杭州电子科技大学学生考试卷（A）卷

考试课程	线性代数	考试日期	2017年1月 日	成绩	
课程号	A0714030	教师号		任课教师姓名	
考生姓名		学号（8位）		年级		专业	

题号	一	二	三	四	五	六
得分						

注意：所有答案全部书写在试卷上，答案写在其他地方视为无效！本课程考试试卷总共4大张，最后两张纸作为草稿纸使用，不得使用其余形式的草稿纸，不得使用计算器等计算工具，否则视为作弊！

得分	

一、填空题（请将答案填写在横线上，本题总共六小题，每题3分，总共18分）

1、二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_1x_2+x_2^2+3x_3^2$ 的正惯性指数为__2__；

2、设向量组 $\alpha_1=(1,a,1)^T$，$\alpha_2=(2,-1,2)^T$，$\alpha_3=(0,1,2)^T$ 线性相关，则 a __$=-\frac{1}{2}$__；

3、设 A 为3阶方阵，且 $|A|=3$，则 $\left||A|A^T\right|=$__81__；

4、设 $A=\begin{pmatrix}-2&0&0\\2&a&2\\3&1&1\end{pmatrix}$ 和 $B=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$ 相似，则 $a=$__0__；

5、设3阶方阵 A 的特征值为1，-1，2，则 $|3A|=$__-54__；

6、设 A 是 4×3 矩阵，$R(A)=2$，且 $B=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&2&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$，则 $R(AB)=$__2__。

得分	

二、选择题（请将正确答案填写在括号中，在字母前勾选所得结果视为无效。本题共六小题，每题3分，共18分）

1、设 A 与 B 都是 n 阶非零矩阵，且 $AB=0$，则（ B ）；

（A）$R(A)=0$　（B）$R(A)<n$　（C）$R(A)=n$　（D）$R(B)=0$

2、设 $\lambda=2$ 是可逆阵 A 的一个特征值，则矩阵 $(\frac{1}{3}A^2)^{-1}$ 有一个特征值等于（ A ）；

（A）$\frac{3}{4}$　（B）$\frac{4}{3}$　（C）$\frac{1}{2}$　（D）$\frac{1}{4}$

3、矩阵 $\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}$ 相似于矩阵（ C ）；

（A）$\begin{pmatrix}-1&0\\0&-2\end{pmatrix}$　（B）$\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}$　（C）$\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$　（D）$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$

4、设 A 是正交阵，则下列矩阵中不是正交阵的是（ D ）；

（A）A^{-1}　（B）A^T　（C）A^3　（D）$3A$

5、在向量组 $\alpha_1=(1,0,0,0)^T$，$\alpha_2=(1,2,0,0)^T$，$\alpha_3=(1,2,-8,4)^T$ 上添加向量 $\alpha_4=$（ B ）可使 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 构成 R^4 的一组基；

（A）$\alpha_4=(1,3,-2,1)^T$　（B）$\alpha_4=(0,0,1,1)^T$

（C）$\alpha_4=(0,2,2,-1)^T$　（D）$\alpha_4=(1,-1,-4,2)^T$

6、如果 n 元非齐次线性方程组 $AX=b$ 的系数矩阵 A 的秩小于 n，则（ D ）。

（A）方程组有无穷多解　（B）方程组有唯一解

（C）方程组无解　（D）不能断定解的情况

得分	

三、试求解下列各题（本题共四小题，每题5分，共20分）

1. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$

$= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \end{vmatrix}$ 2'

$= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -14 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \end{vmatrix}$

$= -\begin{vmatrix} -14 & -3 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}$

$= 57$ 3'

2. 设 $\alpha_1=(1,-1,2,4)^T$，$\alpha_2=(0,3,1,2)^T$，$\alpha_3=(3,0,7,14)^T$，$\alpha_4=(1,-1,2,0)^T$，求向量组的秩和一个极大线性无关组。

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 7 & 2 \\ 4 & 2 & 14 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 3'

秩为3 1'

极大线性无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 1'

3. 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+tx_2^2+tx_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3$ 正定，求 t 的取值范围。

$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & t & 0 \\ -2 & 0 & t \end{pmatrix}$ 1'

$\Delta_1 = 2 > 0$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & t \end{vmatrix} = 2t-4>0 \quad \therefore t>2$ 1'

$\Delta_3 = |A| = 2t^2-8t>0 \quad \therefore t>4$ 或 $t<0$ 2'

故 $t>4$. 1'

4. 已知 R^3 中的两组基：$\alpha_1=(1,0,1)^T$，$\alpha_2=(1,1,0)^T$，$\alpha_3=(0,1,1)^T$ 与 $\beta_1=(1,0,3)^T$，$\beta_2=(2,2,2)^T$，$\beta_3=(-1,1,4)^T$，求第一组基到第二组基的过渡矩阵。

$[\alpha_1\alpha_2\alpha_3]P=[\beta_1\beta_2\beta_3]$ 2'

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 0 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$

$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$ 2'

故 $P=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 1'

$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

得分	

四、试求解下列各题（本题共四小题，每题 6 分，共 24 分）

1．设 $\alpha_1=(1,0,2,3)^T$，$\alpha_2=(1,1,3,5)^T$，$\alpha_3=(1,-1,a+2,1)^T$，$\alpha_4=(1,2,4,a+8)^T$，$\beta=(1,1,b+3,5)^T$，当 a,b 取何值时，β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表示，且表示法唯一；

