第三章 LTI系统的时域分析

- 3.1 系统的定义与分类
- 3.2 动态电路系统的微分方程描述
- 3.3 LTI连续时间系统的经典法分析
- 3.4 直流电源激励下的一阶动态电路分析
- 3.5 LTI连续时间系统的零输入响应和零状态响应
- 3.6 冲激响应和阶跃响应
- 3.7 卷积积分

经典时域方法：微分方程解法不足之处

- 若微分方程右边激励项较复杂，则难以处理。
- 若激励信号发生变化，则须全部重新求解。
- 若初始条件发生变化，则须全部重新求解。
- 这种方法是一种纯数学方法，无法突出系统响应的物理概念。

Q：一般来说，在某一时刻，初始状态是确定的，所以零输入响应是明确的；那么有没有办法将所有可能的输入都表征成某几类信号的线性组合形式，从而利用线性时不变性来求解零状态响应呢?

系统响应求解方法

1. 经典时域分析方法: 求解微分方程

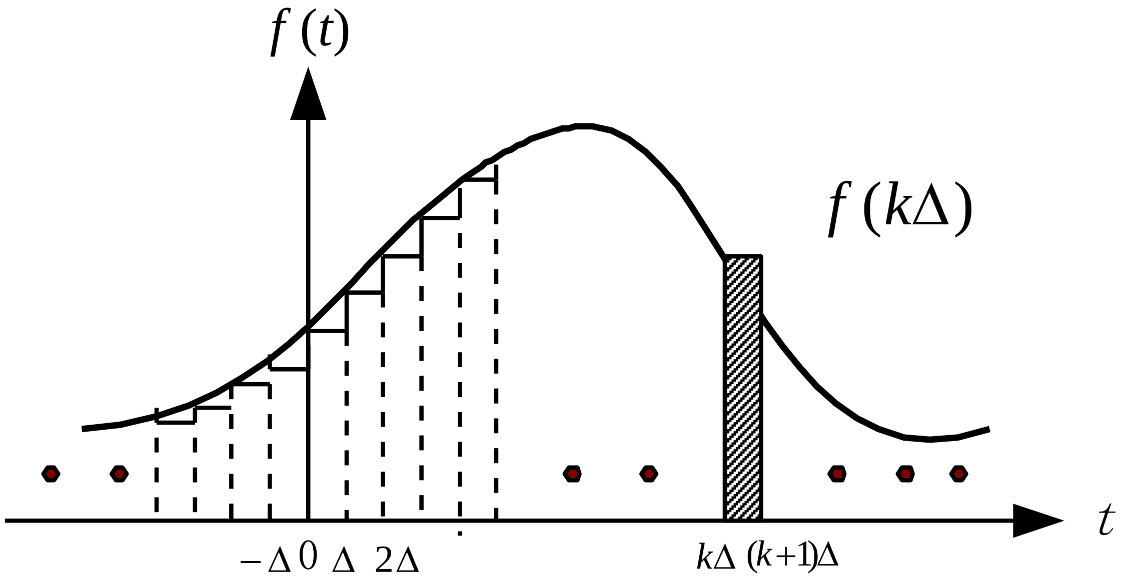
2.卷积法:

系统完全响应=零输入响应+零状态响应

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t) = y_{zi}(t) + f(t) * h(t)$$

- 求解齐次微分方程得到零输入响应
- 利用卷积积分可求出零状态响应

连续时间信号可分解为冲激函数的线性组合



连续信号表示为冲激信号的迭加

$$f(t) \approx \cdots + f(0)[\varepsilon(t) - \varepsilon(t-\Delta)] + f(\Delta)[\varepsilon(t-\Delta) - \varepsilon(t-2\Delta)] + \cdots$$

$$+ f(k\Delta)[\varepsilon(t-k\Delta) - \varepsilon(t-k\Delta-\Delta)] + \cdots$$

$$f(t)=\cdots+f(0)\frac{[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-\Delta)]}{\Delta}\Delta+f(\Delta)\frac{[\varepsilon(t-\Delta)-\varepsilon(t-2\Delta)]}{\Delta}\Delta+\cdots$$

$$+f(k\Delta)\frac{[\varepsilon(t-k\Delta)-\varepsilon(t-k\Delta-\Delta)]}{\Delta}\Delta+\cdots$$

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(k\Delta)\frac{[\varepsilon(t-k\Delta)-\varepsilon(t-k\Delta-\Delta)]}{\Delta}\Delta$$

当$\Delta\to 0$时，$k\Delta\to\tau$，$\Delta\to d\tau$，且 $\frac{[\varepsilon(t-k\Delta)-\varepsilon(t-k\Delta-\Delta)]}{\Delta}\to\delta(t-\tau)$

$$\boxed{f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau}$$

取样性

信号分解为$\delta(t)$的线性组合物理意义与实际应用

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

物理意义：

不同的信号都可以分解为冲激序列，
信号不同只是它们的系数不同。

实际应用：

当求解信号$f(t)$通过**LTI**系统产生的零状态响应时，
只需**求解冲激信号通过该系统产生的零状态响应**，
然后**利用线性时不变**系统的**特性**，进行叠加和延时即可求得信号$f(t)$产生的零状态响应。

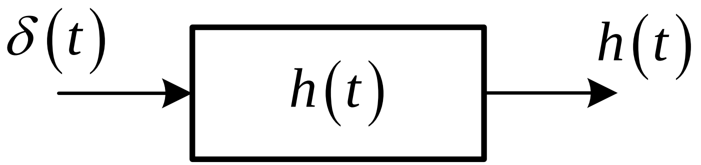
	序号	激励	LTI系统	零状态响应
	1	$\delta(t)$		$h(t)$
时不变	2	$\delta(t-\tau)$		$h(t-\tau)$
线性	3	$x(\tau)\delta(t-\tau)\Delta\tau$	$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y_{zs}(t)$	$x(\tau)h(t-\tau)\Delta\tau$
叠加性	4	$\sum x(\tau)\delta(t-\tau)\Delta\tau$		$\sum x(\tau)h(t-\tau)\Delta\tau$
	5	$\lim\limits_{\Delta\tau\to 0}\sum x(\tau)\delta(t-\tau)\Delta\tau$		$\lim\limits_{\Delta\tau\to 0}\sum x(\tau)h(t-\tau)\Delta\tau$
	6	$x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$		$y_{zs}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$

定义 $f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = f_1(t) * f_2(t)$ 为$f_1(t)$与$f_2(t)$的卷积积分

