第三章 LTI系统的时域分析

3.1 系统的定义与分类

3.2 动态电路系统的微分方程描述

3.3 LTI连续时间系统的经典法分析

3.4 直流电源激励下的一阶动态电路分析

3.5 LTI连续时间系统的零输入响应和零状态响应

3.6 冲激响应和阶跃响应

3.7 卷积积分

3.1 系统的定义与分类

系统是由若干相互作用和相互依赖的事物组成的具有特定功能的整体

$x(t)$ 表示系统的输入（激励），

$y(t)$ 表示系统的输出（响应）

1.连续时间系统和离散时间系统

2.线性系统与非线性系统

3.时变系统和时不变系统

4.线性时不变系统

5.因果与非因果系统

6.稳定系统与不稳定系统

7.可逆系统与不可逆系统

8.记忆与无记忆系统

3.1 系统的定义与分类

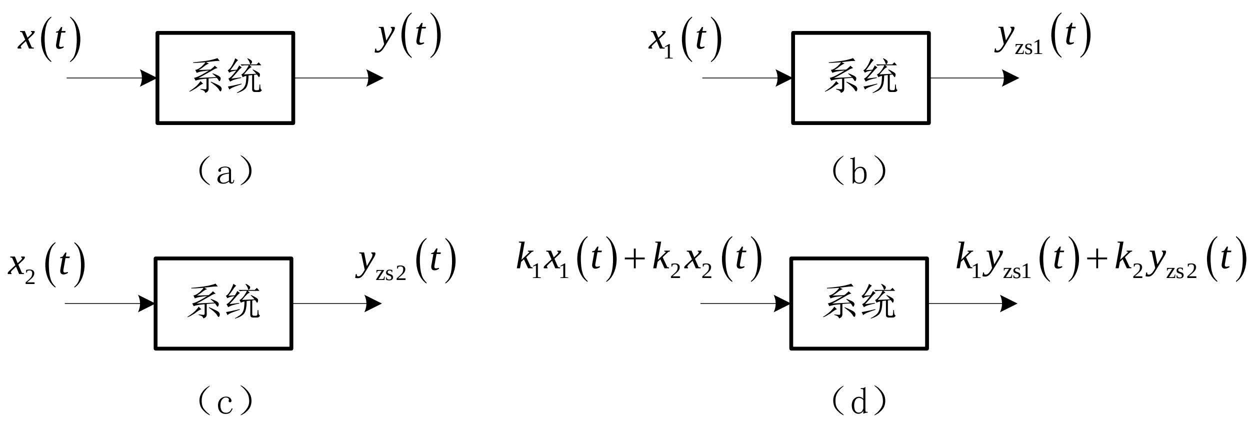
1.连续时间系统和离散时间系统

若系统处理的信号为连续时间信号，该系统称为连续时间系统；若系统处理的信号为离散时间信号，该系统为离散时间系统。若系统由若干子系统构成，有的子系统处理连续时间信号，而有的子系统处理离散时间信号，则该系统称为混合系统

3.1 系统的定义与分类

2.线性系统与非线性系统

满足线性特性的系统称为线性系统；不满足线性特性的系统称为非线性系统。线性包含齐次性和叠加性。



2.线性系统与非线性系统

一个系统的输出不仅与输入有关，还与系统的起始状态有关。因此，线性系统不仅要求零状态响应线性，还要求零输入响应线性，零输入响应是指输入为零，仅由系统起始状态所引起的响应，一般用 $y_{zi}(t)$ 表示。

零输入响应线性是指零输入响应与系统起始状态呈线性关系

零状态响应是指系统起始状态为零，仅由输入所引起的响应 $y_{zs}(t)$

一个线性系统必须满足以下条件：

（1）可分解性：

系统完全响应=零状态响应+零输入响应；

（2）零状态响应线性：

起始状态为零时，输出与输入呈线性关系；

（3）零输入响应线性：

输入为零时，输出与系统起始状态呈线性关系。

例3.1-1 判断下列系统是线性系统还是非线性系统。其中 $x(t)$ 为系统输入，$y(0_-)$ 为系统的起始状态，$y(t)$ 为系统在 $t>0$ 时的响应。

（1） $y(t)=y(0_-)x(t)$　　　　（2） $y(t)=y(0_-)+3x(t)$

（3） $y(t)=y(0_-)+2x^2(t)$

解（1）该系统不满足可分解性，因此该系统不满足线性，为非线性系统

（2）该系统满足分解性，可得 $y_{zs}(t)=3x(t)$　$y_{zi}(t)=y(0_-)$

3.1 系统的定义与分类

例3.1-1 判断下列系统是线性系统还是非线性系统。其中 $x(t)$ 为系统输入，$y(0_-)$ 为系统的起始状态，$y(t)$ 为系统在 $t>0$ 时的响应。

（1） $y(t)=y(0_-)x(t)$ （2） $y(t)=y(0_-)+3x(t)$

（3） $y(t)=y(0_-)+2x^2(t)$

解（2）该系统满足分解性，可得 $y_{zs}(t)=3x(t)$ $y_{zi}(t)=y(0_-)$

设 $x_1(t)\to y_{zs1}(t)=3x_1(t)$ $x_2(t)\to y_{zs2}(t)=3x_2(t)$

$$k_1x_1(t)+k_2x_2(t)$$
$$\to 3\left[k_1x_1(t)+k_2x_2(t)\right]=3k_1x_1(t)+3k_2x_2(t)=k_1y_{zs1}(t)+k_2y_{zs2}(t)$$

可见，该系统满足零状态响应线性，同理，该系统满足零输入响应线性，因此该系统为线性系统。

例3.1-1 判断下列系统是线性系统还是非线性系统。其中 $x(t)$ 为系统输入，$y(0_-)$ 为系统的起始状态，$y(t)$ 为系统在 $t>0$ 时的响应。

（1） $y(t)=y(0_-)x(t)$　　（2） $y(t)=y(0_-)+3x(t)$

（3） $y(t)=y(0_-)+2x^2(t)$

解（2）该系统满足分解性，可得 $y_{zs}(t)=2x^2(t)$　$y_{zi}(t)=y(0_-)$

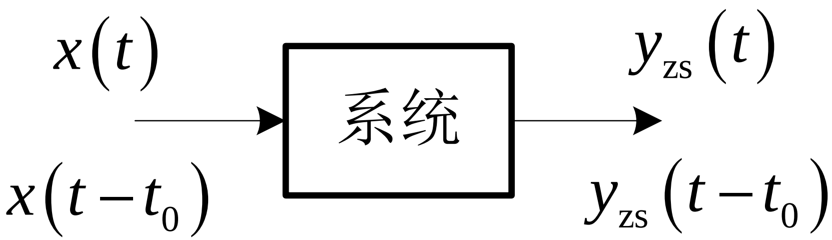
设 $x_1(t)\rightarrow y_{zs1}(t)=2x_1^2(t)$　$x_2(t)\rightarrow y_{zs2}(t)=2x_2^2(t)$

$$k_1x_1(t)+k_2x_2(t)\rightarrow 2\left[k_1x_1(t)+k_2x_2(t)\right]^2\neq k_1y_{zs1}(t)+k_2y_{zs2}(t)$$

可见，该系统不满足零状态响应线性，因此该系统为非线性系统。

3.时变系统和时不变系统

若系统的输入延时，系统的零状态响应也相应延时，则称该系统为时不变系统，否则称之为时变系统



例3.1-2 判断下列系统是时变系统还是时不变系统。

（1）$y(t)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)$ （2） $y(t)=tx(t)$ （3）$y(t)=2x^2(t)$

解（1）设 $x(t)\to y_{\mathrm{zs}}(t)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)$

$$x(t-t_0)\to\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t-t_0)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(t-t_0)}x(t-t_0)=y_{\mathrm{zs}}(t-t_0)$$

该系统为时不变系统

例3.1-2 判断下列系统是时变系统还是时不变系统。

（1）$y(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)$ （2） $y(t)=tx(t)$ （3）$y(t)=2x^2(t)$

解（2）设 $x(t)\rightarrow y_{\mathrm{zs}}(t)=tx(t)$

$$x(t-t_0)\rightarrow tx(t-t_0)\neq y_{\mathrm{zs}}(t-t_0)$$

该系统为时变系统

例3.1-2 判断下列系统是时变系统还是时不变系统。

（1）$y(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)$ （2） $y(t)=tx(t)$ （3）$y(t)=2x^2(t)$

解（3）设 $x(t)\rightarrow y_{\mathrm{zs}}(t)=2x^2(t)$

$$x(t-t_0)\rightarrow 2x^2(t-t_0)=y_{\mathrm{zs}}(t-t_0)$$

该系统为时不变系统

4．线性时不变系统

既满足线性又满足时不变特性的系统称为线性时不变系统（LTI系统）。LTI连续时间系统具有微分和积分性质，

若 $x(t) \to y_{zs}(t)$，则有

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t) \to \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y_{zs}(t) \\ \int_{-\infty}^{t} x(t)\,\mathrm{d}\tau \to \int_{-\infty}^{t} y_{zs}(t)\,\mathrm{d}\tau \end{cases}$$

5.因果与非因果系统

输出仅与当前和以前的输入有关的系统称为因果系统，否则称为非因果系统。因此，在输入加入之前，因果系统是没有输出的。

例　$y(t)=x(t-2)$ 为因果系统

$y(t)=x(t+2)$ 为非因果系统

6.稳定系统与不稳定系统

有界输入产生有界输出的系统，称为稳定系统；

有界输入产生无界输出的系统称为不稳定系统。

例　$y(t)=\tan\left[x(t)\right]$，在输入 $x(t)$=π/2，输出为无穷大，

该系统为不稳定系统。

7．可逆系统与不可逆系统

在不同输入的作用下产生不同的输出的系统称为可逆系统，否则，称为不可逆系统。可逆系统存在对应的逆系统，信号在依次通过可逆系统和其对应的逆系统后，可以恢复回原来的信号。

例 $y(t)=x(2t)$ 与 $y(t)=x(t/2)$ 互为逆系统

8.记忆与无记忆系统

输出仅与当前时刻的输入有关的系统，称为无记忆系统。

输出不仅与当前输入有关，还与过去的输入有关的系统，称为记忆系统。

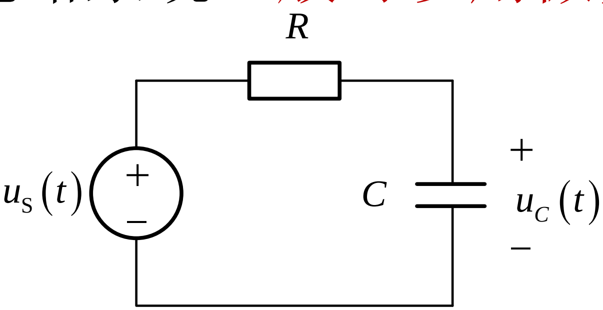
例，纯电阻电路为无记忆系统，

而含有电容或者电感的系统为记忆系统。

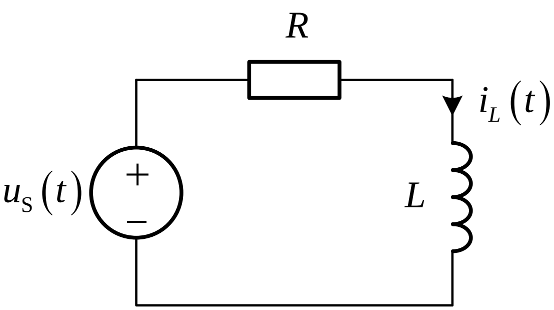
3.2 动态电路系统的微分方程描述

伏安关系用微分或者积分表示的元件为动态元件，例如电容和电感。含有动态元件的电路系统称为动态电路系统，因此动态电路系统一般可以用微分方程的形式来描述。

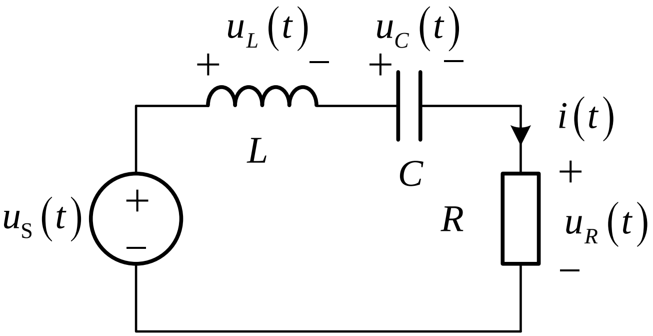
（可介绍下算子p）



$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_C(t)+\frac{1}{RC}u_C(t)=\frac{1}{RC}u_S(t)$$



$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i_L(t)+\frac{R}{L}i_L(t)=\frac{1}{L}u_S(t)$$



$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}u_R(t)+\frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_R(t)+\frac{1}{LC}u_R(t)=\frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_S(t)$$

3.2 动态电路系统的微分方程描述

一般情况下，含有n个独立的动态元件的动态电路系统可以用n阶常系数微分方程来描述

$$
\begin{aligned}
& a_n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} y(t) + a_{n-1} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}t^{n-1}} y(t) + \cdots + a_1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y(t) + a_0 y(t) \\
& = b_m \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m} x(t) + b_{m-1} \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}t^{m-1}} x(t) + \cdots + b_1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t) + b_0 x(t)
\end{aligned}
$$

3.3 LTI连续时间系统的经典法分析

经典法
- 齐次解
- 特解

双零法
- 零输入响应
- 零状态响应

3.3.1 齐次解、特解和完全解

1. 齐次解的计算

齐次方程

$$a_n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} y(t) + a_{n-1} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}t^{n-1}} y(t) + \cdots + a_1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y(t) + a_0 y(t) = 0$$

特征方程

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

其根称为特征根

表3.3-1 特征根对应的齐次方程解的形式

特征根λ	对应的齐次方程解的形式
实数单根（λ）	$Ae^{\lambda t}$
K 重实数根（λ为 K 重根）	$e^{\lambda t}\left(A_0 + A_1 t + \cdots + A_{K-1} t^{K-1}\right)$
一对共轭复数根 $\left(\lambda_{1,2} = \sigma \pm j\omega\right)$	$e^{\sigma t}\left[A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right]$ 或 $Ce^{\sigma t}\cos(\omega t + \varphi)$， 其中，$C = \sqrt{A^2 + B^2}$，$\tan\varphi = -B/A$
K 重共轭复数根（$\sigma \pm j\omega$为 K 重根）	$e^{\sigma t}\sum_{i=0}^{K-1}\left[A_i t^i\cos(\omega t) + B_i t^i\sin(\omega t)\right]$ 或 $e^{\sigma t}\sum_{i=0}^{K-1}\left[C_i t^i\cos(\omega t + \varphi_i)\right]$ 其中，$C_i = \sqrt{A_i^2 + B_i^2}$，$\tan\varphi_i = -B_i / A_i$

3.3.1 齐次解、特解和完全解

例3.3-1 求方程 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t)+3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)+2y(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)+4x(t)$ 的齐次解

解 齐次方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t)+3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)+2y(t)=0$$

特征方程

$$\lambda^2+3\lambda+2=0$$

特征根

$$\lambda_1=-1 \quad \lambda_2=-2$$

齐次解为

$$y_{\mathrm{h}}(t)=A_1\mathrm{e}^{-t}+A_2\mathrm{e}^{-2t}$$

3.3.1 齐次解、特解和完全解

例3.3-2 求方程 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t)+2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)+2y(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)+2x(t)$ 的齐次解

解 齐次方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t)+2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)+2y(t)=0$$

特征方程

$$\lambda^2+2\lambda+2=0$$

特征根

$$\lambda_{1,2}=-1\pm \mathrm{j}1$$

齐次解为

$$y_h(t)=\mathrm{e}^{-t}\left[A_1\cos(t)+A_2\sin(t)\right]$$

2.特解的计算

求解微分方程特解的过程为：

（1）根据微分方程自由项得到含待定系数的特解；

（2）将特解代入微分方程并使等式成立，从而确定特解中的待定系数

3.3.1 齐次解、特解和完全解

表3.3-2自由项对应的特解形式

<table>
<tr><th>自由项</th><th colspan="2">特解形式</th></tr>
<tr><td>E（常数）</td><td colspan="2">D（常数）</td></tr>
<tr><td>t^n</td><td colspan="2">$A_n t^n + A_{n-1} t^{n-1} + \cdots + A_1 t + A_0$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">e^{at}</td><td>a 不是特征根</td><td>Ae^{at}</td></tr>
<tr><td>a 是 K 重特征根</td><td>$At^K e^{at}$</td></tr>
<tr><td>$\cos(\omega t)$</td><td colspan="2" rowspan="2">$A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t)$</td></tr>
<tr><td>$\sin(\omega t)$</td></tr>
<tr><td>$t^n e^{at} \cos(\omega t)$</td><td colspan="2" rowspan="2">$\left(A_n t^n + A_{n-1} t^{n-1} + \cdots + A_1 t + A_0\right) e^{at} \cos(\omega t)$
$+\left(B_n t^n + B_{n-1} t^{n-1} + \cdots + B_1 t + B_0\right) e^{at} \sin(\omega t)$</td></tr>
<tr><td>$t^n e^{at} \sin(\omega t)$</td></tr>
</table>

