杭州电子科技大学学生考试卷（ ）卷

考试课程	线性代数	考试日期	2015 年 11 月 28 日	成 绩	
课程号	A0714030	教师号		任课教师姓名	
考生姓名		学号（8 位）		年级		专业	

题 号	一	二	三	四	五	六
得 分						

注意：所有答案全部书写在试卷上，答案写在其他地方视为无效！本课程考试试卷总共 4 大张，另附两张纸作为草稿纸使用，不得使用其余形式的草稿纸，不得使用计算器等计算工具，否则视为作弊！

得分	

一、填空题（请将答案填写在横线上。本题共四小题，每题 4 分，总共 16 分）

1、已知 A 为三阶方阵且$|A|=-\dfrac{1}{8}$，则$|(2A)^{-1}|=$ <u>-1</u>；

2、设 A 是 4×3 矩阵，且 $R(A)=2$，而 B=$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&2\\0&0&3\end{pmatrix}$，则 $R(AB)=$ <u>2</u>；

3、若齐次线性方程组$\begin{cases}kx_1+x_2+x_3=0\\x_1+kx_2+x_3=0\\x_1+x_2+kx_3=0\end{cases}$有非零解，则 k <u>=1 或 -2</u>；

4、$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&4&9&16\\1&8&27&64\end{vmatrix}=$ <u>12</u>.

得分	

二、选择题（请将正确答案填写在括号中，在字母前勾选所得结果视为无效。本题共六小题，每题 3 分，共 18 分）

1、设 A 和 B 均为 n 阶方阵，$A\neq0$ 且 $AB=0$，则（ C ）；

（A） $B=0$　　（B） $BA=0$

（C） $|A|=0$ 或 $|B|=0$　　（D） $(A-B)^2=A^2+B^2$

2、设 A 为 n 阶方阵，且 $|A|=a$，则 $\big||A|A^*\big|=$（ D ）；

（A） a^n　　（B） $a^{n(n-1)}$　　（C） a^{2n}　　（D） a^{2n-1}

3、四阶行列式$\begin{vmatrix}a_1&0&0&b_1\\0&a_2&b_2&0\\0&b_3&a_3&0\\b_4&0&0&a_4\end{vmatrix}$的值等于（ D ）；

（A） $a_1a_2a_3a_4-b_1b_2b_3b_4$　　（B） $a_1a_2a_3a_4+b_1b_2b_3b_4$

（C） $(a_1a_2-b_1b_2)(a_3a_4-b_3b_4)$　　（D） $(a_2a_3-b_2b_3)(a_1a_4-b_1b_4)$

4、设 A 为 n 阶反对称矩阵，且 A 可逆，则有（ A

（A） $A^TA^{-1}=-E$　（B） $AA^T=-E$　（C） $A^{-1}=-A^T$　（D） $|A^T|=-|A|$

5、若方程组 AX=B 中，方程的个数小于未知量的个数，则有（ B ）；

（A） AX=B 必有无穷多解　　（B） AX=0 必有非零解

（C） AX=0 仅有零解　　（D） AX=B 一定无解

6、对于 n 阶可逆矩阵 A、B，则下列等式中（ B ）不成立；

（A） $\left|(AB)^{-1}\right|=\left|A^{-1}\right|\left|B^{-1}\right|$　　（B） $\left|(AB)^{-1}\right|=\dfrac{1}{\left|A^{-1}\right|}\dfrac{1}{\left|B^{-1}\right|}$

（C） $\left|(AB)^{-1}\right|=\left|A\right|^{-1}\left|B\right|^{-1}$　　（D） $\left|(AB)^{-1}\right|=\dfrac{1}{|AB|}$

（步骤正确，仅结果错误，扣1分）

得分	

三、试求解下列各题（本题共四小题，每题6分，共24分）

1、求四阶行列式 D= $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$；

$$= -\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ -1 & 7 & -3 & 4 \\ 2 & -9 & 5 & 7 \\ 1 & -6 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \cdots 3分$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -9 \cdots 3分$$

2、求矩阵 A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵；

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots 3分$$

$$\xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \frac{5}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ 0 & -3 & 0 & -\frac{6}{9} & -\frac{3}{9} & \frac{6}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \cdots 3分$$

1分

$\therefore A^{-1} = \frac{1}{9}A$

3、设 $f(x)=ax^2+bx+c$，当 A 为 n 阶矩阵，E 为 n 阶单位矩阵时，定义 $f(A)=aA^2+bA+cE$，现若 $f(x)=x^2-3x-2$，而 $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$，试求 $f(A)$；

$f(A)=A^2-3A-2E \cdots 1分$

$$f(A)=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 13 & 3 & 5 \\ 14 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 3 & 3 \\ 9 & 3 & 6 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdots 3分 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 5 & -3 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \cdots 1分$$

4、设四阶行列式 D= $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$，求 $A_{13}+A_{23}+A_{43}$。

$A_{13}+A_{23}+A_{43} = A_{13}+A_{23}+0\cdot A_{33}+A_{43}$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{3分}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \end{vmatrix} \overset{2分}{=} -4\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -4 \cdots 1分$$

~~(步骤正确，仅结果错误，扣1分)~~

得分	

四、试求解下列各题（本题共三小题，每题 6 分，共 18 分）

1、设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&-1&\lambda\\2&5&\lambda&-1\\1&1&-6&10\end{pmatrix}$，且 $R(A)=3$，求 λ 的值.

