第三章 LTI系统的时域分析

- 3.1 系统的定义与分类
- 3.2 动态电路系统的微分方程描述
- 3.3 LTI连续时间系统的经典法分析
- 3.4 直流电源激励下的一阶动态电路分析
- 3.5 LTI连续时间系统的零输入响应和零状态响应
- 3.6 冲激响应和阶跃响应
- 3.7 卷积积分

回顾

- 系统的定义与分类

1.连续时间系统和离散时间系统
2.线性系统与非线性系统
3.时变系统和时不变系统
4.线性时不变系统
5.因果与非因果系统
6.稳定系统与不稳定系统
7.可逆系统与不可逆系统
8.记忆与无记忆系统

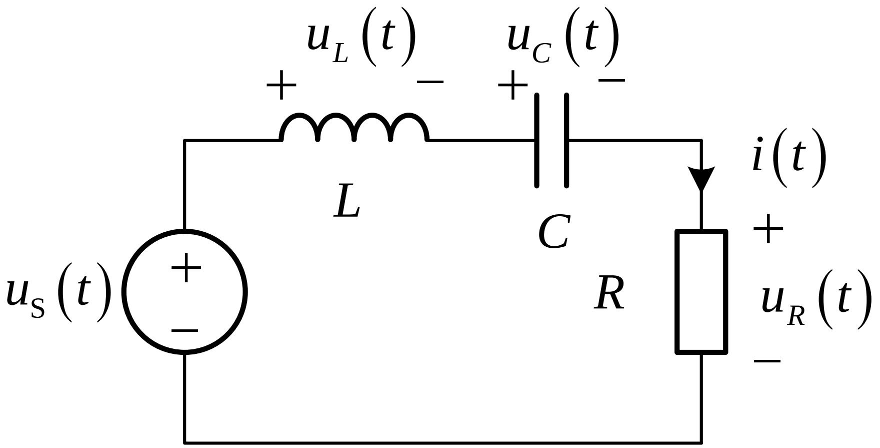
本次课学习内容

- 动态电路系统的微分方程描述
- LTI连续时间系统的经典法分析

3.2 动态电路系统的微分方程描述

- 伏安关系用微分或者积分表示的元件为动态元件，例如电容和电感。
- 含有动态元件的电路系统称为**动态电路系统**
- 不同的动态电路系统具有非常类似的数学描述形式，即一般可以用微分方程的形式来描述系统的输入与输出关系

3.2 动态电路系统的微分方程描述



二阶*RLC*串联动态电路系统

$$\frac{d^2}{dt^2}u_R(t)+\frac{R}{L}\frac{d}{dt}u_R(t)+\frac{1}{LC}u_R(t)=\frac{R}{L}\frac{d}{dt}u_S(t)$$

3.2 动态电路系统的微分方程描述

一般情况下，含有n个独立的线性动态元件的动态电路系统，为线性时不变系统。假设激励信号为x(t)，系统响应为y(t)，且元件无储能，则可以用n阶常系数微分方程来描述

$$
\begin{aligned}
&a_n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} y(t) + a_{n-1} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}t^{n-1}} y(t) + \cdots + a_1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y(t) + a_0 y(t) \\
&= b_m \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m} x(t) + b_{m-1} \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}t^{m-1}} x(t) + \cdots + b_1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t) + b_0 x(t)
\end{aligned}
$$

3.3 LTI连续时间系统的经典法分析

系统分析的任务：对给定的系统模型、输入信号和起始状态，求解系统的输出响应

常系数线性微分方程

时域分析法

- 经典法
  - 特解
  - 齐次解
  - 完全解
- 双零法
  - 零输入响应
  - 零状态响应
  - 完全解

初始状态 (0+)

冲激平衡法

起始状态 (0-)

3.3.1 齐次解、特解和完全解

1. 齐次解 $y_h(t)$：满足右端激励x(t)及其各阶导数都为0的齐次方程

齐次方程

$$a_n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} y(t) + a_{n-1} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}t^{n-1}} y(t) + \cdots + a_1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y(t) + a_0 y(t) = 0$$

