

第三章 线性电路系统的时域分析

本书中，我们主要研究线性电路的分析，线性电路是线性时不变（LTI）系统的一种特例，其分析方法可以采用 LTI 系统的分析方法完成，而 LTI 系统的分析方法主要包括时域分析方法和变换域分析方法，本章介绍一般 LTI 系统的时域分析方法，并在其中以线性电路为例讲解其具体应用。首先介绍系统的定义和分类，然后介绍动态电路系统的描述方法及其时域分析方法，对直流电源激励下的一阶动态电路进行分析，介绍零输入响应和零状态响应等概念及其计算方法，最后介绍利用卷积积分计算 LTI 系统的零状态响应。

3.1 系统的定义与分类

系统是由若干相互作用和相互依赖的事物组成的具有特定功能的整体，例如生态系统、通讯系统等。本书着重研究电路系统，电路系统是指由各种电路组成并具有对电信号的特殊处理功能的系统。

具体的系统可以用反映其输入（激励）和输出（响应）关系的系统数学模型来描述，例如动态电路系统一般可以用常系数微分方程来描述。系统常用一个方框来表示，如图 3.1-1 所示，其中 $x(t)$ 表示系统的输入（激励）， $y(t)$ 表示系统的输出（响应）。

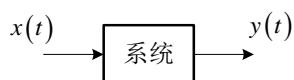


图 3.1-1 系统的表示

系统按其处理信号和系统特性的不同一般可以分为以下几类。

1. 连续时间系统和离散时间系统（continuous-time system and discrete system）

若系统处理的信号为连续时间信号，该系统称为连续时间系统；若系统处理的信号为离散时间信号，该系统为离散时间系统。若系统由若干子系统构成，有的子系统处理连续时间信号，而有的子系统处理离散时间信号，则该系统称为混合系统。本书中研究的电路系统是连续时间系统。

2. 线性系统与非线性系统（linear system and nonlinear system）

满足线性特性的系统称为线性系统；不满足线性特性的系统称为非线性系统。线性包含齐次性和叠加性。齐次性又称比例性，是指若系统输入增大为原来的 k 倍，则输出也增大为原来的 k 倍；叠加性是指系统在多个输入共同作用下的输出等于每个输入单独作用下的输出的和。我们在第 2 章中描述的叠加原理实际上就是系统的线性性在线性电路中的具体体现。

需要注意的是，这里的输出是完全由输入所引起的，即，若输入为零则输出也为零，这其实是零状态（zero-state）响应，零状态响应是指系统起始状态为零，仅由输入所引起的响应，一般用 $y_{zs}(t)$ 表示。将在 3.5 节详细介绍。

如图 3.1-2（a）所示系统，在输入为 $x_1(t)$ 时，零状态响应为 $y_{zs1}(t)$ ，如图 3.1-2（b）所示；在输入为 $x_2(t)$ 时，零状态响应为 $y_{zs2}(t)$ ，如图 3.1-2（c）所示；若满足当输入为 $k_1x_1(t) + k_2x_2(t)$ 时的零状态响应为 $k_1y_{zs1}(t) + k_2y_{zs2}(t)$ ，如图 3.1-2（d）所示，即零状态响应与输入之间既满足齐次性又满足叠加性，称该系统满足零状态响应线性。

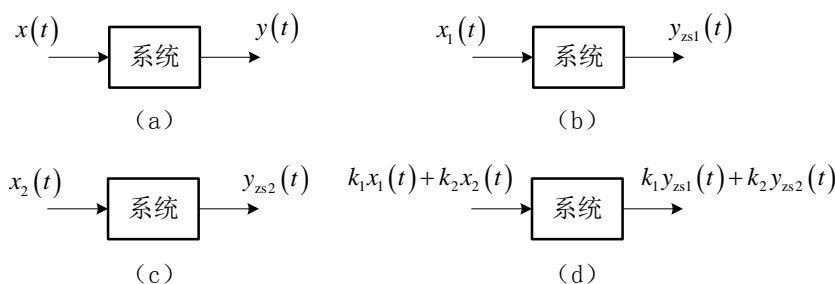


图 3.1-2 线性系统特性

一个系统的输出不仅与输入有关，还与系统的起始状态有关。因此，线性系统不仅要求零状态响应线性，还要求零输入响应线性。零输入响应是指输入为零，仅由系统起始状态所引起的响应，一般用 $y_{zi}(t)$ 表示。零输入响应线性是指零输入响应与系统起始状态呈线性关系。因此一个线性系统必须满足以下条件：

- (1) 可分解性：系统完全响应=零状态响应+零输入响应；
- (2) 零状态响应线性：起始状态为零时，输出与输入呈线性关系；
- (3) 零输入响应线性：输入为零时，输出与系统起始状态呈线性关系。

例 3.1-1 判断下列系统是线性系统还是非线性系统。其中 $x(t)$ 为系统输入， $y(0_-)$ 为系统的起始状态， $y(t)$ 为系统在 $t > 0$ 时的响应。

$$(1) \quad y(t) = y(0_-)x(t)$$

$$(2) \quad y(t) = y(0_-) + 3x(t)$$

$$(3) \quad y(t) = y(0_-) + 2x^2(t)$$

解 (1) 该系统不满足可分解性，因此该系统不满足线性，为非线性系统。

(2) 该系统满足分解性，可得 $y_{zs}(t) = 3x(t)$ 和 $y_{zi}(t) = y(0_-)$ 。设

$$x_1(t) \rightarrow y_{zs1}(t) = 3x_1(t)$$

$$x_2(t) \rightarrow y_{zs2}(t) = 3x_2(t)$$

在输入为 $k_1x_1(t) + k_2x_2(t)$ 时有

$$k_1x_1(t) + k_2x_2(t) \rightarrow 3[k_1x_1(t) + k_2x_2(t)] = 3k_1x_1(t) + 3k_2x_2(t) = k_1y_{zs1}(t) + k_2y_{zs2}(t)$$

可见，该系统满足零状态响应线性，同理，该系统满足零输入响应线性，因此该系统为线性系统。

(3) 该系统满足分解性，可得 $y_{zs}(t) = 2x^2(t)$ 和 $y_{zi}(t) = y(0_-)$ 。设

$$x_1(t) \rightarrow y_{zs1}(t) = 2x_1^2(t)$$

$$x_2(t) \rightarrow y_{zs2}(t) = 2x_2^2(t)$$

在输入为 $k_1x_1(t) + k_2x_2(t)$ 时有

$$k_1x_1(t) + k_2x_2(t) \rightarrow 2[k_1x_1(t) + k_2x_2(t)]^2 \neq k_1y_{zs1}(t) + k_2y_{zs2}(t)$$

可见，该系统不满足零状态响应线性，因此该系统为非线性系统。

3. 时变系统和时不变系统 (time-varying system and time-invariant system)

若系统的输入延时，系统的零状态响应也相应延时，则称该系统为时不变系统，否则称之为时变系统。如图 3.1-3 所示系统，若输入 $x(t)$ 延时为 $x(t-t_0)$ ，输出 $y_{zs}(t)$ 也延时为 $y_{zs}(t-t_0)$ ，则称该系统为时不变系统。本书中研究的电路系统均为时不变系统。



图 3.1-3 时不变系统特性

例 3.1-2 判断下列系统是时变系统还是时不变系统。

$$(1) y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$$

$$(2) y(t) = 2x^2(t)$$

$$(3) y(t) = tx(t)$$

解 (1) 设 $x(t) \rightarrow y_{zs}(t) = \frac{d}{dt}x(t)$ ，则有

$$x(t-t_0) \rightarrow \frac{d}{dt}x(t-t_0) = \frac{d}{d(t-t_0)}x(t-t_0) = y_{zs}(t-t_0)$$

可见，该系统为时不变系统。

(2) 设 $x(t) \rightarrow y_{zs}(t) = 2x^2(t)$ ，则有

$$x(t-t_0) \rightarrow 2x^2(t-t_0) = y_{zs}(t-t_0)$$

可见，该系统为时不变系统。

(3) 设 $x(t) \rightarrow y_{zs}(t) = tx(t)$ ，则有

$$x(t-t_0) \rightarrow tx(t-t_0) \neq y_{zs}(t-t_0)$$

可见，该系统为时变系统。

4. 线性时不变系统 (linear time-invariant system, LTI system)

既满足线性又满足时不变特性的系统称为线性时不变系统 (LTI 系统)，可用图 3.1-4 所示

方框表示。



图 3.1-4 LTI 系统

LTI 连续时间系统具有微分和积分性质，若输入为 $x(t)$ 时零状态响应为 $y_{zs}(t)$ ，当输入为 $x(t)$ 的微分或者积分时，输出为 $y_{zs}(t)$ 的微分或者积分，即若 $x(t) \rightarrow y_{zs}(t)$ ，则有

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) \rightarrow \frac{d}{dt}y_{zs}(t) \\ \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \rightarrow \int_{-\infty}^t y_{zs}(\tau) d\tau \end{cases}$$

5. 因果与非因果系统 (causal system and noncausal system)

输出仅与当前和以前的输入有关的系统称为因果系统，否则称为非因果系统。因此，在输入加入之前，因果系统是没有输出的。例如， $y(t) = x(t-2)$ 为因果系统，而 $y(t) = x(t+2)$ 为非因果系统。

6. 稳定系统与不稳定系统 (stable system and nonstable system)

有界输入产生有界输出的系统，称为稳定系统；有界输入产生无界输出的系统称为不稳定系统。例如， $y(t) = \tan[x(t)]$ ，在输入 $x(t) = \pi/2$ ，输出为无穷大，该系统为不稳定系统。

7. 可逆系统与不可逆系统 (reversible system and nonreversible system)

在不同输入的作用下产生不同的输出的系统称为可逆系统，否则，称为不可逆系统。可逆系统存在对应的逆系统，信号在依次通过可逆系统和其对应的逆系统后，可以恢复回原来的信号。例如 $y(t) = x(2t)$ 与 $y(t) = x(t/2)$ 互为逆系统。

8. 记忆与无记忆系统 (memory system and memoryless system)

输出仅与当前时刻的输入有关的系统，称为无记忆系统。输出不仅与当前输入有关，还与过去的输入有关的系统，称为记忆系统。例如，纯电阻电路为无记忆系统，而含有电容或者电感的系统为记忆系统。

3.2 动态电路系统的微分方程描述

伏安关系用微分或者积分表示的元件为动态元件，例如电容和电感。含有动态元件的电路系统称为动态电路系统，因此动态电路系统一般可以用微分方程的形式来描述。

如图 3.2-1 (a) 所示为一阶 RC 动态电路系统，其中，输入为 $u_s(t)$ ，输出为 $u_c(t)$ 。该系统的微分方程形式为

$$\frac{d}{dt}u_c(t) + \frac{1}{RC}u_c(t) = \frac{1}{RC}u_s(t) \quad (3.2-1)$$

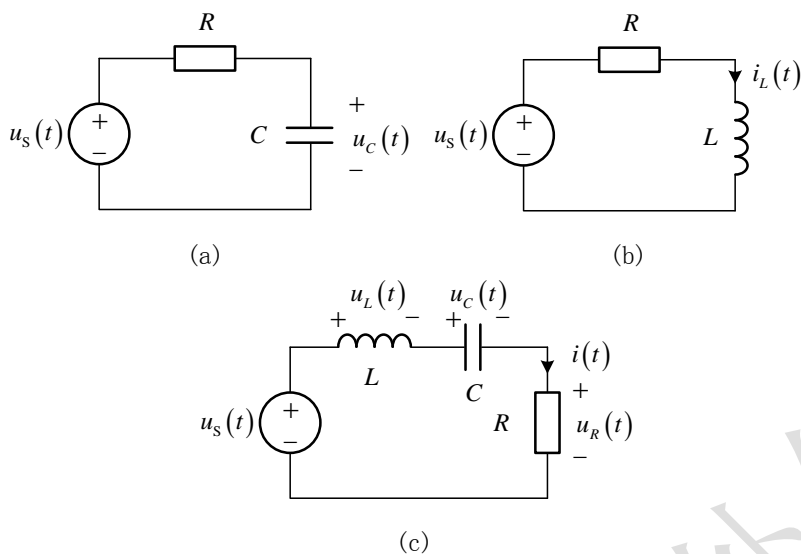


图 3.2-1 动态电路系统

图 3.2-1 (b) 所示为一阶 RL 动态电路系统，其中，输入为 $u_s(t)$ ，输出为 $i_L(t)$ 。该系统的微分方程形式为

$$\frac{d}{dt}i_L(t) + \frac{R}{L}i_L(t) = \frac{1}{L}u_s(t) \quad (3.2-2)$$

图 3.2-1 (c) 所示为二阶 RLC 串联动态电路系统，其中，输入为 $u_s(t)$ ，输出为 $u_R(t)$ 。

由于 $i(t) = \frac{u_R(t)}{R}$ ， $u_L(t) = L \frac{d}{dt}i(t)$ ， $u_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$ ，可得

$$L \frac{d}{dt} \frac{u_R(t)}{R} + u_R(t) + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t \frac{u_R(\tau)}{R} d\tau = u_s(t)$$

因此，该系统的微分方程为

$$\frac{d^2}{dt^2}u_R(t) + \frac{R}{L} \frac{d}{dt}u_R(t) + \frac{1}{LC}u_R(t) = \frac{R}{L} \frac{d}{dt}u_s(t) \quad (3.2-3)$$

可见，动态电路系统可以用常系数微分方程来描述，一般情况下，含有 n 个独立的动态元件的动态电路系统可以用 n 阶常系数微分方程来描述。 n 阶 LTI 连续时间系统（包含动态电路系统），假设系统的输入和输出分别为 $x(t)$ 和 $y(t)$ ，则描述系统的常系数线性微分方程为

$$\begin{aligned} & a_n \frac{d^n}{dt^n} y(t) + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} y(t) + \cdots + a_1 \frac{d}{dt} y(t) + a_0 y(t) \\ & = b_m \frac{d^m}{dt^m} x(t) + b_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} x(t) + \cdots + b_1 \frac{d}{dt} x(t) + b_0 x(t) \end{aligned} \quad (3.2-4)$$

其中， $n \geq m$ ， $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ 和 $b_0, b_1, b_2, \dots, b_m$ 均为常数，所以求解连续时间

系统响应的基本方法为求解常系数线性微分方程，微分方程的完全解就是系统的完全响应。

3.3 LTI 连续时间系统的经典法分析

LTI 连续时间系统的时域分析方法可以分为经典法和双零法。所谓经典法，是通过求解微分方程的齐次解和特解来计算得到系统的完全响应，将在本节介绍；所谓双零法，是通过求解系统的零输入响应和零状态响应来计算得到系统的完全响应，将在 3.4 节和 3.5 节介绍。

经典法求解常系数线性微分方程是高等数学课程的内容，本节将对经典法的内容稍作回顾，但不详细展开讨论。

3.3.1 齐次解、特解和完全解

1. 齐次解的计算

令式 (3.2-4) 的右边为零，可得

$$a_n \frac{d^n}{dt^n} y(t) + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} y(t) + \cdots + a_1 \frac{d}{dt} y(t) + a_0 y(t) = 0 \quad (3.3-1)$$

式 (3.3-1) 称为式 (3.2-4) 对应的齐次方程，其解称为齐次解 $y_h(t)$ ，求解过程可以简化为代数方程的求根问题，称为特征根法。一般，含待定系数的 $y_h(t)$ 称为齐次通解，而确定待定系数的 $y_h(t)$ 称为齐次解，本书统称齐次通解和齐次解为齐次解。

微分方程齐次解的基础形式为指数函数 $Ae^{\lambda t}$ ，而 n 阶常系数齐次微分方程齐次解 $y_h(t)$ 的形式为指数函数 $Ae^{\lambda t}$ 的线性组合。将 $Ae^{\lambda t}$ 代入式 (3.3-1) 可得

$$a_n \lambda^n Ae^{\lambda t} + a_{n-1} \lambda^{n-1} Ae^{\lambda t} + \cdots + a_1 \lambda Ae^{\lambda t} + a_0 Ae^{\lambda t} = 0$$

