题 号						
得 分						

注意：所有答案全部书写在试卷上，答案写在其他地方视为无效！

得分	

一、填空题（请将答案填写在横线上。共六小题，每题 3 分，总共 18 分）

1、设 A 是 4×3 矩阵，且 $R(A)=2$，而 $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&2\\0&0&3\end{pmatrix}$，则

$R(AB)=$ <u>2</u>；

2、设 $A=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\1&3&0&0\\0&0&3&3\\0&0&4&2\end{pmatrix}$，则 $|A|=$ <u>-30</u>；

3、$\begin{vmatrix}1&-1&1&-1\\1&-2&4&-8\\1&3&9&27\\1&4&16&64\end{vmatrix}=$ <u>-600</u>；

4、若方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_1+kx_2-x_3=0\\2x_1-x_2+x_3=0\end{cases}$ 仅有零解，则 k 应满足 <u>$k\neq-5$</u>；

5、线性方程组 $A_{m\times n}X=\beta$ 有解的充要条件是 <u>$R(A)=R(A\vdots\beta)$</u>

6、设 3 阶方阵 $|A|=2$，则 $||A|A^T|=$ <u>16</u>；

得分	

二、选择题（请将正确答案填写在括号中，在字母前勾选所得结果视为无效本题共六小题，每题 3 分，共 18 分）

1、设A和B均为n阶方阵，以下命题不正确的是（ D ）；

(A) 若$AB=0$，则$|A|=0$或$|B|=0$　　(B) 若 A 与 B 有相同的秩，则 A 与 B 等价

(C) 若A可逆且$AB=AC$，则$B=C$　　(D) $(AB)^2=A^2B^2$

2、设A为四阶方阵，秩$(A)=2$，则秩$(A^*)=$（ C ）；

(A) 4　　(B) 3　　(C) 0　　(D) 1

3、下列不是初等矩阵的为（ A ）

A. $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&-1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-5&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\5&0&1\end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$

4、若A是n阶对称矩阵，B是n阶反对称矩阵，则有（ A ）；

(A) A^2是对称矩阵　　(B) AB是反对称矩阵

(C) B^2是反对称矩阵　　(D) $AB-BA$是反对称矩阵

5、若方程组$AX=b$中方程的个数少于未知量的个数，则有（ B ）；

(A) $AX=b$必有无穷多解　　(B) $AX=0$必有非零解

(C) $AX=0$仅有零解　　(D) $AX=0$一定无解

6、对于n阶可逆矩阵A、B，则下列等式中不成立的是（ B ）；

(A) $|(AB)^{-1}|=|A^{-1}||B^{-1}|$　　(B) $|(AB)^{-1}|=\frac{1}{|A^{-1}|}\frac{1}{|B^{-1}|}$

(C) $|(AB)^{-1}|=|A|^{-1}|B|^{-1}$　　(D) $|(AB)^{-1}|=\frac{1}{|AB|}$

三、试求解下列各题（本题共四小题，每题6分，共24分）

得分	

1、求四阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$；

$$=-\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ -1 & 7 & -3 & 4 \\ 2 & -9 & 5 & 7 \\ 1 & -6 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \cdots 3分$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -9$$

$\cdots 3分$

2、设 A 为三阶方阵，且 $|A|=\frac{1}{2}$，试求 $|(3A)^{-1}-2A^*|$；

因为 $A\cdot A^*=|A|\cdot E \Rightarrow A^*=|A|\cdot A^{-1} \cdots 1分$

$(3A)^{-1}-2A^*=\frac{1}{3}A^{-1}-2|A|\cdot A^{-1}=-\frac{2}{3}A^{-1} \cdots 2分$

$|(3A)^{-1}-2A^*|=|-\frac{2}{3}A^{-1}|=(-\frac{2}{3})^3\cdot|A^{-1}|=-\frac{8}{27}\cdot\frac{1}{|A|}$

$=-\frac{16}{27} \cdots 3分$

本大题注：仅答案计算错误，

3、设 $A=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\3&0&1\end{pmatrix}$，试计算 $(A+B)(A-B)$ 与 A^2-B^2；

$A+B=\begin{pmatrix}2&0&3\\0&4&2\\3&0&2\end{pmatrix}$，$A-B=\begin{pmatrix}0&0&3\\0&0&0\\-3&0&0\end{pmatrix}$ ……1分

$(A+B)\cdot(A-B)=\begin{pmatrix}2&0&3\\0&4&2\\3&0&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&3\\0&0&0\\-3&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9&0&6\\-6&0&0\\-6&0&9\end{pmatrix}$ ……2分