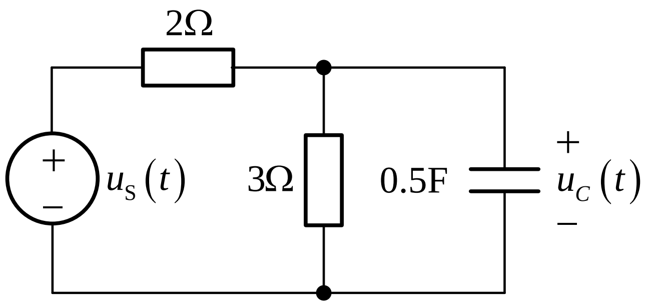
则 $y_{zs}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = x(t)*h(t)$

3.6 冲激响应和阶跃响应

从前面的分析我们可以看出：LTI系统在**单位冲激信号激励**下的**零状态响应**，对于系统的分析非常重要，我们将其称为LTI系统的单位冲激响应，简称冲激响应，用 $h(t)$ 表示



例3.6–2 计算如图3.6-2所示电路的冲激响应，其中 $u_S(t)$ 为输入，$u_C(t)$ 为输出。



解 该电路的微分方程为

$$2\times\left[\frac{u_C(t)}{3}+0.5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_C(t)\right]+u_C(t)=u_S(t)$$

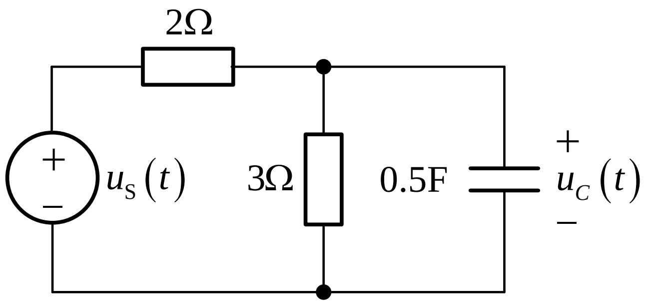
整理可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_C(t)+\frac{5}{3}u_C(t)=u_S(t)$$

冲激响应的方程为 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h(t)+\dfrac{5}{3}h(t)=\delta(t)\\ h(0_-)=0\end{cases}$

由冲激平衡法可得初始状态为 $h(0_+)=h(0_-)+1=0+1=1$

例3. 6−2 计算如图3.6-2所示电路的冲激响应，其中 $u_S(t)$ 为输入，$u_C(t)$为输出



在 $t>0$ 时，微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h(t)+\frac{5}{3}h(t)=0$$

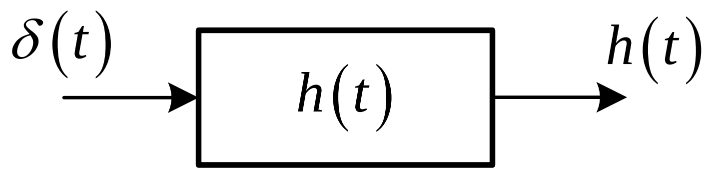
$$h(t)=A\mathrm{e}^{-\frac{5}{3}t}$$

$$h(0_+)=A=1$$

$$h(t)=\mathrm{e}^{-\frac{5}{3}t}\varepsilon(t)\mathrm{V}$$

3.6 冲激响应和阶跃响应

单位冲激响应 $h(t)$是指系统在**单位冲激信号**激励下的**零状态响应。**然而，单位冲激信号仅仅在数学意义上存在，在实际中并不存在。



因此，有时我们也会关注系统在**单位阶跃信号**激励下的**零状态响应**，即系统的单位阶跃响应，简称阶跃响应，用 $g(t)$ 表示 。根据LTI系统的微积分性质，可以得到

$$\begin{cases} \varepsilon(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau \\ \delta(t)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varepsilon(t) \end{cases} \xRightarrow{LTI\text{系统}} \begin{cases} g(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)\mathrm{d}\tau \\ h(t)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g(t) \end{cases}$$

3.6 冲激响应和阶跃响应

例3.6-1 LTI系统方程为 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t)+5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)+4y(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)+2x(t)$

$y(0_-)=2$ $y'(0_-)=1$，求该系统阶跃响应。

解 方法1：直接求解 $x(t)=\varepsilon(t)$ 时的零状态响应

方法2：利用冲激响应的积分计算

例3.6-1 LTI系统方程为 $\frac{d^2}{dt^2}y(t)+5\frac{d}{dt}y(t)+4y(t)=\frac{d}{dt}x(t)+2x(t)$

$y(0_-)=2 \quad y'(0_-)=1$ ，求该系统阶跃响应。

解 方法1：直接求解 $x(t)=\varepsilon(t)$ 时的零状态响应

计算阶跃响应的方程为 $\begin{cases}\frac{d^2}{dt^2}g(t)+5\frac{d}{dt}g(t)+4g(t)=\delta(t)+2\varepsilon(t)\\ g(0_-)=0,\quad g'(0_-)=0\end{cases}$

由冲激平衡法可得初始状态为

$$\begin{cases}g(0_+)=g(0_-)=0\\ g'(0_+)=g'(0_-)+1=0+1=1\end{cases}$$

3.6 冲激响应和阶跃响应

例3.6-1 LTI系统方程为 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t)+5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)+4y(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)+2x(t)$

$y(0_-)=2\quad y'(0_-)=1$，求该系统阶跃响应。

解 方法1：直接求解 $x(t)=\varepsilon(t)$ 时的零状态响应

在 $t>0$ 时，微分方程可以简化为

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}g(t)+5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g(t)+4g(t)=2$$

$$g(t)=\left(\frac{1}{2}+A_1\mathrm{e}^{-t}+B_1\mathrm{e}^{-4t}\right)\varepsilon(t)$$

$$\begin{cases} g(0_+)=\frac{1}{2}+A_1+B_1=0 \\ g'(0_+)=-A_1-4B_1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1=-\frac{1}{3} \\ B_1=-\frac{1}{6} \end{cases}$$

$$g(t)=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-t}-\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-4t}\right)\varepsilon(t)$$

3.6 冲激响应和阶跃响应

例3.6-1 LTI系统方程为 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t)+5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)+4y(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)+2x(t)$

$y(0_-)=2 \quad y'(0_-)=1$，求该系统阶跃响应。

方法2：利用冲激响应的积分计算

冲激响应的方程为 $$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}h(t)+5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h(t)+4h(t)=\delta'(t)+2\delta(t)\\ h(0_-)=0,\ \ h'(0_-)=0\end{cases}$$

由冲激平衡法可得初始状态为

$$\begin{cases}h(0_+)=h(0_-)+1=0+1=1\\ h'(0_+)=h'(0_-)-3=0-3=-3\end{cases}$$

3.6 冲激响应和阶跃响应

例3.6-1 LTI系统方程为 $\dfrac{d^2}{dt^2}y(t)+5\dfrac{d}{dt}y(t)+4y(t)=\dfrac{d}{dt}x(t)+2x(t)$