即

$$Ae^{\lambda t} (a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0) = 0$$

可见， $Ae^{\lambda t}$ 为式 (3.3-1) 的解的充要条件为 λ 是代数方程

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0 \quad (3.3-2)$$

的根，因此式 (3.3-2) 具有确定式 (3.3-1) 的齐次解的作用，称之为齐次方程 (3.3-1) 的特征方程，它的根称为特征根， A 由于暂时无法确定，称为待定系数。

根据真实 LTI 系统微分方程构建的特征方程，其系数为实数，而实系数特征方程的根一般以实数或者共轭复数的形式出现，同时又可以分为单根和重根两种情况，不同的特征根对应的齐次方程解的形式如表 3.3-1 所示。通过各个特征根对应的齐次解的形式相加，可得微分方程的齐次解。

表 3.3-1 特征根对应的齐次方程解的形式

序号	特征根 λ	对应的齐次方程解的形式
1	实数单根 (λ)	$Ae^{\lambda t}$
2	K 重实数根 (λ 为 K 重根)	$e^{\lambda t} (A_0 + A_1 t + \cdots + A_{K-1} t^{K-1})$
3	一对共轭复数根	$e^{\sigma t} [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)]$ 或 $Ce^{\sigma t} \cos(\omega t + \varphi)$,

	$(\lambda_{1,2} = \sigma \pm j\omega)$	其中, $C = \sqrt{A^2 + B^2}$, $\tan \varphi = -B/A$
4	K 重共轭复数根 ($\sigma \pm j\omega$ 为 K 重根)	$e^{\sigma t} \sum_{i=0}^{K-1} [A_i t^i \cos(\omega t) + B_i t^i \sin(\omega t)]$ 或 $e^{\sigma t} \sum_{i=0}^{K-1} [C_i t^i \cos(\omega t + \varphi_i)]$ 其中, $C_i = \sqrt{A_i^2 + B_i^2}$, $\tan \varphi_i = -B_i/A_i$

表中, $A, A_0, A_1, \dots, A_{K-1}, B, B_0, B_1, \dots, B_{K-1}, C, C_0, C_1, \dots, C_{K-1}, \varphi, \varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{K-1}$ 为待定系数。

例 3.3-1 求方程 $\frac{d^2}{dt^2} y(t) + 3 \frac{d}{dt} y(t) + 2y(t) = \frac{d}{dt} x(t) + 4x(t)$ 的齐次解。

解 齐次方程为

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) + 3 \frac{d}{dt} y(t) + 2y(t) = 0$$

特征方程为

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

可得特征根为

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$$

所以, 齐次解为

$$y_h(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-2t}$$

例 3.3-2 求方程 $\frac{d^2}{dt^2} y(t) + 2 \frac{d}{dt} y(t) + 2y(t) = \frac{d}{dt} x(t) + 2x(t)$ 的齐次解。

解 齐次方程为

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) + 2 \frac{d}{dt} y(t) + 2y(t) = 0$$

特征方程为

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$

可得特征根为

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm j1$$

所以, 齐次解为

$$y_h(t) = e^{-t} [A_1 \cos(t) + A_2 \sin(t)]$$

例 3.3-3 求方程 $\frac{d^2}{dt^2} y(t) + 4 \frac{d}{dt} y(t) + 4y(t) = 2 \frac{d}{dt} x(t) + 3x(t)$ 的齐次解。

解 齐次方程为

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) + 4 \frac{d}{dt} y(t) + 4y(t) = 0$$

特征方程为

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$$

可得特征根为

$$\lambda_{1,2} = -2$$

即, -2 为特征方程的二重根。所以, 齐次解为

$$y_h(t) = e^{-2t} [A_1 + A_2 t]$$

2. 特解的计算

将激励信号 $x(t)$ 代入系统微分方程式 (3.2-4), 化简后方程右边的函数称为自由项, 特解

$y_p(t)$ 的形式与自由项有关, 也即特解的形式与激励信号的形式有关, 有时特解 $y_p(t)$ 的形式还与系统的特征根有关。不同形式的自由项对应的特解形式如表 3.3-2 所示, 若自由项为表中各种情况的组合, 则特解也是相应的组合。

求解微分方程特解的过程为:

- (1) 根据微分方程自由项得到含待定系数的特解;
- (2) 将特解代入微分方程并使等式成立, 从而确定特解中的待定系数。

表 3.3-2 自由项对应的特解形式

序号	自由项	特解形式	
1	E (常数)	D (常数)	
2	t^n	$A_n t^n + A_{n-1} t^{n-1} + \cdots + A_1 t + A_0$	
3	e^{at}	a 不是特征根	Ae^{at}
		a 是 K 重特征根	$At^K e^{at}$
4	$\cos(\omega t)$	$A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t)$	
	$\sin(\omega t)$		
5	$t^n e^{at} \cos(\omega t)$	$(A_n t^n + A_{n-1} t^{n-1} + \cdots + A_1 t + A_0) e^{at} \cos(\omega t)$ $+ (B_n t^n + B_{n-1} t^{n-1} + \cdots + B_1 t + B_0) e^{at} \sin(\omega t)$	
	$t^n e^{at} \sin(\omega t)$		

表中, $A, A_0, A_1, \dots, A_n, B_0, B_1, \dots, B_n$ 为待定系数。

例 3.3-4 求例 3.3-1 在下列激励时的特解。

$$(1) \text{ 为 } x(t) = e^{-3t} + 1; \quad (2) \text{ 为 } x(t) = e^{-2t} + 1$$

解 (1) 将 $x(t) = e^{-3t} + 1$ 代入微分方程, 可得

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) + 3 \frac{d}{dt} y(t) + 2y(t) = e^{-3t} + 4$$

在例 3.3-1 中已求得特征根为 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$, 即-3 不是特征根, 因此, 特解形式为

$y_p(t) = A_1 e^{-3t} + A_2$, 将其代入微分方程, 可得

$$9A_1 e^{-3t} - 9A_1 e^{-3t} + 2(A_1 e^{-3t} + A_2) = e^{-3t} + 4$$

求得待定系数 $A_1 = \frac{1}{2}, A_2 = 2$, 所以特解为

$$y_p(t) = \frac{1}{2} e^{-3t} + 2$$

(2) 将 $x(t) = e^{-2t} + 1$ 代入微分方程, 可得

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) + 3 \frac{d}{dt} y(t) + 2y(t) = 2e^{-2t} + 4$$

在例 3.3-1 中已求得特征根为 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$, 即-2 是特征根, 因此, 特解形式为

$y_p(t) = A_1 t e^{-2t} + A_2$, 将其代入微分方程, 可得

$$(-4A_1 e^{-2t} + 4A_1 t e^{-2t}) + 3(A_1 e^{-2t} - 2A_1 t e^{-2t}) + 2(A_1 t e^{-2t} + A_2) = 2e^{-2t} + 4$$

求得待定系数 $A_1 = -2, A_2 = 2$, 所以特解为

$$y_p(t) = -2t e^{-2t} + 2$$

3. 完全解的计算

通过齐次解 $y_h(t)$ 和特解 $y_p(t)$ 相加可得完全解 $y(t)$, 即

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) \quad (3.3-3)$$

根据系统的微分方程确定的特征根称为系统的自由频率 (或固有频率), 它决定了齐次解 $y_h(t)$ 的形式, 因此又称齐次解 $y_h(t)$ 为系统的自由响应; 而特解 $y_p(t)$ 与系统激励的函数形

式有关，因此又称特解 $y_p(t)$ 为系统的强迫响应；完全解 $y(t)$ 又称为系统的完全响应。

在齐次解中有待定系数，可以在完全解中通过边界条件来确定待定系数。

通过经典法求解常系数微分方程的完全解的步骤为：

- (1) 根据微分方程建立特征方程，求解特征根；
- (2) 根据特征根得到含有待定系数的齐次解；
- (3) 根据微分方程自由项得到含待定系数的特解，将特解代入微分方程并使等式成立，从而确定特解中的待定系数；
- (4) 将(2)和(3)得到的齐次解（含有待定系数）和特解相加得到完全解；
- (5) 将边界条件代入完全解，确定齐次解中的待定系数。

例 3.3-5 求解例 3.3-1 在激励为 $x(t) = e^{-3t} + 1$ ，边界条件为 $y(0) = 0$ ， $y'(0) = 2$ 时的完全响应。

解 在例 3.3-1 中已经求得齐次解的形式为

$$y_h(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-2t}$$

在例 3.3-3 (a) 中已求得激励为 $x(t) = e^{-3t} + 1$ 时，特解为 $y_p(t) = \frac{1}{2}e^{-3t} + 2$ ，所以完全解为

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-3t} + 2$$

将给定的边界条件代入完全解，以确定齐次解中的待定系数，即

$$\begin{cases} 0 = y(0) = A_1 + A_2 + \frac{1}{2} + 2 \\ 2 = y'(0) = -A_1 - 2A_2 - \frac{3}{2} \end{cases}$$

可得

$$A_1 = -\frac{3}{2}, \quad A_2 = -1$$

所以，完全响应为

$$y(t) = -\frac{3}{2}e^{-t} - e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-3t} + 2$$

例 3.3-6 已知 LTI 系统的微分方程为 $\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = x(t)$ ，系统的激励信号为

$x(t) = \varepsilon(t)$ ，边界条件为 $y(0_+) = 1$ ，求激励信号加入后的系统响应。

解 根据微分方程可得特征方程为

$$\lambda + 2 = 0$$

特征根为 $\lambda = -2$ ，可得齐次解为 $y_h(t) = Ae^{-2t}$ 。

激励信号 $x(t) = \varepsilon(t)$ ，即激励从 0 时刻开始作用于系统，因此求解激励信号加入后的系统响应就是要求解 $t > 0$ 时的完全响应。

将激励信号代入微分方程，可得

$$\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = \varepsilon(t)$$

在 $t > 0$ 时，系统的微分方程为

$$\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = 1$$

所以，特解形式为

$$y_p(t) = B \quad t > 0$$

代入微分方程，可得 $B = \frac{1}{2}$ ，所以特解为

$$y_p(t) = \frac{1}{2} \quad t > 0$$

将齐次解和特解相加可以得到完全解形式为

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = Ae^{-2t} + \frac{1}{2} \quad t > 0$$

边界条件 $y(0_+)$ 为 0_+ 时刻的值，在完全解的时间范围（即 $t > 0$ ）内，可以直接用于确定完全解中的待定系数 A 。可得

$$1 = y(0_+) = A + \frac{1}{2}$$

解得 $A = \frac{1}{2}$ ，所以完全解为

$$y(t) = \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2} \quad t > 0$$

$y(t)$ 为系统的完全响应，也可以表示为

$$y(t) = \left(\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2} \right) \varepsilon(t)$$

可见, 该系统完全响应中 $\frac{1}{2}e^{-2t}\varepsilon(t)$ 为自由响应, 而 $\frac{1}{2}\varepsilon(t)$ 为强迫响应。完全响应按照其随时间的变化形式, 也可以分解为暂态响应和稳态响应, 稳态响应是指完全响应中稳定的分量, 其它则称为暂态响应。因此, 本例中 $\frac{1}{2}e^{-2t}\varepsilon(t)$ 为暂态响应, $\frac{1}{2}\varepsilon(t)$ 为稳态响应。

3.3.2 冲激平衡法

在连续时间系统中, 若激励在 $t \geq 0$ 时作用于系统, 则 0_- 时刻系统的状态即为系统的起始状态, 0_+ 时刻系统的状态即为系统的初始状态。系统的起始状态是指激励信号作用之前的瞬间系统状态, 为系统前期工作的积累, 但未受到激励的影响; 系统的初始状态是指激励信号作用之后的瞬间系统状态, 初始状态受到了激励的作用。因此不能用起始状态来确定完全解 (完全响应) 中的待定系数, 而应该用初始状态。

冲激平衡法利用 $t = 0$ 时刻微分方程左右两边的 $\delta(t)$ 及其各阶导数相等, 由系统的起始状态得到系统的初始状态, 从而可以利用初始状态来确定完全解中的待定系数。

例 3.3-7 微分方程 $\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$, 已知 $x(t) = 2\delta(t)$, $y(0_-) = 1$, 求系统的初始状态 $y(0_+)$ 。

解 将 $x(t) = 2\delta(t)$ 代入微分方程可得

$$\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = 2\delta'(t) \quad (3.3-4)$$

冲激平衡法仅讨论 $t = 0$ 时刻的情况, 此时, 如果方程中存在冲激或其导数, 由于冲激或其导数的值均为无穷大, 因此取值有限的项在此时已没有意义, 可以直接设有限值项的值为零。

在 $t = 0$ 时, 由于方程右边存在 $2\delta'(t)$, 所以方程左边也应该有 $2\delta'(t)$, 而且应该全部包含在最高阶 $\frac{d}{dt}y(t)$ 中。因为如果 $y(t)$ 中存在 $\delta'(t)$ 项, 则 $\frac{d}{dt}y(t)$ 必然存在 $\delta''(t)$, 而方程右端没有 $\delta''(t)$ 项, 会导致方程左右两边无法平衡。

$y(t)$ 为 $\frac{d}{dt}y(t)$ 的积分, 所以 $2y(t)$ 会包含 $4\delta(t)$, 而方程右端没有 $4\delta(t)$, 就要求

$\frac{d}{dt}y(t)$ 还应该包含 $-4\delta(t)$ 。

$\frac{d}{dt}y(t)$ 的积分为 $y(t)$ ，由于 $\frac{d}{dt}y(t)$ 中存在 $-4\delta(t)$ ，所以 $y(t)$ 存在跳变，即

$$y(0_+) - y(0_-) = -4, \text{ 可得}$$

$$y(0_+) = y(0_-) - 4 = 1 - 4 = -3$$

根据上面的讨论过程，可以对冲激平衡法的应用过程进行步骤化。由式 (3.3-4) 可知

$\frac{d}{dt}y(t)$ 包含 $2\delta'(t)$ ，在 $t=0$ 时令

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}y(t) = 2\delta'(t) + A\delta(t) \\ y(t) = 2\delta(t) \end{cases} \quad (3.3-5)$$

将式 (3.3-5) 代入式 (3.3-4) 可得 $t=0$ 时刻关于冲激及其导数的方程（忽略非冲激项）为

$$2\delta'(t) + A\delta(t) + 4\delta(t) = 2\delta'(t)$$

解得 $A = -4$ 。即 $\frac{d}{dt}y(t)$ 中有 $-4\delta(t)$ ，利用积分关系可得 $y(0_+) - y(0_-) = -4$ ，所以

$$y(0_+) = y(0_-) - 4 = 1 - 4 = -3。$$

利用冲激平衡法从系统起始状态得到初始状态的基本步骤为：

- (1) 确定方程右端 $\delta(t)$ 的最高阶微分项；
- (2) 确定方程左端 $y(t)$ 的最高阶微分项，在 $t=0$ 时刻构建其相应的冲激函数形式，该形式应该包含 (1) 确定的 $\delta(t)$ 的最高阶微分项以及含待定系数的全部低阶 $\delta(t)$ 项；
- (3) 通过积分依次得到 $t=0$ 时刻 $y(t)$ 各阶微分及 $y(t)$ 的冲激函数形式，并忽略非冲激项；
- (4) 平衡方程两边的 $\delta(t)$ 及其微分项，确定待定系数；
- (5) 利用冲激的性质，即其积分为跳变，通过起始状态计算得到初始状态。

例 3.3-8 LTI 系统微分方程为 $\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 3\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = 2\frac{d}{dt}x(t) + x(t)$ ，激励为

$x(t) = \delta(t) + \varepsilon(t)$ ，起始状态为 $y(0_-) = 0$ ， $y'(0_-) = 1$ ，求该系统的完全响应 $y(t)$ 。

