一、填空题

1、设 A 为五阶方阵，秩(A)=4，$A^*$ 是 A 的伴随矩阵，则秩$(A^*)$ = 1；

2、实二次型 $f=x_1^2+2x_2^2-3x_3^2$ 的秩为 3，正惯性指数为 2，负惯性指数为 1；

3、已知三阶方阵 A 的三个特征值分别为 1，2，3，则 $|A^2+2A-3E|$ = 0；

4、若向量组 $\alpha_1=[1,1,2]^T$，$\alpha_2=[3,t,1]^T$，$\alpha_3=[0,2,-t]^T$ 线性相关，则 t = -2 或 5；

5、设 A 是 $4\times3$ 矩阵，秩(A) = 2，而 $B=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&2&0\\-1&0&3\end{bmatrix}$，则秩(AB) = 2；

6、设 A 是 $5\times3$ 矩阵，且秩(A)=2，已知 $\eta_1$，$\eta_2$ 是非齐次线性方程组 AX=b 的两个相异的解，则 AX=b 的通解为 $k(\eta_1-\eta_2)+\eta_1$。

二、选择题

1、若向量组 α，β 线性相关，则（ A ）；

（A）α，β 对应分量成比例　　（B）其中必有一零向量

（C）α，β 一定是非零向量　　（D）α=kβ，k 是不为零的数

2、设 λ=2 是可逆矩阵 A 的一个特征值，则矩阵 $(\frac{1}{3}A^2)^{-1}$ 有一个特征值等于（ B ）；

（A）$\frac{4}{3}$　　（B）$\frac{3}{4}$　　（C）$\frac{1}{2}$　　（D）$\frac{1}{4}$

3、已知矩阵 $\begin{bmatrix}22&30\\-12&x\end{bmatrix}$ 有一个特征向量 $\begin{bmatrix}-5\\3\end{bmatrix}$，则 x=（ C ）；

（A）−12　　（B）−14　　（C）−16　　（D）−18

4、若 A 为正交阵，则下列矩阵中不是正交阵的是（ D ）；

（A）$A^{-1}$　　（B）$A^T$　　（C）$A^3$　　（D）3A

5、若方程组 AX=b 中，方程的个数小于未知量的个数，则有（ B ）；

（A）AX=b 必有无穷多解　　（B）AX=0 必有非零解

（C）AX=0 仅有零解　　（D）AX=0 一定无解

6、设 A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 $n\times m$ 矩阵，则（ B ）；

（A）当 m>n 时，必有行列式 $|AB|\neq0$　　（B）当 m>n 时，必有行列式 $|AB|=0$

（C）当 m<n 时，必有行列式 $|AB|\neq0$　　（D）当 m<n 时，必有行列式 $|AB|=0$

1、求矩阵 $A=\begin{bmatrix}-1 & 3 & -1\\ -3 & 5 & -1\\ -3 & 3 & 1\end{bmatrix}$ 的特征值和特征向量；

$|\lambda E-A| = (\lambda-1)(\lambda-2)^2$

$\therefore$ A的特征值为 $\lambda_1=1$ $\lambda_2=2$（二重）

$\lambda_1=1$ 代入 $(\lambda_1 E-A)X=0$ 得基础解系 $\xi_1=(1,1,1)^T$

$\therefore$ A的属于 $\lambda_1=1$ 的所有特征向量为 $k_1\xi_1$ $k_1\neq 0$

$\lambda_2=2$ 代入 $(\lambda_2 E-A)X=0$ 得基础解系 $\xi_2=(1,1,0)^T$ $\xi_3=(1,0,-3)^T$

$\therefore$ A的属于 $\lambda_2=2$ 的所有特征向量为 $k_2\xi_2+k_3\xi_3$，$k_2,k_3$ 不全为0.

