ТЕОРИЯ ФИЛЬТРА КАЛМАНА

А.И. Матасов

Лаборатория управления и навигации
механико-математический факультет
МГУ им. М.В. Ломоносова

E-mail: alexander.matasov@gmail.com

Часть II.

ФИЛЬТР КАЛМАНА

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОЦЕНИВАНИЯ

Модель для измеряемого случайного процесса $y_i \in \mathbb{C}^p$ в пространстве состояний:

$$y_i = H_i x_i + v_i, \qquad i \geq 0,$$

где случайный вектор состояния $x_i \in \mathbb{C}^n$ удовлетворяет уравнению:

$$x_{i+1} = F_i x_i + G_i u_i, \qquad i \geq 0.$$

Процессы $v_i \in \mathbb{C}^p$ и $u_i \in \mathbb{C}^m$ полагаются процессами белого шума с нулевыми средними и известной расширенной ковариационной матрицей вида

$$\mathsf{E} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_j \\ v_j \end{bmatrix}^* = \left\langle \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_j \\ v_j \end{bmatrix} \right\rangle = \begin{bmatrix} Q_i & S_i \\ S_i^* & R_i \end{bmatrix} \delta_{ij},$$

где δ_{ij} – символ Кронекера, $Q_i \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $S_i \in \mathbb{C}^{m\times p}$ и $R_i \in \mathbb{C}^{p\times p}$.

Начальное состояние x_0 считается случайным вектором с нулевым средним и известной ковариационной матрицей $\Pi_0 \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

Оно предполагается некоррелированным с u_i и v_i для всех i: $\langle x_0, u_i \rangle = 0$, $\langle x_0, v_i \rangle = 0$.
Детерминированные матрицы $F_i \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $G_i \in \mathbb{C}^{n\times m}$, $H_i \in \mathbb{C}^{p\times n}$ являются заданными.

Рассмотрим линейные оценки x_i по измерениям $\{y_0, \ldots, y_{i-1}\}$ или по измерениям $\{y_0, \ldots, y_i\}$:

$$\hat{x}_{[i|i-1]} = K_{[i|i-1]} \operatorname{col}(y_0, \ldots, y_{i-1}), \qquad K_{[i|i-1]} \in \mathbb{C}^{n \times p\, i}$$

или

$$\hat{x}_{[i|i]} = K_{[i|i]} \operatorname{col}(y_0, \ldots, y_i), \qquad K_{[i|i]} \in \mathbb{C}^{n \times p(i+1)}.$$

Цель состоит в нахождении оптимальных в среднеквадратическом смысле оценок x_i.

Задача построения одношагового прогноза

$$\mathsf{E}\left[\left(x_i - \hat{x}_{[i|i-1]}\right)\left(x_i - \hat{x}_{[i|i-1]}\right)^*\right] \to \min_K$$

Задача фильтрации

$$\mathsf{E}\left[\left(x_i - \hat{x}_{[i|i]}\right)\left(x_i - \hat{x}_{[i|i]}\right)^*\right] \to \min_K .$$

Оптимальные оценки определяются ортогональными проекциями x_i на соответствующие подпространства. Будем обозначать их $\hat{x}_{i|i-1}$ и $\hat{x}_{i|i}$.

Рекуррентное преобразование $\{y_0, \ldots, y_i\}$ в $\hat{x}_{i|i-1}$ и (или) $\hat{x}_{i|i}$ порождает алгоритм цифровой обработки измерений, который называется *фильтром Калмана.*

Замечание 1. В качестве основного пространства можно взять

$$\mathcal{V}_i = \{Sx_0 + L_0u_0 + \ldots + L_{i-1}u_{i-1} + M_0v_0 + \ldots + M_iv_i\},$$

где $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $L_0, \ldots, L_{i-1} \in \mathbb{C}^{n\times m}$, $M_0, \ldots, M_i \in \mathbb{C}^{n\times p}$ – произвольные матрицы.

Кольцо $\mathcal{S}$ состоит из квадратных матриц размера $n \times n$ (инволюция – эрмитово сопряжение).

Скалярное произведение: $\langle a, b\rangle = \mathsf{E}\, ab^*$.

Очевидно, $\mathcal{V}_0 \subset \ldots \subset \mathcal{V}_i \subset \ldots$. Если $i \le T$, то в качестве пространства можно взять $\mathcal{V}_T$.

Введем линейное пространство

$$\mathcal{V}_i^\circ = \left\{S^\circ x_i + K_0^\circ y_0 + \ldots, +K_i^\circ y_i\right\},$$

где $S^\circ \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $K_0^\circ, \ldots, K_i^\circ \in \mathbb{C}^{n\times p}$ – произвольные матрицы. Ясно, что $\mathcal{V}_i^\circ \subset \mathcal{V}_i$. Поэтому ортогональные проекции $\hat{x}_{i|i-1}$ и $\hat{x}_{i|i}$ существуют и единственны.

Введение более широкого пространства $\mathcal{V}_i$ вместо $\mathcal{V}_i^\circ$ необходимо, поскольку далее потребуется проецировать не только x_i, но и другие величины, не входящие в $\mathcal{V}_i^\circ$.

СВОЙСТВА НЕКОРРЕЛИРОВАННОСТИ

Поскольку $x_j \in \mathcal{L}\{x_0; u_k, k \leq j-1\}$, то

$$\langle u_i, x_j \rangle = 0, \qquad \langle v_i, x_j \rangle = 0, \qquad j \leq i;$$

или, другими словами,

$$u_i \perp x_j, \qquad v_i \perp x_j, \qquad j \leq i.$$

По тем же причинам имеют место соотношения

$$u_i \perp y_j, \qquad v_i \perp y_j, \qquad j \leq i-1.$$

Вместе с тем, для одинаковых моментов времени,

$$\langle u_i, y_i \rangle = \langle u_i, x_i \rangle H_i^* + \langle u_i, v_i \rangle = 0 + S_i,$$

$$\langle v_i, y_i \rangle = \langle v_i, x_i \rangle H_i^* + \langle v_i, v_i \rangle = 0 + R_i.$$

Рекуррентные выражения для ковариаций вектора состояний $\Pi_i = \langle x_i, x_i \rangle$:

$$\begin{aligned} \Pi_{i+1} &= F_i \langle x_i, x_i \rangle F_i^* + F_i \langle x_i, u_i \rangle G_i^* + G_i \langle u_i, x_i \rangle F_i^* + G_i \langle u_i, u_i \rangle G_i^* = \\ &= F_i \, \Pi_i F_i^* \, + \, G_i Q_i G_i^*, \qquad i \geq 0 \end{aligned}$$

с начальным условием Π_0.