解 首先利用冲激平衡法计算系统的初始状态，然后利用经典法分别计算齐次解和特解来得到完全解，而完全解中的待定系数利用初始状态来确定。

将 $x(t) = \varepsilon(t) + \delta(t)$ 代入微分方程可得

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) + 3 \frac{d}{dt} y(t) + 2y(t) = 2\delta'(t) + 3\delta(t) + \varepsilon(t) \quad (3.3-6)$$

利用冲激平衡法, 在 $t=0$ 时, 令

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} y(t) = 2\delta'(t) + A\delta(t) \\ \frac{d}{dt} y(t) = 2\delta(t) \\ y(t) = 0 \end{cases} \quad (3.3-7)$$

将式 (3.3-7) 代入 (3.3-6) 可得 $t=0$ 有

$$2\delta'(t) + A\delta(t) + 6\delta(t) = 2\delta'(t) + 3\delta(t)$$

平衡方程两边的 $\delta(t)$ 及其微分项, 可得 $A = -3$ 。可见, $\frac{d^2}{dt^2} y(t)$ 包含 $-3\delta(t)$, 可得

$y'(0_+) - y'(0_-) = -3$; $\frac{d}{dt} y(t)$ 包含 $2\delta(t)$, 可得 $y(0_+) - y(0_-) = 2$ 。所以

$$\begin{cases} y'(0_+) = y'(0_-) - 3 = 1 - 3 = -2 \\ y(0_+) = y(0_-) + 2 = 0 + 2 = 2 \end{cases}$$

式 (3.3-6) 对应的特征方程为

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

特征根为 $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, 可得微分方程的齐次解为

$$y_h(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-2t}$$

在 $t > 0$ 时, 式 (3.3-6) 可以简化为

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) + 3 \frac{d}{dt} y(t) + 2y(t) = 1$$

设特解为 $y_p(t) = B$, 代入上式, 可得 $B = \frac{1}{2}$, 所以

$$y_p(t) = \frac{1}{2} \quad t > 0$$

将齐次解和特解相加得到系统的完全响应为

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-2t} + \frac{1}{2} \quad t > 0$$

利用初始状态可得

$$\begin{cases} 2 = y(0_+) = A_1 + A_2 + \frac{1}{2} \\ -2 = y'(0_+) = -A_1 - 2A_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = 1 \\ A_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

所以，系统的完全响应为

$$y(t) = e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2} \quad t > 0$$

也可以表示为

$$y(t) = \left(e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2} \right) \varepsilon(t)$$

3.4 直流电源激励下的一阶动态电路分析

在电阻电路中，描述电路的方程为代数方程，因此任一时刻的响应由该时刻的电源、电路拓扑结构和参数决定，称为即时电路。电容和电感为动态元件，含有动态元件的电路称为动态电路。由于动态元件上的电压和电流是微分或者积分的关系，因此描述电路的方程一般为微分方程。

动态元件是储能元件，当动态电路的状态发生改变时，电路中的能量将发生转换，并从一种稳态转化到另一种稳态，中间经历的过程称为暂态过程。动态电路的时域分析主要是研究这种暂态过程。

含有一个动态元件的电路，可以用一阶微分方程描述，称其为一阶动态电路。需要注意的是，若电路中含有多个动态元件，但这多个动态元件可以等效为一个动态元件，描述该电路的微分方程也是一阶微分方程，因此该电路也是一阶动态电路。

本节介绍直流电源激励下的一阶动态电路的分析，将介绍起始状态到初始状态的转换、零输入响应、零状态响应、完全响应和三要素法等内容。

本节在无冲激电流作用于电容和无冲激电压作用于电感的前提条件下进行电路的分析。

3.4.1 动态电路的换路定则

在电路系统中，将电路中元件参数或者连接方式的改变称为换路，且认为换路是即刻完成的。一般取换路时刻为 $t = 0$ ，称换路前一瞬间 $t = 0_-$ 为系统的起始时刻，该时刻系统的状态为起始状态；称换路后一瞬间 $t = 0_+$ 为系统的初时刻，该时刻系统的状态为初始状态。动态电路求解的是换路后的电路响应，以换路后的电源作为激励，而换路前的电源用于产生起始状态。

由电容的积分 VAR 可知

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) + \frac{1}{C} \int_{0_-}^{0_+} i_C(\tau) d\tau$$

一般情况下，在直流电源激励下的动态电路中， $i_C(t)$ 为有限值，即 $i_C(t)$ 中不含有冲激项，因此，上式中积分项为零，可得

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) \quad (3.4-1)$$

同理，由电感的积分 VAR 可知

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) + \frac{1}{L} \int_{0_-}^{0_+} u_L(\tau) d\tau$$

一般情况下，在直流电源激励下的动态电路中， $u_L(t)$ 为有限值，即 $u_L(t)$ 中不含有冲激项，因此，上式中积分项为零，可得

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) \quad (3.4-2)$$

式 (3.4-1) 和式 (3.4-2) 称为换路定则，换路定则仅适用于 u_C 和 i_L ，而不适用于其他变量，例如 u_R 、 i_R 、 i_C 和 u_L 。其它变量的初始值一般应用以下步骤进行求解：

(1) 求解 $u_C(0_-)$ 和 $i_L(0_-)$ 。

(2) 利用换路定则得到 $u_C(0_+)$ 和 $i_L(0_+)$ ；

(3) 用电压为 $u_C(0_+)$ 的电压源代替电容，用电流为 $i_L(0_+)$ 的电流源代替电感，得到 0_+ 时刻的等效电路，并计算其他变量的初始值。

例 3.4-1 动态电路如图 3.4-1 (a) 所示，开关在 $t=0$ 时从位置“1”拨动到位置“2”，且换路前电路已达稳态。求 u_C 、 i_C 、 u_L 、 i_L 、 u_R 和 i_R 的初始值。

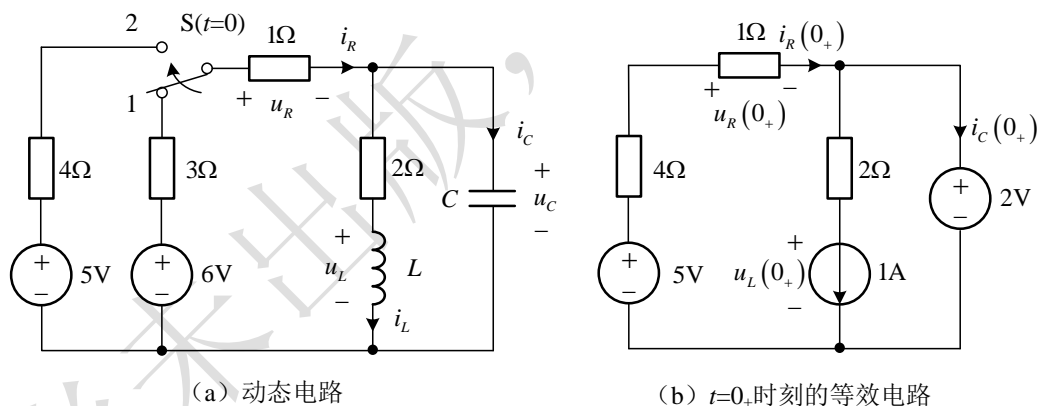


图 3.4-1 例 3.4-1 的图

解 换路前，动态电路在直流电源激励下已达稳态，因此， $t=0_-$ 时电容相当于开路，电感相当于短路，可得

$$u_C(0_-) = \frac{2}{3+1+2} \times 6 = 2\text{V}, \quad i_L(0_-) = \frac{6}{3+1+2} = 1\text{A}$$

利用换路定则可得

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 2\text{V}, \quad i_L(0_+) = i_L(0_-) = 1\text{A}$$

用电压为 $u_C(0_+)$ 的电压源代替电容，用电流为 $i_L(0_+)$ 的电流源代替电感，得到 0_+ 时刻的

等效电路，如图 3.4-1 (b) 所示，可得

$$u_R(0_+) = \frac{1}{4+1} \times (5-2) = \frac{3}{5} \text{ V}$$

$$i_R(0_+) = \frac{u_R(0_+)}{1} = \frac{3}{5} \text{ A}$$

$$i_C(0_+) = i_R(0_+) - 1 = \frac{3}{5} - 1 = -\frac{2}{5} \text{ A}$$

$$u_L(0_+) = 2 - 2 \times 1 = 0$$

例 3.4-2 动态电路如图 3.4-2(a) 所示，开关在 $t=0$ 时打开，换路前电容和电感均未储能，求 u_C 、 i_C 、 u_L 、 i_L 、 u_R 和 i_R 的初始值。

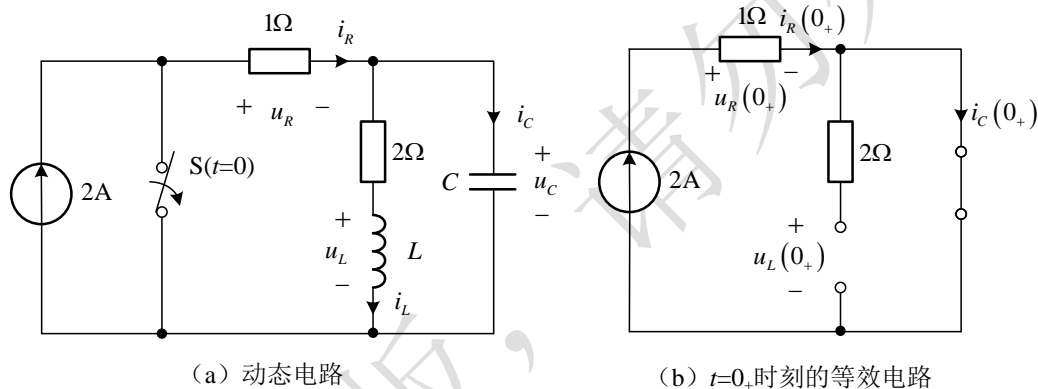


图 3.4-2 例 3.4-2 的图

解 由于换路前电容和电感均为未储能，因此 $t=0_-$ 时刻， $w_C(0_-) = \frac{1}{2} C u_C^2(0_-) = 0 \text{ W}$ ，

$w_L(0_-) = \frac{1}{2} L i_L^2(0_-) = 0 \text{ W}$ ，可得 $u_C(0_-) = 0 \text{ V}$ ， $i_L(0_-) = 0 \text{ A}$ 。利用换路定则可得

$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0 \text{ V}$ ， $i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0 \text{ A}$ ，因此，在 $t=0_+$ 时刻，电容相当于短路，而电感相当于开路，等效电路如图 3.4-2 (b) 所示，可得

$$i_C(0_+) = i_R(0_+) = 2 \text{ A}$$

$$u_R(0_+) = i_R(0_+) \times 1 = 2 \text{ V}$$

$$u_L(0_+) = 0 \text{ V}$$

3.4.2 一阶动态电路的响应

考虑如图 3.4-3 (a) 所示一阶 RC 电路，开关 S 在 $t=0$ 时从位置“1”拨动到位置“2”，换路前电路已达稳态，来计算该电路在 $t>0$ 时的响应 u_C 。换路前电路已达稳态，因此 $u_C(0_-) = U_1$ ，

该电路的微分方程为

$$\begin{cases} R_0 C \frac{d}{dt} u_C + u_C = U_S \\ u_C(0_-) = U_1 \end{cases} \quad (3.4-3)$$

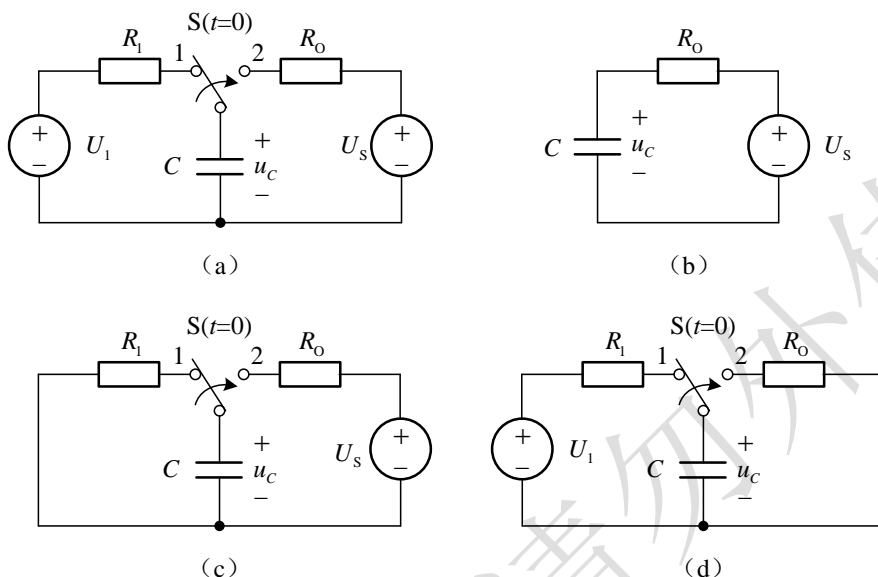


图 3.4-3 一阶动态 RC 电路

根据换路定则可得 $u_C(0_+) = u_C(0_-) = U_1$ 。换路后的电路如图 3.4-4 (b) 所示，因此该电路在 $t > 0$ 时的微分方程为

$$\begin{cases} R_0 C \frac{d}{dt} u_C + u_C = U_S \\ u_C(0_+) = U_1 \end{cases} \quad (3.4-4)$$

该方程齐次解为 $u_{Ch} = Ae^{-\frac{1}{R_0 C}t}$ ，特解为 $u_{Cp} = U_S$ ，可得完全解为 $u_C = \left(Ae^{-\frac{1}{R_0 C}t} + U_S \right) (t > 0)$ ，

利用 $u_C(0_+) = U_1$ 可得 $A = U_1 - U_S$ 。因此，该电路在 $t > 0$ 时的响应 u_C 为

$$u_C = (U_1 - U_S)e^{-\frac{1}{R_0 C}t} + U_S \quad (t > 0) \quad (3.4-5)$$

可见，电路参数对该响应的影响主要包含三部分，分别为 U_1 、 U_S 和 $-\frac{1}{R_0 C}$ ， U_1 实际上是

是 $u_C(0_-)$ ，是 0_- 时刻电容能量的电压表现； U_S 是 $t > 0$ 时的直流激励源； $-\frac{1}{R_0 C}$ 为该 RC 电

路的固有频率，由电路的结构和参数决定。由于 $u_C(0_-) = U_1$ ，重写式 (3.4-5) 为

$$u_C = U_s \left(1 - e^{-\frac{1}{R_0 C} t} \right) + u_C(0_-) e^{-\frac{1}{R_0 C} t} \quad (t > 0) \quad (3.4-6)$$

式 (3.4-6) 为微分方程式 (3.4-4) 的完全解, 也称为图 3.4-3 (a) 所示电路的完全响应 (total response)。可见, $t > 0$ 时该电路的完全响应由两部分组成, 分量 $U_s \left(1 - e^{-\frac{1}{R_0 C} t} \right)$ 是在起始状态为零的条件下 (即动态元件无起始储能), 仅由 $t > 0$ 时的输入所引起的响应, 称为零状态响应 (zero-state response); $u_C(0_-) e^{-\frac{1}{R_0 C} t}$ 是在 $t > 0$ 时输入为零仅由起始状态所引起的响应, 称为零输入响应 (zero-input response)。

输入和起始状态共同作用下的响应称为完全响应, 可见, 零状态响应和零输入响应是特定条件下 (起始状态为零或输入为零) 的响应, 计算图 3.4-3 (a) 所示电路的零状态响应的电路如图 3.4-3 (c) 所示, 即, 令原电路中 $t < 0$ 时的电源为零, 从而使得电路的起始状态为零, 同时保留 $t > 0$ 时电路的输入; 计算图 3.4-3 (a) 所示电路的零输入响应的电路如图 3.4-3 (d) 所示, 即, 令原电路中 $t > 0$ 时的电源为零, 同时保留 $t < 0$ 时的电源, 使得电路具有起始状态。

