力学知识要点

1. 质点运动学

教学要求：掌握位置矢量、位移、速度、加速度、角速度和角加速度等描述质点运动和运动变化的物理量。能借助于直角坐标及矢量手段计算质点在平面内运动时的速度、加速度及运动方程、轨道等。能计算质点作圆周运动时的角速度、角加速度、切向加速度和法向加速度，掌握运动学中角量与线量之间的转换关系。会分析简单的相对运动。

重点：位置矢量、位移、速度、加速度的概念，运动方程；圆周运动中的角速度、角加速度、切向加速度、法向加速度，线量与角量之间的关系。

难点：位置矢量、位移、速度、加速度等物理量具有矢量性、瞬时性、叠加性、相对性；计算平面运动时法向加速度、切向加速度、角速度和角加速度。

1-2-1 质点的位矢（位置矢量）

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \tag{1-1}$$

位矢的大小

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{1-2}$$

位矢的方向用方向余弦

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{r}|}, \cos\beta = \frac{y}{|\vec{r}|}, \cos\gamma = \frac{z}{|\vec{r}|} \tag{1-3}$$

来表示。α，β，γ 为位置矢量 $\vec{r}$ 与 x, y, z 轴的夹角。

1-2-2 质点的位移

$$\begin{aligned} \overline{PP_1} &= \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t) = \Delta\vec{r} \\ &= \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k} \end{aligned} \tag{1-4}$$

$$|\Delta\vec{r}| \neq \Delta r = |\vec{r}(t+\Delta t)| - |\vec{r}(t)|$$

要特别注意位移大小$|\Delta\vec{r}|$，位矢大小的增量Δr 和路程的不同。

1-2-3 质点的速度

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$$

平均速度是矢量：

$$\bar{\vec{v}} = \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \tag{1-5}$$

方向与位移的方向相同，平均速度的大小：

$$|\bar{\vec{v}}| = \left|\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right|$$

平均速率是标量：

$$\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{1-6}$$

瞬时速度

$$\vec{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{d\vec{r}}{dt} \tag{1-7}$$

瞬时速度的大小：

$$|\vec{v}|=\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|$$

瞬时速率：

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{ds}{dt}=\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|=|\vec{v}|$$

要特别注意平均速度、平均速率和瞬时速度是三个不同的概念，要分清它们的联系和区别。速度在不同的坐标系中有不同的表示方法。

（1）速度在自然坐标系中的表示

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}=\vec{\tau}$$

$\vec{\tau}$ 为切线方向上的单位矢量，质点的速度：

$$\vec{v}=\frac{ds}{dt}\vec{\tau}=v\vec{\tau} \tag{1-8}$$

（2）速度在直角坐标系中的表示

$$\vec{v}=v_x\vec{i}+v_y\vec{j}+v_z\vec{k} \tag{1-9}$$

其中 $v_x=\dfrac{dx}{dt}$，$v_y=\dfrac{dy}{dt}$，$v_z=\dfrac{dz}{dt}$,速度的大小：

$$|\vec{v}|=\left|\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}\right|$$

用方向余弦表示速度的方向：

$$\cos\alpha=\frac{v_x}{|\vec{v}|},\cos\beta=\frac{v_y}{|\vec{v}|},\cos\gamma=\frac{v_z}{|\vec{v}|}$$

1-2-4 加速度

平均加速度：时间 Δt 内，速度相对于时间的变化率

$$\bar{\vec{a}}=\frac{\vec{v}(t+\Delta t)-\vec{v}(t)}{\Delta t}=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

瞬时加速度：时刻 t，速度相对于时间的变化率

$$\vec{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\bar{\vec{a}}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \tag{1-11}$$

加速度的大小：

$$|\vec{a}|=\left|\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|$$

在直角坐标系中加速度的表示

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\ , \tag{1-12}$$

其中

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2},\quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2},\quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

加速度的大小：

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^{\ 2} + a_y^{\ 2} + a_z^{\ 2}} = \sqrt{(\frac{d^2x}{dt^2})^2 + (\frac{d^2y}{dt^2})^2 + (\frac{d^2z}{dt^2})^2}$$

加速度的方向余弦：

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$$

质点运动学的两类问题

1. 已知运动方程，求速度、加速度——求导计算问题；
2. 已知加速度（或速度）和初始条件，计算速度、运动方程——积分计算问题。

§1-3 质点的圆周运动

1-3-1 圆周运动中的角量

$$\theta = \theta(t) \qquad (1\text{-}13)$$

平均角速度：

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

瞬时角速度：

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \qquad (1\text{-}14)$$

图 1-6

角速度增量：

$$\Delta\omega = \omega(t + \Delta t) - \omega(t)$$

平均角加速度：

$$\bar{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

瞬时角加速度：

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad (1\text{-}15)$$

可以从图看出圆周运动中速率和角速度的关系，

$$ds = Rd\theta$$

$$\Rightarrow v = \frac{ds}{dt} = R\omega \qquad (1\text{-}16)$$

1-3-2 圆周运动中加速度

图 1-7

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t = \frac{v^2}{R}\vec{n} + \frac{dv}{dt}\vec{\tau} \qquad (1\text{-}19)$$