РЕКУРСИИ ДЛЯ ОДНОШАГОВОГО ПРОГНОЗА

Получим рекуррентные соотношения для фильтра Калмана, основанные на инновационной последовательности

$$e_i = y_i - \hat{y}_{i|i-1}.$$

Проектирование $\hat{y}_{i|i-1}$ осуществляется в модуле

$$\mathcal{V}_i^y = \left\{ S^y x_0 + L_0^y u_0 + \ldots + L_{i-1}^y u_{i-1} + M_0^y v_0 + \ldots + M_i^y v_i \right\},$$

где $S^y \in \mathbb{C}^{p\times n}$, $L_0^y, \ldots, L_{i-1}^y \in \mathbb{C}^{p\times m}$, $M_0^y, \ldots, M_i^y \in \mathbb{C}^{p\times p}$ – произвольные матрицы.

Рекурсии на основе инновационной последовательности

В силу линейности ортогональных проекций, а также свойства некоррелированности,

$$\hat{y}_{i|i-1} = H_i \hat{x}_{i|i-1} + \hat{v}_{i|i-1} = H_i \hat{x}_{i|i-1}$$

(здесь также проектирование происходит в $\mathcal{V}_i^y$), откуда

$$e_i = y_i - H_i \hat{x}_{i|i-1}.$$

Оценка $\hat{x}_{i|i-1}$ является предсказанием величины x_i на основании измерений $\{y_0, \ldots, y_{i-1}\}$, ее естественно называть одношаговым прогнозом (predicted estimate).

Отметим, что $\mathcal{L}_j$ может рассматриваться как подпространство, порожденное векторами $\{e_0, \ldots, e_j\}$. В соответствии с третьим свойством ортогональных проекций и формулой для решения базовой задачи оценивания,

$$\hat{x}_{i+1|i} = \sum_{j=0}^{i} \langle x_{i+1}, e_j \rangle R_{e,j}^{-1}\, e_j = \left(\sum_{j=0}^{i-1} \langle x_{i+1}, e_j \rangle R_{e,j}^{-1}\, e_j \right) + \langle x_{i+1}, e_i \rangle R_{e,i}^{-1}\, e_i =$$

$$= \ \hat{x}_{i+1|i-1} + \langle x_{i+1}, e_i \rangle R_{e,i}^{-1} \left(y_i - H_i \hat{x}_{i|i-1} \right), \qquad i \geq 0;$$

здесь нужно положить $\hat{x}_{0|-1} = 0, \quad \hat{x}_{1|-1} = 0.$

Согласно свойствам ортогональных проекций и свойствам некоррелированности,

$$\hat{x}_{i+1|i-1} = F_i \hat{x}_{i|i-1} + G_i \hat{u}_{i|i-1} = F_i \hat{x}_{i|i-1} + 0.$$

В этой формуле проектирование $\hat{u}_{i|i-1}$ осуществляется в модуле

$$\mathcal{V}_{i+1}^{u} = \left\{ S^u x_0 + L_0^u u_0 + \ldots + L_i^u u_i + M_0^u v_0 + \ldots + M_{i+1}^u v_{i+1} \right\},$$

где $S^u \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $L_0^u, \ldots, L_i^u \in \mathbb{C}^{m \times m}$, $M_0^u, \ldots, M_{i+1}^u \in \mathbb{C}^{m \times p}$ – произвольные матрицы.

Тогда получаем рекуррентное соотношение для фильтра Калмана

$$e_i = y_i - H_i \hat{x}_{i|i-1}, \qquad e_0 = y_0,$$

$$\hat{x}_{i+1|i} = F_i \hat{x}_{i|i-1} + K_{p,i} e_i, \qquad \hat{x}_{0|-1} = 0, \qquad i \geq 0,$$

где

$$K_{p,i} \triangleq \langle x_{i+1}, e_i \rangle R_{e,i}^{-1}.$$

Индекс p указывает, что $K_{p,i}$ используется для обновления прогноза (predicted estimator).

Пара $\{K_{p,i}, R_{e,i}\}$ состоит из детерминированных величин, которые, как будет показано ниже, однозначно вычисляются по исходным данным задачи оценивания.

Основное рекуррентное соотношение для фильтра Калмана:

$$\boxed{\hat{x}_{i+1|i} = F_{p,i} \hat{x}_{i|i-1} + K_{p,i}\, y_i, \qquad F_{p,i} = F_i - K_{p,i} H_i, \qquad \hat{x}_{0|-1} = 0, \qquad i \geq 0.}$$

Явные выражения для $R_{e,i}$ и $K_{p,i}$

Введем обозначения

$$P_{i|i-1} \triangleq \langle \tilde{x}_{i|i-1}, \tilde{x}_{i|i-1} \rangle, \qquad \tilde{x}_{i|i-1} \triangleq x_i - \hat{x}_{i|i-1};$$

матрица $P_{i|i-1}$ характеризует оптимальную точность одношагового прогоза.

Выразим далее величины $R_{e,i}$ и $K_{p,i}$ через $P_{i|i-1}$.

Как будет показано ниже, справедливо соотношение

$$P_{i+1|i} = F_i P_{i|i-1} F_i^* + G_i Q_i G_i^* - K_{p,i} R_{e,i} K_{p,i}^*, \qquad i \geq 0$$

с начальным условием

$$P_{0|-1} \triangleq \langle \tilde{x}_0, \tilde{x}_0 \rangle = \langle (x_0 - \hat{x}_{0|-1}), (x_0 - \hat{x}_{0|-1}) \rangle = \langle x_0, x_0 \rangle = \Pi_0.$$

В силу явной зависимости $R_{e,i}$ и $K_{p,i}$ от $P_{i|i-1}$, выражение для ковариационной матрицы станет рекуррентным уравнением для $P_{i|i-1}$.

