第5章信号的频谱分析与电路系统频域分析

回顾

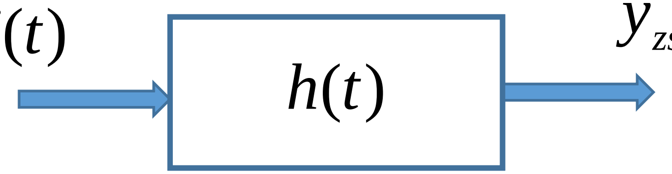
- 傅里叶变换
  - 傅里叶变换性质
    - 时移与频移特性
    - 卷积定理
    - 时域微分与积分
    - 频域微分与积分
    - Parseval 定理
  - 周期信号的傅里叶变换
- 连续时间系统的频域分析

本次课学习内容

- 连续时间系统的频域分析
- 滤波器
- 振荡器
    - RLC串联谐振

5.4.1 频域系统函数

$$x(t)=x(t)*\delta(t)$$



$$y_{zs}(t)=x(t)*h(t)$$

设输入、输出及单位冲激响应的傅里叶变换分别为：

$$x(t)\leftrightarrow X(\omega),y_{zs}(t)\leftrightarrow Y_{zs}(\omega),h(t)\leftrightarrow H(\omega)$$

$$Y_{zs}(\omega)=X(\omega)H(\omega)$$

$$H(\omega)=\frac{Y_{zs}(\omega)}{X(\omega)}=F\left[h(t)\right]$$

定义频域系统函数（系统频率响应）

$$H(\omega)=\frac{Y_{zs}(\omega)}{X(\omega)}=F\left[h(t)\right]$$

$$\boxed{H(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)e^{-j\omega t}dt}$$

$H(\omega)$的求解：

（1）根据系统输入及它的零状态响应计算；

（2）计算单位冲激响应的傅里叶变换得到；

（3）利用微分方程计算；

（4）利用电路计算。

例5.4-1 已知激励信号 $x(t)=e^{-3t}\varepsilon(t)$ **，系统在该激励作用下的零状态响应为** $y_{zs}(t)=\left(e^{-2t}-e^{-3t}\right)\varepsilon(t)$

求该系统的频域系统函数 $H(\omega)$ 。

解：

$$x(t) = e^{-3t}\varepsilon(t) \leftrightarrow X(\omega) = \frac{1}{j\omega + 3}$$

$$y_{zs}(t) = \left(e^{-2t} - e^{-3t}\right)\varepsilon(t) \leftrightarrow$$

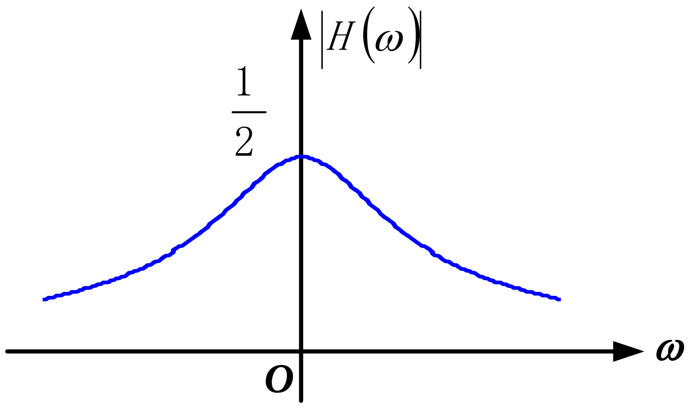
$$Y_{zs}(\omega) = \frac{1}{j\omega + 2} - \frac{1}{j\omega + 3} = \frac{1}{(j\omega + 3)(j\omega + 2)}$$

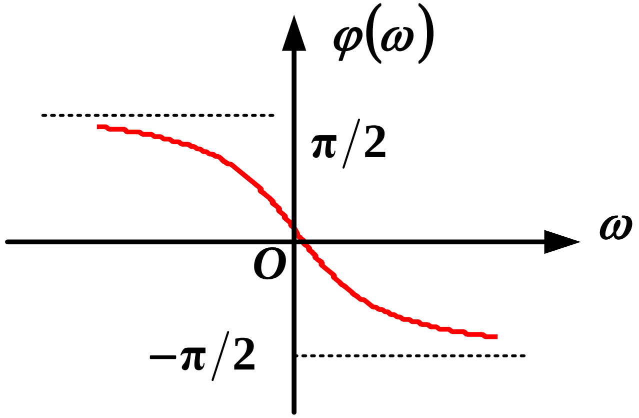
$$H(\omega) = \frac{1}{j\omega + 2}$$

5.4.1 频域系统函数

$H(\omega)$ **是复函数，写成模和辐角的形式：**

$$H(\omega)=\frac{1}{j\omega+2}=\frac{1}{\sqrt{\omega^2+2^2}}e^{-j\arctan\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$





例5.4-2 已知描述连续时间系统的微分方程为

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2x'(t) + x(t)$$

求该系统的频域系统函数。

解：对微分方程两边求傅里叶变换，利用傅里叶变换的时域微分特性

$$(j\omega)^2 Y(\omega) + 3j\omega Y(\omega) + 2Y(\omega) = 2j\omega X(\omega) + X(\omega)$$

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{2j\omega + 1}{(j\omega)^2 + 3j\omega + 2}$$

5.4.1 频域系统函数

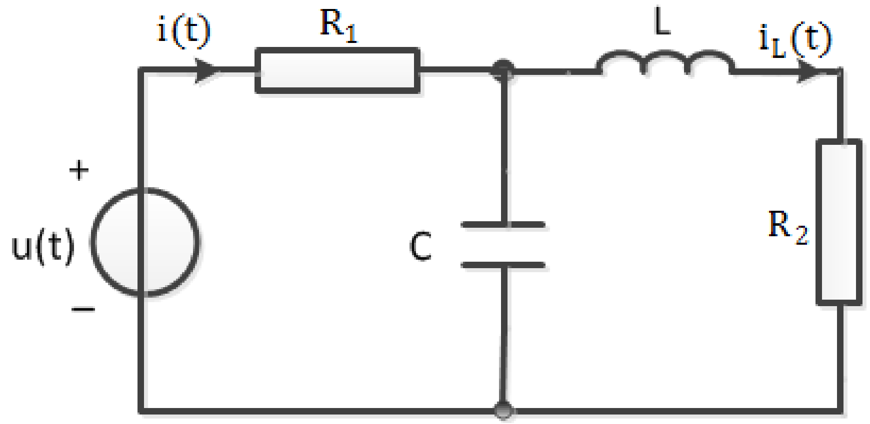
$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{2j\omega + 1}{(j\omega)^2 + 3j\omega + 2}$$

$$|H(\omega)| == \frac{\sqrt{(2\omega)^2 + 1}}{\sqrt{(2 - \omega^2)^2 + (3\omega)^2}} = \sqrt{\frac{4\omega^2 + 1}{\omega^4 + 5\omega^2 + 4}}$$

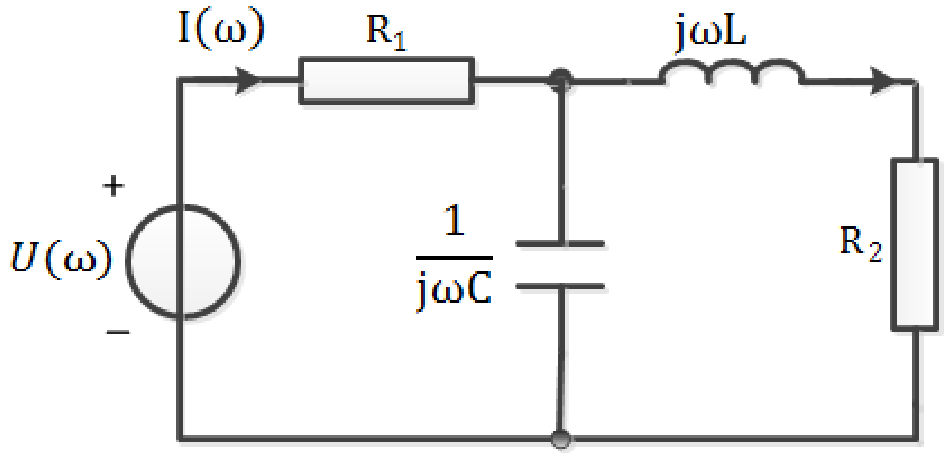
$$\varphi(\omega) = \arctan(2\omega) - \arctan\left(\frac{3\omega}{2 - \omega^2}\right)$$

