杭州电子科技大学学生考试卷（ A ）卷

考试课程	高等数学甲 2（A 层次）		考试日期	2014 年 6 月 13 日	成绩	
课程号	A0714012	教师号		任课教师姓名		
考生姓名		学号（8 位）		年级	专业	

题号	一	二	三						四	五	六
得分											

得分	

一、 填空题（本题共 4 小题，每小题 3 分，共 12 分）

1. 直线 $L_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-4}=\frac{z+3}{1}$ 和 $L_2:\frac{x}{2}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{-1}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$；

2. 函数 $f(x,y)=2x^2+ax+xy^2+2y$ 在点 $M(1,-1)$ 处取得极值，则常数 $a=$ -5；

3. 设 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$，则 $\iint_D x^2dxdy=$ $\frac{\pi}{4}$；

4. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}3^n x^{n-1}$ 的收敛半径 $R=$ $\frac{1}{3}$.

得分	

二、 选择题（本题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分）

1. 设 L 是从 $A(1,0)$ 到 $B(-1,2)$ 的直线段，则 $\int_L (x+y)ds=$（ B ）

(A) $\sqrt{2}$； (B) $2\sqrt{2}$； (C) 2； (D) 0.

2. 级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内和函数为（ D ）.

(A) $-e^{x^2}$； (B) $-e^{-x^2}$； (C) e^{x^2}； (D) e^{-x^2}.

3. 函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F(xy,z)=x$ 所确定，其中 $F(u,v)$ 具有连续的一阶偏导数，则 z_x+z_y 等于（ A ）

(A) $\frac{1-yF_1-xF_1}{F_2}$； (B) $\frac{1-yF_x-xF_y}{F_2}$； (C) 0； (D) 1.

4. 设 L 是从 $A(1,\frac{1}{2})$ 沿曲线 $2y=x^2$ 到 $B(2,2)$ 的弧段，则 $\int_L \frac{2x}{y}dx-\frac{x^2}{y^2}dy=$（ C ）

(A) -3； (B) $\frac{3}{2}$； (C) 0； (D) 3.

5. 设 Σ 为柱面 $x^2+y^2=1$ 介于平面 $z=0$ 与 $z=1$ 之间部分的外侧，则 $\iint_\Sigma y^2dydz=$（ D ）

(A) $-\frac{4}{3}$； (B) $-\frac{2}{3}$； (C) $\frac{2}{3}$； (D). 0

6. 若幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x+2)^n$ 在 $x=1$ 处收敛，则该级数在 $x=-4$ 处的敛散性为（ A ）

(A) 绝对收敛； (B) 条件收敛； (C) 发散； (D) 敛散性无法判定.

7. [3 分]下列级数中发散的是（ B ）

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\ln(n+1)}$； (B) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3n-1}$；

(C) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{3^n}$； (D) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin na}{n^2}$，其中 $0<a<1$. .

8. 设 $f(x,y)$ 是连续函数，则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^1 f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho=$（ C ）.

(A) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dx\int_x^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy$； (B) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy$；

(C) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dy\int_y^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$； (D) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$.

三、试解下列各题（本题共 6 小题，每小题 6 分，共 36 分）

得分	

1. 设 $z = x^2y + \ln(3x+2y)$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + \frac{3}{3x+2y}$ 3'

$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + \frac{2}{3x+2y}$ 3'

得分	

2. 求点 $(-1,2,0)$ 在平面 $x+2y-z-1=0$ 上的投影.

解 平面 Π $x+2y-z-1=0$ 的法向量

$\vec{n} = (1,2,-1)$ 1'

过 $M(-1,2,0)$ 垂直于 Π 的直线 L 方程

$\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-1}$ 2'

L 参数方程 $x=-1+t,\ y=2+2t,\ z=-t$ 1'

代入 $x+2y-z-1=0$ $t=-\frac{1}{3}$ 1'

$x=-\frac{4}{3},\ y=\frac{4}{3},\ z=\frac{1}{3}$

投影点 $N(-\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{1}{3})$ 1'

得分	

3. 求 $I=\iint_D xy\,dx\,dy$，其中 D 由抛物线 $y^2=4x$ 及直线 $y=x$ 所围的平面区域.