$y(0_-)=2 \quad y'(0_-)=1$，求该系统阶跃响应。

方法2：利用冲激响应的积分计算

在 $t>0$ 时，微分方程可以简化为

$$\frac{d^2}{dt^2}h(t)+5\frac{d}{dt}h(t)+4h(t)=0$$

$$\therefore h(t)=\left(A_2e^{-t}+B_2e^{-4t}\right)\varepsilon(t)$$

$$\begin{cases} h(0_+)=A_2+B_2=1 \\ h'(0_+)=-A_2-4B_2=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_2=\dfrac{1}{3} \\ B_2=\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

例3.6-1 LTI系统方程为 $\frac{d^2}{dt^2}y(t)+5\frac{d}{dt}y(t)+4y(t)=\frac{d}{dt}x(t)+2x(t)$

$y(0_-)=2 \quad y'(0_-)=1$，求该系统阶跃响应。

方法2：利用冲激响应的积分计算

$$h(t)=\left(\frac{1}{3}e^{-t}+\frac{2}{3}e^{-4t}\right)\varepsilon(t)$$

$$\begin{aligned}
g(t)&=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau\\
&=\int_{-\infty}^{t}\left(\frac{1}{3}e^{-\tau}+\frac{2}{3}e^{-4\tau}\right)\varepsilon(\tau)d\tau\\
&=\int_{0}^{t}\left(\frac{1}{3}e^{-\tau}+\frac{2}{3}e^{-4\tau}\right)d\tau\varepsilon(t)\\
&=\left(-\frac{1}{3}e^{-\tau}\Big|_{\tau=0}^{t}-\frac{1}{6}e^{-4\tau}\Big|_{\tau=0}^{t}\right)\varepsilon(t)\\
&=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}e^{-t}-\frac{1}{6}e^{-4t}\right)\varepsilon(t)
\end{aligned}$$

3.7 卷积积分

•卷积（积分）的**定义**：

$$y(t) = f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

•卷积的**计算步骤**：

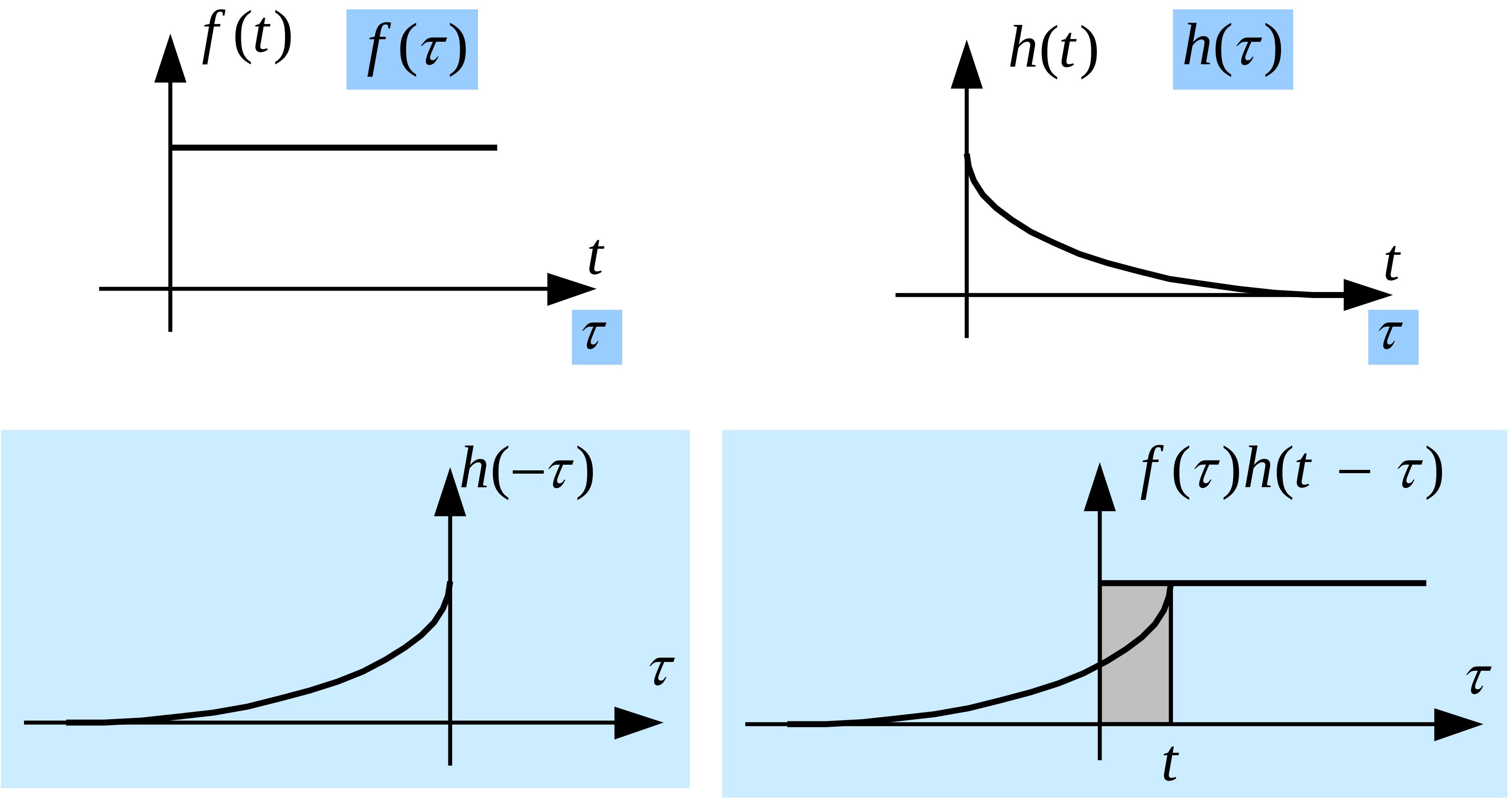
1）将$f(t)$和$h(t)$中的自变量由t改为τ，τ成为函数的自变量；

2）把其中一个信号翻转、平移；

$$h(\tau) \xrightarrow{\text{翻转}} h(-\tau) \xrightarrow{\text{平移}t} h(-(\tau-t)) = h(t-\tau)$$

3）将$f(\tau)$ 与$h(t\text{-}\ \tau)$相乘；对乘积后的图形积分。

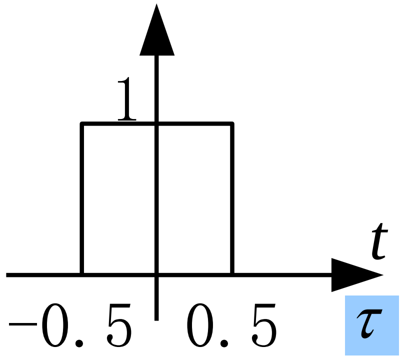
例1　　计算$f(t) * h(t)$, $f(t)=\varepsilon(t)$, $h(t)=e^{-t}\varepsilon(t)$



$$f(t) * h(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)} d\tau = 1 - e^{-t} \qquad t \geq 0$$

