一、填充题（每题 3 分，共 24 分）

1．设 $P(A)=0.7$，$P(B)=0.4$ $P(AB)=0.3$，则 $P(A\cup B)=$ ______________。

2．设 $P(A)=0.4, P(A\cup B)=0.7$，当 A、B 相互独立时 $P(B)=$ ____________。

3．一射手对同一目标进行四次独立射击，若至少命中一次的概率为 $\frac{80}{81}$，则该射手命中率为______________。

4．设随机变量 X 和 Y 相互独立，其分布函数分别为 $F_X(x)$ 与 $F_Y(y)$，则随机变量 $Z=\max(X,Y)$ 的分布函数 $F_Z(z)=$ ____________。

5．设随机变量 $X\sim U[0,2]$，则由切比雪夫不等式 $P\{|X-1|\le \frac{5}{6}\}\ge$______________。

6．设随机变量 X 具有概率密度 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x, 1<x<2\\ \frac{1}{2}, 2\le x\le 3\\ 0, \quad 其它\end{cases}$，则 X 的分布函数为

$F(x)=$____________________。

7．设随机变量 X 服从正态分布 $N(0,3^2)$，$X_1,\cdots,X_9$ 是来自总体 X 的简单随机样本，则统计量 $X_1+\cdots+X_9$ 服从______________分布。

8．设总体 $X\sim N(0,1)$，样本 X_1,X_2,X_3,X_4，$Y=a(X_1+X_2)^2+b(2X_3-X_4)^2$，则 $a=$________，$b=$________时，Y 服从 χ^2 分布，自由度为________。

二、（8 分）某仪器有三个元件独立工作，烧坏每个元件的概率均为 p ，当烧坏一个元件时，仪器发生故障的概率为 0.25 ，当烧坏两个元件时，仪器发生故障的概率为 0.6 ，当烧坏三个元件时，仪器发生故障的概率为 0.9 。求仪器发生故障的概率。

三、（12 分）设二维离散型随机变量 (X,Y) 的分布律如下：

X \ Y	-1	0	1
-1	0.1	0.2	0
0	0.1	0	0.2
1	0.2	0.1	0.1

（1） 求 $P\{Y \ge 0\}$；

（2） $E(X)$ 和 $COV(X,Y)$；

（3） X 与 Y 是否相互独立？为什么？

四、（12 分）设随机变量 X 具有概率密度函数 $f_X(x)=\begin{cases}2e^{-2x} & x>0\\ 0 & 其他\end{cases}$，另一随机变量 Y 服从区间[2,4]上的均匀分布，且 X 与 Y 相互独立。

试求：（1）$P\{X\geq 1\}$；

（2）$E(X^2)$；

（3）设 $Z=\dfrac{X-Y}{2}$，求 Z 的分布函数和概率密度函数。

五、（10 分）某计算机系统有 120 个终端，每个终端在一小时内平均有 3 分钟使用打印机，设各终端是否使用打印机是否使用打印机是相互独立的，试利用中心极限定理求至少有 10 个终端同时使用打印机的概率。

六、（8 分）设总体 X 具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases}\lambda^2 xe^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

若 $\lambda>0$ 是未知参数，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是来自总体 X 的一组样本观察值，求 λ 的最大似然估计值 $\hat{\lambda}$。

七、（10 分）在面积为 250 公顷的林区内，随机抽取 25 块面积为 0.25 公顷的样地，根据样地上测量的材积资料求出每 0.25 公顷的平均出材量 $\overline{x}=22$ 立方米，样本标准差 $s=2.5$ 立方米，求置信水平为 0.95 的全林区每公顷出材量 X 的数学期望 μ 的置信区间（假定 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$t_{0.025}(24)=2.06, t_{0.05}(24)=1.711, z_{0.025}=1.96, z_{0.05}=1.645$）。

八、（10 分）饮料厂用自动生产线灌装饮料，规定标准重量为 500 克，标准差不得超过 8 克（方差不得超过 64 克^2），每天定时检查机器灌装情况。现抽取饮料 25 罐，测得平均重量 $\overline{x}=502$ 克，样本标准差 $s=9$ 克，如果每罐饮料重量 X 服从正态分布，试问机器工作是否正常？

（$\alpha=0.05, t_{0.025}(24)=2.064, t_{0.05}(24)=1.711, \chi^2_{0.025}(24)=39.4, \chi^2_{0.05}(24)=36.4$）

九、（6 分）已知随机变量 X_1, X_2, X_3 相互独立，均服从正态分布 $N(0,\sigma^2)$，求随机变量 $U=\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{X_1+X_2+X_3}{|X_2-X_3|}$ 的分布。