Замечание 2 (об обозначениях). Далее будем использовать более простые обозначения

$$\hat{x}_i \triangleq \hat{x}_{i|i-1}, \qquad \tilde{x}_i \triangleq \tilde{x}_{i|i-1}, \qquad P_i \triangleq P_{i|i-1}.$$

Так как $e_i = H_i \tilde{x}_i + v_i$, то по свойству некоррелированности,

$$R_{e,i} = H_i P_i H_i^* + R_i.$$

$\boxed{\text{Всюду далее будет предполагаться, что } R_i > 0.}$

Для вычисления $K_{p,i}$ отметим, что

$$\langle x_{i+1}, e_i \rangle = F_i \langle x_i, e_i \rangle + G_i \langle u_i, e_i \rangle.$$

Так как $\langle x_i, \tilde{x}_i \rangle = \langle \hat{x}_i + \tilde{x}_i, \tilde{x}_i \rangle = 0 + P_i$, то

$$\langle x_i, e_i \rangle = \langle x_i, \tilde{x}_i \rangle H_i^* + \langle x_i, v_i \rangle = P_i H_i^* + 0.$$

Поскольку

$$\tilde{x}_i \in \mathcal{L}\{x_i; y_0, \ldots, y_{i-1}\} \subset \mathcal{L}\{x_0; u_0, \ldots, u_{i-1}; v_0, \ldots, v_{i-1}\} \perp u_i,$$

то

$$\langle u_i, e_i \rangle = \langle u_i, \tilde{x}_i \rangle H_i^* + \langle u_i, v_i \rangle = 0 + S_i.$$

Поэтому

$$K_{p,i} = \langle x_{i+1}, e_i \rangle R_{e,i}^{-1} = (F_i P_i H_i^* + G_i S_i)\, R_{e,i}^{-1}.$$

ИТОГ: Формулы Калмана для одношагового прогноза

Фильтр Калмана для оценок x_i по измерениям $\{y_0, \ldots, y_{i-1}\}$ имеет вид

$$\hat{x}_{i+1} = F_{p,i}\hat{x}_i + K_{p,i}\, y_i, \qquad \hat{x}_0 = 0, \qquad i \geq 0,$$

где

$$R_{e,i} = H_i P_i H_i^* + R_i, \qquad K_{p,i} = (F_i P_i H_i^* + G_i S_i)\, R_{e,i}^{-1}, \qquad F_{p,i} = F_i - K_{p,i} H_i,$$

а матрица ковариаций ошибок оценок задается уравнением

$$P_{i+1} = F_i P_i F_i^* + G_i Q_i G_i^* - K_{p,i} R_{e,i} K_{p,i}^*, \qquad P_0 = \Pi_0.$$

Последнее уравнение (с подстановкой $R_{e,i}$ и $K_{p,i}$) называется *уравнением Риккати* для дискретного времени.

Соотношения указанной выше структуры для оптимальных оценок были получены Р.Э. Калманом в 1960 году.

Замечание 3. Величины $P_i, K_{p,i}, R_{e,i}$ зависят только от исходных допущениях о модели и не зависят от текущих измерений $\{y_i\}$. Следовательно их можно вычислить заранее и сохранить в памяти компьютера. Однако, формулы показывают, что данные величины могут обновляться в текущем времени, избегая затратного хранения в памяти вычислителя.

Пример фильтра Калмана для простейшей модели

Пример. Рассмотрим одномерную модель

$$x_{i+1} = x_i, \qquad y_i = x_i + v_i, \qquad i \geq 0,$$

где $x_i \in \mathbb{C}$ – состояние системы с нулевым начальным средним и начальной дисперсией σ^2, $y_i \in \mathbb{C}$ – измерения, $v_i \in \mathbb{C}$ – шум измерений с независимыми по i компонентами, каждая из которых имеет нулевое среднее и дисперсию R; x_0 и v_i некоррелированы друг с другом.

Требуется найти наилучшую оценку x_i по измерениям $\{y_0, \ldots, y_{i-1}\}$.

Р е ш е н и е. Согласно формулам Калмана для одношагового прогноза

$$\hat{x}_{i+1} = \left(\frac{R}{P_i + R}\right)\hat{x}_i + \frac{P_i}{P_i + R}\,y_i, \qquad \hat{x}_0 = 0, \qquad i \geq 0,$$

где матрица ковариаций ошибок оценок задается одномерным уравнением Риккати

$$P_{i+1} = P_i - \frac{P_i^2}{P_i + R} = \frac{R\,P_i}{P_i + R}, \qquad P_0 = \sigma^2.$$

Нетрудно получить (например, переходя к обратной величине P_i^{-1}), что $P_i = \dfrac{R\,\sigma^2}{\sigma^2\,i + R}$.

ВЫВОД РЕКУРРЕНТНЫХ СООТНОШЕНИЙ ДЛЯ P_i

Прямое использование уравнений ошибок оценок

Из уравнений для модели

$$x_{i+1} = F_i x_i + G_i u_i, \qquad y_i = H_i x_i + v_i$$

и уравнения для оценок

$$\hat{x}_{i+1} = F_i \hat{x}_i + K_{p,i} \left(H_i \tilde{x}_i + v_i \right)$$

нетрудно получить уравнение для ошибок оценок

$$\tilde{x}_{i+1} = F_i \tilde{x}_i + G_i u_i - K_{p,i} H_i \tilde{x}_i - K_{p,i} v_i = F_{p,i} \tilde{x}_i + \left[\begin{array}{cc} G_i & -K_{p,i} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} u_i \\ v_i \end{array} \right],$$

где, как и ранее, $F_{p,i} = F_i - K_{p,i} H_i$ и $K_{p,i} = \left(F_i P_i H_i^* + G_i S_i \right) R_{e,i}^{-1}$.