同学们可以尝试用MATLAB绘制幅频特性和相频特性图！

例5.4-3求电路图的频率响应函数。（思考：有几个频率响应？）



时域电路



频域电路

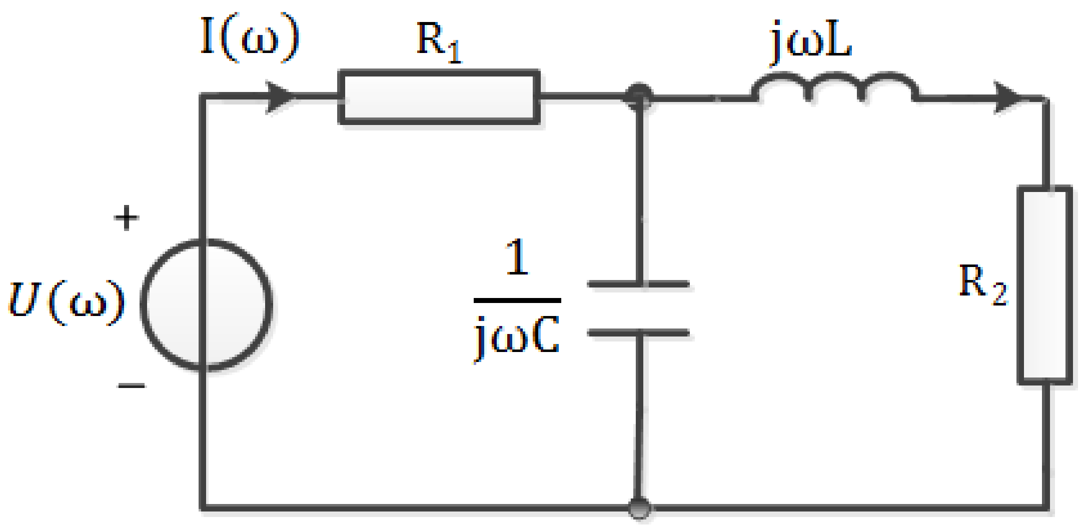
$$i_C(t) = C\frac{du_C(t)}{dt} \quad \leftrightarrow I_C(\omega) = j\omega C U_C(\omega)$$

$$u_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} \quad \leftrightarrow U_L(\omega) = j\omega L I_L(\omega)$$

系统输入为 $u(t)$ **,输出为**$i(t)$

$$H(\omega)=\frac{I(\omega)}{U(\omega)}$$

$$=\frac{1}{R_1+(j\omega L+R_2)//\dfrac{1}{j\omega C}}$$



频域电路

周期信号的响应计算

根据周期信号傅里叶级数展开理论，任何一个周期信号都可以分解为复指数函数的线性表示形式。对于LTI系统，系统的输出满足叠加原理，先来讨论周期信号的基本组成单元--复指数信号作用到线性时不变系统的响应。

系统的频率响应 $H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt$

系统的输入信号 $x(t) = Ke^{j\omega_1 t}$

复指数信号作用下的响应

$$H(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$x(t)=Ke^{j\omega_1 t} \longrightarrow \boxed{\begin{matrix}H(\omega)\\ h(t)\end{matrix}} \longrightarrow y(t)=x(t)*h(t)$$

系统的响应

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t-\tau)h(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}Ke^{j\omega_1(t-\tau)}h(\tau)d\tau$$

$$=Ke^{j\omega_1 t}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j\omega_1\tau}h(\tau)d\tau=Ke^{j\omega_1 t}H(\omega_1)$$

可见，系统的输出等于系统输入与频域系统函数在输入频率处的值相乘。

2.利用频域系统函数求响应

$$\boxed{H(\omega) = |H(\omega)| e^{j\varphi(\omega)}}$$

频域系统函数在输入信号频率 ω_1 处的值

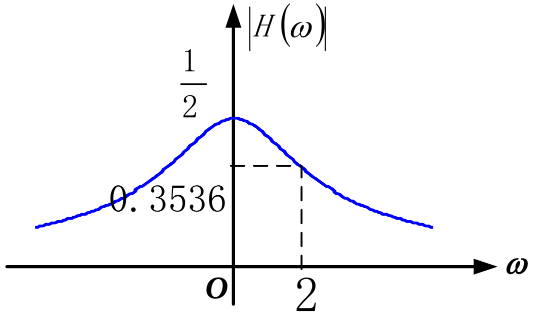
$$H(\omega_1) = |H(\omega_1)| e^{j\varphi(\omega_1)}$$

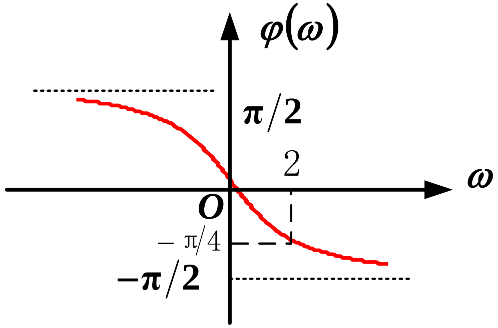
因此，得到输出信号为

$$y(t) = Ke^{j\omega_1 t} H(\omega_1) = K|H(\omega_1)| e^{j[\omega_1 t + \varphi(\omega_1)]}$$

幅度---相位

例5.4-4系统的幅频特性和相频特性如图所示，输入 $x(t) = 1 + 3e^{j2t}$ **求系统的响应。**





解：输入信号包含直流和频率ω = 2的复指数信号，系统幅频特性和相频特性在这两个频率上的值从图中读出列在下表中：

频率ω_1	幅频特性取值	相频特性取值
$\omega_1 = 0$	0.5	0
$\omega_1 = 2$	0.3536	$-\frac{\pi}{4}$

5.4.2 利用系统函数求响应

$$H\left(\omega_1\right) = \left|H\left(\omega_1\right)\right| e^{j\varphi\left(\omega_1\right)}$$

$$H\left(0\right) = \left|H\left(0\right)\right| e^{j\varphi\left(0_1\right)} = 0.5$$

$$H\left(2\right) = \left|H\left(2\right)\right| e^{j\varphi\left(2\right)} = 0.3536e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

$$x\left(t\right) = 1 + 3e^{j2t}$$

$$\Rightarrow$$

$$y(t) = 1 \times 0.5 + 3 \times 0.3536e^{j\left(2t-\frac{\pi}{4}\right)}$$

5.4.2 利用系统函数求响应

正弦信号作用下响应

当输入信号为 $x(t)=K\cos(\omega_1 t)=\dfrac{K}{2}\left(e^{j\omega_1 t}+e^{-j\omega_1 t}\right)$

$$\Rightarrow \quad y(t)=\frac{K}{2}\left(e^{j\omega_1 t}H(\omega_1)+e^{-j\omega_1 t}H(-\omega_1)\right)$$

频域系统函数 $H(\omega)$ **的模** $|H(\omega)|$ **是** ω **的偶函数，**

辐角 $\varphi(\omega)$**是** ω **的奇函数。**

$$|H(\omega_1)|=|H(-\omega_1)|,\ \varphi(\omega_1)=-\varphi(-\omega_1)$$

$$y(t)=\frac{K}{2}|H(\omega_1)|\left(e^{j\omega_1 t}e^{j\varphi(\omega_1)}+e^{-j\omega_1 t}e^{-j\varphi(\omega_1)}\right)$$

$$=K|H(\omega_1)|\cos\left[\omega_1 t+\varphi(\omega_1)\right]$$

周期信号输入下的响应小结

输入信号 → $H(\omega)=|H(\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$ → **输出信号**

$$Ke^{j\omega_1 t} \qquad K|H(\omega_1)|e^{j[\omega_1 t+\varphi(\omega_1)]}$$

$$K\cos(\omega_1 t+\theta) \qquad K|H(\omega_1)|\cos[\omega_1 t+\theta+\varphi(\omega_1)]$$

$$K\sin(\omega_1 t+\theta) \qquad K|H(\omega_1)|\sin[\omega_1 t+\theta+\varphi(\omega_1)]$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\omega_1 t} \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n|H(n\omega_1)|e^{j(n\omega_1 t+\varphi(n\omega_1))}$$

