得分	

一、填空题（请将答案填写在横线上。本题总共六小题，每题3分，总共18分）

1、$\tau(24531876)=$ __9__；

2、设 $f(x)=\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & -3 \\ x & x & 1 & -2 \\ 1 & 2 & x & -3 \\ x & 1 & 2 & -2x \end{vmatrix}$，则 $f(x)$ 的 x^4 的系数为：__-10__；

3、设3阶方阵 A 的特征值为2、1、-1，则 $tr(A^3-5A^2)=$ __-22__；

4、实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+3x_3^2$ 的秩为：__3__，正惯性指数为：__2__，负惯性指数为：__1__；

5、设 $\alpha_1=[1,0,0]^T$，$\alpha_2=[1,1,1]^T$，$\alpha_3=[1,0,-1]^T$，__是__（是或否）构成向量空间 $\Re^3$ 的一组基；

6、设 A 为 4×5 矩阵，秩$(A)=3$，则齐次线性方程组 $AX=0$ 的基础解系所含向量的个数为：

__2__

得分	

二、选择题（请将正确答案填写在括号中，在字母前勾选所得结果视为无效，本题共六小题，每题3分，共18分）

1、设 A 是 n 阶可逆方阵，则下列各式中错误的是（ C ）；

（A） $A^*A=AA^*$　　（B） $(|A|A^*)^{-1}=\frac{1}{|A|}(A^*)^{-1}$

（C） $A^T=A^{-1}$　　（D） $(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}$

2、已知 A 是可逆方阵，它的一个特征值为2，则 $(2A)^{-1}$ 有特征值为（ A ）；

（A） $\frac{1}{4}$　（B） 4　（C） 1　（D） -1

3、若 n 阶矩阵 A 为正定矩阵，则下列结论不正确的是（ D ）；

（A） A 为满秩矩阵　　（B） A 可逆且 A^{-1} 是正定矩阵

（C） $|A|>0$　　（D） A 的所有元素全为正

4、设（I）α_1，α_2，…，α_n 和（II）β_1，β_2，…，β_n 是向量空间 $\Re^n$ 中的两组基，M 是基（I）到基（II）的过渡矩阵，α 在该两组基下的坐标分别是 X 和 Y，则下列说法正确的是（ C ）；

（A） M 的第 i 列为 α_i 在基（II）下的坐标　　（B） $|M|=0$

（C） $[\beta_1\ \beta_2\ \cdots\ \beta_n]=[\alpha_1\ \alpha_2\ \cdots\ \alpha_n]M$　　（D） $Y=MX$

5、设 A 为 n 阶方阵，秩$(A)=r$，方程组 $AX=0$ 有非零解，则（ C ）；

（A） $r=n$　（B） $|A|\neq0$　（C） $r<n$　（D） $r>n$

6、四阶方阵 A 的秩为2，则其伴随矩阵的秩为（ A ）；

（A） 0　（B） 1　（C） 2　（D） 4

得分	

三、试求解下列各题（本题共四小题，每题5分，共20分）

1、已知 $A=\begin{bmatrix} a & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$，$|A|>0$ 且 $|A^*|=196$，求 a；

解：$|A|=\begin{vmatrix} a & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=2(a+6)$ ⋯ 2'

$|A^*|=|A|^{3-1}=|A|^2=196$ ∴ $|A|=14$ ⋯ 2'

∴ $2(a+6)=14$

∴ $a=1$ ⋯ 1'

2、设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{bmatrix}$，$\beta=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$，已知线性方程组 $AX=\beta$ 有解但不唯一，求 a；

解、$[A,\beta]=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & -2 \end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & -2-a \end{array}\right]$

$\to\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & -2-a \end{array}\right]$ ⋯ 2'

∵ $AX=\beta$ 有解 但不唯一

∴ $\begin{cases} 2-a-a^2=0 \\ -2-a=0 \end{cases}$ ⋯ 2' $\Rightarrow a=-2$ ⋯ 1'

$a=1$时不行 (∵ 秩$(A)=1$ 秩$(\bar{A})=2$)

3、判定 $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+6x_2^2+4x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3$ 是否为正定二次型？

解：$A=\begin{bmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ ⋯ 1'