Учитывая свойства ортогональности, легко получить, что

$$P_{i+1} = F_{p,i} P_i \, F_{p,i}^* + \left[\begin{array}{cc} G_i & -K_{p,i} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} Q_i & S_i \\ S_i^* & R_i \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} G_i^* \\ -K_{p,i}^* \end{array} \right].$$

Далее необходимо провести выкладки по раскрытию правой части:

$$P_{i+1} = (F_i - K_{p,i}H_i)P_i(F_i - K_{p,i}H_i)^* + G_iQ_iG_i^* - G_iS_iK_{p,i}^* - K_{p,i}S_i^*G_i^* + K_{p,i}R_iK_{p,i}^* =$$

$$= F_iP_iF_i^* - K_{p,i}H_iP_iF_i^* - F_iP_iH_i^*K_{p,i}^* + K_{p,i}H_iP_iH_i^*K_{p,i}^* + G_iQ_iG_i^* -$$

$$- G_iS_iK_{p,i}^* - K_{p,i}S_i^*G_i^* + K_{p,i}R_iK_{p,i}^* =$$

$$= F_iP_iF_i^* + G_iQ_iG_i^* - K_{p,i}(F_iP_iH_i^* + G_iS_i)^* - (F_iP_iH_i^* + G_iS_i)K_{p,i}^* + K_{p,i}R_{e,i}K_{p,i}^* =$$

$$= F_iP_iF_i^* + G_iQ_iG_i^* - K_{p,i}R_{e,i}K_{p,i}^*.$$

Использование разности ковариационных матриц состояния и оценки

Ковариационная матрица вектора состояний $\Pi_i = \langle x_i, x_i \rangle$ подчиняется уравнению

$$\Pi_{i+1} = F_i \, \Pi_i F_i^* \, + \, G_i Q_i G_i^* \qquad \text{с начальным условием} \quad \Pi_0.$$

Вектор оценок удовлетворяет уравнению

$$\hat{x}_{i+1} = F_i \hat{x}_i + K_{p,i} e_i \qquad \text{с начальным условием} \quad \hat{x}_0 = 0,$$

причем $\hat{x}_i \perp e_i$ (так как $e_i \perp \mathcal{L}_i$).

Следовательно ковариационная матрица вектора оценок $\Sigma_i = \langle \hat{x}_i, \hat{x}_i \rangle$ подчиняется уравнению

$$\Sigma_{i+1} = F_i \, \Sigma_i F_i^* \, + \, K_{p,i} R_{e,i} K_{p,i}^* \qquad \text{с начальным условием} \quad \Sigma_0 = 0.$$

В силу разложения $x_i = \hat{x}_i + \tilde{x}_i$, $\hat{x}_i \perp \tilde{x}_i$,

$$\Pi_i = \Sigma_i + P_i,$$

откуда

$$P_{i+1} = \Pi_{i+1} - \Sigma_{i+1} = F_i \left(\Pi_i - \Sigma_i \right) F_i^* + G_i Q_i G_i^* - K_{p,i} R_{e,i} K_{p,i}^*, \qquad P_0 = \Pi_0,$$

что и является уравнением Риккати.

ИННОВАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ ИЗМЕРЯЕМОГО ПРОЦЕССА

Фильтр Калмана доставляет явные соотношения для взаимообратных преобразований, связывающих $\{y_i\}$ и $\{e_i\}$. Действительно, с одной стороны,

$$y_i = H_i\hat{x}_i + e_i, \qquad \hat{x}_{i+1} = F_i\hat{x}_i + K_{p,i}e_i, \qquad \hat{x}_0 = 0$$

и поэтому y_i явно выражается через $\{e_0, \ldots, e_i\}$.

С другой стороны,

$$e_i = \,-\,H_i\hat{x}_i + y_i, \qquad \hat{x}_{i+1} = F_{p,i}\hat{x}_i + K_{p,i}y_i, \qquad \hat{x}_0 = 0$$

и поэтому e_i явно выражается через $\{y_0, \ldots, y_i\}$.

Таким образом, посредством фильтра Калмана реализуются "физически осуществимые" преобразования $\{e_i\}$ в $\{y_i\}$ и обратно. Можно построить соответствующие нижнетреугольные матрицы. Это означает, что фильтр Калмана выполняет моделирующую функцию для инновационной последовательности.

ДВУХЭТАПНАЯ ФОРМА ФИЛЬТРА КАЛМАНА

С.Ф. Шмидтом была предложена модификация соотношений фильтра Калмана.

Лемма 1 (коррекция одношагового прогноза) (measurement updates). *Пусть $\hat{x}_i$ – одношаговый прогноз. Эту оценку можно улучшить, построив полную оценку x_i на основании всех измерений $\{y_0, \ldots, y_i\}$, определяемую формулами*

$$\hat{x}_{i|i} = \hat{x}_i + K_{f,i} e_i,$$

$$\|x_i - \hat{x}_{i|i}\|^2 \overset{\Delta}{=} P_{i|i} = P_i - K_{f,i} R_{e,i} K_{f,i}^* = P_i - P_i H_i^* R_{e,i}^{-1} H_i P_i,$$

где $K_{f,i} = P_i H_i^* R_{e,i}^{-1}$.

Доказательство. Воспользуемся основной формулой

$$\hat{x}_{i|i} = \sum_{j=0}^{i} \langle x_i, e_j \rangle R_{e,j}^{-1} e_j = \hat{x}_{i|i-1} + \langle x_i, e_i \rangle R_{e,i}^{-1} e_i.$$

Заметим, что

$$\langle x_i, e_i \rangle = \langle x_i, H_i \tilde{x}_i + v_i \rangle = \langle x_i, \tilde{x}_i \rangle H_i^* + \langle x_i, v_i \rangle = P_i H_i^*.$$

Тогда, определяя $K_{f,i} = P_i H_i^* R_{e,i}^{-1}$, получим первое утверждение леммы. Далее,

$$\tilde{x}_{i|i} \stackrel{\Delta}{=} x_i - \hat{x}_{i|i} = x_i - \hat{x}_i - K_{f,i} e_i = \tilde{x}_i - K_{f,i} e_i.$$

Поэтому

$$\|\tilde{x}_{i|i}\|^2 = \langle \tilde{x}_i, \tilde{x}_i \rangle - K_{f,i} \langle e_i, \tilde{x}_i \rangle - \langle \tilde{x}_i, e_i \rangle K_{f,i}^* + K_{f,i} \langle e_i, e_i \rangle K_{f,i}^*.$$

Кроме того,

$$\langle e_i, \tilde{x}_i \rangle = H_i \langle \tilde{x}_i, \tilde{x}_i \rangle + \langle v_i, \tilde{x}_i \rangle = H_i P_i + 0,$$

поскольку $\tilde{x}_i \in \mathcal{L}\{x_0; u_0, \ldots, u_{i-1}; v_0, \ldots, v_{i-1}\}$. Следовательно

$$K_{f,i} \langle e_i, \tilde{x}_i \rangle = P_i H_i^* R_{e,i}^{-1} H_i P_i = \langle \tilde{x}_i, e_i \rangle K_{f,i}^*.$$

Подставляя это соотношение в выражение для $\|\tilde{x}_{i|i}\|^2$, получаем второе утверждение леммы.

