杭州电子科技大学学生考试卷（ A ）卷

考试课程	高等数学 A2		考试日期	2015 年 6 月 21 日		成绩	
课程号	A0714202	教师号		任课教师姓名			
考生姓名		学号（8位）		年级		专业	

题号	一	二	三						四	五	六
得分											

得分	

一、 填空题（本题共 4 小题，每小题 3 分，共 12 分）

1. 平面 $\Pi_1: x-y+2z-6=0$ 和平面 $\Pi_2: 2x+y+z-5=0$ 的夹角为 $\underline{\ \frac{\pi}{3}\ }$；

2. 设 L 是从 $A(1,\frac{1}{2})$ 沿曲线 $2y=x^2$ 到 $B(2,2)$ 的弧段，则 $\int_L \frac{2x}{y}dx-\frac{x^2}{y^2}dy=$ $\underline{\ 0\ }$；

3. 设 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 2x\}$，则 $\iint\limits_D (1+2y)dxdy=$ $\underline{\ \pi\ }$；

4. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ 在 $(0,\pi)$ 内的和函数为 $S(x)=1+x$，则此级数在 $x=3\pi$ 处收敛于 $\underline{\ 0\ }$ 。

得分	

二、 选择题（本题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分）

1. 设 L 是从 $A(1,0)$ 到 $B(-1,2)$ 的直线段，则 $\int_L (x+y)ds=$（ B ）

(A) $\sqrt{2}$； (B) $2\sqrt{2}$； (C) 2； (D) 0.

2. 函数 $f(x)=x^2e^{x^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内展开为 x 的幂级数为（ C ）.

(A) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}$； (B) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n!}$； (C) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2(n+1)}}{n!}$； (D) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)!}$.

3. 函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F(xy,z)=x$ 所确定，其中 $F(u,v)$ 具有连续的一阶偏导数，则 z_x+z_y 等于（ A ）

(A) $\frac{1-yF_1-xF_1}{F_2}$； (B) $\frac{1-yF_1-xF_1}{F_2}$； (C) 0； (D) 1.

4. 设 L 是圆域 $D: x^2+y^2\le -2x$ 的正向周界，则 $\oint_L (x^3-y)dx+(x-y^3)dy$ 等于（ D ）

(A) -2π； (B) 0； (C) $\frac{3}{2}\pi$； (D) 2π.

5. 设 Σ 为柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=0$ 与 $z=1$ 所围立体的外侧，则 $\oiint\limits_{\Sigma} zdxdy=$（ B ）

(A) 3π； (B) π； (C) -2π； (D) 2π

6. 若幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x+1)^n$ 在 $x=1$ 处发散，则该级数在 $x=-4$ 处的敛散性为（ C ）

(A) 绝对收敛； (B) 条件收敛； (C) 发散； (D) 敛散性无法判定.

7. [3 分] 下列级数中收敛的是（ D ）

(A) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+1}{n(n+2)}$； (B) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n}{n2^n}$；

(C) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$； (D) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin na}{n^2}$，其中 $0<a<1$.

8. 设 $f(x,y)$ 是连续函数，则 $\int_1^2 dx\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy$ 的积分次序交换后为（ B ）

(A) $\int_0^1 dy\int_{2-y}^{y^2} f(x,y)dx$； (B) $\int_0^1 dy\int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$；

(C) $\int_0^1 dy\int_1^{1-y^2} f(x,y)dx$； (D) $\int_0^1 dy\int_1^{2-y} f(x,y)dx$.

三、试解下列各题（本题共 6 小题，每小题 6 分，共 36 分）

得分	

1. 设 $f(x,y)=x\ln(x+\ln y)$，求 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

解 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\ln(x+\ln y)+\dfrac{x}{x+\ln y}$ ···3'

$\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{x}{y(x+\ln y)}$ ···3'

得分	

2. 判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(n^2)}{n\sqrt{n}}$ 的敛散性，并给出理由（若是收敛，要说明是条件收敛还是绝对收敛）。

解 $\because \left|\dfrac{\sin(n^2)}{n\sqrt{n}}\right|\le\dfrac{1}{n^{3/2}}$ ······ 2'

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{3/2}}$ 收敛 1'