…3分

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-1&\lambda\\2&5&\lambda&-1\\1&1&-6&10\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&2&-1&\lambda\\0&1&\lambda+2&-1-2\lambda\\0&-1&-5&10-\lambda\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&2&-1&\lambda\\0&1&5&\lambda-10\\0&0&\lambda-3&9-3\lambda\end{pmatrix}$$

由 $R(A)=3$

可得 $\lambda\neq3$

…2分

2、设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，矩阵 X 满足 $AX+E=A^2+X$，试求 $|X|$.

$|A|=1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2&0\\0&1\end{vmatrix}+1\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}0&2\\1&0\end{vmatrix}$

$=2-2=0$

A不可逆

$AX-X=A^2-E$ …1分

$\cancel{A+X}$ $(A-E)X=(A-E)(A+E)$ …2分

$|A-E||X|=|A-E|\cdot|A+E|$ …1分

$\because |A-E|=-2\neq0$ …1分

$\therefore |X|=|A+E|=9$ …1分

~~$|A|=4\neq0$~~

3、设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$，矩阵 X 满足 $A^*X=A^{-1}+2X$，试求矩阵 X.

因为 $A^*=|A|\cdot A^{-1}=4\cdot A^{-1}$ …1分

所以 $4A^{-1}X=A^{-1}+2X$ (两边同时左乘A

$4X=E+2AX$ …2分

$4X-2AX=E$

$(4E-2A)X=E$

所以 $X=(4E-2A)^{-1}$ …1分

$\therefore X=\begin{pmatrix}\frac14&\frac14&0\\0&\frac14&\frac14\\\frac14&0&\frac14\end{pmatrix}$ …2分

得分	

五、试求解下列各题（本题共两小题，共 14 分）

1、(5 分) 试问 λ,μ 取何值时，齐次线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0\\x_1+\mu x_2+x_3=0\\x_1+2\mu x_2+x_3=0\end{cases}$ 有非零解。

$|A|=\begin{vmatrix}\lambda&1&1\\1&\mu&1\\1&2\mu&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda&1&1\\1&\mu&1\\0&\mu&0\end{vmatrix}=-\mu(\lambda-1)$ …3分

因为该齐次线性方程组有非零解，所以 $|A|=0$ …1分

所以当 $\lambda=1$ 或 $\mu=0$ 时，方程组有非零解 …1分

2、(9 分) 问 λ 取何值时，线性方程组 $\begin{cases} -x+\lambda y+2z=1 \\ x-y+\lambda z=2 \\ -5x+5y+4z=-1 \end{cases}$ 无解，有唯一解，或有无穷多解？并在有无穷多解时求出其通解。

因为 $|A| = \begin{vmatrix} -1 & \lambda & 2 \\ 1 & -1 & \lambda \\ -5 & 5 & 4 \end{vmatrix} = (1-\lambda)(4+5\lambda)$ …3分

所以当 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq -\frac{4}{5}$ 时，方程组有唯一解 …1分

当 $\lambda = -\frac{4}{5}$ 时

$$B \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{4}{5} & 2 \\ -1 & -\frac{4}{5} & 2 & 1 \\ -5 & 5 & 4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{4}{5} & 2 \\ 0 & -\frac{9}{5} & \frac{6}{5} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

无解 …2分

当 $\lambda = 1$ 时

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ -5 & 5 & 4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

无穷多解 …2分

得分	

六、证明题（本题共两小题，每题 5 分，共 10 分）

1、设 n 阶方阵 A 满足 $A^2-3A=0$，证明 $A-2E$ 可逆，并求 $(A-2E)^{-1}$。

因为 $(A-2E)(A-E)=2E$ …3分

所以 $A-2E$ 可逆，且 $(A-2E)^{-1}=\frac{1}{2}(A-E)$ …2分

2、设 A 是 $n\times m$ 矩阵，B 是 $m\times n$ 矩阵，其中 $n<m$．若 $AB=E$，其中 E 为 n 阶单位矩阵．证明齐次线性方程组 $BX=O$ 只有零解．

因为 $AB=E$，所以 $R(AB)=n$ …1分

由于 B 是 $m\times n$ 矩阵且 $n<m$，所以 $R(B)\le n$ …1分

又因为 $R(AB)\le R(B)$，即 $R(B)\ge n$ …2分

所以 $R(B)=n$，即 $BX=0$ 只有零解 …1分

$\begin{cases} x_1 = 1+t \\ x_2 = t \\ x_3 = 1 \end{cases}$ …1分 $\Rightarrow X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ …1分

其中 t 为自由变量.