Можно пойти более прямым путем:

$$\|\tilde{x}_{i|i}\|^2 = \langle \tilde{x}_{i|i}, x_i - \hat{x}_{i|i} \rangle = \langle \tilde{x}_{i|i}, x_i \rangle = \langle \tilde{x}_i, x_i \rangle - K_{f,i} \langle e_i, x_i \rangle =$$

$$= P_i - K_{f,i} \left[H_i \langle \tilde{x}_i, x_i \rangle + 0 \right] = P_i - K_{f,i} H_i P_i = P_i - P_i H_i^* R_{e,i}^{-1} H_i P_i.$$

Лемма 2 (прогноз по полной оценке) (time updates). *Пусть* $\hat{x}_{i|i}$ – *полная оценка на основании всех измерений* $\{y_0, \ldots, y_i\}$. *Тогда прогноз вектора состояния на следующий шаг определяется формулами*

$$\hat{x}_{i+1} = F_i \hat{x}_{i|i} + G_i \hat{u}_{i|i}, \qquad \hat{u}_{i|i} = S_i R_{e,i}^{-1} e_i,$$

$$P_{i+1} = F_i P_{i|i} F_i^* + G_i \left(Q_i - S_i R_{e,i}^{-1} S_i^* \right) G_i^* - F_i K_{f,i} S_i^* G_i^* - G_i S_i K_{f,i}^* F_i^*.$$

(Эти формулы намного проще при $S_i = 0$.)

Доказательство. Из уравнений вектора состояния $x_{i+1} = F_i x_i + G_i u_i$ следует, что $\hat{x}_{i+1} = F_i \hat{x}_{i|i} + G_i \hat{u}_{i|i}$. Пользуясь третьим свойством оптимальных оценок, получаем, что

$$\hat{u}_{i|i} = \sum_{j=0}^{i} \langle u_i, e_j \rangle R_{e,j}^{-1} e_j = 0 + \langle u_i,\, e_i \rangle R_{e,i}^{-1}\, e_i,$$

поскольку $e_j \in \mathcal{L}\{y_0, \ldots, y_j\}$, а u_i ортогонально каждому такому подпространству для $j \leq i - 1$. Далее,

$$\langle u_i, e_i \rangle = \langle u_i, v_i + H_i \tilde{x}_i \rangle = S_i + 0,$$

так как $\tilde{x}_i \in \mathcal{L}\{x_0; u_0, \ldots, u_{i-1}; v_0, \ldots, v_{i-1}\}$, а u_i ортогонально этому подпространству. Таким образом, формулы первого утверждения леммы доказаны.

Выражение для P_{i+1} получается после следующих вычислений. Прежде всего заметим, что вычитание из уравнения для вектора состояний первого уравнения из утверждений леммы приводит к равенству

$$\tilde{x}_{i+1} = F_i \tilde{x}_{i|i} + G_i(u_i - S_i R_{e,i}^{-1} e_i).$$

Кроме того, справедливы соотношения

$$\langle u_i, e_i \rangle = S_i, \quad \langle \tilde{x}_{i|i}, u_i \rangle = \langle \tilde{x}_i, u_i \rangle - K_{f,i} \langle e_i, u_i \rangle = -K_{f,i} S_i^*, \quad \langle x_{i|i}, e_i \rangle = 0.$$

Вычисляя ковариации для $\tilde{x}_{i+1}$, с учетом полученных равенств, приходим к уравнению

$$\begin{aligned} P_{i+1} &= \langle F_i \tilde{x}_{i|i} + G_i(u_i - S_i R_{e,i}^{-1} e_i), F_i \tilde{x}_{i|i} + G_i(u_i - S_i R_{e,i}^{-1} e_i) \rangle = \\ &= F_i P_{i|i} F_i^* - F_i K_{f,i} S_i^* G_i^* - G_i S_i K_{f,i}^* F_i^* + G_i Q_i G_i^* - G_i S_i R_{e,i}^{-1} S_i^* G_i^* = \\ &= F_i P_{i|i} F_i^* - F_i K_{f,i} S_i^* G_i^* - G_i S_i K_{f,i}^* F_i^* + G_i \left(Q_i - S_i R_{e,i}^{-1} S_i^* \right) G_i^*, \end{aligned}$$

что и есть второе утверждение леммы.

Двухэтапная форма фильтра Калмана

Леммы 1 и 2 приводят к полезной для приложений и удобной для вычислений модификации фильтра Калмана, представленной следующей схемой:

$$0 = \hat{x}_{0|-1} \xrightarrow{m.u.} \hat{x}_{0|0} \xrightarrow{t.u.} \hat{x}_1 \xrightarrow{m.u.} \hat{x}_{1|1} \xrightarrow{t.u.} \hat{x}_2 \xrightarrow{m.u.} \hat{x}_{2|2} \xrightarrow{t.u.} \hat{x}_3 \quad \cdots$$

и

$$\Pi_0 = P_{0|-1} \xrightarrow{m.u.} P_{0|0} \xrightarrow{t.u.} P_1 \xrightarrow{m.u.} P_{1|1} \xrightarrow{t.u.} P_2 \xrightarrow{m.u.} P_{2|2} \xrightarrow{t.u.} P_3 \quad \cdots\ ;$$

здесь аббревиатуры $m.u.$ и $t.u.$ обозначают *measurement updates* (коррекция одношагового прогноза) и *time updates* (прогноз по полной оценке).

Замечание 4. Выше были рассмотрены задача одношагового прогноза и задача фильтрации, в которых требовалось найти оценки x_i по измерениям $\{y_0, \ldots, y_{i-1}\}$ и $\{y_0, \ldots, y_i\}$. Большой интерес для теории и приложений представляет так называемая задача *сглаживания,* когда необходимо определить оценку x_i по измерениям $\{y_0, \ldots, y_i, \ldots, y_T\}$.