$\begin{cases} \Delta_1=|5|>0 \\ \Delta_2=\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix}=30-4=26>0 \\ \Delta_3=|A|=80>0 \end{cases}$ ⋯ 3'

∵ 所有顺序主子式全大于0 ∴ f 正定 ⋯ 1'

4、求 t，使 $\alpha_1=[0\ 1\ 1\ -t]^T$，$\alpha_2=[2\ -1\ -t\ -1]^T$，$\alpha_3=[1\ -t-6\ 2\ -3]^T$ 线性相关；

$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -t-6 \\ 1 & -t & 2 \\ -t & -1 & -3 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & -t & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -t-6 \\ -t & -1 & -3 \end{bmatrix}$

$\to\begin{bmatrix} 1 & -t & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & t-1 & -t-8 \\ 0 & -1-t^2 & 2t-3 \end{bmatrix}$ ⋯ 2'

∵ $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$ 线性相关 ∴ 秩$[\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3]<3$

∴ $\frac{2}{1}=\frac{t-1}{-t-8}=\frac{-1-t^2}{2t-3}$ ⋯ 2'

∴ $t=-5$ ⋯ 1'

得分	

四、试求解下列各题（本题共四小题，每题6分，共24分）

1、四阶矩阵 A 满足 $|3E+A|=0$，$AA^T=2E$，且 $|A|<0$，求 A 的伴随矩阵 A^* 的一个特征值；

解 ∵ $|3E+A|=0$ ∴ A有一个特征值 -3 $\cdots 2'$

∵ $A\cdot A^T=2E \Rightarrow |A|^2=|2E|=2^4$

又∵ $|A|<0$ ∴ $|A|=-2^2=-4$ $\cdots 2'$

∵ $A^*=|A|\cdot A^{-1}$

∴ A^*有一个特征值为 $|A|\cdot\lambda_0^{-1}=(-4)\cdot(-3)^{-1}=\frac{4}{3}$

$\cdots 2'$

2、已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+cx_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$ 的秩为2，求参数 c 以及二次型矩阵的特征值；

解：$A=\begin{bmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&c\end{bmatrix}\cdots 1'$

∵ f秩为2 ∴ 秩$(A)=2$

∴ $|A|=0$

$\Rightarrow c=3$

$\cdots 2'$

$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-5&1&-3\\1&\lambda-5&3\\-3&3&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-4)\lambda\cdot(\lambda-9)=0$

∴ $\lambda_1=4$ $\lambda_2=0$ $\lambda_3=9$

$\cdots 3'$

3、已知 $A=\begin{bmatrix}-1&1&0\\-2&2&0\\4&x&1\end{bmatrix}$ 可对角化，求 x；

解：$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda+1&-1&0\\2&\lambda-2&0\\-4&-x&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2\cdot\lambda=0$

∴ $\lambda_1=0$ $\lambda_2=1$ $\cdots 2'$

$(1\cdot E-A)X=0$ 应有两个线性无关特征向量

∴ 秩$(E-A)=3-2=1.$ $\cdots 2'$

∴ $\begin{bmatrix}2&-1&0\\2&-1&0\\-4&-x&0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}2&-1&0\\0&-x-2&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

∴ $-x-2=0$

$\Rightarrow x=-2$ $\cdots 2'$

4、求向量组 $\alpha_1=[1\ \ -1\ \ 2\ \ 2]^T$，$\alpha_2=[0\ \ 3\ \ 1\ \ 4]^T$，$\alpha_3=[3\ \ 0\ \ 7\ \ 10]^T$，$\alpha_4=[1\ \ -2\ \ 2\ \ 1]^T$ 的一组极大线性无关组，并写出其余向量用该组极大线性无关组表示的表达式；

解：$[\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4]=\begin{bmatrix}1&0&3&1\\-1&3&0&-2\\2&1&7&2\\2&4&10&1\end{bmatrix}$

$\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&3&1\\0&3&3&-1\\0&1&1&0\\0&4&4&-1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&3&1\\0&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\cdots 3'$

极大线性无关组为 $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_4$ $\cdots 1'$

$\alpha_3=3\alpha_1+\alpha_2+0\cdot\alpha_4$ $\cdots 2'$

得分	

五、(8分) 设 $A=\begin{bmatrix}-3&2&0\\-2&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$，(1) 求 A 的特征值以及特征向量；(2) A 是否能对角化；(3) 求 A^n；