计算图 3.4-3 (a) 所示电路的零状态响应和零输入响应的微分方程分别为

$$\begin{cases} R_0 C \frac{d}{dt} u_{Czs} + u_{Czs} = U_s \\ u_{Czs}(0_-) = 0 \end{cases} \quad (3.4-7)$$

和

$$\begin{cases} R_0 C \frac{d}{dt} u_{Czi} + u_{Czi} = 0 \\ u_{Czi}(0_-) = U_1 \end{cases} \quad (3.4-8)$$

求解式 (3.4-7) 和式 (3.4-8) 可得零输入响应和零状态响应分别为

$$u_{Czs} = U_s \left(1 - e^{-\frac{1}{R_0 C} t} \right) \quad (t > 0) \quad (3.4-9)$$

和

$$u_{Czi} = u_C(0_-) e^{-\frac{1}{R_0 C} t} \quad (t > 0) \quad (3.4-10)$$

可见, 图 3.4-3 (a) 所示电路的完全响应可以通过计算零状态响应和零输入响应来得到, 即

$$u_C = u_{Czs} + u_{Czi} \quad (t > 0) \quad (3.4-11)$$

假设 $U_s > u_C(0_-) = U_1 > 0$, 电路在 $t > 0$ 时的完全响应、零状态响应和零输入响应曲线分别如图 3.4-4 (a)、(b) 和 (c) 所示。

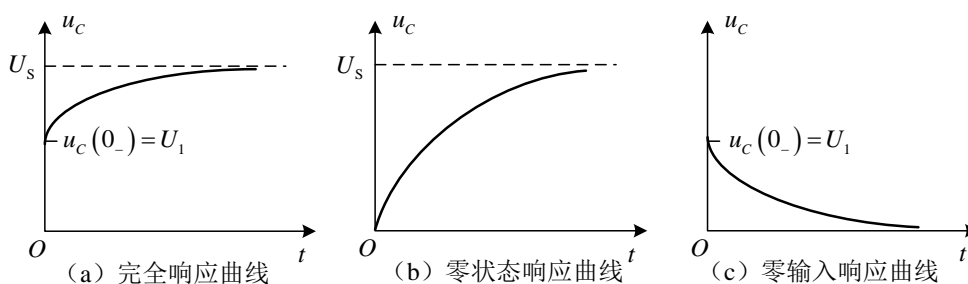


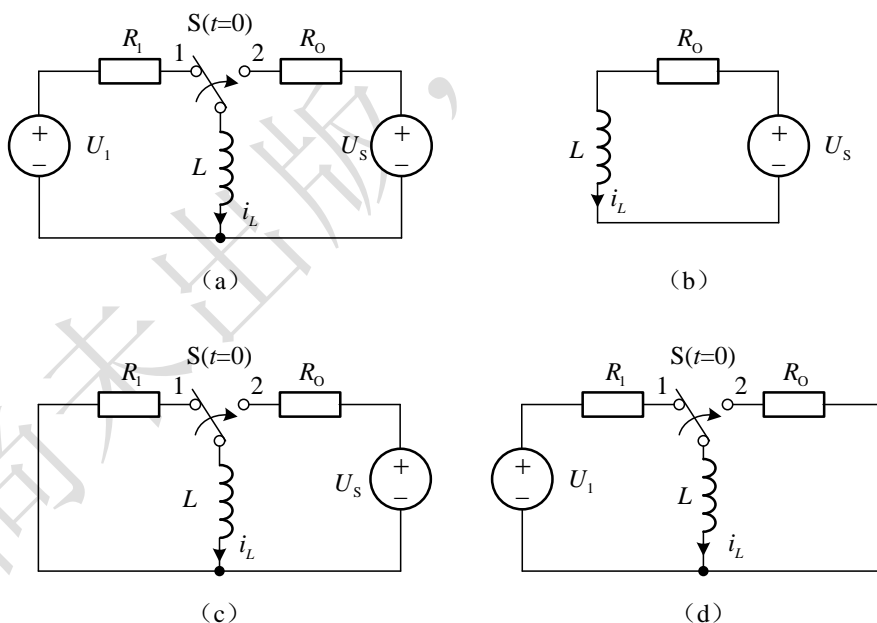
图 3.4-4 响应曲线

可见，三个响应曲线均是从一个稳态过度到另一个稳态，而过度过程符合指数规律。

再来考虑如图 3.4-5 (a) 所示一阶 RL 电路，开关 S 在 $t=0$ 时从位置“1”拨动到位置“2”，换路前电路已达稳态，来计算该电路在 $t>0$ 时的响应 i_L 。换路前电路已达稳态，因此

$i_L(0_-) = \frac{U_1}{R_1}$ ，计算该电路的微分方程为

$$\begin{cases} L \frac{d}{dt} i_L + R_0 i_L = U_s \\ i_L(0_-) = \frac{U_1}{R_1} \end{cases} \quad (3.4-12)$$

图 3.4-5 一阶动态 RL 电路

根据换路定则可得 $i_L(0_+) = i_L(0_-) = \frac{U_1}{R_1}$ 。换路后的电路如图 3.4-5 (b) 所示，因此该电

路在 $t>0$ 时的微分方程为

$$\begin{cases} L \frac{d}{dt} i_L + R_0 i_L = U_s \\ i_L(0_+) = \frac{U_1}{R_1} \end{cases} \quad (3.4-13)$$

该方程齐次解为 $i_{Lh} = Ae^{-\frac{1}{L/R_0}t}$, 特解为 $i_{Lp} = \frac{U_s}{R_0}$, 可得完全解为 $i_L = \left(Ae^{-\frac{1}{L/R_0}t} + \frac{U_s}{R_0} \right) (t > 0)$,

利用 $i_L(0_+) = \frac{U_1}{R_1}$ 可得 $A = \frac{U_1}{R_1} - \frac{U_s}{R_0}$ 。因此, 该电路在 $t > 0$ 时的完全响应 i_L 为

$$i_L = \left(\frac{U_1}{R_1} - \frac{U_s}{R_0} \right) e^{-\frac{1}{L/R_0}t} + \frac{U_s}{R_0} \quad (t > 0) \quad (3.4-14)$$

可见, 电路参数对该完全响应的影响主要包含三部分, 分别为 $\frac{U_1}{R_1}$ 、 $\frac{U_s}{R_0}$ 和 $-\frac{1}{L/R_0}$, $\frac{U_1}{R_1}$

实际上是 $i_L(0_-)$, 是 0_- 时刻电感能量的电流表现; $\frac{U_s}{R_0}$ 是 $t > 0$ 时的直流激励源对电路的作用;

$-\frac{1}{L/R_0}$ 为该 RL 电路的固有频率, 由电路的结构和参数决定。由于 $i_L(0_-) = \frac{U_1}{R_1}$, 重写式 (3.4-

14) 为

$$i_L = \frac{U_s}{R_0} \left(1 - e^{-\frac{1}{L/R_0}t} \right) + i_L(0_-) e^{-\frac{1}{L/R_0}t} \quad (t > 0) \quad (3.4-15)$$

可见, $t > 0$ 时该一阶 RL 电路的完全响应也由两部分组成, 分量 $\frac{U_s}{R_0} \left(1 - e^{-\frac{1}{L/R_0}t} \right)$ 是在起始

状态为零的条件下 (即动态元件无起始储能), 仅由输入所引起的响应, 称为零状态响应;

$i_L(0_-) e^{-\frac{1}{L/R_0}t}$ 是在 $t > 0$ 时输入为零, 仅由起始状态所引起的响应, 称为零输入响应。

计算图 3.4-5 (a) 所示电路的零状态响应的电路如图 3.4-5 (c) 所示, 即, 令原电路中 $t < 0$ 时的电源为零, 从而使得电路的起始状态为零, 同时保留 $t > 0$ 时电路的输入; 计算图 3.4-5 (a) 所示电路的零输入响应的电路如图 3.4-5 (d) 所示, 即, 令原电路中 $t > 0$ 时的电源为零, 同时保留 $t < 0$ 时的电源, 使得电路具有起始状态。

计算图 3.4-5 (a) 所示电路的零状态响应和零输入响应的微分方程分别为

$$\begin{cases} L \frac{d}{dt} i_{Lzs} + R_0 i_{Lzs} = U_s \\ i_{Lzs}(0_-) = 0 \end{cases} \quad (3.4-16)$$

和

$$\begin{cases} L \frac{d}{dt} i_{Lzi} + R_O i_{Lzi} = 0 \\ i_{Lzi}(0_-) = U_1 / R_1 \end{cases} \quad (3.4-17)$$

求解式 (3.4-16) 和式 (3.4-17) 可得零状态响应和零输入响应分别为

$$i_{Lzs} = \frac{U_S}{R_O} \left(1 - e^{-\frac{1}{L/R_O} t} \right) \quad (t > 0) \quad (3.4-18)$$

和

$$i_{Lzi} = i_L(0_-) e^{-\frac{1}{L/R_O} t} \quad (t > 0) \quad (3.4-19)$$

可见, 图 3.4-5 (a) 所示一阶 RL 电路的完全响应可以通过计算零状态响应和零输入响应来得到, 即

$$i_L = i_{Lzs} + i_{Lzi} \quad (t > 0) \quad (3.4-20)$$

因此, 一阶 RC 或 RL 电路均可以通过零状态响应和零输入响应来计算完全响应, 这种方法称为双零法。而且可以发现, 当外加激励增加 k 倍, 零状态响应也增加 k 倍; 而当多个激励电源作用于初始状态为零的电路时可以进行叠加, 这些特性称为零状态响应的线性特性。当起始状态增加 k 倍, 零输入响应也增加 k 倍, 这种特性为零输入响应的线性特性。

3.4.2 三要素法

一阶动态电路中, 动态元件以外的单口网络可以用戴维南等效电路或者诺顿等效电路进行等效, 因此直流电源激励下的一阶动态电路总可以转化为如图 3.4-6 所示四种基本电路。

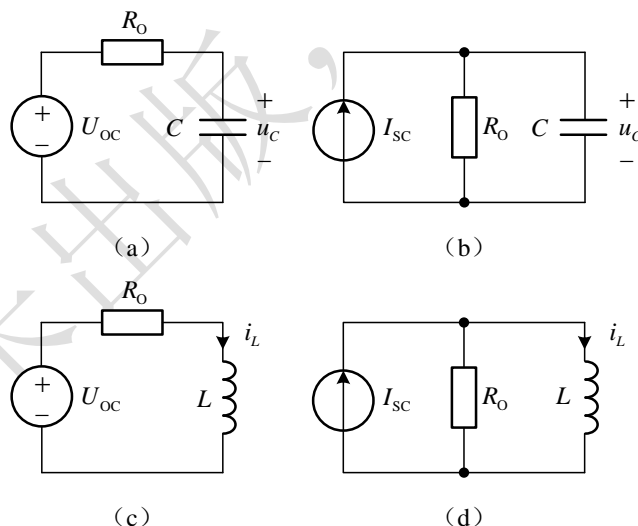


图 3.4-6 直流电源激励下一阶动态电路的四种基本电路

图 3.4-6 (a) 和 (b) 为一阶 RC 串联电路和一阶 RC 并联电路, 描述图 3.4-6 (a) 所示电路的微分方程为

$$\frac{d}{dt} u_C + \frac{1}{R_O C} u_C = \frac{1}{R_O C} U_{oc}$$

描述 3.4-6 (b) 所示电路的微分方程为

$$\frac{d}{dt} u_C + \frac{1}{R_O C} u_C = \frac{1}{C} I_{sc}$$

图 3.4-6 (c) 和 (d) 为一阶 RL 串联电路和一阶 RL 并联电路, 描述图 3.4-6 (c) 所示电路的微分方程为

$$\frac{d}{dt}i_L + \frac{1}{L/R_0}i_L = \frac{1}{L}U_{oc}$$

描述 3.4-6 (d) 所示电路的微分方程为

$$\frac{d}{dt}i_L + \frac{1}{L/R_0}i_L = \frac{R_0}{L}I_{sc}$$

可见, 一阶动态电路微分方程的基本结构一致。对于直流电源激励下的一阶动态电路, 常采用三要素法计算响应。令时间常数 (单位为秒, s) $\tau=R_0C$ 或则 $\tau=L/R_0$, 则一阶动态电路的微分方程总可以写成

$$\frac{d}{dt}f(t) + \frac{1}{\tau}f(t) = E \quad t > 0 \quad (3.4-21)$$

其中, $f(t)$ 为 u_C 或者 i_L , E 为常数。因此, 解的形式为

$$f(t) = A + Be^{-\frac{t}{\tau}} \quad t > 0 \quad (3.4-22)$$

其中, A 和 B 为待定系数。利用 3.4.1 节的方法可以得到初始值 $f(0_+)$ 。由于为直流电源激励, 在 $t = \infty$ 时系统又达到稳定, 因此容易求得 $f(\infty)$, 称之为终值。将 $f(0_+)$ 和 $f(\infty)$ 代入式 (3.4-22) 可得

$$\begin{cases} f(0_+) = A + B \\ f(\infty) = A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = f(0_+) - f(\infty) \\ A = f(\infty) \end{cases}$$

因此,

$$f(t) = f(\infty) + [f(0_+) - f(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} \quad t > 0 \quad (3.4-23)$$

可见, 完全响应由三个要素确定, 分别为初始值 $f(0_+)$ 、终值 $f(\infty)$ 和时间常数 τ , 因此式 (3.4-23) 称为直流电源激励下一阶动态电路的三要素法公式。由于零状态响应和零输入响应是完全响应的两种特殊情况, 因此, 该公式也可以计算零状态响应和零输入响应。而且三要素法公式不仅可以计算 u_C 和 i_L , 也可以用来计算其它电压和电流。利用三要素法计算电路响应的步骤如下:

(1) 求初始值 $f(0_+)$

求换路前电路的 $u_C(0_-)$ 或则 $i_L(0_-)$, 利用换路定则得到初始值 $u_C(0_+)$ 或则 $i_L(0_+)$; 用电压为 $u_C(0_+)$ 的电压源代替电容, 或者用电流为 $i_L(0_+)$ 的电流源代替电感, 得到 0_+ 时刻的等

效电路，并计算所求变量的初始值。

(2) 求终值 $f(\infty)$

由于为直流电源激励，在 $t = \infty$ 时电路再次达到稳态，此时，电容相当于开路，电感相当于短路，由此可求得所求变量的终值。

(3) 求时间常数 τ

先求出换路后电容或则电感以外的单口网络的等效电阻 R_0 ，再计算时间常数 $\tau = R_0 C$ 或则 $\tau = L / R_0$ 。

(4) 利用三要素法公式 (3.4-23) 可得所求变量响应的表达式。

若换路的时刻由 $t = 0$ 改为 $t = t_0$ ，则三要素法公式相应改为

$$f(t) = f(\infty) + [f(t_{0+}) - f(\infty)] e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} \quad t > t_0 \quad (3.4-24)$$

一阶动态电路其实研究的是电路从一个状态到另一个状态的过度过程，对应于三要素法公式 (3.4-23)，就是从 $f(0_+)$ 到 $f(\infty)$ 的过度过程，而且这个过度过程是符合指数 $Ke^{-\frac{t}{\tau}}$ 规律的，其中 $K = f(0_+) - f(\infty)$ 。可见时间常数 τ 决定了过度过程的快慢， τ 越大，过度越慢， τ 越小，过渡越快，如图 3.4-7 (a) 所示。理论上，只有当 t 趋于 ∞ 时， $Ke^{-\frac{t}{\tau}}$ 才趋于零，过度过程才结束，但实际上，经过 5~6 个 τ ， $Ke^{-\frac{t}{\tau}}$ 已经很小，在工程上就可以仍为过度过程结束。图 3.4-7 (b) 所示为 $Ke^{-\frac{t}{\tau}}$ 关于时间的变化过程，表 3.4-1 所示为 $Ke^{-\frac{t}{\tau}}$ 在不同时刻的值。