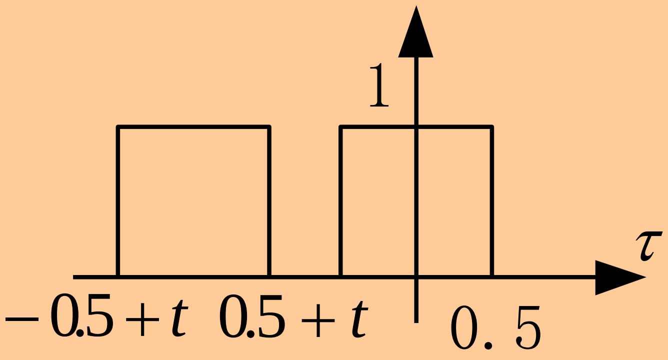
例2：计算$y(t) = p_1(t) * p_1(t)$。

$p_1(t)$ $p_1(\tau)$



$-\ ?\ < t < -1$

$p_1(\tau)p_1(t-\tau)$



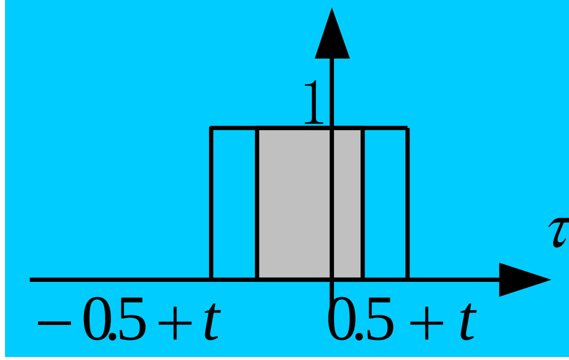
a) $-\infty < t \le -1$

$y(t)=0$

b) $-1 \le t < 0$

$-1\ ?\ t < 0$

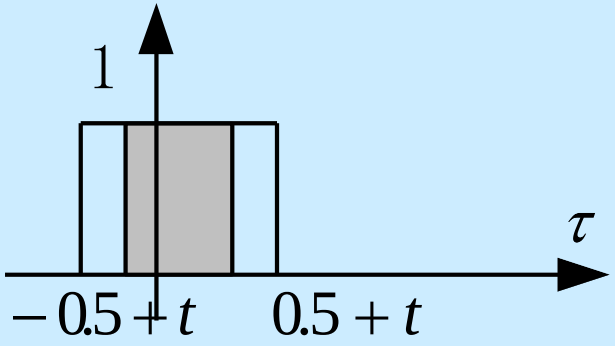
$p_1(\tau)p_1(t-\tau)$



$$y(t) = \int_{-0.5}^{0.5+t} dt = 1 + t$$

$0 \ ? \ t < 1$

$p_1(\tau)\, p_1(t - \tau)$



c) $0 \leq t < 1$

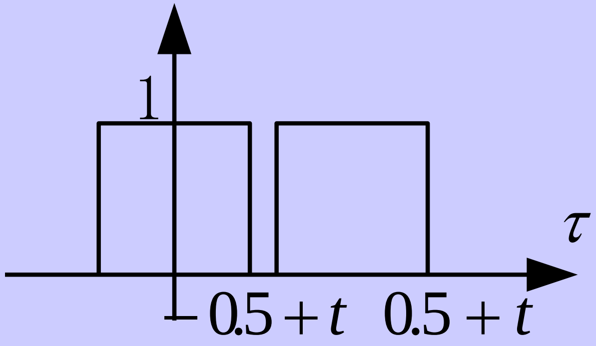
$$y(t) = \int_{-0.5+t}^{0.5} d t = 1 - t$$