$A^2=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&3\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&6\\0&4&3\\0&0&1\end{pmatrix}$ ……1分 $B^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\3&4&3\\6&0&1\end{pmatrix}$ ……

$A^2-B^2=\begin{pmatrix}0&0&6\\-3&0&0\\-6&0&0\end{pmatrix}$

4、设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&-1&\lambda\\2&5&\lambda&-1\\1&1&-6&10\end{pmatrix}$，且 $R(A)=3$，试求 λ 的值。

$A\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&-1&\lambda\\0&1&\lambda+2&-1-2\lambda\\0&-1&-5&10-\lambda\end{pmatrix}$ ……1分 $\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-2&-1&\lambda\\0&1&\lambda+2&-1-2\lambda\\0&0&\lambda-3&9-3\lambda\end{pmatrix}$ ……2分

因为 $R(A)=3$，$\therefore\ \lambda-3\neq0 \Rightarrow \lambda\neq3$ ……3分

误，扣1分。

得分	

四、试求解下列各题（本题共四小题，每题6分，共24分）

1、设 $X = AX + B$，其中 $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&1&1\\-1&0&-1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，试求 X。

$X - AX = B \Rightarrow (E-A)X = B$ …1分

因为 $|E-A| = \begin{vmatrix}1&-1&0\\1&0&-1\\1&0&0\end{vmatrix} = 1 \neq 0$ ∴ $E-A$ 可逆 1分

故 $X = (E-A)^{-1}\cdot B$ …2分，$X=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ …2分

2、设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$，矩阵 X 满足 $A^*X = 4A^{-1} + 2X$，试求 $|X|$。

等式两边同时左乘A得 $A\cdot A^*X = 4A\cdot A^{-1} + 2AX$

$\Rightarrow |A|X = 4E + 2AX$ …2分

$|A| = 4$ …1分

∴ $(4E-2A)X = 4E \Rightarrow (2E-A)\cdot X = 2E$ …1分

两边同时取行列式可得 $|X| = 2$ …2分

3、设 $D=\begin{vmatrix}2&1\\1&1\\-3&1\\5&1\end{vmatrix}$

$A_{14}+$

$=-\begin{vmatrix}1&2\\1&1\\1&-3\\1&5\end{vmatrix}$

4、已知a是常

因 $|A| =$

∴ $|B|$

∴ $\begin{vmatrix}1\\0\\-1\end{vmatrix}$

本大题注：仅答案计算错误，扣

3、设$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ -3 & 1 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$，试求$A_{14}+A_{24}+A_{34}$。

$$A_{14}+A_{24}+A_{34}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \cdots 3分$$

$$=-\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -1 \end{vmatrix}=-9 \cdots 2分$$

4、已知a是常数，且矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix}$可经初等变换化为矩阵$B=\begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，试求a。

因 $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix}=0 \cdots 1分$

$\therefore |B|=0 \cdots 2分$

$\therefore \begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & a+1 & 3 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow a=2 \cdots 3分$

…是，扣2分。

得分	

五、 试求解下列试题（共 10 分）

问 λ 取何值时，线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 4 \\ -x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda^2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases}$ 无解，有唯一解，或有无穷多解？并在有无穷多解时求出其通解。

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ -1 & \lambda & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda+1 & \lambda+1 \\ 0 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)(4-\lambda) = 0$$

$\Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 4$ ……3分

当 $\lambda \neq -1$ 且 $\lambda \neq 4$ 时，~~解~~ 有唯一解. ……1分

当 $\lambda = -1$ 时

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & -8 \end{pmatrix}$$ 无解

……2分

当 $\lambda = 4$ 时

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 \\ -1 & 4 & 1 & 16 \\ 1 & -1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 5 & 5 & 20 \\ 0 & -2 & -2 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ ……2分

令 $x_3 = t$，则得 $\begin{cases} x_1 = -3t \\ x_2 = 4-t \\ x_3 = t \end{cases}$

其中 t 为自由变量 ……2分

得分

设 n 阶

$B = ($

①证

②

?并在有无

得分	

六、证明题（共6分）

设n阶方阵A和B满足条件$A+B=AB$，（1）试证明$A-E$为可逆矩阵；（2）已知$B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&4\end{pmatrix}$，试求矩阵$A$。

①证明：$AB-A=B \Rightarrow A(B-E)-(B-E)=E$ ……1分

$\Rightarrow (A-E)(B-E)=E$ ……1分

$\therefore$ $A-E$可逆。……1分

② 由①可知 $(B-E)^{-1}=A-E$ ……1分

$\therefore A-E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ ……1分

$\therefore A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&\frac{3}{2}&0\\0&0&\frac{4}{3}\end{pmatrix}$ ……1分

…3分