2018-2019-1 概率练习题答案

一、单项选择题

1、对于样本空间中任意两个事件 A 与 B，下列事件关系中**不正确**的是（　D　）.

(A) $A-B=A\bar{B}$　　(B) $A\cup B=A\cup(B-AB)$

(C) $A=AB\cup A\bar{B}$　　(D) $(A\cup B)-B=A$

2、设事件 A 与 B 是互不相容，且 $P(A)>0$，$P(B)>0$，则下列式子**正确**的是（　C　）.

(A) $P(B|A)>0$　　(B) $P(A|B)=P(A)$

(C) $P(A|B)=0$　　(D) $P(AB)=P(A)P(B)$

3、若随机变量 X 的概率密度为：$f(x)=\begin{cases} a/(x^2+1), & -1<x<1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$，则 a 的取值为：（　A　）.

(A) $\dfrac{2}{\pi}$　　(B) $\dfrac{\pi}{2}$　　(C) 0　　(D) 无法确定

4、设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 均来自正态总体 $N(0,\sigma^2)$ 的两个独立样本，则统计量 $U=\dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{\sqrt{Y_1^2+Y_2^2+\cdots+Y_n^2}}$ 的分布是（　B　）.

(A) $\chi^2(n)$　　(B) $t(n)$　　(C) $F(n,n)$　　(D) 不能确定

5、设 X_1,X_2,X_3,X_4 是来自正态分布总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，其中 μ 未知，σ^2 已知，下列估计量中，关于 μ 的最有效的无偏估计量是(　C　).

(A) $T_1=\dfrac{1}{6}(X_1+X_2)+\dfrac{1}{3}(X_3+X_4)$　　(B) $T_2=\dfrac{1}{5}(X_1+2X_2+3X_3+4X_4)$

(C) $T_3=\dfrac{1}{4}(X_1+X_2+X_3+X_4)$　　(D) $T_4=\dfrac{1}{5}(X_1+2X_2+X_3+X_4)$

二、填空题

1、设事件 A 与 B 相互独立，且满足 $P(A\cup B)=0.8$，$P(B)=0.5$，则 $P(AB)=$ ___0.3____.

2、若一批产品中 90%是合格品，检查时一个合格品被误认为是次品的概率为 0.05，一个次品被误认为是合格品的概率为 0.05，则一个经检查后被认为是合格品的产品确是合格品的概率为_171/172___.

3、设随机变量 X 的分布律为：$P\{X=k\}=\frac{k}{10}$，$k=1,2,3,4$，则 $P\{\frac{1}{2}<X\le\frac{5}{2}\}=$ __0.3_________.

4、设随机变量 X 服从二项分布 $b(100,0.2)$，随机变量 Y 服从正态分布 $N(5,1)$，且 X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=0.25$，则 $E(X-2Y+1)=$ __11____________，$D(X-2Y+1)=$ _16_______________.

5、设样本 $X_1,X_2,\cdots,X_6$ 来自总体 $N(0,1)$，且 $Y=(X_1+X_2)^2+(X_3+X_4)^2+(X_5+X_6)^2$，要使变量 CY 服从 χ^2 分布，则常数 $C=$ _____0.5__________.

三、一加法器同时收到 30 个噪声电压 V_k $(k=1,2,\cdots,30)$，设它们是相互独立的随机变量，且都在区间（0,10）上服从均匀分布，记 $V=\sum_{k=1}^{30}V_k$，求 $P\{V>130\}$ 的近似值. (结果用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 表示，$x>0$)

解：由题意知 $E(V_k)=5$，$D(V_k)=\frac{100}{12}$，由中心极限定理可知所求概率为：

$$P\{V>130\}=P\{\sum_{k=1}^{30}V_k>130\}=1-P\{\sum_{k=1}^{30}V_k\le130\}=1-P\{\frac{\sum_{k=1}^{30}V_k-30\times5}{\sqrt{30\times\frac{100}{12}}}\le\frac{130-30\times5}{\sqrt{30\times\frac{100}{12}}}\}$$

$$\approx1-\Phi(-\frac{2\sqrt{10}}{5})=1-[1-\Phi(\frac{2\sqrt{10}}{5})]=\Phi(\frac{2\sqrt{10}}{5})$$

四、设随机变量 (X,Y) 的概率分布律为：

Y \ X	0	1	2
-1	0.1	0.1	0.4
1	0.1	0.2	0.1

求 (1) 关于 $Z=X+Y$ 的分布律；(2) 概率 $P\{X+Y\le1\}$；(3) $E(Y)$ 和 $D(Y)$；(4) $Cov(X,Y)$.

