一、 填空题

1、已知n阶方阵A有一个特征值为3，则矩阵$A^2-3A+9E$必有一个特征值为___9___；

2、设五阶方阵A相似于对角矩阵$\Lambda=\mathrm{diag}(1,2,4,4,4)$，则 A−4E 的秩等于___2___；

3、设A为三阶方阵，且$|A|=-2$，则$\left|(2A)^{-1}\right|=$___$-\frac{1}{16}$___；

4、已知向量空间$\Re^3$中的任意一个向量均可经向量组$\alpha_1=(1,-1,-1)^T$，$\alpha_2=(-1,\lambda,1)^T$，$\alpha_3=(1,1,1)^T$线性表示，则λ的取值应满足___$\lambda\neq1$___；

5、若$\alpha_1=(1,0,1)^T$，$\alpha_2=(0,1,1)^T$，$\alpha_3=(1,\lambda,2)^T$不能构成向量空间$\Re^3$中的一组基，则λ的取值应满足___$\lambda=1$___

6、已知矩阵$A=\begin{pmatrix}-2&-2&1\\2&x&-2\\0&0&-2\end{pmatrix}$与$B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&y\end{pmatrix}$相似，则 y =___$-2$___

二、选择题

1、设A和B均为n阶方阵，则下列说法正确的是（C）

（A）若A和B均为对称矩阵，则AB也为对称矩阵 （B）若$R(A)=R(B)$，则A与B相似

（C）若A和B均为正交矩阵，则AB也为正交矩阵 （D）若$R(A)=R(B)$，则A与B合同

2、下列关于初等矩阵的表述正确的是（A）

（A） 初等矩阵都可以经过初等变换化为单位矩阵；

（B） 初等矩阵所对应的行列式的值都等于1；

（C） 初等矩阵相乘仍为初等矩阵；

（D） 初等矩阵相加仍为初等矩阵

3、向量$\beta=(1,2,2)^T$在基$\alpha_1=(1,0,0)^T$，$\alpha_2=(1,1,0)^T$，$\alpha_3=(1,1,1)^T$下的坐标为（D）

（A） $(1,0,2)^T$ （B） $(-1,1,2)^T$ （C） $(-1,0,-2)^T$ （D） $(-1,0,2)^T$

4、已知三阶矩阵A的特征值为0，+2，−2，则下列说法不正确的是（B）

（A）矩阵A是不可逆矩阵 （B）特征值+2和−2所对应的特征向量是正交的

（C）矩阵A的主对角线元素之和为0 （D）$AX=0$的基础解系只有一个向量

5、二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(\lambda-1)x_1^2+\lambda x_2^2+(\lambda+1)x_3^2$，当满足（C）时，是正定二次型；

（A）$\lambda>-1$ （B）$\lambda>0$ （C）$\lambda>1$ （D）$\lambda\geq1$

6、设 A 为$m\times n$矩阵，则下列选项中的（B）是齐次方程组$AX=0$只有零解的充要条件。

（A） A 的列向量组线性相关 （B） A 的列向量组线性无关

（C） A 的行向量组线性相关 （D） A 的行向量组线性无关

1、已知$A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$，且满足$A^2-AB=E$，其中$E$为单位矩阵，求矩阵$B$；

解：因为$|A|=-1\neq 0$，所以A可逆

等式两端同时左乘A^{-1}得：$A-B=A^{-1}$

经计算可得$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&-2\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$

$\therefore B=A-A^{-1}=\begin{pmatrix}0&2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

2、已知向量空间$\mathfrak{R}^4$中的两组基分别为（I）$\alpha_1=(1,1,2,1)^T$，$\alpha_2=(0,2,1,2)^T$，$\alpha_3=(0,0,3,1)^T$，$\alpha_4=(0,0,0,1)^T$和（II）$\beta_1=(1,-1,0,0)^T$，$\beta_2=(1,0,0,0)^T$，$\beta_3=(0,0,2,1)^T$，$\beta_4=(0,0,3,2)^T$，试求由基（I）到基（II）的过渡矩阵；

解：设由基(I)到基(II)的过渡矩阵为P

则由定义可知

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\cdot P$$

$\therefore P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)^{-1}\cdot(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)$

$\therefore P=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\-1&-\frac{1}{2}&0&0\\-\frac{1}{3}&-\frac{1}{2}&\frac{2}{3}&1\end{pmatrix}$

3、设$A=\begin{pmatrix}1&1&\lambda\\1&\lambda&1\\\lambda&1&1\end{pmatrix}$，$\beta=(1,1,-2)^T$，已知线性方程组$Ax=\beta$有解但不唯一，试求$\lambda$的值；

解：$(A\,\vdots\,\beta)=\begin{pmatrix}1&1&\lambda&1\\1&\lambda&1&1\\\lambda&1&1&-2\end{pmatrix}$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&\lambda&1\\0&\lambda-1&1-\lambda&0\\0&1-\lambda&1-\lambda^2&-\lambda-2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&\lambda&1\\0&\lambda-1&1-\lambda&0\\0&0&2-\lambda-\lambda^2&-\lambda-2\end{pmatrix}$$

由于$Ax=\beta$有无穷多解，$\therefore\lambda=-2$

4、设三阶实对称矩阵A的特征值分别为1，1，-2，已知对应于特征值1的两个线性无关的特征向量分别为$\alpha_1=(1,0,1)^T$，$\alpha_2=(0,1,1)^T$，试求对应于特征值-2的全部特征向量。