解 $\begin{cases} y^2=4x \\ y=x \end{cases}$ 交点 $O(0,0)$ $A(4,4)$

D_x: $0\le x\le 4,\quad x\le y\le 2\sqrt{x}$ 2'

$I=\iint_D xy\,dxdy = \int_0^4 dx\int_x^{2\sqrt{x}} xy\,dy$ 1'

$= \frac{1}{2}\int_0^4 (4x^2-x^3)dx$ 1'

$= [\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{8}x^4]_0^4$ 1'

$= \frac{32}{3}$ 1'

得分	

4. 求 $I=\iiint_\Omega 4z\,dv$，其中 Ω 为曲面 $x^2+y^2=4z$ 和平面 $z=4$ 所围成的闭区域.

解法1 用柱面坐标 $0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le\rho\le 4,\ \frac{\rho^2}{4}\le z\le 4$ 2'

$I=\iiint_\Omega 4z\,dv = \iiint_\Omega 4z\rho\,d\rho d\theta dz$ 1'

$=4\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^4\rho\,d\rho\int_{\frac{\rho^2}{4}}^4 z\,dz$ 1'

$=4\pi\int_0^4(16\rho-\frac{\rho^5}{16})d\rho$ 1'

$=\frac{4^5}{3}\pi$ 1'

法二: Ω_z: $0\le z\le 4,\quad x^2+y^2\le 4z$ 2'

$I=\iiint_\Omega 4z\,dv = \int_0^4 dz\iint_{x^2+y^2\le 4z} 4z\,dxdy$ 2'

$=16\pi\int_0^4 z^2\,dz$ 1'

$=\frac{4^5}{2}\pi.$ 1'

得分	

5. 设 $f(x)=\begin{cases}2x+3 & 1<x\le 2\\ -x+2 & -2\le x<-1\\ x^2 & |x|\le 1\end{cases}$，写出 $f(x)$ 以4为周期的傅里叶级数的和函数 $s(x)$ 在区间 $[-2,2]$ 上的表达式.

解 $x=\pm 2$. $S(\pm 2)=\dfrac{f(-2+0)+f(2-0)}{2}=\dfrac{11}{2}$

$x=-1$. $S(-1)=\dfrac{f(-1-0)+f(-1+0)}{2}=2$

$x=1$ $S(1)=\dfrac{f(1-0)+f(1+0)}{2}=3$

$-2<x<-1$ $S(x)=-x+2$ $|x|<1$. $S(x)=x^2$

$1<x<2$ $S(x)=2x+3$ $4'$

合并 $S(x)=\begin{cases}\frac{11}{2} & x=\pm 2\\ 2x+3 & 1<x<2\\ -x+2 & -2<x<-1\\ x^2 & |x|<1\\ 2 & x=-1\\ 3 & x=1\end{cases}$ $2'$

得分	

6. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^{n-1}}{n}x^n$ 的收敛域和它的和函数.

解: $u_n(x)=\dfrac{(-3)^{n-1}}{n}x^n$ $1'$

$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=3|x|$ $1'$

① $3|x|<1$ $|x|<\frac{1}{3}$ 原级数绝对收敛 $1'$

② $3|x|>1$ $|x|>\frac{1}{3}$ 级数发散

③ $3|x|=1$ $x=\pm\frac{1}{3}$ $x=-\frac{1}{3}$ $-\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散 $1'$

$x=\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 收敛

故收敛域 $I=(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}]$

令 和函数 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^{n-1}}{n}x^n$

$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-3)^{n-1}x^{n-1}=\dfrac{1}{1+3x}$ $1'$

$S(x)=\int_0^x\dfrac{1}{1+3x}dx=\dfrac{1}{3}\ln(1+3x)$ $1'$

四、应用题[本题共 15 分]

得分	

1.（5 分）求曲线 $x=t$，$y=-t^2$，$z=3t-1$ 上一点处与平面 $x+2y+z=4$ 平行的切线方程.

解 $T(t)=(x_t,y_t,z_t)=(1,-2t,3)$ $2'$

$n_法=(1,2,1)$

由已知 $T(t)\perp n_法$. $T(t)\cdot n_法=0$ $t=1$ $1'$

切点 $M_1(1,-1,2)$ $T(t)=(1,-2,3)$ $2'$

所求切线方程 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-2}{3}$

2.（10 分）设空间曲线 Γ 由曲面 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 和平面 $x+2y+z=2$ 相交产生，

（1） 试求空间曲线 Γ 在平面 $x+2y+z=2$ 上所围成的平面区域的面积；

（2） 试求空间曲线 Γ 到坐标平面 Oxy 的最高点、最低点以及相应距离.

