2.1.5

(i) 平凡

(ii) $P(|X-Y|\leq\epsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(|x-y|\leq\epsilon)dF_Y(y)$

令 $\epsilon \to 0$. 由绝对连续性. $P(|x-y|\leq\epsilon) \to$ 一致地 $\to 0$

得证

2.1.6

$\sigma(X) \perp\!\!\!\perp \sigma(Y)$. $f(x)\in\sigma(x)$. $g(Y)\in\sigma(Y)$

$\Rightarrow f(x) \perp\!\!\!\perp g(Y)$

2.1.7

取 $0\leq i<j\leq K-1$, $0\leq a,b\leq K-1$

考虑同余方程组

$\begin{cases} X+iY \equiv a \pmod{K} \\ X+jY \equiv b \pmod{K} \end{cases}$

由初等数论知识. 不难看出 $\mod K$ 意义下有唯一解.

故 $P(X_i=a, X_j=b) = \frac{1}{K^2}$

知两两独立

但又知. 对于两两不等的 i,j,k. 由 X_i 与 X_j 可解出 X_k.

故 不独立

2.1.8

取 X_1, X_2, X_3, X_4 独立 symmetric Bernoulli

取 $Y_1=X_1X_2$, $Y_2=X_2X_3$ $Y_3=X_3X_4$ $Y_4=X_4X_1$

2.1.9

$P(A)P(B)=P(AB) \Longleftrightarrow |A||B|=4|AB|$

于是取 $A_1=\{\{1,2\}, \{2,3\}\}$ $A_2=\{\{2,4\}\}$

其中 $\{1,2,3\}\in\sigma(A_1)$ 与 $\{2,4\}$ 不独立

2.1.14

$$P(XY \le t) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} 1\{xy \le t\} \, dF(x) dG(y)$$

$$= \int_0^{+\infty} \left(G(\tfrac{t}{x}) - G(0-) \right) dF(x). \quad \text{约定其中 } \tfrac{t}{0} = +\infty$$

$$= \int_0^{+\infty} G(\tfrac{t}{x}) \, dF(x) \quad ,$$