

第一章 电路系统元件、信号和定律

电路系统分析是指在给定电路模型的情况下,计算电路中各部分的电压、电流或者功率。电路模型包括电路的拓扑结构、电路元件参数以及输入(激励)信号等。本章主要介绍电学中的基本物理量、常用信号、基本元件及其约束关系以及网络拓扑约束等内容。

1.1 电路及电路模型

电路是指由导线和电气、电子部件构成并可实现特定功能的导电回路。电路按其功能不同,大致可以分为两类:一类为电力线路,用于实现对能量的输送和分配;另一类为电子线路,用于实现对电信号的检测、分析、传输、加工和处理等功能。

实际电路的部件往往具有复杂的电磁特性。例如,电池作为电源,可以产生电能,但由于内阻的存在,电池还会消耗电能;在实际的电感线圈中通过变化的电流时,其不仅具有存储和交换磁场能量的电感特性,还具有消耗能量的电阻特性和存储、交换电场能量的电容特性。

为了电路分析的简单化,一般不考虑电路部件的全部电磁特性,即,对电路部件理想化,仅仅考虑其主要电磁特性,而忽略其次要物理特性,这种理想化的元件模型称为理想元件,也称集总参数元件。例如,电源元件仅可产生电能,电感元件仅可存储和交换磁场能量。

由理想元件构成的电路称为电路模型,简称电路。本书所讨论的电路均由理想元件构成。例如,实际的简单照明电路,它由电池、灯泡、开关和导线组成,当开关闭合时,电池中的电能就会被灯泡消耗,并转化为光能和热能,其电路如图 1.1-1 所示,其中的每个图形符号均表示一定意义的元件,例如,电压源用来表示电池、电阻用来表示灯泡。

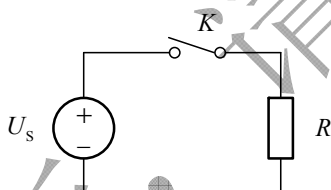


图 1.1-1 简单照明电路

1.2 电学中的基本物理量

本节介绍电学中电流、电压和功率等基本物理量。

1. 电流 (Current)

电流是描述带电粒子定向运动流量和流向的宏观物理量。电流的大小定义为单位时间内通过导体横截面的净电荷量,用 i 表示,即

$$i = \frac{dq}{dt} \quad (1.2-1)$$

国际单位制 (SI) 中,时间 t 的单位秒 (s); 电荷 q 的单位为库伦 (C), 并用正值和负值分别来表示正电荷和负电荷; 电流 i 的单位为安培 (A), $1A = 1C/s$ 。

不随时间变化的电流称为直流 (DC) 电流, 用大写的 I 表示; 随时间变化的电流称为交流 (AC) 电流, 用小写的 i 表示。需要注意的是, 小写的 i 也可以用来表示直流电流。

电流主要是由带负电荷的自由电子的定向运动产生的。规定自由电子移动的反方向(假想正电荷移动的方向)为电流的方向。在电路中, 很难预判电流的真实方向, 一般人为设定一个电流方向, 称为参考方向, 需要注意的是, 参考方向一旦指定, 不能随意更改。图 1.2-1 中的电流 I 的参考方向是从 a 流向 b 的。若 $I=2A$, 表示 2A 电流从 a 流向 b; 若 $I=-2A$, 则表示 -2A 电流从 a 流向 b, 或者是 2A 电流从 b 流向 a。即, 在设定参考方向后, 电流数值的正负反映了实际电流方向与参考方向的关系, 若数值为正, 表示实际电流方向与参考方向一致; 反之, 两者方向相反。

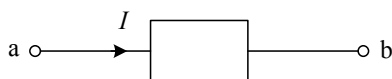


图 1.2-1 电流的参考方向

电流的方向也可以用下标来表示，例如， I_{ab} 表示从 a 流向 b 的电流，因此在图 1.2-1 中

有 $I = I_{ab} = -I_{ba}$ 。

2. 电压和电位 (Voltage and Potential)

电压是电路中自由电荷定向移动形成电流的原因，也称电势差或者电位差。将单位正电荷从 a 点移动到 b 点，电场力所做的功，称为 a 点对 b 点的电压，用 u 表示，即

$$u = \frac{dw}{dq} \quad (1.2-2)$$

国际单位制 (SI) 中，电场力所做功 w 的单位为焦耳 (J)；电压 u 的单位为伏特 (V)， $1V = 1J/C$ 。

不随时间变化的电压称为直流 (DC) 电压，用大写的 U 表示；随时间变化的电压称为交流 (AC) 电压，用小写的 u 表示。需要注意的是，小写的 u 也可以用来表示直流电压。

若单位正电荷从 a 点移到 b 点失去能量，则 a 点电位高于 b 点电位，一般规定电位降低的方向为电压的真实方向，即 a 点极性为正，而 b 点极性为负；反之，若单位正电荷从 a 点移到 b 点获得能量，则 a 点电位低于 b 点电位，即 a 点极性为负，而 b 点极性为正。

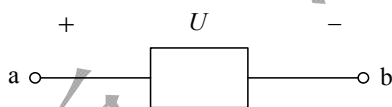


图 1.2-2 电压的参考方向

同电流需要设定参考方向一样，电压也需要设定参考方向。在图 1.2-2 中，设定的电压参考方向为：a 点极性为正，b 点极性为负。若 $U=2V$ ，表示 a 点到 b 点的压降为 2V；若 $U=-2V$ ，表示 a 点到 b 点的压降为 -2V，或者是 b 点到 a 点的压降为 2V。即，在设定参考方向后，电压数值的正负反映了实际电压方向与参考方向的关系，若数值为正，表示实际电压方向与参考方向一致；反之，两者方向相反。

电压的方向也可以用下标来表示，例如， U_{ab} 表示从 a 点到 b 点的压降，因此在图 1.2-2 中有 $U = U_{ab} = -U_{ba}$ 。

选择电路中的某一节点 O 为参考点 (零电位点，一般用符号 \perp 表示)，则其他节点相对于参考点的电压称为该节点的电位，用 U_n 表示，其中 n 为节点符号。因此，电路中任意两点间的电压等于该两点的电位之差。

例 1.2-1 如图 1.2-3 所示电路中，选 d 作为参考点时， $U_a = 2V$ ， $U_b = 3V$ ， $U_c = 1V$ 。

求 a 点作为参考点时的 U_b 、 U_c 和 U_d 。

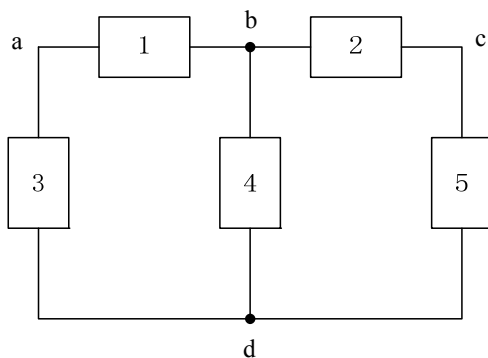


图 1.2-3 例 1.2-1 的图

解 选 d 作为参考点情况下, 有 $U_{ad} = U_a = 2\text{V}$, $U_{bd} = U_b = 3\text{V}$, $U_{cd} = U_c = 1\text{V}$ 。

不同参考点的情况下, 各个节点的电位会发生变化, 但是任意两点间的电压保持不变。因此, 在选 a 点作为参考点时, 有

$$U_b = U_{ba} = U_{bd} - U_{ad} = 3 - 2 = 1\text{V}$$

$$U_c = U_{ca} = U_{cd} - U_{ad} = 1 - 2 = -1\text{V}$$

$$U_d = U_{da} = -U_{ad} = -2\text{V}$$

由于元件的电压和电流均有参考方向, 为了分析的简便, 一般取电压参考方向和电流参考方向一致, 称该元件的电压和电流呈关联参考方向, 如图 1.2-4 (a) 所示; 反之, 若元件的电压和电流的参考方向相反, 称该元件的电压和电流呈非关联参考方向, 如图 1.2-4 (b) 所示。

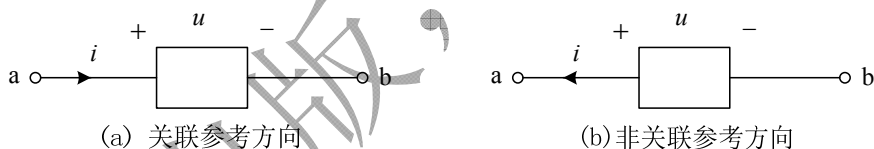


图 1.2-4 关联参考方向和非关联参考方向

3. 功率和能量 (Power and Energy)

功率 (瞬时功率) 定义为能量随时间的变化率, 用 p 表示即

$$p(t) = \frac{dw}{dt} \quad (1.2-3)$$

国际单位制 (SI) 中, 功率 p 的单位为瓦特 (W), $1\text{W} = 1\text{J/s}$ 。

当元件的电压和电流呈关联参考方向时, 将式 (1.2-1) 和式 (1.2-2) 带入式 (1.2-3), 可得元件的功率为

$$p(t) = \frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dq} \cdot \frac{dq}{dt} = ui \quad (1.2-4)$$

若元件的电压和电流呈非关联参考方向, 则元件的瞬时功率为

$$p(t) = -ui \quad (1.2-5)$$

若 $p > 0$, 表示电压和电流的实际方向一致, 电场力推动正电荷做正功, 元件吸收功率或者消耗功率; 反之, 若 $p < 0$, 则表示元件提供功率。

由式 (1.2-4) 可知, 元件在时间区间 (t_1, t_2) 吸收的能量 w 为

$$w = \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt \quad (1.2-6)$$

由于能量守恒定律，在任一时间区间，电路中各元件的能量的代数和为零。而功率是能量的变化率，因此，任时刻电路中各元件的功率的代数和为零，即

$$\sum p = 0$$

也可以表示为：电路中各元件吸收的功率总和等于电路中各元件提供的功率总和，即

$$\sum p_{\text{吸收}} = \sum p_{\text{提供}}$$

例 1.2-2 求图 1.2-5 所示各元件的功率，并判断各元件是吸收功率还是提供功率。

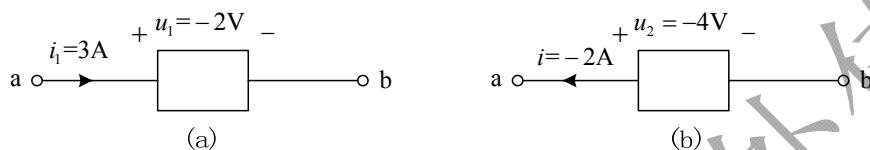


图 1.2-5 例 1.2-2 的图

解 (a) 该元件的电压和电流呈关联参考方向，因此

$$p_1 = u_1 i_1 = (-2) \times 3 = -6\text{W} < 0$$

该元件提供 6W 功率。

(b) 该元件的电压和电流呈非关联参考方向，因此

$$p_2 = -u_2 i_2 = -(-4) \times (-2) = -8\text{W} < 0$$

该元件提供 8W 功率。

工程应用中，电压、电流和功率等量的取值范围非常宽泛，为此，国际单位制（SI）用规定的词头来表示比例因子，如表 1.2-1 所示。这样就可以简化表示方法，例如 $3 \times 10^{-3} \text{V}$ ，就可以表示为 3mV。

表 1.2-1 国际单位制（SI）词头

符号	名称	比例因子
G	吉 (giga)	10^9
M	兆 (mega)	10^6
k	千 (kilo)	10^3
m	毫 (milli)	10^{-3}
μ	微 (micro)	10^{-6}
n	纳 (nano)	10^{-9}
p	皮 (pico)	10^{-12}

1.3 电路系统中的信号

1.3.1 信号基本概念

信号是信息的载体，是包含和传递信息的一种物理量，是客观事物存在状态或属性的反映，简单来说，信号是带有信息的随时间（空间）变化的物理量或物理现象。前面我们所说的电压和电流，就是两种基本的信号。

在日常生活中，我们还经常碰到许多其他类型的信号，如机械位移、速度、压力、流量、

温度、液位、心电图信号、人口统计数据、照片、核磁共振成像等都是信号。为了分析和处理的方便，在实际应用中，我们往往通过相应的传感器将非电量信号转换成电量信号，因为电量的测量、显示、记录和分析研究远比非电量容易。例如，我们可以通过压电传感器将压力信号转换为电信号（即携带压力信息的电压或电流），从而实现电子秤。在本书中，除非特别说明，我们都认为信号是已经通过传感器转换后随时间变化的电压、电流信号。描述电压、电流的基本方法是把它们写成时间函数的表达式，如 $f(t) = \sin(t)$ ，或者给出信号随时间变化的图形，即信号波形。

1.3.2 信号分类

实际生活中的信号多种多样，按不同角度可以将信号分成不同类别。

1. 按用途分

根据用途不同，信号可以分成广播信号、通信信号、控制信号、雷达信号、电视信号等等。

2. 按信号对时间的变化规律分

根据信号随时间变换的确定性，信号可以分为确定性信号、随机信号、伪随机信号。

确定性信号：可以用明确的数学关系式描述的信号称为确定性信号，也就是说，对于指定的某一时刻 t ，可确定相应的函数值 $f(t)$ 来表示该信号（若干不连续点除外）。对确定性信号进行重复观测，结果相同。本课程研究确定性信号。

随机信号：对随机信号的每一次观测均不同。随机信号不能用数学关系式描述，其幅值、相位变化是不可预知的，所描述的物理现象是一种随机过程。例如，汽车奔驰时所产生的振动、飞机在大气流中的浮动、树叶随风飘荡、环境噪声等。

伪随机信号：伪随机信号是一类貌似随机而实际遵循严格规律产生的信号。伪随机信号通常是利用计算机生成的具有特定分布的伪随机序列，表面上看伪随机信号没有什么规律，但只要生成序列的初始条件一致，所生成的序列则是完全确定的。

3. 按信号的连续性分

根据信号在时间域上的连续性，可以分为连续时间信号和离散时间信号。

在所讨论的时间范围内，如果信号对任意时间取值都有确定的函数值（允许存在有限个间断点），则称该信号为连续信号。如图 1.3-1 为两种连续信号，其中图 1.3-1 (b) 为含有不连续点的连续信号。

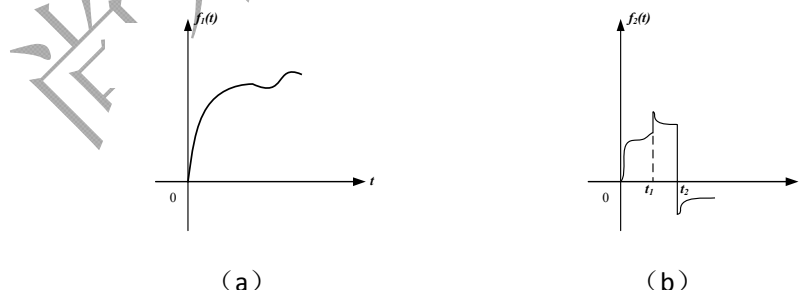


图 1.3-1 连续信号

若信号只在某些离散时刻有确定的函数值，而在其他时间信号不存在，则称该信号为离散信号。一般地，我们将时间和幅度均连续的信号称为模拟信号，将模拟信号按一定的时间间隔进行抽取后得到的信号称为抽样信号（也是离散信号），将抽样信号通过模数转换器（ADC）

进行量化以后的信号称为数字信号。因此模拟信号是连续时间信号，抽样信号是离散时间信号，数字信号则是特殊的离散时间信号。三者之间的关系如图 1.3-2 所示。实际中的信号都是模拟信号，数字信号则用于计算机、数字通信等数字系统中，主要目的是增强系统的抗噪声能力。设某模拟电压信号为 v ，若 b 位 ADC 的参考电压为 v_{ref} ，则该模拟电压信号量化后的数值为

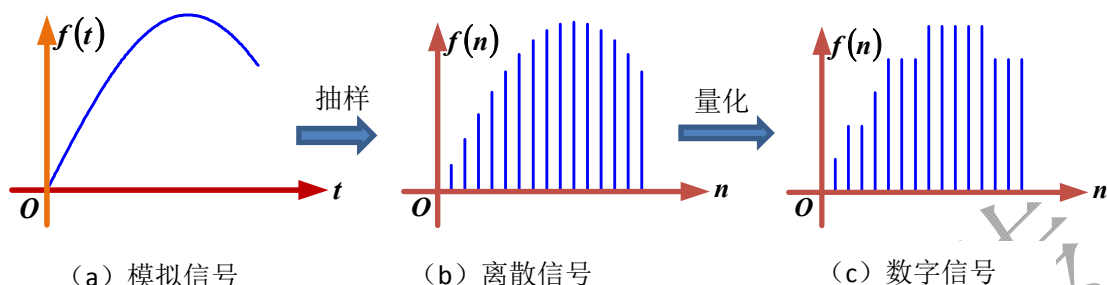


图 1.3-2 模拟信号、离散信号与数字信号的关系

$$\frac{v}{v_{ref}} \times (2^b - 1)$$

例 1.3-1 某电压信号大小为 3.2V，经参考电压为 5V 的 16 位 ADC 量化后的数字信号大小为 $3.2 \times (2^{16} - 1) / 5 = 41942$ 。

在数字系统中，我们通常用低电平表示数字 0，用高电平表示数字 1。而数字信号的大小则用有限位的二进制数表示，主要有三种表示方法：原码、补码和反码。

原码表示法：在数值前面增加了一位符号位（即最高位为符号位）：正数的符号位为 0，负数的符号位为 1（0 有两种表示：+0 和 -0），其余位表示数值的大小。

例 1.3-2 用 8 位二进制原码分别表示 +11 和 -11，根据定义，+11 的原码是 $(+11)_{10} = (00001011)_2$ ，-11 的原码是 $(-11)_{10} = (10001011)_2$ 。

在原码表示下，十进制数和二进制数的相互转化比较简单。

➤ 二进制整数转十进制整数：设除去最高位符号位以外，某 n 位二进制数为

$(b_{n-1}b_{n-2}\cdots b_0)_2$ ，则其对应的十进制数为 $\sum_{k=0}^{n-1} b_k \cdot 2^k$ ，其中 $b_k = 0$ 或 1；最后根据最高

位确定十进制整数的正负。

例 1.3-3 求二进制原码 $(11001011)_2$ 的十进制数。

解：去掉最高位后的二进制数为 $(1001011)_2 = 2^6 + 2^3 + 2^1 + 2^0 = 75$ ，而最高位为 1，表示为负数，故 $(11001011)_2 = -75$ 。

➤ 进制整数转二进制整数：采用“除 2 取余，逆序排列”法。具体做法是：先求十进制整数的绝对值，用 2 去除该绝对值，可以得到一个商和余数；再用 2 去除商，又会得到一个商和余数，如此进行，直到商为小于 1 时为止，然后把先得到的余数作为二进制数的低位有效位，后得到的余数作为二进制数的高位有效位，依次排列起来。最后在最高位添加上符号位。

例 1.3-4 求 -75 的二进制原码。

解：求解过程如图 1.3-3 所示。

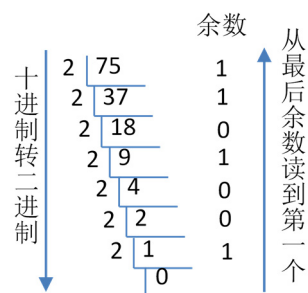


图 1.3-3 二进制原码求解过程

根据“除 2 取余，逆序排列”得到 75 的二进制原码为 $(1001011)_2$ ，添加上符号位后最终可得 -75 的二进制原码为 $(11001011)_2$ 。

反码表示法：正数的反码与其原码相同；负数的反码是对其原码逐位取反，但符号位除外。

例 1.3-5 用 8 位二进制反码分别表示 +11 和 -11，根据定义，+11 的反码是 $(+11)_{10} = (00001011)_2$ ，-11 的反码是 $(-11)_{10} = (11110100)_2$ 。

补码表示法：非负数的补码是其原码本身；负数的补码是其绝对值的原码符号位不变，其它位取反，再加 1。

例 1.3-6 用 8 位二进制补码分别表示 +11 和 -11，根据定义，+11 的补码是 $(+11)_{10} = (00001011)_2$ ，-11 的补码是 $(-11)_{10} = (11110101)_2$ 。

反码的反码是原码，补码的补码是原码，因此根据反码和补码可以快速求出原码，进而也可以根据二进制反码和补码形式求出原十进制数。

在计算机系统中，数值一律采用补码来表示和存储。原因在于，使用补码，可以将符号位和数值域统一处理；同时，加法和减法也可以统一处理。此外，补码与原码相互转换，其运算过程是相同的，不需要额外的硬件电路。

4. 按信号的重复性分

根据是否周期重复，信号可以分为周期信号和非周期信号。

周期信号：是指经过一定时间间隔周而复始重复出现，无始无终的信号。

对于连续时间周期信号，可表达为

$$\forall t \in (-\infty, \infty), f(t) = f(t + nT), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (1.3-1)$$

满足上式中的最小正数 T 称为周期， $T = 2\pi / \omega_1$ ， ω_1 称为基波角频率，简称基频，单位为弧度/秒，或 rad/s。

非周期信号：时间域上不周期重复的确定性信号。从数学角度来看，如果不能找到满足式 (1.3-1) 的 T 值，则称 $f(t)$ 为非周期连续信号。

例 1.3-7 确定下列信号是否为周期信号。如果是，求出其基本周期。

$$(1) f(t) = \cos^2(2\pi t) \quad (2) f(t) = e^{-2t} \cos(2\pi t)$$

解：(1) $f(t) = \cos^2(2\pi t) = \frac{1 + \cos(4\pi t)}{2}$ ，故为周期信号，周期为 0.5s。

(2) 非周期信号。

1.3.3 电路中的常用信号

1. 直流信号：

$$f(t) = A \quad (1.3-2)$$

2. 正弦信号：

$$f(t) = \cos \omega t \quad (1.3-3)$$

3. 指数信号：

$$f(t) = e^{\sigma t} \quad (1.3-4)$$

4. 指数变化的正弦信号:

$$f(t) = e^{\sigma t} \cos \omega t \quad (1.3-5)$$

5. 复指数信号

若指数信号的指数因子不是实数而是复数时, 称为复指数信号, 可由下式表示:

$$f(t) = Ae^{st} \quad (1.3-6)$$

其中 $s = \sigma + j\omega$ 。根据欧拉公式 $e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j \sin(\omega t)$, 我们有

$$f(t) = Ae^{st} = Ae^{(\sigma + j\omega)t} = Ae^{\sigma t} (\cos \omega t + j \sin \omega t) \quad (1.3-7)$$

可知复指数信号的实部和虚部都是指数变化的正弦信号。当 s 取不同值时, 由复指数信号 e^{st} 可以派生出很多不同的实信号 $f(t) = \operatorname{Re}\{e^{st}\} = e^{\sigma t} \cos \omega t$, 如图 1.3-4 所示。

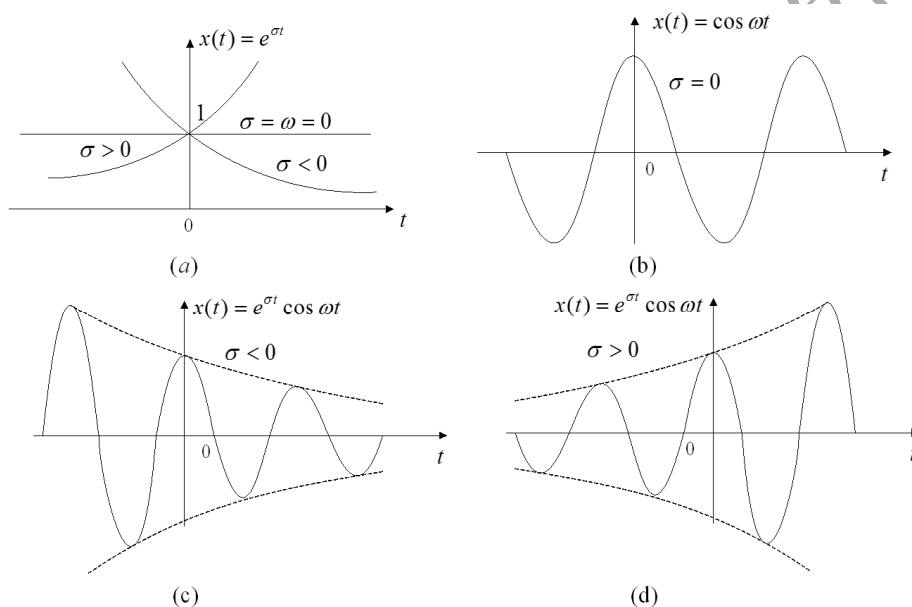


图 1.3-4 由复指数信号派生得到的各种信号

6. 单位阶跃信号 $\varepsilon(t)$

单位阶跃信号定义为

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases} \quad (1.3-8)$$

其波形如图 1.3-5 (a) 所示。单位阶跃信号可模拟为电压 1V 的电压在 $t = 0$ 时刻突然接入电路并长久持续作用下去, 如图 1.3-5 (b) 所示。

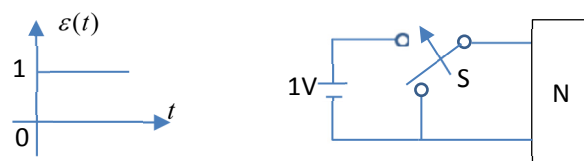


图 1.3-5 单位阶跃信号及其模拟电路

单位阶跃信号在 $t = 0$ 处有一个不连续点, 或称为跳变点, 跳变值为 1。单位阶跃信号是一

种非连续信号（又称奇异信号）。

利用单位阶跃信号可以表示很多信号，特别是可以用来表示分段函数，或者表示信号的作用区间。

例 1.3-8 用 $\varepsilon(t)$ 表示如图 1.3-6 所示的分段函数 $f(t)$ 。

解： $x(t) = \varepsilon(t) + \varepsilon(t-1) - 2\varepsilon(t-2)$

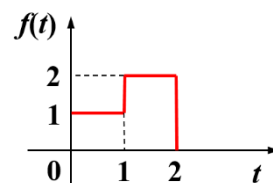


图 1.3-6 分段函数

例 1.3-9 如图 1.3-7 所示显示了可以用 $\varepsilon(t)$ 来表示信号的作用区间。

图 1.3-7 (a) 是原信号，图 1.3-7 (b) 给出了作用区间为 $t > 0$ 的 $f(t)$ ，图 1.3-7 (c) 则给出了作用区间为 $t_1 < t < t_2$ 时的 $f(t)$ 。

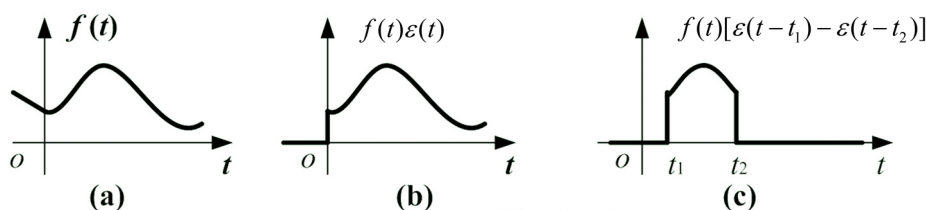


图 1.3-7 用 $\varepsilon(t)$ 来表示信号的作用区间

6. 单位冲激信号 $\delta(t)$

单位冲激信号 $\delta(t)$ 的 Dirac 定义（由英国物理学家 P.M.Dirac 在 1940 年代提出）为：

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases} \quad (1.3-9)$$

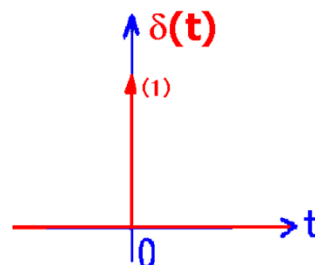


图 1.3-8 单位冲激信号

且

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (1.3-10)$$

单位冲激信号的波形如图 1.3-8 所示。单位冲激信号的 Dirac 定义一方面规定了冲激出现的时刻为“0”，另一方面规定了冲激的强度为 1。单位冲激信号也是一种非连续信号。

我们还可以利用矩形脉冲函数来定义单位冲激信号：由于冲激出现的时刻为“0”，另一方面冲激的积分为 1，因此可以将单位冲激信号看作是矩形脉冲宽度 τ 趋向于 0、脉冲幅度 $\frac{1}{\tau}$ 趋

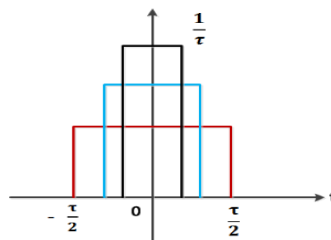


图 1.3-9 冲激的极限解释

向于无穷大，但矩形脉冲面积永远保持为 1 的可变矩形脉冲函数的极限，即：

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \left[\varepsilon\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - \varepsilon\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right] \quad (1.3-11)$$

由可变矩形脉冲的极限得到单位冲击信号的示意图如图 1.3-9 所示。

另一方面，根据单位冲激信号的定义，显然有

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}, \quad (1.3-12)$$

即

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \varepsilon(t) \quad (1.3-13)$$

同理，有

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = \delta(t) \quad (1.3-14)$$

也就是说，单位冲激信号的积分为单位阶跃信号，反之，单位阶跃信号的微分为单位冲激信号。根据这一性质，“冲激”可以用来表示非连续函数的导数，导数中“冲激”出现在原函数的间断点处，“冲激”的“强度”为原函数在间断点处升降的幅度。

例 1.3-10 画出如图 1.3-10 (a) 所示信号的微分信号。

解：根据阶跃信号和冲激信号的定义，可以得到图 1.3-10 (a) 所示信号的微分如图 1.3-10 (b) 所示。

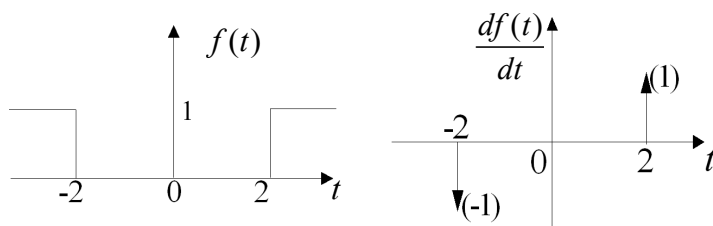


图 1.3-10 微分中存在冲激的信号

根据单位冲激信号的定义，还可以得到单位冲激信号具有如下性质：

(1) 筛选性质：

$$f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0) \quad (1.3-15)$$

(2) 取样性质：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0) \quad (1.3-16)$$

(3) 展缩性质：

$$\delta(at-t_0) = \frac{1}{|a|} \delta(t-t_0/a) \quad (1.3-17)$$

根据展缩性质，取 $a = -1$ ，可得 $\delta(t) = \delta(-t)$ ，即 $\delta(t)$ 为偶函数。

例 1.3-10：试计算 $\int_{-\infty}^{\infty} (t^2 + 3)\delta(1-2t)dt$ 。

$$\text{解: } \int_{-\infty}^{\infty} (t^2 + 3)\delta(1 - 2t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} (t^2 + 3)\frac{1}{2}\delta(t - \frac{1}{2})dt = \frac{1}{2}[(\frac{1}{2})^2 + 3] = \frac{13}{8}$$

7. 单位冲激偶信号 $\delta'(t)$

从图 1.3-9 可知, 单位冲激信号可以看作是矩形脉冲宽度为 τ 、脉冲幅度为 $\frac{1}{\tau}$, 矩形脉冲面积恒定为 1 的可变门函数在 τ 趋向于 0 时的极限, 因此 $\delta'(t)$ 可以看作是上述矩形脉冲的一阶导数在 τ 趋向于 0 时的极限。另一方面, 由式 (1.3-11) 可知, 上述矩形脉冲等于 $\frac{1}{\tau}\left[\varepsilon(t + \frac{\tau}{2}) - \varepsilon(t - \frac{\tau}{2})\right]$, 而由式 (1.3-14) 可知单位阶跃信号的一阶导数为单位冲激信号, 因此, 该矩形脉冲的一阶导数实际上包含了一对冲激信号:

- 第一个冲激信号位于 $t = -\frac{\tau}{2}$, 强度为 $\frac{1}{\tau}$
- 第二个冲激信号位于 $t = \frac{\tau}{2}$, 强度为 $-\frac{1}{\tau}$

因此, 当脉冲宽度 τ 趋向于 0 时, 求导所得的一对冲激信号将相互靠近, 极限情况下, 它们在原点重合, 且强度分别趋于 $+\infty$ 和 $-\infty$ 。由于两个冲激信号位置相同, 强度相反, 一般称它们为**冲击偶**。冲击偶可以用来表示一个对输入信号进行求导的系统。

根据上述分析过程, 我们有

$$\delta'(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \left[\delta(t + \frac{\tau}{2}) - \delta(t - \frac{\tau}{2}) \right] \quad (1.3-18)$$

可以证明冲击偶具有下列基本性质:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t) dt = 0 \quad (1.3-19)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta'(t - t_0) dt = - \left. \frac{df(t)}{dt} \right|_{t=t_0} \quad (1.3-20)$$

类似地, 可以利用式 (1.3-18) 定义单位冲激信号的高阶导数。以二阶为例, 它是冲击偶的一阶导数, 即

$$\frac{d^2 \delta(t)}{dt^2} = \frac{d \delta'(t)}{dt} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \left[\delta'(t + \frac{\tau}{2}) - \delta'(t - \frac{\tau}{2}) \right] \quad (1.3-21)$$

将式 (1.3-21) 推广即可定义单位冲激信号的 n 阶导数, 记为 $\delta^{(n)}(t)$ 。

8. 采样信号 $Sa(t)$

采样信号的定义为

$$Sa(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t}, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases} \quad (1.3-22)$$

其波形如图 1.3-11 所示。

可以证明，采样函数具有如下性质：

$$(1) Sa(t) = Sa(-t); \quad (2) Sa(t) = 0, t = k\pi;$$

$$(3) \int_{-\infty}^{\infty} Sa(t) dt = \pi; \quad (4) Sa(t)|_{t=\pm\infty} = 0。$$

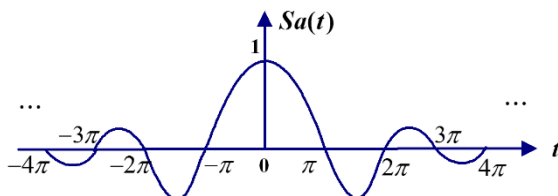


图 1.3-11 采样函数

1.3.4 信号的时域变换

信号的时域变换包括信号的平移、翻转与展缩。

1. 信号的平移：

将连续时间信号中的 t 变换为 $t - \tau$ ，即 $f(t) \rightarrow f(t - \tau)$ ，相当于将信号 $f(t)$ 的波形向右平移（延时）了 τ 时间。当 $\tau > 0$ 时，实际向右平移；而当 $\tau < 0$ 时，实际向左平移（超前）了 $-\tau$ 时间。

例 1.3-11： $f(t)$ 的波形如图 1.3-12 (a) 所示，则 $f(t-1)$ 的波形是 $f(t)$ 向右平移 1 个时间单位，如图 1.3-12 (b) 所示；而 $f(t+1)$ 的波形是 $f(t)$ 向右平移 -1 个时间单位，实际相当于 $f(t)$ 向左平移 1 个时间单位，如图 1.3-12 (c) 所示。

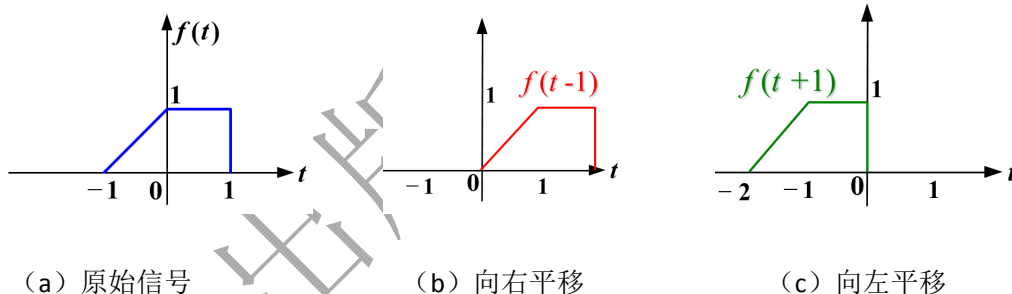


图 1.3-12 信号及其平移

2. 信号的翻转：

将连续时间信号中的 t 变换为 $-t$ ，即 $f(t) \rightarrow f(-t)$ ，相当于将信号 $f(t)$ 的波形沿纵轴进行翻转，将信号的过去与未来进行对调。

例 1.3-12： $f(t)$ 的波形如图 1.3-13 (a) 所示，则 $f(-t)$ 的波形如图 1.3-13 (b) 所示。

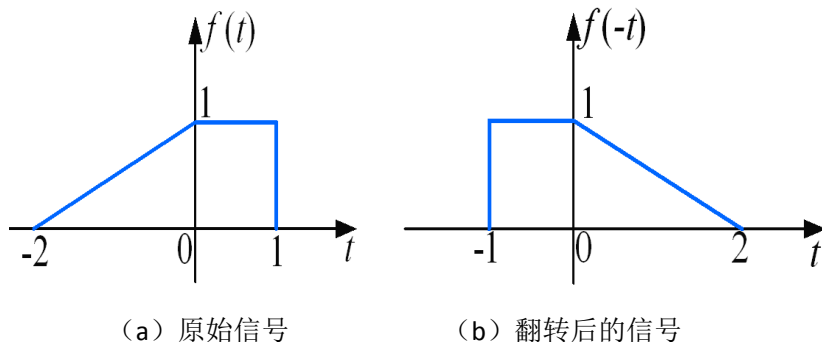


图 1.3-13 信号及其翻转的波形

3. 信号的展缩

将连续时间信号中的 t 变换为 $at (a > 0)$, 即 $f(t) \rightarrow f(at)$, 相当于将信号 $f(t)$ 的波形保持原点不动后时间域“压缩”成原来的 $\frac{1}{a}$ 。当 $a > 1$ 时, 实际是波形的压缩; 而当 $0 < a < 1$ 时, 实际是波形的扩展。

例 1.3-13: $f(t)$ 的波形如图 1.3-14(a) 所示, 则 $f(2t)$ 的波形如图 1.3-14(b) 所示, $f(\frac{1}{2}t)$ 的波形如图 1.3-14(c) 所示。

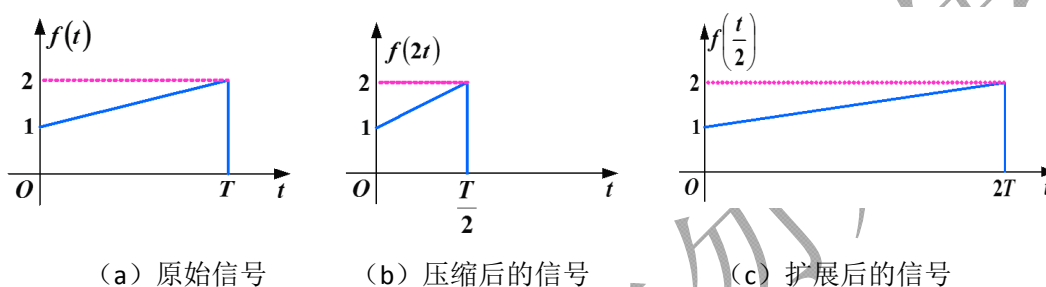


图 1.3-14 信号及其展缩的波形

4. 连续信号时间变换的一般情况

一般地, 将连续时间信号中的 t 变换为 $at+b (a, b \text{ 为实数}, a \neq 0)$, 即 $f(t) \rightarrow f(at+b)$, 其实现流程有两种方案。

方案一:

$$f(t) \xrightarrow{\text{时间轴压缩 } 1/|a|} f(|a|t) \xrightarrow{\text{若 } a < 0 \text{ 则翻转}} f(at) \xrightarrow{\text{向左平移 } b/a} f(at+b)$$

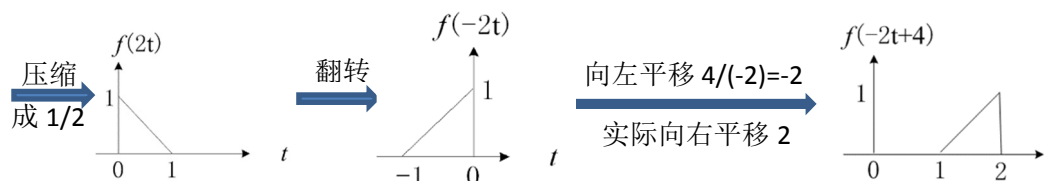
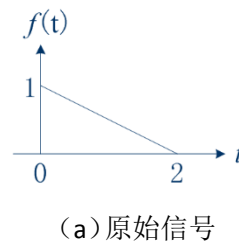
方案二:

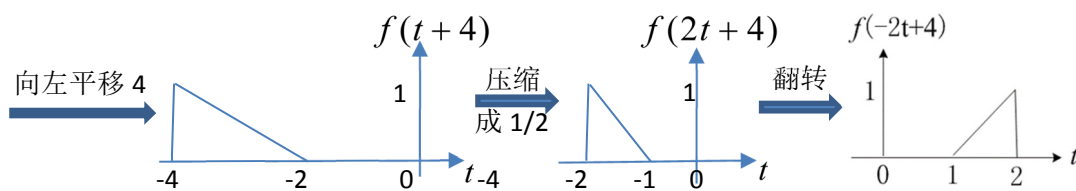
$$f(t) \xrightarrow{\text{向左平移 } b} f(t+b) \xrightarrow{\text{时间轴压缩 } f(t)} f(|a|t+b) \xrightarrow{\text{若 } a < 0 \text{ 则翻转}} f(at+b)$$

例 1.3-14: $f(t)$ 的波形如图 1.3-15(a) 所示, 求 $f(-2t+4)$ 。

解: 方案一, 按照先压缩、然后翻转、最后平移的方式得到过程如图 1.3-15(b) 所示。

方案二, 按照先平移、再压缩、最后翻转的方式得到变换过程如图 1.3-15(c) 所示。





(c) 信号的时域变换过程 2

图 1.3-15 信号时域变换过程

1.4 电路系统中的元件

电路的基本单元是各种电路元件,包括电阻器、独立电源、电容器、电感器、理想变压器、受控源等等。实际电路系统中的电路元件往往比较复杂,为了更好地对电路系统进行理论分析与设计,我们往往将电路元件理想化,首先构建出它们的理想化模型,利用理想模型完成分析与设计后,再根据电路的实际工作条件进行修正。本书中,我们重点关注各理想电路元件的物理量间的关系,同时考察它们在电路中的物理功能,即在电路中担当的角色。

1.4.1 电阻器

电阻器 (Resistor) 是一个限流元件,它可限制通过它所连支路的电流大小,在日常生活中一般直接称为电阻,它通过消耗电能转换为热能或光能,如电炉、白炽灯、电熨斗等是常用的电阻器。更一般地,一个二端钮元件,在任一瞬间 t , 它的端电压瞬时值 $u(t)$ 和端电流瞬时值 $i(t)$ 之间由 $u-i$ (或 $i-u$) 平面上的一条曲线所确定,则称此二端元件为电阻,上述曲线即电阻器的伏安特性曲线。从这个定义来看,电阻器在某一时刻的电压仅由该时刻的电流所决定,而与该时刻之前或以后的电流无关,我们称这类元件为“无记忆元件”。

1. 线性电阻

若电阻器的伏安特性曲线在 $u-i$ 平面上是一条不随时间变化,且通过原点的直线,称这类电阻器为线性定常电阻器,通常称线性电阻。电路中线性电阻一般用符号 R 表示,其伏安特性曲线如图 1.4-1 所示。当电压和电流的单位分别为伏特 (V) 和安培 (A) 时,电阻器的国际标准单位为欧姆 (Ω),常用的电阻单位还有毫欧 ($m\Omega$, $10^{-3}\Omega$)、千欧 ($k\Omega$, $10^3\Omega$)、兆欧 ($M\Omega$, $10^6\Omega$) 等。

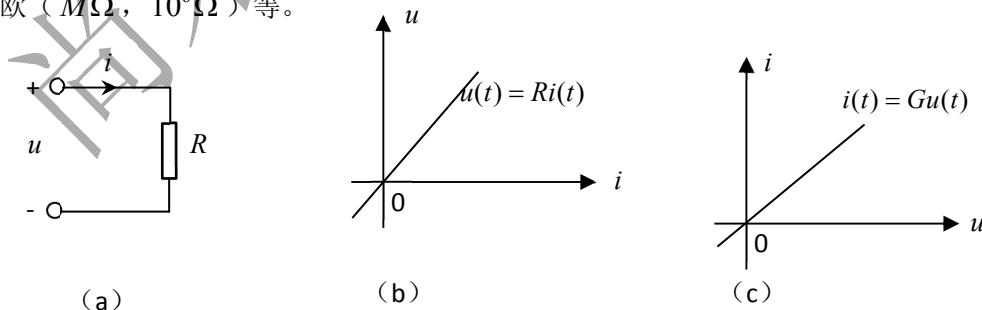


图 1.4-1 线性电阻符号及其伏安特性

线性电阻两端电压瞬时值 $u(t)$ 和电流瞬时值 $i(t)$ 之间遵从欧姆定律,即

$$u(t) = Ri(t) \quad (1.4-1)$$

或

$$i(t) = Gu(t) \quad (1.4-2)$$

式中 $G = \frac{1}{R}$ 称为电导，单位是西门子 (S)。

线性定常电阻的两种特殊情形：

(1) 伏安特性曲线为一条与电压轴重合的直线，如图 1.4-2 (a) 所示。说明该二端元件不论电压为何值，电流始终为 0，通常称之为开路。开路相当于电阻无穷大，即 $R = \infty$ ；

(2) 伏安特性曲线为一条与电流轴重合的直线，如图 1.4-2 (b) 所示。说明该二端元件不论电流为何值，电压始终为 0，通常称之为短路。短路相当于电阻为 0，即 $R = 0$ 。

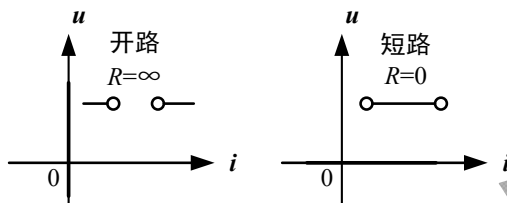


图 1.4-2 开路与短路特性

2. 二极管

晶体二极管 (Crystal Diode)，简称二极管 (Diode)，是半导体电子器件中的一种二端元件，其内部实际上是一个 PN 结。从二极管内部的 PN 结 P 区半导体引出的电极叫做阳极（或正极），从 N 区半导体引出的电极叫做阴极（或负极），其符号如图 1.4-3 (a) 所示，其伏安特性曲线如图 1.4-3 (b) 所示。

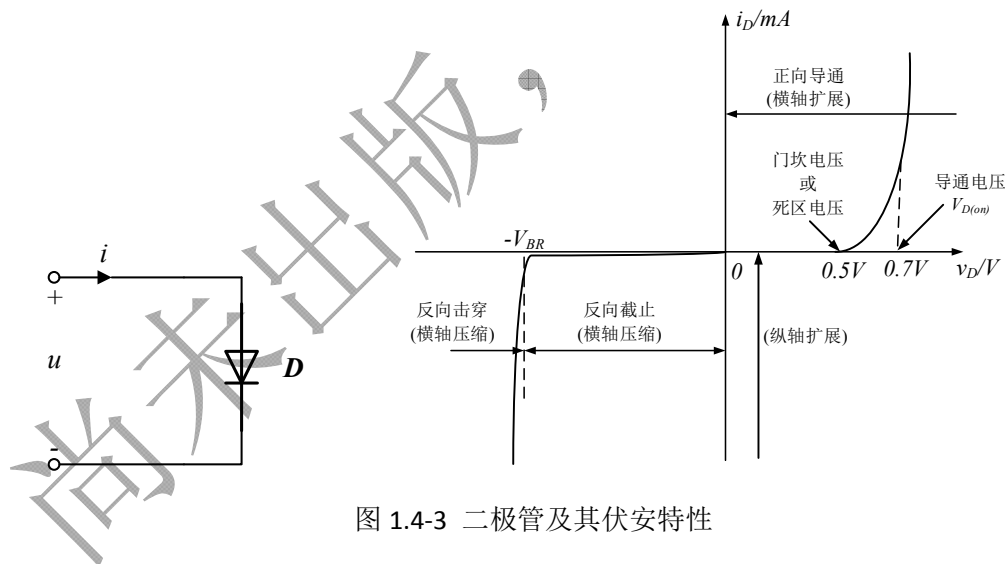


图 1.4-3 二极管及其伏安特性

由半导体物理可推导 PN 结二极管的正向特性方程为：

$$i_D = I_s (e^{v_D/nV_T} - 1)$$

式中， i_D 和 v_D 分别为 PN 结中从阳极流向阴极的瞬时电流，以及 PN 结从阳极到阴极的瞬时电压差； I_s 为 PN 结反向饱和电流值，其取值一般在 $10^{-15} \sim 10^{-13} \text{A}$ 之间，非常微弱；常数 n 是一个处于 1 和 2 之间的值， V_T 为热电压，常温下 $1/nV_T$ 接近等于 0.026V。在低频情况下，二极管可以抽象成近似于非线性定常电阻器。

PN 结在反偏工作电压不是太大时，会处于截止状态，但是当反偏电压反向增大到一个特定值并继续增大时，反向电流会突然增加，且在电流迅速增大的过程中，PN 结两端电压差几乎不变，这种现象我们称之为反向击穿。发生击穿时所需的反偏电压 V_{BR} 称为反向击穿电压，普通二极管的反偏电压在几十伏特到几百伏特。利用 PN 结二极管的反向击穿特性，可以构成稳压二极管。

由锗材料制造的二极管，其导通电压约为 $0.2\sim 0.3V$ 。此时只需要加上较小的正向电压，二极管将导通，且有电流而电压较小，呈现电阻近似为零，犹如短路；而当加上反向电压（ $u < 0$ ）时，二极管将截止，此时二极管有电压而无电流呈现无穷大电阻，犹如开路。图 1.4-4 理想二极管伏安特性由此，我们可以用如图 1.4-4 所示的理想二极管伏安特性对其进行建模。理想二极管可近似于理想开关。

3. 电阻器吸收功率和能量

在关联参考方向下，二端电阻器吸收的瞬时功率为其端电压与端电流瞬时值的乘积，即

$$p(t) = u(t)i(t) \quad (1.4-3)$$

根据二端元件吸收能量的定义为吸收功率对时间的积分，并设 t_0 时刻施加电压 $u(t)$ 于电阻器两端，所产生的电流为 $i(t)$ ，则电阻器从 t_0 到 t 的时间间隔内所吸收的能量是

$$W(t_0, t) = \int_{t_0}^t p(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t u(\tau)i(\tau) d\tau \quad (1.4-4)$$

若 $W(t_0, t) > 0$ ，表示电阻器从外电路吸收能量，此时称它为无源电阻器。在实际应用中，电阻器也能向外电路释放能量，此时电阻器一般是有源电阻器。

1.4.2 独立电源

各种化学电池、太阳能电池、稳压电源、稳流电源、发电机等这些能向电路独立提供电能的实际装置，称作独立电源元件，简称独立电源。独立电源可分成两类：一类称之为电压源元件，其特点是输出电压波动小，近似于恒定，如蓄电池、稳压电源、发电机等；另一类称之为电流源元件，其特点是输出电流变化小，近似于恒定，如太阳能电池、光电池、稳流电源等。

1. 电压源元件

如果一个二端元件不论其端电流为何值，其端电压始终保持常量 U_S 或按某一特定规律的时间函数 $u_S(t)$ 变化，则此二端元件称为理想电压源，简称为电压源。理想电压源包含两重意思：第一，理想电压源的端电压在任何瞬间都与其端电流无关；第二，理想电压源的输出电流取决于外电路负载的大小，理论上可供的电流范围从零（负载断开时）到无穷大（负载短路）。理想电压源的符号和伏安特性如图 1.4-5 所示，注意图中电压源的电压和电流选取的是非关联参考方向，意味着电压源向外提供功率。

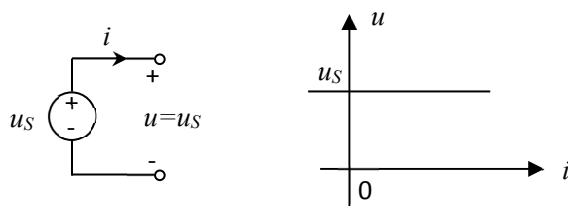


图 1.4-5 电压源及其伏安特性

有了理想电压源, 实际电压源可以用理想电压源和一个内阻的串联来模拟, 如图 1.4-6(a) 所示, 其端电压和端电流之间的关系为:

$$u = u_s - iR_s \quad (1.4-5)$$

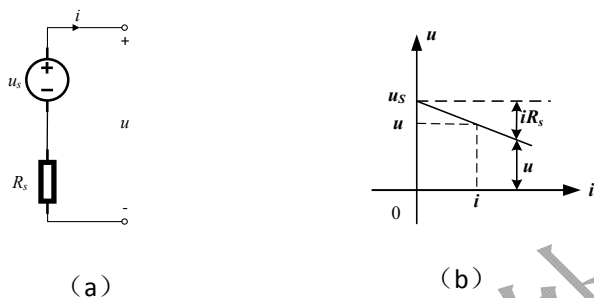


图 1.4-6 实际电压源及其伏安特性

需要指出的是: 实际电压源不允许短路, 否则因内阻很小将产生极大短路电流而造成损坏; 理想电压源的电压 $u_s = 0$ 时, 意味着按短路 (即看成一根无电阻的导线) 来处理。

2. 电流源元件

如果一个二端元件不论其端电压为何值, 其端电流始终保持常量 I_s 或按某一特定规律的时间函数 $i_s(t)$ 变化, 则此二端元件称为理想电流源, 简称为电流源。理想电流源包含两重意思: 第一, 理想电流源的端电流在任何瞬间都与其端电压无关; 第二, 理想电流源的输出电压取决于外电路负载的大小, 理论上可供的电压范围从零 (负载短路时) 到无穷大 (负载开路)。理想电流源的符号和伏安特性如图 1.4-7 所示, 同样地, 图中电流源的电压和电流选取的是非关联参考方向, 意味着电流源向外提供功率。

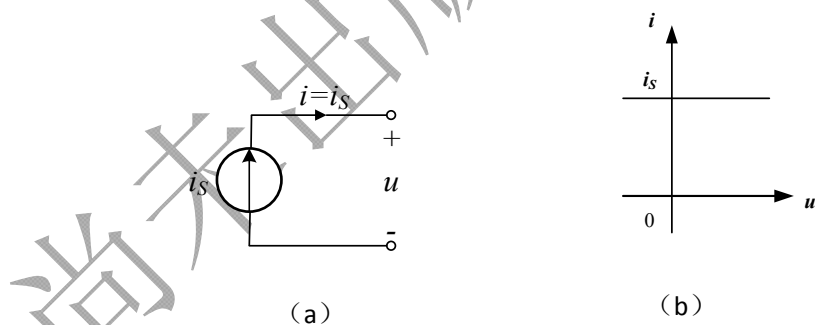


图 1.4-7 理想电流源及其伏安特性

有了理想电流源, 实际电流源可以用理想电流源和一个内电导的并联来模拟, 如图 1.4-8 (a) 所示, 其端电流和端电压之间的关系为:

$$i = i_s - uG_i \quad (1.4-6)$$

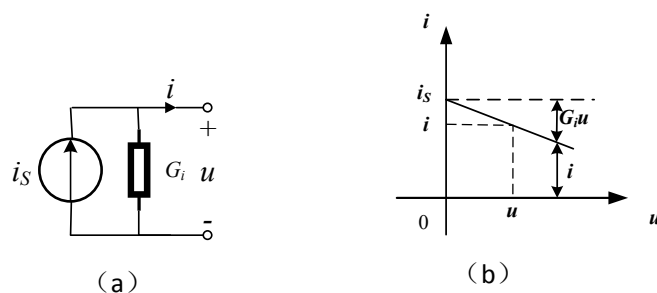


图 1.4-8 实际电流源及其伏安特性

需要指出的是：实际电流源的负载有一定限制；理想电流源的电流 $i_S = 0$ 时，意味着按开路来处理。

1.4.3 电容器元件

电容器 (Capacitor) 是一种储存电场能量的元件。从电路观点来看电容器又是存储电荷的二端钮元件。一个二端钮元件，在任一瞬间 t ，它的储存电荷瞬时值和它的端电压瞬时值 $u(t)$ 之间由 $q-u$ 平面上的一条曲线所确定，则称此二端元件为电容，上述曲线即电容器的库-伏特性曲线，简称库-伏特性。

1. 线性定常电容定义

在本书中我们主要关注线性定常电容器。若一个电容器的库-伏特性曲线在 $q-u$ 平面上是一条通过原点且不随时间变化的直线，称这类电容器为线性定常电容器，通常称线性电容。电路中线性电容一般用符号 C 表示，其库-伏特性曲线如图 1.4-9 所示。当电荷和电压的单位分别为库伦 (C) 和伏特 (V) 时，电容的国际标准单位为法拉 (F)，常用电容单位有微法 (μF , $10^{-6} F$)、纳法 (nF , $10^{-9} F$) 和皮法 (pF , $10^{-12} F$)。

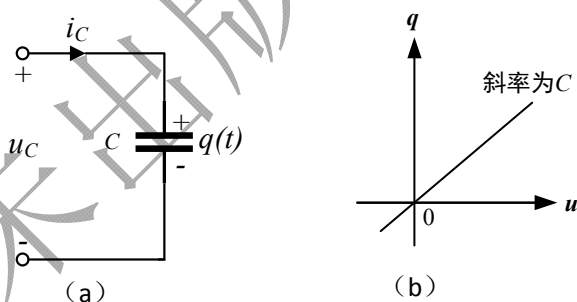


图 1.4-9 线性电容及其库伏特性

显然，线性电容的电荷和电压之间是线性函数关系，其库-伏特性方程为

$$q(t) = Cu_C(t) \quad (1.4-7)$$

或

$$u_C(t) = \frac{1}{C} q(t) \quad (1.4-8)$$

2. 线性定常电容的伏安特性

在图 1.4-7 所选定的 q 、 u 和 i 的关联参考方向下，根据电流定义，有

$$i_c(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C \frac{du_c(t)}{dt} \quad (1.4-9)$$

我们称上式为线性定常电容器在时域的伏安特性方程，显然，线性电容的伏安关系是一种微分形式。这种微分关系表明：（1）当 $du_c(t)/dt > 0$ 时，表示 $u_c(t)$ 处于上升阶段，此时外电路对电容器进行充电，电容器极板上的电荷增多，电流实际流入电容器的正极板；当 $du_c(t)/dt < 0$ 时，表示 $u_c(t)$ 处于下降阶段，此时电容器对外电路放电，电容器极板上的电荷减少，电流实际从正极板流出。于是，在电容器充放电过程中形成传导电流 $i_c(t)$ 。（2）任何时刻流入或流出正极板的传导电流仅取决于该时刻电压对时间的变化率，而与该时刻电容器端电压值的大小以及过去和未来电压无关。（3） $du_c(t)/dt$ 越大（即电压对时间变化越迅速），则 $i_c(t)$ 越大。若 $u_c(t)$ 是一个与时间无关的恒定值，即使其值很大，也因电压对时间的变化率为零而不会出现流入或流出正极板的传导电流。所以电容器对直流电路来说相当于开路，这就是电容器的“隔直”原理。

正是由于线性电容的伏安特性是一种微分关系，则要求在时变电压（动态电压）作用下才会出现流入或流出正极板的传导电流，因而线性电容器是一种动态元件，与之对应的，线性电阻是一种静态元件。

线性电容器的伏安特性除了用微分形式表达外，还可以用积分形式描述。将式（1.4-9）重新改写为

$$du_c(t) = \frac{1}{C} i_c(t) dt \quad (1.4-10)$$

对上式两边取 $t = -\infty$ 到 t 的积分，可得

$$u_c(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_c(\tau) d\tau \quad (1.4-11)$$

在实际应用中，通常选择时间起点 t_0 ，则上式可写成分段积分形式

$$\begin{aligned} u_c(t) &= \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_c(\tau) d\tau = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t_0} i_c(\tau) d\tau + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i_c(\tau) d\tau \\ &= u_c(t_0) \varepsilon(t - t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i_c(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (1.4-12)$$

上式中 $u_c(t_0)$ 是表示定积分 $\frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t_0} i_c(\tau) d\tau$ 的一个恒定值，称为电容器的初始电压，它反映了在时间起点 t_0 前电容器电流积累过程的“历史”终止状态，采用延迟阶跃函数 $u_c(t_0) \varepsilon(t - t_0)$ 有两层意思：（1）表示初始电压对 $t \geq t_0$ 以后电容电压的变化进程一直有影响；

（2）初始电压仅对 $t \geq t_0$ 有意义，而对 $t < t_0$ 无效。因此，线性定常电容器在某一时刻的端电压不仅取决于从时间起点到该时刻内电流变化进程的“历史”，而且还与时间起点的初始电压有关。因此，电容器对其电流有“记忆”能力，故又称电容器是一种记忆元件，这与电阻的非记忆性完全不同。

接下来根据式（1.4-12）探讨在 t_1 和 $t_1 + dt$ 两个瞬间的电容电压表达式：

$$u_c(t_1) = u_c(t_0) \varepsilon(t - t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^{t_1} i_c(\tau) d\tau$$

$$u_C(t_1 + dt) = u_C(t_0)\varepsilon(t - t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^{t_1 + dt} i_C(\tau) d\tau$$

则有

$$u_C(t_1 + dt) - u_C(t_1) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^{t_1 + dt} i_C(\tau) d\tau - \frac{1}{C} \int_{t_0}^{t_1} i_C(\tau) d\tau = \frac{1}{C} \int_{t_1}^{t_1 + dt} i_C(\tau) d\tau$$

从上式可以看出：只要电容电流 $i_C(t)$ 在任一瞬间都为有限值，则当 $dt \rightarrow 0$ 时， $\frac{1}{C} \int_{t_1}^{t_1 + dt} i_C(\tau) d\tau \rightarrow 0$ ，从而 $u_C(t_1 + dt) \rightarrow u_C(t_1)$ ，也就是说，电容器的端电压 $u_C(t)$ 是连续的，这意味着：当流过电容器的电流为有限值时，电容器两端的端电压不能跃变！写成表达式则为：

$$u_C(t_1^+) = u_C(t_1^-) \quad (1.4-13)$$

式中 t_1^- 表示从 t 从左边趋向于 t_1 （ t_1^- 为 t_1 时刻的前一瞬间）， t_1^+ 表示从 t 从右边趋向于 t_1 （ t_1^+ 为 t_1 时刻的后一瞬间），也就是说当流过电容器的电流为有限值时，某一时刻 t_1 后一瞬间的电压 $u_C(t_1^+)$ 等于其前一瞬间的电压 $u_C(t_1^-)$ ，这是电容电压的“惯性”性质，如图 1.4-10 所示。

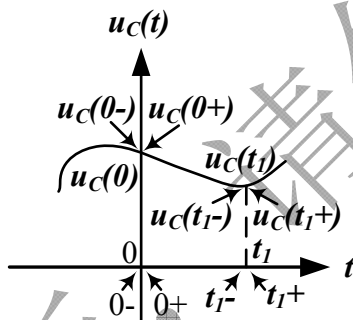


图 1.4-10 线性电容端电压的连续

3. 线性定常电容器的功率和储能

在关联参考方向下，输入电容器的瞬时功率为其端电压 $u_C(t)$ 与端电流 $i_C(t)$ 瞬时值的乘积，即

$$p_C(t) = u_C(t)i_C(t) = Cu_C(t) \frac{du_C(t)}{dt} \quad (1.4-14)$$

若 $p_C(t) > 0$ ，表示电容器从外电路吸收功率，此时电容器储存电场能；若 $p_C(t) < 0$ ，表示电容器对外电路输出功率，此时电容器释放电场能。

从 $-\infty$ 到 t 的时间间隔内，电容器储存的电场能量是

$$\begin{aligned} W_C(-\infty, t) &= \int_{-\infty}^t p_C(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t u_C(\tau) i_C(\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^t u_C(\tau) \left[C \frac{du_C(\tau)}{d\tau} \right] d\tau = \int_{u_C(-\infty)}^{u_C(t)} Cu_C(\tau) du_C(\tau) \\ &= \frac{1}{2} C [u_C^2(t) - u_C^2(-\infty)] \end{aligned}$$

若电容器初始无充电，即 $u_C(-\infty) = 0$ ，则上式变为

$$W_C(t) = \frac{1}{2} Cu_C^2(t) \quad (1.4-15)$$

上式表明，电容器在某一时刻的储能只取决于该时刻电容器的电压值，而与电容电压过去

变化过程及电容电流值均无关。

根据 $q(t) = Cu_C(t)$ ，则当流过电容的电流为有限值时，根据电压不能跃变的关系式(1.4-13)可以得到电荷也不能跃变，即

$$q_C(t_1^+) = q_C(t_1^-) \quad (1.4-16)$$

必须特别强调，上述电压和电荷不能跃变的前提是流过电容的电流为有限值。如果流过电容的电流不是有限值时，情况则会不同，如图 1.4-11 所示给出了这样一个例子。在图 1.4-11 (a) 中，电容 $C = 1F$ ，初始电压为 0，在 $t = 0$ 时刻开关闭合。很明显，开关闭合后，电容电压发生了强迫跃变！实际上，在这一电路中，电源电压可用单位阶跃函数表示，从而得到如图 1.4-11 (b) 所示的等效电路，不难求出电容的充电电流为

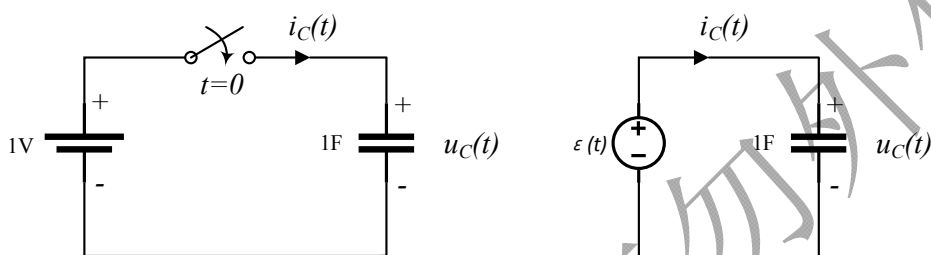


图 1.4-11 电容电压的强迫跃变

$$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = \frac{d\varepsilon(t)}{dt} = \delta(t)$$

是一个单位冲激电流，显然不是有限的。

反之，若有一单位冲激电流 $\delta(t)$ 通过初始电压为 0 的电容 C ，则电容电压为

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \frac{1}{C}$$

显然，电容电压发生了跃变。

这个例子也进一步说明了奇异函数在电路系统中是有其物理背景的，奇异函数是某些物理现象通过科学抽象后的理想化模型。

例 1.4-1 图 1.4-12 (a) 中线性电容的端电压波形如图 1.4-10 (b) 所示，且已知初始电压为 0，试求 $t > 0$ 通过电容器的电流 $i_C(t)$ 。

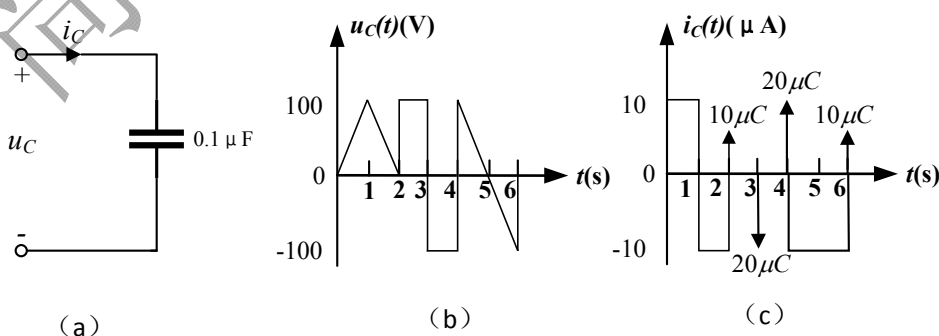


图 1.4-12 例 1.4-1 电路和波形

解：根据 $i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}$ ，将各时间区间的电压 $u_C(t)$ 对时间进行求导，可得如图 1.4-9

(c) 所示的电流 $i_C(t)$ 波形。

1.4.4 电感器元件

电感器 (Inductor) 是一种储存磁场能量的元件。从电路观点来看电感器是存储磁通的二端钮元件。电感在实际中应用非常广泛，如各种滤波电感线圈、日光灯的镇流器、汽车点火线圈、谐振线圈等等。电感的结构一般都是用导线绕制成线圈，并安装在导磁性能优良的磁芯上。如图 1.4-13 所示为一实际电感，当电流 $i(t)$ 从线圈的一端通入线圈时，其周围将产生磁场，磁场方向符合右手螺旋定则。以 $\phi(t)$ 表示每匝线圈上产生的磁通，则整个 N 匝线圈上产生的总磁通 (磁链) $\psi(t) = N\phi(t)$ 。

一个二端元件，在任一瞬间 t ，流入电流 $i(t)$ 和它产生的磁链 $\psi(t)$ 之间由 $\psi-i$ 平面上的一条曲线所确定，则称此二端元件为电感器，上述曲线即电感器的特性曲线。

1. 线性定常电感定义

在本书中我们主要关注线性定常电感器。若一个电感器的特性曲线在 $\psi-i$ 平面上是一条通过原点且不随时间变化的直线，称这类电感器为线性定常电感器，通常称线性电感。电路中线性电容一般用符号 L 表示，其特性曲线如图 1.4-14 所示。当磁链和电流的单位分别为韦伯 (Wb) 和安培 (A) 时，电感的国际标准单位为亨利 (H)，常用电容单位还有毫亨 (mH , $10^{-3}H$)、微亨 (μH , $10^{-6}H$)。

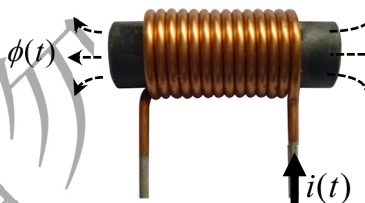


图 1.4-13 电感及磁链

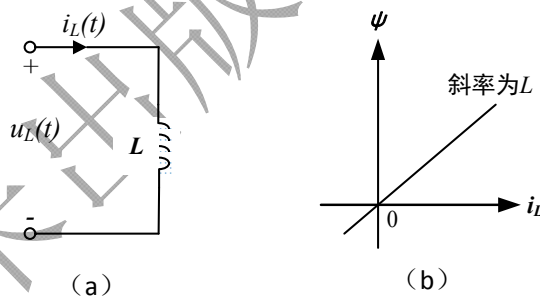


图 1.4-14 线性电感及其特性曲线

显然，线性电感的磁链和电流之间是线性函数关系，其特性方程为

$$\psi(t) = Li_L(t) \quad (1.4-17)$$

或

$$i_L(t) = \frac{1}{L}\psi(t) \quad (1.4-18)$$

2. 感应电压

根据法拉第电磁感应定律，当穿过线圈的磁通随时间变化时，会产生感应电压，其大小为磁链对时间的导数绝对值，即

$$u_L(t) = \left| \frac{d\psi(t)}{dt} \right| \quad (1.4-19)$$

上式表明电感的端电压取决于磁链是否随时间变化，而与磁链自身的大小无关；磁链变化率越大，感应电压越大。

法拉第电磁感应定律仅仅是确定了感应电压的大小，感应电压的极性则由楞次定律确定：感应电压引起的感应电流所产生的磁通力图阻止激起感应电压的原磁通变化。由此，在采用如图 1.4-12 (a) 所示的电压电流关联参考方向下，则感应电压的表达式为：

$$u_L(t) = \frac{d\psi(t)}{dt} \quad (1.4-20)$$

上式表明：当 $i_L(t)$ 随时间增加时， $\psi(t)$ 也随之增大，此时 $d\psi(t)/dt > 0$ ，此时感应电压为正；反之，当 $i_L(t)$ 随时间减小时， $\psi(t)$ 也随之减小，此时 $d\psi(t)/dt < 0$ ，此时感应电压为负。

值得说明的是，若电压电流取非关联参考方向时，则

$$u_L(t) = -\frac{d\psi(t)}{dt}$$

3. 线性定常电感器的伏安特性

根据线性定常电感器磁链和电流间的线性关系，当其端电压和电流取关联参考方向时，有

$$u_L(t) = \frac{d\psi(t)}{dt} = \frac{d[L i_L(t)]}{dt} = L \frac{di_L(t)}{dt} \quad (1.4-21)$$

上式表明：(1) 对于一个线性定常电感器，在任一时刻的感应电压仅取决于该时刻电流对时间的变化率，而与该时刻电流值的大小以及过去和未来的电流无关，若 $di_L(t)/dt$ 越大（即电流对时间变化越迅速），则感应电压越高；(2) 若电流是一个与时间无关的恒定值，即使其值很大，也因电流对时间的变化率为零而不会出现感应电压。所以电感器在直流电路中相当于短路。

对式 (1.4-21) 两边取 $t = -\infty$ 到 t 的积分，可得

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L(\tau) d\tau \quad (1.4-22)$$

在实际应用中，通常选择时间起点 t_0 ，则上式可写成分段积分形式

$$\begin{aligned} i_L(t) &= \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L(\tau) d\tau = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{t_0} u_L(\tau) d\tau + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u_L(\tau) d\tau \\ &= i_L(t_0) \varepsilon(t - t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u_L(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (1.4-23)$$

上式中 $i_L(t_0)$ 是表示定积分 $\frac{1}{L} \int_{-\infty}^{t_0} u_L(\tau) d\tau$ 的一个恒定值，称为电感器的初始电流，它反映了

在时间起点 t_0 前电感器端电压积累过程的“历史”终止状态，采用延迟阶跃函数

$i_L(t_0) \varepsilon(t - t_0)$ 有两层意思：(1) 表示初始电流对 $t \geq t_0$ 以后电感电流的变化进程一直有影响；

(2) 初始电流仅对 $t \geq t_0$ 有意义，而对 $t < t_0$ 无效。因此，线性定常电感器在某一时刻的电流不仅取决于从时间起点到该时刻内电压变化进程的“历史”，而且还与时间起点的初始电流有关。因此，电感器对其电压有“记忆”能力，故电感器也是一种记忆元件。

对比电容器和电感器的相关性质不难发现：只要把描述电容器的变量 $q(t)$ 、 $i_C(t)$ 、 $u_C(t)$ 和参数 C 分别依次替换描述电感器的变量 $\psi(t)$ 、 $u_L(t)$ 、 $i_L(t)$ 和参数 L 以后，就可以从前者的相关表达式转换成后者的表达式，反之亦然。我们把这种从一种性质元件的所有表达式，通过有关物理量及参数代换简洁有效地导出另一种性质元件所有表达式的方法，称为对偶法。这两种不同性质的元件称为对偶元件；相互代换的物理量称为对偶量；代换前后的两个表达式称为对偶表达式。对偶法是电路系统分析中一种非常重要的方法，读者在后面还会经常碰到。

由于电容器和电感器互为对偶，这样可以利用对偶原理，从电容器的有关结论直接推出电感器的主要性质：

- (1) 电感器也是一种记忆元件；
- (2) 一个线性定常电感器，若在所研究的时间区间内端电压都是有限的，则电感器中的电流（磁链）不能发生跳变，即

$$i_L(t_0^+) = i_L(t_0^-) \quad (1.4-24)$$

$$\psi(t_0^+) = \psi(t_0^-) \quad (1.4-25)$$

因此，电感器也是一种关系元件；

- (3) 电感器也是一种动态元件；
- (4) 一个线性定常电感器，若在其两端施加冲激电压，则电感器中的电流也发生跳变。

4. 线性定常电感器的功率和储能

在关联参考方向下，输入电感器的瞬时功率为其端电压 $u_L(t)$ 与端电流 $i_L(t)$ 瞬时值的乘积，即

$$p_L(t) = u_L(t)i_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} i_L(t) \quad (1.4-26)$$

若 $p_L(t) > 0$ ，表示电感器从外电路吸收功率，此时电感器储存磁能；若 $p_L(t) < 0$ ，表示电感器对外电路输出功率，此时电感器释放磁能。

从 $-\infty$ 到 t 的时间间隔内，电感器储存的磁场能量是

$$\begin{aligned} W_L(-\infty, t) &= \int_{-\infty}^t p_L(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t u_L(\tau) i_L(\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^t \left[L \frac{di_L(\tau)}{d\tau} \right] i_L(\tau) d\tau = \int_{i_L(-\infty)}^{i_L(t)} L i_L(\tau) di_L(\tau) \\ &= \frac{1}{2} L [i_L^2(t) - i_L^2(-\infty)] \end{aligned}$$

若电感器初始无储能，即 $i_L(-\infty) = 0$ ，则上式变为

$$W_L(t) = \frac{1}{2} L i_L^2(t) \quad (1.4-27)$$

上式表明，电感器在某一时刻的储能只取决于该时刻电感器的电流值，而与电感电流过去变化过程及电感电压值均无关。

实际上，利用对偶原理，不难从电容储能的表达式 (1.4-15)，通过变量和参数代换得到上述电感储能表达式 (1.4-27) 及其相关陈述。

例 1.4-2 图 1.4-15 (a) 中线性电感的端电压波形如图 1.4-15 (b) 所示，且已知电感的初始电流为 0，试求 $t > 0$ 通过电感器的电流 $i_L(t)$ 。

解：根据 $i_L(t) = i_L(t_0)\varepsilon(t-t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u_L(\tau) d\tau$ ，按时间分段进行积分，可得

$$(1) \quad 0 \leq t \leq 1s, \quad i_L(t) = 20t;$$

$$(2) \quad 1 \leq t \leq 2s, \quad i_L(t) = 20(A);$$

$$(3) \quad 2 \leq t \leq 3s, \quad i_L(t) = 10t^2 - 40t + 60(A);$$

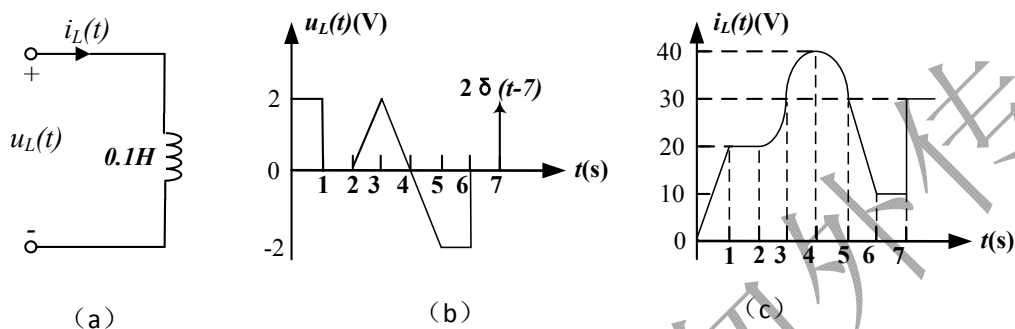


图 1.4-15 例 1.4-2 电路和波形

$$(4) \quad 3 \leq t \leq 5s, \quad i_L(t) = -10t^2 + 80t - 120(A);$$

$$(5) \quad 5 \leq t \leq 6s, \quad i_L(t) = -20t + 130(A);$$

$$(6) \quad 6 \leq t \leq 7^-s, \quad i_L(t) = 10(A);$$

$$(7) \quad t \geq 7^-s, \quad i_L(t) = 30(A).$$

1.4.5 受控源元件

如果一个元件的某一物理量 y 受另一物理量 x 所支配，我们称该元件为受控元件。通常把 y 叫做受控（物理）量，而把 x 叫做控制（物理）量。实际应用系统中，控制量和受控量既可以是电量（电压、电流、电荷、磁场等），也可以是非电量（如温度、压力、流量、位移、速度等），如电阻炉的温度（受控量是非电量）可用电压（控制量为电量）高低来控制。在本书中，我们感兴趣的只限于受控量和控制量均为电压或电流的电阻性受控源元件。

根据受控量和控制量为电压还是电流的不同，我们所关注的受控源元件主要有四种：电流控制电流源（CCCS）、电压控制电流源（VCCS）、电压控制电压源（VCVS）和电流控制电压源（CCVS）。

1. 电流控制电流源（CCCS）

电流控制电流源的一个典型实例是晶体三极管。晶体三极管是电路中的一个重要电子器件，其基本特性是具有电流放大作用，即能把微弱的输入电流信号转换成较大的电流输出信号，且在一定范围内，放大倍数保持不变。

➤ 晶体三极管的构造

晶体三极管是由两个靠得很近且背对背排列的 PN 结构成的，根据排列方式的不同，晶体三极管可分为 NPN 和 PNP 两种类型，晶体管的 3 个半导体区域按从左到右的顺序分别称为发

射区、基区和集电区，每个区的电极引出线分别称为发射极（E）、基极（B）和集电极（C），这3个半导体区域形成两个PN结，分别称为发射结（EBJ）和集电结（CBJ），如图1.4-16（a）所示给出了NPN型三极管结构示意图，图1.4-16（a）是NPN型三极管的符号。

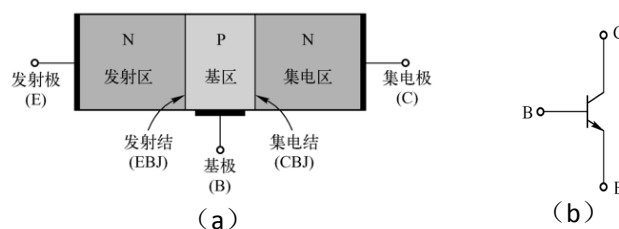


图 1.4-16 NPN 型三极管的结构及其符号

当晶体三极管工作在**发射结正偏、集电结反偏**的模式时，三极管工作在**放大模式**，在这一模式下，晶体三极管的集电极电流和发射极电流只受发射结正偏电压的控制，而几乎不受集电结反偏电压的控制，这种作用称为“**正向受控**”，是**实现放大器的基础**。

► 晶体三极管的伏安特性曲线

晶体三极管为三端器件，作为二端口网络时，必定有一个电极作为输入和输出端口的公共端，连接方式则以公共端命名，因此有共发射极、共基极和共集电极3种连接方式，在这3种连接方式中，每对端口均有两个变量（端电压和端电流），总共有4个端变量。因而在平面坐标上表示晶体三极管的伏安特性，就必须采用两组曲线族，一般采用**输入特性曲线族**和**输出特性曲线族**。如图1.4-17（a）所示给出了应用最广泛的共发射极连接方式，其对应的输入特性曲线族和输出特性曲线族分别为

$$i_B = f_1(u_{BE}) \Big|_{u_{CE}=\text{常数}} \quad (1.4-28)$$

$$i_C = f_2(u_{CE}) \Big|_{i_B=\text{常数}} \quad (1.4-29)$$

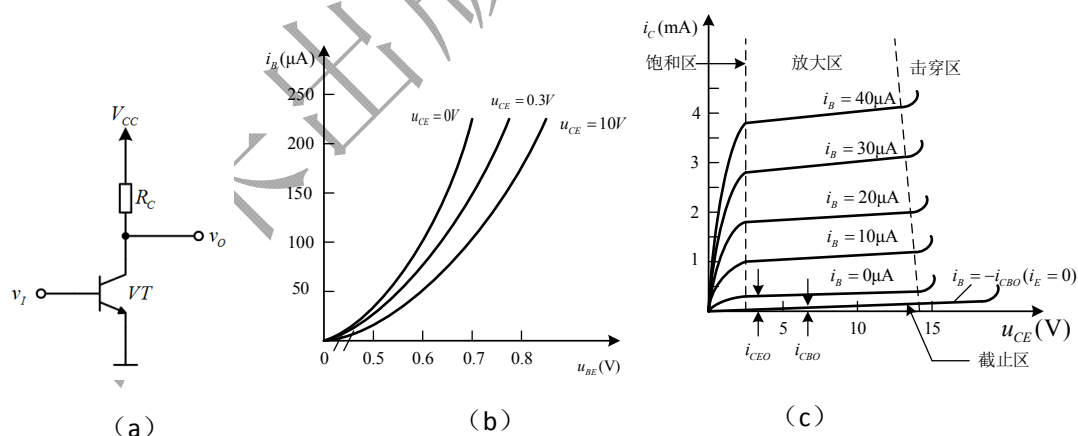


图 1.4-17 NPN 型三极管的共发射极连接及其伏安特性曲线

（1）输入特性曲线族

如图1.4-17（b）所示给出了某NPN型晶体三极管的输入特性曲线族。由图中可以看出，曲线形状与晶体二极管的伏安特性曲线类似，但基极电流很小，电流单位是 μA ，另外它与 u_{CE} 有关，当 u_{CE} 在 $0 \sim 0.3\text{V}$ 间变化时， i_B 变化较大，此时晶体三极管工作在饱和模式， u_{CE} 越小，饱和越深， i_B 就越大，导致曲线移动增大。当 $u_{CE} = 0.3\text{V}$ 时，由于发射结正偏，

发射结电压 $u_{BE} \approx 0.7V$ ，此时可以得到集电结电压 $u_{BC} \approx 0.4V$ ，此时，集电结刚达到 PN 结的开启电压左右，如果 u_{CE} 再增加，集电结将会截止，三极管进入放大区，因此将 $0.3V$ 作为饱和区和放大区的分界线。当 u_{CE} 大于 $0.3V$ 时，晶体三极管工作在放大模式，理想情况下电流 i_B 应不随 u_{CE} 变化。

(2) 输出特性曲线族

如图 1.4-17 (c) 所示给出了某 NPN 型晶体三极管输出特性曲线族。输出特性曲线族可分为 4 个区域：饱和区、放大区、截止区和击穿区。

(a) 饱和区：饱和区对应的是晶体三极管的饱和工作模式，三极管在这个区域工作时发射结和集电结都处于正偏导通状态。饱和区和放大区的分界线 u_{CE} 约为 $0.3V$ ，当 $u_{CE} \leq 0.3V$ ，晶体三极管工作在饱和区，在这个区域工作时， i_B 的改变对 i_C 影响较小。

(b) 放大区：放大区对应的是晶体三极管的放大工作模式，三极管在这个区域工作时发射结正偏导通，集电结反偏截止。当 $u_{CE} > 0.3V$ 时，晶体三极管进入放大区。对于理想的晶体三极管来说，在这个区域中，输出特性曲线族是一组近似间隔均匀、平行的直线。 u_{CE} 在一定范围内增加， i_C 几乎不变，但当 i_B 增加， i_C 成比例地增大， $i_C = \beta i_B$ ，体现了输入电流 i_B 对输出电流 i_C 的控制作用。

(c) 截止区：发射极电流 $i_E = 0$ 以下的区域称为截止区，工程上基极电流 $i_B = 0$ 以下的区域也为截止区，此时晶体三极管的发射结和集电结均反偏。

(d) 击穿区：随着 u_{CE} 持续增大，加在集电结上的反偏电压 u_{CB} 相应增大。当 u_{CE} 增大到一定值时，集电结发生反向击穿，造成电流 i_C 剧增，形成击穿区。

➤ 理想电流控制电流源电路（模型）

从上述 NPN 型三极管的输入特性可以看出，当其工作于放大区时：(1) u_{BE} 较小，因而可把输入两端 B、E 近似抽象为短路状态；(2) 集电极电流 i_C 几乎与 u_{CE} 无关，仅受输入电流 i_B 所支配，即 $i_C = \beta i_B$ ，故可把输出电流抽象成受输入电流控制的电流源，如图 1.4-18 所示给出了晶体三极管抽象成理想 CCCS 示意图。

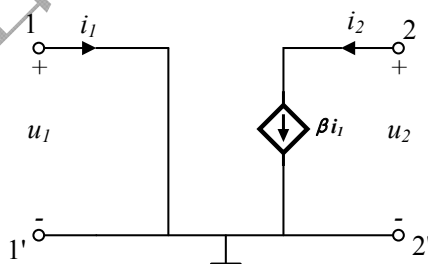


图 1.4-18 晶体三极管抽象出的理想 CCCS 模型

基于上述两点理由，可以将晶体三极管的基极回路看做信号输入回路，集电极回路看做信号输出回路，把输入端口 B-E 改成 1-1'，输出端口 C-E 改成 2-2'， $u_{BE} \rightarrow u_1$ ， $i_B \rightarrow i_1$ ， $u_{CE} \rightarrow u_2$ ， $i_C \rightarrow i_2$ ，于是可把晶体三极管三个电极电流及其电极间电压的伏安关系等效成如图 1.4-18 所示的理想电流控制电流源，这种新型受控源具有两个端纽，属于多端元件；同时因为其具有输入和输出两个端口，故又称二端口元件。

受控源和独立电源虽然都属于有源元件，但它们代表性质根本不同的元器件的理想化模型。独立电源能独立地向电路输入电能或信号，而不受其他支路或元件上的电压、电流所支配或控制，可作为电路的激励；而受控源受电路中其他支路或元件上的电压、电流所支配或控制，

不能单独存在，因而不能独立地向电路输入信号或电能，故又称非独立电源。

需要指出一点，在各种含受控源电路分析中，可把受控源按独立电源来对待。

2. 电压控制电流源 (VCCS)

电压控制电流源的一个实例是场效应管。

如图 1.4-19 (a) 所示为 N 沟道增强型场效应管的物理结构。在 P 型衬底上创建两个重掺杂的 N 型区，分别称为**源区**和**漏区**，在两个区上分别覆上金属膜，引出电极，则分别称为**源极**和**漏极**。在源区与漏区间的 P 型半导体表面上覆盖薄薄一层氧化层——二氧化硅 (SiO_2)，并在氧化层上沉积一层金属，这样就形成了**栅极**。另外，在 P 型衬底的另一面也覆上了金属膜，并引出电极，则为**衬底极**。因此，MOSFET 在物理结构上共引出 4 个端子：栅极 (G)、源极 (S)、漏极 (D) 和衬底极 (B)。MOSFET 本质上是个四端组器件。通常 N 沟道场效应管在工作时，为了保证源区和漏区的两个 PN 结反偏，将源极与衬底极连接在一起，即 $u_{SB} = 0$ ，并接在整个电路的最低电位，此时，将场效应管作为三端口器件考虑。

场效应管有三种工作模式：(1) 当 u_{GS} 小于开启电压 V_t 时，器件内没有沟道产生，此时**器件处于截止状态**，相应的工作区称为**截止区**；(2) 当 $u_{GS} > V_t$ 时，形成沟道，沟道电阻值开始随 u_{GS} 增大而减小。此时，在 u_{DS} 较小时 MOSFET 的工作区域称为**变阻区**；(3) 当 $u_{GS} \geq V_t$ ，且 $u_{DS} \geq u_{GS} - V_t$ 时，此时沟道上形成夹断点 A，漏极多余的电压 $u_{DS} - (u_{GS} - V_t)$ 将全部加在漏极 D 与夹断点 A 之间的夹断区上，相应产生自漏极指向夹断点的电场。这个电场将自源区到达夹断点的电子拉进漏区，形成漏极电流 i_D ，一旦夹断点形成，电流 i_D 将几乎不再随 u_{DS} 的变化而变化，此时的电流 i_D 几乎只与 u_{GS} 的大小有关，这一工作区域称为**饱和区**。如图 1.4-19 (c) 所示为某 MOSFET 的输出特性曲线。

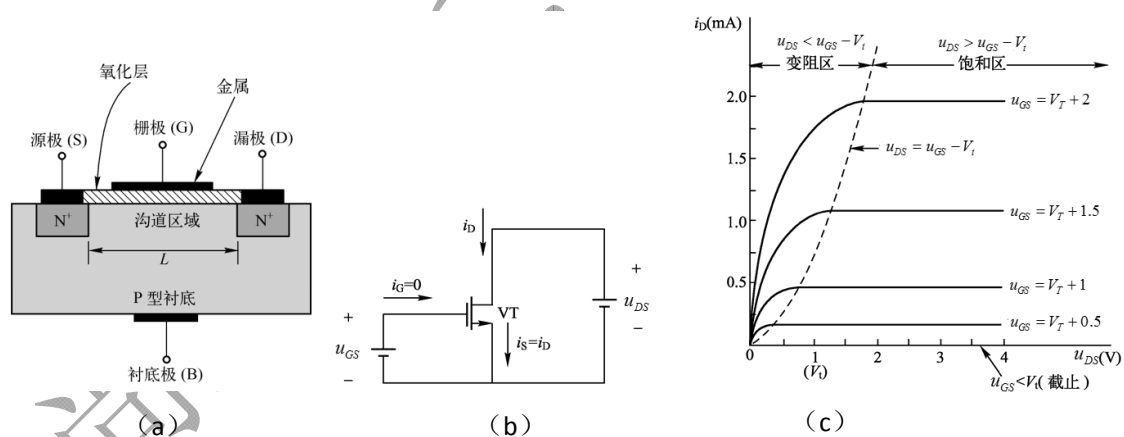


图 1.4-19 场效应管结构、电路符号与输出特性

理想场效应管饱和区的电流-电压方程为

$$i_D = \frac{1}{2} k'_n \frac{W}{L} (u_{GS} - V_t)^2$$

式中， L 为沟道长度； W 为沟道宽度； k'_n 为常数，由 N 沟道 MOSFET 的制造工艺决定，量纲为 A/V^2 。

可以看出，在饱和区时，漏极电流与漏源电压 u_{DS} 无关，而由栅源电压 u_{GS} 决定，如图 1.4-20 所示给出了 MOSFET 抽象成理想 VCCS 的模型（电路）。

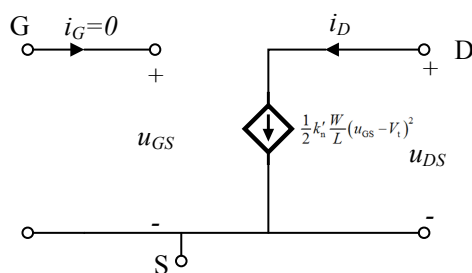


图 1.4-19 场效应管的理想 VCCS 模型

3. 电压控制电压源 (VCVS)

电压控制电压源的典型实例是集成运算放大器，其在实际中应用非常广泛。

集成运算放大器简称集成运放，其符号如图 1.4-20 (a) 所示。

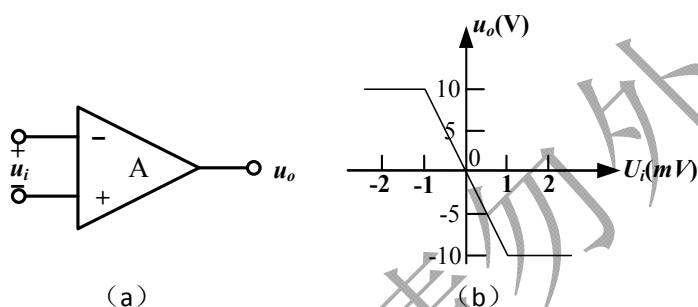


图 1.4-20 集成运放符号和典型传输特性曲线

➤ 集成运放的主要技术指标包括：

(1) 开环电压放大倍数 A

开环电压放大倍数（或称增益）指集成运放的输入与输出之间没有任何外接元件，而且输出端不接任何负载，输出的开路电压 u_o 对差模输入信号电压 $u_i = u_1 - u_2$ 之比的绝对值，即

$$A = |u_o / u_i|$$

对集成运放来说， A 越大越好。目前集成运放的开环增益可高达 140dB。

(2) 最大输出电压 u_{op-p}

最大输出电压是指在一定电源电压下，集成运放的最大不失真输出电压的峰峰值。如某运放在电源电压为 $\pm 15V$ 时最大输出电压为 $\pm 10V$ 。若按其 $A = 10^4$ 计算，为了得到 $\pm 10V$ 的输出电压，则输入电压 u_i 的峰峰值只需 $\pm 1mV$ 。如果 u_i 超出 $\pm 1mV$ ，则由于集成运放的中间级或输出级晶体管已工作于非线性区，致使输出电压不能跟随输入电压做线性变化，此时运放已处于饱和状态。例如，某集成运放的开环传输特性曲线如图 1.4-20 (b) 所示。

(3) 开环差模输入电阻 r_i

当开环时，运放两个输入间的动态电阻 r_i 可高达 $10^4 M\Omega$ ，因此运放两个输入端从差模信号源索取极小的电流，几乎可以忽略不计。

(4) 开环输出电阻 r_o

运放开环且不带负载时，输出端对地的动态等效电阻称为输出电阻 r_o ，输入电阻小表示能提供较大输出电流给负载。

➤ 集成运放的一般电路模型

当运放工作在线性放大区时，根据上述四个主要技术指标，我们可以把基础运放对外作用

等效成如图 1.4-21 (a) 所示的电路模型, 从图中可以看出, 集成运放可看做是三端口 (即 1-4 和 2-4 两个输入端口以及一个输出端口 3-4) 形式的受控源, 显然这是一种电压控制电压型的受控源。实际应用时, 对于单端输入信号往往将同相端“+”接地构成反相放大器 (即令 $u_2 = 0$), 得到如图 1.4-21 (b) 所示的电路模型, 且有 $u_o = -Au_1$, 输出信号与输入信号相位相差 180° , 即反相; 同理, 若将反相端“-”接地则构成同相放大器 (即令 $u_1 = 0$), 得到如图 1.4-21 (c) 所示的电路模型, 且有 $u_o = Au_2$, 输出信号与输入信号相位相差为零, 即同相。

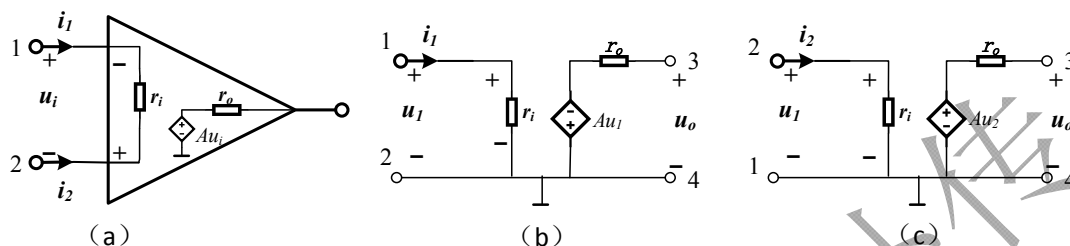


图 1.4-21 集成运放一般等效电路模型

➤ 理想集成运放

如果线性集成运放满足以下三个条件, 则称之为理想运放:

- (1) 输入电阻 $r_i \rightarrow \infty$, 这意味着 $i_1 \rightarrow 0$, $i_2 \rightarrow 0$, 即输入电流接近于零;
- (2) 输出电阻 $r_o \rightarrow 0$, 这表示运放输出的等效电压控制电压源直接施加于负载之上;
- (3) 开环放大倍数 $A \rightarrow \infty$, 这表示输出电压 u_o 在有限值下, 两个输入端的电压 $u_i = u_1 - u_2 = -u_o / A \rightarrow 0$, 即输入信号电压 u_i 接近于零。

根据理想运放的条件 (1), 可认为理想运放的两个输入端的净输入电流 $i^- \rightarrow 0$ 和 $i^+ \rightarrow 0$, 即流入反相端和同相端的电流近似为零, 但并不真正等于零, 称此种情况为“虚断”; 根据理想运放的条件 (3), 可认为施加在理想运放的两个输入端的净输入电压 $u_e = (u^- - u^+) \rightarrow 0$, 即反相端和同相端对地的电压近似相等, 但并不完全相等, 由于两个输入端的电压近似于零, 犹如短路一样, 而又不是真正短路, 故称为“虚短”。

利用理想运放可以构成多种实际应用电路, 常见的包括同相放大电路、反相放大电路、电压跟随器、加减法运算电路、微分和积分运算电路、对数和反对数运算电路等。

例 1.4-3 如图 1.4-22 为输入信号 u_i 加到运放的同相端, 试求输出电压的表达式。

解: 若将该电路中的集成运放看做是理想运放, 则由图中可以看出, 同相端的输入电流 i^+ 等于输入信号电流 i , 即 $i^+ = i$ 。根据虚断原理有 $i^+ \rightarrow 0$, $i \rightarrow 0$ 。

同样, 同相端对地电压 u^+ 等于输入信号电压, 即 $u^+ = u_i$,

又反相端的净输入电流 $i^- \rightarrow 0$, 故输出信号电压 u_o 通过电阻 R_1 、

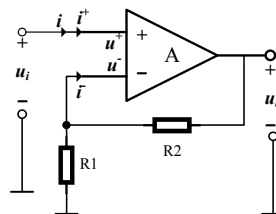


图 1.4-22 同相放大电路

R_2 分压, 显然有 $u^- = \frac{R_1}{R_1 + R_2} u_o$, 根据虚短原理有 $u^+ = u^- = \frac{R_1}{R_1 + R_2} u_o$, 从而有 $u_i = u^+ = \frac{R_1}{R_1 + R_2} u_o$,

或者 $u_o = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) u_i$ 。

4. 电流控制电压源 (CCVS)

图 1.4-23 (a) 为一个他激直流发电机的示意图, 若把励磁电流 i_1 看做控制量, 感应电压 u_2

看做受控量，则可把它抽象为图 1.4-23 (b) 所示的理想电流控制电压源。

由于表征受控源的方程都是以电压 u 、电流 i 为变量的代数方程，因而受控源可视为有源性电阻元件。

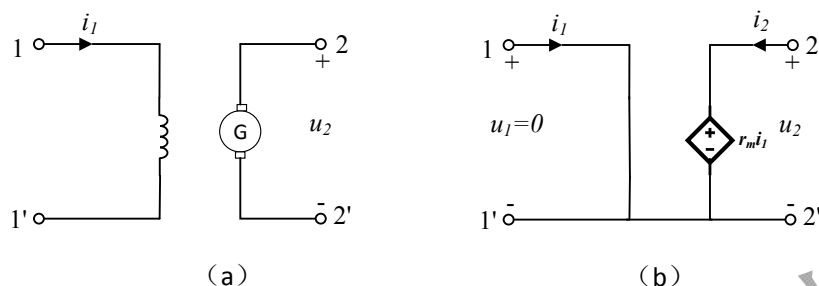


图 1.4-23 理想电流控制电压源电路模型

1.4.6 耦合电感元件和理想变压器

当两个或两个以上的线圈在空间上紧挨着，若有电流流过线圈时，每个电流所产生的磁通除了与自己线圈相交链外，还会穿过其它相邻的线圈相交链，此时，称这些线圈间有磁耦合。在实际工程中，为了在同样电流下获得较大磁通，通常把线圈装配在铁磁材料制成的闭合铁芯上。

1. 耦合电感元件

➤ 互感系数

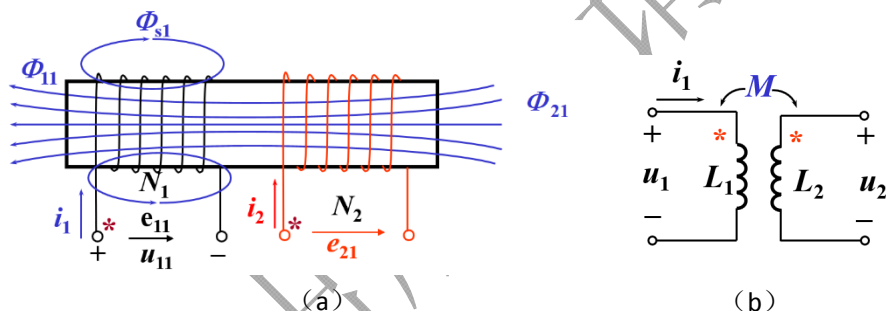


图 1.4-24 耦合线圈及其电路模型

如图 1.4-24 (a) 所示示意了两个线圈的磁耦合现象。当线圈 1 中通有电流 i_1 时，根据右手螺旋定则，将会产生总磁通 Φ_{11} ，称为线圈 1 的自感磁通，它包括两部分：其一是 Φ_{21} ，这部分磁通处于铁芯内，不仅与自己线圈 N_1 匝相交链，而且还与线圈 2 的 N_2 匝相交链，称为互感磁通；其二是 Φ_{s1} ，这部分磁通只通过周围空气与线圈 1 相交链，不与线圈 2 相交链，称为漏磁通。一般情况下， Φ_{s1} 远小于 Φ_{21} ，有时可忽略不计。定义线圈 1 对线圈 2 的互感系数 M_{21} 为：

$$M_{21} = \frac{\psi_{21}}{i_1} = \frac{N_2 \phi_{21}}{i_1}$$

其单位与电感的单位相同，为亨利。

同理，当线圈 2 中通有电流 i_2 时，也可以定义线圈 2 对线圈 1 的互感系数 M_{12} 为：

$$M_{12} = \frac{\psi_{12}}{i_2} = \frac{N_1 \phi_{12}}{i_2}$$

当线圈周围无铁芯时（空芯线圈），有 $M_{21} = M_{12} = M$ 。互感系数 M 只与两个线圈的几何尺寸、匝数、相互位置和周围的介质磁导率有关。

在工程应用中,为了表征耦合电感器中两个线圈的耦合程度,除了用互感系数 M 表示外,还引入了耦合系数 k : $k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$, $0 \leq k \leq 1$ 。当 $k=1$ 时称为全耦合, $k=0$ 时称为无耦合。

➤ 互感电压

如图 1.4-24 (a) 所示,当线圈 1 中的电流 i_1 发生变化时,将引起总磁通 Φ_{11} 的变化,从而互感磁通 Φ_{21} 也会发生变化,根据法拉第电磁感应定律和楞次定律,将产生感应电压,其中:

(1) 由 Φ_{11} 的变化产生的感应电压称为自感电压,其大小为:

$$u_{11} = L_1 \frac{di_1}{dt}$$

(2) 由 Φ_{21} 的变化产生的感应电压称为互感电压,其大小为:

$$u_{21} = \frac{d\psi_{21}}{dt} = M_{21} \frac{di_1}{dt}$$

同理,当线圈 2 中的电流 i_2 发生变化时,同样会产生自感电压 u_{22} 和互感电压 u_{12} ,大小分别为: $u_{22} = L_2 \frac{di_2}{dt}$, $u_{12} = \frac{d\psi_{12}}{dt} = M_{12} \frac{di_2}{dt}$ 。

➤ 互感线圈的同名端

根据右手螺旋定则,图 1.4-24 中线圈 1 通过的电流 i_1 所产生的磁场方向,和线圈 2 通过的电流 i_2 所产生的磁场方向相同,因此,由它们产生的磁通是相互加强的,此时线圈 1 的自感电压方向与线圈 2 对线圈 1 的互感电压方向一致,有

$$u_1 = u_{11} + u_{12} = L_1 \frac{di_1}{dt} + M_{12} \frac{di_2}{dt}$$

同理,线圈 2 的自感电压方向与线圈 1 对线圈 2 的互感电压方向也是一致的,从而有

$$u_2 = u_{22} + u_{21} = L_2 \frac{di_2}{dt} + M_{21} \frac{di_1}{dt}$$

当两个电流分别从两个线圈的对应端子流入,其所产生的磁场相互加强时,则这两个对应端子称为同名端,同名端一般在电路中用相同的标记点如“*”、“。”等表示,如图 1.4-24 (a) 所示。

图 1.4-24 (b) 所示给出了耦合电感的电路模型。

2. 理想变压器

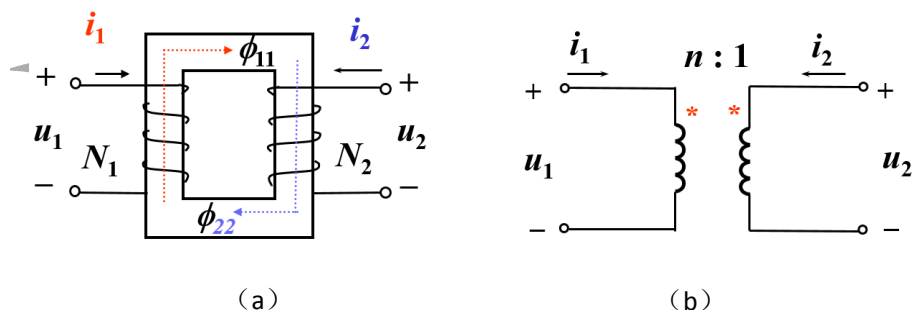


图 1.4-25 理想变压器结构及其电路模型

理想变压器是实际变压器的理想化模型。如图 1.4-25 (a) 所示给出了理想变压器的结构示意图。在铁芯两侧各安放一个线圈,匝数为 N_1 的线圈两端接入输入信号电压 u_1 ,称为原边(或初级)绕组,而匝数为 N_2 的线圈两端接负载,称为副边(或次级)绕组。作为理想变压

器，其满足以下条件：

- (1) 无损耗，无线圈电阻；
- (2) 全耦合，每个线圈电流所产生的在空气中的漏磁通可忽略不计；
- (3) 磁导率 $\mu \rightarrow \infty$ 。

根据条件 (2)，有 $\Phi_{s1}=0$ ， $\Phi_{s2}=0$ ，故 $\Phi_{11}=\Phi_{s1}+\Phi_{21}=\Phi_{21}$ ， $\Phi_{22}=\Phi_{s2}+\Phi_{12}=\Phi_{12}$ ，从而有 $\Phi=\Phi_{11}+\Phi_{22}=\Phi_{21}+\Phi_{12}$ ，即互感磁通之和等于自感磁通之和，并等于与每个线圈交链的总磁通。所以有：

$$u_1 = \frac{d\psi_1}{dt} = N_1 \frac{d\phi}{dt}$$

$$u_2 = \frac{d\psi_2}{dt} = N_2 \frac{d\phi}{dt}$$

取上两式的比值得

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{N_1}{N_2} = n$$

其中 $n = N_1 / N_2$ 称为匝数比。上式称为理想变压器两端口电压变换的关系式。

另一方面，根据磁路欧姆定律，有

$$N_1 i_1 + N_2 i_2 = R_M \phi$$

其中磁阻 $R_M = l / \mu S = 0$ ，故 $N_1 i_1 + N_2 i_2 = 0$ ，所以

$$\frac{i_1}{i_2} = -\frac{N_2}{N_1} = -\frac{1}{n}$$

上式称为理想变压器两端口电流变换的关系式。

基于上述理想变压器电压、电流变换关系式，理想变压器可用如图 1.4-25 (b) 所示电路模型表示。值得说明的是，在理想变压器模型中，仍然存在同名端，同时不再需要自感和互感参数，只需匝数比这一唯一参数。

任意时刻，输入理想变压器的瞬时功率为

$$u_1(t)i_1(t) + u_2(t)i_2 = u_1(t)i_1(t) + \frac{u_1(t)}{n} \times [-ni_1(t)] = 0$$

这表明，理想变压器既不消耗能量，也不能存储能量。

1.5 基尔霍夫定律

基尔霍夫定律反映电路的拓扑约束关系，包含基尔霍夫电流定律 (KCL) 和基尔霍夫电压定律 (KVL)。

在介绍基尔霍夫定律之前，先来介绍描述电路结构的相关名词。

支路：任何二端元件或者若干二端元件组合而成的一个二端元件称为一条支路，图 1.5-1 所示电路中，元件 1、2、3、4、5 均为支路，也可以把元件 2 和 5 的串联整体看成一条支路。

节点：两条或者两条以上支路的连接点称为节点，图 1.5-1 所示电路中，有 a、b、c、d 共 4 个节点。若把元件 1 和 3 的串联看成一条支路，元件 2 和 5 的串联看成一条支路，此时，电路仅有 b 和 d 两个节点。

回路：电路中任一闭合路径称为回路，图 1.5-1 所示电路中包含 3 个回路，分别为 abda、bcd b 和 abcd a。

网孔：内部不含有支路的回路称为网孔，图 1.5-1 所示电路中包含两个网孔，分别为 abda 和 bcd b。

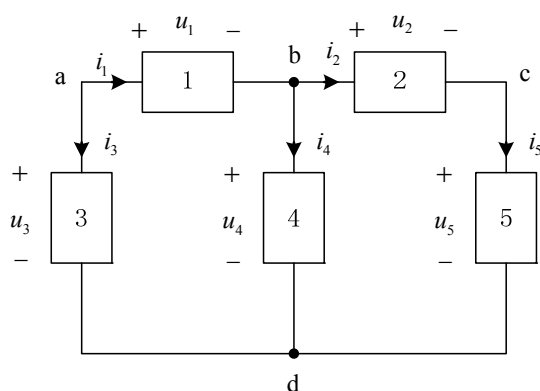


图 1.5-1 支路、节点、回路和网孔

1. 基尔霍夫电流定律 (KCL)

基尔霍夫电流定律 (Kirchhoff's Current Law) 反映集总参数电路中, 与节点相连的各支路电流之间的约束关系。基尔霍夫电流定律有三种表述。

表述 1: 对于集总参数电路中的任一节点, 任一时刻流出该节点各支路电流的代数和为零, 即

$$\sum i_{\text{出}} = 0 \quad (1.5-1)$$

对图 1.5-1 中的节点 b 列写流出节点 KCL 方程, 此时, 参考方向流出节点 b 的支路电流前的符号为正, 而参考方向流入节点 b 的电流前的符号为负。因此:

$$\text{节点 b: } -i_1 + i_2 + i_4 = 0$$

类似的, 可以列写流出节点 c 的 KCL 方程为

$$\text{节点 c: } -i_2 + i_5 = 0$$

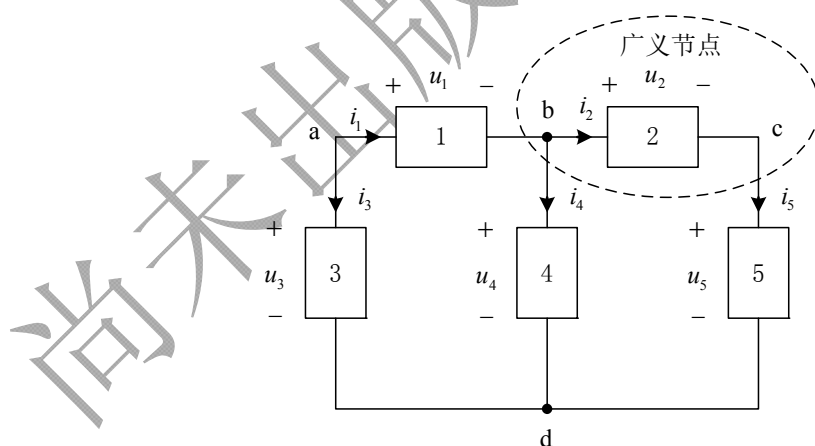


图 1.5-2 广义节点

如图 1.5-2 所示电路中, 虚线框住的闭合面称为广义节点, 利用节点 b 和 c 的 KCL 方程可得

$$-i_1 + i_4 + i_5 = 0$$

可见, KCL 同样适用于广义节点。

表述 2: 对于集总参数电路中的任一节点, 任一时刻流入该节点各支路电流的代数和为零, 即

$$\sum i_{\lambda} = 0 \quad (1.5-2)$$

表述 3: 对于集总参数电路中的任一节点, 任一时刻流出该节点各支路电流之和等于流入该节点的电流之和, 即

$$\sum i_{\text{出}} = \sum i_{\lambda} \quad (1.5-3)$$

例 1.5-1 利用表述 2 列写图 1.5-1 中节点 a、b、c 和 d 的 KCL 方程。

解

$$\text{节点a: } -i_1 - i_3 = 0$$

$$\text{节点b: } i_1 - i_2 - i_4 = 0$$

$$\text{节点c: } i_2 - i_5 = 0$$

$$\text{节点d: } i_3 + i_4 + i_5 = 0$$

可见, 这 4 个方程不是独立的, 可以从任何三个方程推导出第四个方程, 即该电路只有 3 个独立的 KCL 方程。一般, 对于 n 个节点的电路, 可列写 $n-1$ 个独立的 KCL 方程。

2. 基尔霍夫电压定律 (KVL)

基尔霍夫电压定律 (Kirchhoff's Voltage Law) 反映集总参数电路中, 任一回路内所有元件之间的电压约束关系。基尔霍夫电压定律有三种表述。

表述 1: 对于集总参数电路中的任一回路, 任一时刻沿回路方向各支路电压降的代数和为零, 即

$$\sum u_{\text{降}} = 0 \quad (1.5-4)$$

在应用 KVL 时, 先假定一回路方向, 若支路电压参考方向与回路方向一致, 即支路电压参考方向沿回路方向为电压降, 则该支路电压前的符号为正; 反之, 则该支路电压前的符号为负。以图 1.5-1 中三个回路为例, 并取回路方向为顺时针方向, 可得 KVL 方程为

$$\text{回路abda: } u_1 + u_4 - u_3 = 0$$

$$\text{回路bcdcb: } u_2 + u_5 - u_4 = 0$$

$$\text{回路abcda: } u_1 + u_2 + u_5 - u_3 = 0$$

可见, 这 3 个方程不是独立的, 可以从任何两个方程推导出第三个方程, 即该电路只有 2 个独立的 KVL 方程。一般, 对于 n 个网孔的电路, 可列写 n 个独立的 KVL 方程。

表述 2: 对于集总参数电路中的任一回路, 任一时刻沿回路方向各支路电压升的代数和为零, 即

$$\sum u_{\text{升}} = 0 \quad (1.5-5)$$

表述 3: 对于集总参数电路中的任一回路, 任一时刻沿回路方向电压降的各支路电压之和等于电压升的各支路电压之和, 即

$$\sum u_{\text{降}} = \sum u_{\text{升}} \quad (1.5-6)$$

例 1.5-2 利用表述 3 列写图 1.5-1 所示电路中各回路的 KVL 方程。

解 假定各回路方向为顺时针方向, 可得

回路abda: $u_1 + u_4 = u_3$

回路bcdcb: $u_2 + u_5 = u_4$

回路abcda: $u_1 + u_2 + u_5 = u_3$

1.6 电路网络及其等效规律

利用等效电路来分析电路是电路分析的一种重要方法。本节在网络等效条件的基础上，讨论多种结构电路的等效规律。

1.6.1 单口网络和双口网络及其等效条件

单口网络是指对外只有两个端钮的网络，一般用 N 表示，如图 1.6-1 所示。单口网络中，从一个端钮流入的电流等于从另一个端钮流出的电流。若单口网络内部不含独立源，称为无源单口网络，用 N_0 表示。

两个单口网络等效的条件是，端口的伏安关系（VAR）表达式完全一致。单口网络的等效，是针对端口外部电路而言是等效的，它们的内部结构和元件参数可以是不一样的。

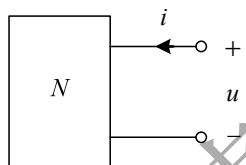


图 1.6-1 单口网络符号

双口网络是指含有两个端口的网络，一般用符号 N 表示，如图 1.6-2 所示。对于双口网络的每个端口，都满足从一个端钮流入的电流等于从另一个端钮流出的电流。两个双口网络等效的条件是对应的两个端口的伏安关系（VAR）表达式完全一致。

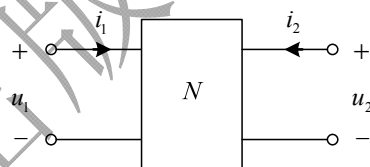


图 1.6-2 双口网络符号

1.6.2 典型单口网络的等效化简

1. 电阻的串联

串联是电路元件连接的一种基本形式，是将电路元件依次首尾相连，串联元件具有流过的电流相同的特性。图 1.6-3 (a) 所示的单口网络，由 n 个电阻串联而成，其等效电路如图 1.6-3 (b) 所示。两个单口网络的端口伏安关系分别为

$$u = u_1 + u_2 + \cdots + u_k + \cdots + u_n = (R_1 + R_2 + \cdots + R_k + \cdots + R_n) i$$

$$u = R_{eq} i$$

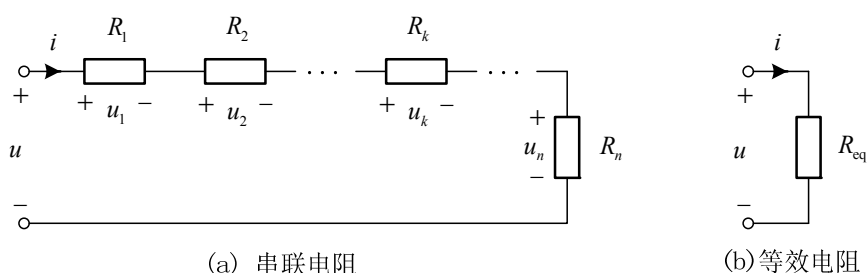


图 1.6-3 串联电阻及其等效电阻

可见，两个单口网络等效的条件为

$$R_{\text{eq}} = R_1 + R_2 + \cdots + R_k + \cdots + R_n \quad (1.6-1)$$

因此，多个电阻的串联可以等效为一个电阻，其值为串联的多个电阻之和。串联电阻具有分压特性，分压公式为

$$u_k = \frac{R_k}{R_{\text{eq}}} u \quad (1.6-2)$$

其中， $k=1,2,\cdots,n$ 。可见，电阻越大，其分到的电压越大。

2. 电阻的并联

并联是电路元件连接的一种基本形式，是将两个或者多个二端元件首首相连同时尾尾相连，常用符号“//”表示，并联元件具有端电压相同的特性。如图 1.6-4 (a) 所示的单口网络，由 n 个电阻并联而成，其等效电路如图 1.6-4 (b) 所示，为了分析的方便，在这里采用电导的概念。两个单口网络的端口伏安关系分别为

$$i = i_1 + i_2 + \cdots + i_k + \cdots + i_n = (G_1 + G_2 + \cdots + G_k + \cdots + G_n) u$$

$$i = G_{\text{eq}} u$$

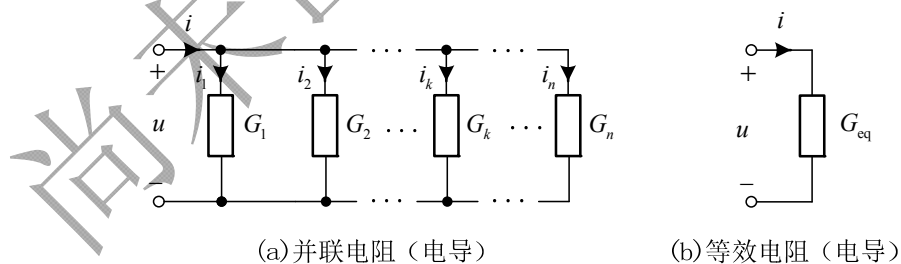


图 1.6-4 并联电阻（电导）及其等效电阻（电导）

可见，两个单口网络等效的条件为

$$G_{\text{eq}} = G_1 + G_2 + \cdots + G_k + \cdots + G_n \quad (1.6-3)$$

因此，多个电导的并联可以等效为一个电导，其值为并联的多个电导之和。并联电导具有分流特性，分流公式为

$$i_k = \frac{G_k}{G_{\text{eq}}} i \quad (1.6-4)$$

其中, $k=1,2,\dots,n$ 。可见, 电导越大, 其分到的电流越大。

3. 理想电压源的串并联

n 个理想电压源相串联可以等效为一个理想电压源, 如图 1.6-5 所示, 等效条件为

$$u_{\text{Seq}} = u_{S1} + u_{S2} + \dots + u_{Sn} \quad (1.6-5)$$

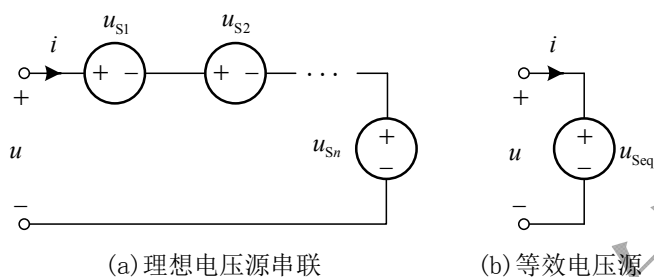


图 1.6-5 理想电压源串联及其等效电压源

同样, n 理想电压源的并联也可以等效为一个理想电压源, 但是, 这 n 个理想电压源的大小和方向必须一致, 如图 1.6-6 所示, 等效条件为

$$u_{\text{Seq}} = u_{S1} = u_{S2} = \dots = u_{Sn} \quad (1.6-6)$$

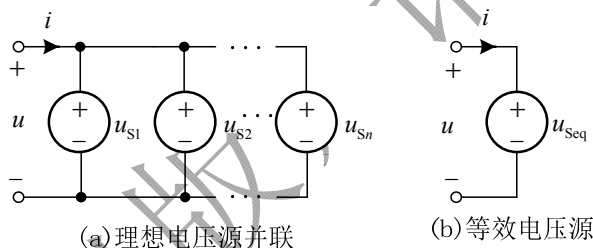


图 1.6-6 理想电压源并联及其等效电压源

理想电压源与单口网络的并联可以等效为一个理想电压源, 如图 1.6-7 所示, 等效条件为

$$u_{\text{Seq}} = u_S \quad (1.6-7)$$

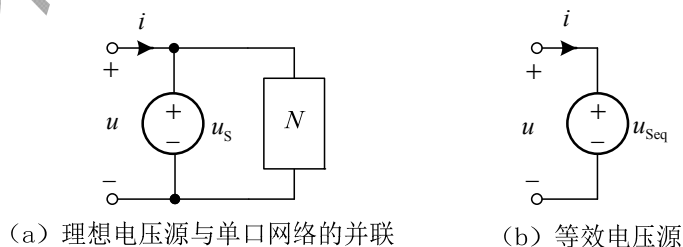


图 1.6-7 理想电压源与单口网络的并联及其等效电压源

4. 理想电流源的串并联

n 个理想电流源相串联可以等效为一个理想电流源, 但是, 这 n 个电流源的大小和方向必须一致, 如图 1.6-8 所示, 等效条件为

$$i_{\text{Seq}} = i_{S1} = i_{S2} = \dots = i_{Sn} \quad (1.6-8)$$

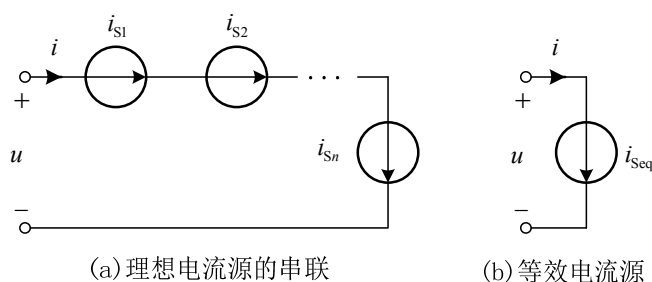


图 1.6-8 理想电流源串联及其等效电流源

同样， n 理想电流源的并联也可以等效为一个理想电流源，如图 1.6-9 所示，等效条件为

$$i_{\text{Seq}} = i_{S1} + i_{S2} + \cdots + i_{Sn} \quad (1.6-9)$$

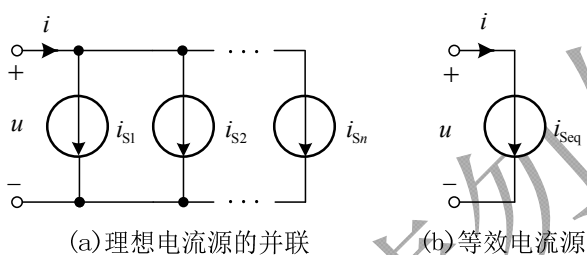


图 1.6-9 理想电流源并联及其等效电流源

理想电流源与单口网络的串联可以等效为一个理想电流源，如图 1.6-10 所示，等效条件为

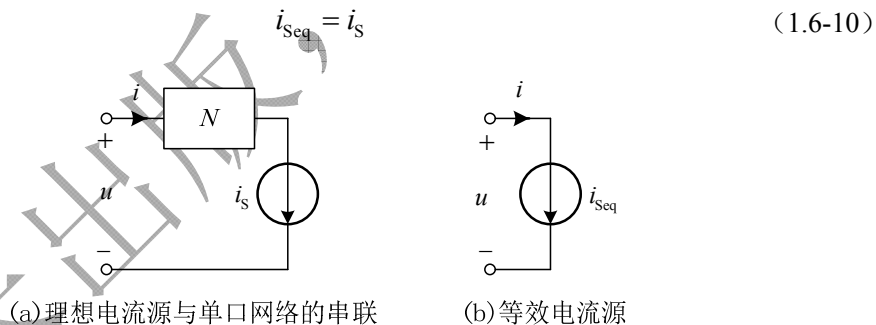


图 1.6-10 理想电流源与单口网络的串联及其等效电流源

5. 实际电源

实际的电压源可以用理想电压源串联电阻来等效，如图 1.6-11 (a) 所示；实际的电流源可以用理想电流源并联电阻来等效，如图 1.6-11 (b) 所示。

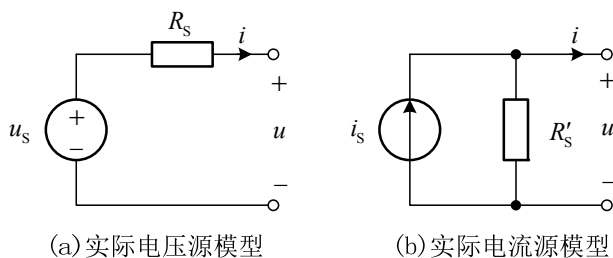


图 1.6-11 实际电压源模型和实际电流源模型

图 1.6-11 (a) 中实际电压源的端口伏安关系为

$$u = u_s - R_s i$$

图 1.6-11 (b) 中实际电流源的端口伏安关系为

$$i = i_s - u / R'_s \Rightarrow u = R'_s i_s - R'_s i$$

可见, 实际电压源和实际电流源在满足式 (1.6-11) 时, 是可以进行相互等效的。

$$\begin{cases} R_s = R'_s \\ u_s = R'_s i_s \end{cases} \quad (1.6-11)$$

实际电压源和实际电流源在等效过程中特别要注意 u_s 和 i_s 的方向关系。

例 1.6-1 利用单口网络简化计算图 1.6-12 (a) 所示电路中的电流 I 。

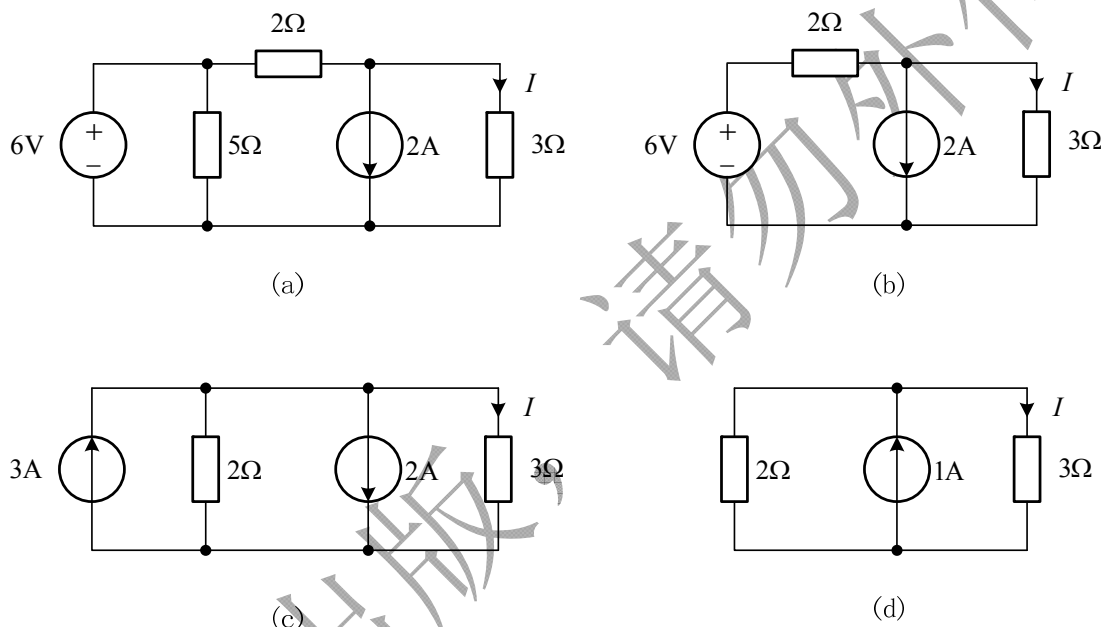


图 1.6-12 例 1.6-1 的图

解 $6V$ 电压源与 5Ω 电阻的并联可以等效为 $6V$ 的电压源, 如图 1.6-12 (b) 所示; 利用电源的等效规律, 将图 1.6-12 (b) 中的 $6V$ 电压源与 2Ω 电阻的串联, 等效为 $3A$ 电流源与 2Ω 电阻的并联, 如图 1.6-12 (c); 利用电流源的并联规律, 将图 1.6-12 (c) 中所示的两个电流源的并联等效为一个电流源, 如图 1.6-12 (d) 所示。最后利用分流公式计算可得

$$I = \frac{2}{2+3} \times 1 = \frac{2}{5} A$$

需要注意的是, 在整个求解过程中, 保留待求变量所在支路不变。

6. 电感的串并联

n 个电感的串联如图 1.6-13 (a) 所示, 其等效电感如图 1.6-13 (b) 所示, 两个单口网络的端口伏安关系分别为

$$\begin{aligned}
u &= u_1 + u_2 + \cdots + u_n \\
&= L_1 \frac{d}{dt} i + L_2 \frac{d}{dt} i + \cdots + L_n \frac{d}{dt} i \\
&= (L_1 + L_2 + \cdots + L_n) \frac{d}{dt} i \\
u &= L_{\text{eq}} \frac{d}{dt} i
\end{aligned}$$

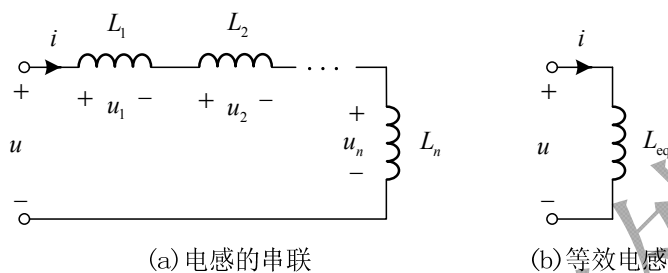


图 1.6-13 电感的串联及其等效

可见，两个单口网络等效的条件为

$$L_{\text{eq}} = L_1 + L_2 + \cdots + L_n \quad (1.6-12)$$

因此，多个电感的串联可以等效为一个电感，其值为串联的多个电感之和。串联电感具有分压特性，分压公式为

$$u_k = \frac{L_k}{L_{\text{eq}}} u \quad (1.6-13)$$

其中， $k=1, 2, \dots, n$ 。

n 个电感的并联如图 1.6-14 (a) 所示，其等效电感如图 1.6-14 (b) 所示，两个单口网络的端口伏安关系分别为

$$\begin{aligned}
i &= i_1 + i_2 + \cdots + i_n \\
&= i_1(0) + \frac{1}{L_1} \int_0^t u(\tau) d\tau + i_2(0) + \frac{1}{L_2} \int_0^t u(\tau) d\tau + \cdots + i_n(0) + \frac{1}{L_n} \int_0^t u(\tau) d\tau \\
&= i_1(0) + i_2(0) + \cdots + i_n(0) + \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \cdots + \frac{1}{L_n} \right) \int_0^t u(\tau) d\tau \\
i &= i(0) + \frac{1}{L_{\text{eq}}} \int_0^t u(\tau) d\tau
\end{aligned}$$