特征方程

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

其根称为特征根

3.3.1 齐次解、特解和完全解

表3.3-1 特征根对应的齐次方程解的形式

序号	特征根 λ	对应的齐次方程解的形式
1	实数单根 （λ）	$Ae^{\lambda t}$
2	K 重实数根 （λ 为 K 重根）	$e^{\lambda t}\left(A_0+A_1t+\cdots+A_{K-1}t^{K-1}\right)$
3	一对共轭复数根 $\left(\lambda_{1,2}=\sigma\pm j\omega\right)$	$e^{\sigma t}\left[A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)\right]$ 或 $Ce^{\sigma t}\cos(\omega t+\varphi)$， 其中，$C=\sqrt{A^2+B^2}$，$\tan\varphi=-B/A$
4	K 重共轭复数根 （$\sigma\pm j\omega$ 为 K 重根）	$e^{\sigma t}\sum_{i=0}^{K-1}\left[A_it^i\cos(\omega t)+B_it^i\sin(\omega t)\right]$ 或 $e^{\sigma t}\sum_{i=0}^{K-1}\left[C_it^i\cos(\omega t+\varphi_i)\right]$ 其中，$C_i=\sqrt{A_i^2+B_i^2}$，$\tan\varphi_i=-B_i/A_i$

齐次解等于所有特征根对应的解的叠加

3.3.1 齐次解、特解和完全解

例3.3-1 求方程 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t)+3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)+2y(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)+4x(t)$ 的齐次解

解 齐次方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t)+3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)+2y(t)=0$$

特征方程

$$\lambda^2+3\lambda+2=0$$

特征根=?

$$\lambda_1=-1 \quad \lambda_2=-2$$

齐次解为

$$y_{\mathrm{h}}(t)=A_1\mathrm{e}^{-t}+A_2\mathrm{e}^{-2t}$$

3.3.1 齐次解、特解和完全解

例3.3-2 求方程 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t)+2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)+2y(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)+2x(t)$ 的齐次解

解 齐次方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t)+2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)+2y(t)=0$$

特征方程

$$\lambda^2+2\lambda+2=0$$

特征根

$$\lambda_{1,2}=-1\pm \mathrm{j}1$$

齐次解为

$$y_h(t)=\mathrm{e}^{-t}\left[A_1\cos(t)+A_2\sin(t)\right]$$

3.3.1 齐次解、特解和完全解

2.特解 $y_p(t)$：与激励函数形式有关

求解微分方程特解的过程为：

（1）将激励函数x(t)代入方程右端，化简后右端函数式称为“自由项”;

（2）根据微分方程自由项得到含待定系数的特解;

（3）将特解代入微分方程并使等式成立，从而确定特解中的待定系数

3.3.1 齐次解、特解和完全解

表3.3-2自由项对应的特解形式

<table>
<tr><th>序号</th><th>自由项</th><th colspan="2">特解形式</th></tr>
<tr><td>1</td><td>E（常数）</td><td colspan="2">D（常数）</td></tr>
<tr><td>2</td><td>t^n</td><td colspan="2">$A_n t^n + A_{n-1} t^{n-1} + \cdots + A_1 t + A_0$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3</td><td rowspan="2">e^{at}</td><td>a 不是特征根</td><td>Ae^{at}</td></tr>
<tr><td>a 是 K 重特征根</td><td>$At^K e^{at}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">4</td><td>$\cos(\omega t)$</td><td colspan="2" rowspan="2">$A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t)$</td></tr>
<tr><td>$\sin(\omega t)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">5</td><td>$t^n e^{at} \cos(\omega t)$</td><td colspan="2" rowspan="2">$\left(A_n t^n + A_{n-1} t^{n-1} + \cdots + A_1 t + A_0\right) e^{at} \cos(\omega t)$
$+\left(B_n t^n + B_{n-1} t^{n-1} + \cdots + B_1 t + B_0\right) e^{at} \sin(\omega t)$</td></tr>
<tr><td>$t^n e^{at} \sin(\omega t)$</td></tr>
</table>