3.3.1 齐次解、特解和完全解

例3.3-3 求例3.3-1在激励为 $x(t)=\mathrm{e}^{-3t}+1$ 时的特解。

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t)+3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)+2y(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)+4x(t)$$

解 将 $x(t)=\mathrm{e}^{-3t}$ 代入微分方程，可得

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t)+3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)+2y(t)=\mathrm{e}^{-3t}+4$$

特解形式为 $y_{\mathrm{p}}(t)=A_1\mathrm{e}^{-3t}+A_2$

$$9A_1\mathrm{e}^{-3t}-9A_1\mathrm{e}^{-3t}+2\left(A_1\mathrm{e}^{-3t}+A_2\right)=\mathrm{e}^{-3t}+4$$

求得待定系数 $A_1=\frac{1}{2}$ $A_2=2$，所以特解为

$$y_{\mathrm{p}}(t)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3t}+2$$

3.完全解的计算

$$y(t)=y_{\mathrm{h}}(t)+y_{\mathrm{p}}(t)$$

通过经典法求解常系数微分方程的完全解的步骤为：

（1）根据微分方程建立特征方程，求解特征根；

（2）根据特征根得到含有待定系数的齐次解；

（3） 根据微分方程自由项得到含待定系数的特解，将特解代入微分方程并使等式成立，从而确定特解中的待定系数；

（4）将（2）和（3）得到的齐次解（含有待定系数）和特解相加得到完全解；

（5）将边界条件代入完全解，确定齐次解中的待定系数。

例 3.3-4 求解例3.3-1在激励为 $x(t)=\mathrm{e}^{-3t}+1$，边界条件为 $y(0)=0$ $y'(0)=2$ 时的完全响应。

解 在例3.3-1中已经求得齐次解的形式为 $y_{\mathrm{h}}(t)=A_1\mathrm{e}^{-t}+A_2\mathrm{e}^{-2t}$

在例3.3-3中已求得特解为 $y_{\mathrm{p}}(t)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3t}+2$

所以完全解为 $y(t)=y_{\mathrm{h}}(t)+y_{\mathrm{p}}(t)=A_1\mathrm{e}^{-t}+A_2\mathrm{e}^{-2t}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3t}+2$

将给定的边界条件代入完全解，以确定齐次解中的待定系数

$$\begin{cases} 0=y(0)=A_1+A_2+\frac{1}{2}+2 \\ 2=y'(0)=-A_1-2A_2-\frac{3}{2} \end{cases}$$

$A_1=-\frac{3}{2}$ $A_2=-1$

$$y(t)=-\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3t}+2$$

例 3.3-5 已知LTI系统的微分方程为 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)+2y(t)=x(t)$

系统的激励信号为$x(t)=\varepsilon(t)$ ，边界条件为 $y(0_+)=1$

求激励信号加入后的系统响应。

解 根据微分方程可得特征方程为 $\lambda+2=0$

特征根为$\lambda=-2$，可得齐次解为$y_\mathrm{h}(t)=A\mathrm{e}^{-2t}$

将激励信号代入微分方程，可得 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)+2y(t)=\varepsilon(t)$

在 $t>0$ 时，系统的微分方程为$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)+2y(t)=1$

特解为

$$y_\mathrm{p}(t)=\frac{1}{2} \qquad t>0$$

例 3.3-5 已知LTI系统的微分方程为 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)+2y(t)=x(t)$

系统的激励信号为$x(t)=\varepsilon(t)$ ，边界条件为 $y(0_+)=1$

求激励信号加入后的系统响应。

解（续）:完全解形式为 $y(t)=y_\mathrm{h}(t)+y_\mathrm{p}(t)=A\mathrm{e}^{-2t}+\frac{1}{2} \qquad t>0$

$$1=y(0_+)=A+\frac{1}{2}$$

解得 $A=\frac{1}{2}$，所以完全解为

$$y(t)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}+\frac{1}{2} \qquad t>0$$

$$y(t)=\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}+\frac{1}{2}\right)\varepsilon(t)$$

例 3.3-5 已知LTI系统的微分方程为 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)+2y(t)=x(t)$

系统的激励信号为 $x(t)=\varepsilon(t)$ ，边界条件为 $y(0_+)=1$

求激励信号加入后的系统响应。

解（续）： $y(t)=\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}+\frac{1}{2}\right)\varepsilon(t)$

该系统完全响应中 $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t)$ 为自由响应，而 $\frac{1}{2}\varepsilon(t)$ 为强迫响应。

$\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t)$ 为暂态响应，$\frac{1}{2}\varepsilon(t)$ 为稳态响应。

3.3.2 冲激平衡法

若激励在 $t=0$ 时刻开始作用于系统

起始状态 0_-

0_+ 初始状态

3.3.2 冲激平衡法

冲激平衡法利用$t=0$ 时刻微分方程左右两边的$\delta(t)$及其各阶导数相等，由系统的起始状态得到系统的初始状态，从而可以利用初始状态来确定完全解中的待定系数。

例3.3-6 微分方程$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)+2y(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)$，已知 $x(t)=2\delta(t)$

$y(0_-)=1$,求系统的初始状态$y(0_+)$

在 $t=0$ 时令 $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)=2\delta'(t)+A\delta(t) \\ y(t)=2\delta(t) \end{cases}$

$t=0$ 时刻关于冲激及其导数的方程（**忽略非冲激项**）为

$$2\delta'(t)+A\delta(t)+4\delta(t)=2\delta'(t)$$

$$y(0_+)-y(0_-)=-4$$

$$y(0_+)=y(0_-)-4=1-4=-3$$

3.3.2 冲激平衡法

利用冲激平衡法从系统起始状态得到初始状态的基本步骤为：

（1）确定方程右端$\delta(t)$的最高阶微分项；

（2）确定方程左端 $y(t)$的最高阶微分项，在 $t=0$ 时刻构建其相应的冲激函数形式，该形式应该包含（1）确定的$\delta(t)$的最高阶微分项以及含待定系数的全部低阶$\delta(t)$项；

（3）通过积分依次得到$t=0$时刻$y(t)$各阶微分及 $y(t)$的冲激函数形式，忽略非冲激项；

（4）平衡方程两边的$\delta(t)$及其微分项，确定待定系数；

（5）利用冲激的性质，即其积分为跳变，通过起始状态计算得到初始状态。

3.3.2 冲激平衡法

例3.3-7 LTI系统 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t)+3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)+2y(t)=2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)+x(t)$，激励为 $x(t)=\delta(t)+\varepsilon(t)$，起始状态为 $y'(0_-)=1$，$y(0_-)=0$

求该系统的完全响应 $y(t)$

解： $x(t)=\varepsilon(t)+\delta(t)$ 代入微分方程可得

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t)+3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)+2y(t)=2\delta'(t)+3\delta(t)+\varepsilon(t)$$

在 $t=0$ 时令
$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t)=2\delta'(t)+A\delta(t)\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)=2\delta(t)\\ y(t)=0\end{cases}$$

$$2\delta'(t)+A\delta(t)+6\delta(t)=2\delta'(t)+3\delta(t)$$

3.3.2 冲激平衡法

例3.3-7 LTI系统 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t)+3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)+2y(t)=2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)+x(t)$，激励为 $x(t)=\delta(t)+\varepsilon(t)$，起始状态为 $y'(0_-)=1$，$y(0_-)=0$

求该系统的完全响应 $y(t)$

解： $A=-3$

$$\begin{cases} y'(0_+)=y'(0_-)-3=1-3=-2 \\ y(0_+)=y(0_-)+2=0+2=2 \end{cases}$$

微分方程的齐次解为 $y_h(t)=A_1\mathrm{e}^{-t}+A_2\mathrm{e}^{-2t}$

在 $t>0$ 时，系统方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t)+3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)+2y(t)=1$$

$$y_p(t)=\frac{1}{2} \qquad t>0$$

3.3.2 冲激平衡法

例3.3-7 LTI系统 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t)+3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)+2y(t)=2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)+x(t)$，激励为 $x(t)=\delta(t)+\varepsilon(t)$，起始状态为 $y'(0_-)=1$， $y(0_-)=0$

求该系统的完全响应 $y(t)$

解: 完全响应为 $y(t)=y_{\mathrm{h}}(t)+y_{\mathrm{p}}(t)=A_1\mathrm{e}^{-t}+A_2\mathrm{e}^{-2t}+\frac{1}{2} \qquad t>0$

$$\begin{cases} 2=y(0_+)=A_1+A_2+\frac{1}{2} \\ -2=y'(0_+)=-A_1-2A_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1=1 \\ A_2=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$y(t)=\mathrm{e}^{-t}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}+\frac{1}{2} \qquad t>0$$

$$y(t)=\left(\mathrm{e}^{-t}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}+\frac{1}{2}\right)\varepsilon(t)$$

3.4 直流电源激励下的一阶动态电路分析

含有一个动态元件的电路，可以用一阶微分方程描述，称其为一阶动态电路。需要注意的是，若电路中含有多个动态元件，但这多个动态元件可以等效为一个动态元件，描述该电路的微分方程也是一阶微分方程，因此该电路也是一阶动态电路。

直流电源激励下的一阶动态电路：
- 起始状态到初始状态的转换
- 零状态响应
- 零输入响应
- 三要素法

3.4.1 动态电路的换路定则

由电容的积分VAR可知

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)+\frac{1}{C}\int_{0_-}^{0_+} i_C(t)\mathrm{d}t$$

一般情况下，在直流电源激励下的动态电路中，$i_C(t)$为有限值，即$i_C(t)$中不含有冲激及其导数，因此，上式中积分项为零，可得

$$\boxed{u_C(0_+)=u_C(0_-)}$$

由电感的积分VAR可知

$$i_L(0_+)=i_L(0_-)+\frac{1}{L}\int_{0_-}^{0_+} u_L(t)\mathrm{d}t$$

一般情况下，在直流电源激励下的动态电路中，$u_L(t)$为有限值，即$u_L(t)$中不含有冲激及其导数，因此，上式中积分项为零，可得

$$\boxed{i_L(0_+)=i_L(0_-)}$$

换路定则

3.4.1 动态电路的换路定则

换路定则仅适用于 u_C 和 i_L 而不适用于其他变量，例如

$$u_R \quad i_R \quad i_C \quad u_L$$

其它变量的初始值一般应用以下步骤进行求解：

（1）求解 $u_C(0_-)$ 和 $i_L(0_-)$

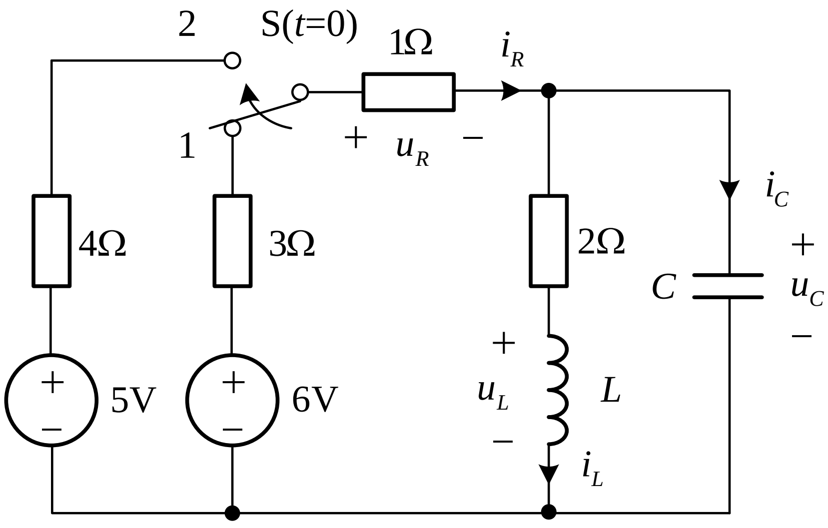
（2）利用换路定则得到 $u_C(0_+)$ 和 $i_L(0_+)$

（3）用电压为 $u_C(0_+)$ 的电压源代替电容，

用电流为 $i_L(0_+)$ 的电流源代替电感，

得到0+时刻的等效电路，并计算其他变量的初始值。

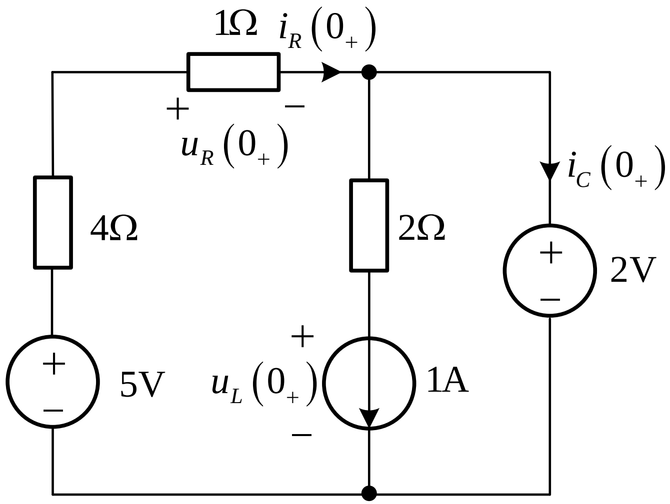
例3.4-1 动态电路如图3.4-1（a）所示，开关在 $t=0$ 时从位置“1”拨动到位置“2”，且换路前电路已达稳态。求 u_C i_C u_L i_L u_R i_R 的初始值。



（a）动态电路

$$u_C(0_-)=\frac{2}{3+1+2}\times 6=2\text{V}$$

$$i_L(0_-)=\frac{6}{3+1+2}=1\text{A}$$

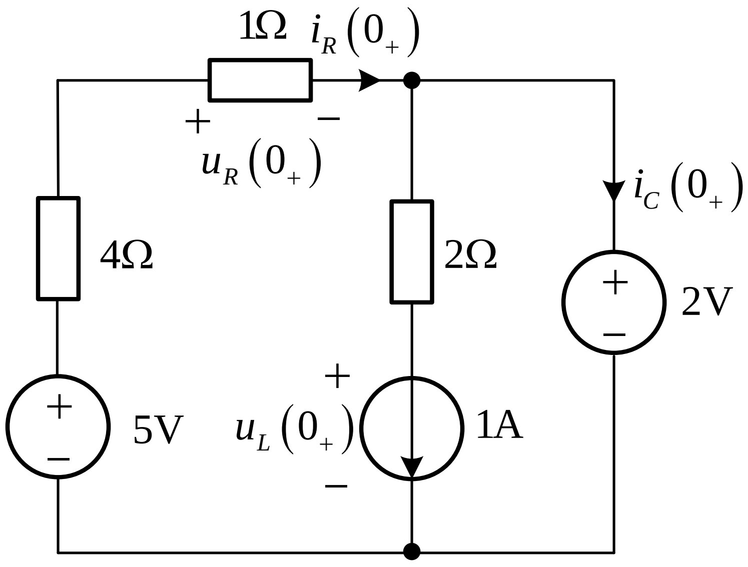


（b）$t=0_+$时刻的等效电路

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=2\text{V}$$

$$i_L(0_+)=i_L(0_-)=1\text{A}$$

例3.4-1 动态电路如图3.4-1（a）所示，开关在 $t=0$ 时从位置"1"拨动到位置"2"，且换路前电路已达稳态。求 u_C i_C u_L i_L u_R i_R 的初始值。



