一、填空题

1、已知3阶方阵A的特征值分别为1, −1, 2020，则$|A^2-4A^{-1}-5E|=$ <u>0</u>；

2、设五阶方阵A的秩为3，则齐次线性方程组$Ax=0$的解空间的维数为 <u>2</u>；

3、设A为五阶方阵，且$|A|=-2$，则$|A^*|=$ <u>16</u>；

4、已知向量组$\alpha_1=(1,2,4)^T$，$\alpha_2=(2,3,7)^T$，$\alpha_3=(3,-5,\lambda)^T$线性相关，则λ的取值应满足 <u>λ=1</u>；

5、若$\alpha_1=(1,2,1)^T$，$\alpha_2=(2,3,4)^T$，$\alpha_3=(3,\lambda,3)^T$是向量空间$\mathfrak{R}^3$中的一组基，λ取值应满足 <u>λ≠6</u>；

6、已知矩阵$A=\begin{pmatrix}1&-2&-4\\-2&x&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$与$B=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&-1&0\\0&0&y\end{pmatrix}$相似，则 $y=$ <u>$\frac{1}{3}$</u>

二、选择题

1、设A为n阶方阵，且$|A|\neq0$，则下列说法正确的是（ B ）

（A）若$|B|=|A|$，则A与B有相同的特征值　（B）若$AB=AC$，则$B=C$

（C）存在非零矩阵B，使得$AB=0$　（D）若$R(B)=n$，则A与B等价

2、已知A，B均为n阶方阵，则下列说法不正确的是（ D ）；

（A）若A与B相似，则$|A|=|B|$；　（B）若A与B相似，则$R(A)=R(B)$；

（C）若A与B相似，则A与B具有相同的特征值；　（D）若A与B相似，则A与B具有相同的特征向量；

3 向量$\beta=(5,0,7)^T$在基$\alpha_1=(1,-1,0)^T$，$\alpha_2=(2,1,3)^T$，$\alpha_3=(3,1,2)^T$下的坐标为（ C ）

（A）$(0,1,1)^T$　（B）$(5,0,7)^T$　（C）$(2,3,-1)^T$　（D）$(-1,0,2)^T$

4、已知三阶矩阵$A=\begin{pmatrix}3&2&-2\\-k&1&k\\4&k&-3\end{pmatrix}$有特征值0，则$k=$（ A ）

（A）1　（B）0　（C）−1　（D）2

5、已知三维向量$\alpha_1=(a_1,a_2,a_3)^T$，$\alpha_2=(b_1,b_2,b_3)^T$，$\alpha_3=(c_1,c_2,c_3)^T$，则三条直线$\begin{cases}l_1: a_1x+b_1y=c_1\\ l_2: a_2x+b_2y=c_2\\ l_3: a_3x+b_3y=c_3\end{cases}$（其中$a_i^2+b_i^2\neq0, i=1,2,3$）交于一点的充要条件是（ D ）；

（A）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关　（B）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关

（C）$R(\alpha_1,\alpha_2)=R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$　（D）α_1,α_2线性无关，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关

6、设A为3×4矩阵，且A的行向量组线性无关，则下列选项正确的是（ C ）。

（A）齐次线性方程组$AX=0$仅有零解　（B）齐次线性方程组$A^TX=0$有非零解

（C）非齐次线性方程组$AX=b$有无穷多解　（D）非齐次线性方程组$A^TX=b$有唯一解

三、计算题

1、已知$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$且满足$AXA+BXB=AXB+BXA$，试求$|X|$；

解：移项提取公因式可得 $(A-B)X(A-B)=0$

$\because A-B=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 且 $|A-B|\neq 0$

又因为 $|A-B||X||A-B|=0$ $\therefore |X|=0$

2、已知向量空间$\mathbb{R}^3$中的两组基分别为（I）$\alpha_1=(1,0,0)^T$，$\alpha_2=(1,1,0)^T$，$\alpha_3=(1,1,1)^T$，和（II）$\beta_1=(1,2,1)^T$，$\beta_2=(2,3,3)^T$，$\beta_3=(3,7,1)^T$，试求由基（I）到基（II）的过渡矩阵；

解：设由基(I)到基(II)的过渡矩阵为P

则 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\cdot P$

$\therefore P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}\cdot(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$

$\therefore P=\begin{pmatrix}-1&-1&-4\\1&0&6\\1&3&1\end{pmatrix}$

3、问当λ取何值时，向量$\beta=(99\ \ 79\ \ 59)^T$能经向量组$\alpha_1=(1\ \ -1\ \ 0)^T$，$\alpha_2=(2\ \ 1\ \ 3)^T$，$\alpha_3=(1\ \ -2\ \ \lambda)^T$唯一的线性表示。

解：当$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关时，向量β可经之唯一线性表示

$|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|\neq 0 \Rightarrow \begin{vmatrix}1&2&1\\-1&1&-2\\0&3&\lambda\end{vmatrix}\neq 0$

$\therefore \lambda\neq -1$

$\bar{A}\rightarrow\begin{bmatrix}1&2&1&99\\0&3&-1&178\\0&0&\lambda+1&-119\end{bmatrix}$