自由项由几种函数组合，特解也为其相应的组合

3.3.1 齐次解、特解和完全解

例3.3-3 求例3.3-1在激励为 $x(t)=\mathrm{e}^{-3t}+1$ 时的特解。

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t)+3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)+2y(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)+4x(t)$$

解 将 $x(t)=\mathrm{e}^{-3t}+1$ 代入微分方程，可得

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t)+3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)+2y(t)=\mathrm{e}^{-3t}+4$$

特解形式为 $y_{\mathrm{p}}(t)=A_1\mathrm{e}^{-3t}+A_2$

$$9A_1\mathrm{e}^{-3t}-9A_1\mathrm{e}^{-3t}+2\left(A_1\mathrm{e}^{-3t}+A_2\right)=\mathrm{e}^{-3t}+4$$

求得待定系数 $A_1=\dfrac{1}{2}$ $A_2=2$，所以特解为

$$y_{\mathrm{p}}(t)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3t}+2$$

3.3.1 齐次解、特解和完全解

3.完全解的计算 $y(t)=y_{\mathrm{h}}(t)+y_{\mathrm{p}}(t)$

系统的自由响应 系统的强迫响应

通过经典法求解常系数微分方程的完全解的步骤为：

（1）根据微分方程建立特征方程，求解特征根；

（2）根据特征根得到含有待定系数的齐次解；

（3） 根据微分方程自由项得到含待定系数的特解，将特解代入微分方程并使等式成立，从而确定特解中的待定系数；

（4）将（2）和（3）得到的齐次解（含有待定系数）和特解相加得到完全解；

（5）将边界条件(初始条件)代入完全解，确定齐次解中的待定系数

3.3 LTI连续时间系统的经典法分析

例 3.3-4 求解例3.3-1在激励为 $x(t)=\mathrm{e}^{-3t}+1$，边界条件为 $y(0_+)=0$，$y'(0_+)=2$ 时的完全响应。

解 在例3.3-1中已经求得齐次解的形式为 $y_\mathrm{h}(t)=A_1\mathrm{e}^{-t}+A_2\mathrm{e}^{-2t}$

在例3.3-3中已求得特解为 $y_\mathrm{p}(t)=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-3t}+2$

所以完全解为 $y(t)=y_\mathrm{h}(t)+y_\mathrm{p}(t)=A_1\mathrm{e}^{-t}+A_2\mathrm{e}^{-2t}+\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-3t}+2$

将给定的边界条件代入完全解，以确定齐次解中的待定系数

$$\begin{cases} 0=y(0_+)=A_1+A_2+\dfrac{1}{2}+2 \\ 2=y'(0_+)=-A_1-2A_2-\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

$A_1=-\dfrac{3}{2}$ $\qquad A_2=-1$

$y(t)=-\dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}+\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-3t}+2$

例 3.3-5 已知LTI系统的微分方程为 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)+2y(t)=x(t)$

系统的激励信号为$x(t)=\varepsilon(t)$ ，边界条件为 $y(0_+)=1$

求激励信号加入后的系统响应。

解 根据微分方程可得特征方程为 $\lambda+2=0$

特征根为$\lambda=-2$，可得齐次解为$y_\mathrm{h}(t)=A\mathrm{e}^{-2t}$

将激励信号代入微分方程，可得 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)+2y(t)=\varepsilon(t)$

在 $t>0$ 时，系统的微分方程为$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)+2y(t)=1$

特解为 $y_\mathrm{p}(t)=\frac{1}{2}$ $t>0$

例 3.3-5 已知LTI系统的微分方程为 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)+2y(t)=x(t)$