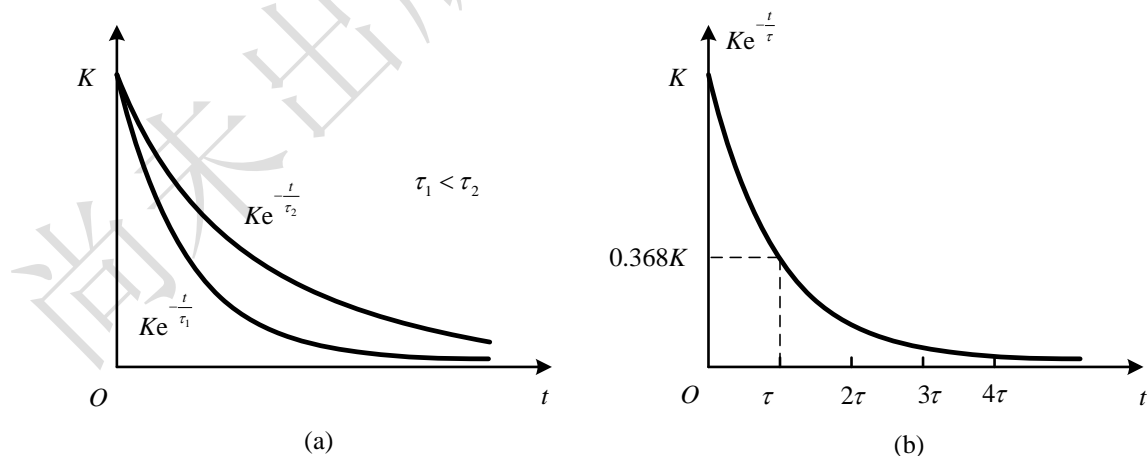


图 3.4-7 过渡过程

表 3.4-1 不同 t 值对应的 $Ke^{-\frac{t}{\tau}}$ 的值

t	0	τ	2τ	3τ	4τ	5τ	6τ
$Ke^{-\frac{t}{\tau}}$	K	$0.368 K$	$0.135 K$	$0.050 K$	$0.018 K$	$0.007 K$	$0.002 K$

例 3.4-3 如图 3.4-8 (a) 所示电路, $t=0$ 时开关打开, 开关打开前电路已达稳态, 计算 $t>0$ 时的 u_C 和 i 。

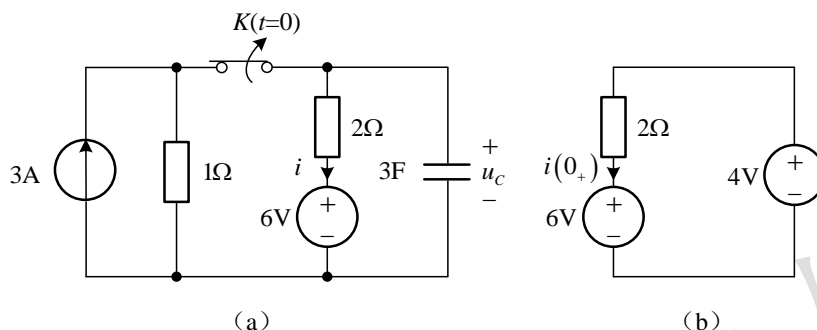


图 3.4-8 例 3.4-3 的图

解 (1) 求初始值

在 $t=0_-$ 时电路已达稳态, 电容相当于开路, 利用叠加原理可得

$$u_C(0_-) = \frac{2}{1+2} \times 3 \times 1 + \frac{1}{2+1} \times 6 = 4\text{V}$$

由换路定则可得 $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 4\text{V}$, 用 4V 的电压源代替电容, 可得 $t=0_+$ 时的电路,

如图 3.4-8 (b) 所示。可得, $i(0_+) = -1\text{A}$ 。

(2) 求终值

换路后, 在 $t=\infty$ 时电路又达稳态, 电容相当于开路, 可得

$$u_C(\infty) = 6\text{V}, \quad i(\infty) = 0$$

(3) 求时间常数

在 $t>0$ 时, 去除电容后的单口网络的等效电阻为 $R_0 = 2\Omega$, 可得时间常数为

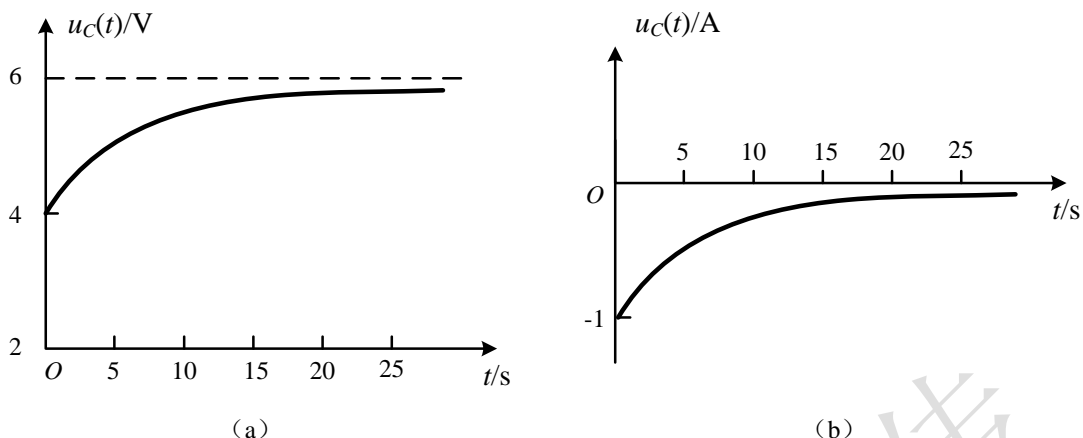
$$\tau = R_0 C = 2 \times 3 = 6\text{s}$$

利用三要素法可得

$$u_C(t) = u_C(\infty) + [u_C(0_+) - u_C(\infty)] e^{-\frac{t}{\tau}} = 6 + (4 - 6) e^{-\frac{t}{6}} = \left(6 - 2e^{-\frac{t}{6}} \right) \text{V} \quad t > 0$$

$$i(t) = i(\infty) + [i(0_+) - i(\infty)] e^{-\frac{t}{\tau}} = 0 + (-1 - 0) e^{-\frac{t}{6}} = -e^{-\frac{t}{6}} \text{A} \quad t > 0$$

$u_C(t)$ 和 $i(t)$ 关于时间变化的曲线分别如图 3.4-9 (a) 和 (b) 所示。

图 3.4-9 $u_C(t)$ 和 $i_C(t)$ 关于时间变化的曲线

通过 3.4.1 节可以发现, 非 u_C 或 i_L 的初始值的求解较为麻烦, 一般也可以利用三要素法仅求解 u_C 或 i_L , 而其他变量利用拓扑约束 (KCL、KVL) 或者元件约束 (VAR) 来进行求解, 从而避免构建 0_+ 时刻的电路并求解非 u_C 或 i_L 的初始值。本例中的 $i(t)$ 也可以通过 $u_C(t)$ 来计算。

$$i(t) = \frac{u_C(t) - 6}{2} = \frac{6 - 2e^{-\frac{t}{6}} - 6}{2} = -e^{-\frac{t}{6}} \quad t > 0$$

例 3.4-4 如图 3.4-10 (a) 所示电路, 开关在 $t=0$ 时闭合, 开关闭合前电路已达稳态, 求 $t>0$ 时的 i_L 和 u 。

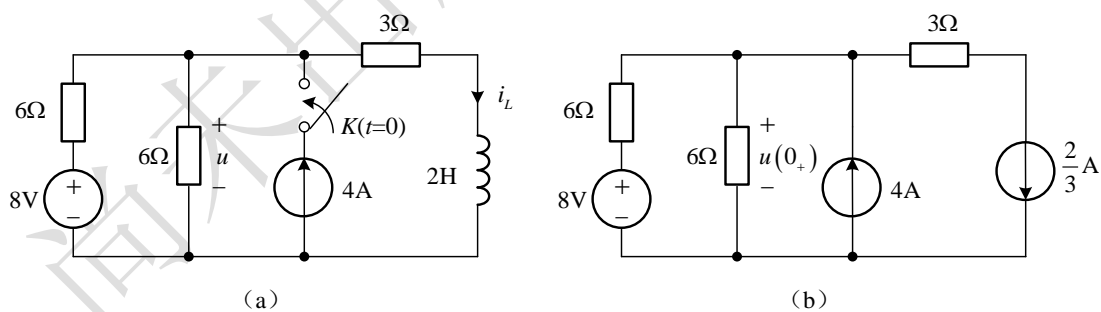


图 3.4-10 例 3.4-4 的图

解 (1) 求初始值

在 $t=0_-$ 时电路已达稳态, 电感相当于短路, 可得

$$i_L(0_-) = \frac{\frac{6//3}{6+6//3} \times 8}{3} = \frac{2}{3} \text{ A}$$

由换路定则可得 $i_L(0_+) = i_L(0_-) = \frac{2}{3} \text{ A}$, 用 $\frac{2}{3} \text{ A}$ 的电流源代替电感, 可得 $t=0_+$ 时的电路,

如图 3.4-9 (10) 所示。利用叠加原理可得

$$u(0_+) = \frac{6}{6+6} \times 8 + (6//6) \times 4 - (6//6) \times \frac{2}{3} = 14\text{V}$$

(2) 求终值

换路后, 在 $t = \infty$ 时电路又达稳态, 电感相当于短路, 利用叠加原理可得

$$i_L(\infty) = \frac{\frac{6//3}{3} \times 8}{\frac{6+6//3}{3}} + \frac{6//6}{6//6+3} \times 4 = \frac{2}{3} + 2 = \frac{8}{3}\text{A}$$

$$u(\infty) = \frac{6//3}{6+6//3} \times 8 + \frac{3}{6//6+3} \times 4 \times (6//6) = 2 + 6 = 8\text{V}$$

(3) 求时间常数

在 $t > 0$ 时, 去除电感后的单口网络的等效电阻为 $R_0 = 6//6+3=6\Omega$, 可得时间常数为

$$\tau = L/R_0 = 2/6 = \frac{1}{3}\text{s}$$

利用三要素公式可得

$$i_L(t) = i_L(\infty) + [i_L(0_+) - i_L(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{8}{3} + \left(\frac{2}{3} - \frac{8}{3}\right)e^{-3t} = \left(\frac{8}{3} - 2e^{-3t}\right)\text{A} \quad t > 0$$

$$u(t) = u(\infty) + [u(0_+) - u(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} = 8 + (14 - 8)e^{-3t} = (8 + 6e^{-3t})\text{V} \quad t > 0$$

$i_L(t)$ 和 $u(t)$ 关于时间变化的曲线如图 3.4-11 所示。

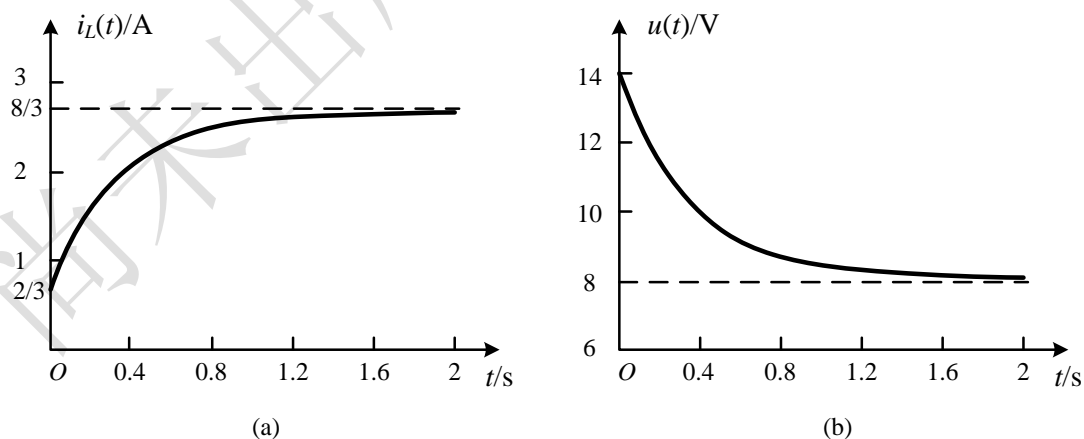


图 3.4-11 $i_L(t)$ 和 $u(t)$ 关于时间变化的曲线

本例中的 $u(t)$ 也可以通过 $i_L(t)$ 来计算, $u(t)$ 为 3Ω 电阻和电感上电压的总和, 即

$$u(t) = 3i_L(t) + 2\frac{d}{dt}i_L(t) = 3 \times \left(\frac{8}{3} - 2e^{-3t}\right) + 2\frac{d}{dt}\left(\frac{8}{3} - 2e^{-3t}\right) = (8 + 6e^{-3t})\text{V} \quad t > 0$$

例 3.4-5 如图 3.4-12 (a) 所示电路中, 电压源 $u_s(t)$ 如图 3.4-12 (b) 所示, 计算 $t>0$ 时的

u_C 。

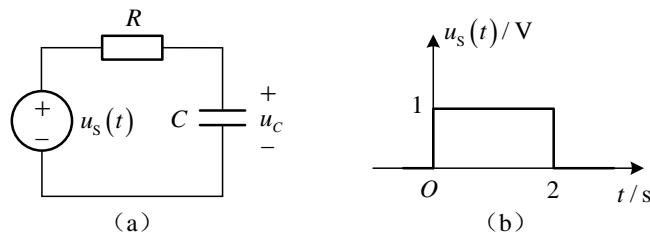


图 3.4-12 例 3.4-5 的图

解 先假设 $u_s(t) = \varepsilon(t)$, 即假设 $t>0$ 时电压源一直为 1V, $t<0$ 时电压源为 0, 这其实是零状态响应。可见, $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$ 、 $u_C(\infty) = 1\text{V}$ 和 $\tau = RC$, 利用三要素法公式可得 $u_C(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)\text{V} \quad (t>0)$ 。因此, 图 3.4-12 (b) 所示电压源激励下, 在 $0 < t < 2$ 时间段的响应为

$$u_C(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)\text{V} \quad (0 < t < 2)$$

实际上, 电路在 $t = 2$ 时又进行换路。可得 $u_C(2_+) = u_C(2_-) = \left(1 - e^{-\frac{2}{RC}}\right)\text{V}$, 实际的终值为 $u_C(\infty) = 0$, 利用三要素法可得

$$u_C(t) = \left(1 - e^{-\frac{2}{RC}}\right)e^{-\frac{t-2}{RC}}\text{V} \quad (t>2)$$

因此, 原电路的响应为

$$u_C(t) = \begin{cases} \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)\text{V} & (0 < t < 2) \\ \left(1 - e^{-\frac{2}{RC}}\right)e^{-\frac{t-2}{RC}}\text{V} & (t > 2) \end{cases}$$

也可以写成

$$u_C(t) = \left\{ \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) [\varepsilon(t) - \varepsilon(t-2)] + \left(1 - e^{-\frac{2}{RC}}\right) e^{-\frac{t-2}{RC}} \varepsilon(t-2) \right\} \text{V} \quad (3.4-25)$$

该电路在 t 为 0 到 2s 的时间段在给电容充电, 而在 $t>2$ 时电容在放电, 图 3.4-13 所示为输入电压 $u_s(t)$ 和输出电压 $u_C(t)$ 的曲线。由于 $\tau = RC$ 不同, 输出电压 $u_C(t)$ 的曲线将不同,

图 3.4-13 给出了 $\tau = RC = 1\text{s}$ 和 $\tau = RC = 2\text{s}$ 时的两种情况下的 $u_C(t)$ 的曲线。可见，时间常数越大，电容的充放电过程越慢，而时间常数越小，电容的充放电过程越快。