d) $1 \leq t < \infty$

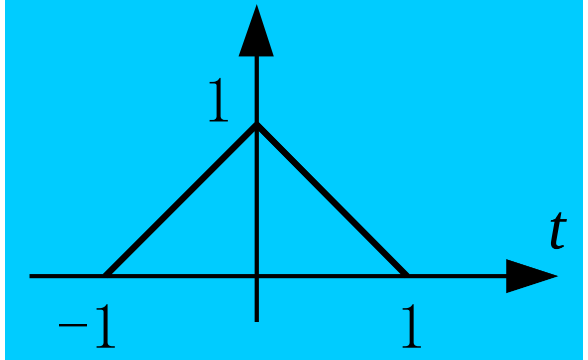
$y(t) = 0$

$t > 1$

$p_1(\tau)\, p_1(t - \tau)$

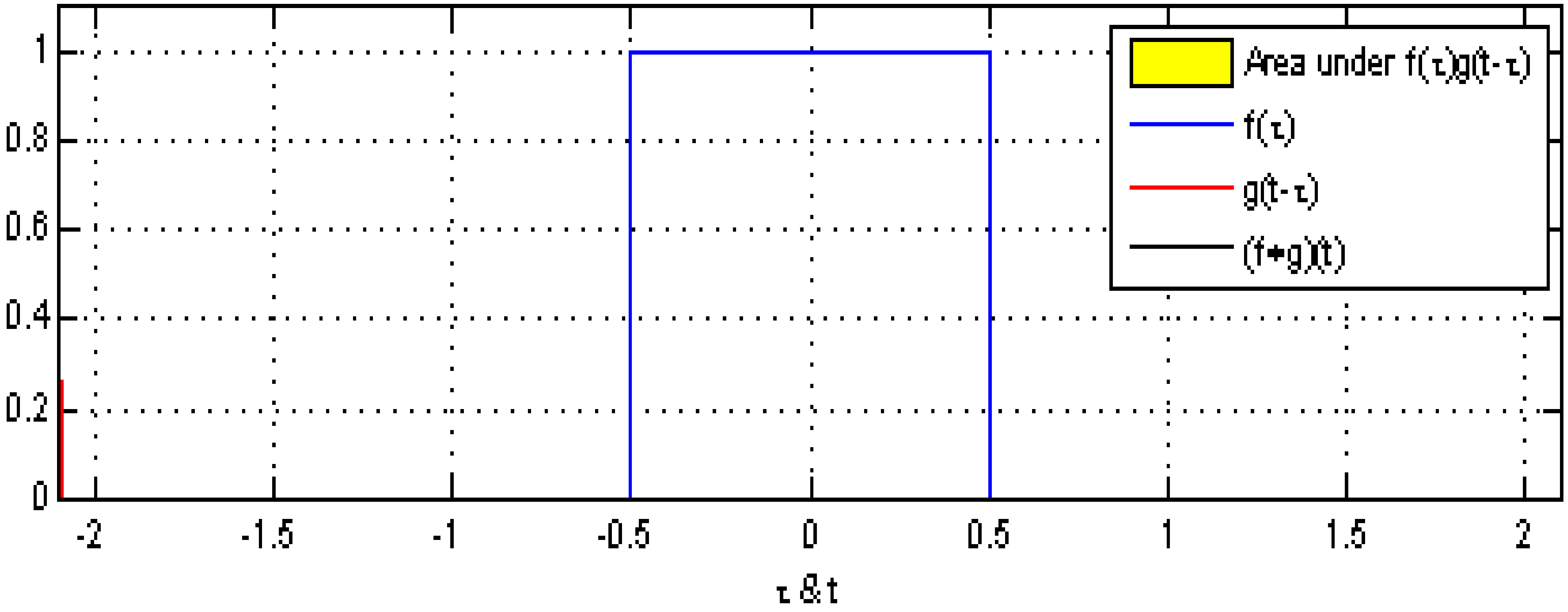


$p_1(t) * p_1(t)$



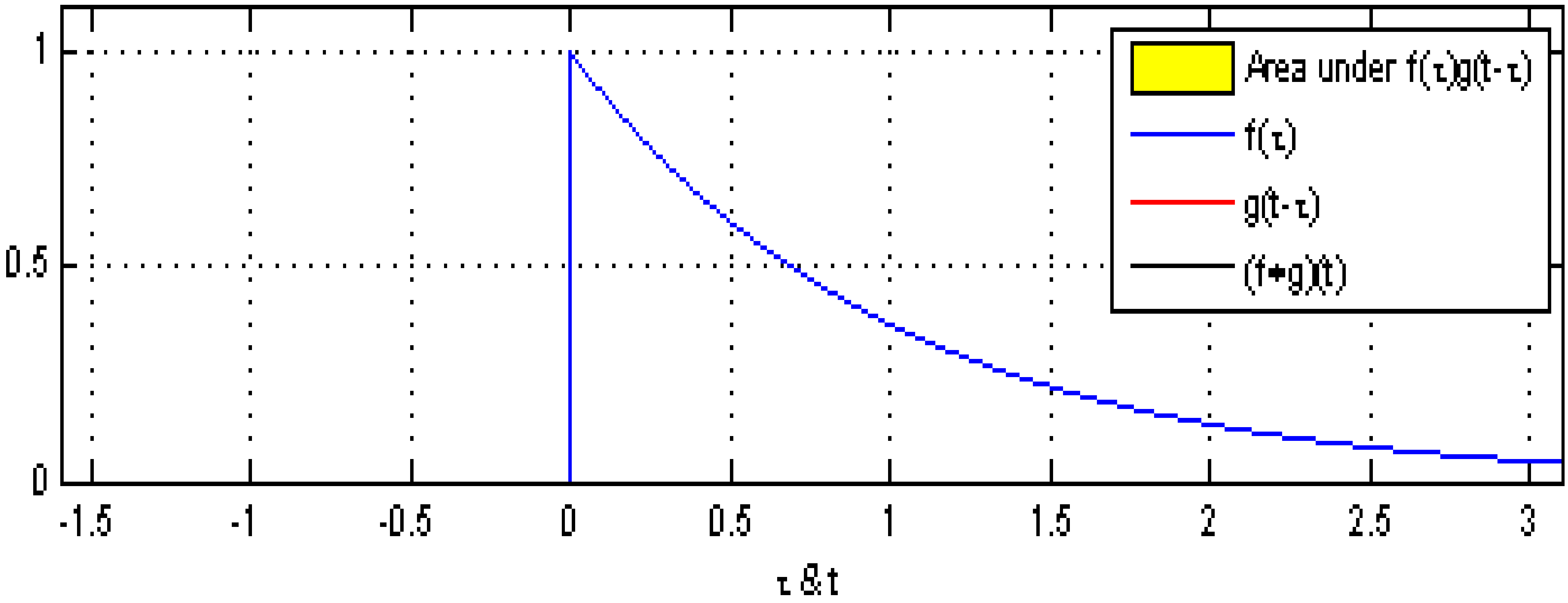
3.7 卷积积分

$$f(t) = f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$



3.7 卷积积分

$$f(t) = f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$



卷积法求解系统零状态响应$y_{zs}(t)$的思路

$$y_{zs}(t) = f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau$$

- 1) 求出单位冲激信号作用在系统上的零状态响应 — 单位冲激响应$h(t)$。
- 2) 求输入信号$f(t)$与$h(t)$的卷积，即可得到系统的零状态响应$y_{zs}(t)$。

例　已知某LTI系统的动态方程式为$y'(t)+3y(t)=2f(t)$，系统的冲激响应$h(t)=2e^{-3t}\varepsilon(t)$，$f(t)=3\varepsilon(t)$，试求系统的零状态响应$y_{zs}(t)$。

[解]　$y_{zs}(t)=f(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cdot h(t-\tau)d\tau$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}3\varepsilon(\tau)\cdot 2e^{-3(t-\tau)}\varepsilon(t-\tau)d\tau$$

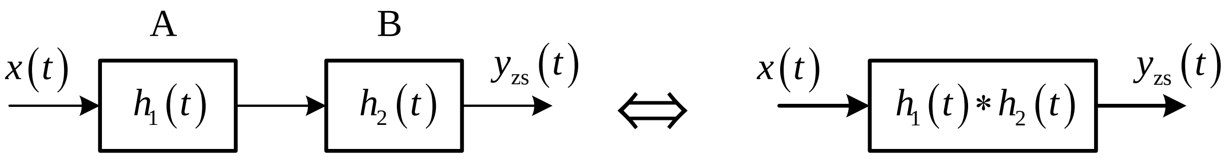
$$=\begin{cases}\int_0^t 3\cdot 2\mathrm{e}^{-3(t-\tau)}\mathrm{d}\tau & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}2(1-e^{-3t}) & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