（b）$t=0_+$时刻的等效电路

$$u_R(0_+)=\frac{1}{4+1}\times(5-2)=\frac{3}{5}\text{V}$$

$$i_R(0_+)=\frac{u_R(0_+)}{1}=\frac{3}{5}\text{A}$$

$$i_C(0_+)=i_R(0_+)-1=\frac{3}{5}-1=-\frac{2}{5}\text{A}$$

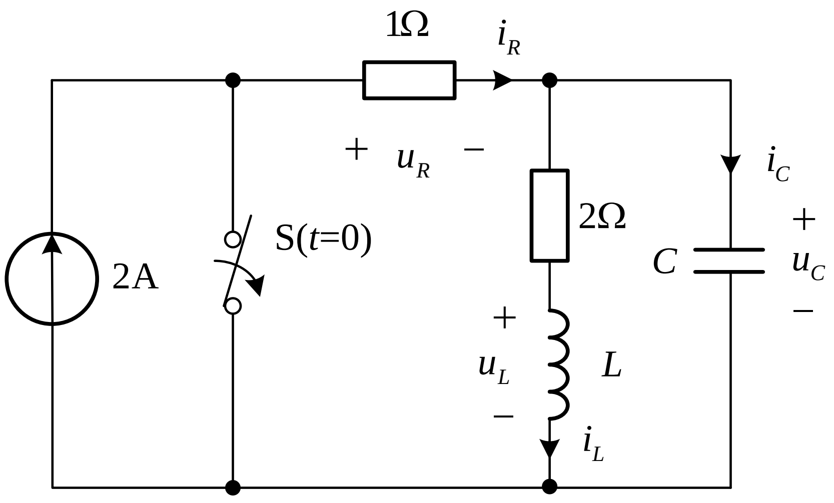
$$u_L(0_+)=2-2\times1=0$$

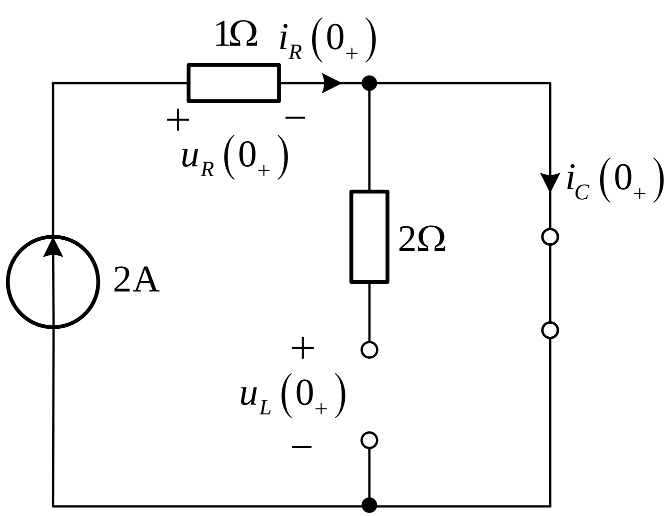
例3.4-2 动态电路如图3.4-2（a）所示，开关在 $t=0$ 时打开，换路前电容和电感均未储能，求 u_C i_C u_L i_L u_R i_R 的初始值。

$$u_C(0_-)=0 \qquad i_L(0_-)=0$$

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=0$$

$$i_L(0_+)=i_L(0_-)=0$$





（b）t=0₊时刻的等效电路

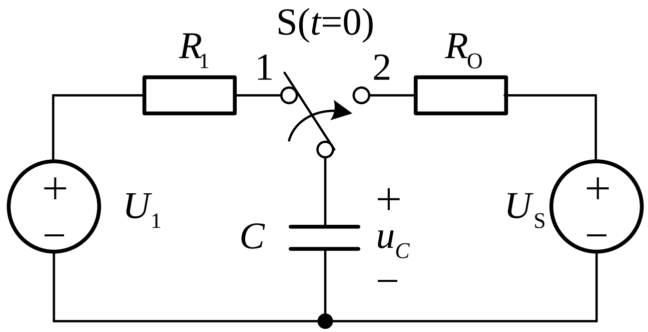
$$i_C(0_+)=i_R(0_+)=2\text{A}$$

$$u_R(0_+)=i_R(0_+)\times 1=2\text{V}$$

$$u_L(0_+)=0$$

3.4.2 一阶动态电路的响应

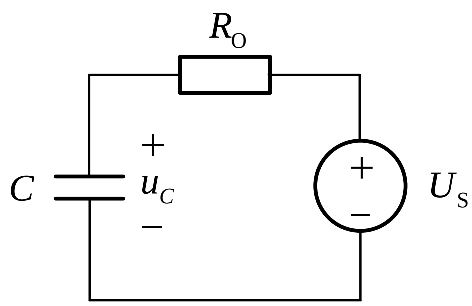
一阶RC



（a）

$$\begin{cases} R_O C \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_C + u_C = U_S \\ u_C(0_-) = U_1 \end{cases}$$

换路后



（b）

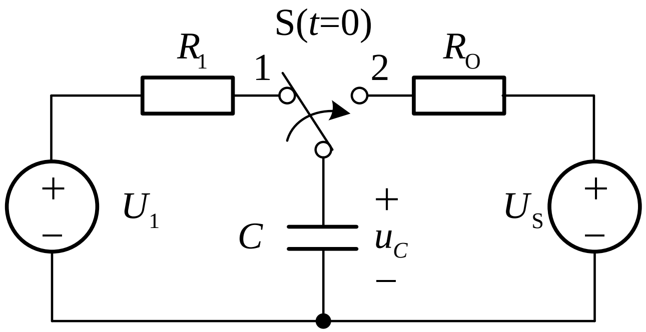
$$\begin{cases} R_O C \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_C + u_C = U_S \\ u_C(0_+) = U_1 \end{cases}$$

$$u_{Ch} = A\mathrm{e}^{-\frac{1}{R_o C}t} \qquad u_{Cp} = U_S \qquad u_C = \left(A\mathrm{e}^{-\frac{1}{R_O C}t} + U_S \right)$$

利用 $u_C(0_+) = U_1$ 可得 $A = U_1 - U_S$

$$u_C = (U_1 - U_S)\mathrm{e}^{-\frac{1}{R_O C}t} + U_S \qquad (t > 0)$$

3.4.2 一阶动态电路的响应



（a）

$$u_C=\left(U_1-U_S\right)e^{-\frac{1}{R_O C}t}+U_S \qquad (t>0)$$

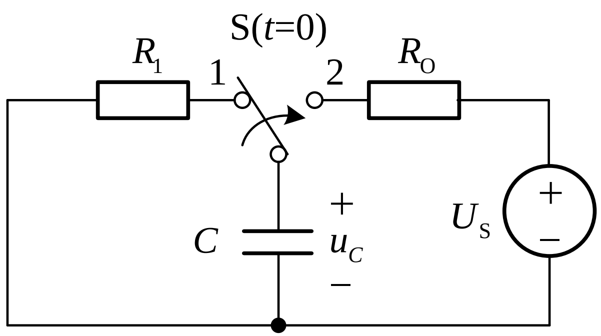
$$u_C\left(0_-\right)=U_1$$

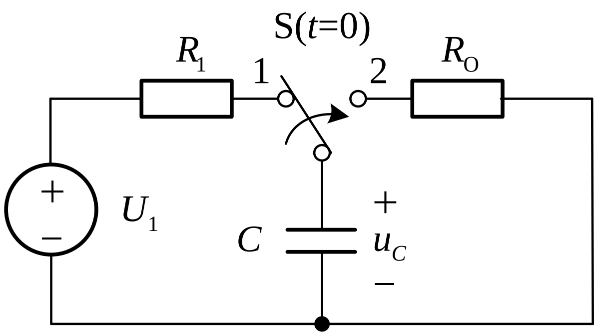
由电路决定

$$u_C=U_S\left(1-e^{-\frac{1}{R_O C}t}\right)+u_C\left(0_-\right)e^{-\frac{1}{R_O C}t} \qquad (t>0)$$

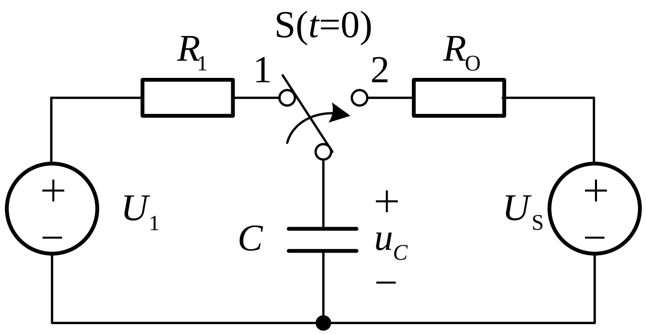
零状态响应

零输入响应





3.4.2 一阶动态电路的响应

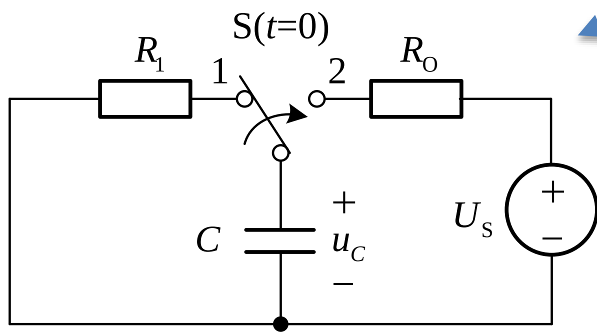


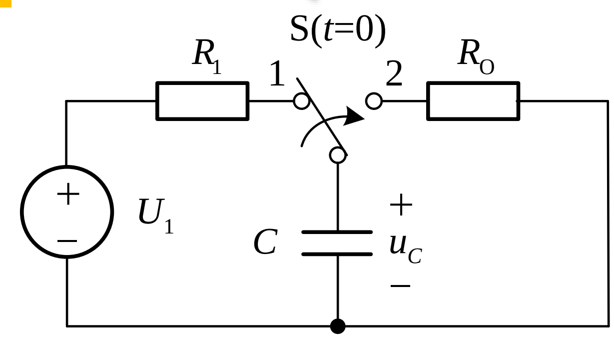
（a）

$$u_C = U_S\left(1-e^{-\frac{1}{R_O C}t}\right) + u_C(0_-)e^{-\frac{1}{R_O C}t} \qquad (t>0)$$

零状态响应

零输入响应





$$\begin{cases} R_O C\dfrac{d}{dt}u_{Czs} + u_{Czs} = U_S \\ u_{Czs}(0_-) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_O C\dfrac{d}{dt}u_{Czi} + u_{Czi} = 0 \\ u_{Czi}(0_-) = U_1 \end{cases}$$

$$u_{Czs} = U_S\left(1-e^{-\frac{1}{R_O C}t}\right) \qquad (t>0)$$

$$u_{Czi} = u_C(0_-)e^{-\frac{1}{R_O C}t} \qquad (t>0)$$

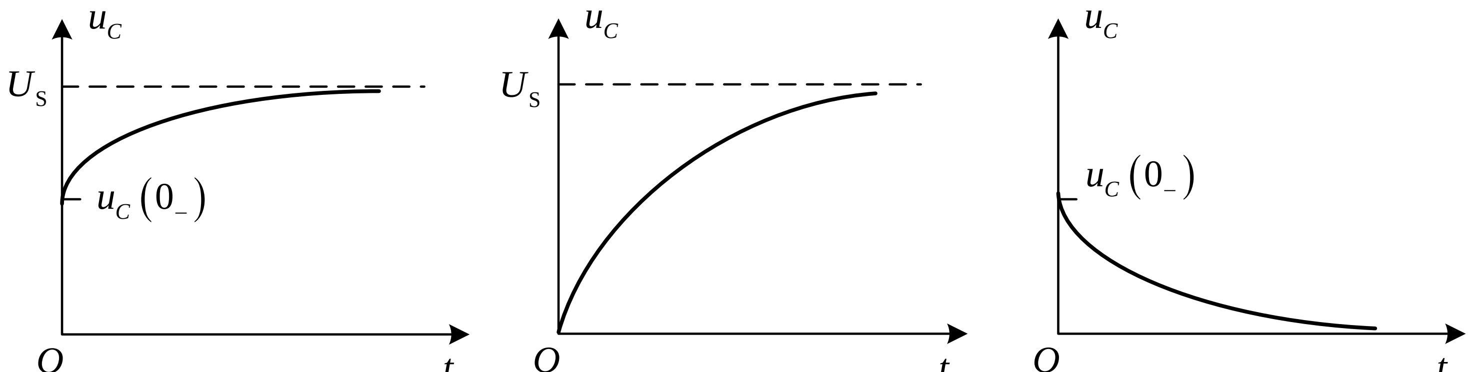
$$\boxed{u_C = u_{Czs} + u_{Czi} \qquad (t>0)}$$

3.4.2 一阶动态电路的响应

$$u_C = U_S\left(1-e^{-\frac{1}{R_O C}t}\right) + u_C(0_-)e^{-\frac{1}{R_O C}t} \qquad (t>0)$$

$$u_{Czs} = U_S\left(1-e^{-\frac{1}{R_O C}t}\right) \qquad (t>0) \qquad\qquad u_{Czi} = u_C(0_-)e^{-\frac{1}{R_O C}t} \qquad (t>0)$$

假设 $U_S > U_1 > 0$

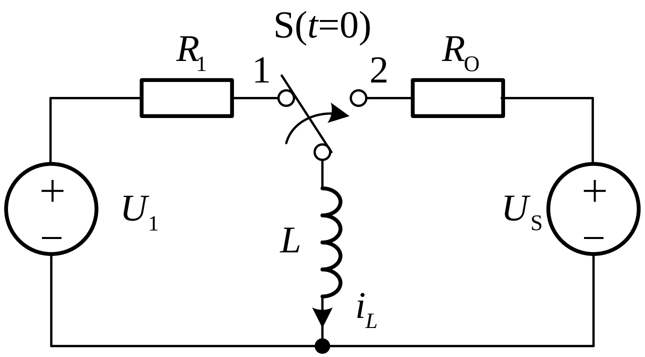


（a）完全响应曲线　（b）零状态响应曲线　（c）零输入响应曲线

三个响应曲线均是从一个稳态过度到另一个稳态，而过度过程符合指数规律

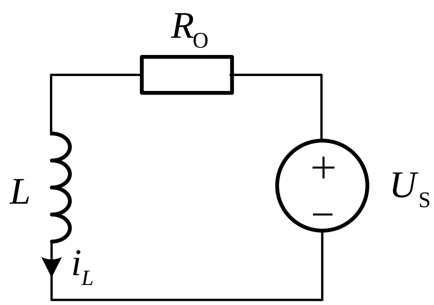
3.4.2 一阶动态电路的响应

一阶RL



$$\begin{cases} L\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i_L + R_O i_L = U_S \\ i_L(0_-) = \dfrac{U_1}{R_1} \end{cases}$$

换路后



$$\begin{cases} L\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i_L + R_O i_L = U_S \\ i_L(0_+) = \dfrac{U_1}{R_1} \end{cases}$$

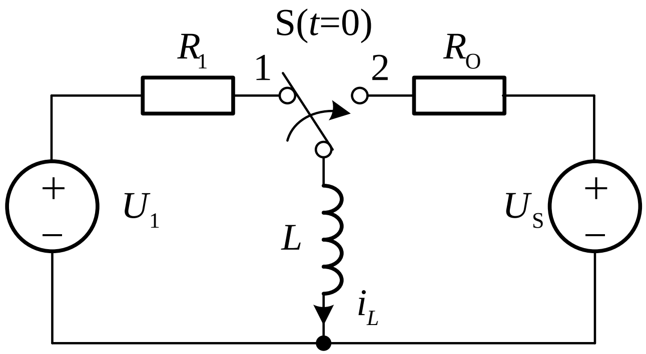
$$i_{Lh} = Ae^{-\frac{1}{L/R_O}t}$$

$$i_{Lp} = \frac{U_S}{R_O}$$

利用 $i_L(0_+) = \dfrac{U_1}{R_1}$ 可得 $A = \dfrac{U_1}{R_1} - \dfrac{U_S}{R_O}$

$$i_L = \left(Ae^{-\frac{1}{L/R_O}t} + \frac{U_S}{R_O} \right)$$

$$i_L = \left(\frac{U_1}{R_1} - \frac{U_S}{R_O} \right) e^{-\frac{1}{L/R_O}t} + \frac{U_S}{R_O} \qquad (t > 0)$$



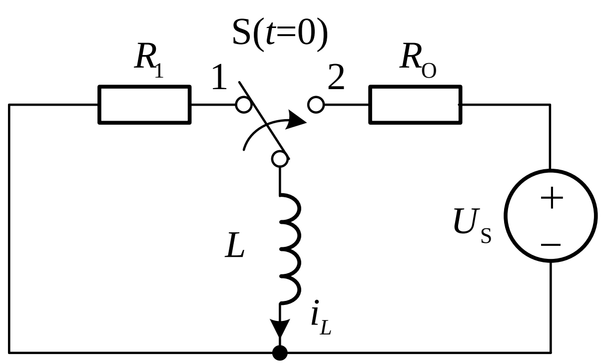
$$i_L=\left(\frac{U_1}{R_1}-\frac{U_S}{R_O}\right)e^{-\frac{1}{L/R_O}t}+\frac{U_S}{R_O}\qquad (t>0)$$

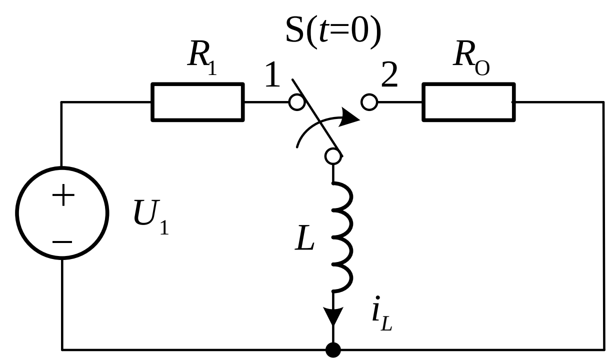
$$\frac{U_1}{R_1}=i_L(0_-)$$

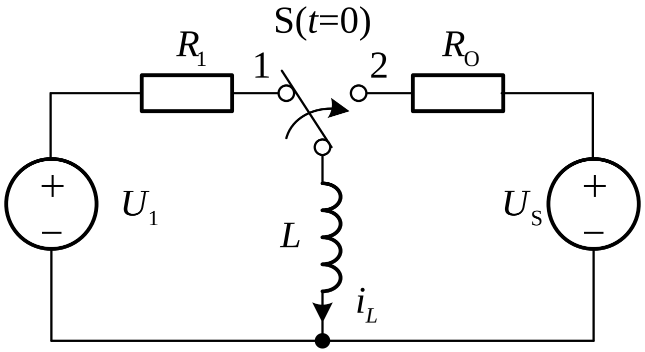
由电路决定

$$i_L=\frac{U_S}{R_O}\left(1-e^{-\frac{1}{L/R_O}t}\right)+i_L(0_-)e^{-\frac{1}{L/R_O}t}\qquad (t>0)$$