解:(1) 记 Σ 为 Γ 在 $x+2y+z=2$ 上所围平面区域

Σ 在 Oxy 上投影区域 $x^2+y^2+2x+4y\le 4$. $1'$

Σ 上面积元素 $dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy=\sqrt{6}\,dxdy$ $1'$

Σ 面积 $S=\iint_{\Sigma}dS=\iint_{D}\sqrt{6}\,dxdy=9\sqrt{6}\pi$ $2'$

(2) 设 $M(x,y,z)$ 为 Γ 上任一点, M 到 Oxy 面距离 $d=z$

且 (x,y,z) 满足 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 和 $x+2y+z=2$ $1'$

构造 $L(x,y,z,\lambda,\mu)=z+\lambda(x^2+y^2-2z)+\mu(x+2y+z-2)$ $2'$

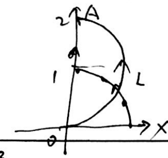
由 $\begin{cases}L_x=0\\ L_y=0\\ L_z=0\\ L_\lambda=0\\ L_\mu=0\end{cases}$ 解得驻点 $M_1(-1+\frac{3}{\sqrt{5}},-2+\frac{6}{\sqrt{5}},7-3\sqrt{5})$ $1'$

$M_2(-1-\frac{3}{\sqrt{5}},-2-\frac{6}{\sqrt{5}},7+3\sqrt{5})$

由实际可知 M_2 为最高点 $d|_{M_2}=7+3\sqrt{5}$

M_1 为最低点 $d|_{M_1}=7-3\sqrt{5}$ $2'$

$5+2+1$



得分	

五、综合题[本题 8 分]

计算曲线积分 $\int_L (5x-e^x\sin y)dy+e^x\cos y dx$，其中 L 为曲线 $x=\sqrt{2y-y^2}$ ($x^2+(y-1)^2=1$)，方向沿 y 增大的方向.

解：补 $\overrightarrow{AO}$：$y=0$ $(y=2\to 0)$，记 L 和 $\overrightarrow{AO}$ (0) 围成平面区域为 D，则 L 和 $\overrightarrow{AO}$ 为 D 正向边界 2'

$P(x,y)=e^x\cos y$，　$Q(x,y)=5x-e^x\sin y$

$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=5$ (1')

应用格林公式 $\oint_{L+\overrightarrow{AO}} Pdx+Qdy=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})d\sigma$ 3'

有 $\oint_{L+\overrightarrow{AO}} e^x\cos y dx+(5x-e^x\sin y)dy=\iint_D 5d\sigma=\frac{5}{2}\pi$ (1').

而 $\int_{\overrightarrow{AO}} e^x\cos y dx+(5x-e^x\sin y)dy=\int_{\overrightarrow{AO}}(-\sin y)dy=\int_2^0(-\sin y)dy=\cancel{1-\cos 2}$ 2')

$\therefore \int_L (5x-e^x\sin y)dy+e^x\cos y dx=\frac{5}{2}\pi\cancel{-(\cos 2+1)}$ 1'

$\frac{5}{2}\pi+\cos 2-1$

得分	

六、证明题[本题 5 分]

已知 $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k x^{k+1}$ 在 $[0,1]$ 上收敛，证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f(\frac{1}{n})$ 收敛.

证明：$\because f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k x^{k+1}$ 在 $[0,1]$ 收敛

$\therefore f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续 1'

又 $f(x)=x^2\sum_{k=1}^{\infty}a_k x^{k-1}=x^2 g(x)$ 1'

$\therefore g(x)$ 在 $[0,1]$ 连续 1'

$g(x)$ 在 $[0,1]$ 有界，即存在 $M>0$, s.t. $|g(x)|\le M$ 1'

$f(\frac{1}{n})=\frac{1}{n^2}g(\frac{1}{n})$　$|f(\frac{1}{n})|\le M\frac{1}{n^2}$ 1'

$\sum_{n=1}^{\infty}M\frac{1}{n^2}=M\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛

由比较法 $\sum_{n=1}^{\infty}|f(\frac{1}{n})|$ 收敛 1'

故 $\sum_{n=1}^{\infty}f(\frac{1}{n})$ 收敛.