LTI系统输入信号与输出信号同频率，只有幅度和相位的变换！

例5.4-5 已知LTI系统的频率响应和输入信号，求响应。

$$H(\omega) = \frac{1}{j\omega + 2} \qquad x(t) = 2\cos(2t) + 1.5\sin\left(3t + \frac{\pi}{3}\right)$$

解：输入信号包含两个频率，频域系统函数在这两个频率处的幅度和相位分别为：

$$H(2) = \frac{1}{j2 + 2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{-j\frac{\pi}{4}} \qquad H(3) = \frac{1}{j3 + 2} = \frac{1}{\sqrt{13}} e^{-j\arctan\frac{3}{2}}$$

$$y(t) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{2}} \cos\left(2t - \frac{\pi}{4}\right) + 1.5 \times \frac{1}{\sqrt{13}} \sin\left(3t + \frac{\pi}{3} - \arctan\left(\frac{3}{2}\right)\right)$$

5.4.2 利用系统函数求响应

根据频域系统函数的定义，系统输入，输出的傅里叶变换和频域系统函数这三者之中已知任意两项，可求得第三项。

- 系统分析：

  已知$H(\omega)$、输入或输出中的一个，求输出或输入

- 系统综合（即系统设计）：

  根据输入和输出信号，求频域系统函数

5.4.2 利用系统函数求响应

例5.4-6 描述某系统的微分方程 $y'(t) + 2y(t) = x(t)$

$x(t) = e^{-t}\varepsilon(t)$ **求系统的零状态响应。**

解：根据微分方程求出频域系统函数 $H(\omega) = \dfrac{1}{j\omega + 2}$

$$x(t) = e^{-t}\varepsilon(t) \leftrightarrow X(\omega) = \frac{1}{j\omega + 1}$$

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) = \frac{1}{j\omega + 1}\frac{1}{j\omega + 2}$$

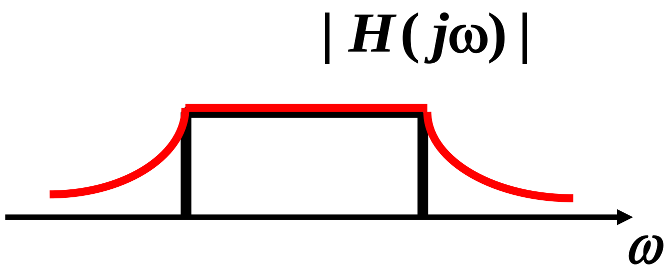
$$y(t) = \mathscr{F}^{-1}\left[\frac{1}{j\omega + 1}\frac{1}{j\omega + 2}\right] = \left(e^{-t} - e^{-2t}\right)\varepsilon(t)$$