加速度大小：

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_n^{\ 2} + a_t^{\ 2}} = \sqrt{(\frac{v^2}{R})^2 + (\frac{dv}{dt})^2}$$

加速度方向：

$$\beta = \tan^{-1}\frac{a_n}{a_t}$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = R\omega^2，\ a_t = \frac{dv}{dt} = R\alpha \qquad (1\text{-}21)$$

图 1-9

对于作匀变速圆周运动的质点，角加速度为常数。

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \qquad (1\text{-}22)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

1-3-3 曲线运动中加速度的表示

曲线运动中质点的加速度：

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t = \frac{v^2}{\rho}\vec{n} + \frac{dv}{dt}\vec{\tau} \qquad (1\text{-}26)$$

加速度大小：

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_n{}^2 + a_t{}^2} = \sqrt{(\frac{v^2}{\rho})^2 + (\frac{dv}{dt})^2}$$

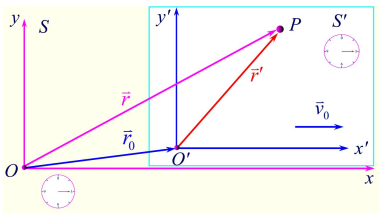
加速度方向：

$$\tan\beta = \frac{a_n}{a_t}$$

曲率半径：

$$\rho = \frac{v^2}{\sqrt{a^2 - (\frac{dv}{dt})^2}}$$

§1-4 相对运动



运动合成定理：

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}\,' \qquad (1\text{-}28)$$

位矢对时间一阶导数：

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}\,' \qquad (1\text{-}29)$$

位矢对时间二阶导数：

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}\,' \qquad (10\text{-}30)$$

图 1-12

质点相对于地面参考系 S 的运动为绝对运动，具有绝对速度 $\vec{v}$ 和绝对加速度 $\vec{a}$，质点于运动参考系 S’的运动为相对运动，具有相对速度 $\vec{v}\,'$ 和相对加速度 $\vec{a}\,'$。运动参考系 S' 相对于静止参考系 S 的运动为牵连运动，具有牵连速度 $\vec{v}_0$ 和牵连加速度 $\vec{a}_0$。

2. 质点动力学

教学要求：掌握牛顿三定律及其适用条件。能用微积分方法求解一维变力作用下的简单质点动力学问题。掌握功的概念，能计算直线运动情况下变力的功。掌握动能定理。理解保守力作功的特点及势能的概念，会计算重力、弹性力和万有引力势能。掌握功能原理和机械能守恒定律。掌握冲量、质点动量概念、动量定理和动量守恒定律。能综合运用上述定律分析、解决质点在平面内运动时的力学问题。

重点：三个牛顿运动定律，牛顿运动定律的应用；功、动能、势能、冲量、动量等概念，功能原理,动量、机械能守恒定律。

难点：物体的受力分析；求解变力作用下质点的一维动力学问题；应用微积分求解变力的功；动量守恒定律中的平面问题矢量处理；势能的概念；守恒定律的应用。

牛顿第二定律

$$\vec{F}=m\frac{d\vec{v}}{dt}=m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=m\vec{a}$$

在直角坐标系形式为：

$$\begin{cases} F_x=\sum_i F_{ix}=m\dfrac{d^2x}{dt^2}=ma_x \\ F_y=\sum_i F_{iy}=m\dfrac{d^2y}{dt^2}=ma_y \\ F_z=\sum_i F_{iz}=m\dfrac{d^2z}{dt^2}=ma_z \end{cases} \tag{2-3}$$

在自然坐标系中的形式：

$$\begin{cases} F_\tau=\sum_i F_{i\tau}=m\dfrac{dv}{dt}=ma_\tau \\ F_n=\sum_i F_{in}=m\dfrac{v^2}{\rho}=ma_n \end{cases}$$

质点动力学的两类问题

1. 已知运动方程，求出加速度，再根据牛顿定律计算受力——求导计算问题；
2. 已知受力，根据牛顿定理，求出加速度（或速度），再根据初始条件，计算速度、运动方程——积分计算问题。

动量定理的积分形式：

$$\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt=m\vec{v}_2-m\vec{v}_1$$

冲量

$$\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt=m\vec{v}_2-m\vec{v}_1 \tag{2-6}$$

$$I_x=\int_{t_1}^{t_2}F_xdt\text{，}\quad I_y=\int_{t_1}^{t_2}F_ydt\text{，}\quad I_z=\int_{t_1}^{t_2}F_zdt$$