解：(1) 关于 $Z=X+Y$ 的分布律为：

Z	-1	0	1	2	3
P	0.1	0.1	0.5	0.2	0.1

(2) $P\{X+Y\le1\}=1-P\{X+Y=2\}-P\{X+Y=3\}=0.7$

(3) 关于 Y 的边缘分布律为：

Y	-1	1
P	0.6	0.4

从而有 $E(Y) = -1\times 0.6 + 1\times 0.4 = -0.2$，$E(Y^2) = (-1)^2\times 0.6 + 1^2\times 0.4 = 1.0$，故

$D(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 1.0 - (-0.2)^2 = 0.96$

(4) 关于 X 的边缘分布律为：

X	0	1	2
P	0.2	0.3	0.5

从而有：$E(X) = 0\times 0.2 + 1\times 0.3 + 2\times 0.5 = 1.3$，

$E(XY) = 0\times(-1)\times 0.1 + 0\times 1\times 0.1 + 1\times(-1)\times 0.1 + 1\times 1\times 0.2 + 2\times(-1)\times 0.4 + 2\times 1\times 0.1 = -0.5$

从而有 $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = -0.5 - 1.3\times(-0.2) = -0.24$

五、设二维随机变量 (X,Y) 的概率函数为：

$$f(x,y) = \begin{cases} Cxy, & 0<x<1, 0<y<x^2; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(1)求常数 C； (2)求关于 X 和 Y 的边缘概率密度； (3) 问 X 和 Y 是否相互独立？需说明理由； (4)求 $E(XY)$. (5) 求 $Z = X^2 - Y$ 的分布函数.

解：(1)由 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1$，从而有 $\int_0^1 dx\int_0^{x^2} Cxydy = 1$，所以 $C = 12$；

(2)关于 X 的边缘概率密度：$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \begin{cases} \int_0^{x^2} 12xydy = 6x^5, & 0<x<1, \\ 0, & otherwise. \end{cases}$

从而其分布函数为：$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)dx = \begin{cases} 0, & x<0 \\ \int_0^x 6x^5dx = x^6, & 0\le x<1, \\ 1, & x\ge 1. \end{cases}$

关于 Y 的边缘概率密度：

$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \begin{cases} \int_{\sqrt{y}}^1 12xydx = 6y(1-y), & 0<y<1, \\ 0, & otherwise. \end{cases}$

从而其分布函数为：$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(y)dy = \begin{cases} 0, & y<0 \\ \int_0^y 6y(1-y)dy = 3y^2 - 2y^3, & 0\le y<1, \\ 1, & y\ge 1. \end{cases}$

(3)显然，$f(x,y) \ne f_X(x)f_Y(y)$，所以 X 和 Y 不相互独立.

(4) 由 $E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\ f(x,y)dxdy = \int_0^1 dx\int_0^{x^2} xy\cdot 12xy\ dxdy = 4/9$

(5) 令 $F_Z(z) = P\{Z\le z\} = P\{X^2 - Y\le z\}$，

当$z<0$时，$F_Z(z)=P\{X^2-Y\le z\}=0$；

当$0\le z<1$时，

$$F_Z(z)=P\{X^2-Y\le z\}=1-P\{Y\le X^2-z\}=1-\int_{\sqrt{z}}^{1}dx\int_0^{x^2-z}12xydy=z^3+3z-3z^2$$

当$z\ge 1$时，$F_Z(z)=P\{X^2-Y\le z\}=1$.

即分布函数：$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ z^3+3z-3z^2, & 0\le z<1,\\ 1, & z\ge 1\end{cases}$，密度函数为：

$$f_Z(z)=\begin{cases}3z^2+3-6z, & 0\le z<1,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

六、设总体X具有指数分布，其概率密度为$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$，其中$\theta$是未知参数. 又$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自该总体的一个样本，$x_1,x_2,\cdots,x_n$为样本值. 试**分别**求未知参数$\theta$的矩估计量和最大似然估计量$\hat{\theta}$.

