杭州电子科技大学学生考试卷（ A ）卷

<table>
<tr><td>考试课程</td><td colspan="2">高等数学甲 2
（A 层次）</td><td>考试日期</td><td colspan="2">2013 年 6 月 24 日</td><td>成绩</td><td></td></tr>
<tr><td>课程号</td><td>A0714012</td><td>教师号</td><td></td><td>任课教师姓名</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td>考生姓名</td><td></td><td>学号（8 位）</td><td></td><td>年级</td><td></td><td>专业</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>题号</td><td>一</td><td>二</td><td colspan="6">三</td><td>四</td><td>五</td><td>六</td></tr>
<tr><td>得分</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

得分	

一、 填空题（本题共 4 小题，每小题 3 分，共 12 分）

1. 过点 $M(6,-3,2)$ 且与平面 $4x-y+2z=8$ 垂直的直线的方程为 $\frac{x-6}{4}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-2}{2}$；

2. 函数 $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$ 在点 $M(1,2,-2)$ 处的梯度是 $\frac{2}{9}(1,2,-2)$；

3. 设 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$，则 $\iint\limits_D xy\,dxdy=$ 0；

4. 交换积分次序 $\int dy\int_{\sqrt{y}} f(x,y)dx=$ $\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy$

得分	

二、 选择题（本题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分）

1. 曲面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与 $x^2+y^2=2az$ $(a>0)$ 的交线是 （ A ）

(A) 圆周； (B) 椭圆； (C) 抛物线； (D) 双曲线.

2. 区域 D 为 $0\le x\le 1, -1\le y\le 0$，则积分 $\iint\limits_D xe^{xy}dxdy$ 的值为（ ）

(A) 1； (B) $-\frac{1}{e}$； (C) $\frac{1}{e}$； (D) e.

3. 函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F(xy,z)=x$ 所确定，其中 $F(u,v)$ 具有连续的一阶偏导数，则 z_x+z_y 等于（ C ）

(A) 0；　(B) $\frac{1-yF_2-xF_2}{F_1}$；　(C) $\frac{1-yF_1-xF_1}{F_2}$；　(D) 1.

4. 设 L 是圆域 D: $x^2+y^2\le -2x$ 的正向周界，则 $\oint_L (x^3-y)dx+(x-y^3)dy$ 等于（ A ）

(A) 2π；　(B) $\frac{3}{2}\pi$；　(C) 0；　(D) -2π.

5. 函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微，则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处，下列结论不一定成立的是（ B ）

(A) 连续；　(B) 偏导数连续；　(C) 偏导数存在；　(D) 切平面存在

6. 若幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-3)^n$ 在 $x=8$ 处收敛，则该级数在 $x=-1$ 处的敛散性为（ A ）

(A) 绝对收敛；　(B) 条件收敛；　(C) 发散；　(D) 敛散性无法判定.

7. [3 分] 下列级数发散的是（ B ）.

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\ln(n+1)}$；　(B) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3n-1}$；　(C) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{3^n}$；　(D) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^{n/2}}$.

8. 曲线 $\begin{cases} xyz=2 \\ x-y-z=0 \end{cases}$ 上点 $(2,1,1)$ 处的一个切向量与 Oz 轴正向成锐角，则此切向量与 Oy 轴正向所成的角度为（ B ）

(A) $\frac{\pi}{4}$；　(B) $\frac{3\pi}{4}$；　(C) $\frac{\pi}{3}$；　(D) $\frac{2\pi}{3}$.

二、试解下列各题（本题共 6 个题，每个题 6 分，共 36 分）

得分	

1、设 $z = x^2\sin(3xy)$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

得分

解 $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x\sin(3xy) + 3x^2y\cos(3xy)$ 3'

$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x^3\cos(3xy)$ 3'

得分	

2、若 L 为抛物线 $y^2 = x$ 从点 $A(1,-1)$ 到 $B(1,1)$ 上的一段弧，求 $\int_L xy\,dx$ 的值.

得分

解 $\int_L xy\,dx = \int_{-1}^{1} 2y^4\,dy$ 4'

$= 4\int_0^1 y^4\,dy$ 1'

$= \frac{4}{5}\left[y^5\right]_0^1$

$= \frac{4}{5}$ 1'

得分	

3. 将函数 $f(x)=\frac{1}{3+x}$ 展开为关于 $x-1$ 的幂级数，并指明其收敛域.

解 $f(x)=\frac{1}{4(1+\frac{x-1}{4})}$ $2'$

$=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{x-1}{4})^n$ $2'$

$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{4^{n+1}}(x-1)^n$ $1'$

$|\frac{x-1}{4}|<1 \Longrightarrow x\in(-3,5)$ $1'$

得分	

4. 求 $I=\iint_D xydxdy$，其中 D 由直线 $y=2$，$y=x$ 和 $y=2x$ 所围成的闭区域.

解 D_Y: $0\le y\le 2$, $\frac{y}{2}\le x\le y$ $2'$

$\iint_D xydxdy=\int_0^2 y\,dy\int_{\frac{y}{2}}^{y}x\,dx$ $2'$

$=\frac{3}{8}\int_0^2 y^3dy$ $1'$

$=\frac{3}{2}$ $1'$

得分	

5. 计算二重积分 $\iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2)dxdy$，其中 D 为 $x^2+y^2=1$ 和两坐标轴所围成的第一象限内的闭区域.

