一、填空题

1、若矩阵A为正交矩阵，且$|A|>0$，则$|A|=$ 1 ；

2、已知四阶实对称矩阵A的特征值分别为1, 2, 2, 4，则矩阵 A−2E 的秩等于 2 ；

3、若$\alpha_1=(1,\ 2,\ 1)^T$, $\alpha_2=(2,\ 3,\ 4)^T$, $\alpha_3=(3,\ 4,\ \lambda)^T$为$\Re^3$空间中的一组基，则λ的取值应满足 $\lambda\neq 7$ ；

4、向量组$\alpha_1=(1,\ 1,\ 1)^T$, $\alpha_2=(0,\ 2,\ 5)^T$, $\alpha_3=(2,\ 4,\ 7)^T$是线性相 相 关的；

5、已知非齐次线性方程组$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=1\\ x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda\\ x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2\end{cases}$有唯一解，则λ满足 $\lambda\neq 1$ 且 $\lambda\neq -2$

二、选择题

1、向量$\beta=(5,\ 0,\ 7)^T$在基$\alpha_1=(1,-1,0)^T$，$\alpha_2=(2,\ 1,\ 3)^T$，$\alpha_3=(3,\ 1,\ 2)^T$下的坐标为（ C ）；

（A）$(0,\ 1,\ 1)^T$ （B）$(2,-1,\ 1)^T$

（C）$(2,\ 3,\ -1)^T$ （D）$(5,-2,\ 2)^T$

2、已知矩阵$A_{5\times 4}$的秩为4，则下列说法不正确的是（ D ）

（A）方程组$AX=0$仅有零解

（B）矩阵A的行向量组一定线性相关

（C）矩阵A的列向量组一定线性无关

（D）矩阵A的行向量组中任意4个向量一定线性无关

3、已知矩阵$A=\begin{pmatrix}-2&1&\lambda\\0&2&0\\-4&1&3\end{pmatrix}$相似于对角矩阵$\Lambda=\mathrm{diag}(-1,\ 2,\ 2)$，则$\lambda=$（ A ）；

（A） 1 （B） 2 （C） −2 （D） −1

4、已知A，B均为n阶方阵，则下列说法正确的是（ D ）；

（A）若$R(A)=R(B)$，则A与B相似 （B）若A与B具有相同的特征值，则A与B相似

（C）若 A,B 为正定矩阵，则 AB 也为正定矩阵 （D）若$|A|=|B|\neq 0$，则A与B等价

5、n阶方阵A具有n个互不相同的特征值是A与对角矩阵相似的（ B ）；

（A）充要条件 （B）充分而非必要条件

（C）必要而非充分条件 （D）既非充分也非必要条件

三、计算题

1、讨论向量 $\beta=(1,\ 0,\ 3,\ 1)^T$ 能否经向量组 $\alpha_1=(1,\ 1,\ 2,\ 2)^T$，$\alpha_2=(1,\ 2,\ 1,\ 3)^T$，$\alpha_3=(1,\ -1,\ 4,\ 0)^T$ 线性表示。

解：即判断线性方程 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$ 是否有解.

$$B=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&-1&0\\2&1&4&3\\2&3&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&-2&-1\\0&-1&2&1\\0&2&-4&-2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&-2&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\therefore R(A)=R(B)=2$，β 能经 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示

2、已知向量空间 $\Re^3$ 中的两组基分别为（I）$\alpha_1=(1,\ 0,\ 0)^T$，$\alpha_2=(1,\ 1,\ 0)^T$，$\alpha_3=(1,\ 1,\ 1)^T$，和（II）$\beta_1=(1,\ 2,\ 1)^T$，$\beta_2=(2,\ 3,\ 3)^T$，$\beta_3=(3,\ 7,\ 1)^T$，试求由基（I）到基（II）的过渡矩阵；

解：$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\cdot P$

$\therefore P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}\cdot(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&2&3\\0&1&1&2&3&7\\0&0&1&1&3&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&1&0&0&-1&2\\0&1&0&1&0&6\\0&0&1&1&3&1\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&-1&-1&-4\\0&1&0&1&0&6\\0&0&1&1&3&1\end{pmatrix}\qquad\therefore P=\begin{pmatrix}-1&-1&-4\\1&0&6\\1&3&1\end{pmatrix}$$

3、试求线性方程组 $\begin{cases}x_1-x_2-x_3+x_4=0\\x_1-x_2+x_3-3x_4=0\\x_1-x_2-2x_3+3x_4=0\end{cases}$ 的解空间的一组基和维数；

解：
$$\begin{pmatrix}1&-1&-1&1\\1&-1&1&-3\\1&-1&-2&3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&-1&-1&1\\0&0&2&-4\\0&0&-1&2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&-1&-1&1\\0&0&1&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&-1&0&-1\\0&0&1&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\therefore X=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}t_1+\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}t_2$$