ВЫРОЖДЕННЫЕ ШУМЫ ИЗМЕРЕНИЙ

Впервые обращать матрицу $R_{e,i}$ потребовалось в формуле для определения проекции x_{i+1} на подпространство, порожденное e_j. В случае вырождения матрицы $R_{e,i}$ формула для элементарной проекции имеет вид

$$\mathrm{Proj.}\{x_{i+1}|e_j\} = \langle x_{i+1}, e_j \rangle\, R^{+}_{e,j}\, e_j.$$

Поэтому равенства для полной проекции модифицируются следующим образом:

$$\hat{x}_{i+1|i} = \sum_{j=0}^{i} \langle x_{i+1}, e_j \rangle\, R^{+}_{e,j}\, e_j = \left(\sum_{j=0}^{i-1} \langle x_{i+1}, e_j \rangle\, R^{+}_{e,j}\, e_j \right) + \langle x_{i+1}, e_i \rangle\, R^{+}_{e,i}\, e_i =$$

$$= \ \hat{x}_{i+1|i-1} + \langle x_{i+1}, e_i \rangle\, R^{+}_{e,i} \left(y_i - H_i \hat{x}_{i|i-1} \right), \qquad\qquad i \geq 0.$$

Это означает, что во всех формулах фильтра Калмана надо $R^{-1}_{e,i}$ заменить на $R^{+}_{e,i}$.

Иными словами, фильтр Калмана в случае вырожденной матрицы $R_{e,i}$ примет вид

$$\hat{x}_{i+1} = F_{p,i} \hat{x}_i + K_{p,i}\, y_i, \qquad \hat{x}_0 = 0, \qquad i \geq 0,$$

где

$$R_{e,i} = H_i P_i H_i^* + R_i, \qquad K_{p,i} = \left(F_i P_i H_i^* + G_i S_i\right) R_{e,i}^+, \qquad F_{p,i} = F_i - K_{p,i} H_i,$$

а матрица ковариаций ошибок оценок задается уравнением Риккати

$$P_{i+1} = F_i P_i F_i^* + G_i Q_i G_i^* - K_{p,i} R_{e,i} K_{p,i}^*, \qquad P_0 = \Pi_0.$$

При этом, с учетом свойства $R_{e,i}^+ = R_{e,i}^+ R_{e,i} R_{e,i}^+$,

$$K_{p,i} R_{e,i} K_{p,i}^* = \left(F_i P_i H_i^* + G_i S_i\right) R_{e,i}^+ \left(F_i P_i H_i^* + G_i S_i\right)^* .$$

Регуляризация матрицы $R_{e,i}$.

Пусть шума в измерениях нет: $v_i = 0$; это означает, что $R_i = 0$ и $S_i = 0$.

Единственный член, содержащий возможную сингулярность, имеет вид

$$K_{p,i} R_{e,i} K_{p,i}^* = F_i P_i H_i^* R_{e,i}^{-1} H_i P_i F_i^* = F_i P_i H_i^* \left(H_i P_i H_i^*\right)^{-1} H_i P_i F_i^*.$$

В инженерной практике соответствующий член эвристически заменяют на

$$F_i P_i H_i^* \left(H_i P_i H_i^* + \delta^2 I\right)^{-1} H_i P_i F_i^*, \qquad \delta \ll 1.$$

Лемма 3. *Регуляризация обоснована:*

$$\lim_{\delta\to 0} F_iP_iH_i^*\left(H_iP_iH_i^*+\delta^2 I\right)^{-1}H_iP_iF_i^* = F_iP_iH_i^*\left(H_iP_iH_i^*\right)^{+}H_iP_iF_i^*.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что

$$\lim_{\delta\to 0} P_iH_i^*\left(H_iP_iH_i^*+\delta^2 I\right)^{-1} = P_iH_i^*\left(H_iP_iH_i^*\right)^{+},$$

откуда и будет следовать нужный результат.

Действительно, пусть $P_i = P_i^{1/2}\left(P_i^{1/2}\right)^*$. Тогда

$$\lim_{\delta\to 0} P_iH_i^*\left(H_iP_iH_i^*+\delta^2 I\right)^{-1} = \lim_{\delta\to 0} P_i^{1/2}\left(H_iP_i^{1/2}\right)^*\left[H_iP_i^{1/2}\left(H_iP_i^{1/2}\right)^*+\delta^2 I\right]^{-1} = P_i^{1/2}\left(H_iP_i^{1/2}\right)^{+}.$$

Нетрудно показать, что $A^+ = A^*(AA^*)^+$; поэтому

$$P_i^{1/2}\left(H_iP_i^{1/2}\right)^{+} = P_i^{1/2}\left(H_iP_i^{1/2}\right)^*\left[H_iP_i^{1/2}\left(H_iP_i^{1/2}\right)^*\right]^{+} = P_iH_i^*\left(H_iP_iH_i^*\right)^{+}.$$

СЛУЧАЙ НЕЦЕНТРИРОВАННОГО НАЧАЛЬНОГО ВЕКТОРА

Модифицированная модель для вектора состояния и измеряемого процесса:

$$x_{i+1} = F_i x_i + G_i u_i, \qquad y_i = H_i x_i + v_i, \qquad i \geq 0,$$

$$\mathsf{E} x_0 = \bar{x}_0 \neq 0, \qquad\qquad \mathsf{E}\left[(x_0 - \bar{x}_0)(x_0 - \bar{x}_0)^*\right] = \Pi_0.$$

Аффинные оценки x_i по измерениям $\{y_0, \ldots, y_{i-1}\}$ или по измерениям $\{y_0, \ldots, y_i\}$:

$$\hat{x}_{[i|i-1]} = K_{[i|i-1]} \operatorname{col}(y_0, \ldots, y_{i-1}) + l_{[i|i-1]} \qquad \text{или} \qquad \hat{x}_{[i|i]} = K_{[i|i]} \operatorname{col}(y_0, \ldots, y_i) + l_{[i|i]},$$

где $K_{[i|i-1]} \in \mathbb{C}^{n \times p\, i}$ и $K_{[i|i]} \in \mathbb{C}^{n \times p(i+1)}$ – произвольные матричные коэффициенты, а $l_{[i|i-1]}$ и $l_{[i|i]}$ – произвольные векторы из $\mathbb{C}^n$.