利用频域系统函数求响应，要求熟练掌握常用信号的傅里叶正反变换，省去了繁琐的解方程或求卷积过程。

一 滤波的概念

通过系统改变信号中各频率分量的相对大小，甚至完全去除某些频率分量的过程称为滤波。

$$\boxed{Y(j\omega)=H(j\omega)X(j\omega)}$$



二 理想滤波器

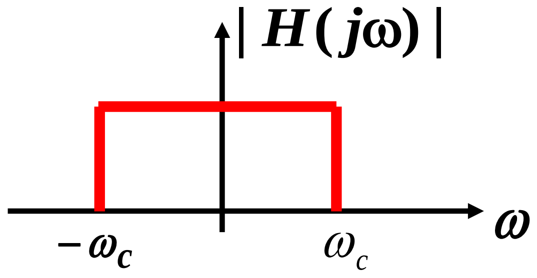
理想低通滤波器

理想高通滤波器

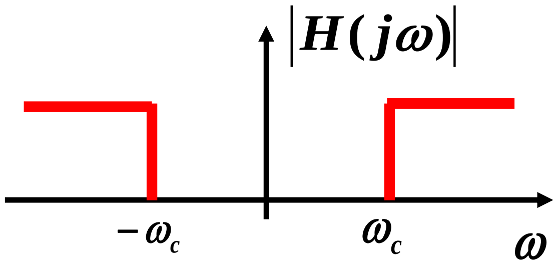
理想带通滤波器

理想带阻滤波器

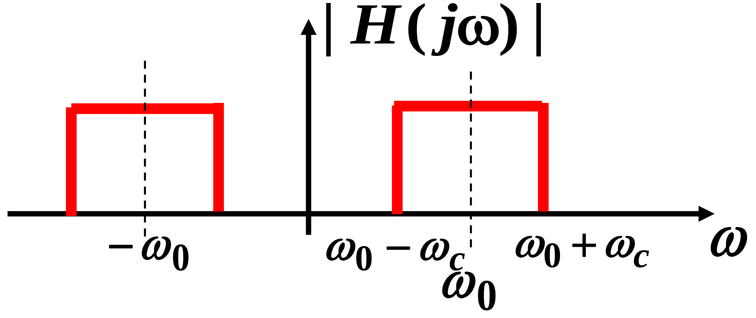
理想低通滤波器



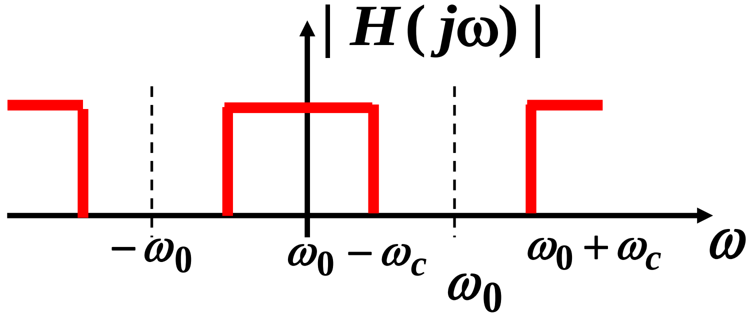
理想高通滤波器



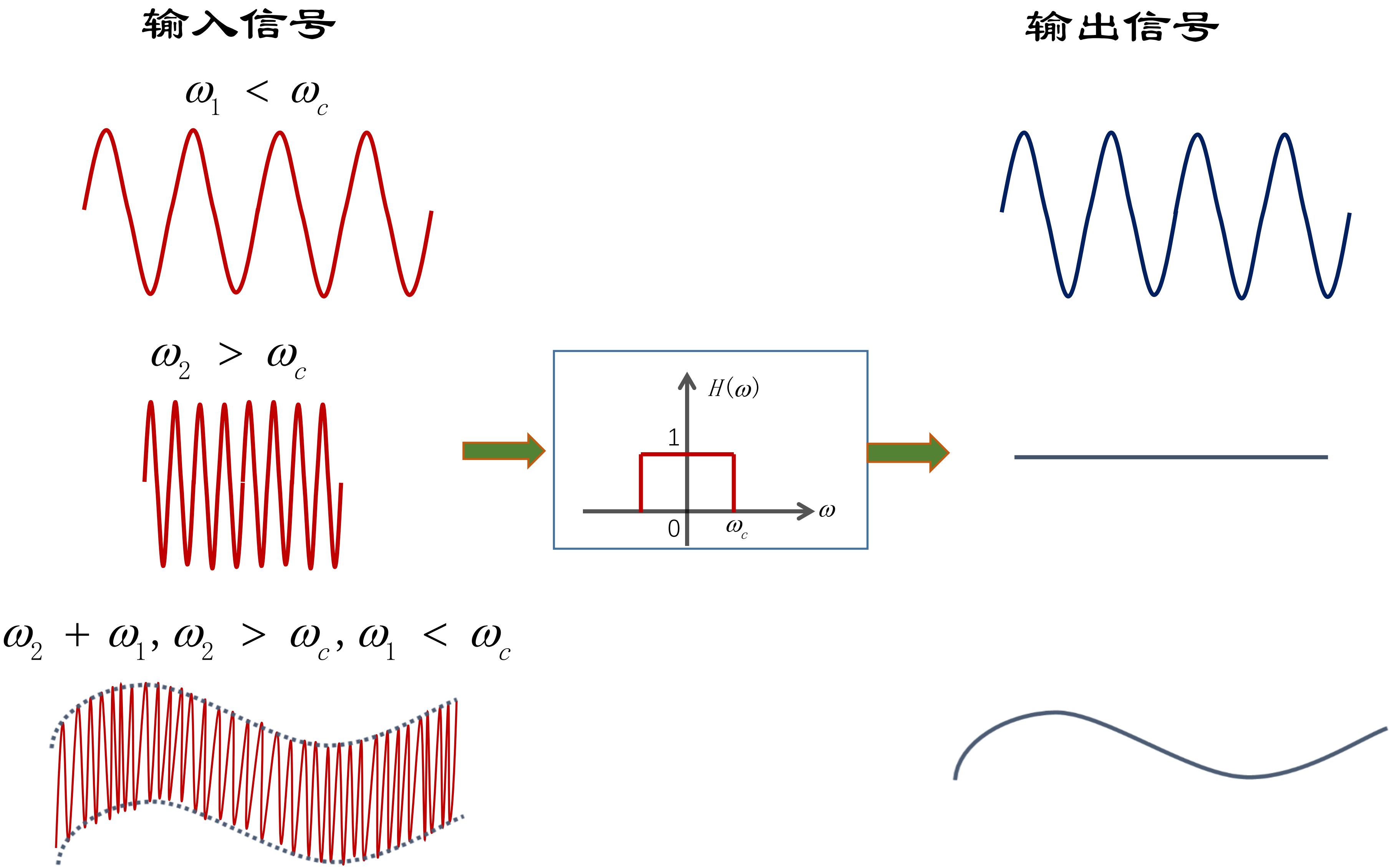
理想带通滤波器



理想带阻滤波器



理想低通滤波器特性



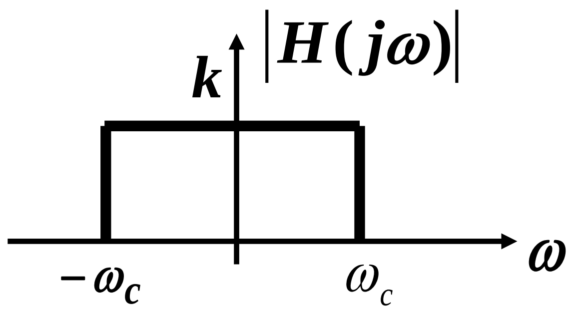
怎样滤除频谱上不需要的成分，保留有用的频率？

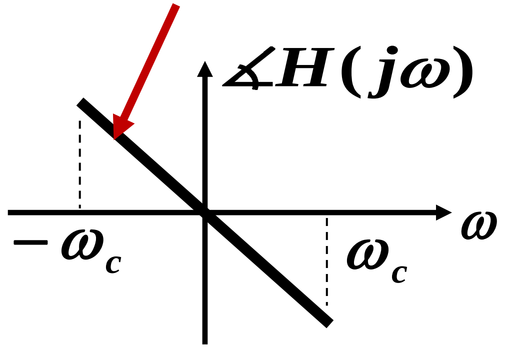
三　理想滤波器的特性分析

理想低通

ω_c　截止频率

t_d　群延时





频率响应　　　　**不作特别说明，默认取k=1**

$$H(j\omega)=\begin{cases} ke^{-j\omega t_d} & |\omega|<\omega_c \\ 0 & |\omega|>\omega_c \end{cases} = kG_{2\omega_c}(\omega)\cdot e^{-j\omega t_d}$$

$$H(j\omega)=\begin{cases} ke^{-j\omega t_d} & |\omega|<\omega_c \\ 0 & |\omega|>\omega_c \end{cases}=kG_{2\omega_c}(\omega)\cdot e^{-j\omega t_d}$$

$$h(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

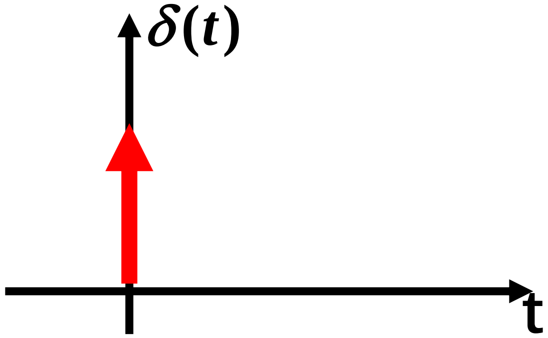
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}k\cdot e^{-j\omega t_d}e^{j\omega t}d\omega$$

$$=\frac{k}{\pi}\cdot\frac{1}{\left(t-t_d\right)}\cdot\frac{1}{2j}\left[e^{j\omega_C\left(t-t_d\right)}-e^{-j\omega_C\left(t-t_d\right)}\right]$$

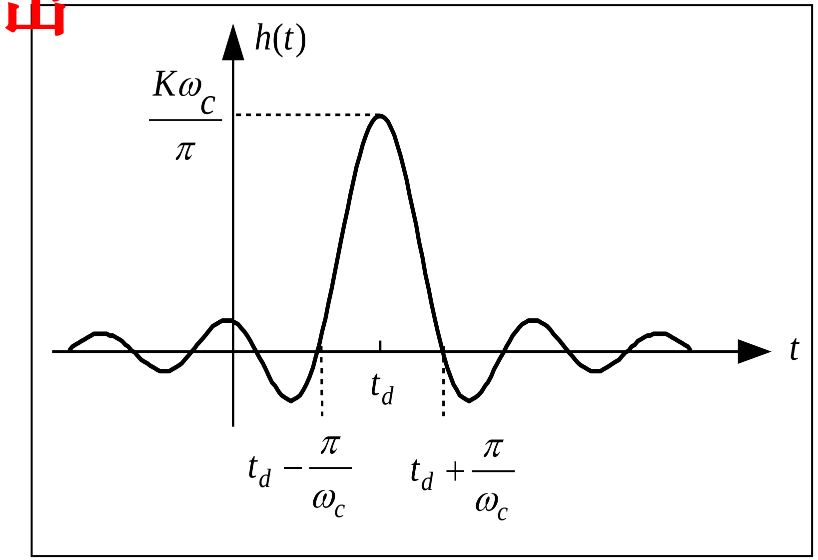
$$=\frac{k\omega_c}{\pi}\cdot\frac{\sin\omega_c\left(t-t_d\right)}{\omega_c\left(t-t_d\right)}=\frac{k\omega_c}{\pi}\cdot Sa\left[\omega_c\left(t-t_d\right)\right]$$