零状态响应　　零输入响应



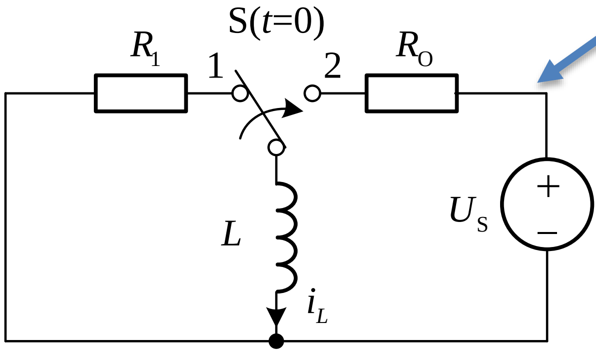


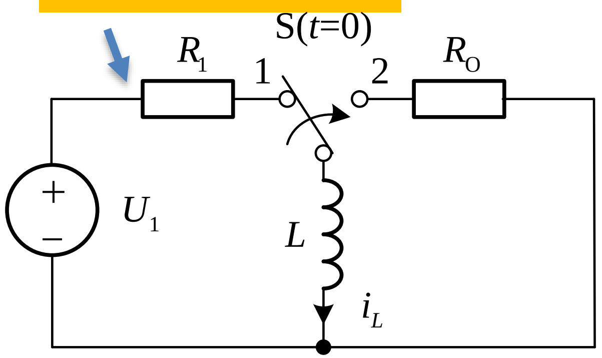


$$i_L = \frac{U_S}{R_O}\left(1 - e^{-\frac{1}{L/R_O}t}\right) + i_L(0_-)e^{-\frac{1}{L/R_O}t} \qquad (t>0)$$

零状态响应

零输入响应





$$\begin{cases} L\dfrac{d}{dt}i_{Lzs} + R_O i_{Lzs} = U_S \\ i_{Lzs}(0_-) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} L\dfrac{d}{dt}i_{Lzi} + R_O i_{Lzi} = 0 \\ i_{Lzi}(0_-) = U_1 / R_1 \end{cases}$$

$$i_{Lzs} = \frac{U_S}{R_O}\left(1 - e^{-\frac{1}{L/R_O}t}\right) \qquad (t>0)$$

$$i_{Lzi} = i_L(0_-)e^{-\frac{1}{L/R_O}t} \qquad (t>0)$$

$$i_L = i_{Lzs} + i_{Lzi} \qquad (t>0)$$

3.4.2 一阶动态电路的响应

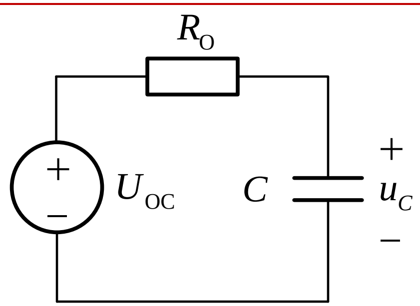
一阶RC或RL电路均可以通过零状态响应和零输入响应来计算完全响应，这种方法称为双零法。

当外加激励增加k倍，零状态响应也增加k倍；而当多个激励电源作用于初始状态为零的电路时可以进行叠加，这些特性称为零状态响应的线性特性。

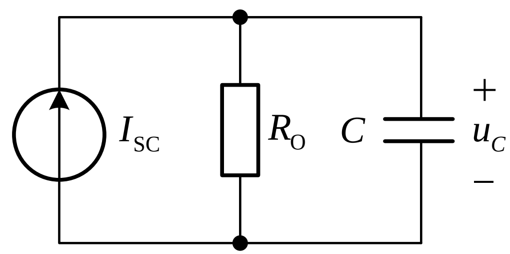
当起始状态增加k倍，零输入响应也增加k倍，这种特性为零输入响应的线性特性。

3.4.2 三要素法

直流电源激励下的一阶动态电路总可以转化为四种基本电路



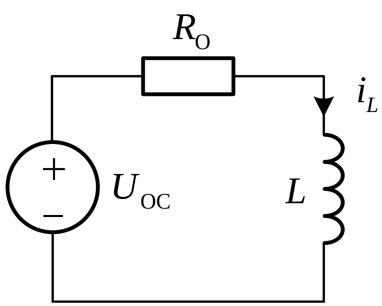
（a）



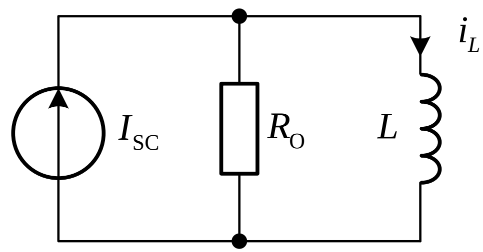
（b）

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_C+\frac{1}{R_O C}u_C=\frac{1}{R_O C}U_{OC}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_C+\frac{1}{R_O C}u_C=\frac{1}{C}I_{SC}$$



（c）



（d）

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i_L+\frac{1}{L/R_O}i_L=\frac{1}{L}U_{OC}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i_L+\frac{1}{L/R_O}i_L=\frac{R_O}{L}I_{SC}$$

3.4.2 三要素法

直流电源激励下的一阶动态电路总可以转化为四种基本电路

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_C + \frac{1}{R_O C}u_C = \frac{1}{R_O C}U_{OC} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_C + \frac{1}{R_O C}u_C = \frac{1}{C}I_{SC}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i_L + \frac{1}{L/R_O}i_L = \frac{1}{L}U_{OC} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i_L + \frac{1}{L/R_O}i_L = \frac{R_O}{L}I_{SC}$$

令时间常数（单位为秒，s）$\tau=R_O C$ 或则 $\tau=L/R_O$

一阶动态电路的微分方程总可以写成

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)+\frac{1}{\tau}f(t)=E \qquad t>0}$$

3.4.2 三要素法

令时间常数（单位为秒，s）$\tau = R_O C$ 或则 $\tau = L / R_O$

一阶动态电路的微分方程总可以写成

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t) + \frac{1}{\tau} f(t) = E \qquad t > 0}$$

解的形式为 $f(t) = A + B\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \qquad t > 0$

$$\begin{cases} f(0_+) = A + B \\ f(\infty) = A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = f(0_+) - f(\infty) \\ A = f(\infty) \end{cases}$$

$$f(t) = f(\infty) + \left[f(0_+) - f(\infty) \right] \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \qquad t > 0$$

终值　初始值　时间常数 τ

三要素

3.4.2 三要素法

利用三要素法计算电路响应的步骤

$$f(t)=f(\infty)+\left[f(0_+)-f(\infty)\right]\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \qquad t>0$$

（1）求初始值 $f(0_+)$

求换路前电路的 $u_C(0_-)$ 或则 $i_L(0_-)$，利用换路定则得到初始值 $u_C(0_+)$ 或则 $i_L(0_+)$；用电压为 $u_C(0_+)$ 的电压源代替电容，或者用电流为 $i_L(0_+)$ 的电流源代替电感，得到0+时刻的等效电路，并计算所求变量的初始值。

（2）求终值 $f(\infty)$

由于为直流电源激励，在 $t=\infty$ 时电路再次达到稳态，此时，电容相当于开路，电感相当于短路，由此可求得所求变量的终值

（3）求时间常数 τ

$$\tau=R_{\mathrm{O}}C \qquad \tau=L/R_{\mathrm{O}}$$

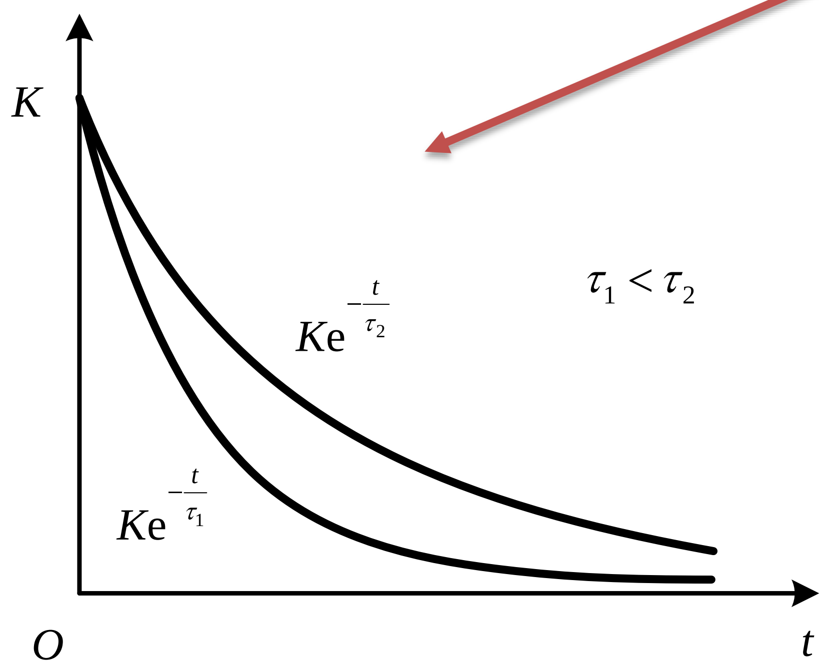
若换路时刻为 $t=t_0$ ，则三要素法公式相应改为

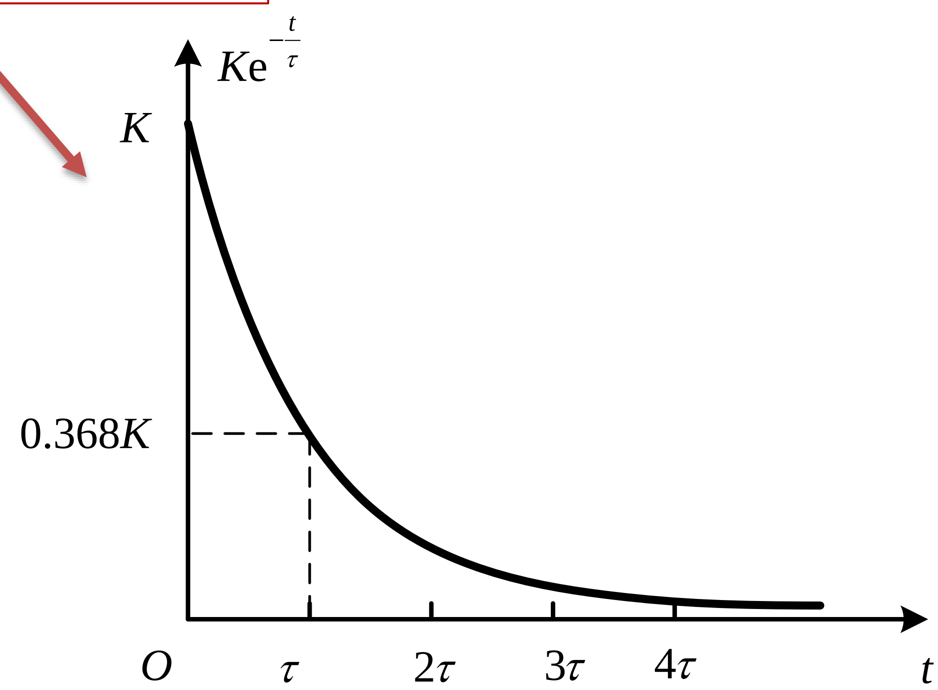
$$f(t)=f(\infty)+\left[f(t_{0+})-f(\infty)\right]\mathrm{e}^{-\frac{t-t_0}{\tau}} \qquad t>t_0$$

3.4.2 三要素法-过渡过程

$$f(t) = f(\infty) + \left[f(0_+) - f(\infty) \right] \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \qquad t > 0$$

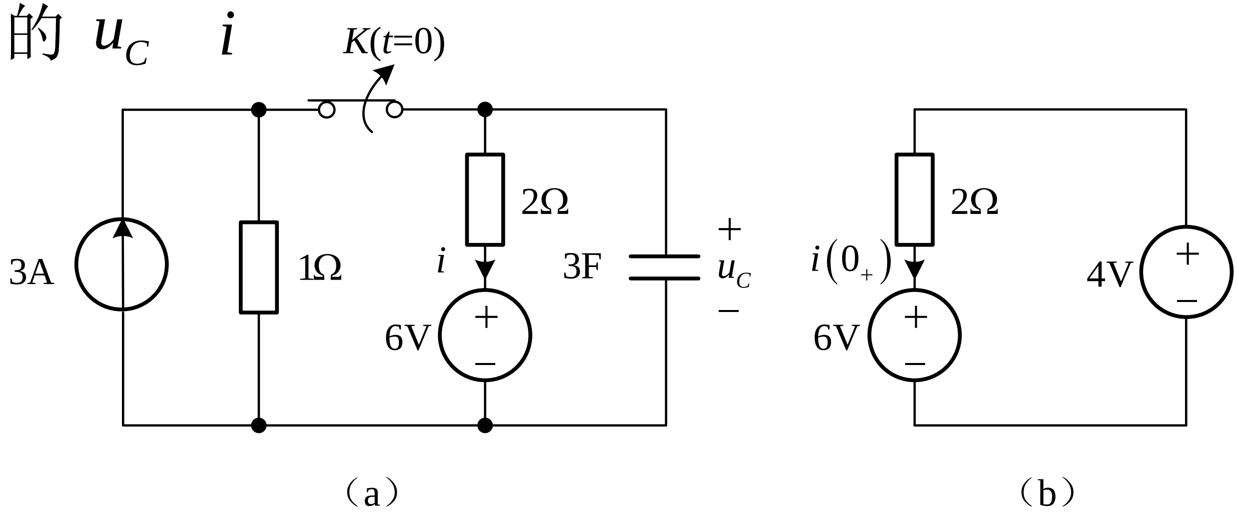
稳态　　暂态





t	0	τ	2τ	3τ	4τ	5τ	6τ
$Ke^{-\frac{t}{\tau}}$	K	$0.368\,K$	$0.135\,K$	$0.050\,K$	$0.018\,K$	$0.007\,K$	$0.002\,K$

例3.4-3如图3.4-7（a）所示电路，t=0时开关打开，开关打开前电路已达稳态，计算t>0时的 u_C　i



解 （1）求初始值

$$u_C(0_-)=\frac{2}{1+2}\times3\times1+\frac{1}{2+1}\times6=4\text{V}$$

$$i(0_+)=-1\text{A}$$

（2）求终值

$$u_C(\infty)=6\text{V}$$

$$i(\infty)=0$$

（3）求时间常数 $\tau=R_OC=2\times3=6\text{s}$

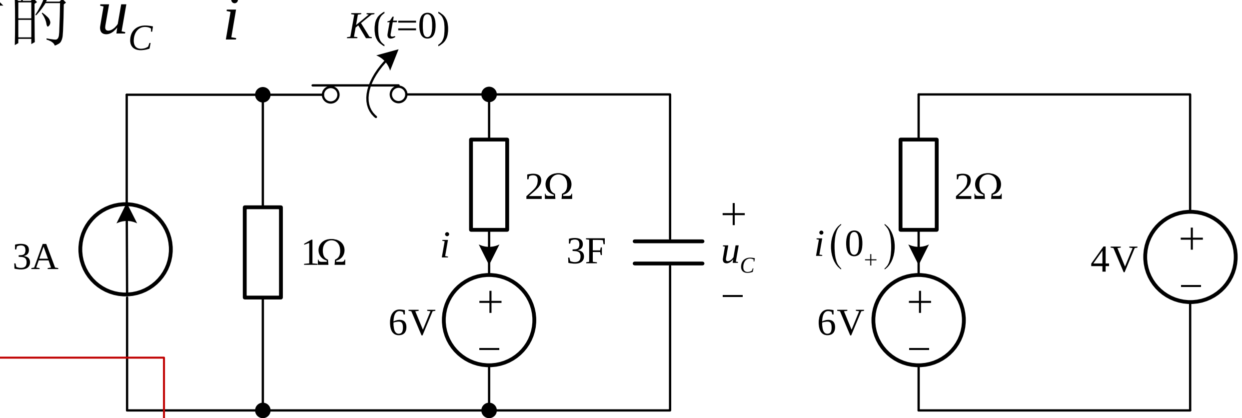
利用三要素法

$$u_C(t)=6+(4-6)e^{-\frac{t}{6}}=\left(6-2e^{-\frac{t}{6}}\right)\text{V}\qquad t>0$$

$$i(t)=0+(-1-0)e^{-\frac{t}{6}}=-e^{-\frac{t}{6}}\text{A}\qquad t>0$$

3.4.2 三要素法

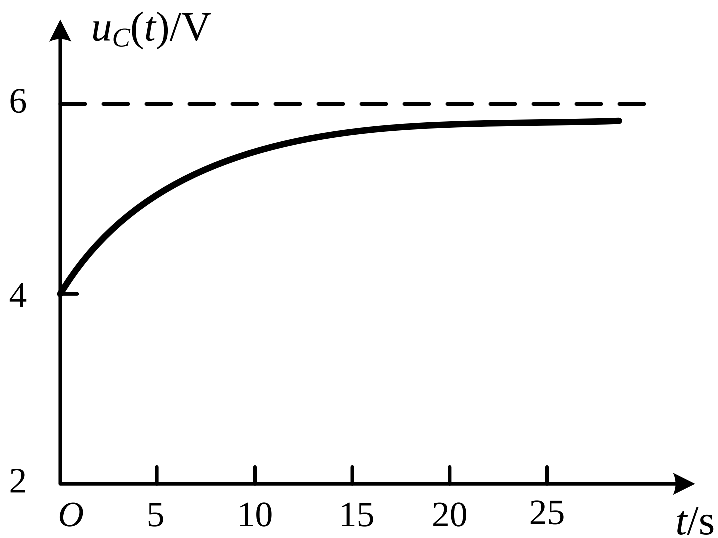
例3.4-3如图3.4-7（a）所示电路，t=0时开关打开，开关打开前电路已达稳态，计算t>0时的 u_C　i

