杭州电子科技大学信息工程学院学生考试卷（期末）A卷

课程名称	高等数学甲（下）	考试日期	10年 6月23日		时间共120分钟
考生姓名		任课教师姓名			
学号		班级		专业	

题号	一、二、三	四	五、六、七	总分
得分				

一、填空题(每小题3分，共计15分)

1．点$(4,-3,5)$到坐标轴x的距离为$\underline{\sqrt{34}}$.

2．曲线$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=9 \\ x+z=1 \end{cases}$在$xoy$面上的投影方程为$\underline{\begin{cases} 2x^2+y^2-2x-8=0 \\ z=0 \end{cases}}$.

3．函数$z=\sin(xy)$的全微分$dz=\underline{\cos(xy)(ydx+xdy)}$.

4．写出一个简单的条件收敛的级数:$\underline{\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}}$.

5．设$f(x)$是周期为2π的周期函数，它在$[-\pi,\pi)$上的表达式为$f(x)=x$.

则它的傅里叶级数在点$x=3\pi$处收敛于 $\underline{\quad 0 \quad}$.

二、单项选择题（每小题3分，共计15分）

1．设$z=\arctan(xy)$，则$\frac{\partial z}{\partial x}=$ （ B ）

(A) $y\sec^2(xy)$ (B) $\frac{y}{1+x^2y^2}$ (C) $\frac{y}{\sqrt{1+x^2y^2}}$ (D) $\frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}}$

2．设$z=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$，则点（1，0） （ B ）

（A）是z的极大值点 （B）是z的极小值点

（C）不是z的极值点 （D）是否为z的极值点不能确定

3．曲面$z=x^2+y^2-1$在点$(2,1,4)$处的切平面方程是： （ C ）

(A) $\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-4}{-1}$； (B) $\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-4}{1}$；

(C) $4(x-2)+2(y-1)-(z-4)=0$； (D) $4(x-2)+2(y-1)+(z-4)=0$.

4．设曲面$\Sigma: x^2+y^2+z^2=R^2$,则对面积的曲面积分$\iint_\Sigma dS$等于 （ D ）

(A) 0 (B) πR^2 (C) $2\pi R^2$ (D) $4\pi R^2$

5．级数$\sum_{n=1}^{+\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$ （ A ）

（A）收敛； （B）发散； （C）敛散性不能确定； （D）不是正项级数

三、试解下列各题（每小题6分，共计12分）

1．一平面过点$(1,0,-1)$且平行于向量$\boldsymbol{a}=(2,1,1)$和$\boldsymbol{b}=(1,-1,0)$,试求这平面的方程.

解: 这平面的法向 $\vec{n}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=(1,1,-3)$ (4分)

这平面的方程 $x+y-3z=4$ (6分)

2．设$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,求$\frac{\partial r}{\partial x},\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}$.

解:$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}$ (3分)

$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}=\frac{y^2+z^2}{r^3}$ (6分)

四、试解下列各题（每小题 6 分，共计 36 分）

1. 设 $z=z(x,y)$ 由方程 $\dfrac{x}{z}=\ln\dfrac{z}{y}$ 确定，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$、$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解: 令 $F(x,y,z)=\dfrac{x}{z}-\ln z+\ln y$ (1 分)

$$F_x=\frac{1}{z},\quad F_y=\frac{1}{y},\quad F_z=-\frac{z^2}{(x+z)y} \qquad \text{(4 分)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{z}{x+z} \qquad \text{(5 分)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{z^2}{(x+z)y} \qquad \text{(6 分)}$$

2. 求曲线 $x=\dfrac{t}{1+t},y=\dfrac{1+t}{t},z=t^2$ 在对应于 $t_0=1$ 的点处的切线方程与法平面方程.

解:曲线上对应于 $t_0=1$ 的点为 $(\dfrac{1}{2},2,1)$ (1 分)

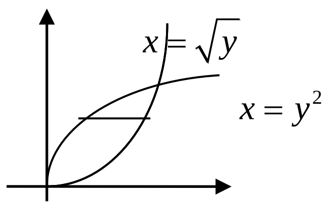
此点处的切向量 $\vec{T}=(\dfrac{1}{(1+t)^2},-\dfrac{1}{t^2},2t)\Big|_{t=1}=(\dfrac{1}{4},-1,2)=\dfrac{1}{4}(1,-4,8)$ (4 分)

所以，此点处的切线方程 $\dfrac{x-\frac{1}{2}}{1}=\dfrac{y-2}{-4}=\dfrac{z-1}{8}$ (5 分)

此点处的法平面方程 $2x-8y+16z=1$ (6 分)

3. 画出积分区域 D 并计算二重积分: $I=\iint\limits_D x\sqrt{y}\,d\sigma$

其中 D 是由两条平面曲线 $y=\sqrt{x},y=x^2$ 所围成的闭区域.