四、

得分

解 $D_{\rho\theta}:\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2},\ 0\le\rho\le1$ $2'$

$$\iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2)dxdy = \iint\limits_D \ln(1+\rho^2)\rho d\rho d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 \ln(1+\rho^2)\rho d\rho \quad 2'$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_1^2 \ln u du \quad 1'$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[u\ln u-u\right]_1^2 \quad 1'$$

$$= \frac{\pi}{4}(2\ln2-1) \quad 1'$$

得分	

6. 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n+1)x^n$ 的收敛域和它的和函数.

得分

得分

解 $u_n(x)=(2n+1)x^n$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = |x|$$

$|x|<1$ 绝对收敛；$|x|>1$ 级数发散；$|x|=1$ 级数发散 $1'$

收敛域 $C=(-1,1)$ 3

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)x^n = \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n+\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$$

$$= S_1(x)+S_2(x)$$

$$S_1(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x(n+1)x^n dx\right)'_x = \left(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1}\right)'_x=\left(\frac{x^2}{1-x}\right)'=\frac{2x-x^2}{(1-x)^2}$$

$$S_2(x)=x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x nx^{n-1}dx\right)'_x = x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'_x=\frac{x}{(1-x)^2} \quad 3'$$

$$故\ S(x)=\frac{3x-x^2}{(1-x)^2}$$

注 $S(x)=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n-\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n$ 更好计算

四、应用题[本题共 3 小题，每题 5 分，共 15 分]

得分	

1. 求曲线 $x=t$，$y=-t^2$，$z=3t-1$ 上一点处与平面 $x+2y+z=4$ 平行的切线方程.

解 $T_{切} = (x_t, y_t, z_t) = (1, -2t, 3)$ 1'

$n = (1, 2, 1)$ 1'

由 $T_{切} \cdot n = 0$ 解出 $t = 1$ 1'

切点 $M_0 = (1, -1, 2)$ $T_{切} = (1, -2, 3)$ 1'

$\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{3}$ 1'

得分	

2. 求曲面 $e^z - z + xy = 3$ 在点 $(2,1,0)$ 处的切平面及法线方程.

解 $F(x,y,z) = e^z - z + xy - 3$

$n = (F_x, F_y, F_z) = (y, x, e^z - 1)$ 2'

$n|_{(2,1,0)} = (1, 2, 0)$ 1'

切平面 $x + 2y - 4 = 0$ 1'

法线 $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{0}$ 1'

得分	

3. 设 Σ 为 $x^2+y^2+z^2=4$ 介于 $z=0$ 和 $z=1$ 之间的部分曲面，求 Σ 的面积.

解 Σ_{xy}: $3 \le x^2+y^2 \le 4$ 1'

Σ 上面积元素 $dS = \frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}} dxdy$

Σ 的面积 $S = \iint\limits_{\Sigma_{xy}} \frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}} dxdy$ 1'

$= \iint\limits_{\Sigma_{\rho\theta}} \frac{2}{\sqrt{4-\rho^2}} \rho \, d\rho d\theta$ 1'

$= 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_{\sqrt{3}}^{2} (4-\rho^2)^{-\frac{1}{2}} \rho \, d\rho$ 1'

$= 4\pi$ 1'

得分	

五、综合题[本题8分]

计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(z^2+2x)dydz+(x^2-3y)dzdx+2zdxdy$，其中 Σ 为旋转抛物面 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 介于 $z=0$ 和 $z=2$ 之间的部分的下侧.

解 补 Σ_1: $z=2$ $(x^2+y^2\le 4)$ 取上侧

记 Σ 和 Σ_1 围成的空间闭区域为 Ω

$P=z^2+2x$, $Q=x^2-3y$, $R=2z$ 　 2'

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=1$$

利用 Gauss 公式 $\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dV$

$$\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}(z^2+2x)dydz+(x^2-3y)dzdx+2zdxdy=\iiint\limits_{\Omega}dV \quad (*) \quad 2'$$

$$\iiint\limits_{\Omega}dV=\int_0^2 dz\iint\limits_{x^2+y^2\le 2z}dxdy=\int_0^2 \pi\, 2z\, dz=4\pi \quad 2'$$

$$\iint\limits_{\Sigma_1}(z^2+2x)dydz+(x^2-3y)dzdx+2zdxdy=0+0+\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}4\,dxdy=16\pi \quad 1'$$

$$\iint\limits_{\Sigma}(z^2+2x)dydz+(x^2-3y)dzdx+2zdxdy=4\pi-16\pi=-12\pi \quad 1'$$

得分	

六、

证明

证明

六、证明题（本题 5 分）

证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$ 收敛.

证明 $u_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$

$u_{2m}=\int_{2m\pi}^{(2m+1)\pi}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx>0$

$u_{2m+1}=\int_{(2m+1)\pi}^{(2m+2)\pi}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx<0$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$ 为一交错级数 -- 1'

$u_n\triangleq(-1)^n\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin x|}{\sqrt{x}}dx=(-1)^n a_n$ -- 1'

其中 $a_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin x|}{\sqrt{x}}dx>0$

$a_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin x|}{\sqrt{x}}dx>\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin x|}{\sqrt{x+\pi}}dx$

$\underline{\underline{x+\pi=t}}\int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi}\frac{|\sin t|}{\sqrt{t}}dt=\int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi}\frac{|\sin x|}{\sqrt{x}}dx=a_{n+1}$ 1'

$a_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin x|}{\sqrt{x}}dx<\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{1}{\sqrt{n\pi}}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n}}\to 0$ 1'

由莱布尼兹法 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$ 收敛 1'