$$=2(1-e^{-3t})\varepsilon(t)$$

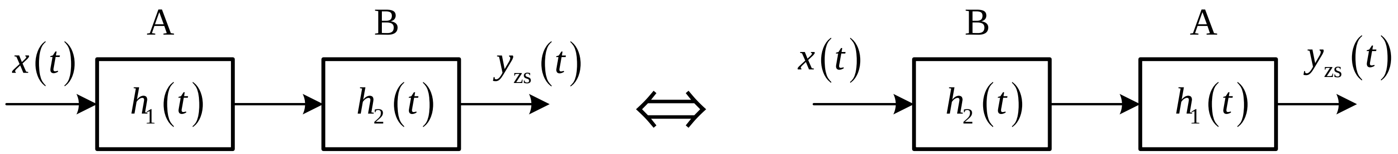
2. 卷积积分的性质

（1）结合律



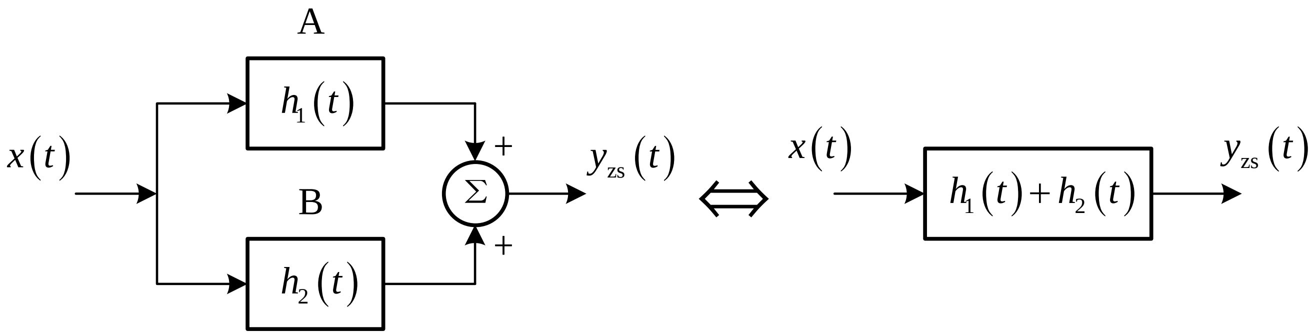
(a) (b)

（2）交换律



(a) (b)

（3）分配律



(a) (b)

2. 卷积积分的性质

（4）与冲激函数的卷积

$$f(t)*\delta(t)=f(t)$$

$$\begin{aligned}f(t)*\delta(t)&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau\\&=f(t)\end{aligned}$$

$$f(t)*\delta(t-t_0)=f(t-t_0)$$

$$\begin{aligned}f(t)*\delta(t-t_0)&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\delta(t-\tau-t_0)\mathrm{d}\tau\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t-t_0)\delta(t-\tau-t_0)\mathrm{d}\tau\\&=f(t-t_0)\end{aligned}$$

3.7 卷积积分

2. 卷积积分的性质

（5）时移性

若 $f(t)=f_1(t)*f_2(t)$，则有

$$f(t-t_1-t_2)=f_1(t)*f_2(t-t_1-t_2)=f_1(t-t_1)*f_2(t-t_2)$$

$$f_1(t-t_1)*f_2(t-t_2)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau-t_1)*f_2(t-\tau-t_2)d\tau$$

$$\overset{\tau-t_1=x}{=}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)*f_2(t-t_1-t_2-x)dx$$

$$=f_1(t)*f_2(t-t_1-t_2)$$

$$=f(t-t_1-t_2)$$

3.7 卷积积分

2. 卷积积分的性质

（6）展缩性

若 $f(t)=f_1(t)*f_2(t)$，则有 $\dfrac{1}{|a|}f(at)=f_1(at)*f_2(at)$

$$f_1(at)\ *\ f_2(at)\ =\int_{-\infty}^{\infty}\ f_1(a\tau)*f_2(a(t-\tau))d\tau$$

$$\overset{a\tau=x}{=}\frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty}\ f_1(x)\ *\ f_2(at\ -\ x)dx\ \ =\frac{1}{|a|}f(at)$$

2. 卷积积分的性质

（7）微积分性质

① 卷积的微分性质为

$$\left[f_1(t)*f_2(t)\right]'=f_1'(t)*f_2(t)=f_1(t)*f_2'(t)$$

$$\left[f_1(t)*f_2(t)\right]^{(n)}=f_1^{(m)}(t)*f_2^{(n-m)}(t)\quad(n\geq m\geq 0)$$

$$f(t)*\delta'(t)=f'(t)$$

2. 卷积积分的性质

（6）微积分性质

② 卷积的积分性质为

$$\left[f_1(t)*f_2(t)\right]^{(-1)}=f_1^{(-1)}(t)*f_2(t)=f_1(t)*f_2^{(-1)}(t)$$

$$f(t)*\varepsilon(t)=f^{(-1)}(t)$$

③ 结合卷积的微分性质和积分性质可以得到卷积的微积分性质为

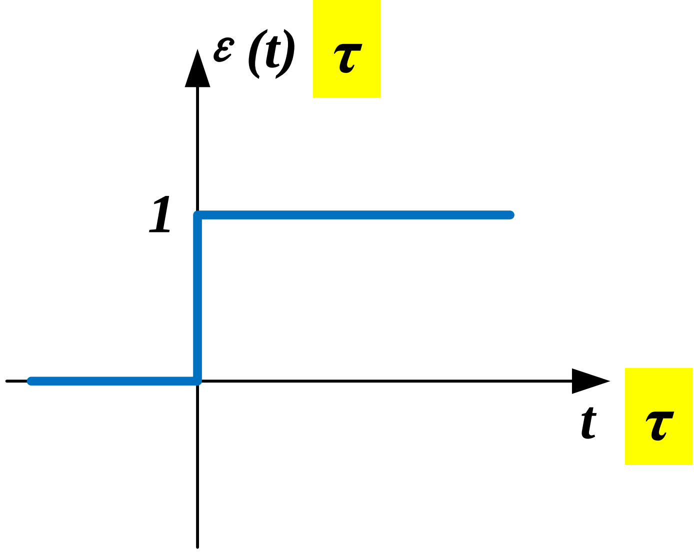
$$f_1(t)*f_2(t)=f_1'(t)*f_2^{(-1)}(t)=f_1^{(-1)}(t)*f_2'(t)$$

