theta)^2$

$=3-2\theta$

由 $\bar{X}=E(X)$ 得矩估计量为

$\hat{\theta}=\frac{3-\bar{X}}{2}$

故矩估计值为

$\hat{\theta}=\frac{3-\bar{x}}{2}=\frac{3-\frac{1}{3}(1+2+1)}{2}=\frac{5}{6}$

最大似然估计法：

$L(\theta)=P\{X_1=1, X_2=2, X_3=1\}$

$=P\{X_1=1\}P\{X_2=2\}P\{X_3=1\}$

$=\theta^2\cdot2\theta(1-\theta)\cdot\theta^2$

$=2\theta^5(1-\theta)$

由 $\frac{d\,L(\theta)}{d\theta}=0$ 得 θ 的最大似然估计值为

$\hat{\theta}=\frac{5}{6}$

七、（本题 8 分） 假定初生婴儿（男孩）的体重服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，随机抽样 16 名新生婴儿（男孩），测得其体重（单位 g）的样本均值观察值 $\bar{x}=3057$，样本标准差观察值 $s=376$，求 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间（已知：$t_{0.05}(15)=1.7531$，$t_{0.05}(16)=1.7459$，$t_{0.025}(15)=2.1315$，$t_{0.025}(16)=2.1199$）

解 $n=16$，$1-\alpha=0.95$，σ^2 未知

所以 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$\left(\bar{X}\pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$

即 $\left(3057\pm t_{0.025}(15)\frac{376}{\sqrt{16}}\right)=(3057\pm2.1315\times94)$

$=(2856.64,\ 3257.36)$

八、（本题 6 分） 某厂家有两台机器生产某金属部件，分别在两台机器所生产的部件中各取容量为 $n_1=60$，$n_2=40$ 的样本，测得部件重量（单位：g）的样本方差分别为 $s_1^2=15.46$，$s_2^2=9.66$，设两样本相互独立，两总体分别服从 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$、$N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 分布，$\mu_1,\sigma_1^2,\mu_2,\sigma_2^2$ 均未知。试在显著水平 $\alpha=0.05$ 下检验假设

$$H_0:\sigma_1^2\le\sigma_2^2,\quad H_1:\sigma_1^2>\sigma_2^2$$

（已知 $F_{0.05}(60,40)=1.74$，$F_{0.05}(59,39)=1.64$）

解 选取检验统计量 $F=\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$

拒绝域为 $F\geq F_{\alpha}(n_1-1,n_2-1)$

代入样本值，$\frac{15.46}{9.66}=1.60<F_{0.05}(59,39)=1.64$

故接受 H_0，认为第一台机器没有显著更大。

九、（本题 4 分） 对于给定的 $\alpha\in(0,1)$，n_1、n_2 为大于 0 的自然数，证明：

$$F_{1-\alpha}(n_1,n_2)=\frac{1}{F_{\alpha}(n_2,n_1)}$$

解：设 $X\sim\chi^2(n_1)$，$Y\sim\chi^2(n_2)$

则 $F=\frac{X/n_1}{Y/n_2}\sim F(n_1,n_2)$

$\frac{1}{F}=\frac{Y/n_2}{X/n_1}\sim F(n_2,n_1)$

由分位点 $F_{1-\alpha}(n_1,n_2)$ 定义

$P\{F\geq F_{1-\alpha}(n_1,n_2)\}=1-\alpha$

得 $P\{F\leq F_{1-\alpha}(n_1,n_2)\}=\alpha$

由于 $F\leq F_{1-\alpha}(n_1,n_2)\Leftrightarrow\frac{1}{F}\geq\frac{1}{F_{1-\alpha}(n_1,n_2)}$

故有

$P\{\frac{1}{F}\geq\frac{1}{F_{1-\alpha}(n_1,n_2)}\}=\alpha$

再由 $\frac{1}{F}$ 的分布及分位点 $F_{\alpha}(n_2,n_1)$ 的定义，得

$\frac{1}{F_{1-\alpha}(n_1,n_2)}=F_{\alpha}(n_2,n_1)$

即 $F_{1-\alpha}(n_1,n_2)=\frac{1}{F_{\alpha}(n_2,n_1)}$