一、填充题（每题3分，共24分）第6小题函数第2和第3段各得1分，第8小题每空得1分。

1. 0.8　　2. 0.5　　3. 2/3　　4. $F_X(z)F_Y(z)$　　5. 13/25

6. $\begin{cases} 0, & x \le 1 \\ \frac{1}{6}(x^2-1), & 1<x<2 \\ \frac{1}{2}(x-1), & 2 \le x \le 3 \\ 1, & x>3 \end{cases}$　　7. $N(0,9^2)$　　8. $a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{1}{5}$，自由度为2

二、（8分）解：设A_i为烧坏i个元件，$i=1,2,3$，B为仪器发生故障，则烧坏的原件个数$X \sim b(3,p)$，　　______3分

$P(B)=\sum_{i=0}^{3} P\{X=i\}P\{B|X=i\}$　　______6分

$=0.25\times C_3^1 p(1-p)^2+0.6\times C_3^2 p^2(1-p)+0.9\times p^3$　　______7分

$=-0.15p^3+0.3p^2+0.75p$　　______8分

三、（12分）解

（1）$P\{Y\ge 0\}=p_{-10}+p_{00}+p_{10}+p_{-11}+p_{01}+p_{11}$

$=0.2+0+0.1+0+0.2+0.1$

$=0.6$　　______3分

（或$P\{Y\ge 0\}=1-P\{Y=-1\}=1-(0.1+0.1+0.2)=0.6$）

（2）$P\{X=-1\}=0.3, P\{X=0\}=0.3, P\{X=1\}=0.4$　　______1分

$P\{Y=-1\}=0.4, P\{Y=0\}=0.3, P\{X=1\}=0.3$　　______2分

$E(X)=-1\times 0.3+0\times 0.3+1\times 0.4=0.1$　　______3分

$E(Y)=-1\times 0.4+0\times 0.3+1\times 0.3=-0.1$　　______4分

$E(XY)=(-1)\times(-1)\times 0.1+(-1)\times 1\times 0+1\times(-1)\times 0.2+1\times 1\times 0.1=0$

$COV(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0.01$　　______6分

（3）$p_{-1,-1}=0.1$，$P\{X=-1\}=0.4, P\{Y=-1\}=0.3$

$p_{-1,-1}\ne P\{X=-1\}\times P\{Y=-1\}\Rightarrow X$与$Y$不相互独立。　　______3分

四、（12 分）解

(1) $P\{X \geq 1\} = \int_1^{+\infty} 2e^{-2x}dx = -e^{-2x}\Big|_1^{+\infty} = e^{-2}$ ______ 4 分

(2) $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)dx = \int_0^{+\infty} 2x^2 e^{-2x}dx$ ______ 2 分

$= -\int_0^{+\infty} x \cdot de^{2x}dx = -xe^{-2x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-2x}dx$

$= \dfrac{1}{2}$ ______ 4 分

(3) $F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{\dfrac{X-Y}{2} \leq z\} = \iint\limits_{\frac{x-y}{2}<z} f_X(x)f_Y(y)dxdy$ ______ 1 分

当 $z<-2$ 时，$F_Z(z)=0$；当 $-2 \leq z < -1$ 时

$$F_Z(z) = \int_{-2z}^{4}[\int_0^{y+2z} e^{-2x}dx]dy = \frac{1}{4}e^{-4(2+z)} + z + \frac{7}{4}$$

当 $-1 \leq Z$ 时，$F_Z(z) = \int_2^4[\int_0^{y+2z} e^{-2x}dx]dy = 1 + \dfrac{1}{4}e^{-4(2+z)} - \dfrac{1}{4}e^{-4(1+z)}$

从而有 $F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z<-2 \\ \dfrac{1}{4}e^{-4(2+z)} + z + \dfrac{7}{4} & -2 \leq z < -1 \\ 1 + \dfrac{1}{4}e^{-4(2+z)} - \dfrac{1}{4}e^{-4(1+z)} & z \geq -1 \end{cases}$ ______ 3 分

$f_Z(z) = \dfrac{dF_Z(z)}{dz} = \begin{cases} 0 & z<-2 \\ -e^{-4(2+z)} + 1 & -2 \leq z < -1 \\ -e^{-4(2+z)} + e^{-4(1+z)} & z \geq -1 \end{cases}$ ______ 4 分

五、（10 分）解

设 X 为 120 个终端中使用打印机的终端个数，则 $X \sim b(120, \dfrac{3}{60})$ ______ 3 分

由中心极限定理，

$$P\{X \geq 10\} = P\{\frac{X - 120 \times \frac{3}{60}}{\sqrt{120 \times \frac{3}{60} \times \frac{57}{60}}} \geq \frac{10 - 120 \times \frac{3}{60}}{\sqrt{120 \times \frac{3}{60} \times \frac{57}{60}}}\} \approx 1 - \Phi(\frac{10 - 120 \times \frac{3}{60}}{\sqrt{120 \times \frac{3}{60} \times \frac{57}{60}}})$$