解：设对应于特征值-2的~~全部~~特征向量为$(x,y,z)^T$

则有$\begin{cases}x+z=0\\y+z=0\end{cases}$

解之得$\begin{cases}x=-t\\y=-t\\z=t\end{cases}$

令$\xi=(-1,-1,1)^T$

$\therefore$对应于特征值-2的全部特征向量为$k\xi$，k为非零常数。

1、给定向量组 $\alpha_1=(1,\ 1,\ 1,\ 1)^T$，$\alpha_2=(1,\ 1,-1,-1)^T$，$\alpha_3=(1,-1,\ 1,-1)^T$，$\alpha_4=(1,-1,\ -1,\ 1)^T$，$\alpha_5=(2,\ 0,1,-1)^T$，求向量组的秩和它的一个极大线性无关组，并将其余向量用该极大线性无关组线性表示。

解：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=\begin{pmatrix}1&1&1&1&2\\1&1&-1&-1&0\\1&-1&1&-1&1\\1&-1&-1&1&-1\end{pmatrix}\longrightarrow$

$\begin{pmatrix}1&1&1&1&2\\0&1&0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&1&1&1\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0&\frac{1}{2}\\0&1&0&0&\frac{1}{2}\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}$ $\alpha_5=\frac{1}{2}\alpha_1+\frac{1}{2}\alpha_2+\alpha_3$

$\therefore$ $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为一个极大线性无关组，秩为4

2、已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+6x_3^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$，试求（1）该二次型的矩阵A；（2）a取何值时，该二次型是正定的。

解：(1) $A=\begin{pmatrix}1&0&a\\0&2&2\\a&2&6\end{pmatrix}$

(2) $\Delta_1=1>0$，$\Delta_2=2>0$

$\Delta_3=\begin{vmatrix}1&0&a\\0&2&2\\a&2&6\end{vmatrix}=8-2a^2>0\Rightarrow -2<a<2$

$\therefore$ ~~$-2<a<2$ 时，二次型正定~~

3、已知向量 $\alpha_1=(1,\ 2,\ 3,\ 4)^T$，$\alpha_2=(-2,\ 1,\ 5,\ 3)^T$，$\alpha_3=(3,-2,\ 1,\ 6)^T$ 是线性方程组 $\begin{cases}x_1+ax_2+2x_3+x_4=11\\bx_1+x_2+3x_3+5x_4=31\\c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3+c_4x_4=c_5\end{cases}$ 的 3 个解，试求此线性方程组的通解；

解：其对应的系数矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&a&2&1\\b&1&3&5\\c_1&c_2&c_3&c_4\end{pmatrix}$，$\beta=(11,31,c_5)^T$

通解 $X=\alpha_1+k_1\beta_1+k_2\beta_2$

由于 $\alpha_1-\alpha_2=(3,1,-2,1)^T$ 与 $\alpha_2-\alpha_3=(-5,3,4,-3)^T$ 线性无关

所以 $AX=0$ 的基础解系中至少含有2个向量

$\therefore 4-R(A)\geqslant 2\Rightarrow R(A)\leq 2$

又 $\because$ A中前2行线性无关

$\therefore R(A)\geqslant 2$

$\therefore R(A)=2$

4、若矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&0&1\\3&1&\lambda\\4&0&5\end{pmatrix}$ 相似于对角阵 Λ，试确定常数 λ 的取值。

解：$|A-\lambda_0E|=\begin{vmatrix}2-\lambda_0&0&1\\3&1-\lambda_0&\lambda\\4&0&5-\lambda_0\end{vmatrix}$

$=(1-\lambda_0)(\lambda_0^2-7\lambda_0+6)=-(\lambda_0-1)^2(\lambda_0-6)\Rightarrow\lambda_{01}=\lambda_{02}=1,\ \lambda_{03}=6$

当 $\lambda=1$ 时，得 $(A-\lambda E)X=0$

由于 A 与 Λ 相似，所以 $3-R(A-E)=2$

$\therefore R(A-E)=1\Rightarrow\lambda=3$

三、试求解下列试题

求一个正交变换 $X = QY$，把实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$ 化为标准型，并写出正交线性变换。

解：$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 3-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (7-\lambda)(1-\lambda)^2 = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 7$

当 $\lambda_3 = 7$ 时 求 $(A-7E)X = 0$ 得 $\xi_1 = (1,1,1)^T$

单位化得 $\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T$

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 时，求 $(A-E) = 0$ 得：$\xi_2 = (-1,1,0)^T$，$\xi_3 = (-1,0,1)^T$

正交化得 $\beta_2 = (-1,1,0)^T$，$\beta_3 = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)^T$

单位化得 $\gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)^T$，$\gamma_3 = \frac{2}{\sqrt{6}}(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)^T$

$\therefore Q = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$，$X = QY$

$\therefore f(Y) = y_1^2 + y_2^2 + 7y_3^2$

六、证明题

（1） 若二阶实方阵A满足$|A| < 0$，试证明A可与对角矩阵相似；

（2） 若n阶方阵A和B相似，试证明A和B有相同的特征值。

证明 ① $|A| < 0$，说明 A 有两个互不相同的实根

显然得 A 可与对角矩阵相似

② 只须证明 A 与 B 有相同的特征多项式

即 $|A-\lambda E| = |B-\lambda E|$

因 A 与 B 相似，所以存在可逆矩阵 P 使得

$P^{-1} A \cdot P = B$

$\therefore |B-\lambda E| = |P^{-1} A \cdot P - \lambda E| = |P^{-1} A \cdot P - P^{-1} \lambda E \cdot P|$

$= |P^{-1}(A-\lambda E) \cdot P| = |A-\lambda E|$

得证