单位冲激响应

输入



输出



$$h(t)=\frac{k\omega_c}{\pi}Sa[\omega_c(t-t_d)]$$

① 波形产生失真；

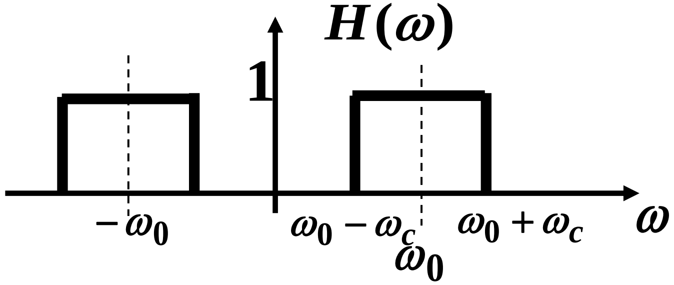
② 失真的原因：

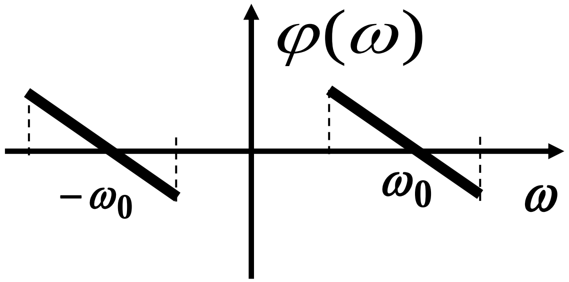
$|\omega|>\omega_c$ 的频率分量被截断；

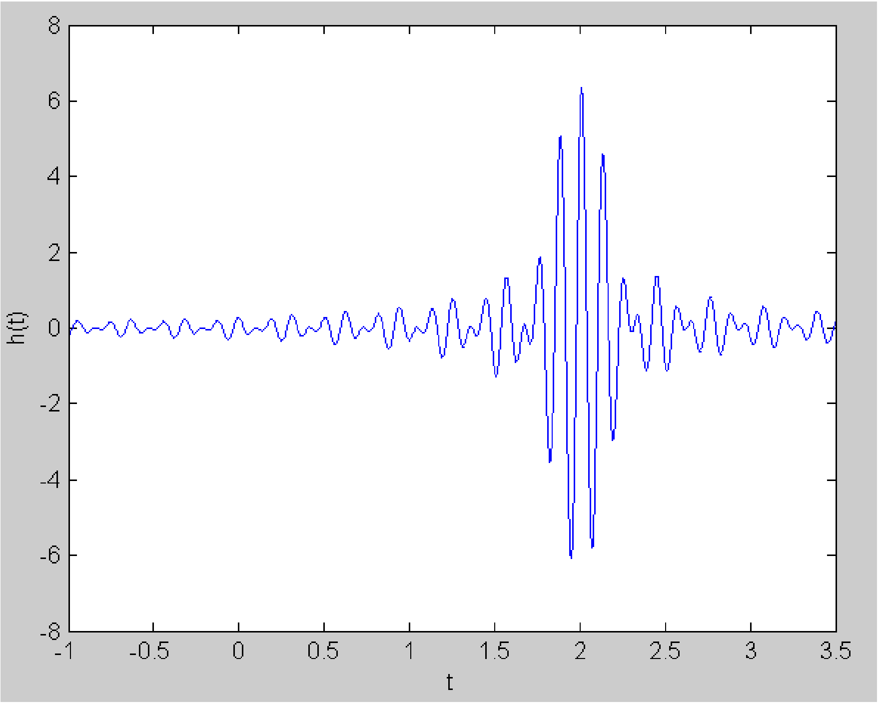
③非因果，不可实现；

理想带通

频率响应





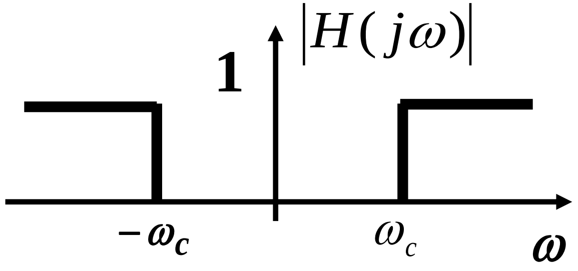


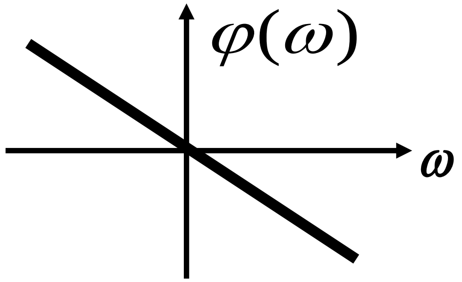
低通 $$H_1(j\omega)=G_{2\omega_C}(\omega)\cdot e^{-j\omega t_d}$$

带通 $$H(j\omega)=H_1(j\omega)*[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$$

冲激响应 $$h(t)=\frac{2\omega_c}{\pi}Sa\left[\omega_c\left(t-t_d\right)\right]\cos\omega_0 t$$

理想高通





频率响应

$$H(j\omega)=\begin{cases} e^{-j\omega t_d} & |\omega|>\omega_C \\ 0 & |\omega|\le\omega_C \end{cases} = [1-G_{2\omega_C}(\omega)]\cdot e^{-j\omega t_d}$$

通(频)带： $|\omega|>\omega_c$　　　**阻带：** $\omega\in(-\omega_c,\omega_c)$

输入信号中大于ω_c的频率分量通过，而小于ω_c的频率分量被抑制。

例5.5-1—理想低通滤波器的 截止频率$\omega_c = 3$, 群延时$t_0 = 1.5$ ，

滤波器输入信号

$$x(t) = 2\cos\left(2t + \frac{\pi}{3}\right) + 3\sin\left(5t + \frac{\pi}{4}\right)$$

求滤波器的输出。

解：输入信号包含 2，5 两个频率，频率2在通带内，

按无失真传输输出，频率5在通带外，被滤除。

$$y(t) = 2\cos\left(2\left(t - 1.5\right) + \frac{\pi}{3}\right)$$

例5.5-2一线性时不变系统的冲激响应为$h(t)=\dfrac{\sin(2\pi t)}{\pi t}$

1） 求频域系统函数 $H(\omega)$

2） 输入信号 $x_1(t) = 3\cos(4\pi t)\sin(5\pi t)$ **，求输出** $y_1(t)$

$$\boxed{\tau Sa(\frac{t\tau}{2}) \leftrightarrow 2\pi G_\tau(-\omega)}$$

解：

1） $h(t)=\dfrac{\sin(2\pi t)}{\pi t}=2Sa(2\pi t)$ $\quad H(\omega) = \mathscr{F}\left[h(t)\right] = g_{4\pi}(\omega)$

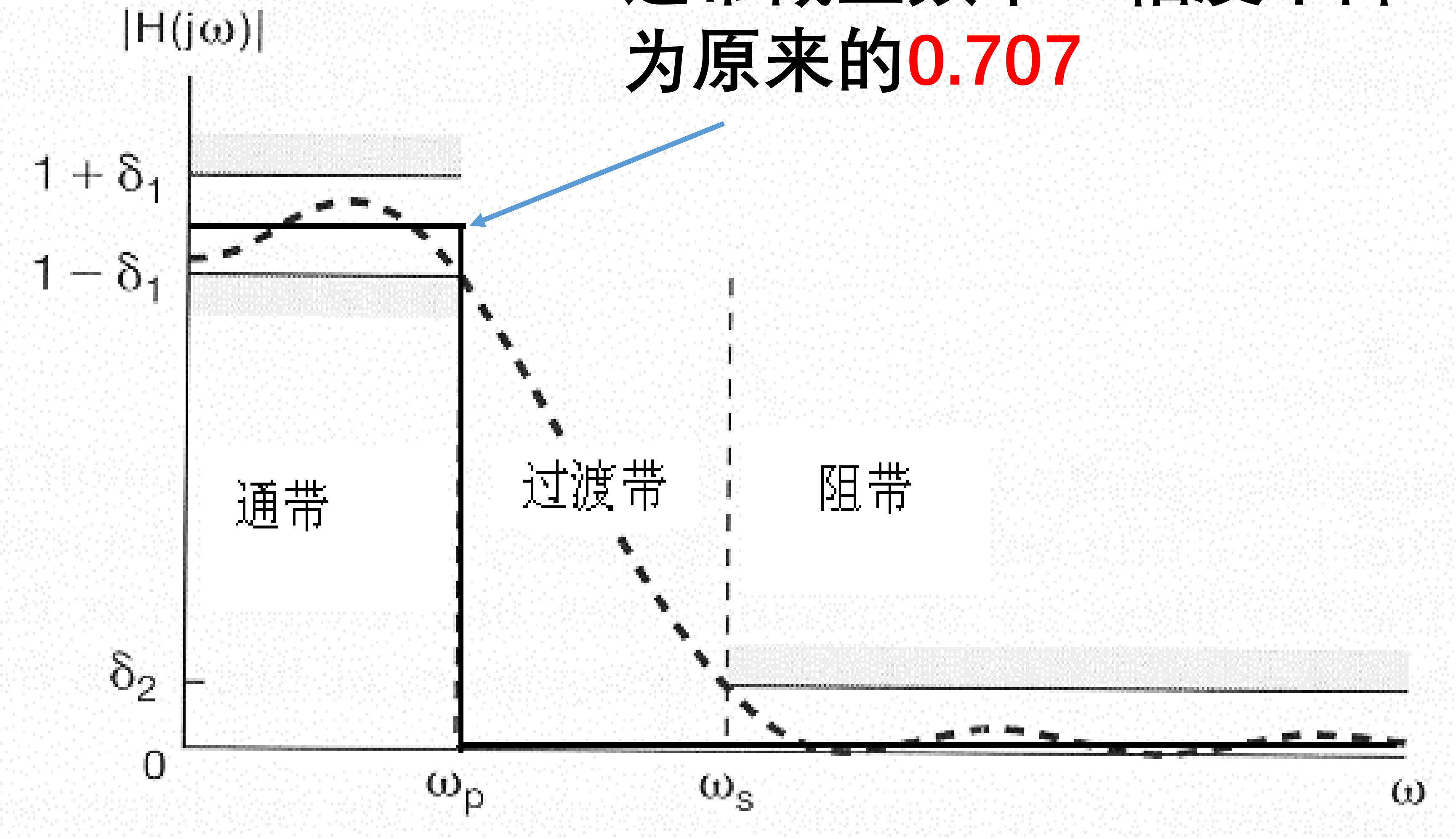
该系统为截止频率为 2π **的理想低通滤波器。**

2） $x_1(t) = 3\cos(4\pi t)\sin(5\pi t) = \dfrac{3}{2}\left[\sin(\pi t) + \sin(9\pi t)\right]$