(图 1 分)

解: $I=\int_0^1\sqrt{y}dy\int_{y^2}^{\sqrt{y}}xdx$ (4 分)

$=\int_0^1\dfrac{1}{2}(y^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{9}{2}})dy$ (5 分)

$=\dfrac{6}{55}$ (6 分)

4. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$ 的收敛半径、收敛域及其和函数.

解：收敛半径 $R=1$ . . . . 1 分

收敛域 $(-1,1)$ . . . . 2 分

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x^n\right)'$ ....3 分

$=\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n\right)'$ ....4 分

$=\left(\dfrac{x}{1-x}\right)'$ ....5 分

$=\dfrac{1}{(1-x)^2}$ $\quad x\in(-1,1)$ . . . . 6 分

5. 计算曲线积分 $\oint_L xds$，其中 L 为由直线 $y=x$ 及抛物线 $y=x^2$ 所围成的区域的整个边界.

解: $\oint_L xds=\int_{y=x}xds+\int_{y=x^2}xds$ ....2 分

$=\int_0^1 x\sqrt{2}dx+\int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}dx$ ....4 分

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x^2\Big|_0^1+\dfrac{1}{12}(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1$ ....5 分

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{1}{12}(5\sqrt{5}-1)$ ....6 分

6. 计算对坐标的曲线积分 $\int_L(x^2-y)dx-(x+\sin y)dy$，其中 L 是在圆周 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 上由点 $(0,0)$ 到点 $(1,1)$ 的一段弧.

解:令 $P=x^2-y,\quad Q=-x-\sin y$,............................1 分

$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=-1,\dfrac{\partial P}{\partial y}=-1$ ....2 分

故积分与路径无关,所以选折线段从 $(0,0)$ 沿 $y=0$ 到 $(1,0)$,再沿 $x=1$ 到终点 $(1,1)$ ....3 分

$\int_L(x^2-y)dx-(x+\sin y)dy=\int_0^1 x^2dx+\int_0^1(-1-\sin y)dy$ ....5 分

$=\cos 1-\dfrac{5}{3}$ ....6 分

五、试解下列各题（本题 8 分）

在平面 xoy 上求一点,使它到 $x=0, y=0$ 及 $x+2y-16=0$ 三直线的距离平方之和为最小.

解:设所求点为 (x,y),则目标函数 $z=x^2+y^2+\dfrac{(x+2y-16)^2}{5}$ ……3 分

由 $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=2x+\dfrac{2}{5}(2x+y-16)=0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=2y+\dfrac{4}{5}(2x+y-16)=0 \end{cases}$ ……5 分

解得驻点 $\begin{cases} x=\dfrac{8}{5} \\ y=\dfrac{16}{5} \end{cases}$ 是唯一的驻点,……7 分

根据问题的性质可知,到三直线的距离平方之和最小的点一定存在,故 $(\dfrac{8}{5},\dfrac{16}{5})$ 即为所求……8 分.

六、二题中选一题做（本题 9 分）

1．计算 $I=\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz$，其中 $\Omega: z=\dfrac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=h\ (R>0, h>0)$ 所围成的闭区域.

2．计算对坐标的曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma} zdxdy$，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的下半部分的下侧.

1.解: $I=\int_0^h z\pi\dfrac{R^2}{h^2}z^2dz$ ……7 分

$=\dfrac{\pi}{4}R^2h^2$ ……9 分

2.解: $I=\iint\limits_{\Sigma} zdxdy=-\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2} -\sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy$ ……5 分

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R\sqrt{R^2-r^2}rdr$ ……7 分

$=-\dfrac{2\pi}{3}(R^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^R$ ……8 分

$=\dfrac{2\pi}{3}R^3$ ……9 分

七、证明题（本题 5 分）

证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散.

证明:反证.设 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n}$ 收敛于 s，设级数的部分和数列为 $\{s_n\}$ . . . . 1 分

那么，$s_n\to s$，$s_{2n}\to s\ (n\to+\infty)$，从而. . . . . 2 分

$s_{2n}-s_n\to 0 \quad (n\to+\infty)$ . . . . 3 分

但 $s_{2n}-s_n=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}>\dfrac{1}{2}$，. . . . . 4 分

故 $s_{2n}-s_n\not\to 0 \quad (n\to+\infty)$ . . . . 5 分

与假设收敛矛盾，这说明级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散