解：(1) $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda+3&-2&0\\2&\lambda-2&0\\0&0&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-3)(\lambda+2)(\lambda-1)=0$

∴ $\lambda_1=3$ $\lambda_2=-2$ $\lambda_3=1$ $\cdots 2'$

$\lambda_1=3$：$(3E-A)X=0 \Rightarrow t_1[0,0,1]^T \triangleq t_1\xi_1$ $(t_1\neq 0)$

$\lambda_2=-2$：$(-2E-A)X=0 \Rightarrow t_2[2\ \ 1\ \ 0]^T \triangleq t_2\xi_2$ $(t_2\neq 0)$

$\lambda_3=1$ $(E-A)X=0 \Rightarrow t_3[1,2,0]^T \triangleq t_3\xi_3$ $(t_3\neq 0)$

$\cdots 3'$

(2) ∵ A有3个不同特征值 ∴ A可对角化 $\cdots 1'$

(3) 存在 $P=[\xi_1,\xi_2,\xi_3]$ 使 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{bmatrix}3&&\\&-2&\\&&1\end{bmatrix}$

∴ $A=P\cdot\begin{bmatrix}3&&\\&-2&\\&&1\end{bmatrix}\cdot P^{-1}$ $P^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&1\\2/3&-1/3&0\\-1/3&2/3&0\end{bmatrix}$

∴ $A^n=P\cdot\begin{bmatrix}3^n&&\\&(-2)^n&\\&&1\end{bmatrix}P^{-1}$

$=\begin{bmatrix}\frac{4}{3}(-2)^n-\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}(-2)^n+\frac{2}{3}&0\\\frac{2}{3}(-2)^n-\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}(-2)^n+\frac{4}{3}&0\\0&0&3^n\end{bmatrix}\cdots 2'$

得分	

六、解答题（本题共两小题，共12分）

1、(7分) 设 $6,3,3$ 为实对称矩阵 A 的特征值，已知属于6的一个特征向量为 $\eta=[1\ \ -1\ \ 1]^T$，求正交矩阵 U，使得 $U^{-1}AU=\Lambda=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&6&0\\0&0&3\end{bmatrix}$；

解：设属于3的特征向量为 $X=[x_1\ x_2\ x_3]^T$

∵ A是实对称矩阵 ∴ X与η正交

∴ $x_1-x_2+x_3=0$

$\Rightarrow \begin{cases}x_1=t_1-t_2\\x_2=t_1\\x_3=t_2\end{cases}$ ($t_1\ t_2$为任意)

∴ $X=t_1[1,1,0]^T+t_2[-1,0,1]^T \triangleq t_1\xi_1+t_2\xi_2$ $\cdots 3'$

$\beta_1=\xi_1$ $\beta_2=\xi_2-\frac{(\xi_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=[-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1]^T.$

$\Rightarrow \eta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}[1,1,0]^T$ $\eta_2=\frac{1}{\sqrt{6}}[-1,1,2]^T$ $\eta_3=\frac{1}{\sqrt{3}}[1,-1,1]^T$. $\cdots 3'$

∴ $U=[\eta_1,\eta_3,\eta_2]$ $\cdots 1'$

2、(5分) 已知 n 阶方阵 A，B 满足 $AA^T=E$，$BB^T=E$，且 $|A|=-|B|$，求证 $|A+B|=0$；

证明：$|A+B|=|A\cdot B^TB+A\cdot A^TB|$

$=|A|\cdot|B^T+A^T||B|=-|A|^2\cdot|A+B|\cdots 2'$

∵ $A\cdot A^T=E$ ∴ $|A|^2=1.$ $\cdots 2'$

∴ $|A+B|=-|A+B|$

∴ $|A+B|=0$ $\cdots 1'$

……不得使用计算器等计算工具，否则视为作弊！

得分	

一、填空题（请将答案填写在横线上，本题总共六小题，每题 3 分，总共 18 分）

1、$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & 5 & 25 \\ 1 & 6 & 36 \end{vmatrix} =$ 6；