在直角坐标中：

$$I_x=\int_{t_1}^{t_2}F_xdt=mv_{2x}-mv_{1x},I_y=\int_{t_1}^{t_2}F_ydt=mv_{2y}-mv_{1y},I_z=\int_{t_1}^{t_2}F_zdt=mv_{2z}-mv_{1z}$$

动量守恒定律

如果 $\sum_i\vec{F}_i=0$，由质点系动量定理得到质点系动量守恒定律：

$$d(\sum_i m_i\vec{v}_i)=0$$

于是

$$\sum_i m_i\vec{v}_i=\vec{C}$$

功的定义与积分计算表达式

$$A=\int_a^b\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{x_a}^{x_b}F_xdx+\int_{y_a}^{y_b}F_ydy+\int_{z_a}^{z_b}F_zdz$$

质点动能定理动能定理的微分形式

$$dA=d(\frac{1}{2}mv^2) \tag{2-23}$$

动能定理的积分形式 如果质点沿 L 从 A 点运动到 B 点，如图 2-15 所示。外力做的功：

$$A=\int_A^B d(\frac{1}{2}mv^2)=\frac{1}{2}mv_B^2-\frac{1}{2}mv_A^2 \tag{2-24}$$

作用于质点上合力做的功等于质点动能的增量。

质点系动能定理写为：

$$\sum_i A_i^{ext}+\sum_i A_i^{\text{int}}=E_{k2}-E_{k1} \tag{2-27}$$

重力的功及其势能

$$A=\int_{h_a}^{h_b}-mgdy=-(mgh_b-mgh_a)$$

$$E_P=\int_y^0(-mg)dy=mgy \tag{2-29}$$

弹性力的功及其势能

$$A=\int_{x_1}^{x_2}(-kx)dx=-(\frac{1}{2}kx_2{}^2-\frac{1}{2}kx_1{}^2)$$

$$E_p = \int_x^0 (-kx)dx = \frac{1}{2}kx^2 \tag{2-30}$$

万有引力势能

$$f = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$$A_{AB} = \int_A^B -G\frac{m_1 m_2}{r^2}dr = G\frac{m_1 m_2}{r_B} - G\frac{m_1 m_2}{r_A}$$

$$E_P = -G\frac{m_1 m_2}{r}$$

功能原理和机械能守恒定律

$$A_{ext} + A_{\text{int},\, n-cons} = E_B - E_A \tag{2-40}$$

如果外力做的功为零，同时系统内非保守力做的功为零，系统的机械能守恒。或者系统只有保守力做功，则系统机械能守恒。

3. 刚体力学基础

教学要求：理解刚体模型。理解力矩概念和刚体绕定轴转动的转动定律。了解转动动能和转动惯量的概念。了解力矩的功和刚体定轴转动中的动能定理。理解质点在平面内运动的角动量概念，力矩、角动量概念，刚体绕定轴转动的情况下的角动量概念和角动量守恒定律，能应用角动量定律分析、计算刚体系统和质点-刚体系统的有关问题。

重点：力矩、角动量等概念；刚体定轴转动运动学；刚体定轴转动定理；包含定轴转动刚体的系统的功能原理；刚体定轴转动的角动量原理和角动量守恒定律。

难点：力矩的概念；刚体定轴转动定律的应用；角动量；机械能、动量和角动量守恒定律满足的条件的判定与区分。

力矩：

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{3-6}$$

力矩做的功：

$$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta \tag{3-7}$$

转动惯量

$$J = \sum_i \Delta m_i r_i^2 \tag{3-8}$$

质量分立的刚体转动惯量

$$J=\sum_i \Delta m_i r_i^2 \tag{3-12}$$

质量连续分布的刚体转动惯量

$$J=\lim_{\Delta m_i\to 0}\sum_i \Delta m_i r_i^2=\int_m r^2 dm$$

转动动能

$$E_K=\frac{1}{2}J\omega^2 \tag{3-9}$$

定轴转动的刚体动能定理的微分形式：

$$dA=Md\theta=d(\frac{1}{2}J\omega^2)$$

刚体绕定轴的转动定律

$$M=J\alpha=J\frac{d\omega}{dt}=J\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

质点的角动量

质点 m 以动量 $m\vec{v}$ 运动，对 O 点的角动量：

$$\vec{L}=\vec{r}\times m\vec{v}$$

刚体的定轴转动角动量

$$L=J\omega$$

角动量守恒定律

如果包含质点、刚体，或刚体组合的系统，受到的合外力矩恒为零，则该系统的角动量守恒。

力学典型例题

略

（请参见教材、课件、习题集等）