Поставим задачу нахождения оптимальных в среднеквадратическом смысле оценок $\hat{x}_{i|i-1}$ и $\hat{x}_{i|i}$ для нецентрированных величин x_i по нецентрированным измерениям $\{y_0, \ldots, y_{i-1}\}$ или $\{y_0, \ldots, y_i\}$:

$$\mathsf{E}\left[\left(x_i - \hat{x}_{[i|i-1]}\right)\left(x_i - \hat{x}_{[i|i-1]}\right)^*\right] \to \min_{K,l} \quad \text{или} \quad \mathsf{E}\left[\left(x_i - \hat{x}_{[i|i]}\right)\left(x_i - \hat{x}_{[i|i]}\right)^*\right] \to \min_{K,l}.$$

Введем обозначения

$$\bar{x}_i \triangleq \mathsf{E}x_i, \qquad \bar{y}_i \triangleq \mathsf{E}y_i = H_i\mathsf{E}x_i, \qquad\qquad x_i^\circ \triangleq x_i - \bar{x}_i, \qquad y_i^\circ \triangleq y_i - \bar{y}_i.$$

Оптимальные оценки имеют вид

$$\hat{x}_{i|i-1} = \hat{x}^\circ_{i|i-1} + \bar{x}_i, \qquad\qquad \hat{x}_{i|i} = \hat{x}^\circ_{i|i} + \bar{x}_i,$$

где $\hat{x}^\circ_{i|i-1}$, $\hat{x}^\circ_{i|i-1}$ – оптимальные в среднеквадратическом смысле оценки соответствующих центрированных величин x_i° по центрированным измерениям $\{y_0^\circ, \dots, y_{i-1}^\circ\}$ или $\{y_0^\circ, \dots, y_i^\circ\}$.

Задача нахождения $\hat{x}_{i|i-1}$

Легко убедиться, что средние значения $\bar{x}_i$ удовлетворяют уравнению

$$\bar{x}_{i+1} = F_i\bar{x}_i, \qquad i \geq 0,$$

а центрированные величины x_i°, y_i° описываются соотношениями

$$x^\circ_{i+1} = F_i x_i^\circ + G_i u_i, \quad x_0^\circ = x_0 - \bar{x}_0, \qquad y_i^\circ = H_i x_i^\circ + v_i, \qquad i \geq 0,$$

причем $\mathsf{E}x_0^\circ = 0$, $\mathsf{E}x_0^\circ x_0^{\circ\,*} = \Pi_0$.

Оптимальные оценки для центрированных величин подчиняются соотношениям фильтра Калмана для одношагового прогноза

$$\hat{x}^{\circ}_{i+1} = F_i \hat{x}^{\circ}_i + K_{p,i}\,(y^{\circ}_i - H_i \hat{x}^{\circ}_i), \qquad \hat{x}^{\circ}_0 = 0, \qquad i \geq 0,$$

где

$$R_{e,i} = H_i P_i H_i^* + R_i, \qquad K_{p,i} = (F_i P_i H_i^* + G_i S_i)\, R_{e,i}^{-1},$$

а матрица ковариаций ошибок оценок задается уравнением Риккати

$$P_{i+1} = F_i P_i F_i^* + G_i Q_i G_i^* - K_{p,i} R_{e,i} K_{p,i}^*, \qquad P_0 = \Pi_0.$$

Учитывая равенство $\bar{y}_i = H_i \bar{x}_i$, из которого вытекает, что $y^{\circ}_i - H_i \hat{x}^{\circ}_i = y_i - H_i \hat{x}_i$, имеем (используя обозначение $\hat{x}_i \overset{\Delta}{=} \hat{x}_{i|i-1}$)

$$\hat{x}_{i+1} = F_i \hat{x}_i + K_{p,i}\,(y_i - H_i \hat{x}_i), \qquad \hat{x}_0 = \bar{x}_0, \qquad i \geq 0.$$

Модификация решения задачи нахождения $\hat{x}_{i|i}$ аналогична.

Поскольку $x^{\circ}_i - \hat{x}^{\circ}_i = x_i - \hat{x}_i$ и $x^{\circ}_i - \hat{x}^{\circ}_{i|i} = x_i - \hat{x}_{i|i}$, то матрицы P_i и $P_{i|i}$ остаются ковариационными матрицами ошибки оценки.

ИНФОРМАЦИОННАЯ ФОРМА ФИЛЬТРА КАЛМАНА

Иногда полезно вычислять ковариационные соотношения в обратных матрицах. Если значения ковариационных матриц достигают больших величин, то это стабилизирует вычислительный процесс. Далее $S_i = 0$.

Коррекция прогноза в информационной форме

$$P_{i|i} = P_i - P_i H_i^* R_{e,i}^{-1} H_i P_i = (I - K_{f,i} H_i) P_i,$$

$$\hat{x}_{i|i} = \hat{x}_i + K_{f,i} e_i,$$

$$K_{f,i} = P_i H_i^* R_{e,i}^{-1}, \qquad R_{e,i} = R_i + H_i P_i H_i^*.$$

Покажем, что если $R_i > 0$ и P_i^{-1} существует, то

$$P_{i|i}^{-1} = P_i^{-1} + H_i^* R_i^{-1} H_i,$$

и

$$P_{i|i}^{-1} \hat{x}_{i|i} = P_i^{-1} \hat{x}_i + H_i^* R_i^{-1} y_i.$$

Более того, коэффициент $K_{f,i}$ может быть представлен иначе:

$$K_{f,i} = P_{i|i} H_i^* R_i^{-1} = (P_i^{-1} + H_i^* R_i^{-1} H_i)^{-1} H_i^* R_i^{-1}.$$

Замечание 5. Так как величина, обратная к дисперсии параметра, является мерой информации о нем, то полученные формулы называют *информационной формой* коррекции одношагового прогноза.