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & 4 & b+3 \\ 3 & 5 & 1 & a+8 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a & 2 & b+1 \\ 0 & 2 & -2 & a+5 & 2 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & a+1 & 0 \end{array}\right)$$

$a+1\neq 0$

b 任意

2'

4'

2．设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & c & 2 \end{pmatrix}$ 可相似对角化，求 a,c；

$\lambda_{1,2}=1$，$\lambda_{3,4}=2$ 2'

$\lambda_{1,2}=1$ 时 $A-E=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & c & 1 \end{pmatrix}$

秩 $=2$

故 $a=0$

2'

$\lambda_{3,4}=2$ 时 $A-2E=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ a & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & c & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

秩 $=2$ 故 $c=0$

2'

3．已知线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+\lambda x_3=-2 \\ x_1+\lambda x_2+x_3=-2 \\ \lambda x_1+x_2+x_3=\lambda-3 \end{cases}$，当 λ 取何值时，方程组有无数解，试用导出组的基础解系表示通解。

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & -2 \\ 1 & \lambda & 1 & -2 \\ \lambda & 1 & 1 & \lambda-3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & -2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 3\lambda-3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & -2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda-\lambda^2 & 3\lambda-3 \end{array}\right)$$

$\lambda=1$ 时 无数解 3'

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

还原 $x_1+x_2+x_3=-2$

特解 $\eta=[-2,0,0]^T$，

导出组基础解系 $\xi_1=[-1,1,0]^T$，$\xi_2=[-1,0,1]^T$

故 $X=\eta+k_1\xi_1+k_2\xi_2$

3'

4．已知 $\xi=(1,1,-1)^T$ 是矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix}$ 的一个特征向量，确定参数 a、b 及特征向量 ξ 所对应的特征值。

设 λ 是 ξ 所对应的特征值

$(A-\lambda E)\xi=0$，即

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & a-\lambda & 3 \\ -1 & b & -2-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}=0$$

3'

即 $\begin{cases} 2-\lambda-1-2=0 \\ 5+a-\lambda-3=0 \\ -1+b+2+\lambda=0 \end{cases}$

解得 $\lambda=-1$，$a=-3$，$b=0$

3'

得分	

五、（10分）用正交线性替换化实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_1x_2+x_2^2+6x_1x_3+6x_3^2+6x_2x_3$ 为标准形，并写出正交线性替换。

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\\3&3&6\end{pmatrix}$$ 1'

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-3\\-2&\lambda-1&-3\\-3&-3&\lambda-6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda+1&-\lambda-1&0\\-2&\lambda-1&-3\\-3&-3&\lambda-6\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+1)\begin{vmatrix}1&-1&0\\-2&\lambda-1&-3\\-3&-3&\lambda-6\end{vmatrix}=(\lambda+1)\begin{vmatrix}1&0&0\\-2&\lambda-3&-3\\-3&-6&\lambda-6\end{vmatrix}$$

$=(\lambda+1)\lambda(\lambda-9)$ $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=0,\ \lambda_3=9$ 3'

$\lambda_1=-1$时 $-E-A=\begin{pmatrix}-2&-2&-3\\-2&-2&-3\\-3&-3&-7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ $\xi_1=[1,-1,0]^T$

$\eta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^T$ 1'

$\lambda_2=0$时 $-A=\begin{pmatrix}-1&-2&-3\\-2&-1&-3\\-3&-3&-6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ $\xi_2=[1,1,-1]^T$

$\eta_2=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)^T$ 1'

$\lambda_3=9$时 $9E-A=\begin{pmatrix}8&-2&-3\\-2&8&-3\\-3&-3&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&2&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$ $\xi_3=[1,1,2]^T$

$\eta_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2)^T$ 1'

$Q=[\eta_1\ \eta_2\ \eta_3]$，$X=QY$ 2'

$f=-y_1^2+9y_3^2$ 1'

得分	

六、证明题（本题共两小题，每小题5分，共10分）

1、若 A、B 均为 n 阶方阵，且 $A=\frac{1}{2}(B+E)$，证明：$A^2=A$ 当且仅当 $B^2=E$；

$A^2=\frac{1}{4}(B^2+2B+E)$ 1'

$A^2=A\Rightarrow\frac{1}{4}(B^2+2B+E)=\frac{1}{2}(B+E)$

$\Rightarrow B^2=E$ 2'

$B^2=E\Rightarrow A^2=\frac{1}{4}(E+2B+E)=\frac{1}{2}(B+E)$

$\Rightarrow A^2=A$ 2'

2、设 A,B 为两个 n 阶方阵，A 的 n 个特征值两两互异，若 A 的特征向量总是 B 的特征向量，试证明：$AB=BA$。

A可对角化，设A的n个线性无关特征向量 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$，令 $P=(\xi_1\ \xi_2\cdots\xi_n)$

则 $P^{-1}AP=\Lambda_1$（对角阵） 2'

易知B可对角化，且 $P^{-1}BP=\Lambda_2$（对角阵）

于是 $A=P\Lambda_1P^{-1}$，$B=P\Lambda_2P^{-1}$

$AB=P\Lambda_1\Lambda_2P^{-1}$，$BA=P\Lambda_2\Lambda_1P^{-1}$，而 $\Lambda_1\Lambda_2=\Lambda$

故 $AB=BA$ 2'