解：(1)先求矩估计量：$\bar{X}=E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x)dx=\int_0^{+\infty}x\cdot\dfrac{1}{\theta}e^{-x/\theta}dx=\int_0^{+\infty}xd(-e^{-x/\theta})$

$=\left[-xe^{-x/\theta}\right]_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-x/\theta}dx=0+\theta\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx=\theta$，从而未知参数$\theta$的矩估计量$\hat{\theta}=\bar{X}$。

(2)再求最大似然估计量：其似然函数$L(\theta)=\prod\limits_{i=1}^{n}f(x_i,\theta)=\prod\limits_{i=1}^{n}[\dfrac{1}{\theta}e^{-x_i/\theta}]=\theta^{-n}e^{-\frac{1}{\theta}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}$

取对数$\ln L(\theta)=-n\ln\theta-\dfrac{1}{\theta}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$，令$\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=-\dfrac{n}{\theta}+\dfrac{1}{\theta^2}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=0$，得$\theta=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$，即

未知参数θ的最大似然估计量$\hat{\theta}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i=\bar{X}$。

七、 设测量零件的长度产生的误差X服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，其中μ和σ^2均未知，今随机地测量 25 个零件，得样本均值 $\bar{x}=0.5$，样本均方差 $s=1.52$，求μ的置信水平为 0.95 的置信区间.

(已知：$t_{0.025}(25)=2.0595$，$t_{0.05}(25)=1.7081$，$t_{0.025}(24)=2.0639$，$t_{0.05}(24)=1.7109$)

解：由题意，$n=25$，$\alpha=0.05$，μ的置信区间为

$$\left(\bar{x}\pm\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)=(\bar{x}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\bar{x}+\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1))$$

数据代入有：$(0.5-\frac{1.52}{\sqrt{25}}t_{0.025}(24), 0.5+\frac{1.52}{\sqrt{25}}t_{0.025}(24))=(-0.13,1.12)$

八、 设两位化验员 A、B 独立地对某种聚合物含氯量用相同的方法各作 10 次测定，其测定值的样本方差依次为$S_A^2=0.552$和$S_B^2=0.606$. 设σ_A^2和σ_B^2分别为 A、B 所测定的测定值总体的方差，设两个总体均为正态的，且两样本独立，问根据这些数据能否推断这种聚合物含氯量的波动性有无显著

的变化. 即检验假设：$H_0:\sigma_A^2=\sigma_B^2$，$H_1:\sigma_A^2\neq\sigma_B^2$，取显著性水平$\alpha=0.05$. (已知：

$F_{0.025}(9,9)=4.03$，$F_{0.05}(9,9)=3.18$)

解：由题意$n_1=n_2=10$，需检验假设：$H_0:\sigma_A^2=\sigma_B^2$，$H_1:\sigma_A^2\neq\sigma_B^2$，则拒绝域为：

$F\geq F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$或$F\leq F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$，且$F=\frac{S_A^2}{S_B^2}$

由于$F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)=\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_2-1,n_1-1)}$，从而拒绝域为：$\frac{s_A^2}{s_B^2}\geq F_{0.025}(9,9)=4.03$或

$\frac{s_A^2}{s_B^2}\leq F_{1-0.025}(9,9)=\frac{1}{4.03}=0.248$。现$\frac{s_A^2}{s_B^2}=\frac{0.552}{0.606}=0.911$，不在拒绝域内，从而接受$H_0$，即认为波动性无显著的变化。

九、设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\frac{x^n}{n!}e^{-x}, x>0\\ 0, \quad x\leq 0\end{cases}$，用切比雪夫不等式证明：

$P\{0<X<2(n+1)\}\geq\frac{n}{n+1}$.

证明：由$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x)dx=\int_0^{+\infty}x\frac{x^n}{n!}e^{-x}dx=\int_0^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}d(-e^{-x})$

$$=\left[-\frac{x^{n+1}}{n!}e^{-x}\right]_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}(n+1)\frac{x^n}{n!}e^{-x}dx=0+(n+1)\int_0^{+\infty}\frac{x^n}{n!}e^{-x}dx=n+1$$

同理，可计算出$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot f(x)dx=(n+2)(n+1)$

而$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=(n+2)(n+1)-(n+1)^2=(n+1)$

由切比雪夫不等式，得$P\{0<X<2(n+1)\}=P\{-(n+1)<X-(n+1)<n+1\}$

$$= P\{|X-(n+1)|< n+1\} \geq 1-\frac{n+1}{(n+1)^2} = \frac{n}{n+1}$$