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{\sin(n^2)}{n\sqrt{n}}\right|$ 收敛 ···· 1'

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(n^2)}{n\sqrt{n}}$ 收敛，且为绝对收敛 2'

得分	

3. 计算 $\iint\limits_D xy\,dxdy$，其中 D 是由曲线 $y^2=x$ 及直线 $y=x-2$ 所围成的闭区域

解：D_y：$-1\le y\le 2$，$y^2\le x\le y+2$ ···2'

$\iint\limits_D xy\,dxdy=\int_{-1}^{2}dy\int_{y^2}^{y+2}xy\,dx$ ···

$=\dfrac{1}{2}\int_{-1}^{2}\left[y(y+2)^2-y^5\right]dy$ ···2'

$=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{y^4}{4}+\dfrac{4}{3}y^3+2y^2-\dfrac{1}{6}y^6\right]_{-1}^{2}$

$=\dfrac{45}{8}=\dfrac{135}{24}$ ···2'

得分	

4. 立体 Ω 由曲面 $x^2+y^2=4z$ 和平面 $z=4$ 所围成，求其表面积.

解 $\because$ 表面可分 $\Sigma_上$ $\Sigma_下$ 两部分 1'

$\Sigma_上$ 的面积 $S_1=\pi 4^2=16\pi$ ···1'

$\Sigma_下$ 方程 $z=\frac{1}{4}(x^2+y^2)$

$\Sigma_下$ 面积 $S_2=\iint\limits_{x^2+y^2\le 16}\sqrt{1+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}y^2}\,dxdy$ ··2'

$=\iint\limits_{\substack{0\le\theta\le 2\pi\\0\le\rho\le 4}}\sqrt{1+\frac{1}{4}\rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\theta$

$=2\pi\cdot 2\int_0^4\left(1+\frac{1}{4}\rho^2\right)^{\frac{1}{2}}d\left(1+\frac{1}{4}\rho^2\right)$

$=\dfrac{8\pi}{3}(5\sqrt{5}-1)$ ··2'

$S_总=S_1+S_2=\dfrac{40\pi}{3}(\sqrt{5}+1)$ ··1'

得分	

5. 求 $\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}} e^{x^2+y^2}dx$.

解 原式 $= \iint\limits_D e^{x^2+y^2}dxdy$

$= \iint\limits_D e^{\rho^2}\rho\, d\rho\, d\theta$ ···2'

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^1 e^{\rho^2}\rho\, d\rho$ ··2'

$= \frac{\pi}{4}\left[e^{\rho^2}\right]_0^1$

$= \frac{\pi}{4}(e-1)$ ··2'

得分	

6. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)x^n$ 的收敛域和它的和函数.

解 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$, $R=1$ 1'

$x\in(-1,1)$ 级数绝对收敛

$x=\pm1$ $\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)(\pm1)^n$ 发散 3

∴ 级数收敛域 $C=(-1,1)$ ···

令和函数 $S(x)$，则 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)x^n$ 1

$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n+x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$ ~ 1

$=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x(n+1)x^n dx\right)'+x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x nx^{n-1}dx\right)'$

$=\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1}\right)'+x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'$

$=\left(\frac{x^2}{1-x}\right)'+x\cdot\left(\frac{x}{1-x}\right)'$

$=\frac{2x-x^2}{(1-x)^2}+\frac{x}{(1-x)^2}=\frac{3x-x^2}{(1-x)^2}$ 2'

四、应用题[本题共 15 分]

得分	

1. （5 分）求曲线 $x=t$，$y=-t^2$，$z=3t-1$ 上一点处与平面 $x+2y+z=4$ 平行的切线方程.