系统的激励信号为$x(t)=\varepsilon(t)$，边界条件为 $y(0_+)=1$

求激励信号加入后的系统响应。

完全解形式为 $y(t)=y_{\mathrm{h}}(t)+y_{\mathrm{p}}(t)=A\mathrm{e}^{-2t}+\frac{1}{2} \qquad t>0$

$$1=y(0_+)=A+\frac{1}{2}$$

解得 $A=\frac{1}{2}$，所以完全解为

$$y(t)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}+\frac{1}{2} \qquad t>0$$

$$y(t)=\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}+\frac{1}{2}\right)\varepsilon(t)$$

例 3.3-5 已知LTI系统的微分方程为 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)+2y(t)=x(t)$

系统的激励信号为$x(t)=\varepsilon(t)$ ，边界条件为 $y(0_+)=1$

求激励信号加入后的系统响应。

$$y(t)=\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}+\frac{1}{2}\right)\varepsilon(t)$$

该系统完全响应中 $\frac{1}{2}\varepsilon(t)$ 为强迫响应，而 $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t)$ 为自由响应。

3.3.2 冲激平衡法——从0_-到0_+状态的转换

若激励在$t=0$时刻开始作用于系统

起始状态 0_- 　　　　　　　　　　　　 0_+ 初始状态

起始状态 $$y^{(k)}(0_-)=\left[y(0_-),\frac{d}{dt}y(0_-),\cdots,\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(0_-)\right]$$

$x(t)$ 　　若自由项含有$\delta(t)$及其各阶导数

跳变

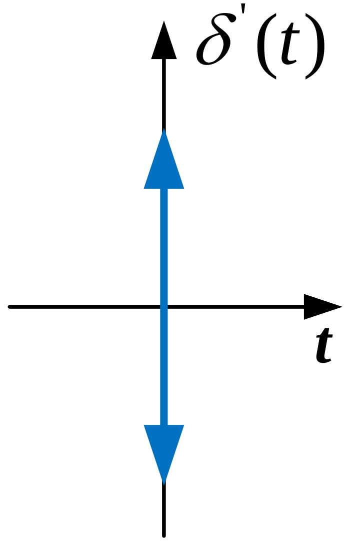
初始状态 $$y^{(k)}(0_+)=\left[y(0_+),\frac{d}{dt}y(0_+),\cdots,\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(0_+)\right]$$

3.3.2 冲激平衡法——从0_-到0_+状态的转换

冲激平衡法利用$t=0$时刻微分方程左右两边**的$\delta(t)$及其各阶导数相等**，由系统的起始状态得到系统的初始状态，从而可以利用初始状态来确定完全解中的待定系数。

例3.3-6 微分方程$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)+2y(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)$，已知$x(t)=2\delta(t)$

$y(0_-)=1$,求系统的初始状态$y(0_+)$



解：在$t=0$时，代入激励，微分方程可写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)+2y(t)=2\delta'(t)$$

$\therefore$在$t=0$时令 $\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)=2\delta'(t)\right.$

代入微分方程

3.3.2 冲激平衡法——从0_-到0_+状态的转换

例3.3-6 微分方程$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)+2y(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)$，已知 $x(t)=2\delta(t)$

$y(0_-)=1$,求系统的初始状态$y(0_+)$

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)=2\delta'(t)+A\delta(t)+B\varepsilon(t)\\ y(t)=2\delta(t)+A\varepsilon(t)\end{cases}$$

$t=0$ 系统微分方程为:

$$2\delta'(t)+(A+4)\delta(t)+(B+2A)\varepsilon(t)=2\delta'(t)$$

$$A=-4, B=8$$

即t=0时y(t) 中包含幅值大小为-4的跳变，故 $y(t)=2\delta(t)-4\varepsilon(t)$

$$y(0_+)-y(0_-)=-4$$

$$\therefore y(0_+)=y(0_-)-4=1-4=-3$$

3.3.2 冲激平衡法

利用冲激平衡法从系统起始状态得到初始状态的基本步骤为：

（1）确定方程右端$\delta(t)$ 的最高阶微分项；

（2）确定方程左端 $y(t)$的最高阶微分项，在 $t=0$ 时刻构建其相应的冲激函数形式，该形式应该包含（1）确定的$\delta(t)$ 的最高阶微分项、含待定系数的全部低阶$\delta(t)$微分项及单位阶跃函数项；