2、设 $\alpha = [1\ \ -2\ \ 1\ \ -1]^T$，$\beta = [-1\ \ 3\ \ k\ \ 2]^T$，则 $k =$ 9 时 α 与 β 正交；

3、设 A 为 3 阶方阵，满足 $|A| = 0$，$|A+E| = 0$ 及 $tr(A) = 0$，则 A 的特征值为：0, -1, 1；

4、n 阶矩阵 A 可以对角化的充要条件是：A有n个线性无关的特征向量；

5、三元二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 4x_2^2 + 12x_2x_3 + 9x_3^2$ 的矩阵为：

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$；

6、设 A 为 5×3 矩阵，秩$(A) = 2$，已知 η_1，η_2 是非齐次线性方程组 $AX = b$ 的两个不同的解，则 $AX = b$ 的全部解为：$t(\eta_1 - \eta_2) + \eta_1$

得分	

二、选择题（请将正确答案填写在括号中，在字母前勾选所得结果视为无效。本题共六小题，每题 3 分，共 18 分）

1、下列说法中不正确的是（ D ）；

（A） 正定矩阵一定可逆　　（B） 过渡矩阵一定可逆

（C） 正交矩阵一定可逆　　（D） 非零矩阵一定可逆

2、已知 A 是可逆方阵，它的一个特征值为 2，则 $(\frac{1}{3}A)^{-1}$ 有特征值为（ A ）；

（A） $\frac{3}{2}$　　（B） $\frac{1}{6}$　　（C） 6　　（D） $\frac{2}{3}$

3、下列结论正确的是（ A ）；

（A） 特征值可以是零也可以是非零　　（B） A 可逆则 A 是正交矩阵

（C） 特征向量可以是零向量也可以是非零向量　　（D） A 可逆则其特征值全大于零

4、设 A 为四阶方阵，秩$(A) = 2$，则秩$(A^*) =$（ C ）；

（A） 4　　（B） 3　　（C） 0　　（D） 1

5、设 A 为 3 阶方阵，$|A| = -3$，把 A 按行分块为 $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}$，其中 $A_i\ (i = 1,2,3)$ 是 A 的第 i 行，

则 $\begin{vmatrix} A_1 \\ A_3 - 2A_1 \\ 4A_2 \end{vmatrix} =$（ A B ）

（A）−12　　（B） +12　　（C） 24　　（D） −24

6、对于 n 阶方阵 A，若 $AA^T = 2E$，则 $|A| =$（ D ）；

（A） ±2　　（B） $\pm\sqrt{2}$　　（C） $\pm2^n$　　（D） $\pm2^{\frac{n}{2}}$

得分	

三、试求解下列各题（本题共四小题，每题 5 分，共 20 分）

1、设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (1-a)x_1^2 + (1-a)x_2^2 + 2x_3^2 + 2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2，求 a；

$A = \begin{bmatrix} 1-a & 1+a & 0 \\ 1+a & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ⋯ 2′

∵ 秩$(A) = 2$

∴ $\frac{1-a}{1+a} = \frac{1+a}{1-a}$ ⋯ 2′

∴ $4a = 0$ $\Rightarrow a = 0$ ⋯ 1′

2、已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 22 & 30 \\ -12 & x \end{bmatrix}$ 有一个特征向量为 $\xi = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}$，求 x；

设该特征向量所属特征值为 λ

则有 $A\xi = \lambda\xi$

$\begin{bmatrix} 22 & 30 \\ -12 & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix} -5 \\ -3 \end{bmatrix}$ ⋯ 3′

$\Rightarrow \begin{cases} 22\times(-5) + 30\cdot3 = -5\lambda \\ 60 + 3x = -3\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 4 \\ x = -\cancel{24} \end{cases}$ −16

⋯ 2′

−12　−72

3、求从向量空间 $\Re^2$ 的基 $\alpha_1 = [1\ \ 0]^T$，$\alpha_2 = [1\ \ -1]^T$ 到基 $\beta_1 = [1\ \ 1]^T$，$\beta_2 = [1\ \ 2]^T$ 的过渡矩阵 M；

基变换公式是 $[\beta_1, \beta_2] = [\alpha_1\ \alpha_2]\cdot M$ ⋯ 2′

∴ $[\alpha_1\ \alpha_2 \vdots \beta_1, \beta_2]$

$= \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right]$

$\to \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right]$

$\to \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right]$ ⋯ 2′

∴ $M = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ ⋯ 1′

4、设 $A = \begin{bmatrix} 1 & x & 1 \\ x & 1 & y \\ 1 & y & 1 \end{bmatrix}$ 与 $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 相似，求 x、y 的值；

∵ A 与 B 相似

∴ A 的特征值 0, 1, 2 ⋯ 1′

∴ 有 $\begin{cases} |A| = 0 \\ |E - A| = 0 \\ |2E - A| = 0 \end{cases}$ ⋯ 2′

即 $\begin{cases} (x-y)^2 = 0 \\ 2xy = 0 \\ (x+y)^2 = 0 \end{cases}$ ⋯ 1′

∴ $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ ⋯ 1′

得分	

四、试求解下列各题（本题共四小题，每题6分，共24分）

1、若二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2\tau x_1x_2+2x_1x_3$ 是正定的，求 τ 的取值范围：

$A=\begin{bmatrix}1&\tau&1\\\tau&2&0\\1&0&2\end{bmatrix}$ ···2′

∵ f 正定

∴ $\begin{cases}\Delta_1>0\\\Delta_2>0\\\Delta_3>0\end{cases}$

即 $\begin{cases}1>0\\2-\tau^2>0\\2-2\tau^2>0\end{cases}$ ···3′

∴ $-1<\tau<1$ ···1′

2、求向量组 $\alpha_1=[1\ \ -1\ \ 2\ \ 4]^T$，$\alpha_2=[0\ \ 3\ \ 1\ \ 2]^T$，$\alpha_3=[3\ \ 0\ \ 7\ \ 14]^T$，$\alpha_4=[2\ \ 1\ \ 5\ \ 6]^T$，$\alpha_5=[1\ \ -1\ \ 2\ \ 0]^T$（1）证明：$\alpha_1$，$\alpha_5$ 线性无关；（2）求向量组包含 α_1，α_5 的一个极大线性无关组；

(1) $k_1\alpha_1+k_2\alpha_5=0$

即 $\begin{cases}k_1+k_2=0\\-k_1-k_2=0\\2k_1+2k_2=0\\4k_1=0\end{cases}$

∴ $k_1=0\quad k_2=0$

∴ α_1 与 α_5 线性无关

···2′

(2) $[\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4\ \alpha_5]$

$=\begin{bmatrix}1&0&3&2&1\\-1&3&0&1&-1\\2&1&7&5&2\\4&2&14&6&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&3&2&1\\0&3&3&3&0\\0&+1&1&1&0\\0&2&2&-2&-4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&3&2&1\\0&1&1&-1&-2\\0&0&0&2&2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$

···2′

3、已知 $\alpha_1=[-2\ \ 1\ \ 3]^T$，$\alpha_2=[-1\ \ 0\ \ 1]^T$，$\alpha_3=[-2\ \ -5\ \ -1]^T$，证明 α_1，α_2，α_3 是向量空间 $\mathfrak{R}^3$ 的一组基，并求向量 $\alpha=[4\ \ 12\ \ 6]^T$ 在这组基下的坐标：$\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$

(1) $\left|[\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3]\right|=\begin{vmatrix}-2&-1&-2\\1&0&-5\\3&1&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2&-1&-2\\1&0&-5\\1&0&-3\end{vmatrix}=2\neq0$

∴ 是基 ···2′

(2) $[\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha]=\left[\begin{array}{ccc|c}-2&-1&-2&4\\1&0&-5&12\\3&1&-1&6\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-5&12\\0&-1&-12&28\\0&1&14&-30\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-5&12\\0&-1&-12&28\\0&0&2&-2\end{array}\right]$ ···2′

∴ $\begin{cases}k_1=7\\k_2=-16\\k_3=-1\end{cases}$

∴ 坐标为 $[7,-16,-1]$

···2′

4、已知向量组 $\alpha_1=[1+\lambda\ \ 1\ \ 1]^T$，$\alpha_2=[1\ \ 1+\lambda\ \ 1]^T$，$\alpha_3=[1\ \ 1\ \ 1+\lambda]^T$，$\beta=[0\ \ \lambda\ \ \lambda^2]^T$，问 λ 取何值时，β 可由 α_1、α_2、α_3 线性表示并且表达式唯一；