解 $T_{切}=(x_t', y_t', z_t')=(1,-2t,3)$ 2'

$n=(1,2,1)$

由已知 $T_{切}\perp n \Rightarrow T_{切}\cdot n=0$ $t=1$

切点 $M_0(1,-1,2)$ $T_{切}|_{M_0}=(1,-2,3)$ ··· 2'

切线方程 $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-2}{3}$ 1'

2. （10 分）设曲面 S：$\frac{x^2}{2}+y^2+\frac{z^2}{4}=1$ 和平面 π：$2x+2y+z+5=0$，

（1） 试求曲面 S 上平行于平面 π 的切平面方程；

（2） 试求曲面 S 和平面 π 之间的最短距离。

解 曲面 S 在其上点 $M(x,y,z)$ 处法向量 $\vec{n}=(x,2y,\frac{z}{2})$ 1'

已知平面 π 法向量 $\vec{n_0}=(2,2,1)$ 1'

由已知条件 $\vec{n}\parallel\vec{n_0}\Rightarrow \frac{x}{2}=\frac{2y}{2}=\frac{\frac{z}{2}}{1}=t$ 2'

$x=2t$，$y=t$，$z=2t$ 代入 $\frac{x^2}{2}+y^2+\frac{z^2}{4}=1$ 中 $t=\pm\frac{1}{2}$ 1'

$t=\frac{1}{2}$ $M_1(1,\frac{1}{2},1)$ 切平面 π_1 $2(x-1)+2(y-\frac{1}{2})+(z-1)=0$

$t=-\frac{1}{2}$ $M_2(-1,-\frac{1}{2},-1)$ 切平面 π_2 $2(x+1)+2(y+\frac{1}{2})+(z+1)=0$ 2'

M_1, M_2 到已知平面 π 的距离分别为

$d_1=\left.\frac{|2x+2y+z+5|}{3}\right|_{M_1}=\frac{8+1}{3}=3$

$d_2=\left.\frac{|2x+2y+z+5|}{3}\right|_{M_2}=\frac{1}{3}$ 3'

因此 曲面 S 和平面 π 最短距离 $d_{min}=\frac{1}{3}$

得分	

五、综合题[本题 8 分]

计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} 3xz^2dydz + y(z^2+1)dzdx + (9 - z^3)dxdy$，其中 Σ 为旋转抛物面 $z = x^2 + y^2 + 1$（$1 \le z \le 2$）取下侧.

解 补面 Σ_1: $z = 2$ $(x^2+y^2 \le 1)$ 取上侧 $1'$

记 Σ 和 Σ_1 围成的空间区域为 Ω. 则 Σ 和 Σ_1 正好为 Ω 的外侧表面.

$P = 3xz^2$, $Q = y(z^2+1)$, $R = 9 - z^3$ $1'$

$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = z^2 + 1$ $2'$

利用 Gauss 公式 $\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dV$

有 $\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} 3xz^2dydz + y(z^2+1)dzdx + (9-z^3)dxdy = \iiint\limits_{\Omega}(z^2+1)dV$ (*) $2'$

(*)右端 $\iiint\limits_{\Omega}(z^2+1)dV = \int_1^2 z^2dz \iint\limits_{x^2+y^2 \le z-1} dxdy + \int_1^2 dz \iint\limits_{x^2+y^2\le z-1} dxdy = \frac{23}{12}\pi$ $1'$

而 $\iint\limits_{\Sigma_1} 3xz^2dydz + y(z^2+1)dzdx + (9-z^3)dxdy = \pi$ $1'$

$\therefore \iint\limits_{\Sigma} 3xz^2dydz + y(z^2+1)dzdx + (9-z^3)dxdy = \frac{11}{12}\pi$ $1'$

得分	

六、证明题[本题 5 分]

设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 满足 $\frac{u_{n+1}}{u_n} \le \frac{v_{n+1}}{v_n}$，证明：当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛。

证明 $\frac{u_{n+1}}{u_1} = \frac{u_2}{u_1}\cdot\frac{u_3}{u_2}\cdot\frac{u_4}{u_3}\cdots\frac{u_{n+1}}{u_n}$

$\frac{v_{n+1}}{v_1} = \frac{v_2}{v_1}\cdot\frac{v_3}{v_2}\cdot\frac{v_4}{v_3}\cdots\frac{v_{n+1}}{v_n}$ $\Longrightarrow 2'$

$\frac{u_{n+1}}{u_n} \le \frac{v_{n+1}}{v_n}$

$\frac{u_{n+1}}{u_1} \le \frac{v_{n+1}}{v_1}$ 即 $u_{n+1} < \frac{u_1}{v_1}v_{n+1}$ $1'$

当 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时 由比较法知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛. $2'$