杭州电子科技大学学生考试卷（ A ）卷

考试课程	高等数学 A2	考试日期	2016 年 6 月 23 日	成 绩	
课程号	A0714202	教师号		任课教师姓名	
考生姓名		学号（8位）		年级		专业	

题 号	一	二	三						四	五	六
得 分											

一、 填空题（本题共 4 小题，每小题 3 分，共 12 分）

1. 点 $(2,1,0)$ 到平面 $3x+4y-5z+6=0$ 的距离为 $\frac{8}{5}\sqrt{2}$ ；

2. 设 L 是圆域 $D: x^2+y^2 \le -2x$ 的正向周界，则 $\oint_L (x^3-y)dx+(x-y^3)dy=$ 2π ；

3. $u=2xy-z^2$ 在点 $(2,-1,1)$ 处的方向导数的最大值为 $2\sqrt{6}$ ；

4. $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，它在 $(-\pi,\pi]$ 上的表达式为 $f(x)=x+x^2$，其傅立叶级数为 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，则 $b_3=$ $\frac{2}{3}$.

二、 选择题（本题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分）

1. 曲面 $x^2+\cos(xy)+yz+x=0$ 在 $(0,1,-1)$ 处的切平面方程为（ D ）

(A) $x-y-z=0$； (B) $x+y+z=0$；

(C) $x-2y+z=-3$； (D) $x-y+z=-2$.

2. 已知 $(x+ay)dx+ydy$ 为某函数的全微分，则 a 为(B).

(A) -1； (B) 0； (C) 1； (D) 2.

3. 函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F(xy,z)=x$ 所确定，其中 $F(u,v)$ 具有连续的一阶偏导数，则 z_x 等于（ A ）

(A) $\frac{1-yF_1}{F_2}$； (B) $\frac{1-yF_x}{F_2}$； (C) $\frac{1-yF_2}{F_1}$； (D) $\frac{1-xF_x}{F_1}$.

4. 设 $f(x,y)$ 在平面区域 D 上连续，且 $f(x,y)=xy+\iint_D f(u,v)dudv$，其中 D 由 $y=0$，$y=x$，$x=1$ 围成，则 $\iint_D f(u,v)dudv$ 等于（ C ）

(A) 0； (B) 2； (C) $\frac{1}{4}$； (D) 1.

5. 设 Σ 为柱面 $x^2+y^2=1$ 介于平面 $z=0$ 与 $z=1$ 之间部分的外侧，则 $\iint_\Sigma z^2 dydz$（ A ）

(A) 0； (B) $\frac{2}{3}$； (C) $-\frac{2}{3}$； (D). $-\frac{4}{3}$

6. 下列级数中发散的是（ B ）

(A) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\ln(n+1)}$； (B) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{3n-1}$；

(C) $\sum_{n=1}^{+\infty}(1-\cos\frac{\lambda}{n})$，$\lambda>0$； (D) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin na}{n^2}$，其中 $0<a<1$.

7. 若幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x+2)^n$ 在 $x=1$ 处收敛，则该级数在 $x=-4$ 处的敛散性为（ A ）

(A) 绝对收敛； (B) 条件收敛； (C) 发散； (D) 敛散性无法判定.

8. 球面 $x^2+y^2+z^2=4a^2$ 与柱面 $x^2+y^2=2ax(a>0)$ 所围成立体的体积为(C).

(A) $4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}\sqrt{4a^2-\rho^2}d\rho$； (B) $8\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}\rho\sqrt{4a^2-\rho^2}d\rho$；

(C) $4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}\rho\sqrt{4a^2-\rho^2}d\rho$； (D) $8\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}\rho\sqrt{4a^2-\rho^2}d\rho$.

三、试解下列各题（本题共 6 小题，每小题 6 分，共 36 分）

1. 设 $z=\dfrac{1+2\ln x}{y}$，求 dz.

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2}{xy}$ 2'

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{1+2\ln x}{y^2}$ 2'

$dz=\dfrac{2}{xy}dx-\dfrac{1+2\ln x}{y^2}dy$ 2'

2. 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n\sqrt{n+2}}$ 的敛散性（若是收敛，要说明是条件收敛还是绝对收敛）。

解 该级数为交错级数 $a_n=\dfrac{1}{n\sqrt{n+2}}$

满足 $a_{n+1}<a_n$

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n\sqrt{n+2}}$ 收敛 3'

又 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n\sqrt{n+2}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt{n+2}}$

$\dfrac{1}{n\sqrt{n+2}}<\dfrac{1}{n^{3/2}}$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{3/2}}$ 收敛

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n\sqrt{n+2}}\right|$ 收敛 2'

故 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n\sqrt{n+2}}$ 收敛且为绝对收敛 1'

注 直接后面四行也完全正确

3. 计算 $\iint\limits_D xydxdy$，其中 D 是由曲线 $y^2=2x$、直线 $y=2$ 和 y 轴所围成的闭区域。

解 D_Y: $0\le y\le 2$, $0\le x\le \dfrac{y^2}{2}$

$\iint\limits_D xydxdy=\int_0^2 dy\int_0^{\frac{y^2}{2}}xy\,dx$ 3'

$=\dfrac{1}{8}\int_0^2 y^5dy$

$=\dfrac{1}{48}\left[y^6\right]_0^2$

$=\dfrac{4}{3}$ 3'

4. Σ 是由曲面 $x^2+y^2=2z$ 和平面 $z=2$ 所围成立体 Ω 的表面，求 $\oiint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)dS$.

解 Σ_1: $z=2$ $(x^2+y^2\le 4)$

Σ_2: $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ $(x^2+y^2\le 4)$

Σ_1 上 $dS=dxdy$

Σ_2 上 $dS=\sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy$ 2'

$\iint\limits_{\Sigma_1}(x^2+y^2)dS=\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}(x^2+y^2)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\rho^3d\rho=8\pi$ 1

$\iint\limits_{\Sigma_2}(x^2+y^2)dS=\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}(x^2+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\sqrt{1+\rho^2}\rho^3d\rho$ 2'

$=2\pi\left(\dfrac{10}{3}\sqrt{5}+\dfrac{2}{15}\right)$

$\therefore \oiint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)dS=2\pi\left(\dfrac{10}{3}\sqrt{5}+4\dfrac{2}{15}\right)$ 1'

5. 计算 $\int_L(e^x\sin y+x)dx+(e^x\cos y+y^3)dy$， L是圆周 $x^2+y^2=2y$，

$(x\ge0)$ 上从 $O(0,0)$ 到 $A(1,1)$ 的弧段.

解 $P=e^x\sin y+x$ $\quad Q=e^x\cos y+y^3$ 3'

$\frac{\partial Q}{\partial x}=e^x\cos y=\frac{\partial P}{\partial y}$

∴ $\int_L Pdx+Qdy$ 与路径L无关

另取 L_1: $O(0,0)\to M(1,0)\to A(1,1)$

原式 $=\int_{\overline{OM}+\overline{MA}}Pdx+Qdy=\int_0^1 xdx+\int_0^1(e\cos y+y^3)dy$ 3'

$=\frac{3}{4}+e\sin 1$

6. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n}$ 的收敛域和它的和函数.

解 $u_n(x)=\frac{1}{2n+1}x^{2n}>0$

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=x^2$ $\quad x^2<1$ 级数绝对收敛 1'

$x^2>1$ 级数发散 1'

$x^2=1$ 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$ 发散 3'

∴ 级数收敛域 $(-1,1)$

设和函数为 $S(x)$ $\quad S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n}$

$(xS(x))'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n}=\frac{x^2}{1-x^2}$ 2'

两边积分 $xS(x)=-x+\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$

$S(0)=0$

∴ $S(x)=\begin{cases}\frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x}-1 & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$ 1'

四、应用题[本题共 15 分]

1.（5 分）求曲线 $x=t$，$y=-t^2$，$z=3t-1$上一点处与平面 $x+2y+z=4$ 平行的切线方程.

解 $T_t=(x_t,\ y_t,\ z_t)=(1,-2t,3)$

$n=(1,2,1)$ 3'

由题知 $T_t\perp n$， $1\cdot1-2t\cdot2+3\cdot1=0$ $\quad t=1$

切点 $M_0(1,-1,2)$ $\quad T|_{M_0}=(1,-2,3)$

切线方程 $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-2}{3}$ 2'

2.（5 分）已知直线 $L_1:\frac{x+1}{1}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z+8}{1}$ 和 $L_2:\begin{cases}x-y=6\\2y+z=3\end{cases}$，求 L_1 和 L_2 之间的夹角.