$\therefore$ 解空间的一组基为

$\alpha_1=(1,1,0,0)^T$，$\alpha_2=(1,0,2,1)$

维数为2

4、已知三维向量 $\alpha_1=(1,\ 1,\ 1)^T$，$\alpha_2=(1,\ -2,\ 1)^T$ 正交，试求一非零向量 α_3，使得 α_1，α_2，α_3 两两正交；

解 设 $\alpha_3=(x_1,x_2,x_3)^T$，则由题意知

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_1-2x_2+x_3=0\end{cases}$$

解之得. $X=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}t$

取 $\alpha_3=(-1,0,1)^T$

1、设矩阵$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}$，求矩阵A的列向量组的秩和它的一个最大线性无关组。

解: $A \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$

$\therefore R(A)=4$

$\therefore \alpha_1, \alpha_2\, \alpha_4\ \alpha_5$ 为一个最大线性无关组.

2、判断二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+9x_3^2-2x_1x_2+4x_1x_3$的正定性。

解 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

$D_1=1>0$

$D_2=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=2>0$

$D_3=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 9 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}\neq 0$

∴ 二次型正定

3、已知 3 阶矩阵A的特征值为$\lambda_1=2$，$\lambda_2=-2$，$\lambda_3=1$，对应的特征向量依次为$\xi_1=(0\ \ 1\ \ 1)^T$，$\xi_2=(1\ \ 1\ \ 1)^T$，$\xi_3=(1\ \ 1\ \ 0)^T$，试求矩阵A：

解: ∵ 有3个互不相同特征值 ∴ A可对角化

即 $P^{-1}A\cdot P=\Lambda$，其中 $P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$，$\Lambda=\mathrm{diag}(2,-2,1)$.

$\therefore A=P\Lambda P^{-1}$　　代入求解可得

$A=\begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -4 & 5 & -3 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

4、设矩阵$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，问λ为何值时，矩阵 A 能对角化。

解:

$|A-\alpha E|=\begin{vmatrix} -\alpha & 0 & 1 \\ 1 & 1-\alpha & \lambda \\ 1 & 0 & -\alpha \end{vmatrix}=(1-\alpha)(\alpha-1)(\alpha+1)=0$

$\Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=1,\ \alpha_3=-1$

当 $\alpha=1$ 时

$A-E=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

当 $R(A-E)=1$ 时，即 $\lambda=-1$ 时，A可对角化

五、试求解下列试题

求一个正交变换 $X=QY$，把实二次型

$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$ 化为标准型，并写出正交变换。

解：$A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&2&2\\2&1-\lambda&2\\2&2&1-\lambda\end{vmatrix}=(5-\lambda)\begin{vmatrix}1&2&2\\1&1-\lambda&2\\1&2&1-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$\therefore \lambda_1=\lambda_2=-1,\ \lambda_3=5$

当 $\lambda_1=\lambda_2=-1$ 时，

$$A+E=\begin{pmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$\therefore \xi_1=(-1,1,0)^T,\ \xi_2=(-1,0,1)^T$

正交化得 $\beta_1=(-1,1,0)^T,\ \beta_2=(1,1,-2)^T$

单位化得 $\gamma_1=\frac{1}{\sqrt2}(-1,1,0)^T,\ \gamma_2=\frac{1}{\sqrt6}(1,1,-2)^T$

当 $\lambda_3=5$ 时 $A-5E=\begin{pmatrix}-4&2&2\\2&-4&2\\2&2&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&-3&3\\0&3&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$

$\therefore \xi_3=(1,1,1)^T$

单位化 $\gamma_3=\frac{1}{\sqrt3}(1,1,1)^T$

$\therefore Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$

$f(y)=-y_1^2-y_2^2+5y_3^2$

六、证明题

设λ_1，λ_2是矩阵A的两个不同的特征值，其对应的特征向量分别为α_1，α_2，试证明向量$\beta=\alpha_1+\alpha_2$不是矩阵A的特征向量。

证明：反证法。假设β是矩阵A的特征向量，

不妨设β所对应的特征值为λ，则有

$A\cdot\beta=\lambda\beta$

$\therefore A(\alpha_1+\alpha_2)=\lambda(\alpha_1+\alpha_2)=A\alpha_1+A\alpha_2$

又$\because A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1,\ A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2$

$\therefore \lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2=\lambda\alpha_1+\lambda\alpha_2$

$\therefore (\lambda_1-\lambda)\alpha_1+(\lambda_2-\lambda)\alpha_2=0$

$\because \alpha_1,\alpha_2$线性无关

$\therefore \lambda_1=\lambda_2=\lambda$，与题意矛盾