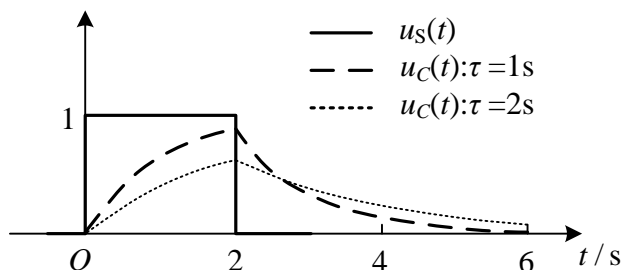


图 3.4-13 不同时间常数下的 $u_C(t)$

事实上，动态电路系统为时不变系统，图 3.4-12 (b) 所示电压源 $u_s(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t-2)$ ，

已知 $u_s(t) = \varepsilon(t)$ 时，电路的零状态响应为 $u_C(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \text{V} \quad (t > 0)$ ，即

$u_C(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \varepsilon(t) \text{V}$ ，利用时不变特性，可得当 $u_s(t) = \varepsilon(t-2)$ 时，电路的零状态响应

为 $u_C(t) = \left(1 - e^{-\frac{t-2}{RC}}\right) \varepsilon(t-2) \text{V}$ 。利用动态电路的线性特性可得，当 $u_s(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t-2)$

时，电路的响应为

$$u_C(t) = \left\{ \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \varepsilon(t) - \left(1 - e^{-\frac{t-2}{RC}}\right) \varepsilon(t-2) \right\} \text{V} \quad (3.4-26)$$

比较式 (3.4-25) 和式 (3.4-26)，两者一致。

3.5 LTI 连续时间系统的零输入响应和零状态响应

一般的 LTI 连续时间系统，完全响应 $y(t)$ 也可以通过计算零输入响应与零状态响应的和来得到，即

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t) \quad (3.5-1)$$

当 LTI 连续时间系统具有多个起始状态和多个激励时，其零输入响应、零状态响应和完全响应一般具有以下特性：

- (1) 零输入响应线性时不变特性，即零输入响应与各起始状态呈线性时不变关系；
- (2) 零状态响应线性时不变特性，即零状态响应与各激励呈线性时不变关系；
- (3) 完全响应等于零输入响应和零状态响应之和，但与各起始状态和各激励不满足线性和时不变关系。

含起始状态的 n 阶 LTI 连续时间系统可以用常系数线性微分方程描述为

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{l=0}^m b_l \frac{d^l}{dt^l} x(t) \quad (n \geq m) \quad (3.5-2)$$

及起始状态 $y^{(i)}(0_-)$ ($i=0,1,\dots,n-1$)。

因果信号激励下的完全响应可以分解为零输入响应和零状态响应并分别求解，求解零输入响应的微分方程为

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k}{dt^k} y_{zi}(t) = 0 \\ y_{zi}^{(i)}(0_-) = y^{(i)}(0_-) \quad (i=0,1,\dots,n-1) \end{cases} \quad (3.5-3)$$

求解零状态响应的微分方程为

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k}{dt^k} y_{zs}(t) = \sum_{l=0}^m b_l \frac{d^l}{dt^l} x(t) \\ y_{zs}^{(i)}(0_-) = 0 \quad (i=0,1,\dots,n-1) \end{cases} \quad (3.5-4)$$

例 3.5-1 LTI 系统微分方程为 $\frac{d^2}{dt^2} y(t) + 5 \frac{d}{dt} y(t) + 4y(t) = \frac{d}{dt} x(t) + 2x(t)$,

$y(0_-) = 2$, $y'(0_-) = 1$, 求该系统在下列不同激励下的完全响应 $y(t)$ 。

(1) $x(t) = \varepsilon(t)$

(2) $x(t) = e^{-3t} \varepsilon(t)$

(3) $x(t) = 5\varepsilon(t) - 3e^{-3t} \varepsilon(t)$

(4) $x(t) = 4\varepsilon(t) + 2e^{-3(t-1)} \varepsilon(t-1)$

解 系统起始状态不变，所以在不同因果信号激励下，系统的零输入响应不变。求解该系统零输入响应的微分方程为

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} y_{zi}(t) + 5 \frac{d}{dt} y_{zi}(t) + 4y_{zi}(t) = 0 \\ y_{zi}(0_-) = 2, y'_{zi}(0_-) = 1 \end{cases}$$

可见, $\frac{d^2}{dt^2} y_{zi}(t)$ 和 $\frac{d}{dt} y_{zi}(t)$ 均不含有冲激, 可得

$$\begin{cases} y_{zi}(0_+) = y_{zi}(0_-) = 2 \\ y'_{zi}(0_+) = y'_{zi}(0_-) = 1 \end{cases}$$

特征方程为 $\lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0$, 因此, 特征根为 $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -4$ 。由于方程右端为零, 因此方程完全解中仅有齐次解, 没有特解, 即

$$y_{zi}(t) = (A_1 e^{-t} + B_1 e^{-4t}) \varepsilon(t)$$

代入初始状态, 可得

$$\begin{cases} y_{zi}(0_+) = A_1 + B_1 = 2 \\ y'_{zi}(0_+) = -A_1 - 4B_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = 3 \\ B_1 = -1 \end{cases}$$

因此，该系统的零输入响应为

$$y_{zi}(t) = (3e^{-t} - e^{-4t})\varepsilon(t)$$

求解该系统零状态响应的微分方程为

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} y_{zs}(t) + 5 \frac{d}{dt} y_{zs}(t) + 4 y_{zs}(t) = \frac{d}{dt} x(t) + 2x(t) \\ y_{zs}(0_-) = 0, y'_{zs}(0_-) = 0 \end{cases}$$

(1) 将 $x(t) = \varepsilon(t)$ 代入该系统的零状态响应微分方程

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} y_{zs1}(t) + 5 \frac{d}{dt} y_{zs1}(t) + 4 y_{zs1}(t) = \delta(t) + 2\varepsilon(t) \\ y_{zs1}(0_-) = 0, y'_{zs1}(0_-) = 0 \end{cases}$$

利用冲激平衡法可知 $\frac{d^2}{dt^2} y_{zs1}(t)$ 包含 $\delta(t)$ ，而 $\frac{d}{dt} y_{zs1}(t)$ 和 $y_{zs1}(t)$ 中均不包含冲激，所以

以初始状态为

$$\begin{cases} y_{zs1}(0_+) = y_{zs1}(0_-) = 0 \\ y'_{zs1}(0_+) = y'_{zs1}(0_-) + 1 = 1 \end{cases}$$

在 $t > 0$ 时，微分方程可以简化为

$$\frac{d^2}{dt^2} y_{zs1}(t) + 5 \frac{d}{dt} y_{zs1}(t) + 4 y_{zs1}(t) = 2$$

其完全解形式为

$$y_{zs1}(t) = \left(\frac{1}{2} + A_2 e^{-t} + B_2 e^{-4t} \right) \varepsilon(t)$$

代入初始状态，可得

$$\begin{cases} y_{zs1}(0_+) = \frac{1}{2} + A_2 + B_2 = 0 \\ y'_{zs1}(0_+) = -A_2 - 4B_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_2 = -\frac{1}{3} \\ B_2 = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

所以， $x(t) = \varepsilon(t)$ 时系统的零状态响应为

$$y_{zs1}(t) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} e^{-t} - \frac{1}{6} e^{-4t} \right) \varepsilon(t)$$

此时，完全响应为

$$\begin{aligned}
y_1(t) &= y_{zi}(t) + y_{zs1}(t) \\
&= (3e^{-t} - e^{-4t})\varepsilon(t) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{-4t}\right)\varepsilon(t) \\
&= \left(\frac{1}{2} + \frac{8}{3}e^{-t} - \frac{7}{6}e^{-4t}\right)\varepsilon(t)
\end{aligned}$$

(2) 将 $x(t) = e^{-3t}\varepsilon(t)$ 代入该系统的零状态响应微分方程

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} y_{zs2}(t) + 5\frac{d}{dt} y_{zs2}(t) + 4y_{zs2}(t) = \delta(t) - e^{-3t}\varepsilon(t) \\ y_{zs2}(0_-) = 0, y'_{zs2}(0_-) = 0 \end{cases}$$

利用冲激平衡法可知 $\frac{d^2}{dt^2} y_{zs2}(t)$ 包含 $\delta(t)$ ，而 $\frac{d}{dt} y_{zs2}(t)$ 和 $y_{zs2}(t)$ 中则不包含冲激，所以

以初始状态为

$$\begin{cases} y_{zs2}(0_+) = y_{zs2}(0_-) = 0 \\ y'_{zs2}(0_+) = y'_{zs2}(0_-) + 1 = 1 \end{cases}$$

在 $t > 0$ 时，微分方程可以简化为

$$\frac{d^2}{dt^2} y_{zs2}(t) + 5\frac{d}{dt} y_{zs2}(t) + 4y_{zs2}(t) = -e^{-3t}$$

其完全解形式为

$$y_{zs2}(t) = \left(\frac{1}{2}e^{-3t} + A_3e^{-t} + B_3e^{-4t}\right)\varepsilon(t)$$

代入初始状态，可得

$$\begin{cases} y_{zs2}(0_+) = \frac{1}{2} + A_3 + B_3 = 0 \\ y'_{zs2}(0_+) = -\frac{3}{2} - A_3 - 4B_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_3 = \frac{1}{6} \\ B_3 = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

所以， $x(t) = e^{-4t}u(t)$ 时系统的零状态响应为

$$y_{zs2}(t) = \left(\frac{1}{2}e^{-3t} + \frac{1}{6}e^{-t} - \frac{2}{3}e^{-4t}\right)\varepsilon(t)$$

此时，完全响应为

$$\begin{aligned}
y_2(t) &= y_{zi}(t) + y_{zs2}(t) \\
&= (3e^{-t} - e^{-4t})\varepsilon(t) + \left(\frac{1}{2}e^{-3t} + \frac{1}{6}e^{-t} - \frac{2}{3}e^{-4t}\right)\varepsilon(t) \\
&= \left(\frac{1}{2}e^{-3t} + \frac{19}{6}e^{-t} - \frac{5}{3}e^{-4t}\right)\varepsilon(t)
\end{aligned}$$

(3) 在已知激励为 $x(t) = \varepsilon(t)$ 和 $x(t) = e^{-3t}\varepsilon(t)$ 的零状态响应的情况下, 利用 LTI 系统中零状态响应与激励之间的线性关系, 可得激励信号为 $x(t) = 5\varepsilon(t) - 3e^{-3t}\varepsilon(t)$ 时零状态响应为

$$\begin{aligned}
y_{zs3}(t) &= 5y_{zs1}(t) - 3y_{zs2}(t) \\
&= 5\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{-4t}\right)\varepsilon(t) - 3\left(\frac{1}{2}e^{-3t} + \frac{1}{6}e^{-t} - \frac{2}{3}e^{-4t}\right)\varepsilon(t) \\
&= \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}e^{-3t} - \frac{13}{6}e^{-t} + \frac{7}{6}e^{-4t}\right)\varepsilon(t)
\end{aligned}$$

此时, 完全响应为

$$\begin{aligned}
y_3(t) &= y_{zi}(t) + y_{zs3}(t) \\
&= (3e^{-t} - e^{-4t})\varepsilon(t) + \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}e^{-3t} - \frac{13}{6}e^{-t} + \frac{7}{6}e^{-4t}\right)\varepsilon(t) \\
&= \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}e^{-3t} + \frac{5}{6}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{-4t}\right)\varepsilon(t)
\end{aligned}$$

(4) 利用 LTI 系统中零状态响应与激励之间的线性时不变关系, 可得激励信号为 $x(t) = 4\varepsilon(t) + 2e^{-3(t-1)}\varepsilon(t-1)$ 时零状态响应为

$$\begin{aligned}
y_{zs4}(t) &= 4y_{zs1}(t) + 2y_{zs2}(t-1) \\
&= 4\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{-4t}\right)\varepsilon(t) + 2\left[\frac{1}{2}e^{-3(t-1)} + \frac{1}{6}e^{-(t-1)} - \frac{2}{3}e^{-4(t-1)}\right]\varepsilon(t-1) \\
&= \left(2 - \frac{4}{3}e^{-t} - \frac{2}{3}e^{-4t}\right)\varepsilon(t) + \left[e^{-3(t-1)} + \frac{1}{3}e^{-(t-1)} - \frac{4}{3}e^{-4(t-1)}\right]\varepsilon(t-1)
\end{aligned}$$

此时, 完全响应为

$$\begin{aligned}
y_4(t) &= y_{zi}(t) + y_{zs4}(t) \\
&= (3e^{-t} - e^{-4t})\varepsilon(t) + \left(2 - \frac{4}{3}e^{-t} - \frac{2}{3}e^{-4t}\right)\varepsilon(t) + \left[e^{-3(t-1)} + \frac{1}{3}e^{-(t-1)} - \frac{4}{3}e^{-4(t-1)}\right]\varepsilon(t-1) \\
&= \left(2 + \frac{5}{3}e^{-t} - \frac{5}{3}e^{-4t}\right)\varepsilon(t) + \left[e^{-3(t-1)} + \frac{1}{3}e^{-(t-1)} - \frac{4}{3}e^{-4(t-1)}\right]\varepsilon(t-1)
\end{aligned}$$

3.6 冲激响应和阶跃响应

单位冲激响应是指单位冲激信号激励下系统的零状态响应, 简称冲激响应, 用 $h(t)$ 表示。

冲激响应具有表征系统特性的功能, 常用 $h(t)$ 来表述系统, 如图 3.6-1 所示。

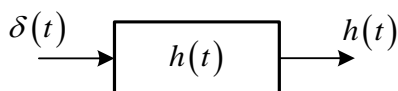


图 3.6-1 连续 LTI 系统的冲激响应

单位阶跃响应是指单位阶跃信号激励下系统的零状态响应，简称阶跃响应，用 $g(t)$ 表示。由于 $\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$ 以及 $\delta(t) = \frac{d}{dt} \varepsilon(t)$ ，对于 LTI 系统，利用其激励和零状态响应的线性和时不变特性，可得

$$\begin{cases} g(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau \\ h(t) = \frac{d}{dt} g(t) \end{cases} \quad (3.6-1)$$

例 3.6-1 LTI 系统微分方程为 $\frac{d^2}{dt^2} y(t) + 5 \frac{d}{dt} y(t) + 4y(t) = \frac{d}{dt} x(t) + 2x(t)$ ，

$y(0_-) = 2$ ， $y'(0_-) = 1$ ，求该系统阶跃响应。

解 方法 1：直接求解 $x(t) = \varepsilon(t)$ 时的零状态响应

将 $x(t) = \varepsilon(t)$ ， $y(t) = g(t)$ 代入系统微分方程，可得计算阶跃响应的方程为

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} g(t) + 5 \frac{d}{dt} g(t) + 4g(t) = \delta(t) + 2\varepsilon(t) \\ g(0_-) = 0, \quad g'(0_-) = 0 \end{cases}$$

利用冲激平衡法可知 $\frac{d^2}{dt^2} g(t)$ 上有 $\delta(t)$ ，而 $\frac{d}{dt} g(t)$ 和 $g(t)$ 中均不含冲激。可得

$$\begin{cases} g(0_+) = g(0_-) = 0 \\ g'(0_+) = g'(0_-) + 1 = 0 + 1 = 1 \end{cases}$$

在 $t > 0$ 时，系统的微分方程为

$$\frac{d^2}{dt^2} g(t) + 5 \frac{d}{dt} g(t) + 4g(t) = 2$$

可得其完全解形式为

$$g(t) = \left(\frac{1}{2} + A_1 e^{-t} + B_1 e^{-4t} \right) \varepsilon(t)$$

利用初始状态可得

$$\begin{cases} g(0_+) = \frac{1}{2} + A_1 + B_1 = 0 \\ g'(0_+) = -A_1 - 4B_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = -\frac{1}{3} \\ B_1 = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

所以，该系统的阶跃响应为

$$g(t) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{-4t} \right) \varepsilon(t)$$