4、设三阶实对称矩阵A的特征值分别为1，−1，0，已知对应于特征值1，−1，的特征向量分别为$\alpha_1=(1,\ 2,\ 2)^T$，$\alpha_2=(2,\ 1,\ -2)^T$，试求属于特征值0的所有特征向量。

解：设属于特征值0的特征向量为$(x_1,x_2,x_3)=X$

则有 $\begin{cases}x_1+2x_2+2x_3=0\\2x_1+x_2-2x_3=0\end{cases}$

解之得基础解系为 $\alpha_3=(2,-2,1)^T$

$\therefore$ 属于特征值0的所有特征向量为$k\alpha_3\ (k\neq 0)$

二、试求解下列各题

1、给定向量组$\alpha_1=(2,1,4,3)^T$，$\alpha_2=(-1,1,-6,6)^T$，$\alpha_3=(-1,-2,2,-9)^T$，$\alpha_4=(1,1,-2,7)^T$，$\alpha_5=(2,4,4,9)^T$，求向量组的秩和它的一个最大线性无关组，并将其余向量用该最大线性无关组线性表示。

解：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=\begin{pmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}$

$\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&1&-1&1&0\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$　　$\therefore R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=3$

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$为一个极大线性无关组

$\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&-2&4\\0&1&1&-1&0\\0&0&1&0&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&0&-1&4\\0&1&0&-1&3\\0&0&1&0&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$　$\therefore$ $\alpha_3=-\alpha_1-\alpha_2$

$\alpha_5=4\alpha_1+3\alpha_2-3\alpha_4$

2、已知实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2ax_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$为正定二次型，试求a的取值范围。

解：$A=\begin{pmatrix}1&a&-1\\a&1&2\\-1&2&5\end{pmatrix}$

$D_1=1>0$

$D_2=\begin{vmatrix}1&a\\a&1\end{vmatrix}=1-a^2>0\Rightarrow -1<a<1$

$D_3=\begin{vmatrix}1&a&-1\\a&1&2\\-1&2&5\end{vmatrix}=-5a^2-4a>0\Rightarrow -\frac{4}{5}<a<0$

$\therefore -\frac{4}{5}<a<0$

3、设有线性方程组$\begin{cases}(1+\lambda)x_1+x_2+x_3=0\\x_1+(1+\lambda)x_2+x_3=3\\x_1+x_2+(1+\lambda)x_3=\lambda\end{cases}$，问 λ 取何值时，此方程组有无穷多解？并在有无穷多解时求出其通解；

解：$\begin{vmatrix}1+\lambda&1&1\\1&1+\lambda&1\\1&1&1+\lambda\end{vmatrix}=(3+\lambda)\lambda^2=0$　$\therefore\lambda=0$或$\lambda=-3$

显然当$\lambda=0$时，线性方程组无解　$\therefore\lambda=-3$时有无穷多解

当$\lambda=-3$时，解得 $X=(-1,-2,0)^T+t(1,1,1)^T$

其中t为自由变量

4、试判断矩阵$A=\begin{pmatrix}5&2&-2\\3&1&1\\0&2&3\end{pmatrix}$能否对角化。

解：$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}5-\lambda&2&-2\\3&1-\lambda&1\\0&2&3-\lambda\end{vmatrix}=(5-\lambda)\begin{vmatrix}1&2&-2\\1&1-\lambda&1\\1&2&3-\lambda\end{vmatrix}=(5-\lambda)^2(\lambda+1)$

$\therefore\lambda_1=\lambda_2=5,\ \lambda_3=-1$

当$\lambda_1=\lambda_2=5$时，$(A-5E)X=0$

$\because R(A-5E)=2$

$\therefore 3-R(A-5E)=1\neq 2$

$\therefore$ 矩阵A不能对角化

三、试求解下列试题

求一个正交变换$X = QY$，把实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_2x_3$ 化为标准型，并写出正交线性变换。

解：
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(\lambda-4) = 0$$

$\therefore \lambda_1 = \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 4$

当$\lambda_3 = 4$时，$(A-4E)X=0$，解之得 $\xi_1 = (0,1,1)^T$

单位化得 $\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)^T$

当$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$时，$(A-2E)X=0$，解之得 $\xi_2 = (1,0,0)^T$

$\xi_3 = (0,-1,1)^T$

此时ξ_2与ξ_3已经正交，单位化可得 $\eta_2 = (1,0,0)^T$

$\eta_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1)^T$

$$\therefore Q = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

$f(Y) = 4y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_3^2$

六、证明题

设A为三阶矩阵，向量α_1, α_2为A的分别属于特征值-1和1的特征向量，而向量α_3满足$A\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_3$，试证明向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关。

证明：不妨假设存在k_1, k_2, k_3使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0$

两边同时左乘A可得 $k_1A\alpha_1 + k_2A\alpha_2 + k_3A\alpha_3 = 0$

$\therefore -k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3(\alpha_2 + \alpha_3) = 0$

即 $-k_1\alpha_1 + (k_2+k_3)\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0$

式②－式①可得 $-2k_1\alpha_1 + k_3\alpha_2 = 0$

因为α_1与α_2线性无关 $\therefore k_1 = k_3 = 0$

$\therefore k_2\alpha_2 = 0 \Rightarrow k_2 = 0$

$\therefore \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关