3.卷积的计算

（1）利用定义式求解

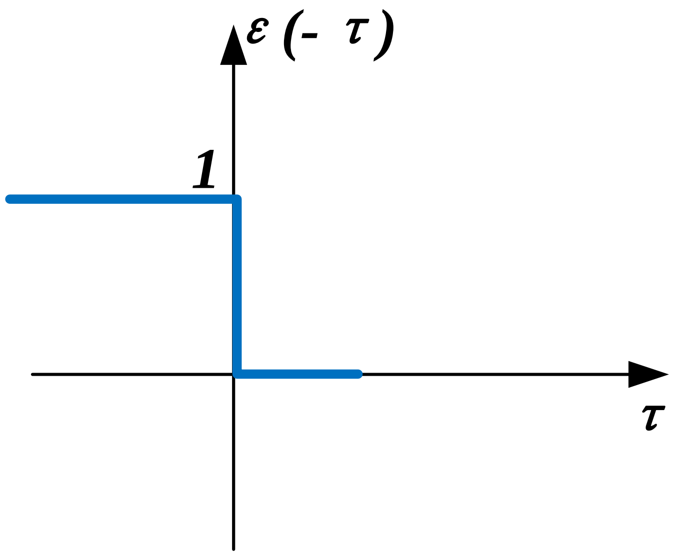
（2）利用性质求解

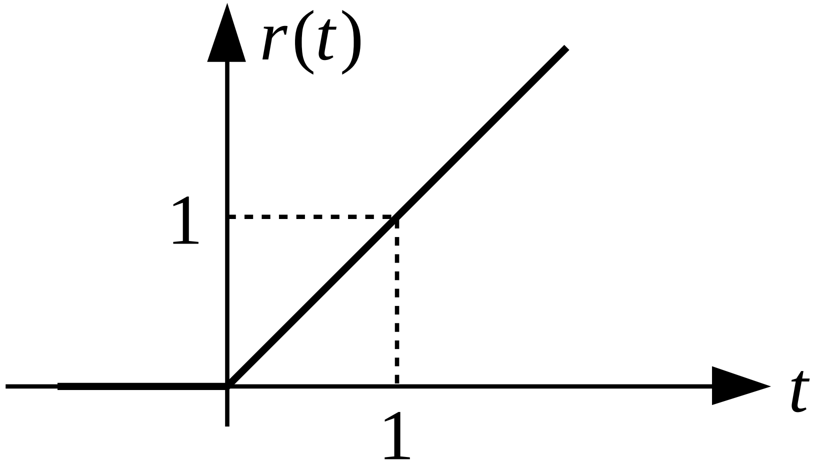
例：计算$r(t) = \varepsilon(t) * \varepsilon(t)$ 。



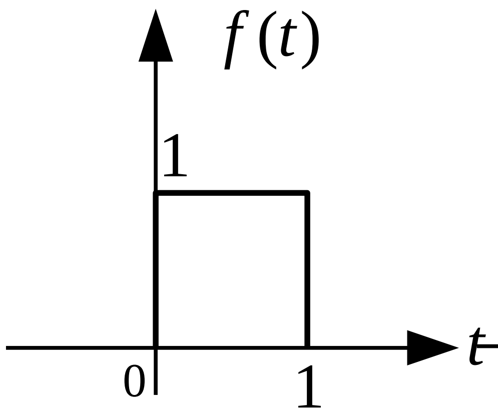
$$r(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon(\tau)\varepsilon(t-\tau)d\tau$$

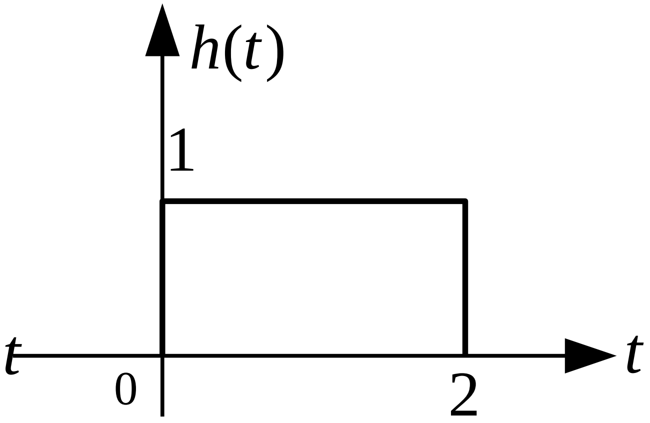
$$= \int_{0}^{t} d\tau = t, \quad t > 0$$

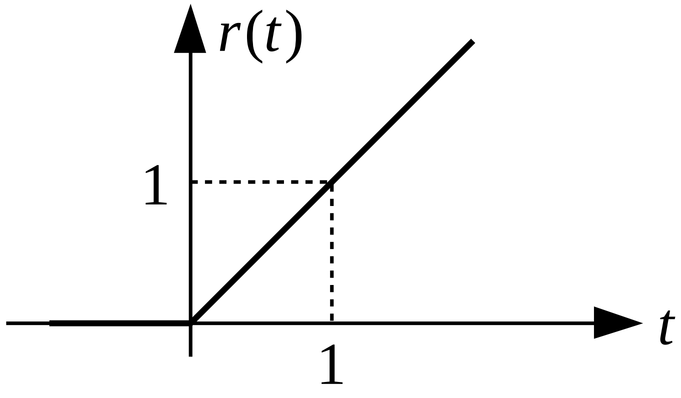




例：利用时移特性及$\varepsilon(t) * \varepsilon(t)= r(t)$，计算$y(t) = f(t) * h(t)$。



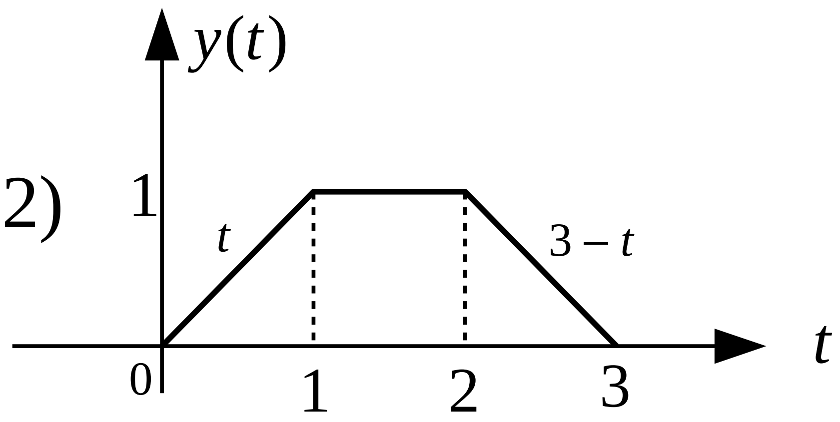




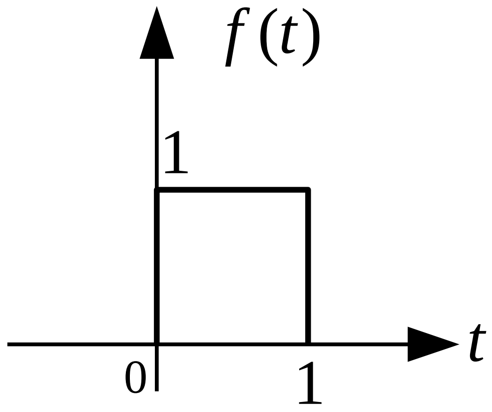
$$y(t) = f(t) * h(t) = [\varepsilon(t) - \varepsilon(t\text{-}1)\ ] * [\varepsilon(t) - \varepsilon(t\text{-}2)\ ]$$