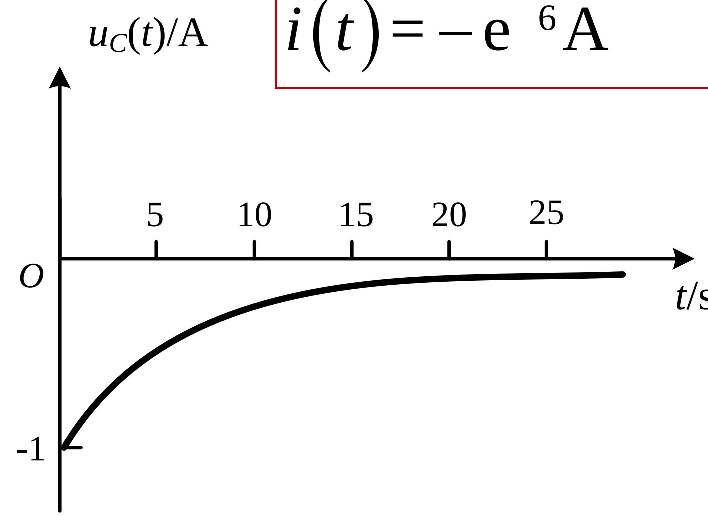


（a）　　（b）

解

$$u_C(t)=\left(6-2e^{-\frac{t}{6}}\right)\text{V}\qquad t>0$$

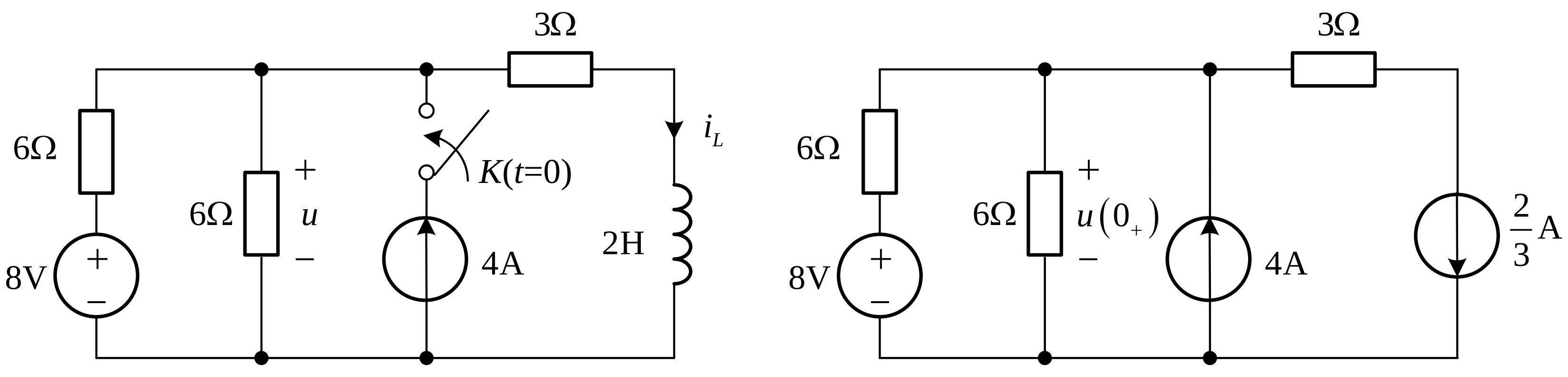




$$i(t)=-e^{-\frac{t}{6}}\text{A}\qquad t>0$$

3.4.2 三要素法

例3.4-4 如图3.4-8（a）所示电路，开关在t=0时闭合，开关闭合前电路已达稳态，求t>0时的 i_L　u



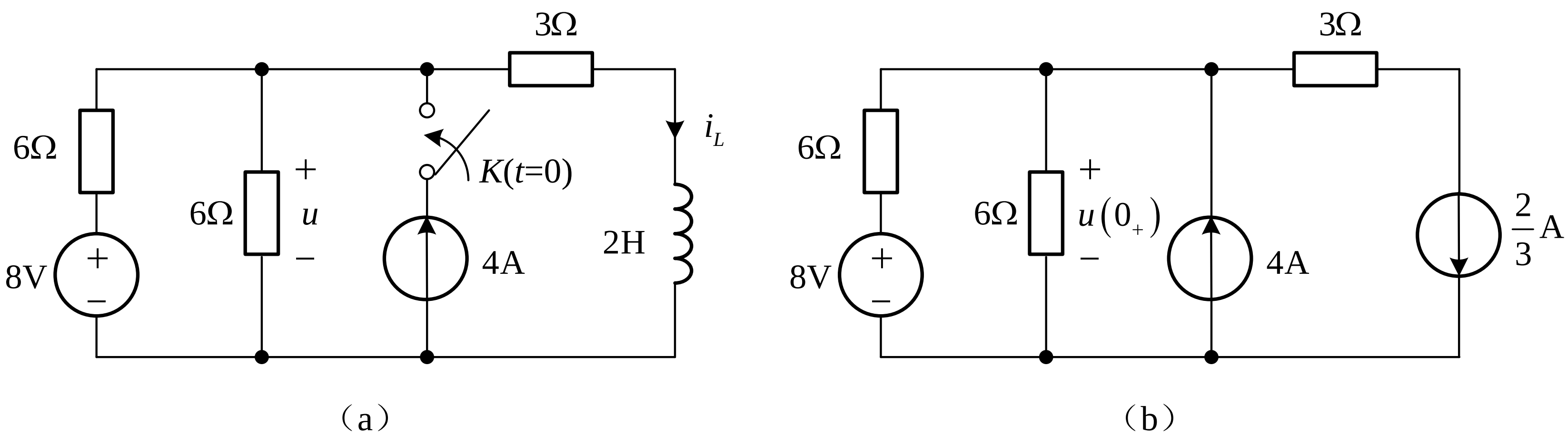
（a）　　（b）

解（1）求初始值

$$i_L(0_-)=\frac{\dfrac{6//3}{6+6//3}\times 8}{3}=\frac{2}{3}\text{A}$$

$$u(0_+)=\frac{6}{6+6}\times 8+(6//6)\times 4-(6//6)\times\frac{2}{3}=14\text{A}$$

例3.4-4 如图3.4-8（a）所示电路，开关在t=0时闭合，开关闭合前电路已达稳态，求t>0时的 i_L　u

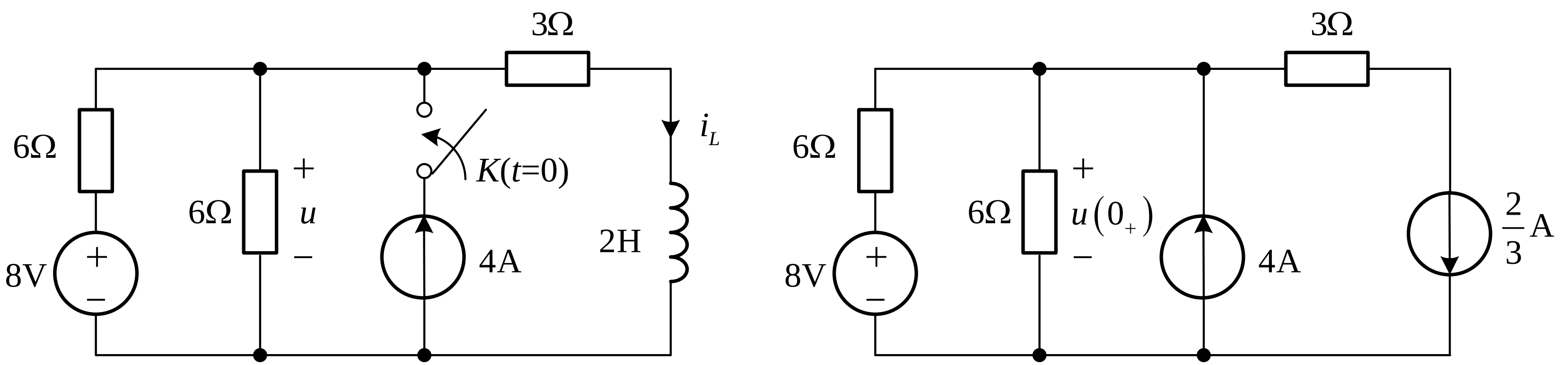


解 （2）求终值

$$i_L(\infty)=\frac{\dfrac{6//3}{6+6//3}\times 8}{3}+\frac{6//6}{6//6+3}\times 4=\frac{2}{3}+2=\frac{8}{3}\text{A}$$

$$u(\infty)=\frac{6//3}{6+6//3}\times 8+\frac{3}{6//6+3}\times 4\times(6//6)=2+6=8\text{V}$$

例3.4-4 如图3.4-8（a）所示电路，开关在t=0时闭合，开关闭合前电路已达稳态，求t>0时的 i_L u



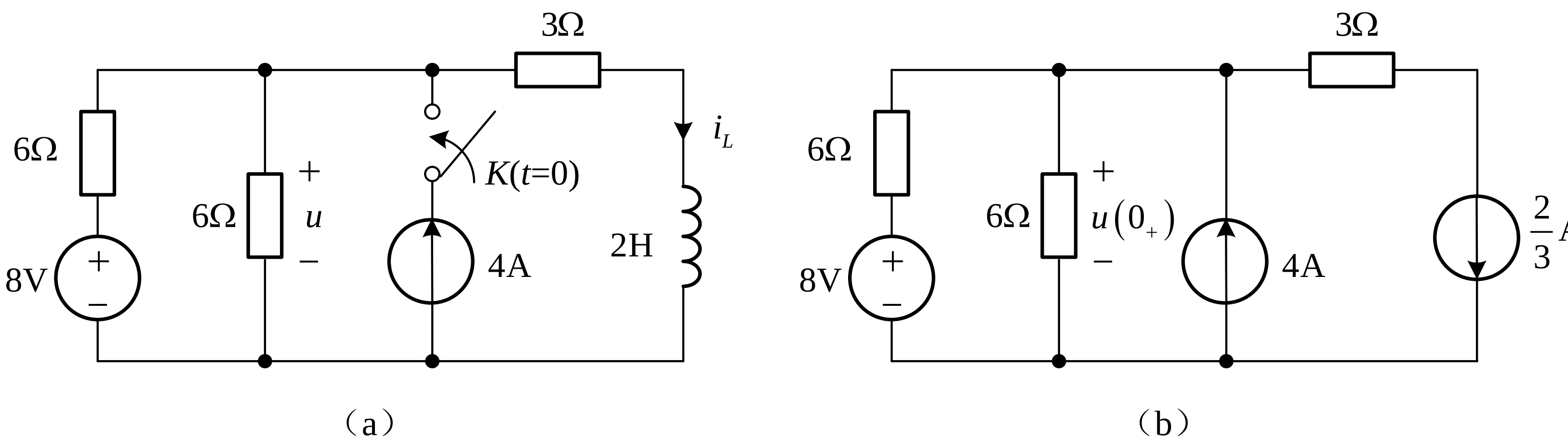
（a）　　（b）

解 （3）求时间常数

$$\tau = L / R_O = 2/6 = \frac{1}{3}\text{s}$$

3.4.2 三要素法

例3.4-4 如图3.4-8（a）所示电路，开关在t=0时闭合，开关闭合前电路已达稳态，求t>0时的 i_L　u



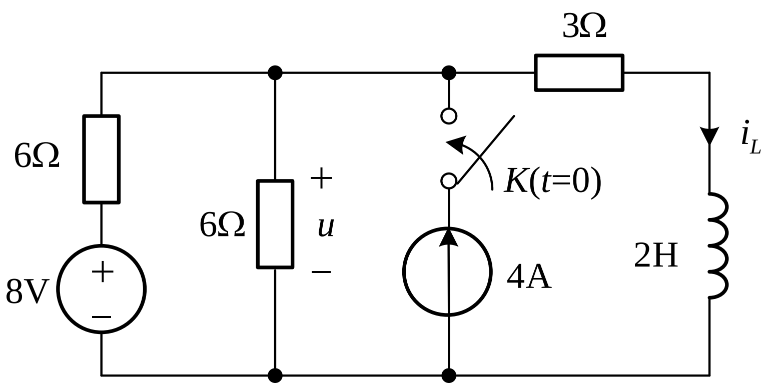
解 利用三要素法

$$i_L(t)=i_L(\infty)+\left[i_L(0_+)-i_L(\infty)\right]e^{-\frac{t}{\tau}}=\frac{8}{3}+\left(\frac{2}{3}-\frac{8}{3}\right)e^{-3t}=\left(\frac{8}{3}-2e^{-3t}\right)\mathrm{A}\quad t>0$$

$$u(t)=u(\infty)+\left[u(0_+)-u(\infty)\right]e^{-\frac{t}{\tau}}=8+(14-8)e^{-3t}=\left(8+6e^{-3t}\right)\mathrm{V}\quad t>0$$

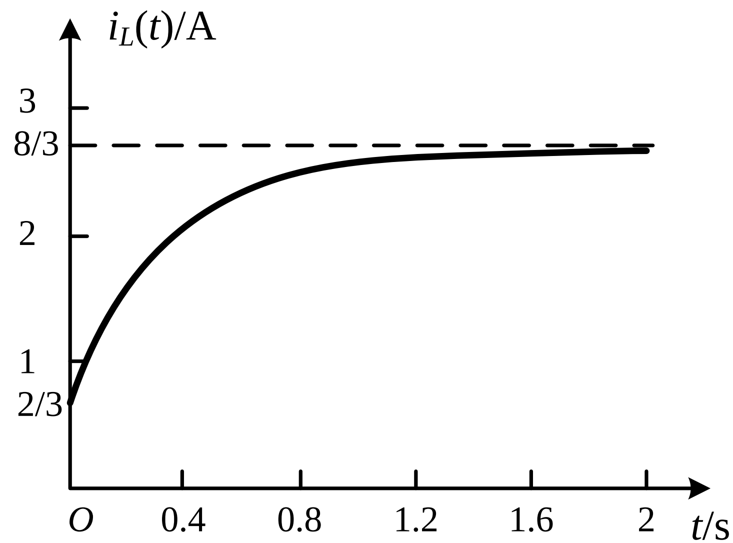
3.4.2 三要素法

例3.4-4 如图3.4-8（a）所示电路，开关在t=0时闭合，开关闭合前电路已达稳态，求t>0时的 i_L　u

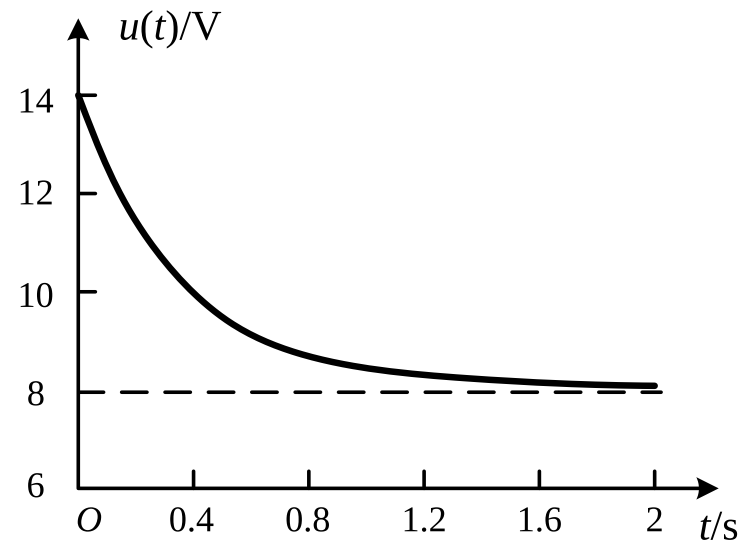


$$i_L(t)=\left(\frac{8}{3}-2e^{-3t}\right)\mathrm{A}\quad t>0$$

$$u(t)=\left(8+6e^{-3t}\right)\mathrm{V}\quad t>0$$



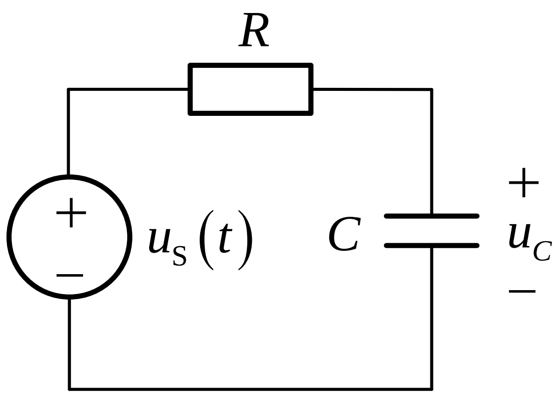
(a)