2、设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3+x_4^2$，a取何值时f正定？

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 0\\ 1 & a & -1 & 0\\ -1 & -1 & a & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\Delta_1 = a>0\\ \Delta_2 = a^2-1>0\\ \Delta_3 = a(a-1)(a+1)>0.\\ \Delta_4 = \Delta_3 = a(a-1)(a+1)>0\end{cases}$$

$\therefore$ $a>1$ 时 f正定.

3、在欧氏空间 $R^3$ 中，设有两组基：

(I): $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$；(II): $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=\alpha_3$；设α在基(I)下的坐标为 $X=[1,1,1]^T$，求α在基(II)下的坐标；

基(I)到基(II)的过渡矩阵为 $M=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$

设α在基(II)下的坐标为 $Y=(y_1,y_2,y_3)^T$

则有 $Y=M^{-1}X$

$(M \vdots X)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{array}\right)$

$\therefore$ α在基(II)下的坐标为 $(1,0,0)^T$

4、判别矩阵 $A=\begin{bmatrix}-1&1&0\\0&3&0\\1&0&2\end{bmatrix}$ 能否和对角矩阵相似。若与对角矩阵相似，求一个可逆矩阵P

使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵。

$|\lambda E-A| = (\lambda-3)(\lambda-2)(\lambda+1)$

$\therefore$ A有三个互异特征值 $\lambda_1=-1$ $\lambda_2=2$ $\lambda_3=3$

$\therefore$ A可对角化.

$\lambda_1=-1$ 代入 $(\lambda_1 E-A)X=0$ 得基础解系 $\xi_1=(3,0,-1)^T$

$\lambda_2=2$ 、、 $(\lambda_2 E-A)X=0$ ……… $\xi_2=(0,0,1)^T$

$\lambda_3=3$ 、、 $(\lambda_3 E-A)X=0$ ……… $\xi_3=(1,4,1)^T$

令 $P=\begin{pmatrix}3&0&1\\0&0&4\\-1&1&1\end{pmatrix}$ 为可逆阵 且 $P^{-1}AP=diag(-1,2,3)$

## 四、试求解下列各题

1、设向量组 $\alpha_1=[1,1,2]^T$，$\alpha_2=[0,2,1]^T$，$\alpha_3=[2,0,3]^T$，$\alpha_4=[1,1,0]^T$，

求 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个极大线性无关组，将其余向量用该极大线性无关组线性表示；

$$(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4)\to\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&1&-1&-2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$\therefore\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 为一个极大线性无关组.

$$(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_4\ \vdots\ \alpha_3)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&2\\0&1&0&-1\\0&0&1&0\end{array}\right)$$

$\therefore\ \alpha_3=2\alpha_1-\alpha_2$

2、设矩阵 A 与 B 相似，其中 $A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\-3&-3&x\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&y\end{bmatrix}$，求 x 与 y 的值：

$\because$ A, B 相似

$\therefore\ \begin{cases}\operatorname{tr}A=\operatorname{tr}B\\|A|=|B|\end{cases}$

$\therefore\ \begin{cases}x-y=-1\\3x-2y=3\end{cases}$

$\therefore\ \begin{cases}x=5\\y=6\end{cases}$

3、设 A 为三阶方阵，有 3 个不同的特征值 $\lambda_1$，$\lambda_2$，$\lambda_3$，对应的特征向量分别为 $\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$，

若 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，证明：$\beta$，$A\beta$，$A^2\beta$ 线性无关；

令 $k_1\beta+k_2(A\beta)+k_3(A^2\beta)=0$.

$A\beta=A(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=A\alpha_1+A\alpha_2+A\alpha_3=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3$

$A^2\beta=A(\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3)=\lambda_1^2\alpha_1+\lambda_2^2\alpha_2+\lambda_3^2\alpha_3$

$\therefore\ k_1(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)+k_2(\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3)+k_3(\lambda_1^2\alpha_1+\lambda_2^2\alpha_2+\lambda_3^2\alpha_3)=0$.