Имеет место следующее равенство, называемое *леммой об обращении матрицы*:

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B\left(C^{-1} + DA^{-1}B\right)^{-1} DA^{-1}.$$

Применяя эту лемму к первому равенству, получаем

$$P_{i|i} = P_i - P_i H_i^* (R_i + H_i P_i H_i^*)^{-1} H_i P_i = (P_i^{-1} + H_i^* R_i^{-1} H_i)^{-1}.$$

Вновь используя лемму об обращении матрицы, имеем

$$K_{f,i} = P_i H_i^* (R_i + H_i P_i H_i^*)^{-1} = P_i H_i^* \left[R_i^{-1} - R_i^{-1} H_i \left(P_i^{-1} + H_i^* R_i^{-1} H_i\right)^{-1} H_i^* R_i^{-1}\right] =$$

$$= P_i \left[I - H_i^* R_i^{-1} H_i P_{i|i}\right] H_i^* R_i^{-1} = P_i \left[I - (P_{i|i}^{-1} - P_i^{-1}) P_{i|i}\right] H_i^* R_i^{-1} = P_{i|i} H_i^* R_i^{-1}.$$

И, наконец,

$$P_{i|i}^{-1} \hat{x}_{i|i} = P_{i|i}^{-1} \left[(I - K_{f,i} H_i)\, \hat{x}_i + K_{f,i} y_i\right] = P_i^{-1} \hat{x}_i + H_i^* R_i^{-1} y_i.$$

Существование P_i^{-1}

Лемма 4. *Пусть* $R_i > 0$, $S_i = 0$, $\Pi_0 > 0$, *а матрицы* F_i *обратимы. Тогда матрицы* $P_i > 0$ *и следовательно обратимы.*

Доказательство. Утверждение леммы верно для $i = 0$, так как $P_0 = \Pi_0 > 0$. Предположим, что оно верно для всех номеров вплоть до i. Рассмотрим уравнение Риккати

$$P_{i+1} = F_i P_i F_i^* + G_i Q_i G_i^* - F_i P_i H_i^* (R_i + H_i P_i H_i^*)^{-1} H_i P_i F_i^*.$$

Используя лемму об обращении матрицы, его можно представить в виде

$$P_{i+1} = G_i Q_i G_i^* + F_i (P_i^{-1} + H_i^* R_i^{-1} H_i)^{-1} F_i^*,$$

откуда с учетом невырожденности F_i следует, что

$$P_{i+1} \geq F_i (P_i^{-1} + H_i^* R_i^{-1} H_i)^{-1} F_i^* > 0.$$

Прогноз по полной оценке в информационной форме

При прогнозе по полной оценке

$$P_{i+1} = F_i P_{i|i} F_i^* + G_i Q_i G_i^*.$$

Предположим, что Q_i^{-1} существует.

Тогда применяя к этому равенству лемму об обращении матрицы, получим

$$P_{i+1}^{-1} = F_i^{-*} P_{i|i}^{-1} F_i^{-1} - F_i^{-*} P_{i|i}^{-1} F_i^{-1} G_i \left[Q_i^{-1} + G_i^* F_i^{-*} P_{i|i}^{-1} F_i^{-1} G_i \right]^{-1} G_i^* F_i^{-*} P_{i|i}^{-1} F_i^{-1}.$$

При этом уравнение для самой оценки имеет известный вид

$$\hat{x}_i = F_i \hat{x}_{i|i} \,.$$

Одношаговый прогноз в информационной форме

Из последнего соотношения при подстановке в него выражения для $P_{i|i}^{-1}$ следует, что

$$P_{i+1}^{-1} = F_i^{-*}(P_i^{-1} + H_i^* R_i^{-1} H_i) F_i^{-1} - F_i^{-*}(P_i^{-1} + H_i^* R_i^{-1} H_i) F_i^{-1} G_i \times$$

$$\times \left[Q_i^{-1} + G_i^* F_i^{-*}(P_i^{-1} + H_i^* R_i^{-1} H_i) F_i^{-1} G_i \right]^{-1} G_i^* F_i^{-*}(P_i^{-1} + H_i^* R_i^{-1} H_i) F_i^{-1}$$

с начальным условием $P_0^{-1} = \Pi_0^{-1}$.

Уравнение для оценки одношагового прогноза имеет прежний стандартный вид.

ОБ АНАЛОГИИ С ДЕТЕРМИНИРОВАННОЙ ЗАДАЧЕЙ

Пусть уравнение для измерения имеет вид (будем считать, что все величины вещественные)

$$y = Hx + v, \qquad y \in \mathbb{R}^p, \quad H \in \mathbb{R}^{p\times n}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad v \in \mathbb{R}^p,$$

где

$$\mathsf{E}xx^\mathsf{T} = P_0 > 0, \qquad \mathsf{E}vv^\mathsf{T} = R > 0, \qquad \mathsf{E}xv^\mathsf{T} = 0.$$

Требуется построить наилучшую в среднеквадратическом смысле линейную оценку вектора x по измерению y.

Эту задачу стохастического оценивания, очевидно, можно записать в терминах исходных соотношений:

$$x_{i+1} = x_i, \qquad y_i = H_i x_i + v_i, \qquad i = 0$$

при

$$x_0 = x, \qquad y_0 = y, \qquad H_0 = H, \qquad v_0 = v.$$

В соответствии с полученными результатами ее решение имеет вид

$$\hat{x} = \left(P_0^{-1} + H^\mathsf{T} R^{-1} H\right)^{-1} H^\mathsf{T} R^{-1} y.$$

Независимо от введенных ранее предположений, будем искать оценку неизвестного вектора x из решения следующей *детерминированной* вариационной задачи:

$$x^{\mathsf{T}} P_0^{-1} x + (y - Hx)^{\mathsf{T}} R^{-1} (y - Hx) \to \min_x .$$

(детерминированный метод наименьших квадратов).

Эта задача не является задачей оптимального оценивания в сформулированном ранее смысле: в ней исходно не минимизируется ошибка оценки. Она построена из "разумных" детерминированных соображений.

Минимизируемая функция выпукла. Поэтому необходимым и достаточным условием ее минимума является равенство нулю градиента по x:

$$P_0^{-1} x - H^{\mathsf{T}} R^{-1} y + H^{\mathsf{T}} R^{-1} H x = 0,$$

откуда

$$\hat{x} = \left(P_0^{-1} + H^{\mathsf{T}} R^{-1} H\right)^{-1} H^{\mathsf{T}} R^{-1} y.$$

Таким образом, решение стохастической задачи (как преобразование y в оценку x), доставляемое фильтром Калмана, совпадает с решением, определяемым детерминированным методом наименьших квадратов.