方法 2：利用冲激响应的积分计算

将 $x(t) = \delta(t)$, $y(t) = h(t)$ 代入系统微分方程，可得冲激响应的方程为

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2}h(t) + 5\frac{d}{dt}h(t) + 4h(t) = \delta'(t) + 2\delta(t) \\ h(0_-) = 0, \quad h'(0_-) = 0 \end{cases}$$

利用冲激平衡法可知 $\frac{d^2}{dt^2}h(t)$ 含 $[\delta'(t) - 3\delta(t)]$, $\frac{d}{dt}h(t)$ 含 $\delta(t)$, 而 $h(t)$ 中不含冲激。

可得

$$\begin{cases} h(0_+) = h(0_-) + 1 = 0 + 1 = 1 \\ h'(0_+) = h'(0_-) - 3 = 0 - 3 = -3 \end{cases}$$

在 $t > 0$ 时，微分方程为

$$\frac{d^2}{dt^2}h(t) + 5\frac{d}{dt}h(t) + 4h(t) = 0$$

可得其完全解形式为

$$h(t) = (A_2e^{-t} + B_2e^{-4t})\varepsilon(t)$$

利用初始状态可得

$$\begin{cases} h(0_+) = A_2 + B_2 = 1 \\ h'(0_+) = -A_2 - 4B_2 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_2 = \frac{1}{3} \\ B_2 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

所以，该系统的冲激响应为

$$h(t) = \left(\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{-4t} \right) \varepsilon(t)$$

利用式 (3.6-1) 可得该系统的阶跃响应为

$$\begin{aligned}
 g(t) &= \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^t \left(\frac{1}{3} e^{-\tau} + \frac{2}{3} e^{-4\tau} \right) \varepsilon(\tau) d\tau \\
 &= \int_0^t \left(\frac{1}{3} e^{-\tau} + \frac{2}{3} e^{-4\tau} \right) d\tau \varepsilon(t) \\
 &= \left(-\frac{1}{3} e^{-\tau} \Big|_{\tau=0}^t - \frac{1}{6} e^{-4\tau} \Big|_{\tau=0}^t \right) \varepsilon(t) \\
 &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} e^{-t} - \frac{1}{6} e^{-4t} \right) \varepsilon(t)
 \end{aligned}$$

本例系统同例 3.5-1，本例阶跃响应与例 3.5-1 中阶跃信号激励下的零状态响应一致。

例 3.6-2 计算如图 3.6-2 所示电路的冲激响应，其中 $u_s(t)$ 为输入， $u_c(t)$ 为输出。

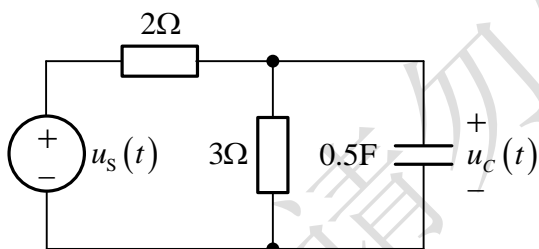


图 3.6-2 例 3.6-2 的图

解 该电路的微分方程为

$$2 \times \left[\frac{u_c(t)}{3} + 0.5 \frac{d}{dt} u_c(t) \right] + u_c(t) = u_s(t)$$

整理可得

$$\frac{d}{dt} u_c(t) + \frac{5}{3} u_c(t) = u_s(t)$$

将 $u_s(t) = \delta(t)$ ， $u_c(t) = h(t)$ 代入系统微分方程，可得冲激响应的方程为

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} h(t) + \frac{5}{3} h(t) = \delta(t) \\ h(0_-) = 0 \end{cases}$$

利用冲激平衡法可知 $\frac{d}{dt} h(t)$ 包含 $\delta(t)$ ，因此 $h(0_+) - h(0_-) = 1$ ，即

$$h(0_+) = h(0_-) + 1 = 0 + 1 = 1$$

在 $t > 0$ 时，微分方程为

$$\frac{d}{dt} h(t) + \frac{5}{3} h(t) = 0$$

其完全解仅含齐次解，为

$$h(t) = Ae^{-\frac{5}{3}t}$$

利用初始条件可得

$$h(0_+) = A = 1$$

因此，该电路的冲激响应为

$$h(t) = e^{-\frac{5}{3}t} \varepsilon(t) \text{ V}$$

在本例题解题过程中，发现电容电压在 $t=0$ 时是不连续的，即不满足换路原则，这是由于电压源包含冲激的原因引起的，3.4.1 节中的换路原则是在直流电源激励的条件下才满足的。

3.7 卷积积分

1. 卷积积分的定义

已知某 LTI 连续时间系统的冲激响应为 $h(t)$ 。由时不变性质可知，在 $\delta(t-\tau)$ 激励下系统的零状态响应为 $h(t-\tau)$ ；由比例性可知，在 $x(\tau)\delta(t-\tau)\Delta\tau$ 激励下系统的零状态响应为 $x(\tau)h(t-\tau)\Delta\tau$ ；由叠加性可知，系统在 $\sum x(\tau)\delta(t-\tau)\Delta\tau$ 激励下的零状态响应为 $\sum x(\tau)h(t-\tau)\Delta\tau$ ；取极限 $\Delta\tau \rightarrow 0$ ，使得求和转化为积分，可得在 $\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$ 激励下系统的零状态响应为 $\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$ 。该过程如表 3.7-1 所示。

表 3.7-1 卷积积分可计算系统的零状态响应的导出过程

序号	激励	LTI 系统	零状态响应
1	$\delta(t)$	$x(t) \xrightarrow{\quad} \boxed{h(t)} \xrightarrow{\quad} y_{zs}(t)$	$h(t)$
2	$\delta(t-\tau)$		$h(t-\tau)$
3	$x(\tau)\delta(t-\tau)\Delta\tau$		$x(\tau)h(t-\tau)\Delta\tau$
4	$\sum x(\tau)\delta(t-\tau)\Delta\tau$		$\sum x(\tau)h(t-\tau)\Delta\tau$
5	$\lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum x(\tau)\delta(t-\tau)\Delta\tau$		$\lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum x(\tau)h(t-\tau)\Delta\tau$
6	$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$		$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$

对于两个连续时间信号 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ ，其卷积积分（简称卷积）的定义为

$$f(t) = f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \quad (3.7-1)$$

其中， $*$ 为卷积运算符号，也可记作 \otimes 。

利用冲激函数的定义与性质可得，激励为 $x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t-\tau) d\tau = x(t)$ 时，系统的零状态响应为 $y_{zs}(t) = x(t) * h(t)$ ，因此，卷积可以计算系统的零状态响应。

对于因果信号激励下的因果系统，即 $x(t) = x(t)\varepsilon(t)$ ， $h(t) = h(t)\varepsilon(t)$ ，则系统的零状态响应为

$$y_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \varepsilon(\tau) h(t-\tau) \varepsilon(t-\tau) d\tau = \left[\int_0^t x(\tau) h(t-\tau) d\tau \right] \varepsilon(t) \quad (3.7-2)$$

2. 卷积积分的性质

卷积的主要性质如表 3.7-2 所示，利用卷积的积分有时可以简化卷积的计算过程。

表 3.7-2 卷积积分的主要性质

序号	性质名称		表达式
1	结合律		$[f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t) = f_1(t) * [f_2(t) * f_3(t)]$
2	交换律		$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$
3	分配律		$f_1(t) * [f_2(t) + f_3(t)] = f_1(t) * f_2(t) + f_1(t) * f_3(t)$
4	与冲激函数的卷积		$f(t) * \delta(t) = f(t)$ $f(t) * \delta(t-t_0) = f(t-t_0)$
5	时移性		若 $f(t) = f_1(t) * f_2(t)$ ， 则 $f(t-t_1-t_2) = f_1(t-t_1) * f_2(t-t_2)$
6	微积分	微分	$[f_1(t) * f_2(t)]' = f_1'(t) * f_2(t) = f_1(t) * f_2'(t)$
		积分	$[f_1(t) * f_2(t)]^{(-1)} = f_1^{(-1)}(t) * f_2(t) = f_1(t) * f_2^{(-1)}(t)$
		微积分	$f_1(t) * f_2(t) = f_1'(t) * f_2^{(-1)}(t) = f_1^{(-1)}(t) * f_2'(t)$

(1) 结合律

由子系统 A 和 B 级联得到的系统如图 3.7-1 (a) 系统，在激励为 $x(t)$ 时，该系统的零状态响应为 $y_{zs}(t) = x(t) * h_1(t) * h_2(t)$ 。由结合律可知 $y_{zs}(t) = x(t) * [h_1(t) * h_2(t)]$ ，因此，冲激响应为 $h_1(t)$ 和 $h_2(t)$ 两个子系统相级联，可以等效为冲激响应为 $h_1(t) * h_2(t)$ 的系统，如图 3.7-1 (b) 所示。

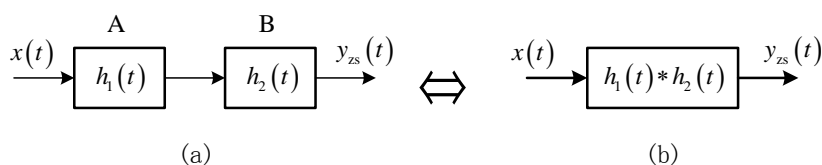


图 3.7-1 卷积结合律的系统意义

(2) 交换律

由子系统 A 和 B 级联得到的系统如图 3.7-2 (a) 系统, 在激励为 $x(t)$ 时, 该系统的零状态响应为 $y_{zs}(t) = x(t) * h_1(t) * h_2(t)$ 。由交换律可知 $y_{zs}(t) = x(t) * h_2(t) * h_1(t)$, 因此, 级联子系统交换前后顺序不影响系统响应, 即图 3.7-2 (a) 和 (b) 相互等效。

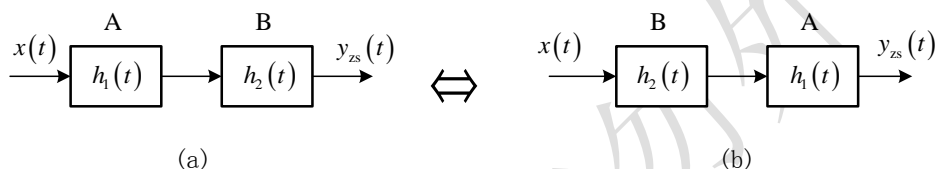


图 3.7-2 卷积交换律的系统意义

(3) 分配律

由子系统 A 和 B 并联得到的系统如图 3.7-3 (a) 系统, 在激励为 $x(t)$ 时, 该系统的零状态响应为 $y_{zs}(t) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$ 。由分配律可知 $y_{zs}(t) = x(t) * [h_1(t) + h_2(t)]$, 因此, 冲激响应为 $h_1(t)$ 和 $h_2(t)$ 两个子系统相并联, 可以等效为冲激响应为 $[h_1(t) + h_2(t)]$ 的系统, 如图 3.7-3 (b) 所示。

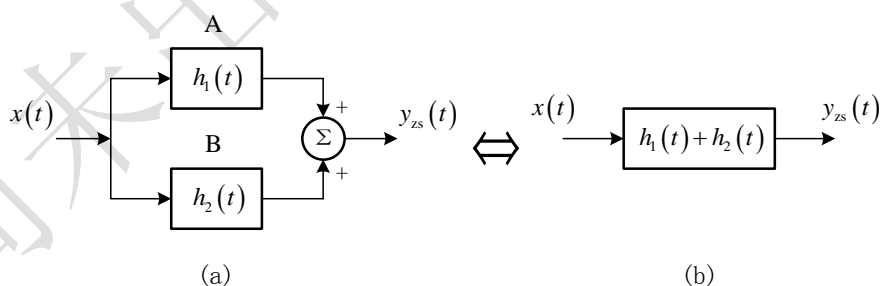


图 3.7-3 卷积结合律的系统意义

(4) 与冲激函数的卷积

$$f(t) * \delta(t) = f(t) \quad (3.7-3)$$

$$f(t) * \delta(t - t_0) = f(t - t_0) \quad (3.7-4)$$

证明

$$\begin{aligned}
f(t) * \delta(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \delta(t-\tau) d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t-\tau) d\tau \\
&= f(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(t) * \delta(t-t_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \delta(t-\tau-t_0) d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-t_0) \delta(t-\tau-t_0) d\tau \\
&= f(t-t_0)
\end{aligned}$$

式 (3.7-3) 表明任意信号与冲激的卷积等于该信号本身, 式 (3.7-4) 表明任意信号与冲激延时的卷积等于该信号的延时。

(5) 时移性

利用卷积的交换律和结合律, 在性质 (4) 的基础上, 可以得到更具一般性的结论: 若

$f(t) = f_1(t) * f_2(t)$, 则有

$$f(t-t_1-t_2) = f_1(t-t_1) * f_2(t-t_2) \quad (3.7-5)$$

(6) 微积分性质

① 卷积的微分性质为

$$[f_1(t) * f_2(t)]' = f_1'(t) * f_2(t) = f_1(t) * f_2'(t) \quad (3.7-6)$$

即, 两个信号卷积的微分等于其中任一信号微分与另一信号的卷积。

证明

$$\begin{aligned}
[f_1(t) * f_2(t)]' &= \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) \frac{d}{dt} f_2(t-\tau) d\tau \\
&= f_1(t) * f_2'(t)
\end{aligned}$$

利用交换律亦可证明 $[f_1(t) * f_2(t)]' = f_1'(t) * f_2(t)$ 。

通过类推, 可得

$$[f_1(t) * f_2(t)]^{(n)} = f_1^{(m)}(t) * f_2^{(n-m)}(t) \quad (n \geq m \geq 0) \quad (3.7-7)$$

结合性质 (4), 可得

$$f(t) * \delta'(t) = f'(t) \quad (3.7-8)$$

② 卷积的积分性质为

$$[f_1(t) * f_2(t)]^{(-1)} = f_1^{(-1)}(t) * f_2(t) = f_1(t) * f_2^{(-1)}(t) \quad (3.7-9)$$

即, 两个信号卷积的积分等于其中任一信号的积分与另一信号的卷积, 该性质成立的充要条件为: $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 均为有始信号。

证明过程类似于卷积的微分性质的证明过程，不再赘述。

由于 $\varepsilon(t) = \delta^{(-1)}(t)$ ，结合性质 (4)，可得

$$f(t) * \varepsilon(t) = f^{(-1)}(t) \quad (3.7-10)$$

③ 结合卷积的微分性质和积分性质可以得到卷积的微积分性质为

$$f_1(t) * f_2(t) = f_1'(t) * f_2^{(-1)}(t) = f_1^{(-1)}(t) * f_2'(t) \quad (3.7-11)$$

该性质成立的充要条件为： $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 均为有始信号。

3. 卷积的计算

卷积可以通过定义式 (3.7-1) 进行计算，计算重点在于确定积分限及相应积分区间的被积函数，需要注意的是：积分过程中 τ 为积分变量，而 t 为参变量（参数），卷积结果仍为 t 的函数。卷积过程中也可以利用卷积的性质，卷积的性质有时可以简化计算过程，尤其是与冲激函数的卷积及卷积的微积分这两个性质。

例 3.7-1 某 LTI 系统冲激响应 $h(t) = \left(\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{-4t}\right)\varepsilon(t)$ ，激励为 $x(t) = \varepsilon(t)$ ，求该系

统的零状态响应。

解 该系统的零状态响应为

$$y_{zs}(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t) = \left[\left(\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{-4t}\right)\varepsilon(t)\right] * \varepsilon(t)$$