$= 1 - \Phi(\dfrac{4}{\sqrt{5.7}})$ ______ 10 分

（采用 $P\{10 \leq X \leq 120\}$ 计算也给满分，无二项分布表达式不扣分）

六、（8 分）解

1）似然函数 $L(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)$ ________ 2 分

$=\lambda^{2n}e^{\sum_{i=1}^{n}x_i}\prod_{i=1}^{n}x_i$ ________ 4 分

$\ln L(x_1,\cdots,x_n)=2n\ln\lambda+\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$ ________ 6 分

$\frac{\partial\ln L}{\partial\lambda}=\frac{2n}{\lambda}-\sum_{i=1}^{n}x_i=0$ ________ 7 分

$\Rightarrow\hat{\lambda}=\frac{2}{\overline{X}}$ ________ 8 分

（似然函数错误，基本思路正确酌情给 5-8 分）

七、（10 分）解 每 0.25 公顷平均出材量置信区间为

$(\bar{x}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}},\bar{x}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}})$ ________ 5 分

$=(22-t_{0.025}(24)\frac{2.5}{\sqrt{25}},\bar{x}+t_{0.025}(24)\frac{2.5}{\sqrt{25}})$ ________ 8 分

$=(22-2.06\times\frac{1}{2},22+2.06\times\frac{1}{2})$ ________ 9 分

$=(20.97,23.03)$ 立方米

每公顷平均出材量置信区间为

$(20.97\times4,\quad 23.03\times4)=(83.88,92.12)$ 立方米 ________ 10 分

八、（10 分）（只做一个假设检验得 7 分，其中拒绝域得 6 分）解

假设检验（1）$H_0:E(X)=\mu=500;H_1:\mu\neq500$ ________ 2 分

（2）$H'_0:D(X)=\sigma^2\leq8^2;H'_1:\sigma^2>8^2$ ________ 3 分

（1）采用 t 检验法：若 H_0 为真，则 $t=\dfrac{\overline{X}-500}{\sqrt{s^2/25}}\sim t(24)$

拒绝域 $|t|=\left|\dfrac{\bar{x}-500}{\sqrt{s^2/25}}\right|\geq t_{0.025}(24)=2.064$ ________ 6 分

计算得到 $t=\dfrac{\bar{x}-500}{\sqrt{s^2/25}}=\dfrac{502-500}{9/5}=\dfrac{10}{9}<2.064$

不在拒绝域内，故接受原假设 H_0，认为灌装重量均值正常。 ________ 7 分

（2）采用 χ^2 检验：若 $H_0^{'}$ 为真，则 $\chi^2=\dfrac{(25-1)S^2}{8^2}\sim\chi^2(24)$

拒绝域为 $\chi^2=\dfrac{(25-1)s^2}{8^2}\geq\chi^2_{0.05}(24)=36.4$ ________ 9 分

计算得到 $\chi^2=\dfrac{(25-1)9^2}{8^2}=30.375<\chi^2_{0.05}(24)$

不在拒绝域内，故接受原假设 $H_0^{'}$，认为灌装机标准差在正常范围内。

由（1）和（2）的结论，认为机器正常。 ________ 10 分

九、（6 分）解 设$Y_1 = X_2 + X_3, Y_2 = X_2 - X_3$，则

$$COV(Y_1, Y_2) = COV(X_2 + X_3, X_2 - X_3)$$

$$= D(X_2) - D(X_3) = 0$$

Y_1与Y_2不相关，由于Y_1和Y_2都服从正态分布，从而Y_1与Y_2相互独立。由此可知

$X_1 + X_2 + X_3 = X_1 + Y_1$与$Y_2$相互独立。 ——————2 分

$$\frac{X_1 + X_2 + X_3}{\sqrt{3}\sigma} \sim N(0,1)$$ ——————4 分

$$\frac{X_2 - X_3}{\sqrt{2}} \sim N(0,1) \Rightarrow \frac{(X_2 - X_3)^2}{2} \sim \chi^2(1)$$ ——————5 分

由 t 分布定义知

$$\frac{\dfrac{X_1 + X_2 + X_3}{\sqrt{3}\sigma}}{\sqrt{\dfrac{(X_2 - X_3)^2}{2}}} \sim t(1)，即 U = \sqrt{\frac{2}{3}}\frac{X_1 + X_2 + X_3}{|X_2 - X_3|} \sim t(1)。$$ ——————6 分