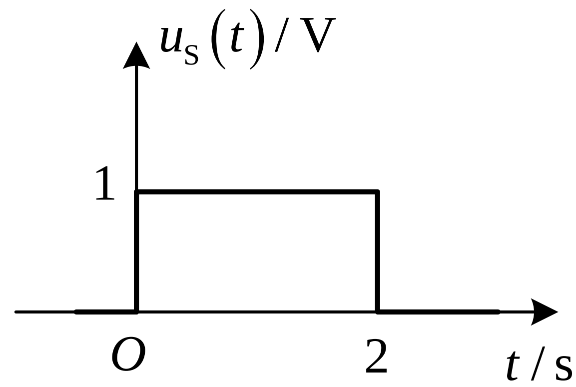
(b)

3.4.2 三要素法

例3.4-5 图（a）所示电路中，电压源$u_S(t)$ 如图（b）所示，计算t>0时的 u_C



（a）



（b）

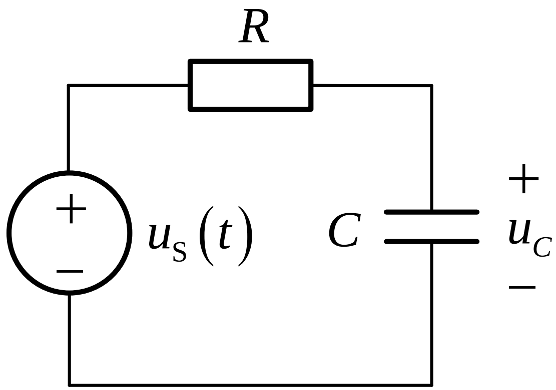
解 先假设 $u_S(t)=\varepsilon(t)$ ，即假设t>0时电压源一直为1V，t<0时电压源为0，这其实是零状态响应。可见，$u_C(0_+)=u_C(0_-)=0$

$\tau=RC$ 和 $u_C(\infty)=1\mathrm{V}$

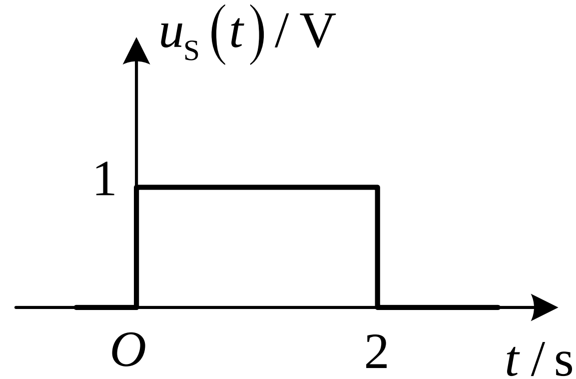
利用三要素法公式可得

$$u_C(t)=\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\right)\mathrm{V}\quad(t>0)$$

例3.4-5 图（a）所示电路中，电压源$u_S(t)$如图（b）所示，计算t>0时的u_C



（a）



（b）

解

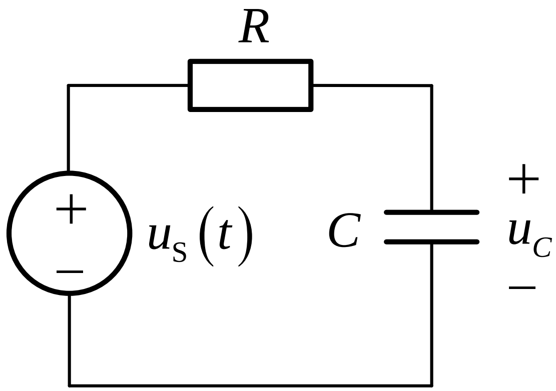
$$u_C(t)=\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)\mathrm{V}\quad(t>0)$$

图（b）所示电压源激励下，在$0<t<2$时间段的响应为

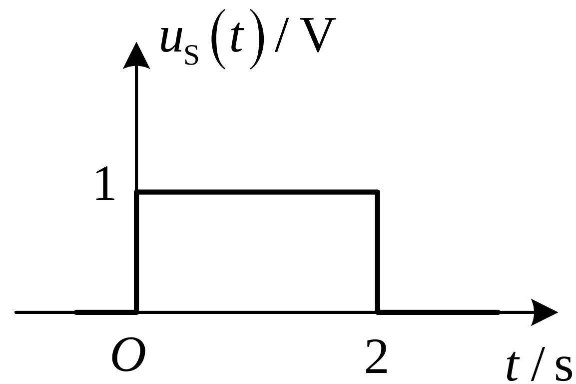
$$u_C(t)=\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)\mathrm{V}\quad(0<t<2)$$

3.4.2 三要素法

例3.4-5 图（a）所示电路中，电压源 $u_S(t)$ 如图（b）所示，计算t>0时的 u_C



（a）



（b）

解

$$u_C(t)=\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\right)\mathrm{V}\quad(0<t<2)$$

实际上，在 $t=2$ 时又进行换路。可得 $u_C(2_+)=u_C(2_-)=\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{2}{RC}}\right)\mathrm{V}$

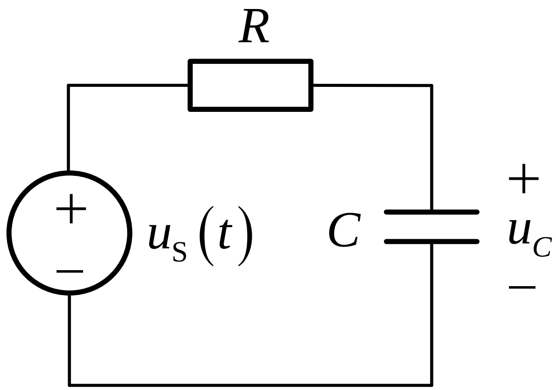
实际的终值为 $u_C(\infty)=0$，利用三要素法可得

$$u_C(t)=\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{2}{RC}}\right)\mathrm{e}^{-\frac{t-2}{RC}}\mathrm{V}\quad(t>2)$$

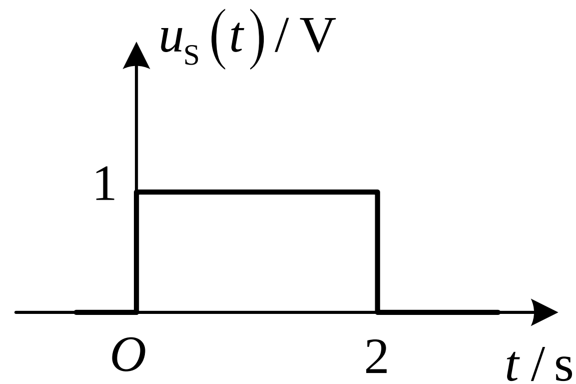
不同时间段的响应

3.4.2 三要素法

例3.4-5 图（a）所示电路中，电压源 $u_S(t)$ 如图（b）所示，计算t>0时的 u_C



（a）



（b）

解

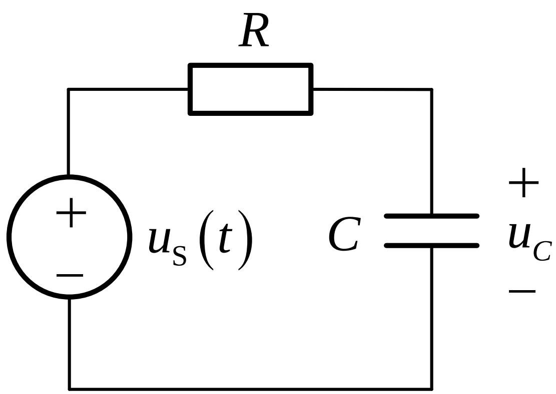
$$u_C(t)=\begin{cases}\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)\mathrm{V} & (0<t<2)\\ \left(1-e^{-\frac{2}{RC}}\right)e^{-\frac{t-2}{RC}}\mathrm{V} & (t>2)\end{cases}$$

不同时间段的响应

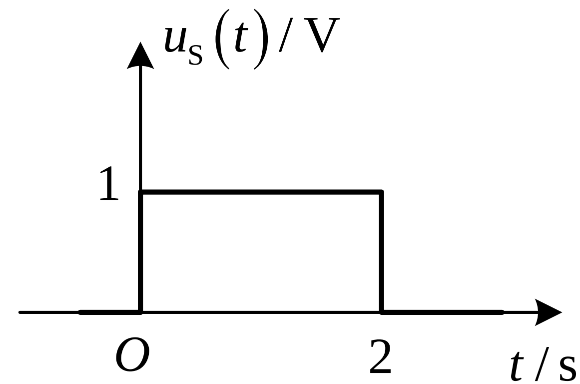
$$u_C(t)=\left\{\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)\left[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-2)\right]+\left(1-e^{-\frac{2}{RC}}\right)e^{-\frac{t-2}{RC}}\varepsilon(t-2)\right\}\mathrm{V}$$

3.4.2 三要素法

例3.4-5 图（a）所示电路中，电压源 $u_S(t)$ 如图（b）所示，计算 $t>0$ 时的 u_C



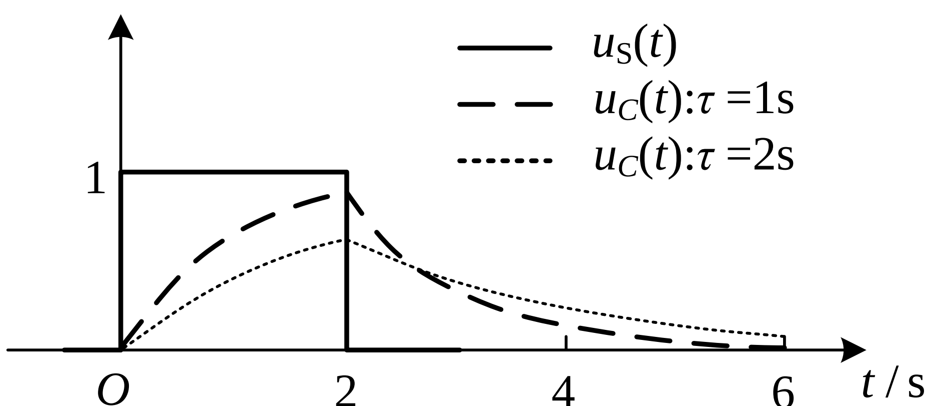
（a）



（b）

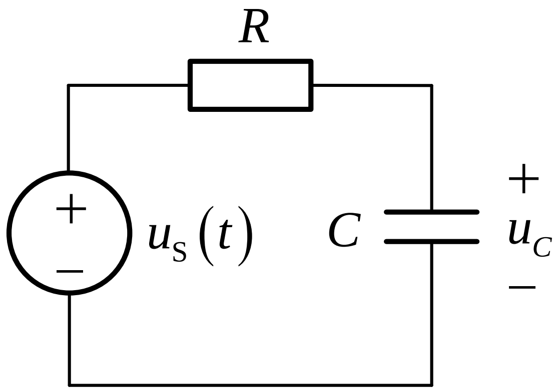
解

$$u_C(t)=\left\{\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)\left[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-2)\right]+\left(1-e^{-\frac{2}{RC}}\right)e^{-\frac{t-2}{RC}}\varepsilon(t-2)\right\}\text{V}$$

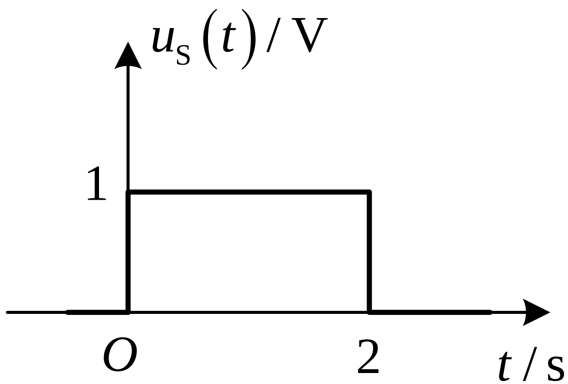


3.4.2 三要素法

例3.4-5 图（a）所示电路中，电压源$u_S(t)$ 如图（b）所示，计算t>0时的 u_C



（a）



（b）

解 方法2 利用LTI特性 $u_S(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-2)$

$$u_s(t)=\varepsilon(t) \rightarrow u_C(t)=\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)\mathrm{V}\quad (t>0) \rightarrow u_C(t)=\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)\varepsilon(t)\mathrm{V}$$

$$u_s(t)=\varepsilon(t-2) \rightarrow u_C(t)=\left(1-e^{-\frac{t-2}{RC}}\right)\varepsilon(t-2)\mathrm{V}$$

$$u_S(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-2) \rightarrow u_C(t)=\left\{\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)\varepsilon(t)\text{-}\left(1-e^{-\frac{t-2}{RC}}\right)\varepsilon(t-2)\right\}\mathrm{V}$$

3.5 LTI连续时间系统的零输入响应和零状态响应

$$y(t)=y_{\mathrm{zi}}(t)+y_{\mathrm{zs}}(t)$$

当LTI连续时间系统具有多个起始状态和多个激励时，其零输入响应、零状态响应和完全响应一般具有以下特性：

（1）零输入响应线性时不变特性，即零输入响应与各起始状态呈线性时不变关系；

（2）零状态响应线性时不变特性，即零状态响应与各激励呈线性时不变关系；

（3）完全响应等于零输入响应和零状态响应之和，但与各起始状态和各激励不满足线性和时不变关系。

3.5 LTI连续时间系统的零输入响应和零状态响应

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} y(t) = \sum_{l=0}^{m} b_l \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}t^l} x(t) \quad (n \geq m)$$

及起始状态 $y^{(i)}(0_-) \quad (i = 0, 1, \cdots, n-1)$

零输入响应

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} y_{\mathrm{zi}}(t) = 0 \\ y_{\mathrm{zi}}^{(i)}(0_-) = y^{(i)}(0_-) \quad (i = 0, 1, \cdots, n-1) \end{cases}$$

零状态响应

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} y_{\mathrm{zs}}(t) = \sum_{l=0}^{m} b_l \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}t^l} x(t) \\ y_{\mathrm{zs}}^{(i)}(0_-) = 0 \quad (i = 0, 1, \cdots, n-1) \end{cases}$$

3.5 LTI连续时间系统的零输入响应和零状态响应

$$y(t)=y_{\mathrm{zi}}(t)+y_{\mathrm{zs}}(t)$$

当LTI连续时间系统具有多个起始状态和多个激励时，其零输入响应、零状态响应和完全响应一般具有以下特性：

（1）零输入响应线性时不变特性，即零输入响应与各起始状态呈线性时不变关系；

（2）零状态响应线性时不变特性，即零状态响应与各激励呈线性时不变关系；

（3）完全响应等于零输入响应和零状态响应之和，但与各起始状态和各激励不满足线性和时不变关系。

3.5 LTI连续时间系统的零输入响应和零状态响应

例3.5-1 LTI系统方程为 $\frac{d^2}{dt^2}y(t)+5\frac{d}{dt}y(t)+4y(t)=\frac{d}{dt}x(t)+2x(t)$

$y(0_-)=2$ $y'(0_-)=1$ ，求该系统在下列不同激励下的完全响应 $y(t)$

（1）$x(t)=\varepsilon(t)$　　（2）$x(t)=e^{-3t}\varepsilon(t)$

（3）$x(t)=5\varepsilon(t)-3e^{-3t}\varepsilon(t)$　　（4）$x(t)=4\varepsilon(t)+2e^{-3(t-1)}\varepsilon(t-1)$