$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$ 有唯一解. ···1′

$[\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \vdots\ \beta]$

$=\left[\begin{array}{ccc|c}1+\lambda&1&1&0\\1&1+\lambda&1&\lambda\\1&1&1+\lambda&\lambda^2\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1+\lambda&\lambda^2\\0&\lambda&-\lambda&\lambda-\lambda^2\\0&-\lambda&\cancel{2\lambda}-\lambda^2&-\lambda^2(1+\lambda)\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1+\lambda&\lambda^2\\0&\lambda&-\lambda&\lambda-\lambda^2\\0&0&-\lambda^2-3\lambda&\lambda(1-2\lambda-\lambda^2)\end{array}\right]$

···2′

∵ 有唯一解

∴ 秩$[\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ \beta]$ = 秩$[\alpha_1\alpha_2\alpha_3]$ =

∴ $\lambda\neq0$ 且 $-\lambda^2-3\lambda\neq0$ ···2′

得分	

五、（10分）已知三维向量 $\alpha_1=[1\ \ 2\ \ 3]^T$，试求非零向量 α_2、α_3，使得 α_1、α_2、α_3 成为正交向量组，并将其改造成一组标准正交向量组；

设 $\alpha=[x_1\ x_2\ x_3]^T$ 与 α_1 正交

∴ 有 $x_1+2x_2+3x_3=0$

解为 $\begin{cases}x_1=-2t_1-3t_2\\x_2=t_1\\x_3=t_2\end{cases}$ 即 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=t_1\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}+t_2\begin{bmatrix}-3\\0\\1\end{bmatrix}$

$=t_1\xi_1+t_2\xi_2$

····4′

取向量组 $\beta_1=\alpha_1,\ \beta_2=\xi_1,\ \beta_3=\xi_2$

则 $\alpha_1=\beta_1$

$\alpha_2=\beta_2-\dfrac{(\beta_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\beta_2$

$\alpha_3=\beta_3-\dfrac{(\beta_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2=\begin{bmatrix}-3\\0\\1\end{bmatrix}-\dfrac{6}{5}\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}$

$=[-\frac{3}{5},-\frac{6}{5},1]^T$ ····4′

$\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$ 为正交向量组

$\eta_1=\frac{1}{\sqrt{14}}[1,2,3]^T\quad\eta_2=\frac{1}{\sqrt{5}}[-2,1,0]^T\quad\eta_3=\frac{1}{\sqrt{70}}[-3,-6,5]^T$

为标正向量组 ····2′

得分	

六、解答题（本题共两小题，共10分）

1、（5分）设 ξ_1，ξ_2 分别是方阵 A 的属于 λ_1，λ_2 的特征向量，若 $\lambda_1\neq\lambda_2$，证明：$\xi_1+\xi_2$ 不可能是 A 的特征向量；

设 $\xi_1+\xi_2$ 是 A 属于 λ 的特征向量

则有 $A(\xi_1+\xi_2)=\lambda(\xi_1+\xi_2)$ ···① ····1′

∵ $\xi_1\ \xi_2$ 分别是 A 属于 λ_1,λ_2 的特征向量

∴ 有 $A\xi_1=\lambda_1\xi_1,\ A\xi_2=\lambda_2\xi_2$ 代入①有

$\lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2=\lambda\xi_1+\lambda\xi_2$

$\Rightarrow(\lambda_1-\lambda)\xi_1+(\lambda_2-\lambda)\xi_2=0$ ···2′

∵ ξ_1 与 ξ_2 线性无关

∴ $\begin{cases}\lambda_1-\lambda=0\\\lambda_2-\lambda=0\end{cases}\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2$ 矛盾

∴ 假设不成立 ····

2、（5分）设 n 阶方阵 A 与 B 相似，求证：$|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$

∵ A 与 B 相似

∴ 有可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP=B$ ···2′

∴ $|\lambda E-B|=|\lambda E-P^{-1}AP|$

$=|P^{-1}(\lambda E-A)P|=|P^{-1}|\cdot|\lambda E-A|\cdot|P|$

$=|\lambda E-A|$ ···3′