解 $s_1=(1,-2,1)$， $s_2=(1,1,-2)$ 2'

$\cos\theta=|\cos(s_1,s_2)|=\frac{|s_1\cdot s_2|}{\|s_1\|\|s_2\|}=\frac{1}{2}$ 2'

$\theta=\frac{\pi}{3}$ 1'

3.（5 分）立体 Ω 由 $x^2+y^2=25$，$z=0$，$x+2y+3z=6$ 围成，求 Ω 的体积.

解 Ω: $x^2+y^2\le25$ $\quad 0\le z\le\frac{6-x-2y}{3}$ 1'

$V=\iiint_\Omega 1dV=\iint_{x^2+y^2\le25}dxdy\int_0^{\frac{6-x-2y}{3}}dz$ 2'

$=\frac{1}{3}\iint_{x^2+y^2\le25}(6-x-2y)dxdy$ 1'

$=\frac{1}{3}\iint_{x^2+y^2\le25}6\,dxdy=50\pi$ 2'

五、综合题[本题 8 分]

计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(x^3+az^3)dydz+(y^3+ax^2)dzdx+(z^3+ay^2)dxdy$，其中 Σ 为旋转抛物面 $z=2-x^2-y^2$ $(1\le z\le 2)$ 取下侧.

解 补面 Σ_1: $z\equiv 1$ $(x^2+y^2\le 1)$ 取上侧

记 Σ 和 Σ_1 围成之间闭区域为 Ω. 则 Σ 和 Σ_1

正好为 Ω 负面(取内侧)

另记 $P=x^3+az^3$, $Q=y^3+ax^2$, $R=z^3+ay^2$

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=3(x^2+y^2+z^2)$$

应用 Gauss 有 $\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=-\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dV$ 2'

即 $\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}(x^3+az^3)dydz+(y^3+ax^2)dzdx+(z^3+ay^2)dxdy=-3\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dV$ (*)

$$(*)\text{左端}=-3\left[\iiint\limits_{\Omega}z^2dV+\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dV\right] \quad 1$$

$$=-3\left[\int_1^2 dz\iint\limits_{x^2+y^2\le 2-z}dxdy+\int_1^2 dz\iint\limits_{x^2+y^2\le 2-z}(x^2+y^2)dxdy\right] \quad 2$$

$$=-3\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=-2\pi.$$

$$\iint\limits_{\Sigma_1}(x^3+az^3)dydz+(y^3+ax^2)dzdx+(z^3+ay^2)dxdy=\iint\limits_{\Sigma_1}(z^3+ay^2)dxdy$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(1+ay^2)dxdy=\pi+\frac{\pi a}{4}. \quad 1$$

$$\therefore \iint\limits_{\Sigma}(x^3+az^3)dydz+(y^3+ax^2)dzdx+(z^3+ay^2)dxdy=-2\pi-\left(\pi+\frac{\pi}{4}a\right)=-\left(3+\frac{a}{4}\right)\pi. \quad 1'$$

六、证明题[本题 5 分]

设数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 满足 $0<a_n<\frac{\pi}{2}$，$0<b_n<\frac{\pi}{2}$，$\cos a_n-a_n=\cos b_n$，且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}$ 也收敛.

证明 $\cos a_n-a_n=\cos b_n \Rightarrow a_n=\cos a_n-\cos b_n>0$

$y=\cos x$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 单调递减

$\therefore 0<a_n<b_n<\frac{\pi}{2}$ 1

$\because \sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ 1'

$$k=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n}{b_n}}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{2}a_n}{2(1-\cos b_n)} \quad \left(1-\cos b_n\sim\frac{1}{2}b_n^2\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}a_n}{1-(\cos a_n-a_n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}a_n}{1-\cos a_n+a_n} \quad 1$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1-\cos a_n}{a_n}+1}=1/2\left(\frac{1-\cos a_n}{a_n}\to 0\right) \quad 2$$

$\because \sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛

根据比较判别法 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}$ 也收敛 1'