$$y_1(t) = \frac{3}{2}\sin(\pi t)$$

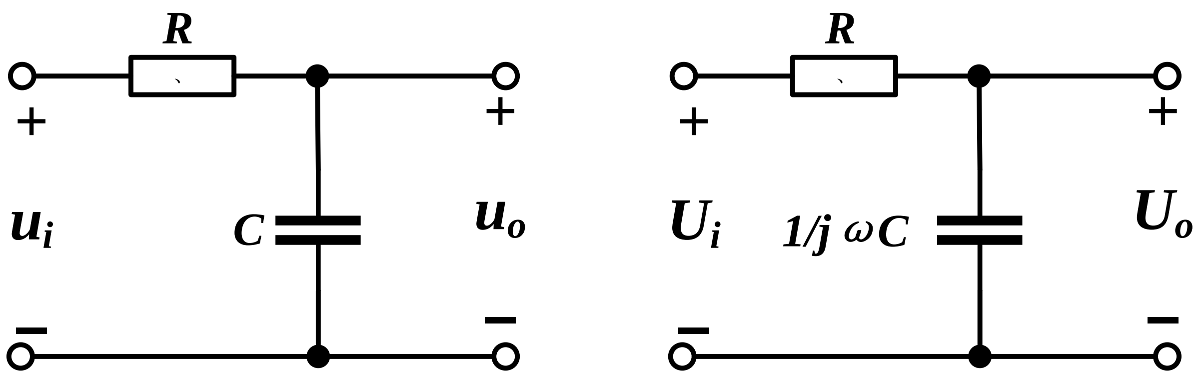
四 实际低通滤波器

通带截止频率：幅度下降为原来的0.707



实际滤波器的通带、阻带、过渡带

例5.5-3 如图5.5-3所示的一阶RC电路，输入电压源$u_i(t)$，输出是电容两端电压$u_o(t)$，指出其属于哪一类选频滤波器。



(a) 一阶RC电路　(b) 频域等效电路

$$H(\omega)=|H(\omega)|\angle\varphi(\omega)=\frac{U_o(\omega)}{U_i(\omega)}=\frac{\dfrac{1}{j\omega C}}{R+\dfrac{1}{j\omega C}}=\frac{1}{1+j\omega RC}$$

定义 $\omega_0=\dfrac{1}{RC}$　$H(\omega)=\dfrac{1}{1+\mathrm{j}\omega/\omega_0}$

$$|H(\omega)|=\frac{1}{\sqrt{1+(\omega/\omega_0)^2}}$$

$$\varphi(\omega)=-\arctan(\omega/\omega_0)$$

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega/\omega_0)^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan(\omega/\omega_0)$$

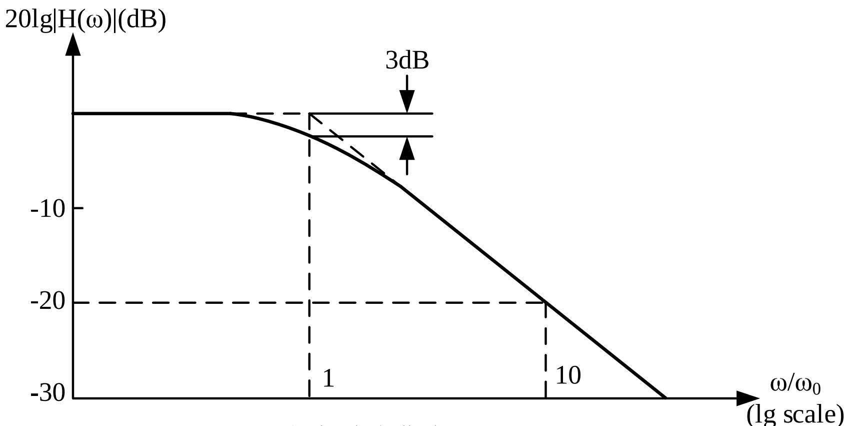
- $|\omega| << \omega_0$时，$\boldsymbol{H}(\omega) \approx 1, \varphi(\omega) \approx -\dfrac{\omega}{\omega_0}$

  $|\omega| >> \omega_0$时，$\boldsymbol{H}(\omega) \approx 0$ **可近似理想LPF。**

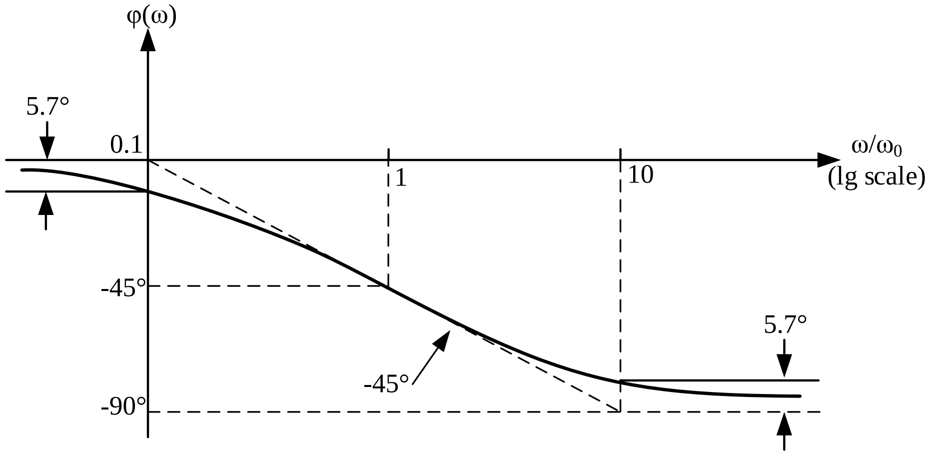
- 在ω_0附近，与理想滤波器差异较大；

- $|\omega| >> \omega_0$时，$H(j\omega) \approx \dfrac{\omega_0}{j\omega}$ 积分器

波特图

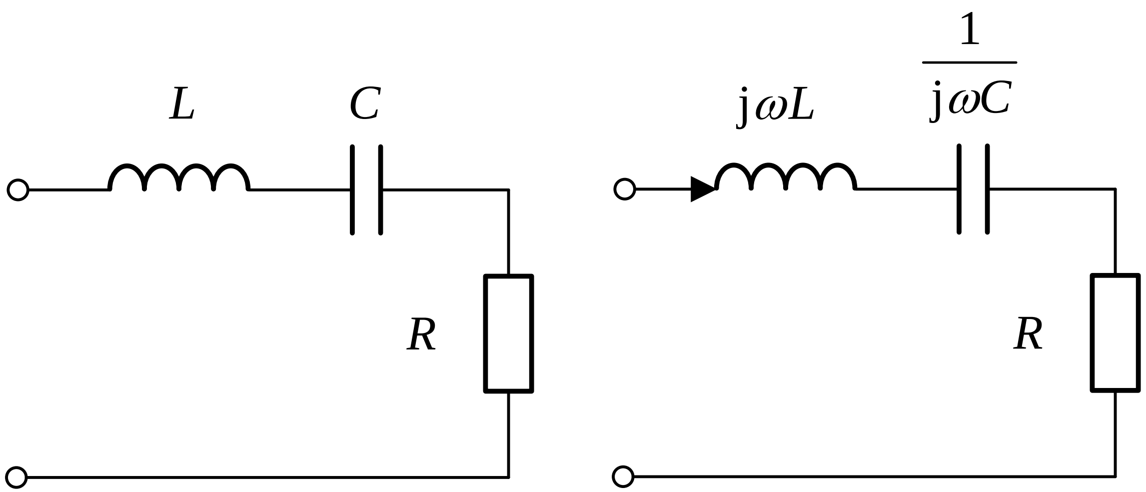


(a) 幅频响应曲线



(b) 相频响应曲线

5.6.1 谐振电路



(a) (b)