$(k_1+\lambda_1k_2+\lambda_1^2k_3)\alpha_1+(k_1+\lambda_2k_2+\lambda_2^2k_3)+(k_1+\lambda_3k_2+\lambda_3^2k_3)\alpha_3=0$.

$\because\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.

$\therefore\ \begin{cases}k_1+\lambda_1k_2+\lambda_1^2k_3=0\\k_1+\lambda_2k_2+\lambda_2^2k_3=0\\k_1+\lambda_3k_2+\lambda_3^2k_3=0\end{cases}$

系数行列式 $=\prod\limits_{1\le i<j\le 3}(\lambda_j-\lambda_i)\neq0$

$\therefore\ k_1=k_2=k_3=0$ $\therefore\ \beta, A\beta, A^2\beta$

4、设向量组 (I)：$\beta_1=[0,1,-1]^T,\beta_2=[a,2,1]^T,\beta_3=[b,1,0]^T$ 及向量组 (II)：$\alpha_1=[1,2,-3]^T$，

$\alpha_2=[3,0,1]^T,\alpha_3=[9,6,-7]^T$ 有相同的秩，且 $\beta_3$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2$ 线性表示，求 a,b 的值。

$\because\ R(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)=2$

$\therefore\ |\beta_1\ \beta_2\ \beta_3|=-(a-3b)=0$

$\therefore\ a=3b$

$\because\ \beta_3$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2$ 线性表示.

$\therefore\ |\alpha_1\ \alpha_2\ \beta_3|=2(b-5)=0$

$\therefore\ b=5$

$\therefore\ a=15$

五、 设三阶实对称矩阵A的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=-2$，对应于$\lambda_3$的特征向量为$\xi_1=[-1,1,2]^T$，求

(1) 对应于$\lambda_1$的特征向量；

(2) 求A。

(1) 设对应于$\lambda_1$的特征向量为$\xi=(x_1,x_2,x_3)^T$

$\because \xi \perp \xi_1 \quad \therefore -x_1+x_2+2x_3=0$

得基础解系 $\xi_2=(1,1,0)^T \quad \xi_3=(2,0,1)^T$

$\therefore$ 对应于$\lambda_1$的特征向量为 $k_2\xi_2+k_3\xi_3$ $\quad k_2, k_3$不全为0.

(2) 令 $P=(\xi_1\ \xi_2\ \xi_3)=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 可逆.

且 $P^{-1}AP=diag(-2,1,1)$

$A=P\,diag(-2,1,1)P^{-1}$

其中 $P^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

$\therefore A=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

六、 用正交线性替换将实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_2^2-2x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3+8x$化为标准形，并写出正交线性替换。

$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

$|\lambda E-A|=(\lambda+7)(\lambda-2)^2$

$\therefore$ A的特征值为 $\lambda_1=-7 \quad \lambda_2=2$ (二重)

$\lambda_1=-7$ 代入 $(\lambda_1E-A)X=0$ 得基础解系 $\xi_1=(2,1,-1)^T$

$\lambda_2=2 \cdots (\lambda_2E-A)X=0 \quad \cdots\cdots \quad \xi_2=(2,-1,0)^T \quad \xi_3=(2,0,1)$

$\xi_2'=\xi_2=(2,-1,0)^T$

$\xi_3'=\xi_3-\frac{(\xi_3,\xi_2')}{(\xi_2',\xi_2')}\xi_2'=(\frac{2}{5},\frac{4}{5},1)^T$

$\eta_1=\frac{\xi_1}{\|\xi_1\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}(2,1,-1)^T$

$\eta_2=\frac{\xi_2'}{\|\xi_2'\|}=\frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1,0)^T$

$\eta_3=\frac{\xi_3'}{\|\xi_3'\|}=\frac{1}{3\sqrt{5}}(2,4,5)^T$

$U=\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix}$ 为正交阵.

正交线性替换 $X=UY$.

标准形 $-7y_1^2+2y_2^2+2y_3^2$