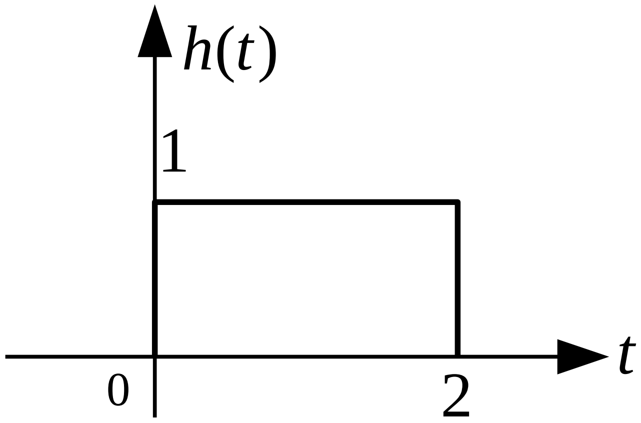
$$=\varepsilon(t)*\varepsilon(t) - \varepsilon\ (t\text{-}1)*\varepsilon(t) - \ \varepsilon(t)*\varepsilon(t\text{-}2) - \ \varepsilon(t\text{-}1)*\varepsilon(t\text{-}2)$$

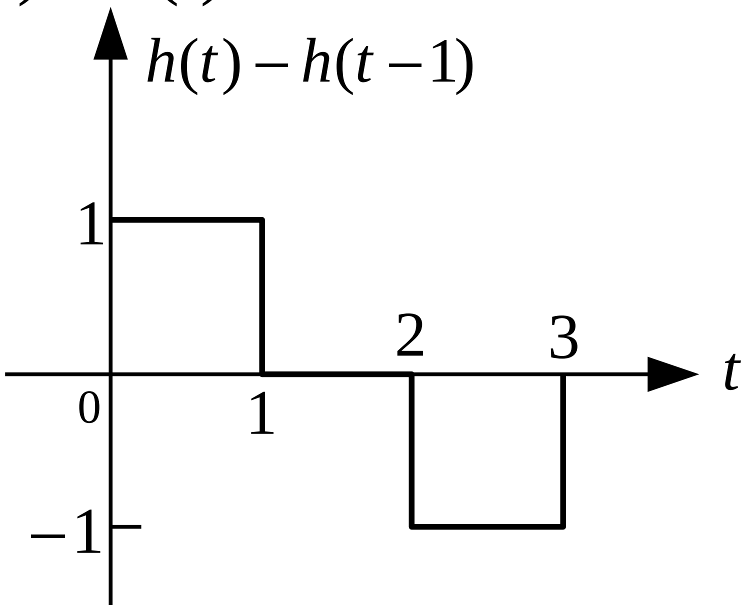
$$= r(t) – r(t\ \text{-}1) - r(t\text{-}2) + r(t\text{-}3)$$



例3：利用微积分特性，计算$y(t) = f(t) * h(t)$。



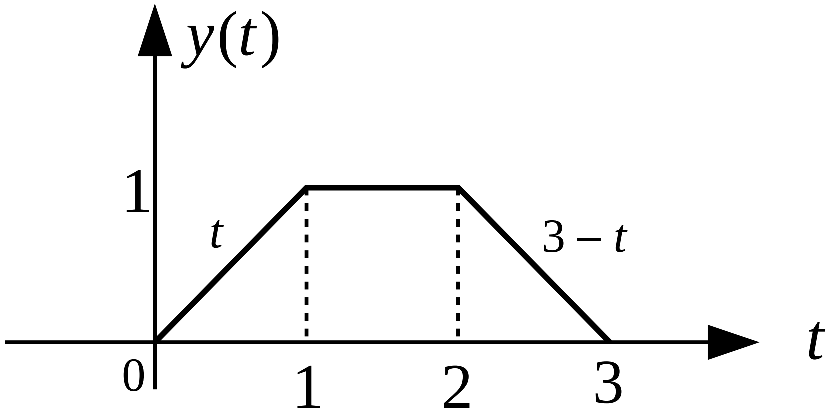




$$f'(t) = \delta(t) - \delta(t-1)$$

$$f'(t) * h^{(-1)}(t) = h^{(-1)}(t) - h^{(-1)}(t-1)$$

$$y(t) = \int_0^t [h(\tau) - h(\tau - 1)]d\tau$$



3.7 卷积积分

例3. 7−3 求例3.6-2所示电路在 $u_S(t)=e^{-2t}\varepsilon(t)\text{V}$ 时的零状态响应

解 已在例3.6-2中求得该电路的冲激响应为 $h(t)=e^{-\frac{5}{3}t}\varepsilon(t)\text{V}$

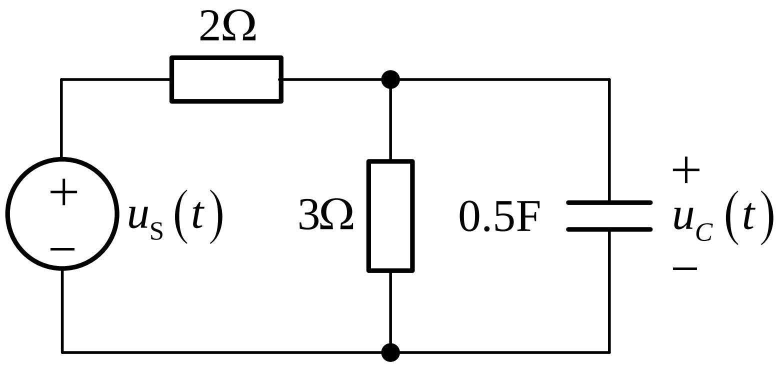
因此，该电路在 $u_S(t)=e^{-2t}\varepsilon(t)\text{V}$ 时的零状态响应为

$$u_{Czs}(t)=u_S(t)*h(t)=e^{-2t}\varepsilon(t)*e^{-\frac{5}{3}t}\varepsilon(t)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2\tau}\varepsilon(\tau)\cdot e^{-\frac{5}{3}(t-\tau)}\varepsilon(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$=e^{-\frac{5}{3}t}\int_0^t e^{-\frac{1}{3}\tau}\mathrm{d}\tau\varepsilon(t)=-\frac{1}{3}e^{-\frac{5}{3}t}e^{-\frac{1}{3}\tau}\Big|_{\tau=0}^{t}\varepsilon(t)$$

$$=-\frac{1}{3}e^{-\frac{5}{3}t}\left(e^{-\frac{1}{3}t}-1\right)\varepsilon(t)=\frac{1}{3}\left(e^{-\frac{5}{3}t}-e^{-2t}\right)\varepsilon(t)\text{V}$$



习题：3-16, 3-17, 3-18, 3-19, 3-20；提交截止时间：下周五（4月30日）早8点