(1) 利用定义式求解

$$\begin{aligned} y_{zs}(t) &= \left[\left(\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{-4t}\right)\varepsilon(t)\right] * \varepsilon(t) = \int_0^t \left(\frac{1}{3}e^{-\tau} + \frac{2}{3}e^{-4\tau}\right)\varepsilon(\tau)\varepsilon(t-\tau)d\tau \\ &= \int_0^t \left(\frac{1}{3}e^{-\tau} + \frac{2}{3}e^{-4\tau}\right)d\tau \cdot \varepsilon(t) \\ &= \left(-\frac{1}{3}e^{-\tau} \Big|_{\tau=0}^t - \frac{1}{6}e^{-4\tau} \Big|_{\tau=0}^t\right)\varepsilon(t) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{-4t}\right)\varepsilon(t) \end{aligned}$$

(2) 利用性质求解

$$\begin{aligned} y_{zs}(t) &= \left[\left(\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{-4t}\right)\varepsilon(t)\right] * \varepsilon(t) = \left[\left(\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{-4t}\right)\varepsilon(t)\right]^{(-1)} * \delta(t) \\ &= \int_{-\infty}^t \left(\frac{1}{3}e^{-\tau} + \frac{2}{3}e^{-4\tau}\right)\varepsilon(\tau)d\tau = \int_0^t \left(\frac{1}{3}e^{-\tau} + \frac{2}{3}e^{-4\tau}\right)d\tau \cdot \varepsilon(t) \\ &= \left(-\frac{1}{3}e^{-\tau} \Big|_{\tau=0}^t - \frac{1}{6}e^{-4\tau} \Big|_{\tau=0}^t\right)\varepsilon(t) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{-4t}\right)\varepsilon(t) \end{aligned}$$

在例 3.6-1 中, 已求得例 3.5-1 的冲激响应为 $h(t) = \left(\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{-4t} \right) \varepsilon(t)$, 因此本例计算的是例 3.5-1 系统在阶跃信号激励下的零状态响应, 本例结果与例 3.5-1 计算结果一致。

例 3.7-2 已知 $f(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t-2)$, 求 $f(t) * f(t)$ 。

解 $f_1(t) = \varepsilon(t) * \varepsilon(t) = \varepsilon^{(-1)}(t) * \delta(t) = t\varepsilon(t)$

$$\begin{aligned} f(t) * f(t) &= [\varepsilon(t) - \varepsilon(t-2)] * [\varepsilon(t) - \varepsilon(t-2)] \\ &= \varepsilon(t) * \varepsilon(t) - 2\varepsilon(t) * \varepsilon(t-2) + \varepsilon(t-2) * \varepsilon(t-2) \\ &= f_1(t) - 2f_1(t-2) + f_1(t-4) \\ &= t\varepsilon(t) - 2(t-2)\varepsilon(t-2) + (t-4)\varepsilon(t-4) \end{aligned}$$

例 3.7-3 求例 3.6-2 所示电路在 $u_s(t) = e^{-2t}\varepsilon(t)$ V 时的零状态响应。

解 已在例 3.6-2 中求得该电路的冲激响应为

$$h(t) = e^{-\frac{5}{3}t}\varepsilon(t) \text{ V}$$

因此, 该电路在 $u_s(t) = e^{-2t}\varepsilon(t)$ V 时的零状态响应为

$$\begin{aligned} u_{Czs}(t) &= u_s(t) * h(t) = e^{-2t}\varepsilon(t) * e^{-\frac{5}{3}t}\varepsilon(t) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\tau}\varepsilon(\tau) \cdot e^{-\frac{5}{3}(t-\tau)}\varepsilon(t-\tau) d\tau \\ &= e^{-\frac{5}{3}t} \int_0^t e^{-\frac{1}{3}\tau} d\tau \varepsilon(t) = -3e^{-\frac{5}{3}t} e^{-\frac{1}{3}\tau} \Big|_{\tau=0}^t \varepsilon(t) \\ &= -3e^{-\frac{5}{3}t} \left(e^{-\frac{1}{3}t} - 1 \right) \varepsilon(t) = 3 \left(e^{-\frac{5}{3}t} - e^{-2t} \right) \varepsilon(t) \text{ V} \end{aligned}$$

习题 3

3-1 判断下列系统是否线性。其中 $x(t)$ 为系统输入， $y(0_-)$ 为系统的起始状态， $y(t)$ 为系统在 $t > 0$ 时的响应。

$$(1) \quad y(t) = e^{-t} y(0_-) + tx(t)$$

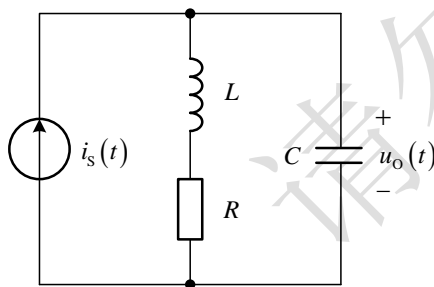
$$(2) \quad y(t) = 2y(0_-) + e^{x(t)}$$

3-2 判断下列系统是否时不变。

$$(1) \quad y(t) = x(t-2)$$

$$(2) \quad y(t) = x(2t) + 2$$

3-3 题图 3-3 所示电路中，输入为 $i_s(t)$ ，输出为 $u_o(t)$ ，列写该系统的微分方程。



题图 3-3

3-4 求下列微分方程的齐次解形式和特解。

$$(1) \quad \frac{d}{dt} y(t) + 2y(t) = 2 + \sin(2t) \quad (2) \quad \frac{d^2}{dt^2} y(t) + 9 \frac{d}{dt} y(t) + 14y(t) = e^{-4t} \varepsilon(t)$$

$$(3) \quad \frac{d^2}{dt^2} y(t) + 2 \frac{d}{dt} y(t) + y(t) = \varepsilon(t) \quad (4) \quad \frac{d^2}{dt^2} y(t) + 6 \frac{d}{dt} y(t) + 5y(t) = t\varepsilon(t)$$

3-5 LTI 连续时间系统的微分方程为 $\frac{d^2}{dt^2} y(t) + 5 \frac{d}{dt} y(t) + 2y(t) = 3 \frac{d}{dt} x(t) + x(t)$ ，系统的起始状态为 $y'(0_-) = 2$ ， $y(0_-) = 3$ ，求该系统在下列激励下的初始状态。

$$(1) \quad x(t) = \varepsilon(t)$$

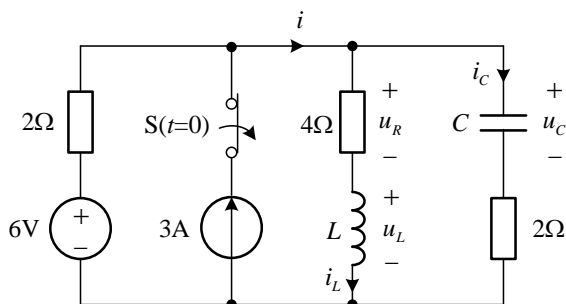
$$(2) \quad x(t) = e^{-2t} \varepsilon(t)$$

$$(3) \quad x(t) = \delta(t)$$

3-6 LTI 连续时间系统微分方程为 $\frac{d^2}{dt^2} y(t) + 3 \frac{d}{dt} y(t) + 2y(t) = \frac{d}{dt} x(t) + 4x(t)$ ，激励

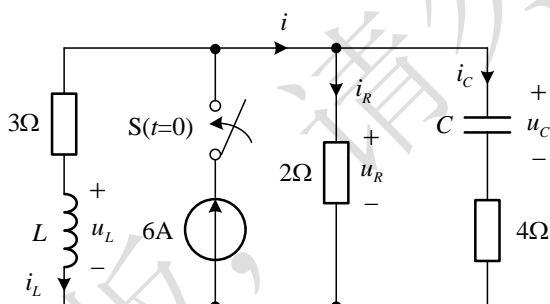
为 $x(t) = e^{-3t} \varepsilon(t)$ ，起始状态为 $y(0_-) = 1$ ， $y'(0_-) = 2$ ，求该系统的完全响应 $y(t)$ ，并判断其中的自由响应和强迫响应。

3-7 动态电路如题图 3-7 所示, 开关在 $t=0$ 时打开, 且换路前电路已达稳态。求 u_C 、 i_C 、 u_L 、 i_L 、 u_R 和 i 的初始值。



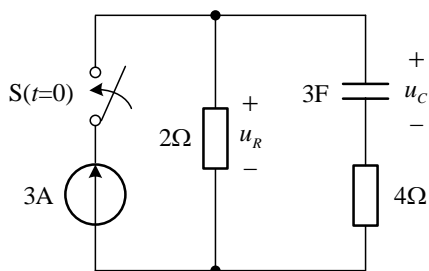
题图 3-7

3-8 动态电路如题图 3-8 所示, 开关在 $t=0$ 时闭合, 换路前电容和电感均未储能, 求 u_C 、 i_C 、 u_L 、 i_L 、 u_R 、 i_R 和 i 的初始值。



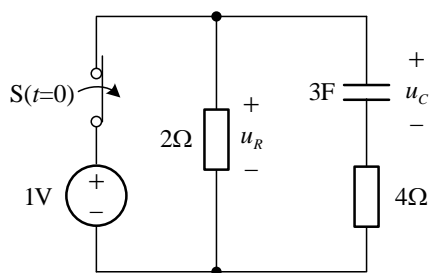
题图 3-8

3-9 动态电路如题图 3-9 所示, 开关在 $t=0$ 时闭合, 换路前电路已达稳态, 利用三要素法求 $t>0$ 时的 $u_C(t)$ 和 $u_R(t)$ 。



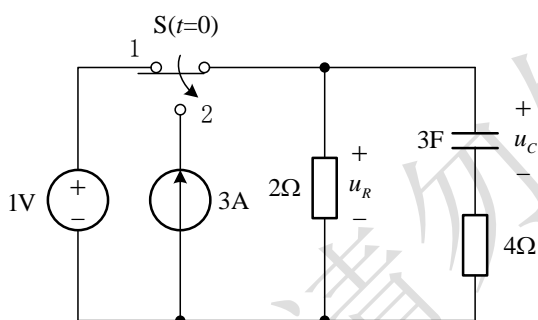
题图 3-9

3-10 动态电路如题图 3-10 所示, 开关在 $t=0$ 时打开, 换路前电路已达稳态, 利用三要素法求 $t>0$ 时的 $u_C(t)$ 和 $u_R(t)$ 。



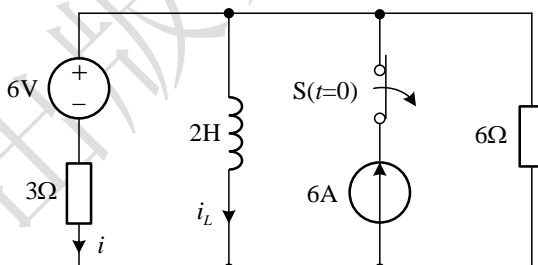
题图 3-10

3-11 动态电路如题图 3-11 所示，开关在 $t=0$ 时从位置 1 拨动到位置 2，换路前电路已达稳态，利用三要素法求 $t>0$ 时的 $u_C(t)$ 和 $u_R(t)$ 。



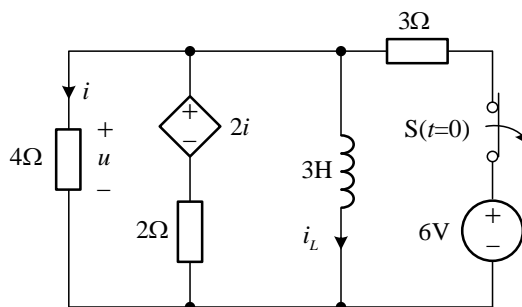
题图 3-11

3-12 动态电路如题图 3-12 所示，开关在 $t=0$ 时打开，换路前电路已达稳态，利用三要素法求 $t>0$ 时的 $i_L(t)$ 和 $i(t)$ 。



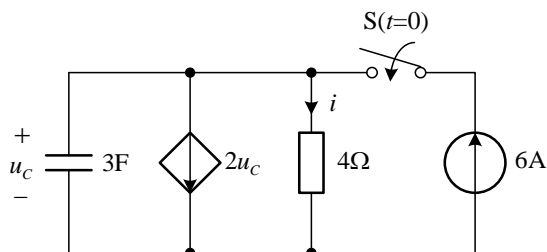
题图 12

3-13 题图 3-13 所示动态电路，开关在 $t=0$ 时打开，换路前电路已达稳态，利用三要素法求 $t>0$ 时的 $i_L(t)$ 和 $u(t)$ 。



题图 13

3-14 题图 3-14 所示动态电路，开关在 $t=0$ 时闭合，换路前电路已达稳态，利用三要素法求 $t>0$ 时的 $u_C(t)$ 和 $i(t)$ 。



题图 14

3-15 LTI 连续时间系统微分方程为 $\frac{d^2}{dt^2} y(t) + 3 \frac{d}{dt} y(t) + 2y(t) = 2 \frac{d}{dt} x(t) + x(t)$,

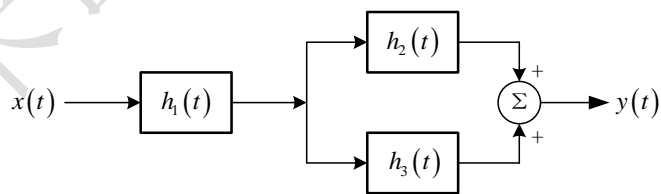
$y(0_-) = 3$, $y'(0_-) = 0$, 求该系统在下面不同激励下的完全响应 $y(t)$, 并判断其中的瞬态响应和稳态响应。

- (1) $x(t) = \varepsilon(t)$ (2) $x(t) = e^{-4t} \varepsilon(t)$ (3) $x(t) = 4\varepsilon(t-2) - 2e^{-4t} \varepsilon(t)$

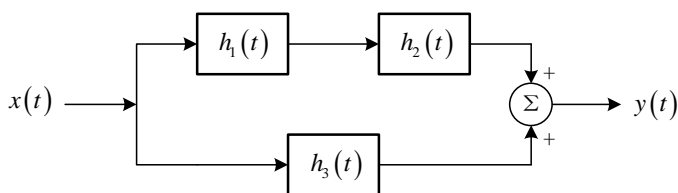
3-16 求下列系统的冲击响应和阶跃响应。

- (1) $\frac{d}{dt} y(t) + 2y(t) = x(t)$
- (2) $\frac{d^2}{dt^2} y(t) + 4 \frac{d}{dt} y(t) + 4y(t) = \frac{d}{dt} x(t)$

3-17 求下列系统的冲击函数表达式。



(a)



(b)

题图 3-17

3-18 用定义式计算下列卷积

$$(1) \varepsilon(t) * \varepsilon(t) \quad (2) e^{-2t} \varepsilon(t) * e^{-3t} \varepsilon(t) \quad (3) \sin(2t) \varepsilon(t) * e^{-t} \varepsilon(t)$$

3-19 利用卷积的性质计算下列卷积。

$$(1) \varepsilon(t) * \varepsilon(t) \quad (2) e^{-2t} \varepsilon(t) * \varepsilon(t)$$

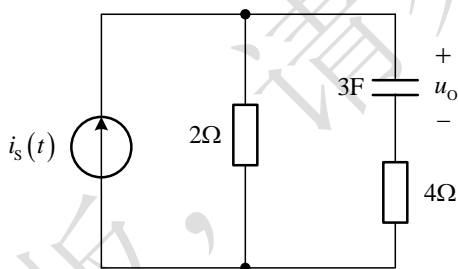
$$(3) e^{-2t} \varepsilon(t) * [2\varepsilon(t) - \varepsilon(t-2)] \quad (4) [e^{-2t} \varepsilon(t) * \varepsilon(t)]'$$

3-20 已知 LTI 连续时间系统在激励为 $x(t) = t\varepsilon(t)$ 时，系统的零状态响应为

$$y_{zs}(t) = (4t - 2 + 2e^{-2t})\varepsilon(t), \text{ 求该系统的冲激响应 } h(t)。$$

3-21 动态电路如题图 3-21 所示，动态元件无起始储能。

- (1) 列写该电路的微分方程；
- (2) 求该电路的冲激响应；
- (3) 激励电流为 $i_s(t) = e^{-3t}\varepsilon(t)$ 时，该电路的响应。



题图 3-21