$$Z(\omega) = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})$$

当$\omega L = \dfrac{1}{\omega C}$时，$Z(\omega) = R$

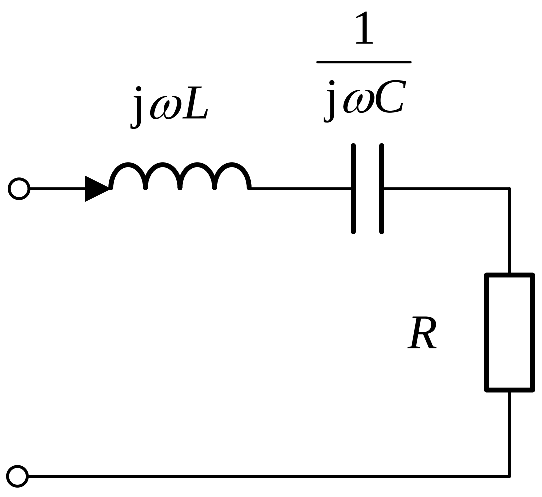
电路的端电压和电路的总电流同相位，称电路处于串联谐振状态

5.6.1 谐振电路

（1）串联谐振电路的特点

谐振时，$\omega_0 L = \dfrac{1}{\omega_0 C}$

故谐振频率 $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

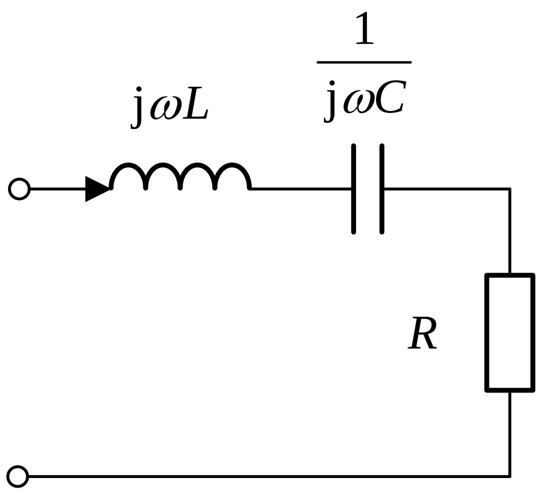


(b)

串联谐振电路进入谐振稳态后，任一时刻电感与电容中的储能之和为恒定值。犹如电感和电容组成一个孤立的封闭系统，电感和电容中的储能发生等量交换，通常称它为电磁振荡，因此谐振电路又叫振荡电路。

$$w_L(t) + w_C(t) = LI^2(\omega_0)\sin^2\omega_0 t + LI^2(\omega_0)\cos^2\omega_0 t = \text{常数} = LI^2(\omega_0)$$

（1）串联谐振电路的特点



(b)

为了维持谐振电路中的电磁振荡，激励源仅需供给电阻所消耗的能量。若提供电阻消耗的能量远比电磁场储能总和小，则电路"品质"越好。一般采用品质因素Q来定量描述谐振电路这一品质，其定义如下：

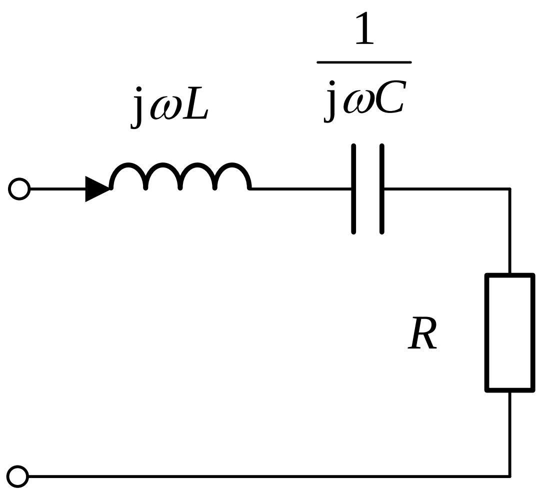
$$Q = 2\pi \frac{\text{谐振时电路中的总电磁能量}}{\text{谐振时一个周期内电路中消耗的能量}}$$

$$Q = 2\pi \frac{LI^2(\omega_0)}{I^2(\omega_0)RT_0} = \frac{2\pi f_0 L}{R} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 CR}$$

（1）串联谐振电路的特点

$$Q=\frac{\omega_0 L}{R}=\frac{L/\sqrt{LC}}{R}=\frac{\sqrt{L/C}}{R}=\frac{\rho}{R}$$

$\rho=\sqrt{L/C}$ 称为特性阻抗



(b)

谐振时电感和电容电压有效值分别为

$$U_L(\omega_0)=\frac{\omega_0 L}{R}U=QU$$

$$U_C(\omega_0)=\omega_0 L I(\omega_0)=QU$$

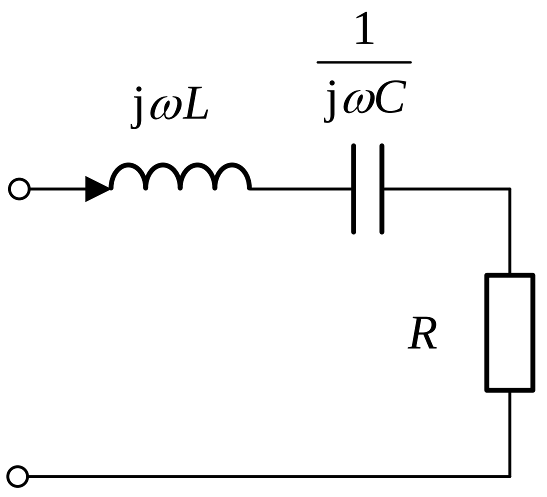
（2）串联谐振电路电流的频率响应

$$\dot{I}(\omega)=\frac{\dot{U}(\omega)}{Z}=\frac{\dot{U}(\omega)}{R+j(\omega L-\dfrac{1}{\omega C})}$$

$$=\frac{\dot{U}(\omega)}{R+j(\omega_0 L\times\dfrac{\omega}{\omega_0}-\dfrac{1}{\omega_0 C}\times\dfrac{\omega_0}{\omega})}$$

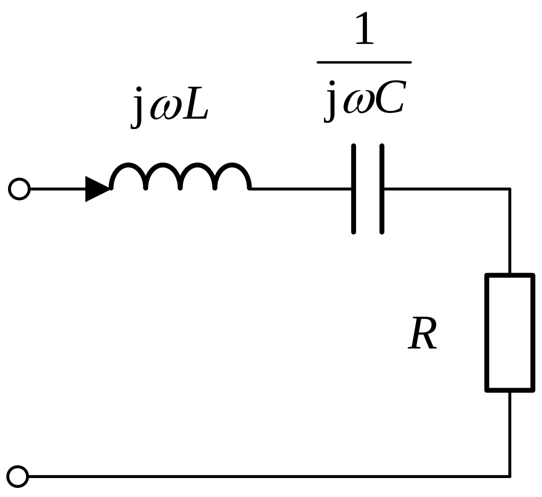
$$=\frac{\dot{U}(\omega)}{R+j\omega_0 L(\dfrac{\omega}{\omega_0}-\dfrac{\omega_0}{\omega})}=\frac{\dot{U}(\omega)}{R\left[1+\dfrac{j\omega_0 L}{R}(\dfrac{\omega}{\omega_0}-\dfrac{\omega_0}{\omega})\right]}$$

$$=\frac{\dot{I}(\omega_0)}{1+\dfrac{j\omega_0 L}{R}(\dfrac{\omega}{\omega_0}-\dfrac{\omega_0}{\omega})}=\frac{\dot{I}(\omega_0)}{1+jQ(\dfrac{\omega}{\omega_0}-\dfrac{\omega_0}{\omega})}$$



(b)

（2）串联谐振电路电流的频率响应



(b)

故电流相量比为

$$\frac{\dot{I}(\omega)}{\dot{I}(\omega_0)}=\frac{1}{1+jQ(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega})}$$