解 系统起始状态不变，所以在不同因果信号激励下，系统的零输入响应不变。求解该系统零输入响应的微分方程为

$$\begin{cases}\frac{d^2}{dt^2}y_{zi}(t)+5\frac{d}{dt}y_{zi}(t)+4y_{zi}(t)=0\\ y_{zi}(0_-)=2, y'_{zi}(0_-)=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}y_{zi}(0_+)=y_{zi}(0_-)=2\\ y'_{zi}(0_+)=y'_{zi}(0_-)=1\end{cases}$$

$$y_{zi}(t)=\left(A_1e^{-t}+B_1e^{-4t}\right)\varepsilon(t)$$

$$\begin{cases}y_{zi}(0_+)=A_1+B_1=2\\ y'_{zi}(0_+)=-A_1-4B_1=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A_1=3\\ B_1=-1\end{cases}$$

3.5 LTI连续时间系统的零输入响应和零状态响应

例3.5-1 LTI系统方程为 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t)+5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)+4y(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)+2x(t)$

$y(0_-)=2$ $y'(0_-)=1$ ，求该系统在下列不同激励下的完全响应 $y(t)$

（1） $x(t)=\varepsilon(t)$

（2） $x(t)=\mathrm{e}^{-3t}\varepsilon(t)$

（3） $x(t)=5\varepsilon(t)-3\mathrm{e}^{-3t}\varepsilon(t)$

（4） $x(t)=4\varepsilon(t)+2\mathrm{e}^{-3(t-1)}\varepsilon(t-1)$

该系统的零输入响应为 $y_{zi}(t)=\left(3\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-4t}\right)\varepsilon(t)$

求解该系统零状态响应的微分方程为

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y_{zs}(t)+5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y_{zs}(t)+4y_{zs}(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)+2x(t)\\ y_{zs}(0_-)=0,y'_{zs}(0_-)=0\end{cases}$$

3.5 LTI连续时间系统的零输入响应和零状态响应

例3.5-1 LTI系统方程为 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t)+5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)+4y(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)+2x(t)$

$y(0_-)=2$ $y'(0_-)=1$ ，求该系统在下列不同激励下的完全响应 $y(t)$

（1） $x(t)=\varepsilon(t)$ （2） $x(t)=\mathrm{e}^{-3t}\varepsilon(t)$

（3） $x(t)=5\varepsilon(t)-3\mathrm{e}^{-3t}\varepsilon(t)$ （4） $x(t)=4\varepsilon(t)+2\mathrm{e}^{-3(t-1)}\varepsilon(t-1)$

（1） 将 $x(t)=\varepsilon(t)$ 代入该系统的零状态响应微分方程

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y_{\mathrm{zs1}}(t)+5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y_{\mathrm{zs1}}(t)+4y_{\mathrm{zs1}}(t)=\delta(t)+2\varepsilon(t)\\ y_{\mathrm{zs1}}(0_-)=0, y'_{\mathrm{zs1}}(0_-)=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}y_{\mathrm{zs1}}(0_+)=y_{\mathrm{zs1}}(0_-)=0\\ y'_{\mathrm{zs1}}(0_+)=y'_{\mathrm{zs1}}(0_-)+1=1\end{cases}$$

例3.5-1 LTI系统方程为 $\frac{d^2}{dt^2}y(t)+5\frac{d}{dt}y(t)+4y(t)=\frac{d}{dt}x(t)+2x(t)$

$y(0_-)=2$ $y'(0_-)=1$ ，求该系统在下列不同激励下的完全响应 $y(t)$

（1） $x(t)=\varepsilon(t)$ （2） $x(t)=e^{-3t}\varepsilon(t)$

（3） $x(t)=5\varepsilon(t)-3e^{-3t}\varepsilon(t)$ （4） $x(t)=4\varepsilon(t)+2e^{-3(t-1)}\varepsilon(t-1)$

（1）在 $t>0$ 时，微分方程可以简化为

$$\frac{d^2}{dt^2}y_{zs1}(t)+5\frac{d}{dt}y_{zs1}(t)+4y_{zs1}(t)=2$$

$$y_{zs1}(t)=\left(\frac{1}{2}+A_2e^{-t}+B_2e^{-4t}\right)\varepsilon(t)$$

$$\begin{cases} y_{zs1}(0_+)=\frac{1}{2}+A_2+B_2=0 \\ y'_{zs1}(0_+)=-A_2-4B_2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_2=-\frac{1}{3} \\ B_2=-\frac{1}{6} \end{cases}$$

例3.5-1 LTI系统方程为 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t)+5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)+4y(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)+2x(t)$

$y(0_-)=2$ $y'(0_-)=1$ ，求该系统在下列不同激励下的完全响应 $y(t)$

（1） $x(t)=\varepsilon(t)$

（2） $x(t)=\mathrm{e}^{-3t}\varepsilon(t)$

（3） $x(t)=5\varepsilon(t)-3\mathrm{e}^{-3t}\varepsilon(t)$

（4） $x(t)=4\varepsilon(t)+2\mathrm{e}^{-3(t-1)}\varepsilon(t-1)$

（1）

$$y_{zs1}(t)=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-t}-\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-4t}\right)\varepsilon(t)$$

$$\begin{aligned}y_1(t)&=y_{zi}(t)+y_{zs1}(t)\\&=\left(3\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-4t}\right)\varepsilon(t)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-t}-\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-4t}\right)\varepsilon(t)\\&=\left(\frac{1}{2}+\frac{8}{3}\mathrm{e}^{-t}-\frac{7}{6}\mathrm{e}^{-4t}\right)\varepsilon(t)\end{aligned}$$

3.5 LTI连续时间系统的零输入响应和零状态响应

例3.5-1 LTI系统方程为 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t)+5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)+4y(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)+2x(t)$

$y(0_-)=2$ $y'(0_-)=1$ ，求该系统在下列不同激励下的完全响应 $y(t)$

（1） $x(t)=\varepsilon(t)$ （2） $x(t)=\mathrm{e}^{-3t}\varepsilon(t)$

（3） $x(t)=5\varepsilon(t)-3\mathrm{e}^{-3t}\varepsilon(t)$ （4） $x(t)=4\varepsilon(t)+2\mathrm{e}^{-3(t-1)}\varepsilon(t-1)$

（2）将 $x(t)=\mathrm{e}^{-3t}\varepsilon(t)$ 代入该系统的零状态响应微分方程

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y_{zs2}(t)+5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y_{zs2}(t)+4y_{zs2}(t)=\delta(t)-\mathrm{e}^{-3t}\varepsilon(t)\\ y_{zs2}(0_-)=0, y'_{zs2}(0_-)=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}y_{zs2}(0_+)=y_{zs2}(0_-)=0\\ y'_{zs2}(0_+)=y'_{zs2}(0_-)+1=1\end{cases}$$

3.5 LTI连续时间系统的零输入响应和零状态响应

例3.5-1 LTI系统方程为 $\dfrac{d^2}{dt^2}y(t)+5\dfrac{d}{dt}y(t)+4y(t)=\dfrac{d}{dt}x(t)+2x(t)$

$y(0_-)=2$ $y'(0_-)=1$ ，求该系统在下列不同激励下的完全响应 $y(t)$

（1） $x(t)=\varepsilon(t)$ （2） $x(t)=e^{-3t}\varepsilon(t)$

（3） $x(t)=5\varepsilon(t)-3e^{-3t}\varepsilon(t)$ （4） $x(t)=4\varepsilon(t)+2e^{-3(t-1)}\varepsilon(t-1)$

（2）在 $t>0$ 时，微分方程可以简化为

$$\frac{d^2}{dt^2}y_{zs2}(t)+5\frac{d}{dt}y_{zs2}(t)+4y_{zs2}(t)=-e^{-3t}$$

$$y_{zs}(t)=\left(\frac{1}{2}e^{-3t}+A_3e^{-t}+B_3e^{-4t}\right)\varepsilon(t)$$

$$\begin{cases} y_{zs2}(0_+)=\dfrac{1}{2}+A_3+B_3=0 \\ y'_{zs2}(0_+)=-\dfrac{3}{2}-A_3-4B_3=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_3=\dfrac{1}{6} \\ B_3=-\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

例3.5-1 LTI系统方程为 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t)+5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)+4y(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)+2x(t)$

$y(0\_)=2$ $y'(0\_)=1$ ，求该系统在下列不同激励下的完全响应 $y(t)$

（1） $x(t)=\varepsilon(t)$ （2） $x(t)=\mathrm{e}^{-3t}\varepsilon(t)$

（3） $x(t)=5\varepsilon(t)-3\mathrm{e}^{-3t}\varepsilon(t)$ （4） $x(t)=4\varepsilon(t)+2\mathrm{e}^{-3(t-1)}\varepsilon(t-1)$

（2）

$$y_{zs}(t)=\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3t}+\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-t}-\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-4t}\right)\varepsilon(t)$$

$$\begin{aligned}y_2(t)&=y_{zi}(t)+y_{zs2}(t)\\&=\left(3\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-4t}\right)\varepsilon(t)+\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3t}+\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-t}-\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-4t}\right)\varepsilon(t)\\&=\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3t}+\frac{19}{6}\mathrm{e}^{-t}-\frac{5}{3}\mathrm{e}^{-4t}\right)\varepsilon(t)\end{aligned}$$

例3.5-1 LTI系统方程为 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t)+5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)+4y(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)+2x(t)$

$y(0_-)=2$ $y'(0_-)=1$ ， 求该系统在下列不同激励下的完全响应 $y(t)$

（1） $x(t)=\varepsilon(t)$　　（2） $x(t)=\mathrm{e}^{-3t}\varepsilon(t)$

（3） $x(t)=5\varepsilon(t)-3\mathrm{e}^{-3t}\varepsilon(t)$　　（4） $x(t)=4\varepsilon(t)+2\mathrm{e}^{-3(t-1)}\varepsilon(t-1)$

（3）在已知激励为$x(t)=\varepsilon(t)$和 $x(t)=\mathrm{e}^{-3t}\varepsilon(t)$ 的零状态响应的情况下，利用LTI系统中零状态响应与激励之间的线性关系，可得激励信号为 $x(t)=5\varepsilon(t)-3\mathrm{e}^{-3t}\varepsilon(t)$ 时零状态响应为

$$
\begin{aligned}
y_{zs3}(t)&=5y_{zs1}(t)-3y_{zs2}(t)\\
&=5\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-t}-\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-4t}\right)\varepsilon(t)-3\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3t}+\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-t}-\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-4t}\right)\varepsilon(t)\\
&=\left(\frac{5}{2}-\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-3t}-\frac{13}{6}\mathrm{e}^{-t}+\frac{7}{6}\mathrm{e}^{-4t}\right)\varepsilon(t)
\end{aligned}
$$

3.5 LTI连续时间系统的零输入响应和零状态响应

例3.5-1 LTI系统方程为 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t)+5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)+4y(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)+2x(t)$

$y(0_-)=2$ $y'(0_-)=1$ ，求该系统在下列不同激励下的完全响应 $y(t)$

（1） $x(t)=\varepsilon(t)$　　（2） $x(t)=\mathrm{e}^{-3t}\varepsilon(t)$

（3） $x(t)=5\varepsilon(t)-3\mathrm{e}^{-3t}\varepsilon(t)$　　（4） $x(t)=4\varepsilon(t)+2\mathrm{e}^{-3(t-1)}\varepsilon(t-1)$

（3）

$$y_3(t)=y_{zi}(t)+y_{zs3}(t)$$

$$=\left(3\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-4t}\right)\varepsilon(t)+\left(\frac{5}{2}-\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-3t}-\frac{13}{6}\mathrm{e}^{-t}+\frac{7}{6}\mathrm{e}^{-4t}\right)\varepsilon(t)$$

$$=\left(\frac{5}{2}-\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-3t}+\frac{5}{6}\mathrm{e}^{-t}+\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-4t}\right)\varepsilon(t)$$

3.5 LTI连续时间系统的零输入响应和零状态响应

例3.5-1 LTI系统方程为 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t)+5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)+4y(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)+2x(t)$

$y(0_-)=2$ $y'(0_-)=1$ ，求该系统在下列不同激励下的完全响应 $y(t)$

（1） $x(t)=\varepsilon(t)$ （2） $x(t)=\mathrm{e}^{-3t}\varepsilon(t)$

（3） $x(t)=5\varepsilon(t)-3\mathrm{e}^{-3t}\varepsilon(t)$ （4） $x(t)=4\varepsilon(t)+2\mathrm{e}^{-3(t-1)}\varepsilon(t-1)$

（4）利用LTI系统中零状态响应与激励之间的线性时不变关系

$$y_{zs4}(t)=4y_{zs1}(t)+2y_{zs2}(t-1)$$

$$=4\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-t}-\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-4t}\right)\varepsilon(t)+2\left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3(t-1)}+\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-(t-1)}-\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-4(t-1)}\right]\varepsilon(t-1)$$

$$=\left(2-\frac{4}{3}\mathrm{e}^{-t}-\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-4t}\right)\varepsilon(t)+\left[\mathrm{e}^{-3(t-1)}+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-(t-1)}-\frac{4}{3}\mathrm{e}^{-4(t-1)}\right]\varepsilon(t-1)$$

例3.5-1 LTI系统方程为 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t)+5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)+4y(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)+2x(t)$

$y(0_-)=2$ $y'(0_-)=1$，求该系统在下列不同激励下的完全响应 $y(t)$

（1） $x(t)=\varepsilon(t)$

（2） $x(t)=\mathrm{e}^{-3t}\varepsilon(t)$

（3） $x(t)=5\varepsilon(t)-3\mathrm{e}^{-3t}\varepsilon(t)$

（4） $x(t)=4\varepsilon(t)+2\mathrm{e}^{-3(t-1)}\varepsilon(t-1)$

（4） $y_4(t)=y_{\mathrm{zi}}(t)+y_{\mathrm{zs4}}(t)$

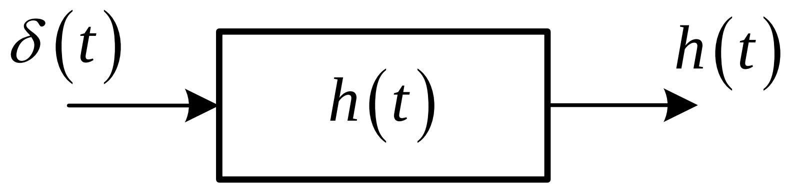
$$=\left(3\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-4t}\right)\varepsilon(t)+\left(2-\frac{4}{3}\mathrm{e}^{-t}-\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-4t}\right)\varepsilon(t)$$

$$+\left[\mathrm{e}^{-3(t-1)}+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-(t-1)}-\frac{4}{3}\mathrm{e}^{-4(t-1)}\right]\varepsilon(t-1)$$

$$=\left(2+\frac{5}{3}\mathrm{e}^{-t}-\frac{5}{3}\mathrm{e}^{-4t}\right)\varepsilon(t)+\left[\mathrm{e}^{-3(t-1)}+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-(t-1)}-\frac{4}{3}\mathrm{e}^{-4(t-1)}\right]\varepsilon(t-1)$$

3.6 冲激响应和阶跃响应

单位冲激响应是指单位冲激信号激励下系统的零状态响应，简称冲激响应



单位阶跃响应是指单位阶跃信号激励下系统的零状态响应，简称阶跃响应，用$g(t)$ 表示

$$\begin{cases} g(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\mathrm{d}\tau \\ h(t) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g(t) \end{cases}$$

例3.6-1 LTI系统方程为 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t)+5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)+4y(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)+2x(t)$

$y(0_-)=2\quad y'(0_-)=1$，求该系统阶跃响应。

解 方法1：直接求解 $x(t)=\varepsilon(t)$ 时的零状态响应

方法2：利用冲激响应的积分计算

例3.6-1 LTI系统方程为 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t)+5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)+4y(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)+2x(t)$

$y(0_-)=2$ $y'(0_-)=1$，求该系统阶跃响应。

解 **方法1：直接求解** $x(t)=\varepsilon(t)$ **时的零状态响应**

计算阶跃响应的方程为 $\begin{cases}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}g(t)+5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g(t)+4g(t)=\delta(t)+2\varepsilon(t)\\ g(0_-)=0,\ \ g'(0_-)=0\end{cases}$

$$\begin{cases}g(0_+)=g(0_-)=0\\ g'(0_+)=g'(0_-)+1=0+1=1\end{cases}$$

$$g(t)=\left(\frac{1}{2}+A_1\mathrm{e}^{-t}+B_1\mathrm{e}^{-4t}\right)\varepsilon(t)$$

在 $t>0$ 时，微分方程可以简化为

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}g(t)+5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g(t)+4g(t)=2$$

$$\begin{cases}g(0_+)=\frac{1}{2}+A_1+B_1=0\\ g'(0_+)=-A_1-4B_1=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A_1=-\frac{1}{3}\\ B_1=-\frac{1}{6}\end{cases}$$

3.6 冲激响应和阶跃响应

例3.6-1 LTI系统方程为 $\frac{d^2}{dt^2}y(t)+5\frac{d}{dt}y(t)+4y(t)=\frac{d}{dt}x(t)+2x(t)$