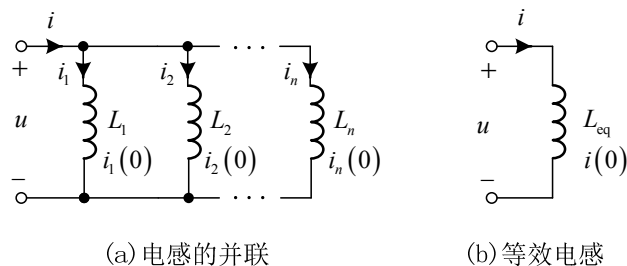


图 1.6-14 电感的并联及其等效

可见，两个单口网络等效的条件为

$$\begin{cases} i(0) = i_1(0) + i_2(0) + \cdots + i_n(0) \\ \frac{1}{L_{\text{eq}}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \cdots + \frac{1}{L_n} \end{cases} \quad (1.6-14)$$

因此，多个电感的并联可以等效为一个电感，等效电感的倒数等于各个并联电感的倒数之和，等效电感的初始电流等于各并联电感初始电流的代数和。并联电感具有分流特性，其分流公式为

$$i_k = \frac{1/L_k}{1/L_{\text{eq}}} i \quad (1.6-15)$$

其中， $k=1,2,\cdots,n$ 。

7. 电容的串并联

n 个电容的串联如图 1.6-15 (a) 所示，其等效电容如图 1.6-15 (b) 所示，两个单口网络的端口伏安关系分别为

$$\begin{aligned} u &= u_1 + u_2 + \cdots + u_n \\ &= u_1(0) + \frac{1}{C_1} \int_0^t i(\tau) d\tau + u_2(0) + \frac{1}{C_2} \int_0^t i(\tau) d\tau + \cdots + u_n(0) + \frac{1}{C_n} \int_0^t i(\tau) d\tau \\ &= u_1(0) + u_2(0) + \cdots + u_n(0) + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n} \right) \int_0^t i(\tau) d\tau \\ \bar{u} &= u(0) + \frac{1}{C_{\text{eq}}} \int_0^t i(\tau) d\tau \end{aligned}$$

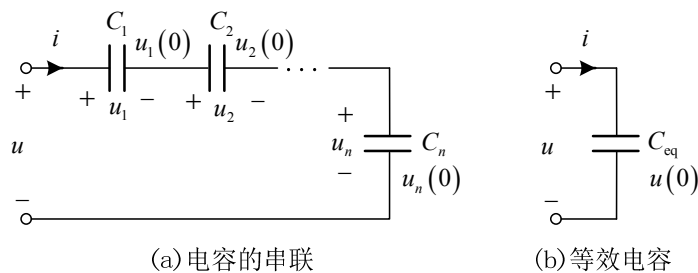


图 1.6-15 串联电容及其等效电容

可见，两个单口网络等效的条件为

$$\begin{cases} u(0) = u_1(0) + u_2(0) + \cdots + u_n(0) \\ \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n} \end{cases} \quad (1.6-16)$$

因此，多个电容的串联可以等效为一个电容，等效电容的倒数等于各个串联电容的倒数的总和，等效电容的初始电压等于各个串联电容的初始电压之和。串联电容具有分压特性，其分压公式为

$$u_k = \frac{1/C_k}{1/C_{eq}} u \quad (1.6-17)$$

其中， $k=1,2,\cdots,n$ 。

n 个电容的并联如图 1.6-16 (a) 所示，其等效电容如图 1.6-16 (b) 所示，两个单口网络的端口伏安关系分别为

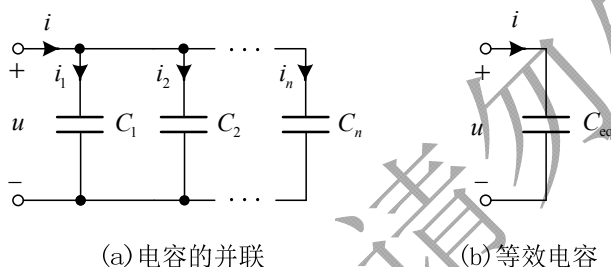


图 1.6-16 电容的并联及其等效

$$\begin{aligned} i &= i_1 + i_2 + \cdots + i_n \\ &= C_1 \frac{d}{dt} u + C_2 \frac{d}{dt} u + \cdots + C_n \frac{d}{dt} u \\ &= (C_1 + C_2 + \cdots + C_n) \frac{d}{dt} u \\ i &= C_{eq} \frac{d}{dt} u \end{aligned}$$

可见，两个单口网络等效的条件为

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \cdots + C_n \quad (1.6-18)$$

因此，多个电容的并联可以等效为一个电容，等效电容为各个并联电容之和。并联电容具有分流特性，其分流公式为

$$i_k = \frac{1/C_k}{1/C_{eq}} i \quad (1.6-19)$$

其中， $k=1,2,\cdots,n$ 。

1.6.3 Y-Δ的等效变换

三个电阻的 Y (星形) 连接如图 1.6-17 (a) 所示，也称 T 连接；三个电阻的 Δ (三角形)

连接如图 1.6-17 (b) 所示, 也称 π 连接。Y 连接电路和 Δ 连接电路可以相互等效转换。即在一定条件下, Y 连接电路和 Δ 连接电路的伏安关系一致, 或者说对于外电路而言两者体现的性能一致。这里利用不同端子之间两者的等效电阻一致来得出两者的等效条件。

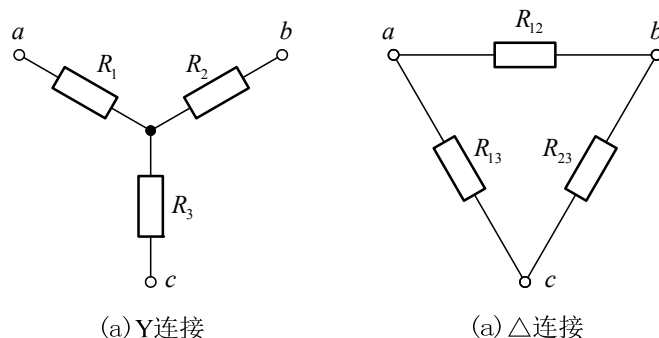


图 1.6-17 电阻的 Y 连接和 Δ 连接

从 a-b, b-c 和 c-a 分别计算 Y 连接和 Δ 连接的等效电阻, 并令其相等, 可得

$$\begin{cases} R_{ab} = R_1 + R_2 = \frac{R_{12}(R_{23} + R_{13})}{R_{12} + R_{23} + R_{13}} \\ R_{bc} = R_2 + R_3 = \frac{R_{23}(R_{12} + R_{13})}{R_{12} + R_{23} + R_{13}} \\ R_{ca} = R_1 + R_3 = \frac{R_{13}(R_{12} + R_{23})}{R_{12} + R_{23} + R_{13}} \end{cases}$$

因此, Y 连接和 Δ 连接相互等效的条件为

$$\begin{cases} R_1 = \frac{R_{12}R_{13}}{R_{12} + R_{23} + R_{13}} \\ R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{13}} \\ R_3 = \frac{R_{13}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{13}} \end{cases} \quad \text{或者} \quad \begin{cases} R_{12} = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3}{R_3} \\ R_{13} = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3}{R_2} \\ R_{23} = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3}{R_1} \end{cases} \quad (1.6-20)$$

例 1.6-2 求如图 1.6-18 (a) 所示单口网络的等效电阻, 已知 $R_1 = R_3 = 5\Omega$,

$R_2 = R_4 = R_5 = 10\Omega$ 。

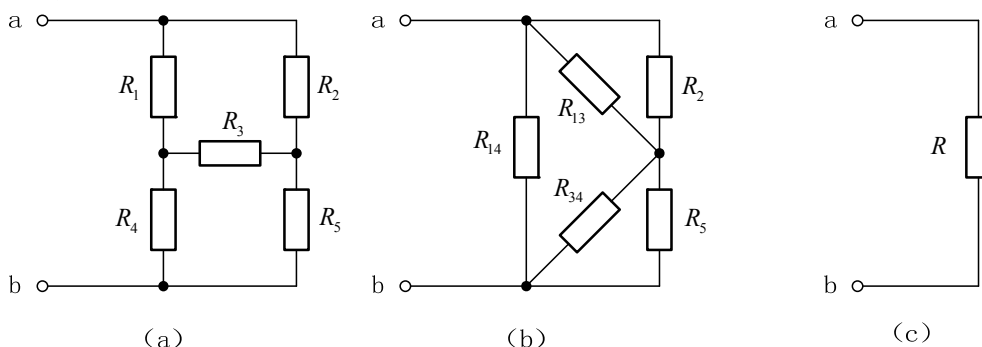


图 1.6-18 例 1.6-2 的图

解 先将 R_1 , R_3 和 R_4 三个电阻的 Y 连接等效为 Δ 连接, 如图 1.6-18 (b) 所示再利用电阻的串并联等效来计算等效电阻, 如图 1.6-18 (c) 所示。利用 Y 连接和 Δ 连接相互等效的条件可得

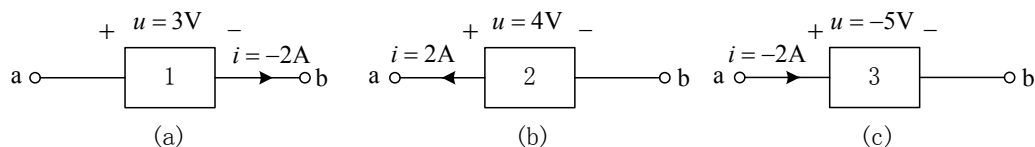
$$\begin{cases} R_{13} = \frac{R_1 R_3 + R_3 R_4 + R_1 R_4}{R_4} = 12.5\Omega \\ R_{14} = \frac{R_1 R_3 + R_3 R_4 + R_1 R_4}{R_3} = 25\Omega \\ R_{34} = \frac{R_1 R_3 + R_3 R_4 + R_1 R_4}{R_1} = 25\Omega \end{cases}$$

利用串并联等效可得

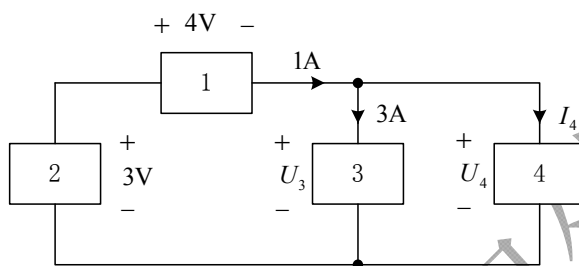
$$R = R_{14} // (R_{13} // R_2 + R_{34} // R_5) = 8.421\Omega$$

习题 1

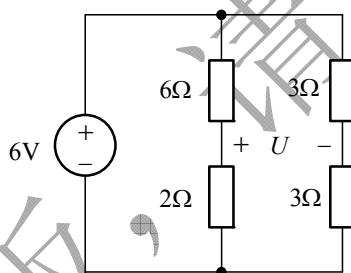
1-1 计算如题图 1-1 所示元件的功率。



题图 1-1

1-2 计算题图 1-2 所示电路中的 U_3 、 U_4 和 I_4 ，并计算元件 3 和元件 4 的功率。

题图 1-2

1-3 求题图 1-3 示电路中的电压 U 。

题图 1-3

1-4 试确定下列信号是否为周期信号。若是，求其基本周期。

(1) $f_1(t) = \sin^2(2\pi t)$

(2) $f_2(t) = e^{-2t} \cos(\pi t)$

(3) $f_3(t) = \cos(2t) + \sin(3t)$

(4) $f_4(t) = \sin(t)u(t)$

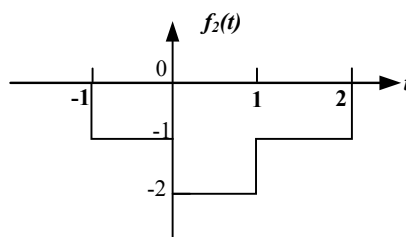
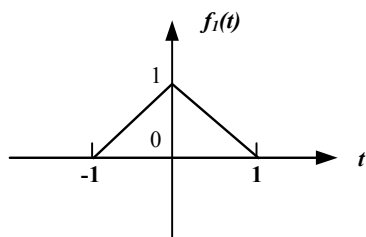
1-5 设 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 分别如题图 1-5 所示，请画出下列信号：

(1) $f_1(t)f_2(t-1)$

(2) $f_1(t-1)f_2(-t-1)$

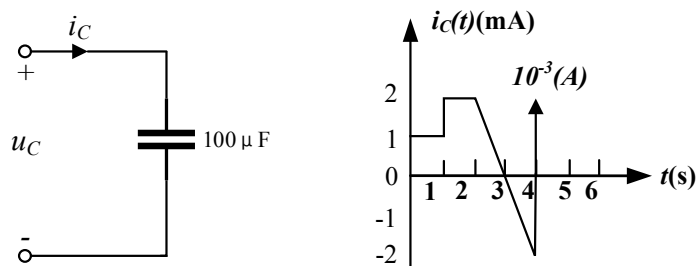
(3) $f_1(-2t+1)f_2(\frac{1}{2}t-1)$

(4) $f_1(\frac{1}{2}t)f_2(2-t)$



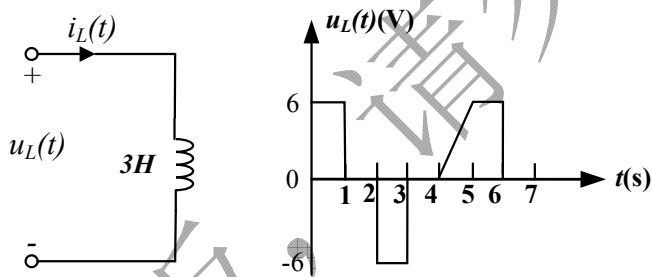
题图 1-5

1-6 题图 1-6 中线性电容的初始电压为 0，电流 $i_C(t)$ 的波形如图所示，试求其端电压 $u_C(t)$ 的波形。



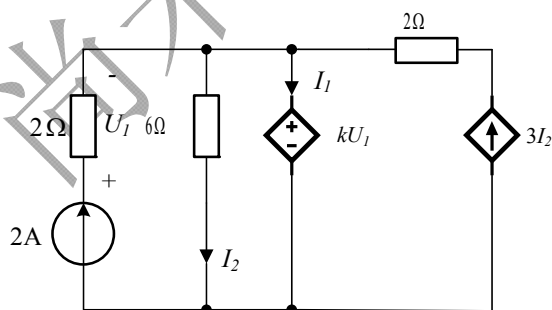
题图 1-6

1-7 线性电感的端电压波形如题图 1-7 所示，且已知电感的初始电流为 0，试求 $t > 0$ 通过电感的电流 $i_L(t)$ 。

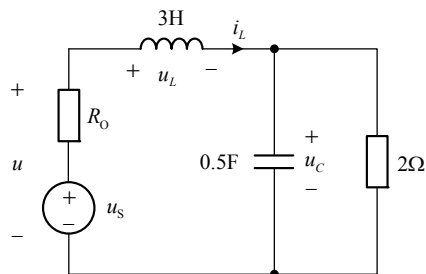


题图 1-7

1-8 题图 1-8 所示电路，当 (a) $k = 2$ ；(b) $k = 3$ 时，试求 $I_1 = ?$ 若 $k = 0$ ，你能一眼看出此时 I_1 为多少，为什么？



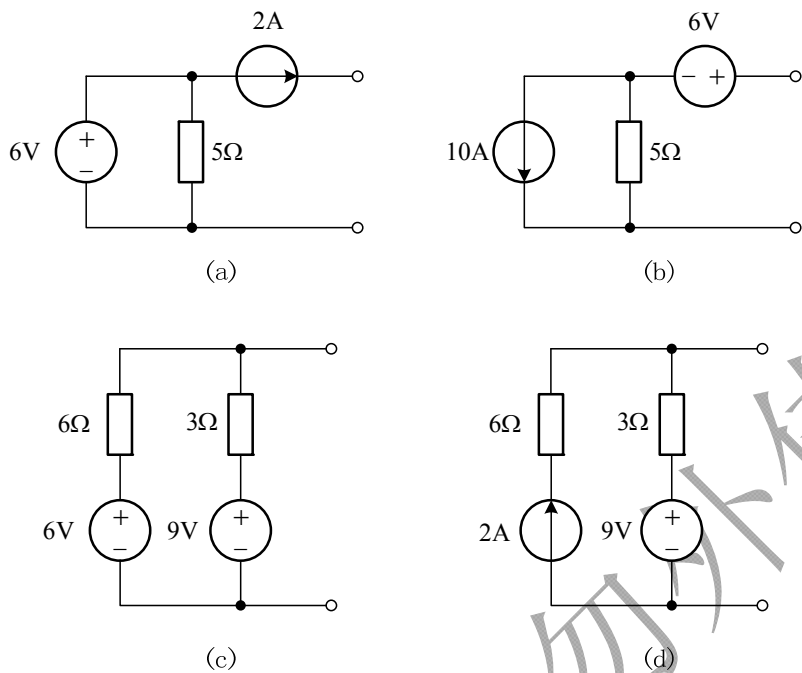
题图 1-8



题图 1-9

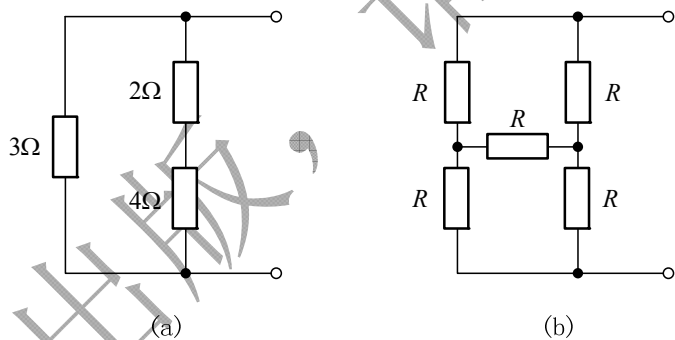
1-9 如题图 1-9 所示电路中，已知 $u_C(t) = (3 - 2e^{-2t})\text{V}$ $t > 0$ ，求 $t > 0$ 时的 $u_L(t)$ ， $i_L(t)$ 和 $u(t)$ 。

1-10 将如题图 1-10 所示单口网络化至最简形式。



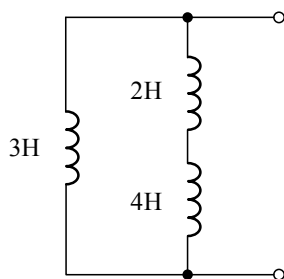
题图 1-10

1-11 计算如题图 1-11 所示单口网络的等效电阻。



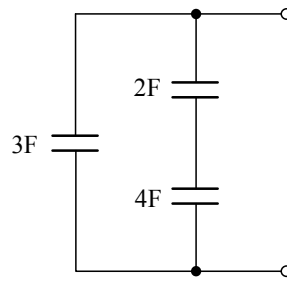
题图 1-11

1-12 计算如题图 1-12 所示单口网络的等效电感。



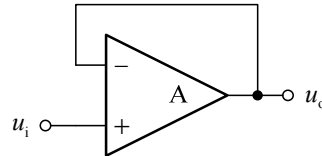
题图 1-12

1-13 计算如题图 1-13 所示单口网络的等效电容。



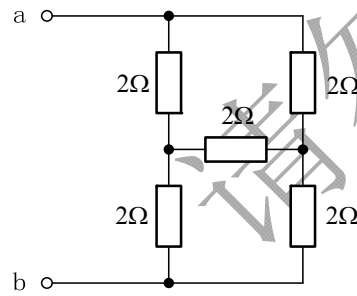
题图 1-13

1-14 题图 1-14 所示为电压跟随器，求其输入输出关系。



题图 1-14

1-15 求如题图 1-15 所示单口网络的等效电阻。



题图 1-15