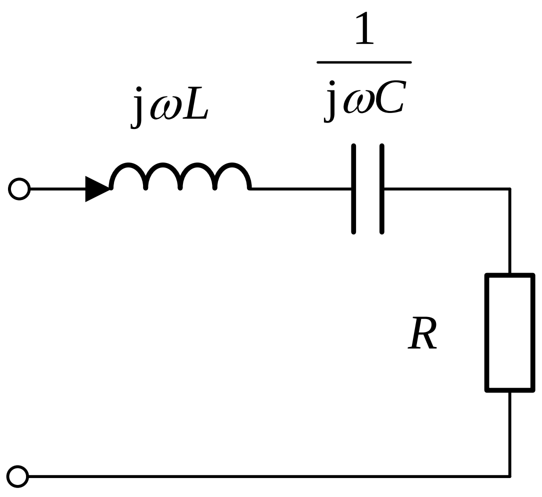
$$=\frac{1}{\sqrt{1+Q^2(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega})^2}}\angle-\mathrm{tg}^{-1}[Q(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega})]$$

$$\frac{I(\omega)}{I(\omega_0)}=\frac{1}{\sqrt{1+Q^2(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega})^2}}\qquad \varphi_I(\omega)=\angle-\mathrm{tg}^{-1}[Q(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega})]$$

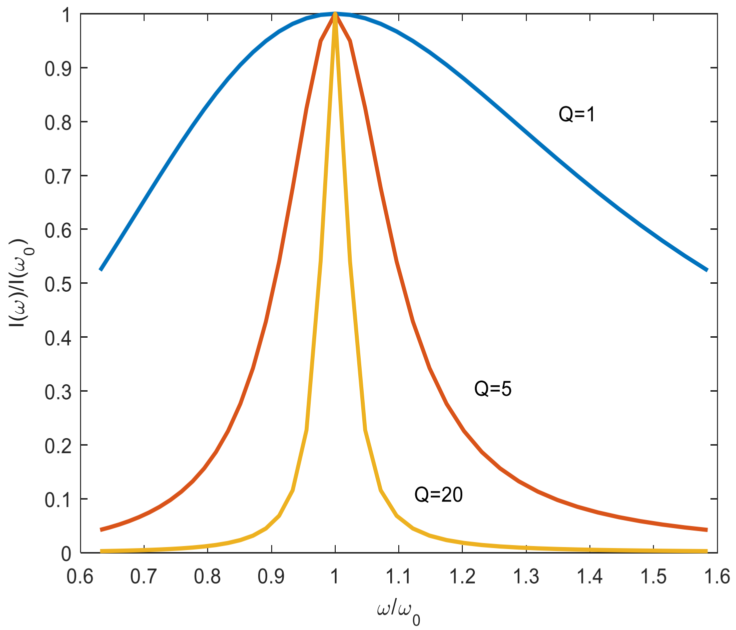
（2）串联谐振电路电流的频率响应

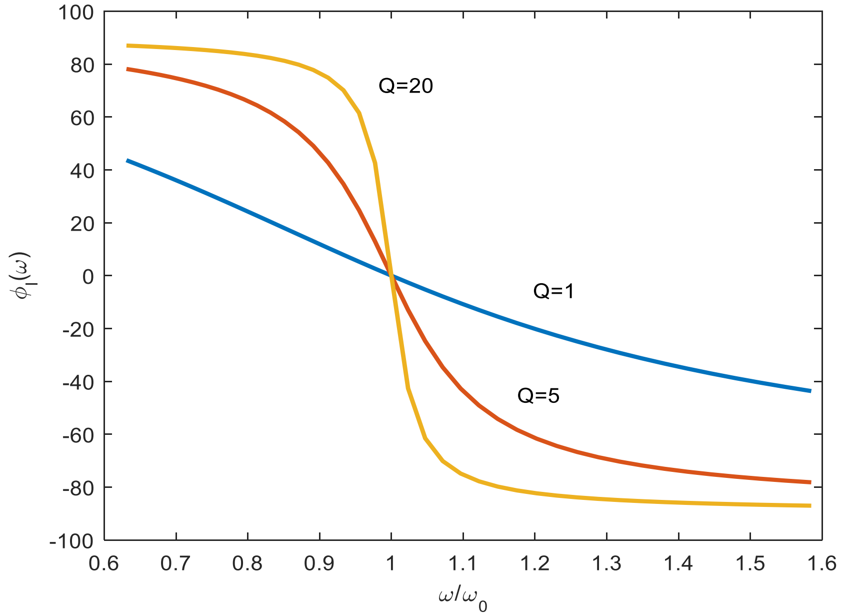
$$\frac{I(\omega)}{I(\omega_0)}=\frac{1}{\sqrt{1+Q^2(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega})^2}}$$

$$\varphi_I(\omega)=\angle-\mathrm{tg}^{-1}[Q(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega})]$$

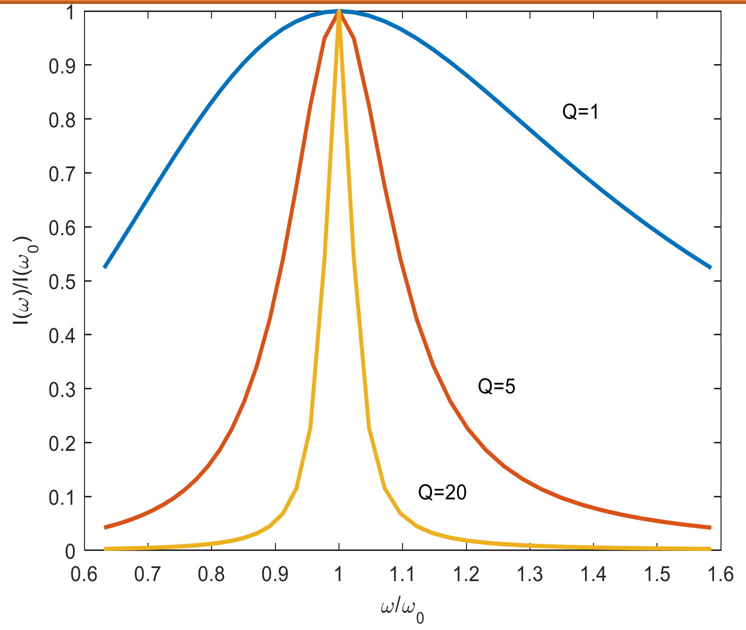


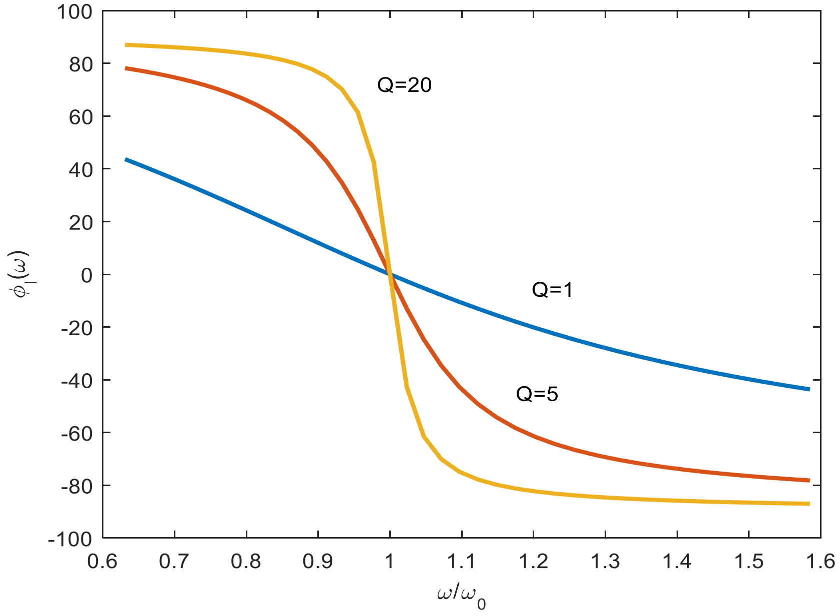
(b)





（2）串联谐振电路电流的频率响应





$$\omega_1 = \omega_0\left[\sqrt{1+\frac{1}{4Q^2}} - \frac{1}{2Q}\right]$$

$$\omega_2 = \omega_0\left[\sqrt{1+\frac{1}{4Q^2}} + \frac{1}{2Q}\right]$$

故通频带为

$$BW = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q}$$

习题：5-10~5-13，5-16，5-17。截止时间：6月11日早8点