（3）通过积分依次得到$t=0$时刻$y(t)$各阶微分及 $y(t)$ 的冲激函数形式;

（4）平衡方程两边的$\delta(t)$ 及其微分项，确定待定系数;

（5）由y(t)中单位阶跃函数的系数，通过起始状态计算得到初始状态。

3.3.2 冲激平衡法

例3.3-7 LTI系统 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t)+3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)+2y(t)=2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)+x(t)$，激励为

$x(t)=\delta(t)+\varepsilon(t)$，起始状态为 $y'(0_-)=1$，$y(0_-)=0$

求该系统的完全响应 $y(t)$

解：将 $x(t)=\varepsilon(t)+\delta(t)$ 代入微分方程可得

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t)+3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)+2y(t)=2\delta'(t)+3\delta(t)+\varepsilon(t)$$

在 $t=0$ 时令
$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t)=2\delta'(t)+A\delta(t)+B\varepsilon(t)\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)=2\delta(t)+A\varepsilon(t)\\ y(t)=2\varepsilon(t)\end{cases}$$

3.3.2 冲激平衡法

例3.3-7 LTI系统 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t)+3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)+2y(t)=2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)+x(t)$，激励为

$x(t)=\delta(t)+\varepsilon(t)$，起始状态为 $y'(0_-)=1$， $y(0_-)=0$

求该系统的完全响应 $y(t)$

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t)=2\delta'(t)+A\delta(t)+B\varepsilon(t)\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)=2\delta(t)+A\varepsilon(t)\\ y(t)=2\varepsilon(t)\end{cases}$$

$t=0$ 系统方程为：

$$2\delta'(t)+(A+6)\delta(t)+(B+3A+2)\varepsilon(t)=2\delta'(t)+3\delta(t)+\varepsilon(t)$$

$$A=-3 \qquad B=8$$

$t=0$ $\quad y'(t)=2\delta(t)-3\varepsilon(t)$ $\quad \therefore y'(0_+)=y'(0_-)-3=1-3=-2$

$y(t)=2\varepsilon(t)$ $\quad \therefore y(0_+)=y(0_-)+2=0+2=2$

3.3.2 冲激平衡法

例3.3-7 LTI系统 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t)+3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)+2y(t)=2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)+x(t)$，激励为 $x(t)=\delta(t)+\varepsilon(t)$，起始状态为 $y'(0_-)=1$，$y(0_-)=0$

求该系统的完全响应 $y(t)$

微分方程的齐次解为 $y_{\mathrm{h}}(t)=A_1\mathrm{e}^{-t}+A_2\mathrm{e}^{-2t}$

在 $t>0$ 时，系统方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t)+3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)+2y(t)=1$$

$$y_{\mathrm{p}}(t)=\frac{1}{2} \qquad t>0$$

3.3.2 冲激平衡法

例3.3-7 LTI系统 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t)+3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)+2y(t)=2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)+x(t)$，激励为 $x(t)=\delta(t)+\varepsilon(t)$，起始状态为 $y'(0_-)=1$，$y(0_-)=0$

求该系统的完全响应 $y(t)$

完全响应为 $y(t)=y_{\mathrm{h}}(t)+y_{\mathrm{p}}(t)=A_1\mathrm{e}^{-t}+A_2\mathrm{e}^{-2t}+\frac{1}{2}\qquad t>0$

$$\begin{cases} 2=y(0_+)=A_1+A_2+\frac{1}{2} \\ -2=y'(0_+)=-A_1-2A_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1=1 \\ A_2=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$y(t)=\mathrm{e}^{-t}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}+\frac{1}{2}\qquad t>0$$

$$y(t)=\left(\mathrm{e}^{-t}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}+\frac{1}{2}\right)\varepsilon(t)$$

习题：3-4, 3-5, 3-6

提交截止时间：本周五（4月16日）早8点