$y(0_-)=2 \quad y'(0_-)=1$，求该系统阶跃响应。

解 方法1：直接求解 $x(t)=\varepsilon(t)$ 时的零状态响应

$$g(t)=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}e^{-t}-\frac{1}{6}e^{-4t}\right)\varepsilon(t)$$

例3.6-1 LTI系统方程为 $\frac{d^2}{dt^2}y(t)+5\frac{d}{dt}y(t)+4y(t)=\frac{d}{dt}x(t)+2x(t)$

$y(0_-)=2 \quad y'(0_-)=1$，求该系统阶跃响应。

方法2：利用冲激响应的积分计算

冲激响应的方程为

$$\begin{cases}\frac{d^2}{dt^2}h(t)+5\frac{d}{dt}h(t)+4h(t)=\delta'(t)+2\delta(t)\\ h(0_-)=0,\ h'(0_-)=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}h(0_+)=h(0_-)+1=0+1=1\\ h'(0_+)=h'(0_-)-3=0-3=-3\end{cases}$$

$$h(t)=\left(A_2e^{-t}+B_2e^{-4t}\right)\varepsilon(t)$$

在 $t>0$ 时，微分方程可以简化为

$$\frac{d^2}{dt^2}h(t)+5\frac{d}{dt}h(t)+4h(t)=0$$

$$\begin{cases}h(0_+)=A_2+B_2=1\\ h'(0_+)=-A_2-4B_2=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A_2=\frac{1}{3}\\ B_2=\frac{2}{3}\end{cases}$$

例3.6-1 LTI系统方程为 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t)+5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)+4y(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)+2x(t)$

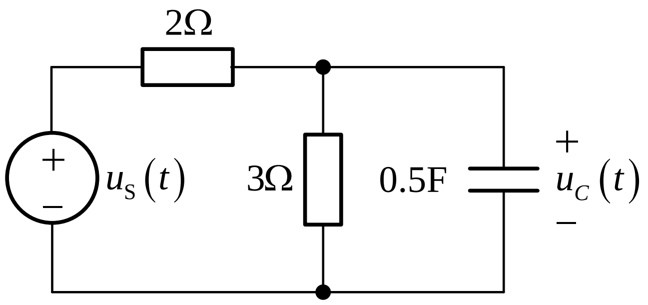
$y(0_-)=2$ $y'(0_-)=1$，求该系统阶跃响应。

方法2：利用冲激响应的积分计算

$$h(t)=\left(\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-t}+\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-4t}\right)\varepsilon(t)$$

$$\begin{aligned}
g(t)&=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)\mathrm{d}\tau\\
&=\int_{-\infty}^{t}\left(\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-\tau}+\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-4\tau}\right)\varepsilon(\tau)\mathrm{d}\tau\\
&=\int_{0}^{t}\left(\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-\tau}+\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-4\tau}\right)\mathrm{d}\tau\,\varepsilon(t)\\
&=\left(-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-\tau}\Big|_{\tau=0}^{t}-\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-4\tau}\Big|_{\tau=0}^{t}\right)\varepsilon(t)\\
&=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-t}-\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-4t}\right)\varepsilon(t)
\end{aligned}$$

例3. 6−2 计算如图3.6-2所示电路的冲激响应，其中 $u_S(t)$ 为输入，$u_C(t)$为输出



解 该电路的微分方程为

$$2\times\left[\frac{u_C(t)}{3}+0.5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_C(t)\right]+u_C(t)=u_S(t)$$

整理可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_C(t)+\frac{5}{3}u_C(t)=u_S(t)$$

冲激响应的方程为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h(t)+\dfrac{5}{3}h(t)=\delta(t)\\ h(0_-)=0\end{cases}$$

$$h(0_+)=h(0_-)+1=0+1=1$$

在 $t>0$ 时，微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h(t)+\frac{5}{3}h(t)=0$$

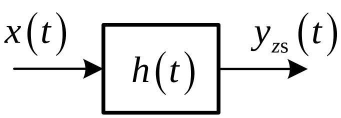
$$h(t)=A\mathrm{e}^{-\frac{5}{3}t}\qquad h(0_+)=A=1$$

$$h(t)=\mathrm{e}^{-\frac{5}{3}t}\varepsilon(t)\mathrm{V}$$

3.7 卷积积分

1. 卷积积分的定义

$$f(t)=f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)\,f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

<table>
<tr><th>序号</th><th>激励</th><th>LTI 系统</th><th>零状态响应</th></tr>
<tr><td>1</td><td>$\delta(t)$</td><td rowspan="6">
</td><td>$h(t)$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$\delta(t-\tau)$</td><td>$h(t-\tau)$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$x(\tau)\delta(t-\tau)\Delta\tau$</td><td>$x(\tau)h(t-\tau)\Delta\tau$</td></tr>
<tr><td>4</td><td>$\sum x(\tau)\delta(t-\tau)\Delta\tau$</td><td>$\sum x(\tau)h(t-\tau)\Delta\tau$</td></tr>
<tr><td>5</td><td>$\lim\limits_{\Delta\tau\to 0}\sum x(\tau)\delta(t-\tau)\Delta\tau$</td><td>$\lim\limits_{\Delta\tau\to 0}\sum x(\tau)h(t-\tau)\Delta\tau$</td></tr>
<tr><td>6</td><td>$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$</td><td>$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$</td></tr>
</table>

3.7 卷积积分

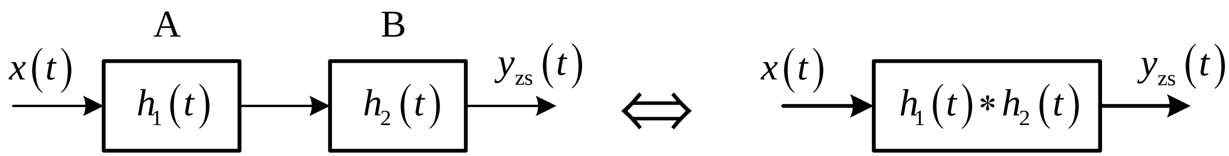
2. 卷积积分的性质

序号	性质名称		表达式
1	结合律		$\left[f_1(t)*f_2(t)\right]*f_3(t)=f_1(t)*\left[f_2(t)*f_3(t)\right]$
2	交换律		$f_1(t)*f_2(t)=f_2(t)*f_1(t)$
3	分配律		$f_1(t)*\left[f_2(t)+f_3(t)\right]=f_1(t)*f_2(t)+f_1(t)*f_3(t)$
4	与冲激函数的卷积		$f(t)*\delta(t)=f(t)$ $f(t)*\delta(t-t_0)=f(t-t_0)$
5	时移性		若 $f(t)=f_1(t)*f_2(t)$， 则 $f(t-t_1-t_2)=f_1(t-t_1)*f_2(t-t_2)$
6	微积分	微分	$\left[f_1(t)*f_2(t)\right]'=f_1'(t)*f_2(t)=f_1(t)*f_2'(t)$
		积分	$\left[f_1(t)*f_2(t)\right]^{(-1)}=f_1^{(-1)}(t)*f_2(t)=f_1(t)*f_2^{(-1)}(t)$
		微积分	$f_1(t)*f_2(t)=f_1'(t)*f_2^{(-1)}(t)=f_1^{(-1)}(t)*f_2'(t)$

3.7 卷积积分

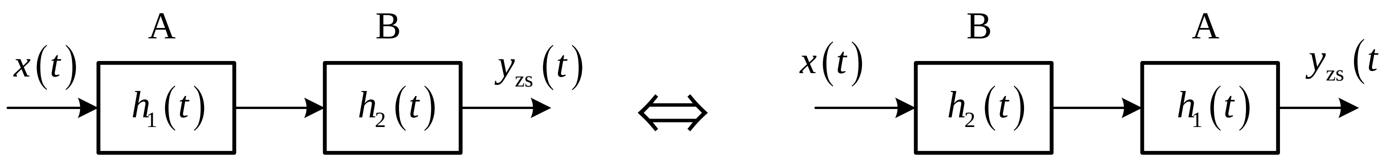
2. 卷积积分的性质

（1）结合律



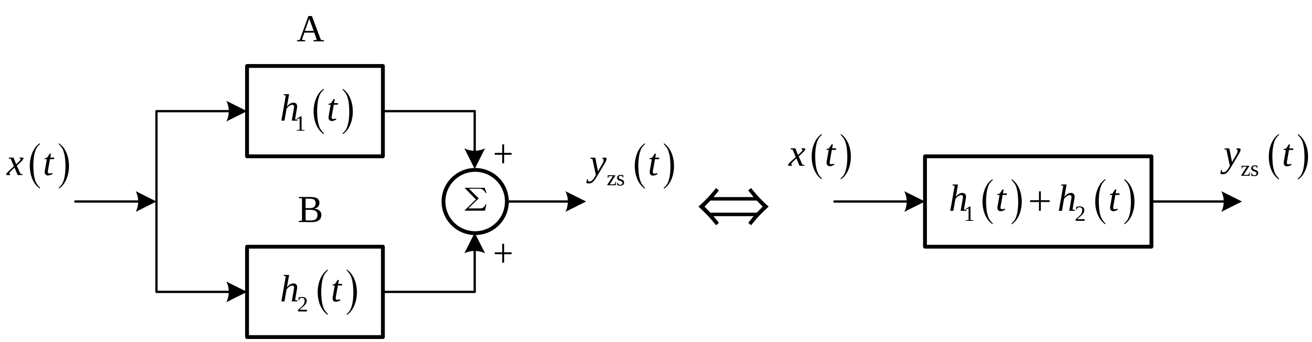
(a) (b)

（2）交换律



(a) (b)

（3）分配律



(a) (b)

2. 卷积积分的性质

（4）与冲激函数的卷积

$$f(t)*\delta(t)=f(t) \qquad f(t)*\delta(t-t_0)=f(t-t_0)$$

$$\begin{aligned} f(t)*\delta(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= f(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(t)*\delta(t-t_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(t-\tau-t_0)\mathrm{d}\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-t_0)\delta(t-\tau-t_0)\mathrm{d}\tau \\ &= f(t-t_0) \end{aligned}$$

2. 卷积积分的性质

（5）时移性

若 $f(t)=f_1(t)*f_2(t)$，则有

$$f(t-t_1-t_2)=f_1(t-t_1)*f_2(t-t_2)$$

（6）微积分性质

① 卷积的微分性质为

$$\left[f_1(t)*f_2(t)\right]'=f_1'(t)*f_2(t)=f_1(t)*f_2'(t)$$

$$\left[f_1(t)*f_2(t)\right]^{(n)}=f_1^{(m)}(t)*f_2^{(n-m)}(t)\quad(n\geq m\geq 0)$$

$$f(t)*\delta'(t)=f'(t)$$

2. 卷积积分的性质

（6）微积分性质

② 卷积的积分性质为

$$\left[f_1(t) * f_2(t)\right]^{(-1)} = f_1^{(-1)}(t) * f_2(t) = f_1(t) * f_2^{(-1)}(t)$$

$$f(t) * \varepsilon(t) = f^{(-1)}(t)$$

③ 结合卷积的微分性质和积分性质可以得到卷积的微积分性质为

$$f_1(t) * f_2(t) = f_1'(t) * f_2^{(-1)}(t) = f_1^{(-1)}(t) * f_2'(t)$$

3.7 卷积积分

2. 卷积积分的性质

序号	性质名称		表达式
1	结合律		$\left[f_1(t)*f_2(t)\right]*f_3(t)=f_1(t)*\left[f_2(t)*f_3(t)\right]$
2	交换律		$f_1(t)*f_2(t)=f_2(t)*f_1(t)$
3	分配律		$f_1(t)*\left[f_2(t)+f_3(t)\right]=f_1(t)*f_2(t)+f_1(t)*f_3(t)$
4	与冲激函数的卷积		$f(t)*\delta(t)=f(t)$ $f(t)*\delta(t-t_0)=f(t-t_0)$
5	时移性		若 $f(t)=f_1(t)*f_2(t)$， 则 $f(t-t_1-t_2)=f_1(t-t_1)*f_2(t-t_2)$
6	微积分	微分	$\left[f_1(t)*f_2(t)\right]'=f_1'(t)*f_2(t)=f_1(t)*f_2'(t)$
		积分	$\left[f_1(t)*f_2(t)\right]^{(-1)}=f_1^{(-1)}(t)*f_2(t)=f_1(t)*f_2^{(-1)}(t)$
		微积分	$f_1(t)*f_2(t)=f_1'(t)*f_2^{(-1)}(t)=f_1^{(-1)}(t)*f_2'(t)$

3.卷积的计算

（1）利用定义式求解

（2）利用性质求解

例 3.7-1 某LTI系统冲激响应 $h(t)=\left(\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-t}+\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-4t}\right)\varepsilon(t)$，激励为 $x(t)=\varepsilon(t)$，求该系统的零状态响应。

解 该系统的零状态响应为

$$y_{zs}(t)=x(t)*h(t)=h(t)*x(t)=\left[\left(\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-t}+\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-4t}\right)\varepsilon(t)\right]*\varepsilon(t)$$

（1）利用定义式求解

$$y_{zs}(t)=\left[\left(\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-t}+\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-4t}\right)\varepsilon(t)\right]*\varepsilon(t)=\int_0^t\left(\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-\tau}+\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-4\tau}\right)\varepsilon(\tau)\varepsilon(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$=\int_0^t\left(\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-\tau}+\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-4\tau}\right)\mathrm{d}\tau\cdot\varepsilon(t)$$

$$=\left(-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-\tau}\Big|_{\tau=0}^{t}-\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-4\tau}\Big|_{\tau=0}^{t}\right)\varepsilon(t)$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-t}-\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-4t}\right)\varepsilon(t)$$

3.7 卷积积分

例 3.7-1 某LTI系统冲激响应 $h(t)=\left(\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-t}+\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-4t}\right)\varepsilon(t)$，激励为 $x(t)=\varepsilon(t)$，求该系统的零状态响应。

解 该系统的零状态响应为

$$y_{zs}(t)=x(t)*h(t)=h(t)*x(t)=\left[\left(\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-t}+\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-4t}\right)\varepsilon(t)\right]*\varepsilon(t)$$

（2）利用性质求解

$$y_{zs}(t)=\left[\left(\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-t}+\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-4t}\right)\varepsilon(t)\right]*\varepsilon(t)=\left[\left(\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-t}+\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-4t}\right)\varepsilon(t)\right]^{(-1)}*\delta(t)$$

$$=\int_{-\infty}^{t}\left(\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-\tau}+\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-4\tau}\right)\varepsilon(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{0}^{t}\left(\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-\tau}+\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-4\tau}\right)\mathrm{d}\tau\cdot\varepsilon(t)$$

$$=\left(-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-\tau}\Big|_{\tau=0}^{t}-\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-4\tau}\Big|_{\tau=0}^{t}\right)\varepsilon(t)$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-t}-\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-4t}\right)\varepsilon(t)$$

例3.7-2 已知 $f(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-2)$ ，求 $f(t)*f(t)$

解

$$f_1(t)=\varepsilon(t)*\varepsilon(t)=\varepsilon^{(-1)}(t)*\delta(t)=t\varepsilon(t)$$

$$\begin{aligned} f(t)*f(t) &= \left[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-2)\right]*\left[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-2)\right] \\ &= \varepsilon(t)*\varepsilon(t)-2\varepsilon(t)*\varepsilon(t-2)+\varepsilon(t-2)*\varepsilon(t-2) \\ &= f_1(t)-2f_1(t-2)+f_1(t-4) \\ &= t\varepsilon(t)-2(t-2)\varepsilon(t-2)+(t-4)\varepsilon(t-4) \end{aligned}$$

例3. 7−3 求例3.6-2所示电路在 $u_{\mathrm{S}}(t)=\mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t)\,\mathrm{V}$ 时的零状态响应

解 已在例3.6-2中求得该电路的冲激响应为 $h(t)=\mathrm{e}^{-\frac{5}{3}t}\varepsilon(t)\,\mathrm{V}$

因此，该电路在 $u_{\mathrm{S}}(t)=\mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t)\,\mathrm{V}$ 时的零状态响应为

$$
\begin{aligned}
u_{C\mathrm{zs}}(t) &= u_{\mathrm{S}}(t)*h(t)=\mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t)*\mathrm{e}^{-\frac{5}{3}t}\varepsilon(t) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-2\tau}\varepsilon(\tau)\cdot\mathrm{e}^{-\frac{5}{3}(t-\tau)}\varepsilon(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \\
&= \mathrm{e}^{-\frac{5}{3}t}\int_{0}^{t}\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}\tau}\,\mathrm{d}\tau\,\varepsilon(t)=-3\mathrm{e}^{-\frac{5}{3}t}\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}\tau}\Big|_{\tau=0}^{t}\varepsilon(t) \\
&= -3\mathrm{e}^{-\frac{5}{3}t}\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}t}-1\right)\varepsilon(t)=3\left(\mathrm{e}^{-\frac{5}{3}t}-\mathrm{e}^{-2t}\right)\varepsilon(t)\,\mathrm{V}
\end{aligned}
$$